ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Розвиток світового, і зокрема, європейського освітнього простору об'єктивно вимагає від української школи адекватної реакції на процеси реформування загальної середньої школи, що відбуваються у провідних країнах світу. Загальна тенденція розвитку старшої школи є її орієнтація на широку диференціацію, варіативність, багатопрофільність, інтеграцію загальної і до профільної освіти.

Диференціація – одна з ключових проблем організації сучасної школи. У старшій школі вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма.

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури.

Програма академічного рівня задає дещо ширший зміст і вищі вимоги до його засвоєння у порівнянні з рівнем стандарту. Вивчення математики на академічному рівні передбачається передусім у тих випадках, коли вона тісно пов'язана з профільними предметами і забезпечує їх ефективне засвоєння. Крім того, за цією програмою здійснюється математична підготовка старшокласників, які не визначилися щодо напряму спеціалізації.

Програма поглибленого вивчення математики розрахована на вивчення математики у 8-11 класах, та передбачає поглиблене вивчення предмету.

Програма профільного рівня передбачає вивчення предмета з орієнтацією на майбутню професію, безпосередньо пов'язану з математикою або її застосуваннями.

Згідно з програмою для профільного рівня на вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей відводиться 35 навчальних годин.

Навчання в профільних фізико-математичних класах передбачає істотне збільшення частки самостійної пізнавальної та практичної діяльності учнів.

Тригонометричні рівняння, нерівності і їх системи всебічно і глибоко досліджувалися і набули важливого значення для всієї математики. Вивчення властивостей тригонометричних функцій і залежностей між ними віднесено до шкільного курсу алгебри.

Дослідженнями тригонометричних рівнянь і нерівностей і їх систем займалися такі відомі математики як Брадіс В.М., Бевз Г.П., Слепкань З.І, Новоселов С.И. та багато інших.

Розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей для учнів дається важко, рівень знань по даній темі дуже низький.

Аналіз психолого-педагогічної та науково-методичної літератури показав, що методичні розробки по навчанню учнів потребують подальшої розробки з врахуванням змін, які відбуваються в сучасній профільній школі. Практична необхідність, недостатня наукова розробленість та соціальна значимість цієї проблеми зумовили вибір теми дослідження.

Тема дослідження – «Методика навчання учнів фізико – математичного профілю розв'язувати тригонометричних рівнянь і нерівностей».

Метою дослідження є: створення ефективної методики вивчення даної теми учнями фізико – математичного профілю з використанням ІКТ.

Об'єкт дослідження – методи розв'язування тригонометричних рівнянь, тригонометричних нерівностей та їх систем.

Предмет дослідження – методичні прийоми використання ІКТ при вивченні теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» в профільних класах.

Основні завдання:

- проаналізувати різні методи і прийоми викладання теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» та ефективність використання їх на практиці, визначити основні недоліки і шляхи їх усунення;
- розробити методичні рекомендації щодо навчання учнів розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей.

Гіпотеза дослідження: організація навчально-виховного процесу в фізико-математичних класах на основі розробленої методики розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей дозволить покращити рівень знань, вміння та навички учнів в порівнянні з традиційною методикою математики.

Методичною основою дослідження стали підручники для учнів фізико – математичного профілю про викладання теми «Тригонометричні рівняння і нерівності», про використання різних методів і прийомів вивчення даної теми.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому, що дані методичні твердження та висновки можна використовувати для вдосконалення навчально – виховного процесу.

Магістерська робота складається з вступу, п'ятьох розділів, списку літератури, висновків і додатків.

В першому розділі викладені науково-теоретичні основи вивчення теми «Тригонометричні рівняння і нерівності».

В другому розділі розглянуто психолого-педагогічні засади вивчення теми «Тригонометричні рівняння і нерівностей» в класах фізико-математичного профілю.

