ЗМІСТ

Вступ

Геометричні перетворення – дуже важливий розділ курсу геометрії. У геометрії Евкліда, яку ми вивчаємо в шкільному курсі математики, переважно досліджуються ті властивості геометричних фігур, що не змінюються при їх русі (образно кажучи, кожну геометричну фігуру можна розглядати як "тверду", наприклад, вирізану з картону), – симетрія та поворот, а також ті, де відбувається перетворення подібності – гомотетія. Метод геометричних перетворень є досить продуктивним методом розв'язування геометричних задач. Математична теорія симетрії, симетрія у живій та неживій природі, мистецтві, архітектурі, інженерії отримали спільне підґрунтя у геометричних перетвореннях.

Актуальність теми. В геометрії розглядають деякі функції, які мають різні значення, вони кожній точці ставлять у відповідність точку. Ці функції називаються геометричними перетвореннями. Геометричні перетворення мають велике значення в геометрії. За їх допомогою визначають такі важливі геометричні поняття, як рівність та подібність фігур. В дипломній роботі мова піде про такі перетворення, як рух та подібність, будуть розглянуті їх властивості та вирішені деякі задачі.

Між тим, при викладенні даної теми вчитель зустрічається з певними труднощами у власній педагогічній практиці. Це може бути пояснено навіть не стільки браком часу, що відводиться на розгляд даної теми, скільки обмеженістю відповідної наочності, що і викликає труднощі у сприйнятті матеріалу. Не завжди вчитель має змогу підготувати достатню кількість моделей, що ілюструють відповідний теоретичний або задачний матеріал, тим більше, що як правило такі моделі не відрізняються суттєвою різноманітністю.

Одним із шляхів вирішення цієї проблеми є використання на уроках математики комп'ютера з відповідним програмним забезпеченням. Даний напрямок застосування комп'ютерного моделювання в геометрії широко відомий в нашій країні та за кордоном: достатньо відмітити такі широко відомі програмні продукти як Gran-D, Gran-2, GRAN-3D, DG та ін. Природньо, програмний продукт не може бути статичним, він повинен розвиватися: розробники повинні враховувати появу нових та розвиток вже існуючих технологій (мультимедійних, мережевих тощо), нові педагогічні та методичні ідеї. У відповідності до цього в програму GRAN-2D (версія 2.0, 2007 рік) були додані нові можливості по опрацюванню геометричних фігур на площині, що, на думку її авторів, дозволить значно ефективніше використовувати дану програму в навчальному процесі.

Як вже згадувалось вище, серед значної кількості різноманітних геометричних перетворень, в шкільному курсі математики розглядають лише симетрію (відносно точки та прямої), поворот, паралельне перенесення та гомотетію. Всі ці перетворення з геометричними об’єктами дозволяється робити і в програмі GRAN-2D (крім того, в програмі доступним є такі геометричні перетворення як інверсія та деформація, які не розглядаються в шкільному курсі геометрії).

Метод геометричних перетворень є досить продуктивним методом розв’язування геометричних задач. Математична теорія симетрії, симетрія у живій та неживій природі, мистецтві, архітектурі, інженерії отримали спільне підґрунтя у геометричних перетвореннях.

Початки геометричних знань застосовували вже кілька тисячоліть тому народи Індії, Єгипту, Вавилону, Персії, малоазіатських країн, Греції та ін. Люди тисячоліттями спостерігали за кругом і серпанком місяця, гладінню озера, вертикальністю стрункого дерева, будували своє житло, обтесували каміння, вимірювали і огороджували ділянки землі, виконували земляні роботи, виготовляли глиняний посуд, удосконалювали форми будівельних об'єктів і поряд з цим створювали, формували свої уявлення та поняття про геометричні образи: круглий, коло, квадрат, трикутник, відрізок, пряма, поверхня, куб, циліндр тощо.

Мета дослідження полягає у розробці методики вивчення даного розділу геометрії, який сприяє підвищенню розуміння теорії, математичного і логічного мислення в учнів та експериментальної перевірки її ефективності.

Об'єктом дослідження є форми та методичні прийоми вивчення переміщень в шкільному курсі геометрії.

Предметом дослідження є види переміщень та їх застосування до розв'язування задач.

В процесі дослідження була висунута **гіпотеза**: раціональне використання ІКТ вчителем при вивченні теми "Геометричні перетворення" допомагає зацікавити учнів предметом геометрія, сприяє оптимальному викладу вчителем планіметричного матеріалу при проведенні уроків і як наслідок дозволяє значно покращити результативність навчання, що й підтверджується педагогічним експериментом.

У відповідності з метою і змістом гіпотези були висунуті такі **основні завдання**:

1) опрацювання методичної літератури з теми дослідження;

2) вивчення стану досліджуваної проблеми в теорії та практиці сучасної школи;

3) розробка й експериментальна перевірка змісту занять;

4) розробка методичних рекомендацій по застосуванню ефективних форм і методів вивчення геометричних перетворень у шкільному курсі.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому, що його висновки, основні положення та методичні рекомендації можна використовувати в навчальному процесі як засіб його вдосконалення.

Розділ 1. Науково – теоретичні основи дослідження

1.1. Загальна характеристика матеріалу

Уявіть собі, що ви жбурляєте камінець у гладінь тихого ставка і по воді колами розбігаються брижі, причому центр кожного кола розміщений саме там, де камінець торкнувся води. А тепер підніміть переднє колесо велосипеда і покрутіть його - колесо не зрушить із місця, але його спиці закружляють у шаленому танці.

Станьте перед дзеркалом, тримаючи в правій руці олівець - і дзеркало "перетворить" вас на лівшу, адже ваш двійник триматиме олівець у лівій руці. У шухляді вашого столу лежить косинець: ви трохи висунули шухляду - і косинець перемістився разом із нею. Так чи інакше, в кожному з цих випадків фігури, про які йдеться, зазнають певних змін, перетворень.

Ідея перетворень є однією з провідних ідей сучасної математики. За її допомогою з успіхом доводять скаладні твердження з різних розділів геометрії, які виходять далеко за межі шкільного курсу. За допомогою геометричних перетворень і комп'ютерної графіки кінематографісти бентежать уяву глядача дивовижними образами і незвичайними перевтіленнями на екрані.

Перетворення допомагають художникам правильно будувати композиції картин, а хімікам - досліджувати структуру кристалів.

Теорія геометричних перетворень виникла у зв'язку з пізнанням законів зображення предметів на площині. Спроби правильно відобразити на плоскому рисунку природні форми предметів здійснювалися задовго до виникнення писемності - люди малювали на стінах печер, скелях, посуді різноманітні рослини, тварин тощо.

Тривала практика підказувала митцям, як передати на рисунку зображуваний предмет - так зароджувалося вчення про відповідності й перетворення. Раніше за інші були встановлені й вивчені закони перспективи. Стародавні греки дотримувалися їх уже в V - IV ст. до н.е.

В епоху Відродження з'явилися перші фундаментальні дослідження з теорії перспективи, зокрема роботи видатних художників Леонардо да Вінчі і Альбрехта Дюрера. Розробником математичних основ теорії проективних перетворень(теорії перспективи) став французький інженер і архітектор Жерар Дезарг.

Завдяки теорії перспективи вдалося досягнути достатньої наочності зображень, однак технічний прогрес вимагав точного відтворення об'єктів із дотриманням розмірів. Багато талановитих учених доклали зусиль до створення теорії взаємно однозначних відповідностей на площинні й у просторі. Серед них був, зокрема, французький математик Мішель Шаль, який довів фундаментальну теорему про геометричні перетворення (нині відому як теорема Шаля).

Підсумував наукові пошуки в галузі геометричних перетворень французький геометр Гаспар Монж, створивши новий розділ геометрії - нарисну геометрію.

Пізніше на основі розподілу геометричних перетворень на групи було виділено ще декілька розділів геометрії - афінна, проективна та інші. Здобутки вчених у вивченні перетворень склали математичну основу для розвитку багатьох галузей сучасної техніки.

Ідея перетворень є однією з провідних у сучасній математичній науці і в різних галузях її застосувань. Вона тісно пов'язана з ідеями функції, відображень, які широко використовуються в практиці.

У прийнятій 1968р. програмі шкільного курсу геометричні перетворення вважалися однією з провідних змістових ліній геометрії і апаратів для доведення теорем та розв'язування задач.

Цей погляд на геометричні перетворення було реалізовано у навчальних посібниках за редакцією А. М. Колмогорова (планіметрія) та З. О. Скопця (стереометрія). Слід зазначити, що спроба в цих посібниках трактувати геометричні перетворення як відображення площини(простору) на себе з широким використанням термінології і символіки множин призвела до надмірної заформалізованості навчального матеріалу і як результат - до труднощів у його сприйманні

Застосування переміщень

Кожній інженерній споруді або будівлі передує виготовлення її моделей або планів, які набагато відрізняються від оригіналу розмірами, але відповідають йому формою. При виготовленні моделі, наприклад автонавантажувача чи літака, доводиться змінювати розміри оригіналу, користуючись певним масштабом. Те саме доводиться робити під час складання географічних карт, фотокопій тощо. При зменшенні або збільшенні розмірів предметів нам вдається лише з певною точністю зберегти однаковість їх форми, що пояснюється причинами технічного характеру (матеріал, інструменти тощо). Абстрагуючись, дістаємо геометричні закономірності цих змін. Однак з абстрактно-геометричної точки зору можливість існування предметів, однакових за формою, але різних за величиною, вимагає деяких роз'яснень.[24]

Переміщення в планіметрії.

Переміщення і числова функція - дві моделі загального поняття відображення однієї множини в іншу, тобто загального поняття функції. Ці моделі відрізняються природою елементів області визначення і області значень, способом задання відповідності. Цілком очевидно, що методика вивчення переміщень повинна бути орієнтована на підкреслення ідеї функції, яка відіграє тут об'єднуючу роль, усуваючи традиційну ізольованість геометрії.

Доцільно показати подібність і відмінність понять «переміщення» і «числова функція». Кожне переміщення являє собою деяку функцію, тільки області визначення і значення цієї функції є не числовими, а точковими множинами. Таке зіставлення сприяє з'ясуванню того, що у всякому перетворенні площини область визначення і область значень - площина.

Спостереження показують, що учні не можуть відповісти на питання, чим визначається дане переміщення або коли можна вважати його заданим.

У вченні про функції з'ясовується, що функцію можна вважати заданою, якщо задана область визначення і якимось способом вказано правило, за яким для кожного значення аргументу можна визначити відповідне йому значення функції.

Очевидно, так само чітко необхідно застосувати цей підхід і щодо переміщень. Наприклад, як повинен сприймати учень вислів «на площині задана симетрія відносно осі *x*». Він повинен розуміти, що перетворенню піддається безліч точок площини і що з кожною точкою A площини зіставляється точка A' цієї ж площини за наступним правилом: 1) $AA' \perp x$, де A і A' лежать по різні сторони від прямої x і на рівних відстанях від неї (або точка A' співпадає з точкою A, якщо $A \in x$).

При вивченні числових функцій нас зазвичай цікавить вміння знаходити для кожного значення аргументу (з області визначення) відповідне значення функції. При вивченні ж переміщень нас цікавить не тільки перетворення окремих точок площини, а й певних фігур (відрізка, прямої, трикутника, багатокутника, кола і т. д.). У зв'язку з цим виникають деякі труднощі, які пояснюються, зокрема, невмінням учнів визначити образ окремої точки в даному переміщенні і нерозумінням того, що образом фігури в цьому переміщенні є безліч образів всіх її точок.

З огляду на те, що розглядувані перетворення площини є оборотними відображеннями площини на себе, вони допускають зворотні перетворення, визначаються так само, як зворотна функція (тільки геометрична наочність робить це поняття відразу ж ясним, тим самим сприяючи з'ясуванню і поняття зворотної числової функції).

Якщо перетворення G переводить точку A в точку A', тобто $G(A) = A'$ то зворотне перетворення G^{-1} визначається як таке, що переводить точку A' в A, тобто $G^{-1}(A') = A$.

Це загальне поняття зворотного перетворення формується, зрозуміло, на прикладах конкретних геометричних перетворень (переміщень). Ніяких ускладнень не викликає в учнів розуміння того, що перетворення, зворотне паралельному перенесенню, теж є паралельне перенесення і що вектори цих перенесень протилежні; що перетворення, зворотне повороту з центром O і кутом α, є поворот з тим же центром на кут - α; що перетворення, зворотне симетрії відносно осі x (або центру O), є ця ж симетрія; що перетворення, зворотне гомотетії з центром O і коефіцієнтом k, є гомотетія з тим же центром та коефіцієнтом $1 / k$.

Як видно, симетрія виділяється серед всіх розглянутих перетворень тим, що вона сама собі оборотна (інволютивна).

При вивченні конкретних переміщень необхідно також формувати поняття про комбінацію перетворень як про результат їх послідовного застосування. Це легко здійснити за допомогою спеціально підібраних вправ, в яких до точки або фігури застосовуються послідовно кілька переміщень (які, зокрема, можуть збігатися). Наприклад, потрібно даний трикутник ABC піддати перетворенню симетрії щодо даної осі x, а потім обертанню навколо центра O на кут $90°$. Якщо ж трикутник піддати цим же перетворенням, але тільки у зворотному порядку (тобто спочатку обертанню навколо центра O на $90\ °$, а потім - перетворенню симетрії відносно осі x), то отримаємо різні результати, що підтверджують не комутативність послідовності перетворень.[7]

З огляду на те що особливий інтерес представляє перетворення різних фігур, у навчанні необхідно з'ясувати, які «деформації» фігур пов'язані з тими чи іншими перетвореннями, інакше кажучи, які властивості фігур змінюються при тих чи інших перетвореннях, які залишаються незмінними (інваріантними). З цієї точки зору важливо класифікувати перетворення за інваріантними властивостями фігур.

Фактично переміщення, які так чи інакше розглядаються у шкільному навчанні, відносяться до трьох груп:

а) переміщення, які не деформують фігури, тобто різні види рухів, що переводять будь-яку фігуру в рівну їй (при цьому лише осьова симетрія змінює орієнтацію фігури);

б) переміщення, що змінюють розміри, але зберігають форму фігур, тобто переводять будь-яку фігуру в подібну їй (гомотетія і взагалі перетворення подібності, тобто добуток гомотетії і руху);

в) переміщення, що змінюють і розміри, і форму фігур, що зберігають лише прямолінійність розташування (колінеарність) точок і паралельність прямих; це - афінні перетворення, які, хоча в явному вигляді і не вивчаються в школі, неминуче зустрічаються при зображенні просторових тіл на площині.

Важливо, щоб учні розуміли, який «вплив» на різні фігури має кожне досліджуване переміщення.

Представляє інтерес і класифікація рухів площини за кількістю нерухомих (інваріантних) точок.

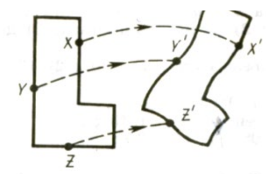
Єдиний вид переміщення без нерухомих точок - паралельне перенесення, з однією нерухомою точкою - поворот (зокрема, і центральна симетрія, тобто поворот на 180 °). Якщо переміщення має дві нерухомі точки, то воно має нерухому пряму, що проходить через ці дві точки, і є осьовою симетрією. Переміщення з трьома нерухомими точками, що не лежать на одній прямій - тотожне перетворення, при якому кожна точка площини нерухома.[12]

1.2. Методика вивчення теми «Геометричні перетворення» в шкільному курсі планіметрії

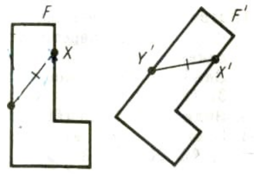
<u>Поняття про перетворення фігур</u>

Якщо кожну точку даної фігури змістити яким-небудь чином, то ми дістанемо нову фігуру. Говорять, що ця фігура утворилася *перетворенням* даної (мал. 1).

Перетворення однієї фігури в іншу називається *рухом,* якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки *X* і У першої фігури у точки *X', Y'* другої фігури так, *що XY = X'У* (мал.2). *Зауваження.* Поняття руху в геометрії пов'язане із звичайним уявленням про переміщення. Але якщо, говорячи про переміщення, ми уявляємо неперервний процес, то в геометрії для нас матиме значення тільки початкове і кінцеве положення фігури.

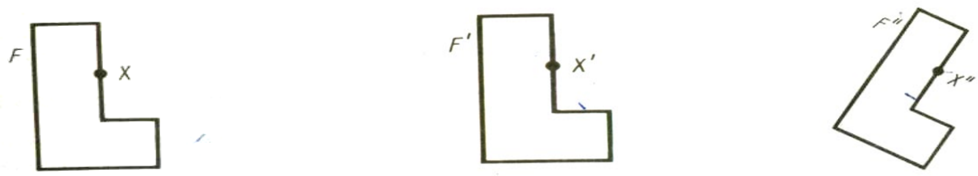


Мал.1



Мал.2

Нехай фігура *F* переводиться рухом у фігуру *F',* а фігура *F'* переводиться рухом у фігуру *F''* (мал. 3).



Мал.3

Перетворення, що переводить фігуру *F* у фігуру *F',* при якому відстані між відповідними точками змінюються в тому самому відношенні $k > 0$, називається *перетворенням подібності,* або *подібністю*. Це означає, що коли довільні точки *X* і *Y* фігури *F* при перетворенні подібності переходять у точки *X'* і *Y'* фігури *F'* то $X'Y = k \cdot XY$, де $k > 0$. Число *k* називається *коефіцієнтом подібності.*

Чи існує зв'язок між перетворенням подібності і переміщенням? Так. Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$, тобто переміщення є окремим випадком перетворення подібності.

Нехай під час першого руху точка *X* фігури *F* переходить у точку *X'* фігури F', а під час другого руху точка *X'* фігури *F'* переходить у точку *X''* фігури *F''.* Тоді перетворення фігури *F* у фігуру *F'',* при якому довільна точка *X* фігури *F* переходить у точку *X''* фігури *F'',* зберігає відстань між точками, а тому є також рухом.

Цю властивість руху виражають словами: *два рухи, виконані послідовно, дають знову рух.*[29]

<u>Властивості руху</u>

Т е о р е м а 1. Точки, що лежать на прямій, під час руху переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.

Це означає, що коли точки A .B, С, які лежать на прямій, переходять у точки A_1.B_1,C_1, то ці точки також лежать на прямій; якщо точка B лежить між точками A і С, то точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1.

Доведення. Нехай точка B прямої AC лежить між точками A і С. Доведемо, що точки A_1 .B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Якщо точки A_1 .B_1, C_1 не лежать на прямій, то вони є вершинами трикутника. Тому $A_1C_1<A_1B_1 + B_1C_1$. За означенням руху звідси випливає, що $AC <AB +BC$. Проте за властивістю вимірювання відрізків $AC = AB+ BC$.

Ми прийшли до суперечності. Отже, точка B_1 лежить на прямій A_1C_1. Перше твердження теореми доведено.

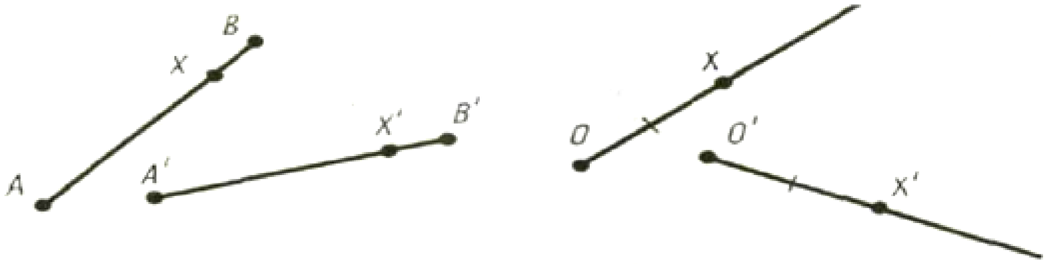
Покажемо тепер, що точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1.

Припустимо, що точка A_1 лежить між точками B_1 і C_1. Тоді $A_1B_1 +A_1 C_1 = B_1C_1$ і тому $AB +AC = BC$. Але це суперечить рівності $AB + BC = AC$. Таким чином, точка A і не може лежати між точками B_1 і C_1.

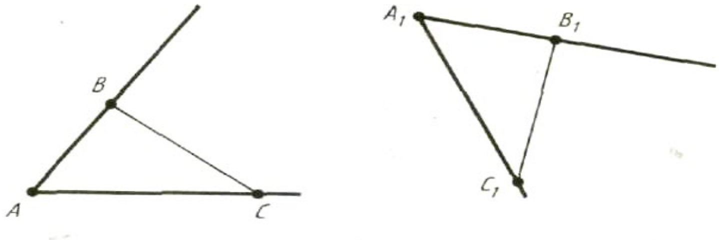
Аналогічно доводимо, що точка C_1 не може лежати між точками A_1 і B_1.

Оскільки з трьох точок A_1, B_1, C_1 одна лежить між двома іншими, то цією точкою може бути тільки B_1. Теорему доведено.

З теореми 1 випливає, що під час руху прямі переходять у прямі, пів-прямі — у пів-прямі, відрізки — у відрізки (мал. 4).



Мал.4



Мал.5

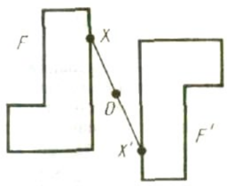
Доведемо, що **під час руху зберігаються кути між пів-прямими.**

Нехай *AB* і *AC* — дві пів-прямі, що виходять з точки *A* і не лежать на одній прямій (мал. 5). Під час руху ці пів-прямі перейдуть у деякі пів-прямі A_1B_1 і A_1C_1. Оскільки рух зберігає відстані, то трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. З рівності трикутників випливає рівність кутів *BAC* і $B_1A_1C_1$, що й треба було довести.[21]

<u>Симетрія відносно точки</u>

Різними методичними підходами можна послуговуватися, вводячи поняття центрально-симетричних і симетричних відносно даної прямої точок. У сучасних підручниках прийнято конструктивні означення. Перетворення симетрії відносно точки можна вводити так.

Мал.6



Мал.7

Нехай *O* — фіксована точка і *X* — довільна точка площини (мал. 6). Відкладемо на продовженні відрізка *OX* за точку *O* відрізок *OX',* що дорівнює *OX.* Точка *X'* називається *симетричною точці X відносно точки O.*

Точка, симетрична точці *O*, є сама точка *O*. Очевидно, точка симетрична точці *X'* є точка *X*.

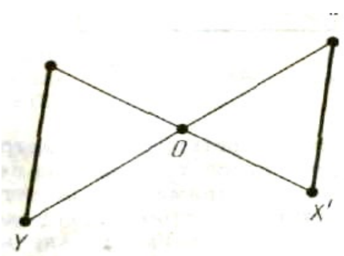
Перетворення фігури *F* у фігуру *F'*, при якому кожна її точка *X* переходить у точку *X'* симетричну відносно даної точки *O*, називається *перетворенням симетрії відносно точки O.* При цьому фігури *F* і *F'* називаються *симетричними відносно точки O* (мал. 7).

Якщо перетворення симетрії відносно точки О переводить фігуру *F* у себе, то вона називається *центральносиметричною,* а точка О називається *центром симетрії.*

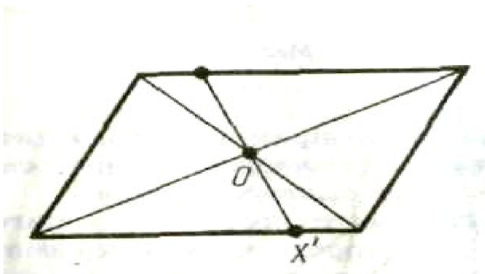
Наприклад, паралелограм є центральносиметричною фігурою. Центром симетрії його є точка перетину діагоналей (мал. 9).

Теорема 2. *Перетворення симетрії відносно точки є рухом.*

Доведення. Нехай *X* і У — дві довільні точки фігури *F* (мал. 8). Перетворення симетрії відносно точки *O* переводить їх у точки *X'* і *У'*.



Мал. 8



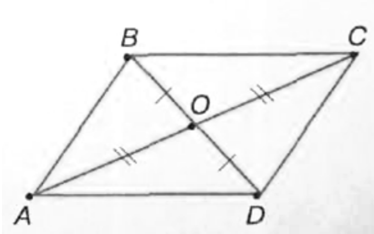
Мал. 9

Розглянемо трикутники *XOY* і *X'OY'.* Ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. У них кути при вершині *O* рівні як вертикальні, а *OX* = *OX', OY* = *OY'* за означенням симетрії відносно точки *O*. З рівності трикутників випливає рівність сторін *XY* = *X'Y'.* А це означає, що симетрія відносно точки *O* є рух. Теорему доведено.

Наслідок. Симетрія відносно точки має всі властивості руху.

Задача. Доведіть, що паралелограм є центральносиметричною фігурою відносно точки перетину його діагоналей. [8] **Розв'язання.** Нехай *O* — точка перетину діагоналей паралелограма *ABCD* (мал. 10). Оскільки діагоналі *AC* і *BD* діляться точкою *O* навпіл, то точки *A* і *C, B* і *D.* симетричні відносно точки *O.*

Тоді сторони *AB* і *CD, BC* і *AD* також симетричні відносно точки *O.* Тому симетрія відносно точки перетину діагоналей паралелограма переводить його у себе.[21]

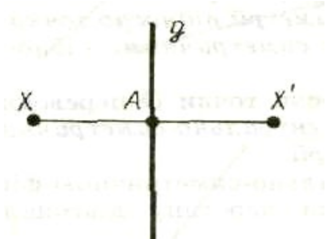


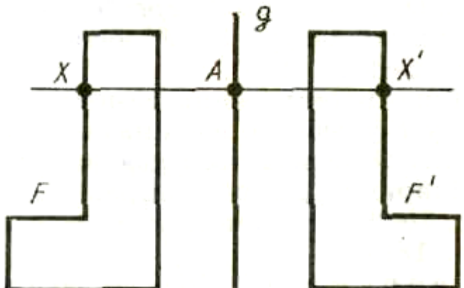
Мал.10

<u>Симетрія відносно прямої</u>

При введенні поняття фігури, симетричної відносно даної точки і даної прямої, важливо, щоб учні навчились будувати точку, відрізок, промінь, пряму, трикутник, коло, кут, паралелограм тощо, симетричні відповідним фігурам відносно точки і відносно прямої. Слід звернути увагу учнів на те, що оскільки положення прямої і відрізка задається двома будь-якими точками (променя - початковою точкою і будь-якою іншою його точкою, кола - центром і будь-якою його точкою, трикутника - положенням його вершин і т.д.), то для побудови симетричної фігури досить побудувати точки, симетричні тим, які визначають положення фігури. За діючими підручниками вводиться таке пояснення.

Нехай *g* — фіксована пряма (мал. 11). Візьмемо довільну точку *X* і опустимо перпендикуляр *AX* на пряму *g.* На продовженні перпендикуляра за точку А відкладемо відрізок *AX',* що дорівнює відрізку *AX.* Точка *X'* називається *симетричною точці X відносно прямої g.* Якщо точка *X* лежить на прямій *g,* то симетрична їй точка є сама точка *X.* Очевидно, що точка, симетрична точці *X',* є точка *X.*

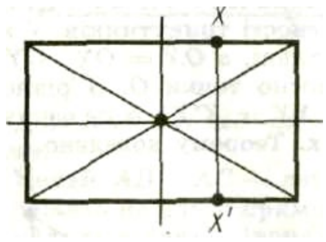




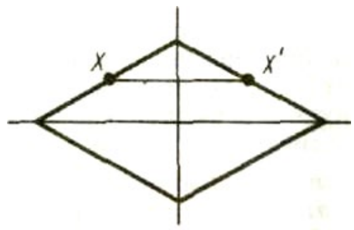
Мал. 11 Мал.12

Перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожна її точка X переходить у точку X', симетричну відносно даної прямої g, називається *перетворенням симетрії відносно прямої g.* При цьому фігури F і F' називаються *симетричними відносно прямої* g (мал. 12).