В третьому розділи розглядаються науково – теоретичні особливості навчання розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності. Розглядаються тригонометричні функції, тригонометричні тотожності, методи розв'язання рівнянь і нерівностей. Тут також зроблено акцент на можливість у певних випадках недопущення помилок.

В четвертому розділі описано вплив інформаційно-комунікативних технологій на вивчення даної теми.

В п'ятому розділі описано результати педагогічного експерименту.

РОЗДІЛ І. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ»

1.1. Аналіз програмових вимог до вивчення теми на профільному рівні

Організація навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів передбачає реалізацію особистісно орієнтованої моделі навчання, першочергове завдання якої полягає в тому, щоб розпізнати та розвинути конкретні здібності, схильності, особливості мислення, потенціал кожного учня.

Навчання математики за математичним, фізичним та фізико-математичним профілями передбачає поглиблену, порівняно з академічним рівнем, підготовку учнів з математики в органічному поєднанні з вивченням усіх природничих предметів, міжпредметну інтеграцію на основі застосування математичних методів (зокрема, методу математичного моделювання). При цьому математична та природничо-наукова підготовка в профільних математичних, фізичних і фізико-математичних класах має бути орієнтована як на обов'язкове засвоєння учнями конкретних знань, так і на формування вмінь моделювання реальних процесів. Необхідно також враховувати, що при формуванні компетентностей в галузі природничих наук частина загальнонаукових, загальнонавчальних та соціально-особистісних компетентностей формується за участі гуманітарних та соціально-економічних дисциплін.

У природничих науках, особливо у фізичній, математика є не лише галуззю загальноосвітніх знань, а й методом наукового пізнання. Тому навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів вимагає більш поглибленого, у порівнянні з академічним, рівня її вивчення. Разом з тим курс математики для цих класів відрізняється від академічного не стільки обсягом навчального матеріалу, який мають опанувати учні, скільки рівнем його обґрунтованості, абстрактності, загальності, прикладної спрямованості. Це, з одного боку, сприятиме кращому розумінню учнями значення математики як науки, усвідомленню ними універсальності математичних знань, необхідності повнішого і свідомого володіння математичними методами, а з іншого — формуванню у школярів природничих знань як цілісної системи.

Широке і системне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення всього курсу математики має стати потужним засобом формування в учнів навичок повсякденного користування математикою при вивченні природничих предметів. Це стосується введення понять, виявлення зв’язків між ними, характеру прикладів та ілюстрацій, доведень, побудови системи вправ і завдань, визначення системи контролю. Такий підхід посилить прикладну спрямованість навчання математики, сприятиме формуванню в учнів стійких мотивів до оволодіння математичними знаннями.

Навчання в профільних фізико-математичних та математичних класах передбачає істотне збільшення частки самостійної пізнавальної та практичної діяльності учнів. При цьому основна функція вчителя полягатиме у педагогічному супроводі кожного учня в його пізнавальній діяльності, корекції його навчальних досягнень, допомозі школярам в актуалізації необхідних знань, отриманих ними раніше. Іншими словами, вчитель покликаний не стільки вчити школярів математиці, скільки створювати такі навчальні ситуації, в яких самі учні самостійно чи у співробітництві один з одним (або з учителем) опановують систему математичних знань, умінь та навичок.

З метою створення необхідних умов для більш повної реалізації освітньої, розвивальної та виховної складових навчання математики, врахування інтересів, здібностей, потреб та можливостей учнів, у профільних фізико-математичних та математичних класах у повному обсязі має бути використаний потужний потенціал варіативної складової навчального плану, яка передбачає проведення факультативів, курсів за вибором (елективних курсів). Ці курси, як правило, складаються з невеликих за змістом навчальних модулів, враховують різноманіття інтересів і можливостей учнів, поглиблюють та розширюють основний курс математики відповідно до обраного профілю навчання. З одного боку, елективні курси покликані допомогти учневі переконатися в правильності професійного вибору, сприяти формуванню у старшокласників професійно важливих якостей особистості, мотивувати їхнє самовиховання та вибір професії, з іншого — слугувати розвитку у школярів прикладних математичних знань і вмінь у тих чи інших сферах діяльності, знайомити учнів з основами майбутніх професійних знань. Наприклад, такі курси за вибором: «Застосування математичних моделей у розв’язуванні задач фізики», «Математичні основи економічних знань», «Методи математичної статистики в сучасній біології», «Основи наукової діяльності» тощо.