Якщо перетворення симетрії відносно прямої g переводить фігуру F у себе, то ця фігура називається *симетричною відносно прямої g,* а пряма g



Мал.13

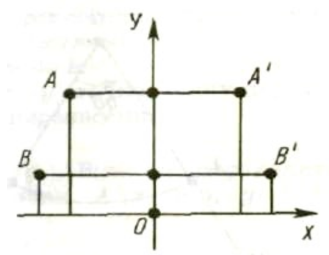


Мал.14

називається *віссю симетрії* фігури.

Наприклад, прямі, що проходять через точку перетину діагоналей прямокутника паралельно його сторонам, є осями симетрії прямокутника (мал. 13). Прямі, на яких лежать діагоналі ромба, є його осями симетрії (мал. 14).

Теорема 3. *Перетворення симетрії відносно прямої є рух.*



Мал.15

Доведення. Приймемо дану пряму за вісь y декартовій системі координат (мал. 15). Нехай довільна точка $A(x; y)$ фігури F переходить у точку $A'(x'; y')$ фігури F'. З означення симетрії відносно прямої випливає, що точки A і A' мають рівні ординати, а абсциси відрізняються тільки знаком: $x' = -x$.

Візьмемо дві довільні точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$. Вони перейдуть у точки $A'(x_1;y_1)$ і $B'(-x_2;y_2)$.

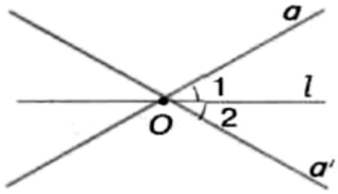
Маємо:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

В різних підручниках доведення трактується по-різному. Потрібно знайти такий спосіб доведення, щоб в результаті учні якнайкраще засвоїли матеріал.

Наслідок. Симетрія відносно прямої має всі властивості переміщення.

Задача. Доведіть, що прямі *a* і *a'* симетричні відносно осі симетрії *l* або перетинаються в точці,яка лежить на осі симетрії, і утворюють з нею рівні кути або паралельні їй. [4]



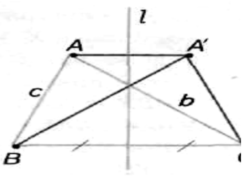
Мал.16

Р о з в 'я з а н н я . Можливі два випадки.

1) Пряма *a* перетинає вісь *l* у деякій точці *O* (мал. 16). Оскільки при осьовій симетрії точка *O* переходить у себе, то вона лежатиме і на симетричній прямій *a'*. Таким чином, симетричні прямі *a* і *a'* перетинаються в точці, яка лежить на осі *l*. Кути 1 і 2, утворені цими прямими з віссю *l,* симетричні відносно *l* і тому рівні.

2) Пряма *a* паралельна осі симетрії *l*. Пряма *a'* симетрична прямій *a,* не може перетинати вісь *l*, оскільки тоді пряма *a* також перетинала б вісь *l* (випадок 1). Отже, *a'* || *l*.

Симетрія застосовується у розв'язуванні задач. Задану в умові задачі фігуру (або її елементи) замінюємо фігурою, симетричною даній відносно деякої точки або прямої. Розглянемо приклад.



Мал.17

Задача. Побудуйте трикутник за двома сторонами *b* і *c* та різницею кутів *B* і *C,* які лежать проти цих сторін.[2]

Аналіз. Припустимо, що ΔABC побудовано (мал. 17), причому $\angle B$ - $\angle C$ = $\alpha(\angle B > \angle C)$. Побудуємо $\Delta A'CB$, симетричний трикутнику *ABC* відносно прямої *l* — серединного перпендикуляра до відрізка *BC.* Розглянемо $\Delta AA'C$, у якого $AC = b$, $A'C = c$, $\angle A'CA = \angle A'CB - \angle ACB = \angle B - \angle C = a$. Цей трикутник можна побудувати.

Побудова. Будуємо: $\Delta AA'C$ за двома сторонами b, с і кутом між ними α; пряму l — серединний перпендикуляр до відрізка AA'; точку B, симетричну точці C відносно прямої l. ΔACB — шуканий.

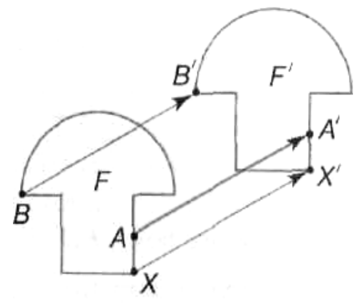
Слово «симетрія» грецького походження і в перекладі означає сумірність, правильне відношення, однаковість у розміщенні частин.

Паралельне перенесення та його властивості

Паралельне перенесення дуже часто використовується в математиці та її застосуваннях в інших науках та практиці. Зокрема, в алгебрі і математичному аналізі паралельне перенесення і симетрії використовуються при побудові графіків складних функцій, у кресленні при побудові різноманітних фігур. Перш ніж вводити означення паралельного перенесення, корисно спочатку продемонструвати цей вид переміщення на рухомій планіметричній моделі, виготовленій з картону і кальки. Це дасть змогу учням помітити суттєву ознаку паралельного перенесення (це перетворення, за якого точки зміщуються в одному й тому самому напрямі на ту саму відстань). Проте учнів треба переконати в необхідності формулювання строгого математичного означення, в якому не вживалось би поняття «в одному й тому самому напрямі», оскільки воно само потребує означення. Означення та властивості доцільно ввести вчителеві і проілюструвати його прикладами.

Подивіться на малюнок 18. Кожну точку фігури F змістили в одному й тому самому напрямі (вздовж паралельних прямих XX', AA', BB'...) на одну й ту саму відстань ($XX' = AA' = BB'$...). Одержали фігуру F'. Говорять, що фігура F перейшла у фігуру F' унаслідок паралельного перенесення на відстань XX'.

Перетворення, при якому всі точки фігури зміщуються в одному й тому самому напрямі і на одну й ту саму відстань, називається ***паралельним перенесенням.***



Мал.18

Паралельне перенесення задається формулами:

$x' = x + a,\ y' = y + b.$

Ці формули виражають координати $x',\ y'$ точки, у яку переходить точка (x, y) при паралельному перенесенні.

***Теорема** 4(властивість паралельного перенесення). Паралельне перенесення є переміщенням.*

Доведення.

Справді, дві довільні точки $A(x_1\ \ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ переходять при паралельному перенесенні у точки $A'(x_1+a;\ y_1 + b)$, $B'(x_2+a;\ y_2 + b)$

Тому

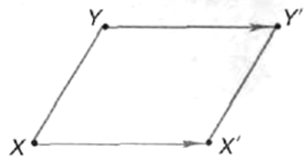
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Звідси :

$AB=A'B'$. Таким чином, паралельне перенесення зберігає відстані, тобто є рухом, що й треба було довести.

Другий спосіб доведення.

Доведення. Нехай X і Y — дві довільні точки фігури (мал. 19). Паралельне перенесення переводить їх у точки X' і Y' фігури F'.



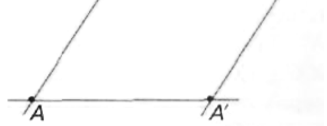
Мал. 19

Доведемо, що $XY = X'Y'$. За означенням паралельного перенесення, $XX' = YY'$ і $XX' \parallel YY'$. Тоді чотирикутник $XYY'X'$ — паралелограм. У паралелограма протилежні сторони рівні, отже, $XY — X'Y'$. (Випадок, коли рівні відрізки XX' і YY' лежать на одній прямій, розгляньте самостійно.)

***Наслідок 1.* Паралельне перенесення має всі властивості переміщення.**

***Наслідок 2.* При паралельному перенесенні пряма переходить** у **паралельну їй пряму або у себе.**

Справді, паралельність прямих випливає з паралельності відрізків XY ***і*** $X'Y'$ (мал. 20). Якщо ж



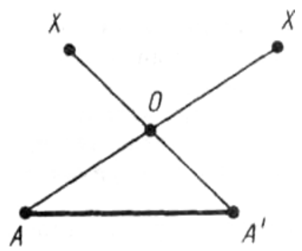
Мал.20

пряма паралельна напряму перенесення, то кожна точка прямої переходить у точку цієї самої прямої, а сама пряма переходить у себе.

Щоб побудувати точку X' в яку переходить точка X при паралельному перенесенні, що переводить точку A в точку A', скористайтеся наслідком 2: проведіть паралельні прямі так, як показано на малюнку 20.

Теорема 4. *Які б не були дві точки A і A', існує одне і до того єдине паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку A'.*

Доведення. Спочатку доведемо існування паралельного перенесення, яке переводить точку A у A'. Введемо декартові координати на площині. Нехай a_1 і a_2 — координати точки A і a'_1, a'_2 — координати точки A'. Паралельне перенесення, задане формулами $x' = x + a'_1 - a_1$, $y' = y + a'_2 - a_2$, переводить точку A у точку A'. Справді, якщо $x = a_1$ і $y = a_2$, дістанемо $x' = a'_1$, $y' = a'_2$.

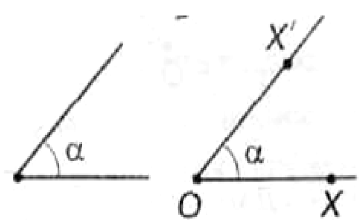


Мал. 21

Доведемо єдиність паралельного перенесення, яке переводить точку A у точку A'. Нехай X - довільна точка фігури і X' - точка, в яку вона переходить при паралельному перенесенні (мал. 21). Як відомо, відрізки XA' і AX' мають спільну середину O. Задання точки X однозначно визначає точку O — середину відрізка $A'X$. А точки A і О однозначно визначають точку X', оскільки точка O є серединою відрізка AX'. Однозначність у визначенні точки X' і означає єдиність паралельного перенесення. Теорему доведено повністю.[30]

<u>Поворот</u>

При введенні поняття повороту варто підкреслити, що будь-який поворот може бути заданий: 1) центром O, кутом повороту α ($0° \leq \alpha \leq 180°$), напрямом повороту або 2) центром повороту і двома відповідними точками X і X'. У цьому разі ефективно скористатися таким



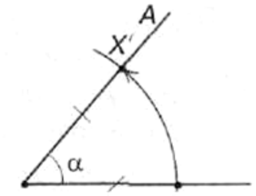
Мал.22

доведенням.

Нехай дано кут α і точку O (мал. 22). Візьмемо довільну, відмінну від O, точку X. Точці X поставимо у відповідність таку точку X', що:

1) відстані OX і OX' рівні;

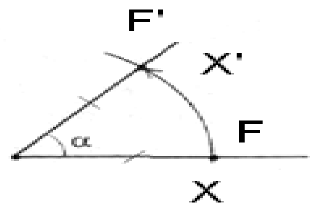
2) кут між променями OX і OX' дорівнює α.



Мал. 23

Такий перехід точки X у точку X' називається ***поворотом*** *навколо точки O* на кут a проти годинникової стрілки. Сама точка O переходить після повороту в себе. Точка O називається *центром повороту,* кут між променями OX і OX' - *кутом повороту* проти годинникової стрілки (мал. 23).

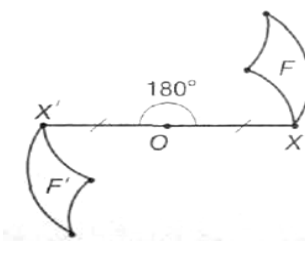
Якщо центр *O* і кут а повороту задано, то точку *X'* у яку переходить точка *X* унаслідок повороту проти годинникової стрілки, будуємо так (мал. 24): проводимо промінь *OX*; від променя *OX* відкладаємо кут *XOA,* що дорівнює кутові α; на промені *OA* знаходимо точку *X',* яка лежить на відстані *OX* від центра *O*.



Мал.24

Якщо на площині дано деяку фігуру $F,$ то для кожної її точки X можна знайти точку $X',$ у яку перейде X у наслідок повороту навколо точки O на кут α (мал. 25). У результаті отримаємо фігуру $F',$ в яку перейшла фігура F при заданому повороті. При цьому точка O переходить у себе.

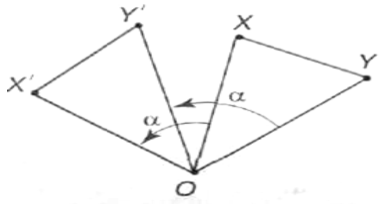
Поворот на кут 180° навколо точки O є симетрією відносно точки O (мал. 25).



Мал. 25

Теорема 5. *(властивість повороту). Поворот є переміщенням.*

Доведення. Нехай поворот навколо точки O на кут α точки X, Y фігури F переводить у точки X', Y' фігури F' (мал. 26). Доведемо, що $XY = X'Y$. Розглянемо загальний



Мал.26

випадок, коли точки *O, X, Y* не лежать на одній прямій. $\Delta OXY = \Delta OX'Y$ за двома сторонами і кутом між ними. У них $OX = OX'$, $OY = OY$ за означенням повороту і ∠XOY= ∠X'OY (кожний з цих кутів дорівнює різниці кута a і кута *YOX*). З рівності трикутників випливає $XY = X'Y'$ (випадок, коли точки *O, X*, *Y* лежать на одній прямій розгляньте самостійно).

Наслідок. Поворот має всі властивості переміщення.[21]

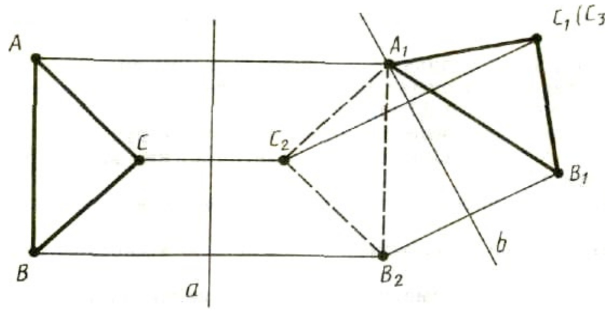
<u>Рівність фігур</u>

Із введенням означення рівності фігур важливо зазначити, що попередні означення рівності відрізків, кутів, трикутників виражають одне й те саме. На прикладі означень рівності трикутників і фактично доводиться рівносильність раніше введеного і нового означення через рух.

Дві фігури називаються *рівними,* якщо вони переводяться рухом одна в одну.

Для позначення рівності фігур користуються звичайним знаком рівності. Запис $F = F'$ означає, що фігура *F* дорівнює фігурі *F'.* У записі рівності трикутників: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ передбачається, що вершини, які суміщаються під час руху, стоять на відповідних місцях. За такої умови ***рівність трикутників, що визначається через суміщення їх рухом, і рівність, як ми її розуміли досі, виражають одне і те саме.***

Це означає, що коли у двох трикутниках відповідні сторони рівні і відповідні кути рівні, то ці трикутники суміщаються рухом. І навпаки, якщо два трикутники суміщаються рухом, то у них відповідні сторони рівні і



Мал.27

відповідні кути рівні. Доведемо обидва ці твердження.

Нехай трикутник ABC суміщається рухом з трикутником $A_1B_1C_1$, причому вершина A переходить у вершину A_1 , B -- у B_1, C -- у C_1. Оскільки під час руху зберігаються відстані і кути, то для наших трикутників $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Нехай тепер у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ маємо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, АС = A_1C_1, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Доведемо, що вони суміщаються рухом, причому вершина A переходить у вершину A_1 , B -- у B_1, C -- у C_1. Застосуємо до трикутника ABC перетворення симетрії відносно прямої a, яка перпендикулярна до відрізка AA_1 і проходить через його середину (мал. 27). Дістанемо трикутник $A_1B_2C_2$. Якщо точки B_1 і B_2 різні, то застосуємо до нього симетрію відносно прямої b, яка проходить через точку A_1 і перпендикулярна до прямої B_1B_2. Дістанемо трикутник $A_1B_1C_3$.

Якщо точки C_1 і C_3 лежать з одного боку від прямої A_1B_1, то вони збігаються. Справді, оскільки кути $B_1A_1C_1$ і $B_1A_1C_3$ рівні, то промені A_1C_1 і A_1C_3 збігаються, а через те, що відрізки A_1C_1 і A_1C_3 рівні, то збігаються точки C_1 і C_3. Таким чином, трикутник ABC рухом переведено у трикутник $A_1B_1C_1$.

Якщо точки C_1 і C_3 лежать з різних боків від прямої A_1B_1, то для доведення треба ще застосувати симетрію відносно прямої A_1B_1.[21]

<u>Перетворення подібності та його властивості</u>

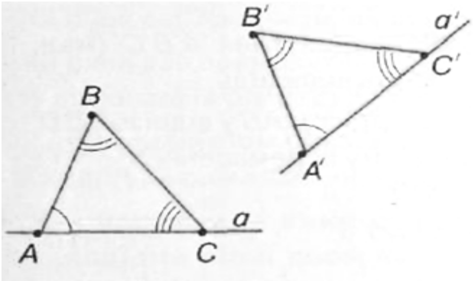
Дві *фігури* називаються *подібними,* якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

Якщо фігура F подібна фігурі F', то записують $F \sim F'$, або (коли треба вказати коефіцієнт подібності) $F \sim F'$.

Подібні фігури добре відомі з практики. Наприклад, подібними є фотознімки, надруковані з одного негатива при різних збільшеннях, дві географічні карти різного масштабу, зображення на кіноплівці й зображення на кіноекрані тощо. Прикладами подібних геометричних фігур можуть бути будь-які два квадрати, два кола.

Властивості перетворення подібності подано на малюнку:

Властивості:



1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь.

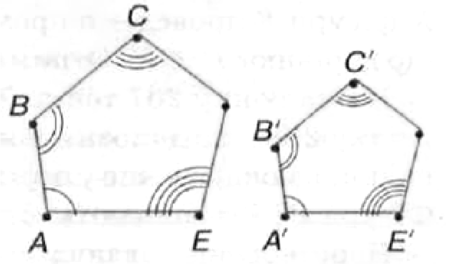
2. Відрізок переходить у відрізок (AB у $A'B'$, BC у $B'C'$, AC у $A'C'$).

3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$).

Мал. 28

З властивостей перетворення подібності випливає, що у подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки - пропорційні. Зокрема, у подібних многокутників *ABC...E* і *A'B'C...E '*(мал. 29):

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \ldots,$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots = \frac{EA}{E'A'}.$$



Мал.29

Теорема 2. *(про відношення площ подібних многокутників). Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.*

Дано: *F* і *F'*— подібні многокутники з коефіцієнтом подібності *к* (мал. 29).

Довести: $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Доведення. Розіб'ємо многокутник *F* на трикутники $\Delta_1, \Delta_2 \ldots, \Delta_n$.

Оскільки многокутники *F* і *F'* подібні, то існує перетворення подібності, яке переводить многокутник *F* у многокутник *F'* а трикутники розбиття многокутника *F* у трикутники $\Delta'_1, \Delta'_2 \ldots, \Delta'_n$ відповідного розбиття многокутника *F'*. Площа многокутника *F'* дорівнює сумі площ трикутників

$\Delta_1, \Delta_2 \ldots, \Delta_n$ а площа многокутника F' дорівнює сумі площ трикутників $\Delta'_1, \Delta'_2 \ldots, \Delta'_n$. Якщо коефіцієнт подібності *k,* то сторони і висоти трикутників многокутника F' у А разів більші за відповідні сторони і висоти трикутників многокутника *F.* Звідси випливає: $S_{\Delta'_1} = k^2 S_{\Delta_1}$, $S_{\Delta'_2} = k^2 S_{\Delta_2}$,…, $S_{\Delta'_n} = k^2 S_{\Delta_n}$.

Додавши ці рівності почленно, дістанемо:

$$S_{F'} = S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \ldots + S_{\Delta'_n} = k^2 (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \ldots + S_{\Delta_n}) = k^2 S_F .$$

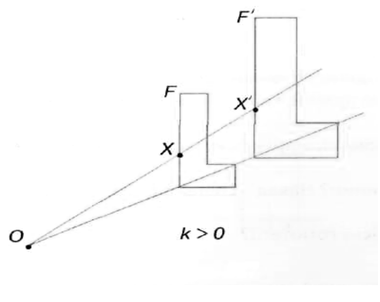
Звідки $\dfrac{S_{F'}}{S_F} = k^2.$

Цей факт справджується для будь-яких фігур.

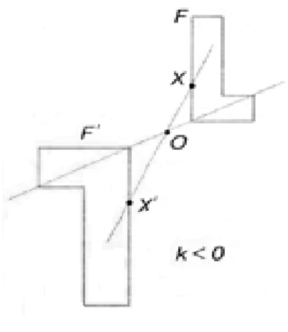
Коефіцієнт подібності *k* дорівнює відношенню довжин відповідних лінійних елементів фігур *F* і *F'.* Тому **площі подібних фігур відносяться, як квадрати їх відповідних лінійних** елементів.[17]

<u>Гомотетія</u>

Розглянемо особливий спосіб побудови подібних фігур (мал. 30, 31). Нехай *F* - дана фігура. Позначимо довільну точку *O*. Через кожну точку *X* фігури *F* проведемо промінь *OX* і відкладемо на ньому



Мал. 31



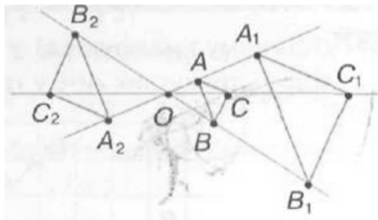
Мал. 30

відрізок *OX',* що дорівнює *k* • *OX.*

Отримаємо шукану фігуру *F'.*

На малюнку 30 точки *X* і *X'* лежать на одному промені ОХ, а на малюнку 31 - на доповняльних променях *OX* і *OX'.* Щоб розрізняти ці випадки, вважають, що у першому випадку $k > 0$, а у другому випадку $k < 0$. Фігури F і F' називають *гомотетичними*.

Перетворення називається *гомотетією*, якщо воно переводить кожну точку X фігури F у точку X' фігури F' так, що $OX' = |k| OX$, де k - будь- яке число, відмінне від нуля, O - фіксована точка, $X' \in OX$.

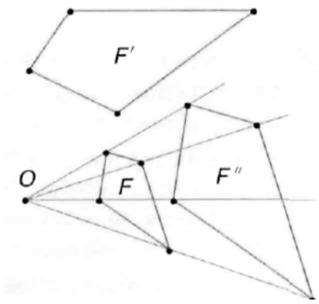


Мал. 32

Число k називається коефіцієнтом гомотетії, точка O - центром гомотетії.

На малюнку 32 трикутник ABC при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k = 3$ переходить у трикутник $A_1B_1C_1$, а при гомотетії з коефіцієнтом $k = -2$ і тим самим центром - у трикутник $A_2B_2C_2$.

Гомотетія має всі властивості перетворення подібності. Крім того, вона має ще особливу властивість: **гомотетія переводить пряму у паралельну їй пряму або у саму себе, якщо дана пряма проходить через центр гомотетії**. Можна також сказати, що гомотетія є перетворенням подібності з коефіцієнтом $|k|$.



Мал. 33

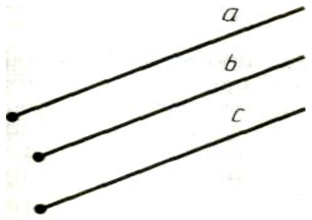
Розглянемо зв'язок між подібністю і гомотетією. **Якщо дві фігури подібні, то існує третя фігура, яка гомотетична першій і дорівнює другій.**

Доведемо це. Нехай $F \sim F'$ (Мал. 33). Отже, при цьому перетворенні відстані між точками фігури F зміняться у фігурі F' в k разів. Розглянемо гомотетію з довільним центром O і коефіцієнтом, який дорівнює коефіцієнту подібності k. Ця гомотетія фігуру F переведе у фігуру F'', причому відстані між її точками також зміняться в к разів. Отже, відстані між відповідними точками у фігурах F'' і F' рівні, тобто $F' = F''$. Отримали, що побудована фігура F'' гомотетична фігурі F і дорівнює фігурі F'. Звідси випливає, що будь-яку фігуру можна перевести у подібну їй фігуру за допомогою послідовного виконання гомотетії і переміщення.[21]

<u>Співнапрямленість прямих</u>

Дві півпрямі називаються *однаково напрямленими* або *спів напрямленими,* якщо вони суміщаються паралельним перенесенням. Тобто існує паралельне перенесення, яке переводить одну півпряму в іншу.

Якщо півпрямі a і b однаково напрямлені й півпрямі b і c однаково напрямлені, то півпрямі a і c також однаково напрямлені (мал. 34).



Мал. 34 Мал. 35

Справді, нехай паралельне перенесення, яке задано формулами

$x' = x + m,\ y' = y + n,$ (*)

переводить півпряму a у півпряму $b,$ а паралельне перенесення, задане формулами

$x'' = x' + m_1,\quad y'' = y' + n_1,$ (**)

переводить півпряму b у півпряму с.

Розглянемо паралельне перенесення, задане формулами

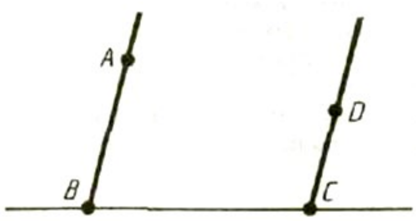
$x'' = x + m + m_1,\ y'' = y + n + n_1.$ (***)

Стверджуємо, що це паралельне перенесення переводить півпряму а у півпряму c. Доведемо це.

Нехай *(x; y)* — довільна точка півпрямої *a.* Відповідно до формул (*) точка *(x+m; y + n)* належить півпрямій *b.* Оскільки точка *(x+m; y + n)* належить півпрямій *b,* то за формулами (**) точка $(x+m+m_1;\ y+n+n_1)$ належить півпрямій с. Таким чином, паралельне перенесення, задане формулами(***), переводить півпряму a у півпряму $c.$ А це означає, що півпрямі a і c однаково напрямлені, що й треба було довести. Дві півпрямі називаються *протилежно напрямленими,* якщо кожна з них однаково напрямлена з півпрямою, доповняльною до другої (мал. 35).

Задача . Прямі *AB і CD* — паралельні. Точки *A* і *D* лежать з одного боку від січної *BC*. Доведіть, що промені *BA* і *CD* однаково напрямлені.

Розв'язання. Застосуємо до променя *CD* паралельне перенесення, при якому точка *C* переходить у точку *B* (мал. 36). При цьому пряма *CD* суміститься з прямою *BA*. Точка *D,* зміщаючись вздовж прямої, паралельної *CB,* залишається у тій самій півплощині відносно прямої *BC*. Тому промінь *CD* суміститься з променем *BA,* а отже, ці промені однаково напрямлені.[21]



Мал. 36

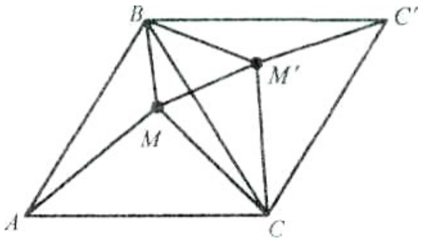
Розв'язування вправ на застосування геометричних перетворень

Задача 1

Деяка точка, що знаходиться всередині рівностороннього трикутника, віддалена від його вершин відповідно на 3 см, 4 см і 5 см. Знайти довжину сторін трикутника. (мал.37)[2]

Розв'язання

Нехай ΔABC — рівносторонній, *M* — деяка точка така, що *MB* = 3 см, *MC*= 4 см, *MA* = 5 см.



Мал.37

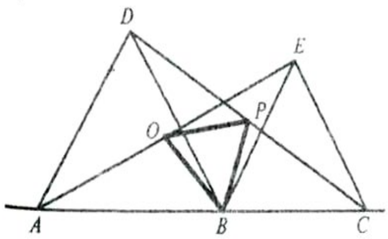
Виконаємо поворот з центром у точці *B* на кут 60° проти годинникової стрілки ΔABC. Тоді точка A відобразиться у точку C, точка *C* — у точку *C'*, точка *M* — у точку *M'*. $\angle C'BC = 60°$, $BM' = BM = 3$ см, $\angle M'BM = 60°$. Оскільки $\Delta ABC = \Delta CBC'$, то $M'C = 5$ см, $M'C' = 4$ см.

Сполучимо точки *M* і *M*'. $\Delta MBM'$ — рівносторонній і $MM' = 3$ см. Отже, $\Delta MM'C$ — прямокутний, оскільки його сторони дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см, причому $\angle M'MC = 90°$. Тоді $\angle BMC = 60° + 90° = 150°$. З ΔBMC за теоремою косинусів знаходимо:

$BC^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos 150° = 25 + 12\sqrt{3}$ (см). Отже, довжина кожної сторони даного рівностороннього трикутника дорівнює $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$см.

Задача 2

На відрізку AC взято точку B. По один бік від AC побудовано рівносторонні трикутники ABD та BCE. Точки O і P — середини відрізків AE і DC відповідно. Знайти кути Δ BOP.[5]



Мал. 38

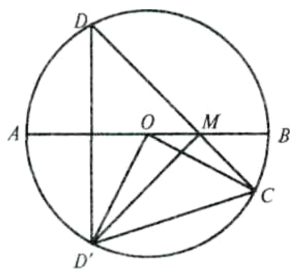
Розв'язання

Нехай AC- даний відрізок, $AD = DB = AB$, $BE = EC =$ ВС, BP— медіана ΔDCB, BO- медіана ΔAEB. Виконаємо поворот ΔAEB з центром у точці B на кут 60° проти годинникової стрілки і одержимо ΔDCB. Оскільки $BA=BD$ $\angle ABD = 60°$, то точка A відобразиться у точку D алогічно, оскільки $BC = BE$ і $\angle EBC = 60°$, образом точки E буде точка C, а точки O — точка P. Отже, медіана BO ΔAEB відобразиться у медіану BP ΔDCB , $BO=BP$ і $\angle OBP = 60°$ як кут повороту.

Тому $\angle POB = \angle OBP = 60°$ і ΔBOP – рівносторонній.

Задача 3

Хорда перетинає діаметр кола довжиною $2R$ під кутом 45°. Знайти суму квадратів довжин утворених відрізків хорди.[4]



Мал.39

Розв'язання

Нехай AB— діаметр кола з центром у точці O, $AB = 2R$, CD - хорда, $\angle AMD = 45''$.

Виконаємо поворот відрізка MD на кут 90° відносно точки M проти годинникової стрілки.

Тоді точка D відобразиться у точку D', $MD = MD'$, а $\angle D'DM = 45°$, оскільки $\Delta DMD'$ — рівнобедрений, $\angle DMD' = 90°$.

$\angle D'MC = 90°$, тоді $MD'^2 + MC^2 = D'C^2$.

Але $MD = MD'$, тому $D'C^2 = MD^2 + MC^2$.

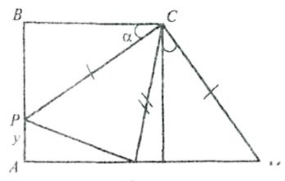
Сполучимо точку O з точками Ci D'. Трикутник OCD' — рівнобедрений, оскільки $OC = OD' = R$, $\angle COD' = 90°$ як центральний кут, що відповідає вписаному куту $\angle D'DC = 45°$.

Тому $D'C^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ і $MD^2 + MC^2 = 2R^2$.

Задача 4

Довжина сторони квадрата $ABCD$ дорівнює 1. На сторонах AB і AD вибрано точки P і Q так, що периметр ΔAPQ дорівнює 2. Знайти $\angle PCQ$.[8]

Розв'язання



Мал. 40

За умовою $AB = BC = CD = AD = 1$,

$AP + PQ + AQ = 2$.

Позначимо $AQ = x$, $AP = y$.

Тоді $PQ = 2 - x - y$. Нехай $\angle SCV = \alpha$, $\angle QC0 = \beta$. Виконаємо поворот ΔBCP відносно C на кут 90° проти годинникової стрілки, Тоді точка B відобразиться у точку D, точка P — у точку M, $BP = DM = 1 - y$.

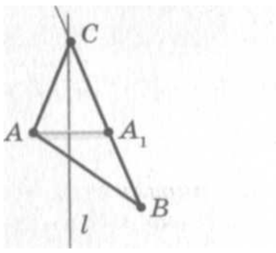
$\angle QDM = 90° + 90° = 180°$, точки Q, D і M лежать на одній прямій, $\angle DCM = a$, QM = QD + $DM = 1 - x + 1 - y = 2 - y - x$, ΔCQM = ΔCPQ (за трьома сторонами), $\angle$PCQ = $\alpha + \beta$, $\angle BCD = 90° = \alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 2(\alpha + \beta)$.

Отже, $\alpha + \beta = 45°$ і $\angle$ PCQ = 45°.

Осьова симетрія

Приклад 1. Дано нерівнобедрений трикутник ABC. Провели пряму l, яка містить бісектрису кута C. Потім увесь рисунок витерли, залишивши лише точки A і B та пряму l. Відновіть трикутник ABC.[8]

Розв'язання. Оскільки пряма l є віссю симетрії кута ACB, то точка A_1, де $A_1 = S_l$ (A), належить променю CB. Тоді перетином прямих l і BA_1 є вершина C шуканого трикутника ABC (Мал. 42).



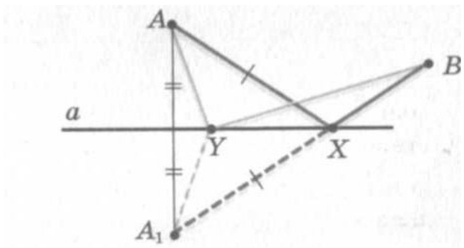
Мал. 41

Приклад 2. Точки А і В лежать в одній півплощині відносно прямої *a*. Знайдіть на прямій *a* таку точку *X,* щоб сума АХ + *XB* була найменшою.[2]

Розв'язання. Нехай S_a (А) = A_1. Покажемо, що шукана точка *X* — це точка перетину прямих A_1B і *a*.

Нехай Y — довільна точка прямої *a*, яка відмінна від точки *X* (Мал. 43), відрізки A_1X і A_xY — образи відрізків АХ і AY при симетрії відносно прямої *a* відповідно. Тоді $AX = A_1X$, $AY = A_1Y$.

Маємо $AX + BX = A_1X + BX = A_1B < A_1Y + YB = AY + YB$.

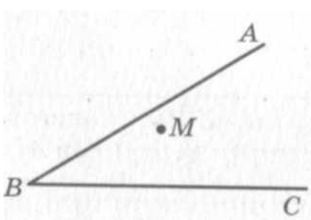


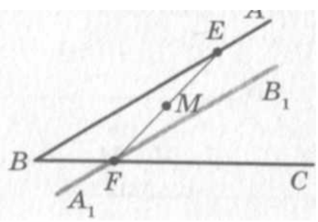
Мал. 42

Центральна симетрія

Приклад 3. Точка *M* належить куту ABC (Мал. 43). На сторонах *BA* і *BC* кута знайдіть такі точки *E* і *F,* щоб точка *M* була серединою відрізка *EP*.[5]

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої *AB* при центральній симетрії відносно точки *M* (Мал. 44). Позначимо *F* — точку перетину прямих A_1B_1 і *BC*.



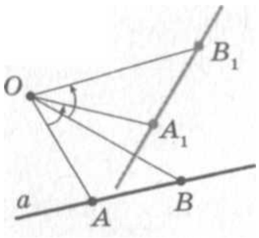


Мал. 43 Мал. 44

Знайдемо прообраз точки F. Очевидно, що він лежить на прямій *AB*. Тому достатньо знайти точку перетину прямих *FM* і *AB*. Позначимо цю точку *E*. Тоді зрозуміло, що *E* і *F* — шукані точки.

Поворот

Приклад 4. На малюнку 45 зображено пряму *a* і точку O. Побудуйте образ прямої *a* при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 45°.[8]



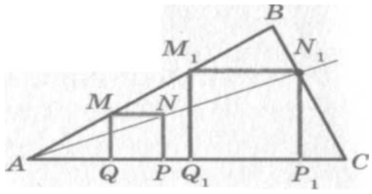
Мал. 45

Розв'язання. Оскільки поворот – це рух, то образом прямої *a* буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь – які її точки. Оберемо на прямій *a* довільні точки A і B. Нехай точки A_1 і B_1 - їх образи при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 45°. Тоді пряма A_1B_1 - образ прямої *a*.

Гомотетія. Подібність фігур

Приклад 5. У гострокутний трикутник *ABC* впишіть квадрат так, щоб дві його вершини лежали відповідно на сторонах *AB* і *BC,* а дві інші — на стороні *AC.*[4]

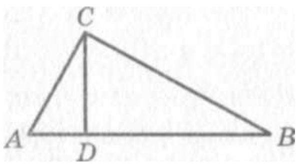
Розв'язання. Із довільної точки *M* сторони *AB* опустимо перпендикуляр *MQ* на сторону *AC* (Мал. 46). Побудуємо квадрат *MQPN* так, щоб точка *P* лежала на промені *QC.* Нехай промінь *AN* перетинає сторону *BC* у точці N_1 Розглянемо гомотетію з центром *A* і коефіцієнтом $k = \frac{AN_1}{AN}$.



Мал. 46

Тоді точка N_1 – образ точки N при цій гомотетії. Образом відрізка MN буде відрізок M_1N_1, де точка M_1 належить променю АВ, причому $M_1N_1 \parallel MN$. Аналогічно відрізок N_1P_1 такий, що точка P_1 належить променю AC і $N_1P_1 \parallel NP$, буде образом відрізка NP. Отже, відрізки M_1N_1 і N_1P_1 — сусідні сторони шуканого квадрата. Для завершення побудови залишилося опустити перпендикуляр M_1Q_1 на сторону AC.

Приклад 6. Нехай CD — висота прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть радіус r вписаного кола трикутника ABC, якщо радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD, відповідно дорівнюють r_1 і r_2.[5]



Мал. 47

Роз в'язання. Оскільки кут A — спільний для прямокутних трикутників ACD і ABC, то ці трикутники подібні. Нехай коефіцієнт подібності дорівнює k_1. Очевидно, що $k_1 = \frac{r_1}{r}$.

Аналогічно $\Delta\, BCD \sim \Delta\, ABC$ з коефіцієнтом $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

Позначимо площі трикутників ACD, BCD і ABC відповідно S_1, S_2 $і$ S. Маємо:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2};$$

$$\frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Звідси $\frac{r_1^2+r_2^2}{r^2} = \frac{S_1+S_2}{S} = 1$.

Отримуємо, що $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, тобто $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

1.3. Розвиток просторового мислення при вивченні теми «Переміщення»

Термін «просторове мислення» не є загальноприйнятим. Правомірність його вживання використовується нерідко на тій підставі, що всяке мислення є узагальнене і опосередковане віддзеркалення дійсності в її зв'язках і відношеннях, у тому числі і просторових.

Таким чином, просторове мислення є складним психічним утворенням, яке має самостійну лінію розвитку на всіх етапах онтогенезису. Зароджуючись в надрах практичної діяльності (при орієнтації на місцевості, при виконанні вимірних робіт), воно поступово перетворювалось в самостійний вид теоретичної діяльності в процесі історичного розвитку людства.

Геометрії відведена провідна роль у формуванні мислення, розвитку уяви, просторових уявлень, практичних навичок і умінь, оскільки вона є одним з вагомих компонентів загальнолюдської культури взагалі.

Багато конкретно – методичних питань, пов’язаних з розробкою методів формування і розвитку просторових уявлень у процесі вивчення переміщень розглянуті в роботах Н. М. Бескіна, В.Г. Болтянського, Г. Г. Маслової, В. М. Монахова, А. І. Фетисова та багато інших методистів. У роботах О. М. Астряба, Г. Д. Глейзера, В. І. Зикової, А. М. Колмогорова, Ф. М. Шим’якіна, І. С. Якиманської та інших розглядаються різні аспекти формування просторового мислення учнів середнього шкільного віку. Зокрема, питанням оперування уявленнями плоских і об’ємних геометричних фігур, формування і розвитку просторових уявлень на основі міжпредметних зв’язків, ролі задач у курсі планіметрії, як засобу розвитку просторового мислення присвячені дослідження О. Д. Ботвіннікова, В. М. Нікітіної, С. В. Петрова та ін.

Переміщення вивчають в 9 класі з метою навчити використовувати їх властивості для розв’язування планіметричних задач та задач на застосування геометричних перетворень, а також – розвиток просторової уяви, просторового мислення.

Під час мисленнєвої діяльності образи перетворюються так, що в результаті маніпулювання ними ми можемо знайти розв'язання певної поставленої перед нами задачі. Слід відмітити, що понятійне та образне мислення знаходяться у тісному взаємозв'язку, вони доповнюють одне одного. Понятійне мислення дає більш точне та узагальнене відображення дійсності, але це відображення є абстрактним. Образне мислення дозволяє отримати конкретне, суб'єктивне відображення оточуючої нас дійсності.

Говорячи про переміщення, бажано хоч коротко зупинитись на питаннях стандартизації виробництв, зауважити, що цеглу, листи жерсті, шиферу, скла, фанери, відповідні деталі до машин випускають стандартних розмірів. Принаймні на позакласних заняттях слід розглянути цікаві задачі про заповнення площини рівними фігурами, пов'язавши з цим роботу паркетника, облицювальника та ін. Це сприяє розвитку дитячого образного мислення. Хоч на кількох конкретних прикладах бажано показати, як можна використовувати відомі учням властивості переміщень при розв'язуванні задач.[12]

1.4. Характеристика навчально-методичних посібників та статей, присв'ячених даній темі

Дуже багато є навчально-методичних посібників та статей присв'ячених темі «Геометричні перетворення», які збагачують знання вчителів, студентів, методистів. Цибульська Л.В., Ващишина Т.П. створили навчально-методичний посібник «Педагогічна майстерня вчителя математики». Посібник містить розробки вчителів математики, присвячені розв'язанню актуальних проблем, з якими у своїй роботі зустрічається кожний учитель. Він значно полегшить роботу з учнями, зробить її більш ефективною. Аналіз наведеного досвіду дозволить раціонально використовувати новітні педагогічні технології, адаптуючи їх до умов конкретної школи і системи виховання.

У цій книзі подано матеріали, які учитель може використати при проведенні гурткової роботи, факультативів. Різні види позакласної роботи сприяють вихованню в учнів кмітливості, винахідливості, готують їх до участі в математичних олімпіадах, які виявляють найобдарованіших юнаків і дівчат.

Ця книга є спробою узагальнити досвід роботи вчителів математики, проведення математичного тижня, вечорів та інших заходів у школі. Методичний посібник призначений для вчителів математики і має на меті допомогти їм опанувати сучасні компетентнісно-діяльнісні технології навчання і виховання учнів.

Методичний посібник «Стереометрія в старшій школі» Бродський Я.С., Гречук В.Ю., Павлов О.Л., Сліпенко А.К., адресовано вчителям математики, які працюють у профільних класах природничо-математичного напрямку. Пропонований посібник присвячено проектуванню вивчення геометрії в 9-11 класах. Він є засобом управління навчальним процесом з використанням інших елементів комплекту зі стереометрії, який складається з підручника, дидактичних матеріалів та збірника тестів.

У цьому виданні для кожної теми визначенні основна мета і базовий рівень навчання, наведенні загальні методичні рекомендації, в яких пояснюються особливості викладення матеріалу, розставляються наголоси, визначаються пріоритетні питання, яким слід приділити більше уваги на уроках, наводяться рекомендації щодо планування вивчення навчального матеріалу, методичні розробки тем, підтем, поради і матеріали для контролю та ін.

Значне місце займають методичні рекомендації щодо використання контрольних питань і задач з підручника, а також дидактичних матеріалів. Для базових задач наведено повні розв’язання, а для решти – стислі або вказівки щодо їхнього розв’язування.

М.О.Філімонова у методичному посібнику «Формування вмінь математичного моделювання в учнів основної школи і процесі навчання геометрії» зазначає, що математичне моделювання, виступаючи потужним методом пізнавальної діяльності, сприяє формуванню в учнів основних прийомів розумової діяльності та комунікативних навичок; вміння моделювати ситуацію або процес, аналізувати і порівнювати дані, інтерпретувати результати, оптимізувати, оцінювати з різною точністю; викликає стійкий інтерес до математики; допомагає в здійсненні пропедевтичної профорієнтаційної роботи.

Розроблена методика формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання у процесі навчання геометрії може бути використана вчителями основної школи, методистами інститутів післядипломної освіти, авторами шкільних підручників, методичних посібників для вчителів.

Розділ 2. Психолого-педагогічні основи дослідження

Процес навчання в школі - головне та вирішальне джерело систематичного впливу на учня, його думки, почуття, сферу мислення. Саме на уроках з математики досконало відбувається й випробовується багатостороння зацікавленість знаннями. Велике значення у розвитку активізації пізнавальної діяльності мають місце моменти, що вносять елементи захоплення навчальним процесом, допомагають зняти напругу та втомленість після уроків. Головне завдання, що стоїть перед учителем, це допомогти дитині вчитися. Показати, що математика - не лише "довгі приклади на всі дії, а й цікаві, змістовні задачі, які потребують не тільки прорахунків, а й міркувань".

Ефективність навчання математики залежить від багатьох факторів, з-поміж яких психологічні та педагогічні домінують, причому психологічні компоненти складають основу педагогічних і є для них визначальними. Як відомо, *навчання* — це цілісний двосторонній процес педагогічної діяльності вчителя та навчально-пізнавальної діяльності учнів, у результаті якого відбувається засвоєння суб'єктами учіння визначених знань, навичок і вмінь та реалізуються відповідні виховні функції. До психологічних факторів навчання належать вікові та індивідуальні особливості учнів (відчуття, почуття, воля, увага, сприймання, пам'ять, мислення, уява тощо), змістові особливості навчального матеріалу, а також психологія педагогічної взаємодії між усіма складовими навчання. Психологізація навчального процесу поглиблюється у зв'язку з тим, що він виконує триєдину функцію: засвоїти визначені елементи знань, за їх допомогою розвивати психологічні процеси суб'єктів учіння, соціалізувати (виховувати) їх.

Процес засвоєння знань задіює відповідні психологічні компоненти і водночас розвиває їх, причому розвиток інтенсифікується в гуманізованому й адаптованому до потреб і можливостей дітей середовищі, яке відповідає національним звичаям, традиціям і менталітету.

Отже, психологізація навчання — це не лише вивчення і врахування вікових та індивідуальних особливостей суб'єктів учіння під час навчального процесу, а й адаптування до них змісту навчання, дослідження і використання психологічних можливостей навчального матеріалу у розвитку емоційно-вольових та інтелектуально-пізнавальних процесів, національному вихованні учнів.[25]

Кожна навчальна дисципліна має свої психологічні пріоритети. Якщо засобами літератури найбільше розвивається емоційно-почуттєва сфера, то строга логічність математичних форм найбільше розвиває інтелектуальні сили суб'єктів учіння, але лише за умов, якщо навчальний матеріал доступний і водночас достатньо важкий для розуміння і засвоєння його учнями. Зміст математичних дисциплін характеризують їх особливості, які належним чином впливають і на їх місце в структурі навчального процесу, і на психологічне забезпечення засвоєння математичних знань. До них належать: високий рівень узагальнення й абстрагованості; тісний взаємозв'язок між усіма елементами знань; велика кількість термінів і понять; домінування дедуктивних умовиводів, логічних обґрунтувань, постійне включення аналітико-синтетичних функцій мислення; переважання методу вправлянь, його суттєва роль не лише для формування відповідних навичок і вмінь, а й для засвоєння теоретичних знань; загальне домінування розвивальних функцій над освітніми під час вивчення математики; велика роль ядра математичних знань і навичок для успішного подальшого просування і в навчанні, й у розвитку. Серед визначених особливостей математики як навчального предмета більшість носить психологічний характер, домінантою якого є інтелект учнів. Тому навчання математики допомагає встановити розумові здібності учнів для того, щоб і самою технологією навчання, й адаптованим змістом оптимізувати поступ їх мислення. Звісно, в умовах колективного навчання реалізувати сповна розвивальні можливості математичних дисциплін є непростою справою, оскільки кожна дитина за своїми здібностями є неповторною і вимагає індивідуального розвитку (навчання). З іншого боку, дитина найкраще розвивається в інтелектуальному колі, яке утворюється під час навчання оптимальної кількості індивідуумів. Отже, поєднання індивідуальних і групових форм навчання допоможе найкращим чином досягти освітньо-розвивальних цілей, особливо якщо психологічні аспекти професійно включатимуться і в навчання, і у розвиток. Провідною функцією математичних знань є інтелектуальний розвиток учнів. Формування в них загальних прийомів розумових дій, а також специфічних прийомів, де під час навчання їх використовують і як засіб досягнення навчальних цілей, і як предмет навчально-пізнавальної діяльності. Практика показала, що особливістю пізнавальної діяльності учнів, що слабо навчаються з математики, є несформованість загальних розумових дій. Причиною є надання пріоритету освітнім цілям, недостатня увага до розумового розвитку дітей, тобто використання математичних знань для формування загальних і специфічних прийомів розумової діяльності, які не часто стають предметом навчання. Учитель розглядає розширення обсягу знань як кінцеву мету навчання. Така установка веде до перевантаження учнів, і щорічно зростає кількість учнів, які не тільки перестають засвоювати математичні знання, а й сприймати їх. Щоб не допустити несприймання значною частиною учнів математичних знань на тому чи іншому році навчання потрібно:

— виділяти ядро елементів знань на кожному навчальному етапі, без яких подальший доступ неможливий;

— решту, поза ядром, елементів знань використовують переважно для формування прийомів розумової діяльності;

— адаптувати рівень складності ядрових знань до рівня розумових можливостей тієї чи іншої типологічної групи учнів;

— з метою полегшення запам’ятовування знань психологізувати матеріал, використовуючи аналогію, порівняння, логіку встановлення і обґрунтування понять.

Розумова пасивність, бездіяльність, яка нерідко обумовлена надмірністю вимог до учнів стомлює їх, а активна осмислена розумова праця пов’язана з позитивним емоційним підкріпленням.

Розділ 3. Методика вивчення геометричних перетворень з використанням ІКТ

3.1. Загальна характеристика ІКТ

Пошук нових форм і прийомів вивчення математики в наш час – явище не тільки закономірне, але й необхідне. І це зрозуміло: у вільній школі, до якої ми йдемо, кожен не тільки може, а й повинен працювати так, щоб використовувати всі можливості особистості. В умовах гуманізації освіти реальна теорія і технологія масового навчання повинна бути направлена на формування сильної особистості, здатної жити й працювати у світі, що безперервно зазнає змін, здатної сміливо розробляти власну стратегію поведінки, здійснювати моральний вибір і нести за нього відповідальність, - тобто такої особистості, яка спроможна саморозвиватися і самореалізуватися.

У школі особливе місце відводиться таким формам занять, що забезпечують участь кожного учня у проведенні уроку, підвищують авторитет знань та індивідуальну відповідальність школярів за результати навчальної діяльності. Ці завдання школярів можна успішно розв’язувати завдяки інформаційним технологіям.

Під інформаційною технологією в одних випадках розуміють спосіб і засоби збору, обробки і передачі інформації для отримання нових відомостей про об'єкт, що вивчається, в інших – сукупність знань про способи і засоби роботи з інформаційними ресурсами.

Слід відмітити, що в якомусь значенні всі педагогічні технології є інформаційними, оскільки навчально-виховний процес не можливий без обміну інформацією між вчителем і учнями. Проте в сучасному розумінні інформаційна технологія навчання – це педагогічна технологія, що застосовує спеціальні способи, програмні і технічні засоби для роботи з інформацією. І, в нашому розумінні, значення інформатизації освіти полягає в створенні сприятливих умов для вільного доступу до культурної, учбової і наукової інформації. Комп'ютер повинен перетворитися для дитини з цікавої іграшки в одне з важливих джерел інформації.

На сучасному етапі розвитку освіти широко впроваджуються у навчальних закладах інформаційні технології. Вони мають великі можливості застосування в навчальному процесі. Насамперед, як засіб доступу до інформації та індивідуалізації навчання. До того ж нові інформаційні технології навчання виводять дитину за межі школи, відкривають їй двері до світових знань. Ми можемо довго дискутувати з приводу ефективності інформаційних технологій на уроках, але не використовувати їх не маємо права. У загальному вигляді вимога суспільства до школи зводиться до того, щоб випускники володіли не тільки здатністю соціологізуватися в суспільстві, не тільки вміли адаптуватися до змін в суспільному житті, але й виважено та відповідально вирішувати життєві проблеми.

Одним з найістотніших психолого-педагогічних доказів необхідності упровадження комп'ютера в учбовий процес є можливість індивідуалізації учбово-пізнавальної діяльності учнів. Ця особливість комп'ютерного навчання корисна, оскільки дозволяє диференціювати трудність учбових завдань з урахуванням індивідуальних можливостей, вибрати оптимальний темп навчання, підвищити оперативність і об'єктивність контролю і оцінки результатів навчання.

Але якщо ви лише починаєте включати ІКТ в свої уроки, раджу почати з вже розроблених програмних засобів.

Якщо в класі є учень, що має міцні навички роботи з комп'ютером, можна використовувати його як технічного консультанта. На цю роль можна запросити вчителя інформатики або старшокласника, якщо є така можливість.

При всіх перевагах дані програмні засоби передбачають наявність у школярів певного досвіду самостійної діяльності. Практика показує, що учневі складно самостійно займатися з диском без спеціальної підготовки. Де цю підготовку отримати? Звичайно, на уроці.

Звичайний шкільний вчитель, працюючи за шкільною програмою, просто не в змозі приділяти багато уваги кожному учневі. Ось чому вчителі постійно приділяють увагу пошуку нових форм навчання, методів, що дозволяють підвищити ефективність засвоєння матеріалу.

Головне завдання вчителя зробити навчання цікавим. Тому на урок потрібно йти не лише зі знанням навчального матеріалу, методів і прийомів навчання, набором задач і вмінням їх майстерно розв'язувати, але і з різноманітними та цікавими способами організації роботи учнів.

Таке непросте завдання можна вирішити лише шляхом поєднання традиційних методів навчання з використанням інноваційних технологій, серед яких щільне місце займають інформаційно-комунікативні технології навчання. Вони відкривають нові, ще недостатньо досліджені можливості вдосконалення навчальної діяльності.

Позитивний результат гарантовано, бо молодь до комп'ютерів ставиться дуже доброзичливо, вона їх любить. І треба розумно використати це ставлення школярів до комп'ютера при плануванні навчального процесу.

Важливі також деякі психологічні аспекти даної теми. Учні мають різний психологічний статус і багато хто з них хворобливо ставиться до зауважень, дуже боїться зазнати фіаско на очах у класу. У діалозі з комп'ютером нічого подібного не відбувається: комп'ютер не рахує, скільки було невдалих спроб розв'язання задачі, не робить ніяких зауважень. Він ще й підкаже, що і як потрібно зробити. Таким чином формується ситуація психологічного комфорту, яка створює можливість пізнавальної та емоційної свободи учнів.

Використання комп'ютера можливе на всіх етапах, що складають процес навчання: представлення нового матеріалу учням, перевірка засвоєння ними знань, що вивчаються, уточнення змісту матеріалу і методів його викладання, фіксація всіх успіхів і невдач.

На уроках математики можливе використання персонального комп'ютера за такими напрямками, як:

- контролююча машина;
- навчальний тренажер;
- моделюючий стенд;
- інформаційно-довідникові системи;
- ігрове навчальне середовище;
- електронний конструктор
- експертна система.

Контролююча машина

Комп'ютеризація школи диктує нам інакше готуватися до уроків, поступово вводити електронне тестування. Пропоную вам використати для цього програму для тестування

MyTest - це система програм (програма тестування учнів, редактор тестів і журнал результатів) для створення і проведення комп'ютерного тестування, аналізу результатів, оцінювання за вибраною шкалою. Я довго шукала таку програму, яка б мала зручний текстовий редактор, що дозволяв би працювати не тільки з текстом, а й з формулами, малюнками, виразами. Ще великий "плюс" MyTest- програма створена учителем і розповсюджується безкоштовно. Зручний вибір режимів, дозволяє не тільки проводити контроль, а й навчати методом підказок. Завдання тестів на різних комп'ютерах подається в різних варіантах, тобто не дається можливість учням "списувати" відповіді з сусідніх моніторів.

Навчальний тренажер

Виконання тренувальних вправ типу: «знайди помилку», «встанови закономірність», вдосконалення усного рахунку, тренування обчислювальних навичок.