Провідним принципом, який визначає структуру навчання математики за математичним і фізико-математичним профілями, є моделювання у навчальному процесі елементів діяльності фахівця-математика. Старшокласники повинні навчитись отримувати нові знання, нові наукові чи прикладні результати, застосовувати математику як інструмент для розв’язування прикладних задач, доповідати про одержані результати своєї роботи перед зацікавленою аудиторією.

Реалізація цього принципу в певній мірі може бути забезпечена:

- системою факультативів та елективних курсів, орієнтованих на різні типи мислення (насамперед образного, прикладного, теоретичного), на розвиток різних видів діяльності, формування критичного стилю мислення — необхідної риси професіонала-математика;
- організацією самостійної дослідницької роботи учнів, системою індивідуальних завдань, спрямованих на розвинення математичних здібностей учнів, їхнього інтересу до застосувань математики;
- організацією (у межах варіативного компонента навчального плану) професійно-орієнтованої практики старшокласників.

Навчання математики в класах математичного, фізичного та фізико-математичного профілів має враховувати мету і завдання вивчення курсу, особливості його змісту і структури. Сформульовані у програмі навчальні досягнення учнів до кожної теми полегшать вчителю планування цілей і завдань уроків, дадуть змогу визначити адекватні технології проведення занять, поточного і тематичного оцінювання. Методичні підходи до навчання добираються відповідно до рівня підготовленості учнів, особливостей їх розумової діяльності, а також реальних умов навчання.

Математика займає особливе місце у системі знань людства, виконуючи роль універсального та потужного методу сучасної науки. Тому особливу увагу слід приділити з'ясуванню ролі математики в сферах її застосувань. Зокрема, забезпечити засобами математики формування в учнів правильних уявлень про математичне моделювання та навчити школярів його застосуванню до розв'язування широкого кола прикладних задач, зокрема фізичних. Вивчаючи математику в класах математичного, фізичного та фізико- математичного профілів, старшокласники мають усвідомити, що процес її застосування до розв'язування будь-яких прикладних задач розподіляється на три етапи: 1) формалізація (перехід від ситуації, описаної у задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, і від неї — до чітко сформульованої математичної задачі); 2) розв'язування задачі у межах побудованої моделі; 3) інтерпретація одержаного розв'язку задачі та його застосування до вихідної ситуації.

Одним із головних завдань вивчення математики в класах математичного, фізичного та фізико-математичного профілів є розвиток графічної культури учнів, що зумовлено практичними потребами — робота з графіками, діаграмами, рисунками займає значне місце в діяльності спеціаліста технічного та природничого профілів. Тому особливу увагу при вивченні функцій слід приділити формуванню в учнів умінь встановлювати властивості функції за її графіком, будувати ескізи графіків функцій, заданих аналітичним виразом, у формі таблиці або за експериментально визначеними даними, а також виконувати геометричні перетворення графіків. Необхідно навчити учнів за графіком функції встановлювати її неперервність, точки розриву, проміжки зростання та спадання, знакосталості, найбільше та найменше значення.

Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення GRAN 1, GRAN 2D, GRAN 3D, DG, AGrapher, GeoGebra, бібліотек електронних наочностей та інших. За їх допомогою доступнішим стає вивчення низки тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії: побудова графіків функцій, розв’язування систем рівнянь і нерівностей, знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, побудова перерізів геометричних тіл, обчислення об’ємів тіл обертання тощо.

Доцільною вбачається організація проблемно-пошукової (дослідницької) діяльності учнів на уроках та позакласних і факультативних заняттях з математики.