Моделюючий стенд

Найбільш продуктивно його використовую на уроках геометрії для створення динамічних та анімаційних моделей.

<u>Інформаційно-довідникові системи</u>

Вони мають важливе значення як на уроці так і в організації позакласних заходів, підготовці до олімпіад та зовнішнього незалежного тестування. Найчастіше я звертаюсь до електронної енциклопедії Кирила і Мефодія, серії енциклопедій «Хочу все знати», а також використання інформаційно-пошукових систем глобальної мережі Інтернет.

<u>Ігрове навчальне середовище</u>

За допомогою комп'ютера легко створити на уроці цікаву ігрову ситуацію. Учні з захопленням відправляються на пошуки піратських скарбів, фантастичних світів, в космічні подорожі, але для цього їм доведеться засвоїти певні математичні знання та отримати необхідні математичні навички.[19]

Комп'ютер може узяти на себе виконання навчальних функцій, не говорячи вже про функції тренувального характеру, орієнтовані на закріплення знань, умінь, навичок.

Вважаю, що систематичне використання ПК на уроці сприяє наступному:

- підвищенню рівня використання наочності на уроці;
- покращенню продуктивності уроку;
- встановленню міжпредметних зв'язків з інформатикою та іншими науками;
- організації проектної діяльності учнів щодо створення навчальних програм та електронних посібників з курсу під керуванням учителів інформатики та математики;
- логічності подавання навчального матеріалу, що позитивно позначається на рівні знань учнів;
- зміні на краще взаємин з учнями, далекими від математики, особливо тими, які із захопленням ставляться до ПК;
- зміні ставлення школярів до ПК як до захоплюючої іграшки;

- сприйманню його, як універсального інструмента для роботи в будь-якій галузі людської діяльності.

У процесі навчання важлива не інформаційна технологія сама собою, а те, наскільки її використання сприяє досягненню освітніх цілей. Тому, на нашу думку, необхідно також розв’язати психолого-педагогічні проблеми комп’ютерного навчання, а саме:

- уроки у комп’ютерному класі викликають емоційне піднесення в учнів, що не завжди сприяє ефективності процесу навчання. Тому 1-2 уроки протягом семестру носитимуть лише показове навантаження, а не навчальне. Для оптимізації процесу навчання математики необхідне систематичне використання комп’ютерних технологій;

- комп’ютерні уроки вимагають від учнів організованості, швидкості мислення, вміння переключати увагу протягом всього навчального часу.[19]

Ураховуючи, наскільки це важко для сучасної гіперактивної дитини, необхідно ретельно продумувати хід навчального заняття, чітко розподіляти види діяльності учнів на різних етапах, щоб не перетворити урок на скупчення мультимедійних матеріалів, а учнів – на глядачів у кінотеатрі.

Але використання мультимедійного комплексу як демонстраційного з великими можливостями, – це лише перший крок. ІКТ дозволяє робити значно більше, зокрема – активізувати пізнавальну діяльність учнів. З використанням відомих методів проектної роботи можна залучити їх до створення під керуванням учителя різноманітних допоміжних матеріалів, презентацій, тематичних підбірок тощо. В ідеалі можна навіть доручати таким учням створення мультимедійних посібників, залучати їх до консультаційної і навіть викладацької діяльності, що є показником нового якісного рівня навчальних досягнень.

Будь-які зміни, нововведення — нелегка, кропітка праця. Це невдачі і прорахунки, промахи і поразки, але разом з тим це знахідки, досягнення, здобутки, успіхи, перемоги. Адже «гладеньке» впровадження часто означає, що насправді нічого не змінюється. Важливо, щоб у цьому процесі учні посідали не пасивну позицію, були не спостерігачами, а співтворцями уроку. Успіх залежатиме від ступеня довіри, оптимістичного і творчого ставлення вчителя до дитини.

Світ міняється стрімко. Удосконалюються технології практично у всіх галузях науки і техніки. Кількість інформації подвоюється кожні 15 років. Сучасні діти не мислять своє життя без комп'ютера, хоча використовують його в основному тільки як джерело ігор. Міняються цілі і задачі сучасної освіти: формування знань і умінь поступається місцем формуванню компетентностей. Школи оснащуються комп'ютерною технікою, електронними ресурсами, дістають доступ в Інтернет. Це повинно сприяти упровадженню в практику роботи сучасних інформаційно-комунікаційних технологій. І все-таки не комп'ютер, а вчитель – найважливіша складова учбового процесу. Але якщо вчитель не розвиватиметься сам, існує небезпека перетворення комп'ютера в черговий технічний засіб навчання. Компетентністний підхід навряд може бути реалізований при традиційних формах і методах навчання. Тільки володіння вчителем сучасними технологіями може сприяти особовому розвитку учнів.

3.2. Комп’ютерно-орієнтовані засоби навчання геометрії

Геометричні перетворення – один із важливих розділів курсу геометрії, оскільки метод геометричних перетворень є досить продуктивним у розв’язуванні багатьох геометричних задач, а його застосування часто спрощує доведення окремих математичних тверджень.

В шкільному курсі геометрії розглядають такі види перетворень як симетрія (відносно точки та відносно прямої), поворот, паралельне перенесення та гомотетія.

При вивченні даної теми з певними труднощами часто стикаються не тільки вчителі, але й учні. Цьому сприяє кілька причин. По-перше, для вчителів досить важко організувати унаочнення геометричних перетворень на папері чи дошці. По-друге, на вивчення геометричних перетворень відводиться мало часу порівняно з тим, які подальші застосування має ця тема – як у шкільному курсі геометрії, так і при розв'язуванні багатьох олімпіадних задач. До того ж в більшості своїй вчителі «побоюються» даної теми через її несприйняття учнями. Учні ж, в свою чергу, «недолюблюють» геометричні перетворення через відсутність, зокрема, алгоритмічних підходів у розв'язуванні типових задач, відсутності очевидної сфери подальшого застосування методу геометричних перетворень.

Аналіз науково-методичних робіт, присвячених описаній ситуації, виявив, що певне розв'язання описаної проблеми можливе завдяки використанню інтерактивних геометричних середовищ: вони дозволяють не лише досить швидко і якісно побудувати модель теореми чи задачі, але й надають змогу динамічно дослідити її, тим самим напрацьовуючи власний емпіричний досвід, що є не останнім у формуванні свідомої та міцної системи математичних знань. Разом з цим автори розглядають питання побудови теорії геометричних перетворень, взаємозв'язки між видами перетворень, методику їх вивчення із залученням окремих інтерактивних систем зовсім мало уваги приділяють аналізу наявних комп'ютерних інструментів, які можна застосовувати при вивченні даної теми.

Тому метою нашого дослідження став саме аналіз комп'ютерних інструментів на предмет їх доцільності і раціональності використання при вивченні окремих тем шкільного курсу математики, а також демонстрація застосування комп'ютерних інструментів різних інтерактивних геометричних систем в процесі унаочнення геометричних перетворень,при розв'язуванні типових задач, організації досліджень в рамках даної теми.

В українських школах при вивченні математики використовується велика кількість інтерактивних геометричних середовищ – це і *Математический конструктор*, *Живая математика, Живая геометрія*(Росія), *GRAN, DG*(Україна), *GeoGebra* (Австрія), *Cabri*(Франція), *Geometer'sSketchpad* (США), *GeoNext* (Німеччина) тощо. Робота в них інтуїтивно зрозуміла та ідентична – будуються базові об’єкти, які потім можна динамічно змінювати і спостерігати за певними якісними властивостями та кількісними характеристиками. Кожна із зазначених вище програм підтримує вивчення геометричних перетворень, але містить власні інструменти їх реалізації, про що зазначимо нижче.

3.2.1. Динамічна геометрія GRAN-2D і DG

1. У середовищі *Gran-2D* можна здійснювати паралельне перенесення, поворот, гомотетію, деформацію (стиснення) об’єктів типу *Точка, Пряма, Ламана, Коло* за допомогою пункту головного меню *Об’єкт/Перетворення*.

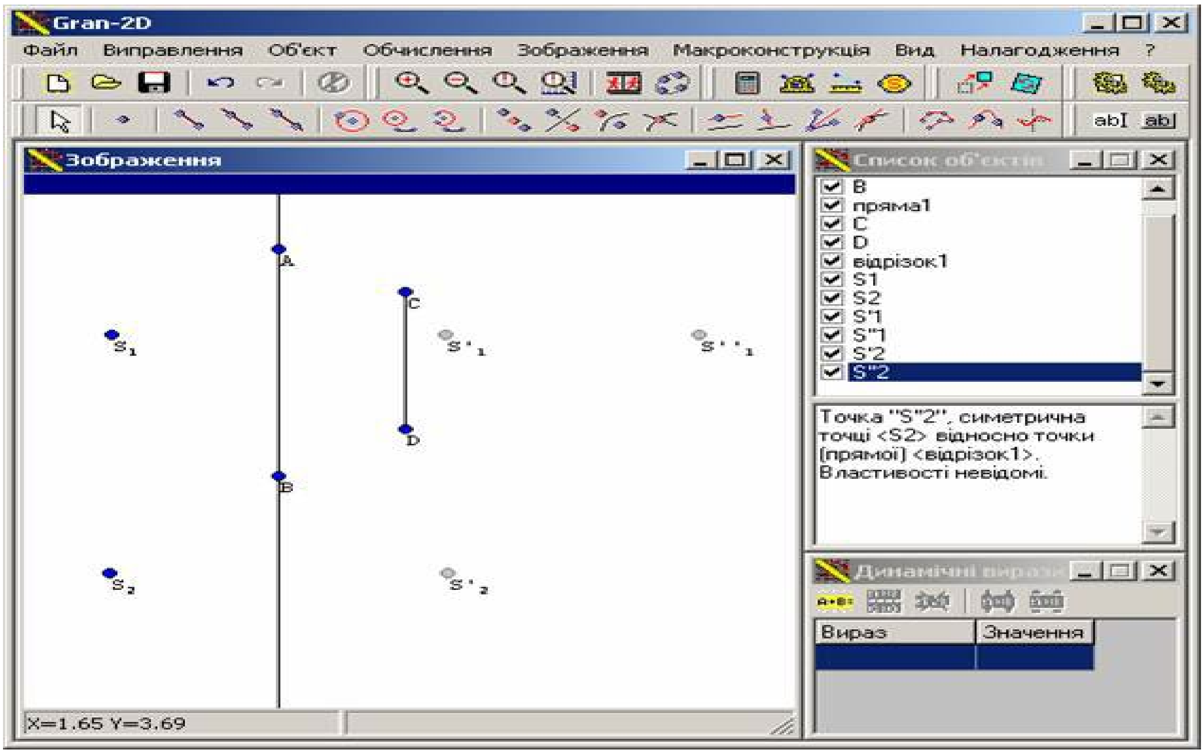
Основне призначення програми *GRAN*: графічний аналіз функцій, систем геометричних об’єктів на площині та просторових (тривимірних) об’єктів. *GRAN* на відміну від інших програм охоплює більшу кількість питань, щодо дослідження стереометрії та планіметрії. Даний комплекс вчитель може використовувати у курсі “Стереометрія”. Використання *GRAN* дає цікаві результати для проведення досліджень, які включають не тільки розв’язування проблем, а й їх постановку; допомагає в проведенні графічних та обчислювальних експериментів, на основі яких учень приходить до формулювання гіпотез відносно досліджуваних закономірностей.[10]

За допомогою ППЗ *GRAND-2D* можна здійснювати геометричні перетворення деяких об'єктів, а саме паралельне перенесення, симетрія відносно точки та прямої, поворот (відносно деякої точки). Для цього призначено послуги пункту головного меню *Об'єкт\Перетворення.*

Параметри перетворення можна задавати як через введення координат вектора перенесення чи кута повороту у відповідні поля так і графічно "з екрану", користуючись мишкою.

У першому випадку для виконання деякого перетворення звернутися до послуги меню *Об'єкт\Перетворення\Параметри,* а у другому до підпунктів меню *Об'єкт\Перетворення\З екрану* , *Паралельне перенесення* або *Поворот,* в залежності від того, який тип перетворення об'єктів необхідно здійснити.

Єдине, що потрібно зазначити, що в програмі є чітке розмежування між симетрією відносно прямої, променя або відрізка. Так, якщо віссю симетрії є пряма, то симетрична точка завжди буде існувати. В тому випадку, якщо віссю симетрії є промінь або відрізок, то симетрична точка буде існувати лише тоді, коли перпендикуляр, що опущений із заданої точки на пряму, що визначає вісь симетрії (і яка включає в себе вказаний промінь або відрізок), перетинає цей промінь або відрізок. На рис.1 можна бачити, що для точки S_1 існують симетричні точки як відносно прямої AB, так і відносно відрізка CD. Однак для точки S_2 існує лише симетрична точка відносно прямої AB і не існує симетричної відносно відрізка CD.



Мал.1

Якщо тема симетрії або паралельного перенесення є відносно простою для розуміння учнями, то тема повороту викликає певні складнощі. Саме тому детально зупинимось на деяких особливостях побудови комп’ютерних моделей в програмі GRAN-2D, які можуть стати цікавими при розгляді даного питання.

Перетворення однієї фігури в іншу називають ***рухом****, якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки A і B першої фігури у точки* A_1*,* B_1 *другої фігури так, що* $AB=A_1B_1$*.* ***Поворотом площини*** *навколо даної точки називається такий рух, при якому кожний промінь, що виходить з даної точки, повертається на один і той самий кут в одному і тому самому напрямі. Цей кут називається кутом повороту.*

Для дослідження властивостей повороту підготуємо зображення, згідно мал. 2. Спочатку розмістимо дугу, яка в подальшому буде задавати кут повороту (на рисунку такою дугою є дуга, що визначається точками *A*, *B*, *C*). Крім того розмістимо точку *O*, яка буде визначати центр повороту, та примітивні фігури над якими буде виконано поворот: точку (точка *F* на рисунку), відрізок, промінь, пряму, коло, замкнену ламану.

Спочатку розглянемо найбільш простий випадок: поворот точки навколо іншої точки. Для цього створимо точку, яка буде результатом повороту точки *F* навколо точки *O* на кут *ABC*. Це можна зробити, створивши аналітичну точку (команда ***"Об'єкт / Створення / Аналітична точка"***). Координати створюваної точки задамо наступними виразами:

$$X = (X(F) - X(O)) * Cos(OAngle(A,B,C)) - (Y(F) - Y(O)) * Sin(OAngle(A,B,C)) + X(O),$$

$$Y = (X(F) - X(O)) * Sin(OAngle(A,B,C)) + (Y(F) - Y(O)) * Cos(OAngle(A,B,C)) + Y(O).$$

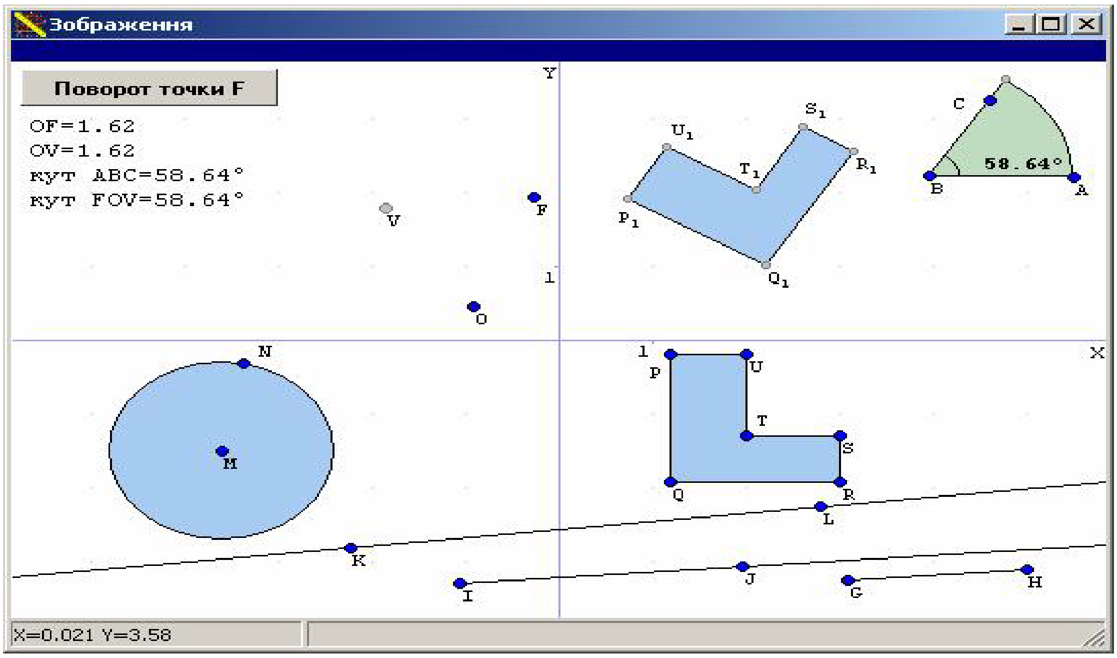
Ці формули відповідають формулам повороту довільної точки з координатами (*x*;*y*) навколо заданої точки з координатами $(x_0;\, y_0)$ на кут φ:

$$x' = (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi + x_0,$$

$$y' = (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi + y_0.$$

В результаті даної операції буде створено точку *V*. Тепер, змінюючи кут повороту чи положення опорних точок повороту *O* та *F*, можна бачити що положення результуючої точки *V* відповідним чином змінюється, проте залежність її від опорних об'єктів залишається сталою.

Для виконання повороту більш складного об'єкту необхідно виконати поворот базових точок, що визначають даний об'єкт: для відрізка або прямої – це дві точки, для n-кутника – кількість точок вже буде дорівнювати n. Тому використовувати описаний вище спосіб для кожної з точок є досить незручно. Існує два шляхи спрощення процесу розв'язування такої задачі.



Мал.2

Щоб відобразити результат повороту навколо точки O на кут ABC інших об'єктів (крім ламаної) можна поступити наступним чином:

- прикріпити точку F до відповідного об'єкту (для цього необхідно підвести точку F до цього об'єкту, в контекстному меню точки вибрати ***"Прикріпити точку"*** та вказати відповідний об'єкт);
- побудувати геометричне місце точок (скориставшись послугою ***"Зображення / ГМТ"***), вказавши точку F, як точку на об'єкті, а точку V, як залежну.

Для виконання повороту ламаної можна побудувати відповідні аналітичні точки до всіх опорних точок ламаної, а потім їх з'єднати новою ламаною.

Проте такий спосіб хоча і є дієвим, але виявляється достатньо громіздким, особливо у випадку застосування геометричних перетворень до многокутників. Тому в програмі існує й інша можливість для створення повороту, яка певним чином автоматизує попередні дії. Зокрема, даним методом можна швидко повернути не тільки відрізок, промінь, пряму або коло, а й ламану будь-якої складності.

Для цього необхідно скористатись послугою ***”Об’єкт /Перетворення параметрично”*** закладка ***”Поворот”*** (мал.3). Далі необхідно вказати:

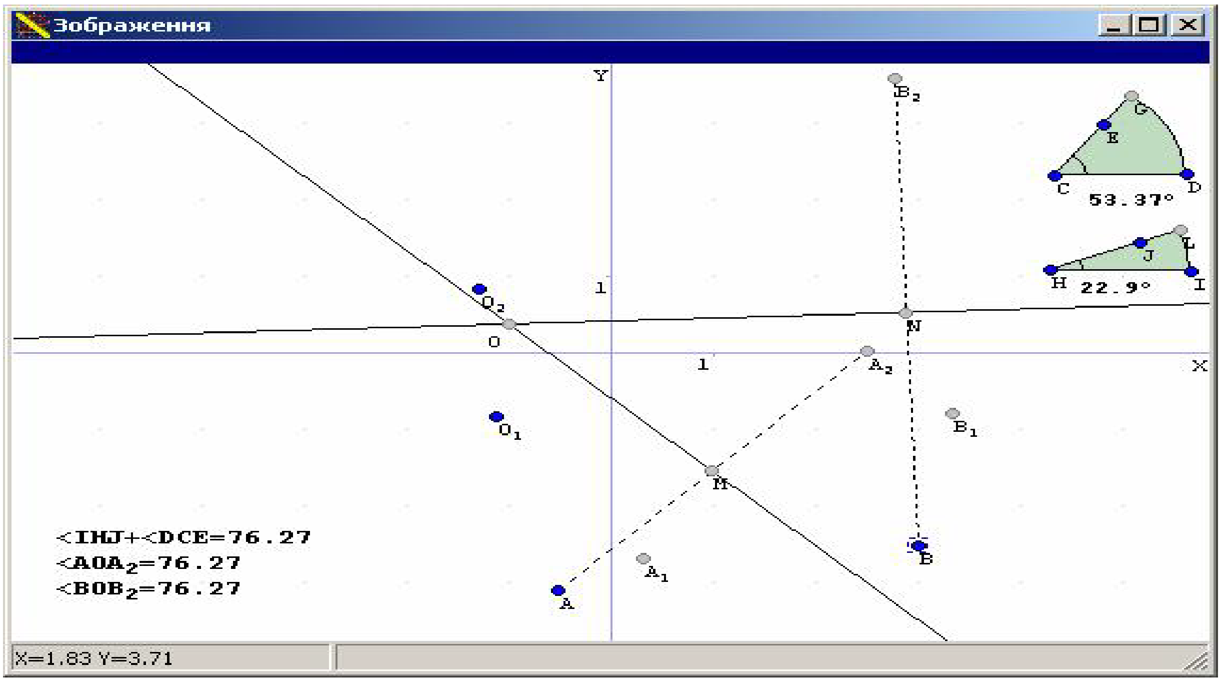
- до якого об’єкту буде застосовуватися перетворення;
- точку, що визначає центр повороту;
- вказати кут повороту. Кут повороту вказується в градусах явно або за допомогою формули (мал.3). Додатнім кутом повороту визначається поворот проти годинникової стрілки.

Мал. 3

Оскільки необхідно, щоб в результаті перетворення був створений новий об’єкт і він був зв’язаним (підтримувалася залежність результуючого об’єкту від вихідного), необхідно відмітити послуги: ***”Створити результуючий об’єкт”*** та ***”Прикріпити до вихідних”***.

Як відомо, композиція двох поворотів відносно одного центру є також поворот. Однак, якщо повороти виконуються навколо різних центрів, то відповідь про результат композиції двох таких перетворень не є очевидною. За допомогою комп'ютерних експериментів можна не тільки переконатися, що результатом таких перетворень також є поворот, але й визначати параметри цього повороту. Покажемо це на наступній комп'ютерній моделі.

Для даного дослідження підготуємо зображення, згідно мал. 4. Визначимо кути поворотів *IHJ* та *DCE*, відповідні центри поворотів O_1 та O_2, і розмістимо дві вільні точки *A* та *B*. Виконаємо побудови для експериментальної перевірки. Повернемо точку *A* навколо точки O_1 на кут *IHJ*, а потім одержану в результаті цього повороту точку A_1 повернемо навколо точки O_2 на кут *DCE*. Результатом є точка A_2. Аналогічні операції проводимо для точки *B* (мал. 4).



Мал. 4

Припустимо, що точки A_2 та B_2 є результатом повороту точок *A* і *B* навколо деякого центру *O*. Центр повороту можна знайти як точку перетину двох серединних перпендикулярів до пар точок "другий прообраз" – "образ" (тобто до відрізків AA_2 та BB_2). Результати досліджень та вимірів показують, що точки A_2 таB_2 можуть бути одержані з точок *A* та *B* результатом повороту навколо точки *O* на один і той самий кут.

Більш того, можна з’ясувати, що чисельно величина цього кута повороту дорівнює алгебраїчній сумі двох кутів повороту, які утворюють композицію (тобто $\angle AOA_2 = \angle BOB_2 = \angle DCE + \angle IHL$).

Зрозуміло, що перевірка величини кута відбувається з певною точністю, проте вірогідність справедливості цього факту в цілому дуже велика (можна сказати, що після комп’ютерного підтвердження гіпотези з’являється зовсім нове почуття впевненості у справедливості відповідної теореми, особливо в тих учнів, у яких наочно-образний тип мислення переважає над абстрактно-логічним).

Для теоретичного обґрунтування, залишається розглянути задачу, що підтвердить нашу експериментальну побудову. Для цього необхідно дослідити конфігурацію, яку утворюють два центри вихідних поворотів O_1 і O_2 та центр гіпотетичного повороту O, та скористатися твердженням, згідно якого композиція двох симетрій відносно прямих, що перетинаються, є поворот відносно точки перетину на подвійний кут, що утворюють ці прямі (кут утворюється осями симетрії у напряму проти годинникової стрілки).

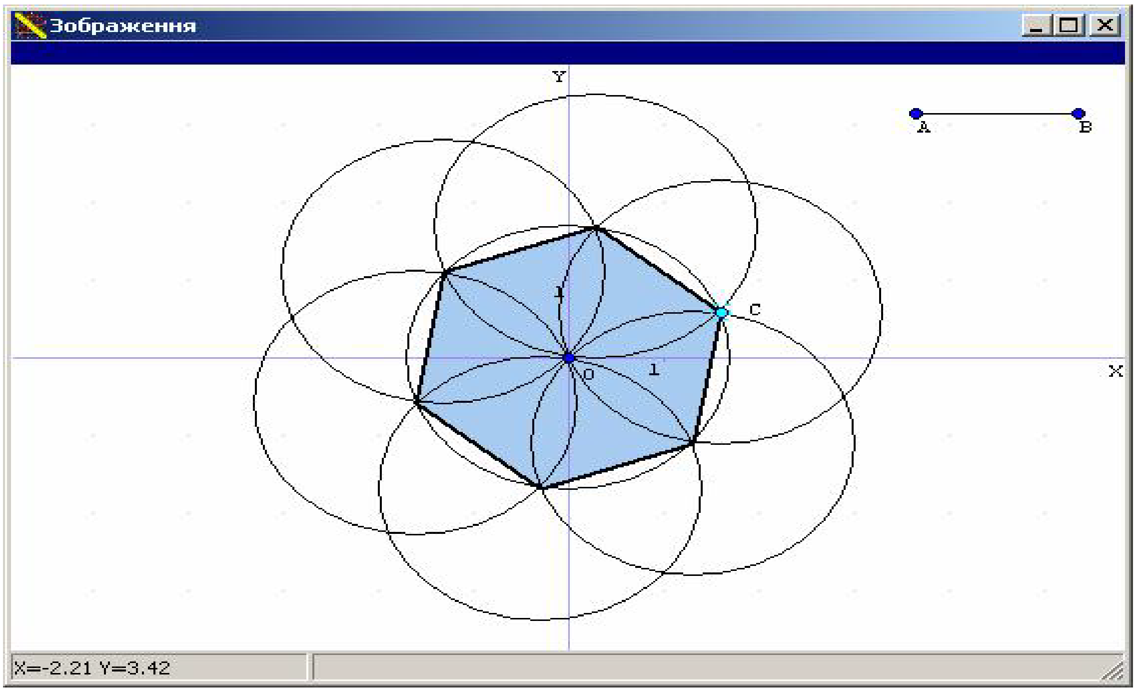
Зазначимо, що особливості побудови розглядуваних моделей (наприклад, створення результуючих об’єктів та їх безпосереднє перетворення в залежності від батьківських) є такими ж для симетрії, паралельного перенесення та гомотетії.

Цікавою проблемою для учнів може стати пошук таких фігур, і особливо многокутників, які при обертанні навколо певної точки, переходять самі в себе. Зокрема, серед опуклих многокутників такими є правильні многокутники. Саме правильні многокутники та задачі з ними доволі часто розглядаються в шкільному курсі геометрії. Отже саме моделі таких многокутників доводиться будувати у відповідних програмах.

Якщо побудова правильного трикутника або квадрата є відносно простою, то вже побудова правильних многокутників із більшою кількістю сторін часто викликає труднощі. Розглянемо, зокрема, побудову моделі правильного многокутника на прикладі побудови правильного шестикутника.

1. Будуємо довільний відрізок *AB* - радіус майбутнього кола (мал.5).

2. Будуємо коло за заданим радіусом із центром в довільній точці *O*, скориставшись інструментом ***”Коло за радіусом”***.