На опрацювання теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» відводиться 35 годин.

<u>Зі таким змістом навчальної діяльності</u>:

- Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки.
- Найпростіші тригонометричні рівняння. Основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь.
- Тригонометричні нерівності. Тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами.
- Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції.

<u>При яких учень</u> :

формулює означення обернених тригонометричних функцій;

обґрунтовує формули коренів тригонометричних рівнянь $sinx = a, cosx = a, tgx = a, ctgx = a$;

розв’язує тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами.

1.2. Тематичний план

Тригонометричні рівняння і нерівності (35 год.)		
№ з\п	Тема уроку	Кількість годин
1	Обернені тригонометричні функції: y=arccos x, y=arcsin x (означення, властивості, врафіки)	1
2	Обернені тригонометричні функції: y=arctg x, y=arcctg x (означення, властивості, врафіки)	1
3	Розв'язування задач	1
4	Найпростіші тригонометричні рівняння. Рівняння cos $x=a$	1
5	Найпростіші тригонометричні рівняння. Рівняння sin $x=a$	1
6	Найпростіші тригонометричні рівняння. Рівняння tg $x=a$ і ctg $x=a$	1
7	Розв'язування задач	1
8	Основні способи розв'язання тригонометричних рівнянь. Заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь	1
9, 10	Основні способи розв'язання тригонометричних рівнянь. Розв'язання тригонометричних рівнянь зведенням до однієї тригонометричної функції (з однаковим аргументом). Розв'язування задач	2
11, 12	Основні способи розв'язання тригонометричних рівнянь. Розв'язання однорідних тригонометричних рівнянь та зведення тригонометричних рівнянь до однорідного. Розв'язування задач	2
13, 14	Основні способи розв'язання тригонометричних рівнянь. Розв'язання тригонометричних рівнянь виду $f(x)=0$ за допомогою розкладання на множники. Розв'язування задач	2
15	Основні способи розв'язання тригонометричних рівнянь. Відбір коренів тригонометричних рівнянь	1
16, 17	Розв'язування задач	2
18	Контрольна робота № 1	1
19	Основні способи розв'язування систем тригонометричних рівнянь	1
20	Розв'язування задач	1
21	Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь та їх систем	1
22	Розв'язування задач	1
23	Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні	1

	функції	
24	Розв’язування задач	1
25	Найпростіші тригонометричні нерівності	1
26	Розв’язування задач	1
27	Розв’язування тригонометричних нерівностей	1
28	Розв’язування задач	1
29	Тригонометричні рівняння з параметрами	1
30, 31	Розв’язування задач	2
32	Тригонометричні нерівності з параметрами	1
33, 34	Розв’язування задач	2
35	Контрольна робота № 2	1

1.3. Компетентнісний підхід до вивчення теми

Як зазначається навчальними програмами з математики , в основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід (додаток 2), відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, які сприятимуть здатності учня застосовувати свої знання в реальних життєвих ситуаціях, нести відповідальність за свої дії, брати повноцінну участь у житті суспільства, у подальшому забезпечувати своє фахове самовдосконалення. Мета базової загальної середньої освіти: розвиток особистості, яка поєднує в собі творчий потенціал до навчання, ініціативність до саморозвитку й самонавчання в сучасних умовах, здатності ідентифікувати себе як важливу і відповідальну складову українського суспільства, яка готова змінювати і відстоювати національні цінності українського народу.