Мал. 5

3. Створюємо точку на колі *C*, скориставшись інструментом ***”Створення точки”***. Дана точка буде прив’язаною до кола і може вільно рухатись вздовж нього.

4. Відкладаємо від побудованої точки хорду кола, довжина якої дорівнює радіусу кола. Для цього необхідно:

- побудувати коло за заданим радіусом *AB* з центром в точці *C*, скориставшись інструментом ***”Коло за радіусом”***;
- побудувати точку перетину вихідного кола з побудованим колом, скориставшись інструментом ***”Точка перетину”***.

5. Повторюємо попередній пункт ще 5 разів, приймаючи за вихідну точку кола, яку було побудовано на попередньому кроці.

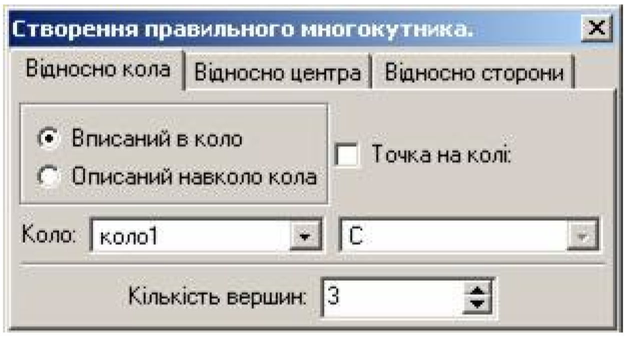
6. Будуємо многокутник з вершинами в побудованих точках, скориставшись інструментом ***”Ламана”***.

7. Ховаємо всі допоміжні побудови.

В результаті отримаємо зображення правильного шестикутника. Дана побудова відповідає побудові многокутника за допомогою циркуля і лінійки. Крім того, що вона є достатньо громіздкою, такі побудови можуть використовуватися лише для правильних многокутників із числом сторін: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, тощо. Однак їх не можна використати для побудови правильних многокутників із числом сторін: 7, 9, 11, 13, 14, 18, та інших. [34]

Саме тому за основу побудови правильних многокутників можна взяти деякі їх властивості, що стосується кутів таких многокутників. Як відомо, кут між сторонами правильного n-кутника в градусах дорівнює $\frac{180 \cdot (n+2)}{n}$, а центральний кут – $\frac{360}{n}$ градусів. Саме ці властивості і використовуються при побудові правильних многокутників в програмі GRAN-2D.

Використовуючи послугу ***”Об’єкт / Створення / Правильний многокутник”***, можна побудувати правильний многокутник, вказавши в діалоговому вікні опорні об’єкти, відносно яких його буде створено: коло (вписане або описане), центр многокутника або його сторона. Тип побудови обирається через закладку у відповідному вікні (мал. 6).



Мал. 6

Для побудови многокутника *відносно кола* необхідно:

- вказати вписаним в коло чи описаним навколо кола буде створюваний многокутник;

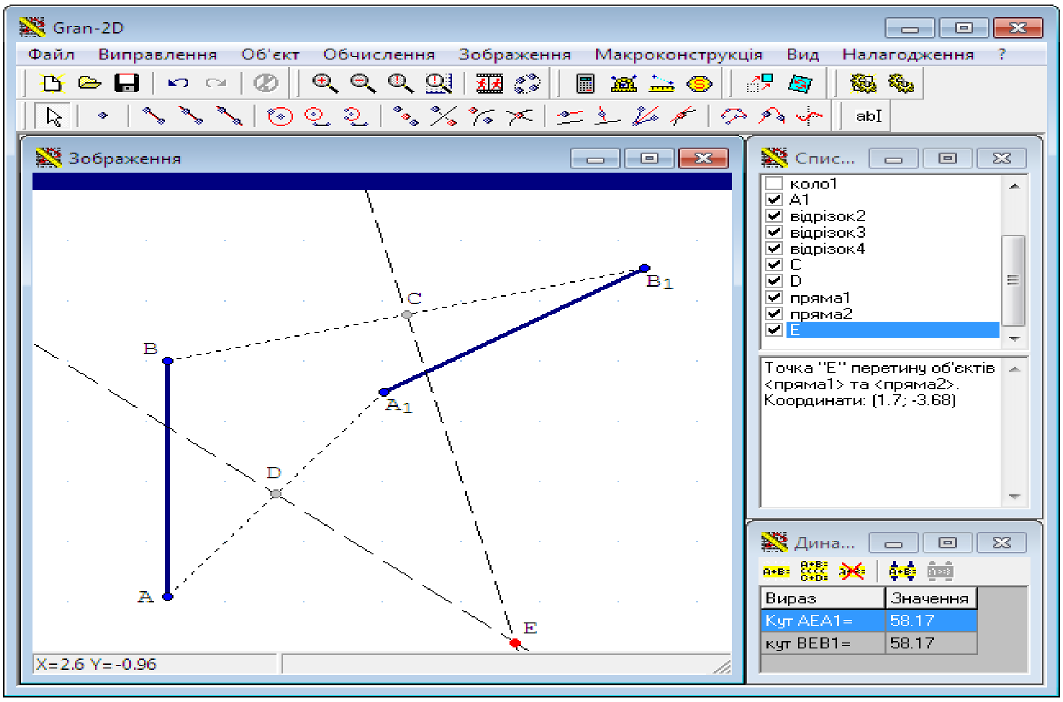
- вибрати коло відносно якого буде відбуватися побудова;
- вказати точку на колі, яка буде вважатися початковою (якщо на колі не міститься жодної точки, її буде створено автоматично). Для многокутника, вписаного в коло, дана точка буде однією з вершин.

Приклад1. (*Gran-2D*) Дано рівні відрізки AB і A_1B_1. Знайдіть центр повороту, при якому відрізок AB переходить у відрізок A_1B_1. [8]

Спочатку знайдемо відповідь традиційними побудовами.

Нехай задано два рівних відрізки AB і A_1B_1. Для побудови точки, що є центром повороту, яким відрізки переводяться один в одного, досить визначитися з відповідністю точок (A переходить у A_1, B переходить у B_1) і побудувати серединні перпендикуляри до відрізків AA_1 і BB_1. Точка перетину серединних перпендикулярів шукана.

Побудови здійснимо вбудованими інструментами. За допомогою динамічних надписів дослідимо кути AEA_1 і BEB_1, які є кутами повороту для точок A і B – вони будуть однаковими при всяких положеннях кінців вихідних відрізків (мал.7).



Мал.7. Поворот відрізка *AB* навколо центра *E* у середовищі *Gran-2D*

Тепер комп’ютерними інструментами середовища здійснимо поворот відрізка AB на зафіксований у динамічних виразах кут (*Об’єкт/*

Перетворення) і побачимо, що були створені три нові об’єкти (дві точки і відрізок на них), які повністю співпали з відрізком A_1B_1.

Зауважимо, що вбудований інструмент вчителю варто використовувати для перевірки одержаного учнем у середовищі *Gran2D* результату. Його використання відразу на початку вивчення теми не сформує розуміння суті повороту, а тому неможливим далі буде його використання при розв’язуванні інших задач.

2. Пакет динамічної геометрії DG створено для комп'ютерної підтримки шкільного курсу планіметрії. DG – це інтерактивна середовище для експериментування з геометрії.

Основна ідея DG – дати користувачеві можливість робити на комп'ютері побудови, аналогічні класичним геометричним побудовам «на папері». Однак потім DG дозволяє «оживити» отриманий малюнок, поспостерігати, як він «на льоту» змінюється при переміщенні базових точок мишкою.

Процес побудови здійснюється за допомогою геометричних інструментів. Наприклад, щоб побудувати точку перетину двох вже побудованих фігур, необхідно вибрати інструмент «Точка перетину» і вказати мишкою ці дві фігури на екрані.

Можливості моделювання геометричних побудов: створення побудов за допомогою комп'ютерних аналогів циркуля та лінійки, дослідження отриманих результатів, проведення вимірювань.

Переваги динамічної геометрії:

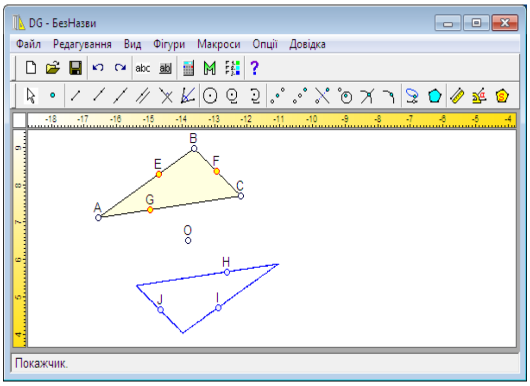
- ✓ миттєва зміна всіх залежних побудов і вимірювань при зміні деяких вихідних параметрів;
- ✓ створення живих і наочних ілюстрацій, інтерактивних і динамічних навчальних посібників, довідників та експертних систем, використання коментарів, кнопок, підказувань і гіперпосилань;
- ✓ організація комп'ютерних експериментів і досліджень, висування і візуальна перевірка гіпотез.

У пакеті DG відсутні спеціальні інструменти, які б здійснювали перетворення фігур, тому користуються означенням самого перетворення та інструментами *Симетрична точка, Симетрична відносно прямої точка, Інверсна точка*.[20]

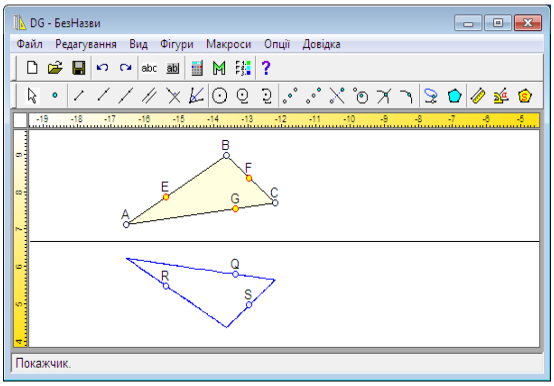
Наведемо приклади.

Центральна симетрія. Візьмемо довільні точки *E*, *G* і *F* на сторонах трикутника *ABC*. Використовуючи інструмент *Симетрична точка*, побудуємо точки *I,H*, *J*, симетричні точкам *E,G* і *F* відносно точки *O*. Переміщуючи точки *E*, *G* і *F* уздовж сторін трикутника, точки *I*, *H*, *J* залишать слід, що описує сторони симетричного відносно точки *O* трикутника (мал.8).

Симетрія відносно прямої. Нехай *E*, *F*, *G* – точки, взяті довільно на сторонах трикутника *ABC*. Побудуємо точку *R*, симетричну точці *E* відносно даної прямої (інструмент ). При переміщенні точки *E* вздовж *AB* точка *R* буде описувати образ сторони *AB*, симетричний відносно осі симетрії. Аналогічно інші точки *FiG* опишуть образи двох інших сторін (мал.9).



Мал.8. Демонстрація центральної симетрії в середовищі DG



Мал.9. Демонстрація симетрії відносно прямої в середовищі DG

Паралельне перенесення. Паралельне перенесення будемо задавати вектором *EF*. Щоб побудувати образ точки, взятої на стороні трикутника, наприклад, образ *G* точки *D*, скористаємося командою *Фігури/Аналітично/Точка*. Координати точки *G* задамо формулами, які визначаються координатами точки *D* і координатами початку і кінця вектора *EF*: *X=D.X+(F.X–E.X), Y=D.Y+(F.Y–E.Y).*

Аналогічно можна задати гомотетичні перетворення.

Вважаємо, що задачі такого типу сприяють кращому засвоєнню теми, оскільки базуються на означенні перетворень і конструктивному підході. Разом з цим зауважимо, що у середовищі DG можливі побудови лише нерухомого сліду для складних об'єктів – динамічними залишаться лише точки, а не фігури, які вони прорисують.

3.2.2. Вивчення геометрії за допомогою Gran-3D

Програма *GRAN-3D* призначена для графічного аналізу просторових (тривимірних) об'єктів, звідки і походить її назва (GRaphic Analysis 3-Dimension). Gran-2D, Gran-3D можуть бути віднесені як до програм-розв'язувачів, так і до моделюючих програм, на думку розробника М.Жалдака.

Використання пакету *GRAN-3D* надає можливість:

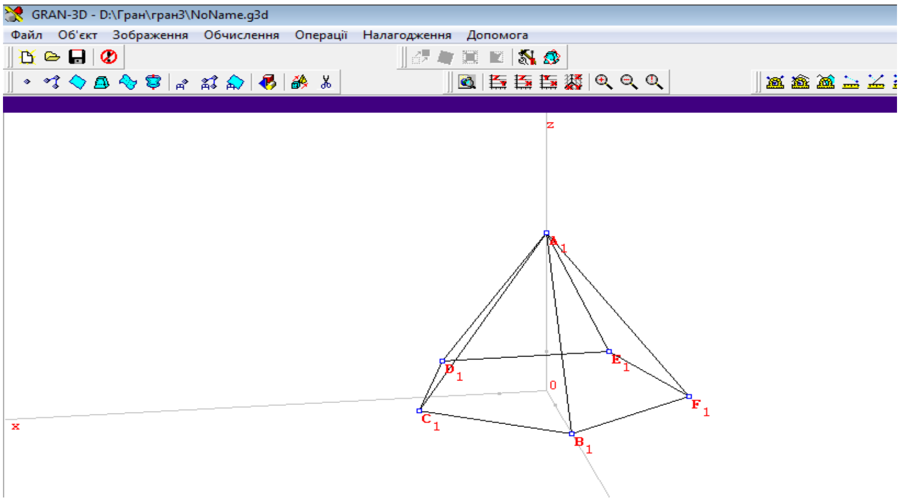
– створювати та перетворювати моделі базових просторових об'єктів;

– виконувати перерізи многогранників площинами;обчислювати об'єми та площі поверхонь многогранників і тіл обертання;

– вимірювати відстані та кути.[11]

Застосуємо програму *GRAN-3D* до вивчення теми «Піраміда та її елементи»

n-кутпною пірамідою називається многогранник, одна грань якого — довільний n-кутник, а всі інші n граней — трикутники, що мають спільну вершину.

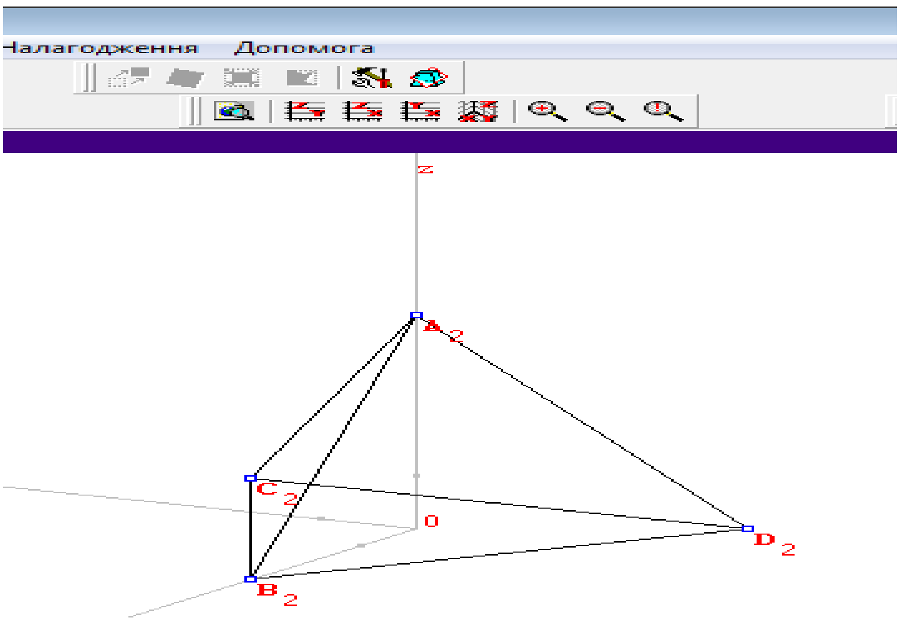


Мал. 10

Спільну вершину трикутних граней називають вершиною піраміди, протилежну їй грань — основою, а всі інші грані — бічними гранями піраміди. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називають бічними ребрами.

Перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину її основи, називають висотою піраміди. На мал.10 зображено п'ятикутну піраміду $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$; точка A_1 — її вершина, $B_1C_1D_1E_1F_1$ — основа; A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1, A_1E_1, A_1F_1 — бічні ребра; B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1, B_1F_1— ребра основи; A_1O — висота піраміди.

Трикутну піраміду називають також тетраедром (мал.11).

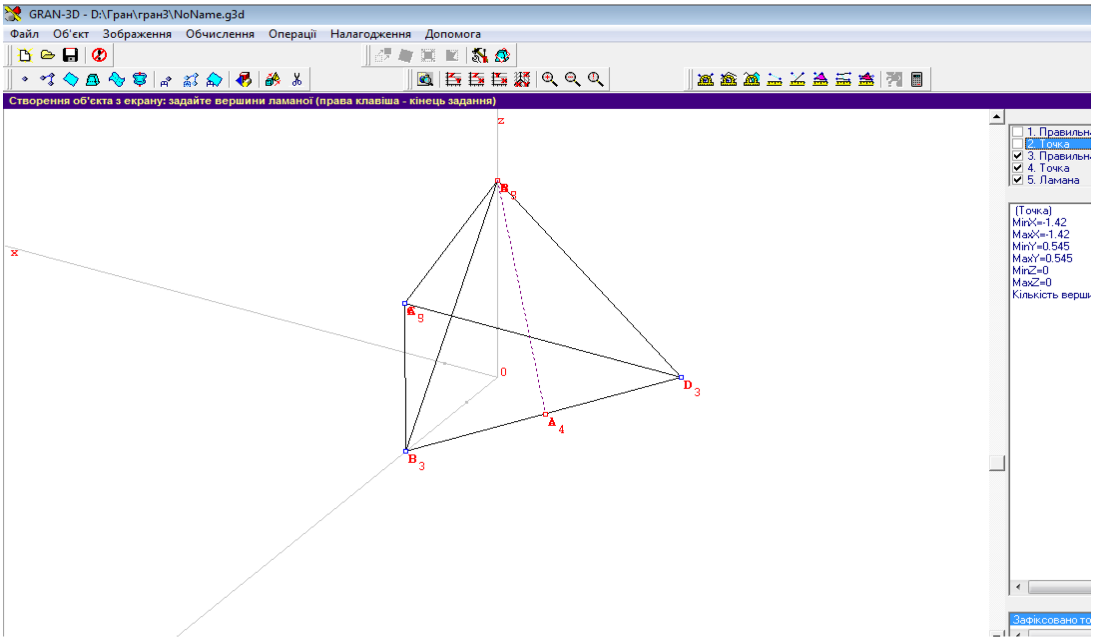


Мал.11

Суму площ усіх бічних граней піраміди називають площею бічної поверхні піраміди.

Щоб знайти площу всієї поверхні піраміди, треба до площі її бічної поверхні додати площу основи: $S_{пп} = S_{бічн} + S_{осн}$

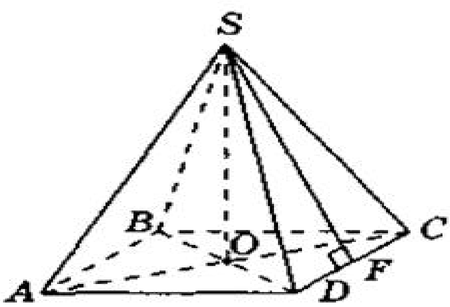
Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника (мал. 10, 11). Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники. Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається апофемою (мал.12).



Мал.12

Вправа 1.

В основі ABCD правильної піраміди SABCD лежить квадрат зі стороною 10 см. Висота SO піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть площу поверхні та об'єм піраміди.



Дано: SABCD – правильна піраміда, ABCD – квадрат, AB = 10 см, SO.

Знайти: $S_{пп}$, V.

Розв'язання.

Для обчислення об’єму піраміди

скористаємось формулою:

$V = \frac{1}{3} \cdot S_o \cdot H.$

$S_o = AB \cdot DC = 10 \cdot 10 = 100\ (см^2)$

$V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400\ (см^3).$

Щоб знайти площу повної поверхні, необхідно скористатися такою формулою:

$S_{пп} = S_б + S_o.$

Розглянемо $\Delta SOF, \angle O = 90°$. За теоремою Піфагора

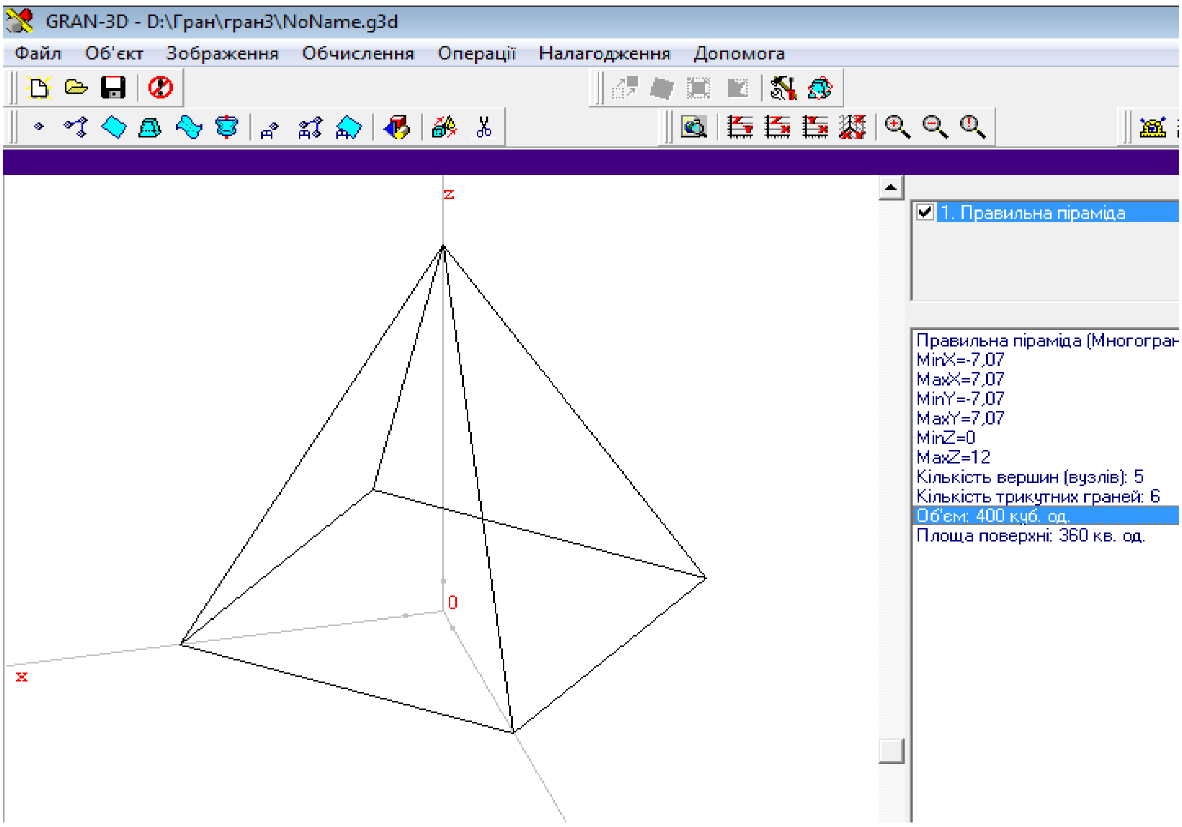
$SF = \sqrt{OF^2 + OS^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13(см)$, тоді

$$S_б = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot DC \cdot SF = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 260\ (см^2)$$

Отже, $S_{пп} = 260 + 100 = 360\ (см^2).$

Відповідь: 400 см^3, 360 см^2.

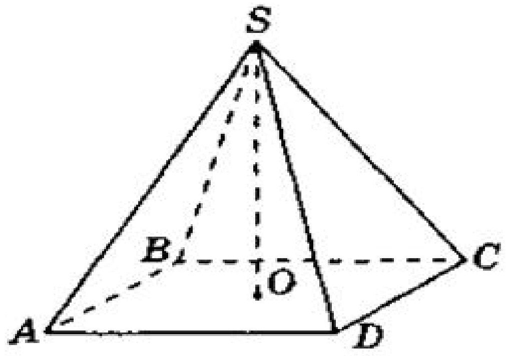
Правильність розв’язання задачі перевіримо використовуючи ППЗ *GRAN –3D*.



Мал.13

Вправа 2.

У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо діагональ основи дорівнює 16 см.



Дано: SABCD - правильна чотирикутна піраміда, SA = 10 см, AC = 16 см.

Знайти: V.

Розв'язання.

Скористаємось формулою:

$V = \frac{1}{3} \cdot S_o \cdot H.$

З чотирикутника ABCD, $AO = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8\ (см).$

Розглянемо $\Delta SOA, \angle O = 90°$. За теоремою Піфагора,

$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6(см).$

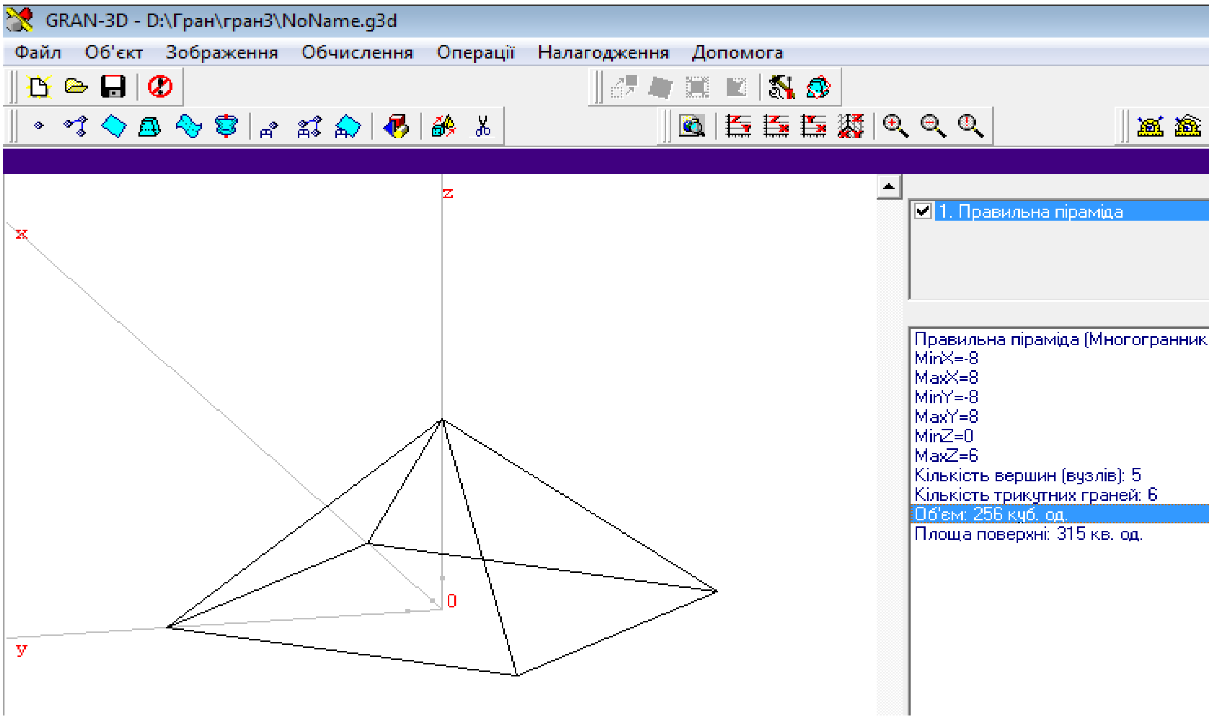
$AD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 16 = 8\sqrt{2}(см).$

ABCD – квадрат, тоді $S_o = \left(8\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128(см^2).$

$V = \frac{1}{3} \cdot 128 \cdot 6 = 256\ (см^3)$

Відповідь: $256\ (см^3)$.

Правильність розв'язання задачі перевіримо використовуючи ППЗ *GRAN–3D*.



Мал.14

ППЗ *GRAN-3D* має україномовний інтерфейс, розроблений з урахуванням сучасних вимог до педагогічних програмних засобів. Його використання надає такі можливості: провести чисельний експеримент, швидко виконати потрібні обчислення чи графічні побудови, перевірити ту чи іншу гіпотезу, випробувати той чи інший метод розв'язування задачі. Використовуючи дану програму, учні обчислюють об'єми просторових геометричних фігур та різноманітних тіл обертання, а також площі їх поверхонь, не витрачаючи часу на виведення формул, на виконання обчислень, на перевірку істинності одержаних значень. Навчальний час, звільнений завдяки автоматизованим процедурам обчислень і побудов, що виконуються за допомогою програми *GRAN-3D*, методично доцільно використати для проведення експериментальних досліджень побудованих об'єктів, для складання власних задач з досліджуваними фігурами та їхніми елементами. Перед використанням ППЗ *GRAN-3D* на уроці бажано, щоб учні попередньо ознайомилися з програмою на уроках інформатики та вдома. Використання геометричних просторових моделей, побудованих з *GRAN-3D*, сприяє унаоченню навчального матеріалу з стереометрії, активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів. Самостійне створення учнями за допомогою *GRAN-3D* тривимірних об’єктів забезпечує формування їхньої просторової уяви.

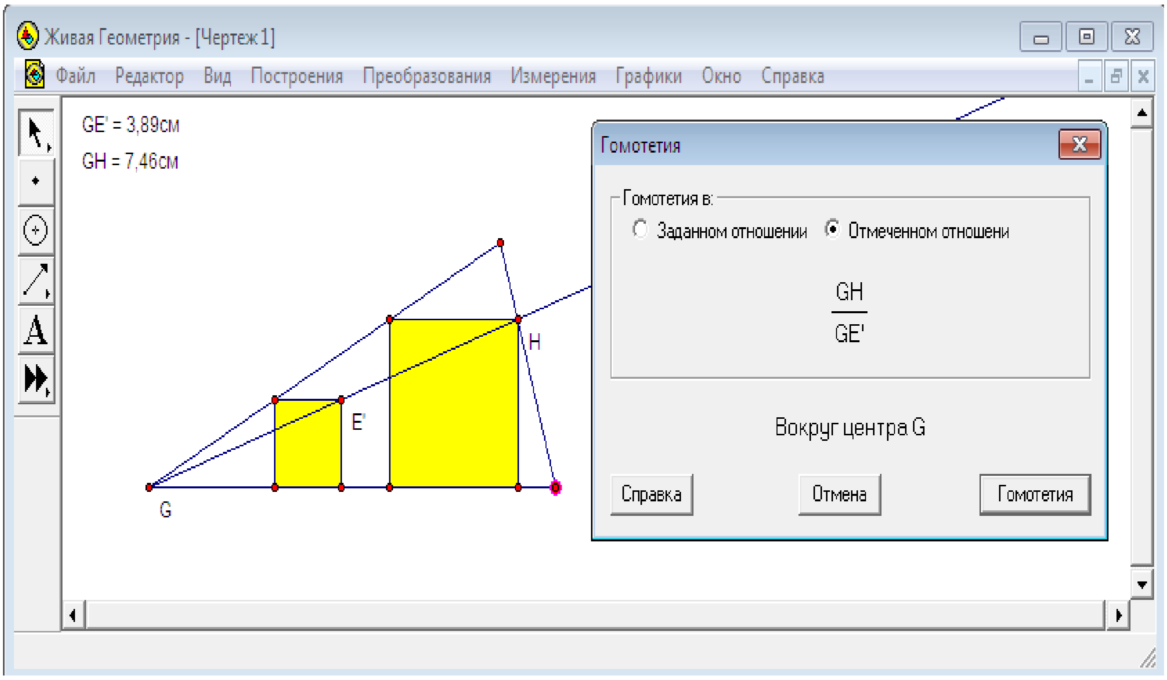
3.2.3. Локальні технології

1. У пакеті *Живая Геометрия* можна здійснювати поворот, паралельне перенесення, симетрію відносно точки та прямої, гомотетію. Перед тим, як використати потрібний інструмент, потрібно обрати ті об’єкти, які будуть приймати участь у перетворенні. Так, наприклад,для виконання паралельного перенесення потрібно відмітити об’єкт, який переноситься, вектор перенесення. Останній може задаватися кількома способами: через відстань по горизонталі та по вертикалі, якщо вектор перенесення визначено у декартовій системі координат; відстанню та кутом, якщо вектор перенесення задано у полярній системі координат; двома точками, які визначають початок і кінець вектора перенесення. При цьому варто пам’ятати, що у програмі автоматично розрізняється довжина відрізка (сприймається як довжина напрямленого відрізка) і відстань між точками.

Зауважимо, що в той час, коли вікно властивостей перетворення відкрите, робоча область середовища залишається активною. Це дозволяє змінювати параметри перетворення. При цьому з’являється майбутній образ фігури блідого кольору. Після того, як образ відтворено на екрані, його також можна динамічно змінювати і спостерігати за змінами вихідної фігури, чого, наприклад, не можна зробити у середовищі *DG* і *Gran2d*.

Приклад 1. (*Жива Геометрія*) Вписати квадрат у даний трикутник. [20,с.206]

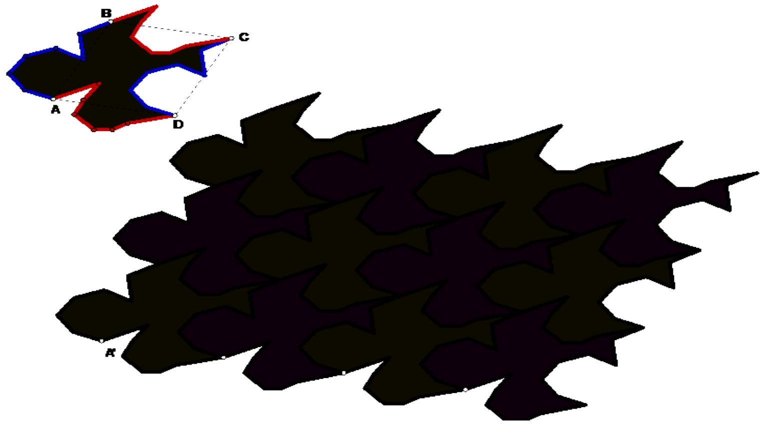
Для побудови моделі (мал.15) пропонуємо спочатку побудувати трикутник, потім обирати на його стороні довільну точку, через яку проводимо перпендикуляр. Відмічаємо точку перетину і ховаємо перпендикуляр. Одержаний відрізок повертаємо на 90^0 так, щоб у результаті отримати квадрат, який однією стороною буде лежати на основі трикутника (інші способи побудови можуть порушити конструкцію). Проводимо пряму через вершину трикутника і вершину квадрата, відмічаємо одержану точку перетину. Якщо змінювати квадрат, то в якийсь момент він стане вписаним у трикутник, що і вимагається умовою задачі. Точну відповідь одержимо, застосувавши гомотетію до початкового квадрату.



Мал.15. Квадрат, вписаний у даний трикутник, у середовищі Жива Геометрія

При заданні гомотетії потрібно вказати центр гомотетії (*Преобразования/Отметить центр* або подвійне натискання на потрібній вершині) та коефіцієнт гомотетії (*Преобразования/Отметить коэфициент*), який дорівнюватиме відношенню *GH/GE'*. Після цього відмічаємо квадрат, який потрібно перетворити, у меню *Преобразования* обираємо *Гомотетия* і отримуємо фігуру, гомотетичну даній.

Приклад 2. (*Живая Геометрия*) Цікаве завдання пропонується у для вивчення паралельного перенесення: замостити площину паркетом власного дизайну (мал.16).



Мал.16. Замощення площини у середовищі Жива Геометрія

Будуємо паралелограм *ABCD*. На сторонах *AB* і *AD* побудуємо довільні ламані. Перенесемо ламану, побудовану на стороні *AB*, на вектор *BC*. Перенесемо ламану, побудовану на стороні *AD*, на вектор *AB*. Серією паралельних перенесень заповнюємо площину.

На перший погляд, інтерфейс середовища *Живая Геометрия* містить замалу кількість інструментів для оперування об’єктами та здійснення над ними певних розрахунків. Але розробниками середовища закладено у ці інструменти достатній потенціал, і якщо звикнути до особливостей роботи у цьому середовищі, а на це потрібен деякий час, то у подальшій навчальній і практичній діяльності можна не лише реалізувати цікаві проекти, а і одержати задоволення від результату.

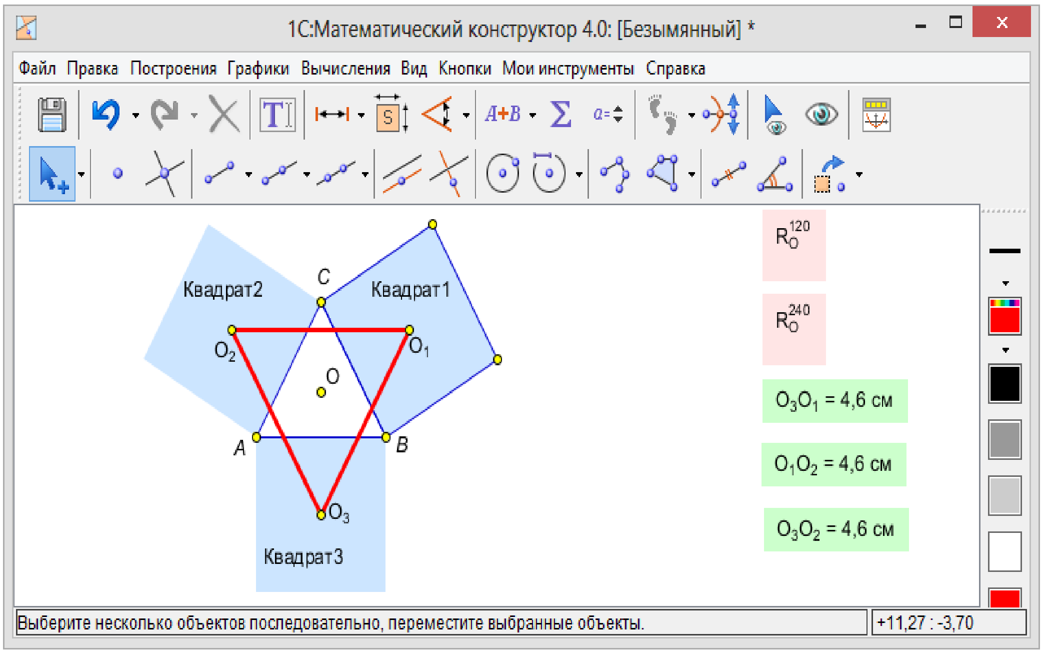
2. У пакеті *Математический конструктор* присутня група команд *Преобразования*, яка включає паралельне перенесення, поворот, осьову симетрію, гомотетію.

Інструмент *Поворот* використовується наступним чином:виділяємо фігури, які будуть обертатися (щоб позначити завершення вибору фігур, потрібно натиснути *Enter* або при виборі останньої фігури натиснути на неї двічі);обираємо інструмент *Поворот* у вкладці *Построения/ Преобразования* або на панелі інструментів; мишею вказуємо центр *O*, причому можна обрати вже існуючу точку чи створити нову (замість цього можна натиснути *Enter*, і відкриється діалог властивостей повороту, в якому різними способами можна задати центр та кут); вказуємо або створюємо три точки *A, B, C*, які задають кут повороту.

У результаті на екрані з'явиться динамічний об'єкт, позначений R_O^{ABC}, який дозволяє не тільки змінювати параметри перетворення, а й виконувати дане перетворення ще раз. Зауважимо, що за замовчуванням поворот здійснюється проти годинникової стрілки.

Приклад 3. (*Математический конструктор*) Зовні сторін правильного трикутника побудовані квадрати. Показати, що їх центри є вершинами правильного трикутника[7,с.51]

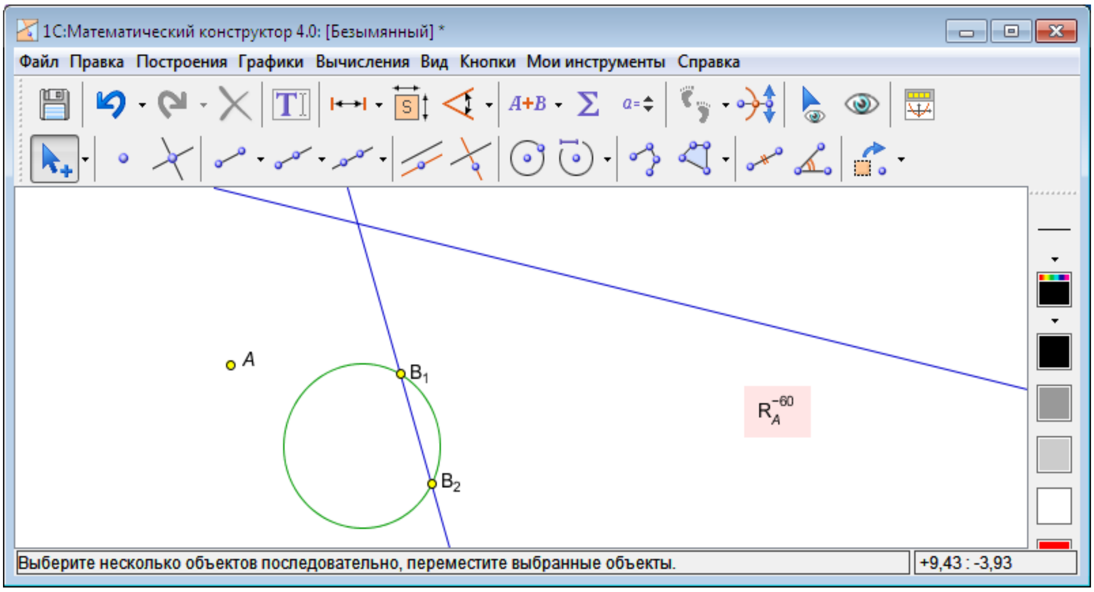
Будуємо правильний трикутник *ABC*. На стороні *BC* будуємо *Квадрат1*. При повороті навколо точки *O* (центр трикутника) на кути 120^0, 240^0 та 360^0 фігура *Квадрат1* переходить у фігури *Квадрат2, Квадрат3* та у себе відповідно. При цих поворотах центр першого квадрату (точка O_1) переходить у точки O_2, O_3 та у себе (рис.6). ВідрізкиO_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 рівні між собою. При зміні положення точок вихідного трикутника довжини сторін трикутника $O_1O_2O_3$ залишаються однаковими.



Мал.17. Модель до прикладу 3 у середовищі *Математический конструктор*

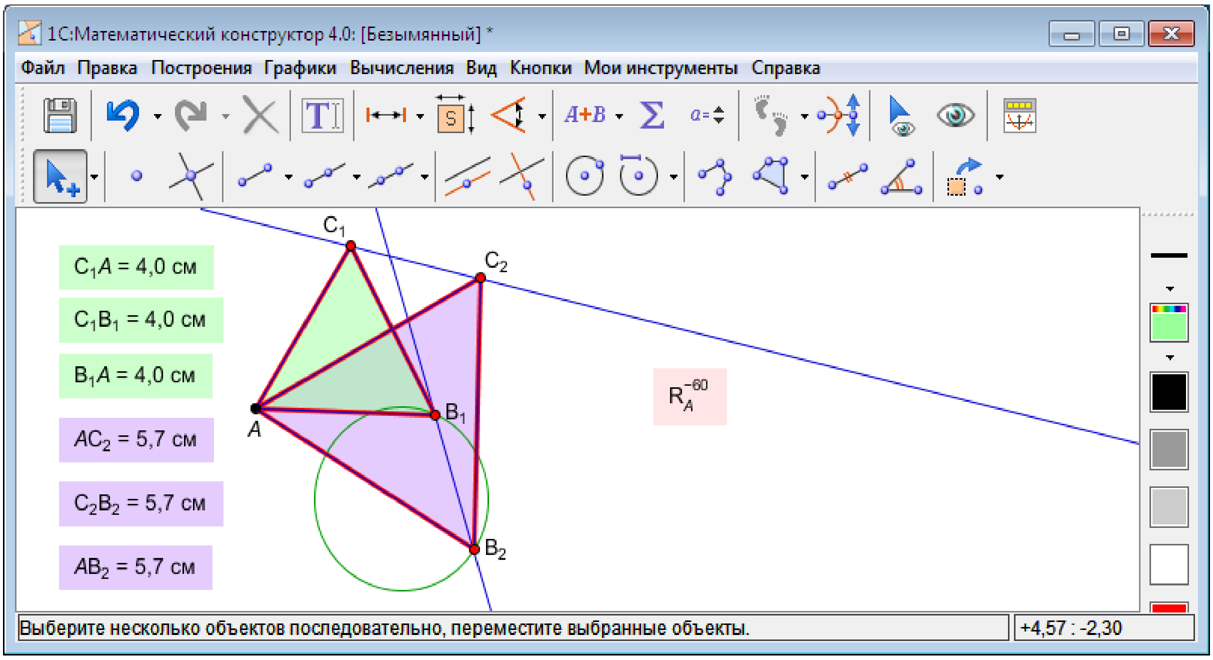
Приклад 4. (*Математический конструктор*) Побудувати рівносторонній трикутник *ABC*, вершина *A* якого знаходиться у заданій точці, вершина *B* лежить на заданому колі, а вершина *C* лежить на заданій прямій.

Припустимо, що трикутник *ABC* вже побудовано. За умовою задачі точка *A* є заданою, точки *B* та *C* потрібно знайти. За властивістю правильного трикутника точка *C* переходить у точку *B* при повороті на кут -60^0 навколо точки *A*. Але точка *C* повинна лежати на даній прямій, тому точка *B* як образ точки *C* при повороті, повинна лежати на образі даної прямої. Тому для побудови точки *B* достатньо повернути дану пряму навколо точки *A* на -60^0 – точка перетину одержаної прямої і даного кола буде шуканою точкою *B*. Оскільки точок перетину прямої з колом може бути 0, 1 або 2, то такою ж буде і кількість розв'язків (мал.18).



Мал.18. Модель до прикладу 4 у середовищі Математичний конструктор

Візьмемо одну з точок перетину (вершину *B* майбутнього трикутника) і з'єднаємо її з точкою А. Якщо наші міркування правильні, то третя вершина правильного трикутника попаде на задану пряму. Будуємо два кола з центрами у точках *A* і B_1 радіусом AB_1та *A* і B_2радіусом AB_2. Точки перетину кіл розташовані на заданій прямій. Вимірювання сторін трикутників показує, що вони рівносторонні (мал.19).



Мал.19. Шукані трикутники до прикладу 4 у середовищі *Математический конструктор*

Середовища *Живая геометрия* і *Математический конструктор* передбачають побудову динамічного сліду, що дозволяє у них не лише розв'язувати задачі на геометричні перетворення, а і на початку вивчення теми реалізувати ідеї, описані нами при залученні середовища *DG*. Зауважимо що розробниками програми *Математический конструктор* пропонується інструмент *Проверить ответ*, який дозволяє перевіряти правильність побудови [23].

3. GeoGebra — вільно-поширювана (GPL) динамічне геометричне середовище, якт дає можливість створювати «живі креслення» для використання в геометрії, алгебрі, планіметрії, зокрема, для побудов за допомогою циркуля і лінійки.

Крім того, у програми присутні багаті можливості роботи з функціями (побудова графіків, обчислення коренів, екстремумів, інтегралів і т. д.) за рахунок команд вбудованої мови (яка, до речі, дозволяє керувати і геометричними побудовами).

Програма написана Маркусом Хохенвартером на мові Java (відповідно працює повільно, але на великій кількості операційних систем). Перекладена на 39 мов.

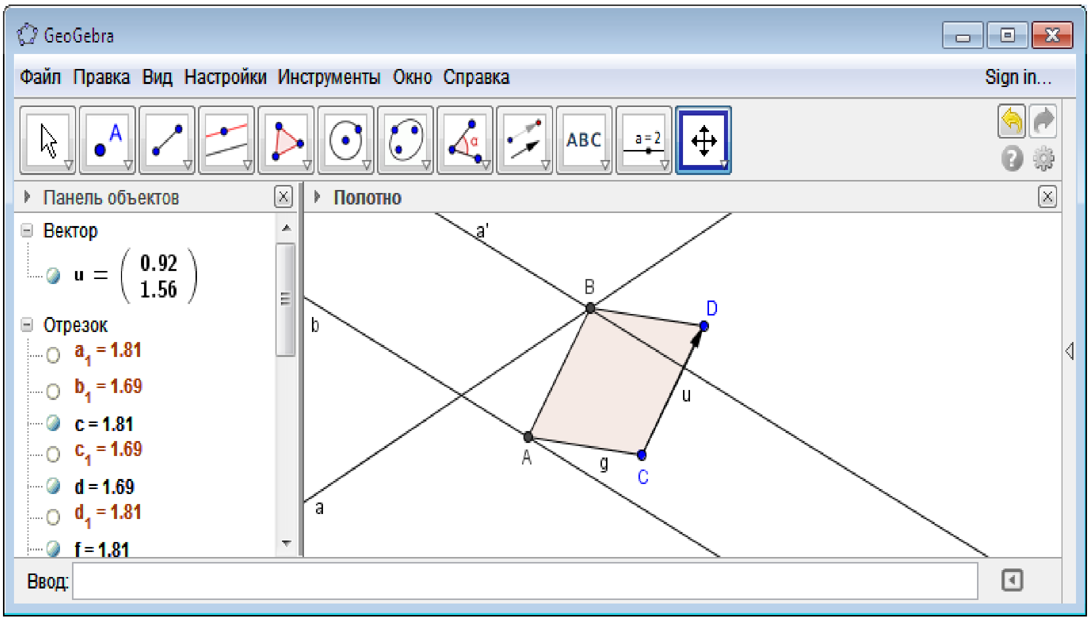
У програмі *GeoGebra* на головній панелі можна знайти наступні інструменти перетворень: симетрія відносно прямої, симетрія відносно точки, відображення відносно кола, поворот навколо точки на кут, паралельне перенесення, гомотетія відносно точки.

До особливостей даного середовища слід віднести динамічну рухомість образу при змінах прообразу. Іншими словами, при русі вихідної фігури автоматично рухається і результуюча фігура. При цьому автономний рух результуючої фігури неможливий. Також неможливо динамічно змінити параметри перетворення – вони задаються окремо. Зауважимо, що перетворення можна задавати через командний рядок.

Приклад 5. (*GeoGebra*) Дано дві прямі *a*та *b*, які перетинаються, і відрізок *CD*. Побудувати паралелограм *ABCD*, вершини *A* та *B* якого лежать відповідно на прямих *a*та *b*. [13, с.5]

Ідея розв'язання наступна. Вектори *AB* та *CD* рівні, тому при паралельному перенесенні на вектор *CD* точка *A* перейде в точку *B*. Але образ точки *A* повинен належати образу прямої *a*, тому точка *B* є точкою перетину прямої *b* з прямою *a'*, в яку переходить пряма *a*.

Таким чином, спочатку будуємо образ прямої а (пряму *a'*) та точку *B*. Потім перенесемо точку *B* на вектор *–CD* і отримуємо точку *A*. З'єднуємо точки і отримуємо шуканий паралелограм *ABCD* (мал.20). Зауважимо, що точку *A* можна було одержати побудовою паралельної до сторони *BC* прямої.



Мал.20. Модель до прикладу 5 у середовищі *GeoGebra*

Оскільки прямі *a* та *b* перетинаються, то прямі *a* та *a'* паралельні, і задача завжди має єдиний розв'язок.

Дослідження можливостей використання програм динамічної математики і напрацювання методик їх використання тривають. Однозначного висновку на користь одного зі згаданих програмних засобів науковці та методисти не дають, тому «власні» знайомство і використання комп'ютерних інструментів у професійній діяльності чекають на кожного сучасного вчителя математики. Цим не тільки підвищується власний досвід використання програмних засобів підтримки навчання математики, а і розширюється коло тих методичних питань, які наразі є відкритими і потребують подальшого дослідження і вирішення. Тому сподіваємось, що наші рекомендації допоможуть вчителям математики критично оцінити можливості розглянутих інтерактивних середовищ з метою раціонального вибору тієї чи іншої програми при вивченні геометричних перетворень на площині.

Розділ 4. Педагогічний експеримент та статистична обробка його результатів

Експеримент – метод педагогічних досліджень, під час якого відбувається активний вплив на педагогічні явища шляхом створення нових умов, що відповідають меті дослідження [12].

Педагогічний експеримент є певним комплексом методів дослідження, який забезпечує науково-об'єктивну та доказову перевірку правильності обґрунтованої на початку дослідження гіпотези. Він дозволяє глибше, ніж інші методи, перевірити ефективність тих чи інших нововведень у навчанні та вихованні, порівняти значення різних факторів у структурі педагогічного процесу й обрати найкращі (оптимальні) їх поєднання для відповідної ситуації, виявити належні умови реалізації певних педагогічних завдань. Експеримент дає можливість відкрити усталені, повторювані, істотні зв'язки між явищами, тобто вивчати закономірності, характерні для педагогічного процесу [24, с.130].

Основна мета експерименту – перевірка теоретичних положень, підтвердження робочої гіпотези, всебічне вивчення теми дослідження.

Суть експерименту полягає в тому, що він досліджуване явище ставить в певні умови, створює планомірно організаційні ситуації, виявляє факти, на основі яких встановлюється залежність між експериментальними діями та їх об'єктивними результатами.

Навчально-педагогічні заклади щорічно готують молодих спеціалістів-вчителів. Протягом кількох років вони опановують методику викладання того чи іншого предмету, причому вагоме місце займає застосування засвоєних знань вже на практиці. Тут майбутні вчителі при проведенні уроків перевіряють свої можливості. Під час проходження педагогічної практики вони, готуючись до проведення уроків, підбирають необхідний матеріал (газети, журнали, підручники, матеріали з Інтернету тощо) консультуючись з *вчителем та методистом*.

З метою підвищення рівня знань, умінь, навичок та рівня математичної культури, був проведений педагогічний експеримент у Тишицькій ЗОШ І-ІІІ ступенів Березнівського району, Рівненської області.

Для експерименту було вибрано два класи 9-А і 9-Б, у яких рівень успішності з математики був однаковий.

Вивчаючи розділ геометрії «Геометричні перетворення» у 9-Б класі, на уроках було застосовано інформаційні технології, а саме, використання програми GRAN-2D (див. додаток 1). Так після проведення мною експериментального уроку учні ще більше зацікавились вивченням геометричних перетворень, у них виникло багато запитань, а це сприяє розвитку їх логічного мислення.

На підсумковому уроці була проведена контрольна робота у 9-А і 9-Б класах(див. додаток 2). Після опрацювання результатів виконання підсумкової контрольної роботи було оцінено навчальні здобутки учнів двох класів, зроблено певні узагальнення й висновки.

9-Б клас при вивченні даного розділу використовував програму GRAN-2D, 9-А клас дану програму не застосовував.

Рівень засвоєння розв’язування задач на геометричні перетворення в учнів 9-Б класу помітно зріс. Це видно із результатів виконання контрольної роботи.

Результати виконання контрольної роботи подані в таблиці.

Бали	Класи	
	9-Б	9-А
	Кількість учнів	
	21	21
	Позитивні результати	
4-6	6	10
7-9	11	9
10-12	4	2

Отже результати контрольної роботи свідчать про те, що застосування інформаційних технологій (програми *GRAN-2D*) дає змогу учням краще засвоїти програмовий матеріал із меншими затратами часу, дає можливість розв’язати більше поурочних вправ, розвиває логічне та аналітичне мислення, зацікавлює дітей.

Я вважаю, що використання програми *GRAN-2D* на уроках геометрії є невід’ємною часткою сучасного навчального процесу.

Висновки

Під час написання даної дипломної роботи згідно із поставленою метою і завданнями було систематизовано теоретичний матеріал по темі «Переміщення в курсі геометрії середньої загальноосвітньої школи», розглянуто методику вивчення даної теми в шкільному курсі математики, яка сприяє підвищенню розуміння геометрії, розвитку просторового мислення, формуванню в учнів вмінь розв’язувати вправи на застосування переміщень, вмінню застосовувати їх при розв’язуванні задач з планіметрії і стереометрії.

Дана робота включає наступні розділи:

1. Науково-теоретичні основи дослідження.
2. Психолого-педагогічні основи дослідження.
3. Методика вивчення геометричних перетворень з використанням ІКТ.
4. Педагогічний експеримент та статистична обробка його результатів.

В першому розділі розкривається значення переміщень в процесі навчання математиці, розвиток просторового мислення при вивченні теми «Переміщення», особливості викладання даної теми згідно діючої програми та підручників. Також у ньому розглядається методика вивчення переміщень, а саме: перетворення фігур, властивості переміщень та методика їх вивчення. Тобто цей розділ містить весь теоретичний матеріал, який передбачено діючою програмою Міністерства освіти і науки України для вивчення в загальноосвітній школі.

Другий розділ «Психолого-педагогічні основи дослідження» показує педагогічну і психологічну сторони даного питання.

Третій розділ «Методика вивчення геометричних перетворень з використанням ІКТ» присвячений розгляду інформаційних онлайн-технологій, які можна використовувати в навчанні. Ми розлянули в цьому розділі деякі з них.

Сьогодні все більш важливим є питання про застосування комп'ютерів у навчанні, і не лише на уроках інформатики, а й на інших – математики, фізики, хімії, біології тощо. Для того щоб зацікавити учнів, на уроках математики можна використовувати презентації, графіки і таблиці, які наочно демонструють матеріал, що вивчається. Існує багато різних спеціально розроблених для вивчення математики програм, програм-тестів, готових презентацій та інше, однак хотілося б звернути увагу вчителів математики на застосування програмних засобів *GRAN1, GRAN-2D*, GRAN-3D, розроблених М.І.Жалдаком.

Використання інформаційних технологій дає змогу створювати принципово нові комп'ютерно- орієнтовані методики навчання і по-новому будувати процес навчання.

Сьогодні, в умовах стрімкого розвитку ІКТ, коли володіння сучасними пристроями передавання, зберігання та обробки інформації є вимогою часу, коли майже кожен досвідчений фахівець вільно володіє навичками роботи в Інтернет-просторі. Педагогічна галузь також вважає за необхідне поставити на службу освіті можливості освітніх локальних та мережевих ресурсів.

Четвертий розділ «Педагогічний експеримент та статистична обробка його результатів». В цьому розділі описано проведення педагогічного експерименту, суть якого полягала в проведенні уроків з теми «Переміщення» в двох класах 9-А і 9-Б, з використанням різної методики пояснення матеріалу. Рівень успішності з математики в двох класах був однаковий.

Вивчаючи розділ геометрії «Геометричні перетворення» у 9-Б класі, на уроках було застосовано інформаційні технології, а саме використання програми *GRAN-2D*. Так після проведення мною експериментального уроку учні ще більше зацікавились вивченням геометричних перетворень, у них виникло багато запитань, а це сприяє розвитку їх логічного мислення.

Результати контрольної роботи свідчать про те, що застосування інформаційних технологій (програми *GRAN-2D*) дає змогу учням краще засвоїти програмний матеріал із меншими затратами часу, дає можливість розв’язати більше поурочних вправ, розвиває логічне та аналітичне мислення, зацікавлює дітей.

Список використаних джерел

1. Балк М. Б.Математика после уроков . Пособиє для учителя./М. Б. Балк,Г. Д. Балк. – М. :Просвещениє, 1971.-112 с.

2. Басанько А. М. За лаштунками підручника з математики. Збірник розвивальних задач . / А. М. Басанько, А. О. Романенко. – К. : Генеза,2007.-75 с.

3. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Вид 2-е, перероб. і доп. Навч. посібник для студ. мат. фак. пед. інст. К.: Вища школа. 1977. 376с.

4. Бурда М.І. Геометрія : підруч. Для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл./ М. І. Бурда, Н.А. Тарасенкова.- К.: Зодіак – ЕКО, 2009.- 240 с.

5. Бурда М.І. Геометрія: Навч. посіб. для 8-9 кл. шк. з поглибл. вивч. математики / М.І.Бурда, Л.М.Савченко.– К.: Освіта, 2004. – 240с.

6. Вишенський В. А. Київські математичні олімпіади 1984 – 1993./Вишенський В. А. – К. : Либідь,1993. – 58 с.

7. Дорофеев С.Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах / ДорофеевС.Н. – Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2002. – 189с.

8. Єршова, А.П. Геометрія для 9 класу: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів [Текст] / А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижанівський, С.В. Єршов. - Харків: Видавництво «РАНОК»,2010. - с.113-155.

9. Жалдак М.І. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://www.zhaldak.npu.edu.ua

10. Жалдак М.І. Компютер на уроках математики: Посібник для вчителів / М. І. Жалдак – К.: Техніка, 1997. – 304 с.

11. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, О.В. Вітюк – К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004. – 168 с.

12. Зайченко І. В. Педагогіка. Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів (Рукопис). / Зайченко І. В. – Чернігів, 2002– 528 с.

13. Заславский А.А. Геометрические преобразования /Заславский А.А. – М.: МЦНМО, 2004. – 86с.

14. Коваль В.В., Крайчук О.В., Клекоць Г.Я. Загальна методика викладання математики, РДГУ, Рівне 2005. 165с.

15. Мерзляк А.Г. Геометрія: Підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. – Х.: Гімназія, 2004. – 272с.

16. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. Для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: проф. рівень. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіновський, В. Б. Полонський,М. С. Якір. – Х. : Гімназія,2010. – 416 с.

17. Погорелов О.В. Геометрія: Навч. посібник для 7-11 кл. – К.: Рад. Шк. 1992.

18. Попадюк І.М. Поворот. //Х.: «Основа», Математика в школах України, № 7 (32-35),2003.

19. Прохорова О. Впроваження сучасних педагогічних технологій в практику роботи.// Математика в школах України, № 31(6-11),2005.

20. Раков С.А, Горох В.П, Осенков К.О., Думчикова О.В., Костіна О.В., Ларін О.Р., Лисиця В.Т., Олійник Т.О., Пікалова В.В.. Відкриття геометрії через комп’ютерні експерименти в пакеті DG. – Харків: ХДПУ, 2000. – 202с.

21. Рудченко І.І. Види рухів. Геометрія. 8 клас. //Х.: «Основа», Математика в школах України, № 15(32-39), 2007.

22. Савченко С.Б. Вміння виділити головне та суттєве в навчальному процесі // Математика. – 2003. - №35. с. 8-11.

23. Семеніхіна О.В.Про інструменти контролю в ІГС Математичний конструктор / О.В.Семеніхіна, М.Г.Друшляк // Інформаційні технології в освіті: IV Всеукраїнська науково-практична конференція, 24-25 квітня

2014р.– Мелітополь, 2014. – С.319-329.

24. Слєпкань З.І. Методика навчання математики : Підручник для студ. спец. пед. навч. закладів. К.: Зодіак ЕКО, 2000.

25. Слєпкань З.І. Психолого – педагогічні основи навчання математики. К.: Радянська школа, 1989.- 158 с.

26. Смалько О. А. Навчаючі програми з математики. Журнал "Математика в школі " №2. / Смалько О. А. – 2000. – 17 с.

27. Столяр А.А. Педагогіка математики. - Мінськ.: Вища школа, 1984.- 360 с.

28. Столяр А.А. Методика викладання математики в середній школі. – Харків, 1992.

29. Чижова О.І. Перетворення фігур на площині //Х.: «Основа», Математика в школах України, № 25(1-8),2004.

30. Шипілова І.Ю. Перетворення симетрії.// Математика. – 2003.- №7(12-14).

Додатки

Додаток 1

Конспект уроку в 9-Б класі

Тема: Поворот.

Мета:

- формувати в учнів уявлення про такі геометричні перетворення як поворот навколо точки на заданий кут;
- розвивати пам’ять та увагу та образне мислення учнів;
- виховувати кмітливість, наполегливість у здобутті знань.

Тип уроку: Засвоєння знань, умінь та навичок.

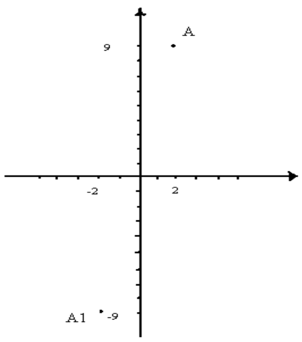
Хід уроку:

І. Перевірка домашнього завдання.

Задача 1.

Знайдіть точку симетричну точці (2;9) відносно початку координат.

Розв’язання:

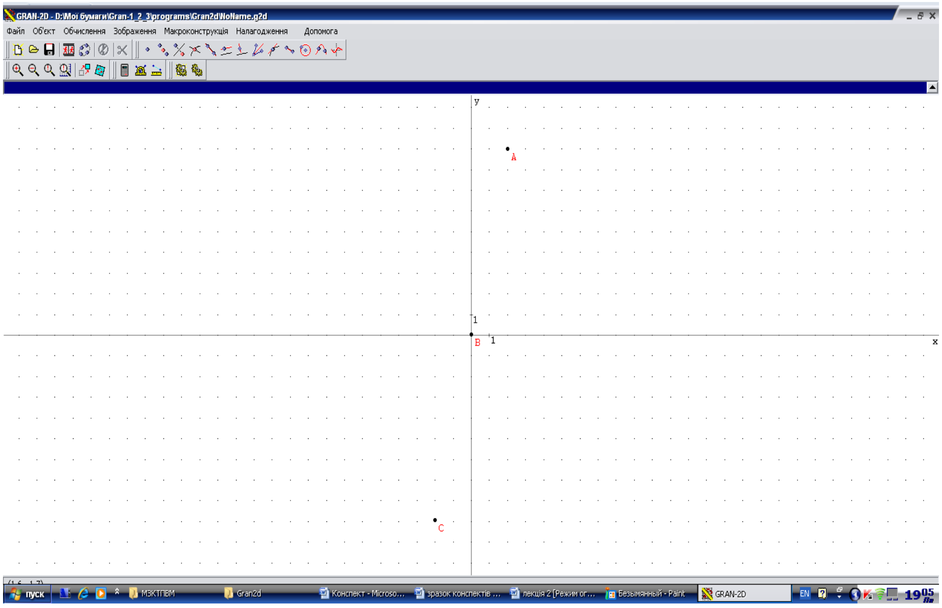


Спроектуємо точку А на вісь Х. Маємо координату 2 симетрична їй -2. Аналогічно спроектуємо точку на вісь У, симетричною координата буде -9. Отже точкою симетричною точці А відносно початку координат буде точка А1 з координатами (-2;-9).

Мал.1

Правильність розв’язання задачі перевіримо використовуючи ППЗ *GRAN–2D*. Створимо задану точку, скориставшись послугою програми *Об’єкт → Створити – точку* . На вкладниці *Конструктор об’єкта* вводимо координати точки *x* і *y* і натиснемо кнопку *Застосувати*.

Потім на панелі інструментів натискаємо кнопку *Створення симетричної точки* після чого наводимо курсив на точку для якої створюємо симетричну і натискаємо ліву клавішу миші. Аналогічно нажимаємо на точку відносно якої створюємо симетричну. В результаті отримаємо точку симетричну даній (Мал 2.)

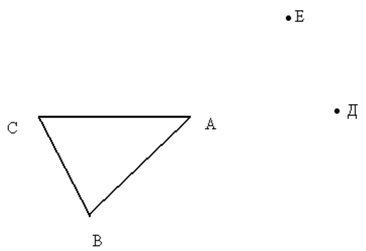


Мал.2

Задача 2.

Побудуйте точки, симетричні двом вершинам трикутника відносно третьої його вершини.

Розв’язання:

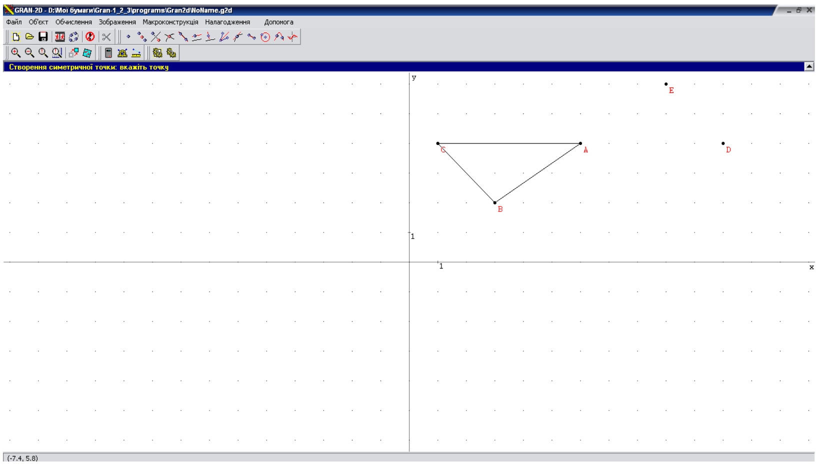


Будуємо довільний трикутник АВС. Продовжуємо сторону ВА і від точки А відкладаємо її довжину, отримаємо точку Е, симетричну точці В. Аналогічно знаходимо точку Д симетричну точці С (мал.3.)

Мал.3.

Знайдемо тепер симетричні точки за допомогою *GRAN–2D*.

Побудуємо довільний трикутник АВС. Скористаємося послугою *Об’єкт →Створити →Ламана.* У вікні *Конструювання об’єкта* вводимо координати вершин трикутника (довільні) після чого натискаємо кнопку *Застосувати*. Потім натискаємо на панелі інструментів кнопку *Створити симетричну точку*. Натискаємо лівою кнопкою миші на точці С і точці А, в результаті отримаємо точку Д симетричну С відносно А. Аналогічно будуємо точку Е симетричну точці С (мал.4).



Мал.4

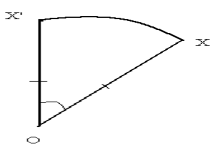
II. Формування мети і завдань уроку.

Вчитель оголошує тему і формує мету уроку. Головна тема уроку зумовлена його місцем у темі й полягає в засвоєнні учнями знань про означення та властивості повороту та формування навичок використання його при розв'язуванні планіметричних задач.

III. Актуалізація опорних знань.

1. Дайте означення симетрії відносно точки і симетрії відносно прямої.
2. Сформулюйте відомі вам властивості відносно точки і симетрії відносно прямої.
3. Що називають осьовою симетрією?
4. Що таке центрально-симетрична фігура?
5. Що називається центральною симетрією?
6. Наведіть приклади центрально-симетричних фігур.

IV. Вивчення нового матеріалу.

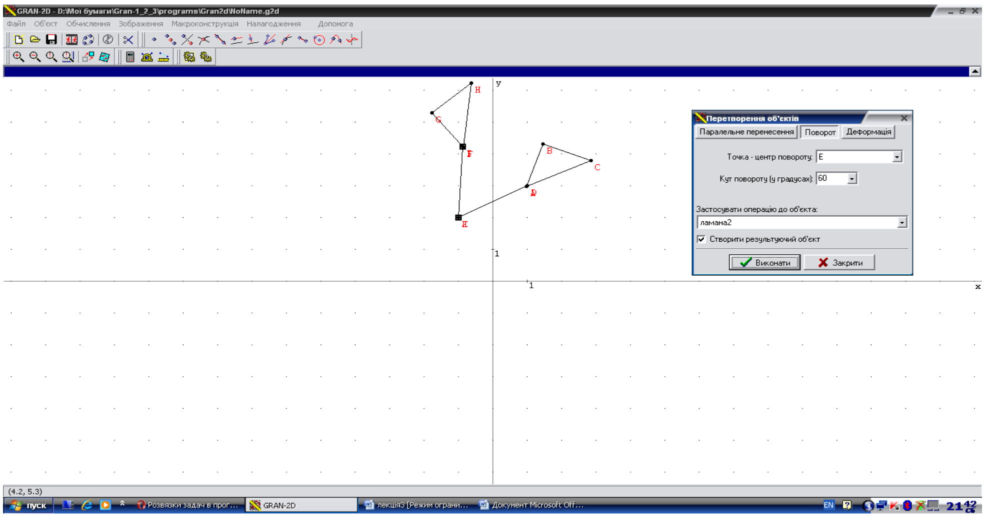


Мал. 5.

Означення.

Поворот фігури F навколо точки О на кут α в заданому напрямку – це перетворення фігури F у фігуру F', внаслідок якого кожна точка X фігури F проходить в точку X’ фігури F’ так, що $OX' = OX$; $\angle XOX' = \alpha$. O – центр повороту, α – кут повороту (мал.5).

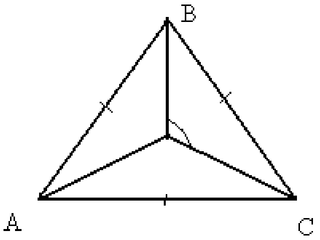
Перетворення фігур при повороті також називається поворотом (мал. 6).



Мал.6.

Фігура, що має симетрію обертання, -- фігура, яка внаслідок повороту навколо деякої точки на кут α ($0^0 < \alpha \leq 180^0$) переходить сама себе.

Приклад:



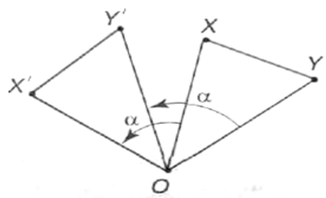
При повороті на α= 120^0 правильний трикутник ABC переходить сам в себе (мал.7.)

Мал.7.

Теорема (Основна властивість повороту).

Поворот є переміщенням.

Доведення. Нехай поворот навколо точки O на кут α точки X, Y фігури F переводить у точки X', Y' фігури F' (мал.8.). Доведемо, що $XY = X'Y$. Розглянемо загальний випадок, коли точки O, X, Y не лежать на одній прямій. $\Delta OXY = \Delta OX'Y$ за двома



Мал.8.

сторонами і кутом між ними. У них *OX = OX', OY =OY* за означенням повороту і ∠XOY= ∠X'OY (кожний з цих кутів дорівнює різниці кута a і кута *YOX*). З рівності трикутників випливає *XY = X'Y'* (випадок, коли точки *O, X*, *Y* лежать на одній прямій розгляньте самостійно).

Наслідок. Поворот має всі властивості руху.

На відміну від попередніх років, кут повороту задається додатнім числом, а сам поворот – центром повороту, кутом повороту та напрямом (за годинниковою стрілкою або проти неї).

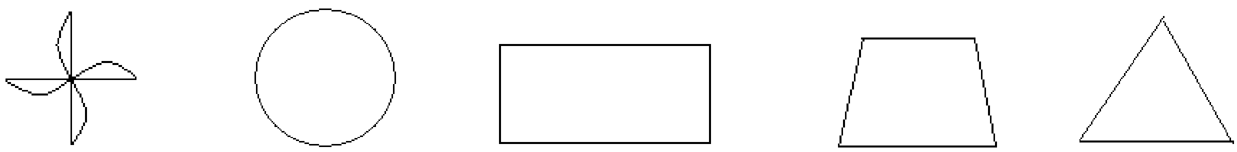
V. Розв'язування задач.

Усно.

1. Точка М(2;…)внаслідок повороту навколо початку координат на 90^0 проти руху стрілки годинника переходить у точку М' (-5;…). Які числа є ординатами точок М і М'?

1) -5;-2; 2) 5;2; 3) 5;-2; 4) -5;2. (*1*)

2. Які з фігур на малюнку мають симетрію обертання?



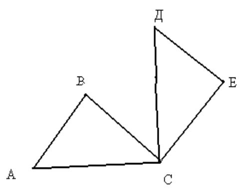
а) б) в) г) д)

(*Відповідь: а, г, д*).

3. Чи існує поворот внаслідок якого сторона прямокутника переходить в іншу сторону? (*Ні*)

4. Чи існує поворот внаслідок якого одна діагональ прямокутника пеза реходить в іншу ? (*Ні*)

Письмово. ***Задача 1.***



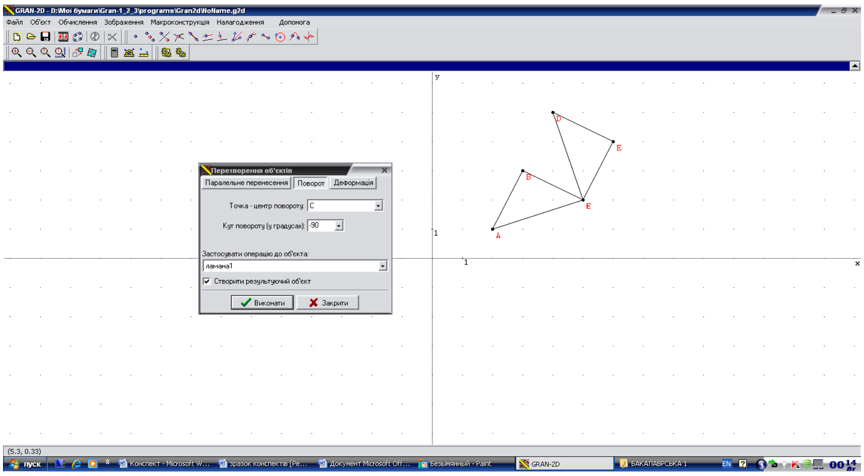
Побудуйте фігуру в яку перейде трикутник АВС під час повороту навколо вершини С на кут 90^0 за годинниковою стрілкою.

Мал.9

Розв’язання :

Будуємо спочатку трикутник АВС. В точці С під прямим кутом до сторони АС проводимо пряму і відкладаємо на ній довжину цієї сторони. Далі добудовуємо дві інші сторони і отримуємо трикутник ДЕС , в який перейшов трикутник АВС під час повороту навколо вершини С на кут 90^0 за годинниковою стрілкою (мал.9).

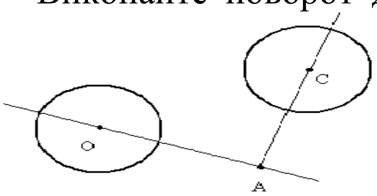
Розв’яжемо дану задачу використовуючи ППЗ GRAN – 2D. Спочатку побудуємо довільний трикутник АВС. Скористаємося послугою *Об’єкт → Створити →Ламана.* У вікні *Конструювання об’єкта* вводимо координати вершин трикутника (довільні) після чого натискаємо кнопку *Застосувати.* Потім звернемося до послуги *Об’єкт– Перетворення – Параметрично.* У вікні *Перетворення об’єктів* вибираємо *Поворот* , вводимо центр повороту, кут повороту і вказуємо об’єкт до якого застосовуватиметься операція. Потім натискаємо кнопку *Виконати* і отримуємо результат (мал.10.).



Мал.10.

Задача 2.

Виконайте поворот даного кола навколо точки А на кут 90^0, якщо точка А лежить поза колом.



Розв’язання :

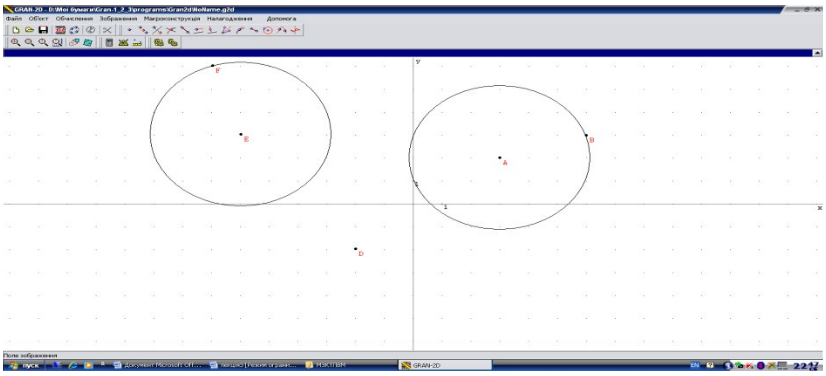
Будуємо коло з центром в точці О і

Мал.11

точку А, що лежить за колом. Через точки А і О проводимо пряму *l* до неї в точці А проводимо пряму *m* під прямим кутом. На прямій *m* від точки А відкладаємо довжину ОА, отримаємо точку С. І в цій точці будуємо коло такого ж радіуса (Мал.11.).

В програмі GRAN – 2D цю задачу можна розв'язати таким способом.

Спочатку побудуємо коло, для цього використаємо послугу *Об'єкт – Створити – Коло* . Потім у вікні *Конструювання об'єкта* вводимо центр кола і точку через яку коло буде проходити і нажимаємо кнопку *Застосувати.* Після цього звернемося до послуги *Об'єкт– Перетворення – Параметрично.* У вікні *Перетворення об'єктів* вибираємо *Поворот* , вводимо центр повороту(точку, що лежить за колом), кут повороту і вказуємо об'єкт до якого застосовуватиметься операція (коло). Потім натискаємо кнопку *Виконати* (мал.12).

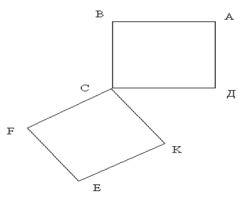


Мал.12.

Задача 3.

Накресліть квадрат. Побудуйте фігуру в яку переходить квадрат АВСД при повороті навколо вершини С на кут 60^0 за годинниковою стрілкою.

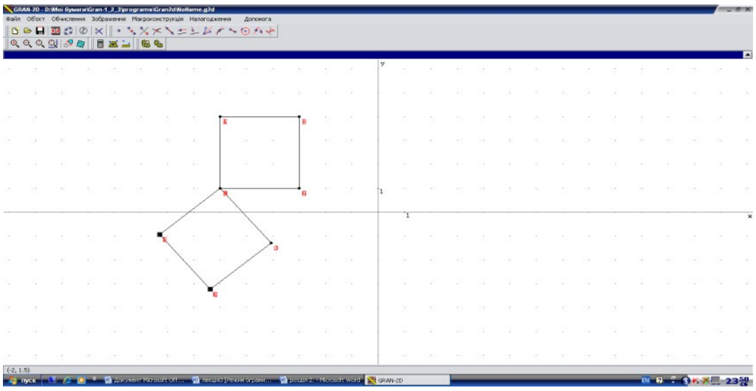
Розв'язання :



Будуємо квадрат АВСД. До сторони СД в точці С проводимо пряму і на ній відкладаємо сторону квадрата. Потім добудовуємо всі інші сторони і отримуємо квадрат (мал.13).

Мал.13.

За допомогою ППЗ GRAN – 2D перевіримо правильність отриманого результату. Для цього звернемось до послуги *Об'єкт – Створити – Ламану*, вводимо координати точок і будуємо квадрат. Потім використаємо операцію *Об'єкт– Перетворення – Параметрично.* У вікні *Перетворення об'єктів* вибираємо *Поворот* , вводимо центр повороту, кут повороту і вказуємо об'єкт до якого застосовуватиметься операція. Потім натискаємо кнопку *Виконати.* В результаті отримаємо результат (мал.14).



Мал.14

VI. Підведення підсумків уроку.

Запитання до класу:

1. Поясніть, що таке поворот?

2. Сформулюйте властивість повороту фігури навколо точки на заданий кут.

3. Що називається фігурою, що має вісь обертання?

4. Чи є правильним твердження: рух, при якому кожний промінь , що виходить із заданої точки, повертається на той самий кут у тому самому напрямі, є поворотом?

5. На який із кутів треба повернути квадрат АВСД навколо його центра симетрії, щоб середина сторони АВ перейшла в середину сторони СД?

1) 120^0 , 2) 180^0, 3) 80^0, 4) 45^0. (*2*)

VII. Домашнє завдання.

Додаток 2

Контрольна робота «Геометричні перетворення»

Варіант 1

Завдання 1-5 мають варіанти відповіді, серед яких лише один правильний. Виберіть правильну, на вашу думку.

(І рівень)

1. Які координати має образ точки $A(-2;\ 5)$ при симетрії відносно осі ординат?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
(2; 5)	(2; –5)	(–2; –5)	(5; –2)	(5; 2)

2. Дано точки $P(-2;\ 3)$ і $M(2;\ -1)$ симетричні відносно точки K. Знайдіть координати точки K.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
(0; 0)	(–2; 2)	(0; 1)	(2; –2)	(0; 2)

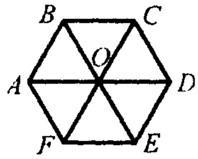
3. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{c}$ образом точки $M(0;\ -1)$ є точка $K(-3;\ 5)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
(–1,5; 2)	(–3; 4)	(3; –6)	(–3; 6)	(0; –5)

4. Точка $A_1(0;\ 4)$ є образом точки $A(0;\ -12)$ при гомотетії з центром у початку координат. Чому дорівнює коефіцієнт гомотетії?

	Б	**В**	**Г**	**Д**
–3	$-\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	–8

5. Точка O – центр правильного шестикутника $ABCDEF$, зображеного на рисунку. Укажіть образ сторони CD при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 120°.



А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
BC	*ED*	*EF*	*AF*	*AB*

(ІІ рівень)

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідний, позначений буквою.

6. Встановіть відповідність між заданими фігурами (1-4) та кількістю осей симетрії, які вони мають (А-Д):

1)	правильний трикутник;	А)	1;
2)	квадрат;	Б)	2;
3)	відрізок;	В)	3;
4)	коло.	Г)	4;
		Д)	безліч.

7.Дано трапецію ABCD. Побудуйте фігуру, на яку відображається дана трапеція при осьовий симетрії з вісью AD.

(ІІІ рівень)

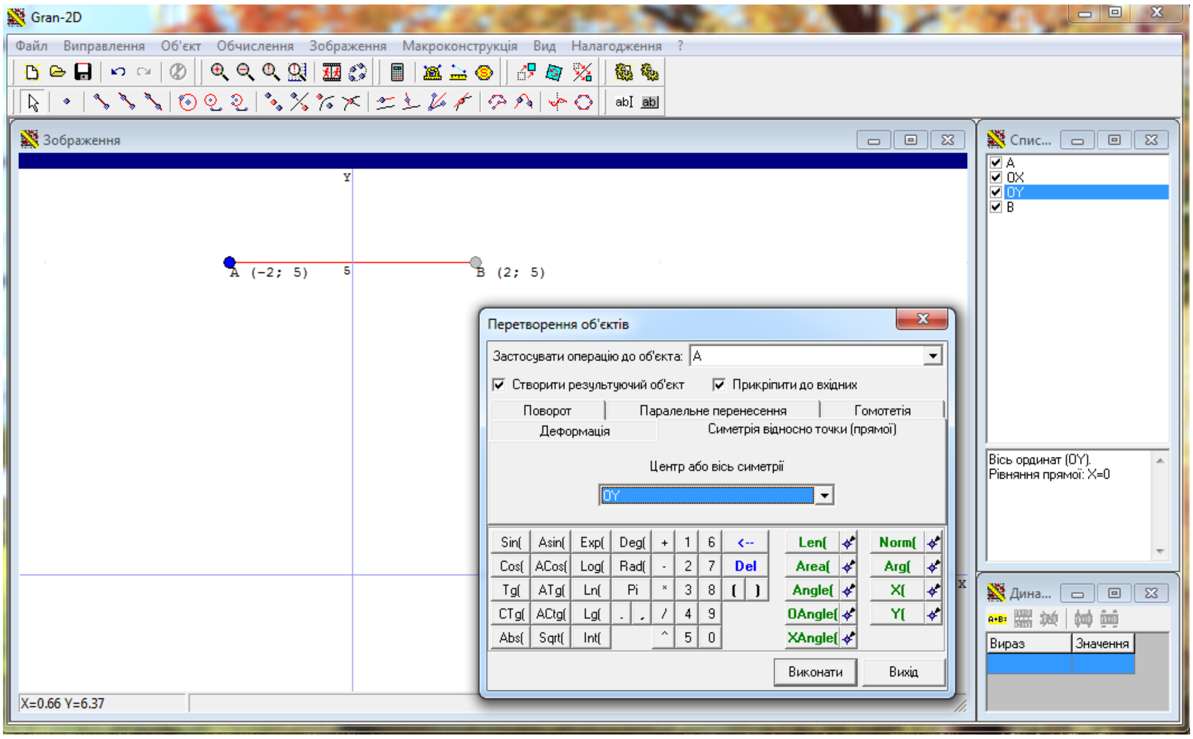
Завдання 8,9 – завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Висновки, зроблені у розв'язанні, повинні бути достатньо обґрунтованими.

8. Побудуйте фігуру , симетричну ΔABC відносно прямої $y=x$, якщо A(-7;6), B(-9;2), C(-1;2). Вкажіть координати вершин отриманої фігури.

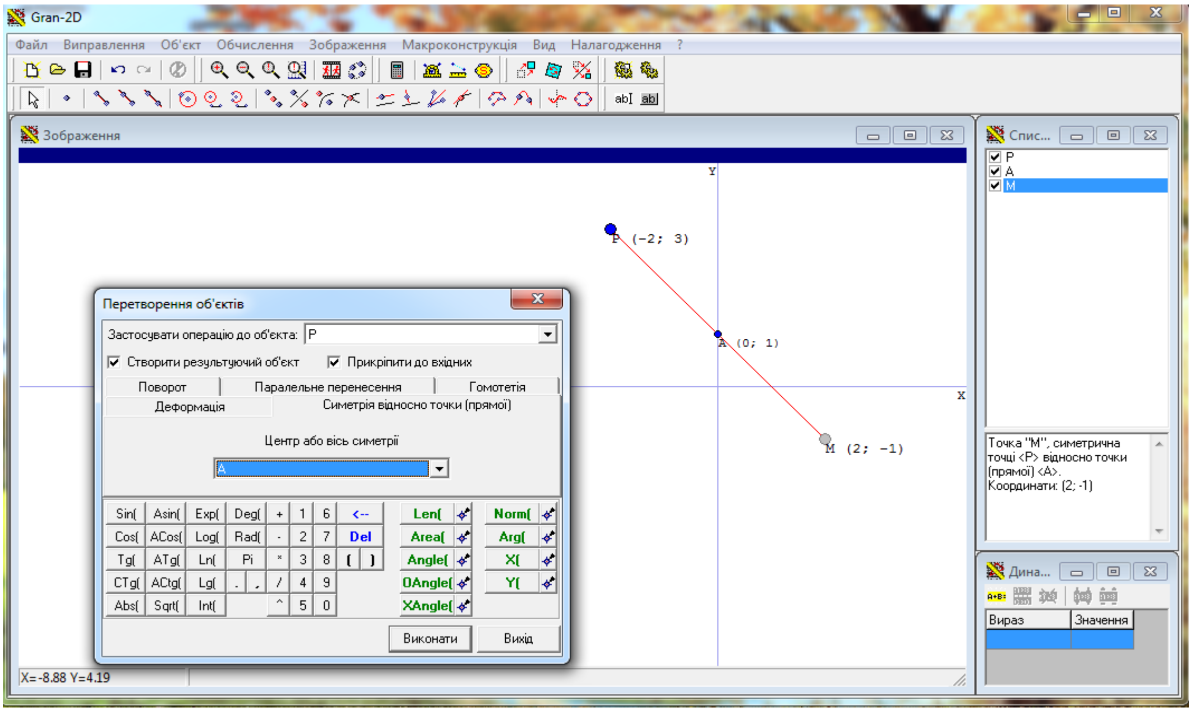
9*. Точки A(-1;5) і B(7; -1) задають кінці діаметра кола. Знайдіть паралельне перенесення, при якому центр даного кола переходить у P'(-5;-3). Запишіть рівняння даного кола.

Відповіді до контрольної роботи

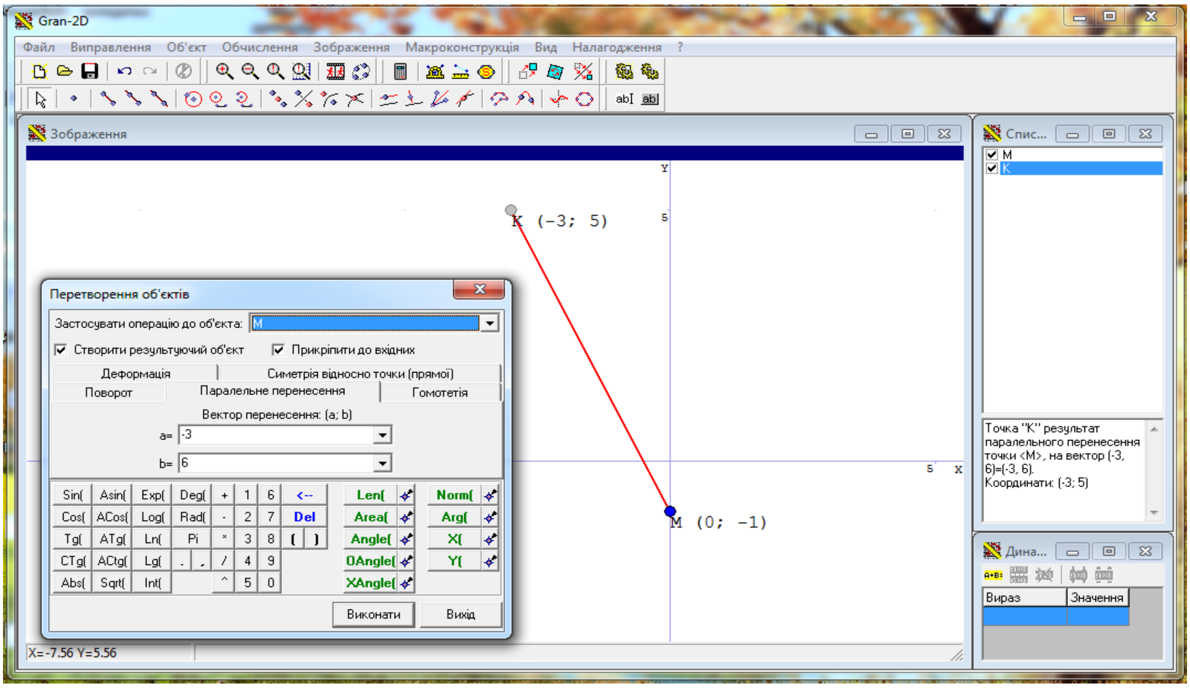
1. А



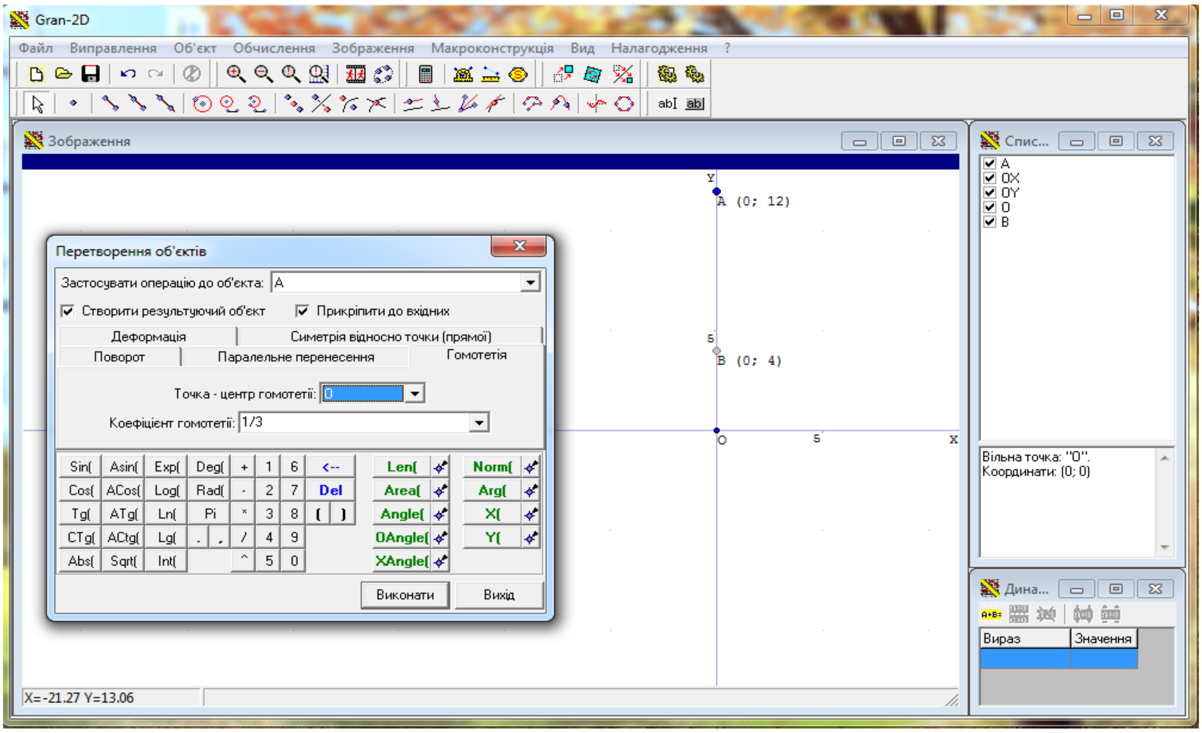
2. В



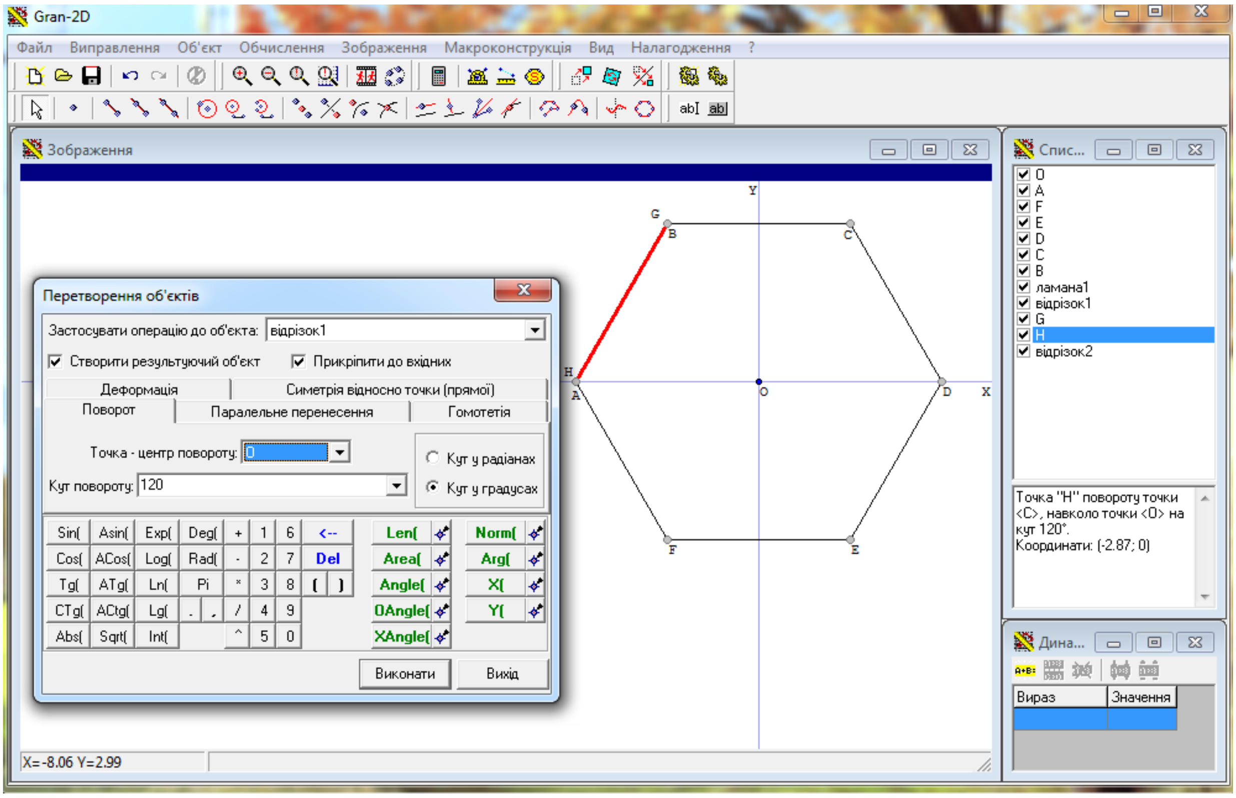
3. Г


Gran-2D
Файл Виправлення Об'єкт Обчислення Зображення Макроконструкція Вид Налагодження ?
Зображення
K (-3; 5)
M (0; -1)
Перетворення об'єктів
Застосувати операцію до об'єкта: M
Створити результуючий об'єкт
Прикріпити до вхідних
Деформація
Симетрія відносно точки (прямої)
Поворот
Паралельне перенесення
Гомотетія
Вектор перенесення: (a; b)
a= -3
b= 6
Виконати
Вихід
X=-7.56 Y=5.56
Точка "K" результат паралельного перенесення точки <M>, на вектор (-3, 6)=(-3, 6).
Координати: (-3; 5)
Вираз
Значення

4. Г


Gran-2D
Файл Виправлення Об'єкт Обчислення Зображення Макроконструкція Вид Налагодження ?
Зображення
A (0; 12)
B (0; 4)
Перетворення об'єктів
Застосувати операцію до об'єкта: A
Створити результуючий об'єкт
Прикріпити до вхідних
Деформація
Симетрія відносно точки (прямої)
Поворот
Паралельне перенесення
Гомотетія
Точка - центр гомотетії: O
Коефіцієнт гомотетії: 1/3
Виконати
Вихід
X=-21.27 Y=13.06
Вільна точка: "O".
Координати: (0; 0)
Вираз
Значення

5. Д


Gran-2D
Файл Виправлення Об'єкт Обчислення Зображення Макроконструкція Вид Налагодження ?
Зображення
Перетворення об'єктів
Застосувати операцію до об'єкта: відрізок1
Створити результуючий об'єкт
Прикріпити до вхідних
Деформація
Симетрія відносно точки (прямої)
Поворот
Паралельне перенесення
Гомотетія
Точка - центр повороту: O
Кут повороту: 120
Кут у радіанах
Кут у градусах
Sin(Asin(Exp(Deg(Cos(ACos(Log(Rad(Tg(ATg(Ln(Pi CTg(ACtg(Lg(Abs(Sqrt(Int(
Del
Len(Area(Angle(OAngle(XAngle(Norm(Arg(X(Y(
Виконати
Вихід
X=-8.06 Y=2.99
Спис...
O A F E D C B ламана1 відрізок1 G H відрізок2
Точка "H" повороту точки <C>, навколо точки <O> на кут 120°.
Координати: (-2.87; 0)
Дина...
Вираз
Значення

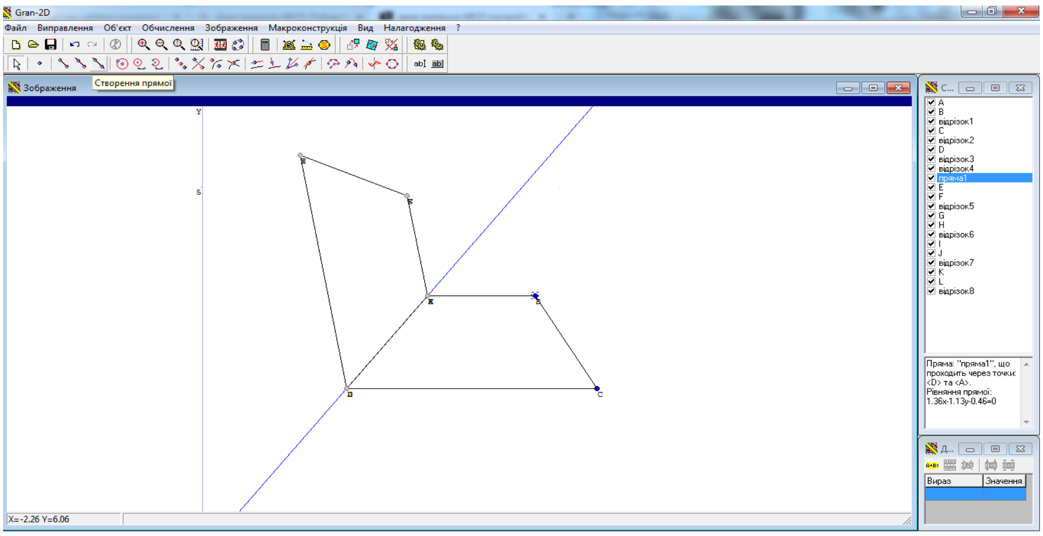
6. 1) –В

2) –Г

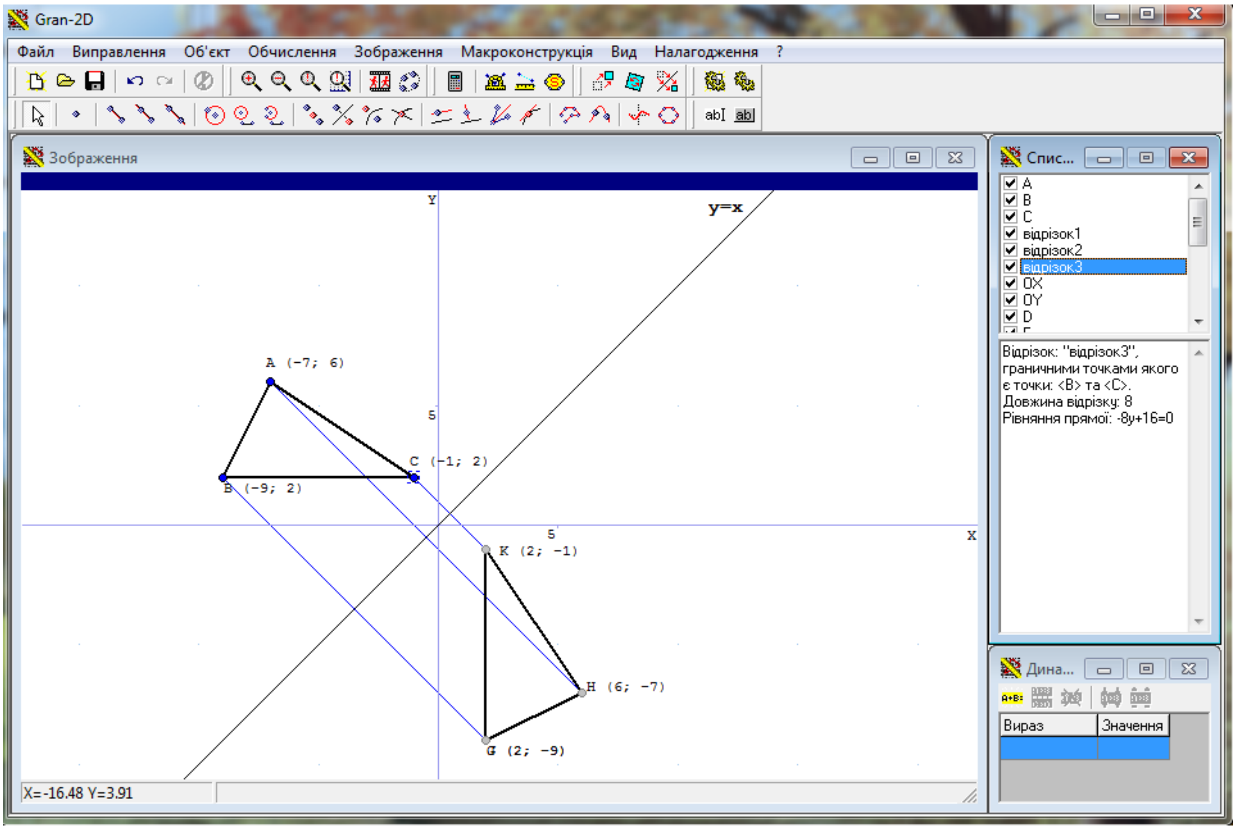
3) –А

4) -Д

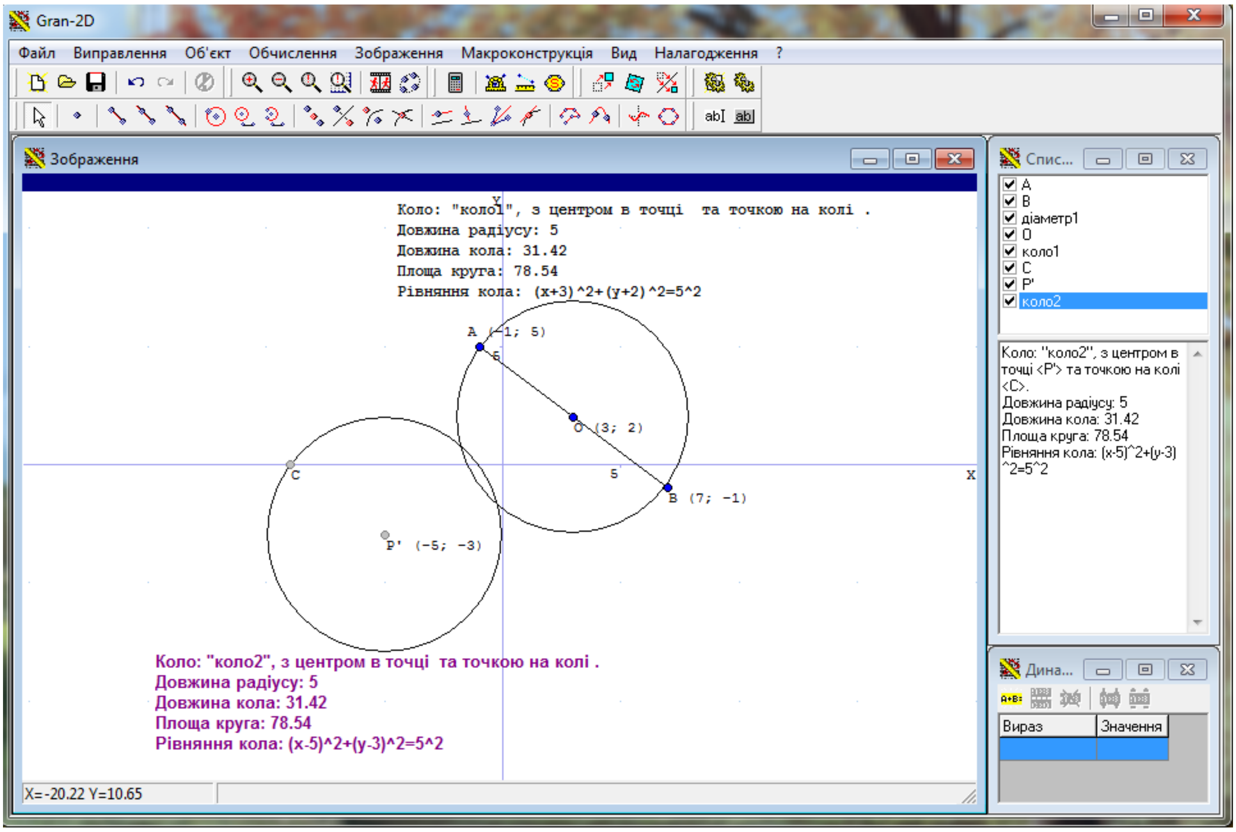
7.


Gran-2D
Файл Виправлення Об'єкт Обчислення Зображення Макроконструкція Вид Налагодження ?
Зображення
Створення прямої
X=-2.26 Y=6.06
Вираз
Значення

8.


Gran-2D
Файл Виправлення Об'єкт Обчислення Зображення Макроконструкція Вид Налагодження ?
Зображення
y=x
A (-7; 6)
C (-1; 2)
B (-9; 2)
K (2; -1)
H (6; -7)
G (2; -9)
X=-16.48 Y=3.91
Спис...
A
B
C
відрізок1
відрізок2
відрізок3
OX
OY
D
Відрізок: "відрізок3", граничними точками якого є точки: <B> та <C>.
Довжина відрізку: 8
Рівняння прямої: -8y+16=0
Дина...
Вираз
Значення

9.


Gran-2D
Файл Виправлення Об'єкт Обчислення Зображення Макроконструкція Вид Налагодження ?
Зображення
Коло: "коло1", з центром в точці та точкою на колі .
Довжина радіусу: 5
Довжина кола: 31.42
Площа круга: 78.54
Рівняння кола: (x+3)^2+(y+2)^2=5^2
A (-1; 5)
O (3; 2)
B (7; -1)
C
P' (-5; -3)
Коло: "коло2", з центром в точці та точкою на колі .
Довжина радіусу: 5
Довжина кола: 31.42
Площа круга: 78.54
Рівняння кола: (x-5)^2+(y-3)^2=5^2
X=-20.22 Y=10.65
Спис...
A
B
діаметр1
O
коло1
C
P'
коло2
Коло: "коло2", з центром в точці <P'> та точкою на колі <C>.
Довжина радіусу: 5
Довжина кола: 31.42
Площа круга: 78.54
Рівняння кола: (x-5)^2+(y-3)^2=5^2
Дина...
Вираз
Значення