Важливим чинником розвитку такої особистості є формування в учнів умінь застосовувати набуті знання в реальних життєвих ситуаціях, під час розв’язання практичних завдань і здатності визначати й обґрунтовувати власну життєву позицію, застосовувати в подальшій фаховій діяльності набуті предметні знання, виявляти міжпредметні зв'язки під час вивчення математики, розвивати інтегративне бачення спостережуваних явищ. Науковці наголошують, що одним із головних завдань курсу математики на базовому рівні є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності. Практична компетентність передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- уміє будувати й досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних із ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач;
- уміє оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв'язування задачі; переформульовувати задачу; розчленовувати задачі на складові, встановлювати зв'язки між ними, складати план розв'язання задачі; вибирати засоби розв'язання задачі, їх порівнювати й застосовувати оптимальні; перевіряти правильність розв'язання задачі; аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; узагальнювати задачу, всебічно її розглядати; приймати рішення за результатами розв'язання задачі;
- володіє технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені;
- уміє проектувати і здійснювати алгоритмічну й евристичну діяльність на математичному матеріалі;
- уміє працювати з формулами (розуміти змістове значення кожного елемента формули, знаходити їх числові значення при заданих значеннях змінних, виражати одну змінну через інші);
- уміє читати й будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їх властивості;
- уміє класифікувати і конструювати геометричні фігури на площині й у просторі, встановлювати їх властивості, зображати просторові фігури та

їх елементи, виконувати побудови на зображеннях;

- вміє вимірювати геометричні величини на площині й у просторі, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходити кількісні характеристики фігур (площі та об'єми);
- уміє оцінювати шанси настання тих чи інших подій.

Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою. Мета навчання математики на профільному рівні полягає в забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін і продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням таких завдань:

- формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої мотивації до навчання;
- оволодіння учнями мовою математики системою математичних знань, навичок і вмінь, потрібних у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервності освіти;
- інтелектуальний розвиток особистості, передусім розвиток в учнів логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції;
- екологічне, естетичне, громадянське виховання та формування позитивних рис особистості; формування життєвих і соціально-ціннісних компетентностей учня. Змістове наповнення програми реалізує

компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка надає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в різних сферах.

- Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:
- розпізнає проблеми довкілля, які можна розв'язати математичними методами, формулює їх математичною мовою, досліджує та розв'язує ці проблеми, використовуючи математичні знання та методи, інтерпретує отримані результати з урахуванням конкретних умов і цілей дослідження, застосовує математичні моделі при вивченні профільних предметів (інформатики, фізики, хімії, біології, технологій);
- логічно мислить (аналізує, порівнює, узагальнює і систематизує, класифікує математичні об'єкти за певними властивостями, наводить контрприклади); володіє алгоритмами та евристиками;
- користується джерелами математичної інформації, може самостійно її відшукати, проаналізувати та передати інформацію, подану в різних формах (графічній, табличній, знаково-символьній);
- виконує математичні розрахунки (дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, наближені обчислення тощо), раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення;
- виконує тотожні перетворення алгебраїчних, показникових, логарифмічних, тригонометричних виразів;
- аналізує графіки функціональних залежностей, досліджує їхні властивості; використовує властивості елементарних функцій при аналізі та описуванні реальних явищ, процесів, залежностей;
- володіє методами математичного аналізу в обсязі, що дозволяє досліджувати властивості елементарних функцій, будувати їх графіки і розв'язувати нескладні прикладні задачі;
- обчислює ймовірності випадкових подій, оцінює шанси їх настання;

- зображує геометричні фігури, встановлює і обґрунтовує їхні властивості; застосовує властивості фігур при розв'язуванні задач; вимірює геометричні величини, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходить кількісні характеристики фігур (площі, об'єми).

Окрім того, навчання математики має зробити певний внесок у формування 10 ключових компетентностей :

1. Спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами.
2. Спілкування іноземними мовами.
3. Математична компетентність.
4. Основні компетентності у природничих науках і технологіях.
5. Інформаційно-цифрова компетентність.
6. Уміння вчитися впродовж життя.
7. Ініціативність і підприємливість.
8. Соціальна та громадянська компетентності.
9. Обізнаність та самовираження у сфері культури.
10. Екологічна грамотність і здорове життя.

Тригонометричні рівняння - одна з найскладніших тем у шкільному курсі математики. Тригонометричні рівняння виникають при розв'язуванні задач планіметрії, стереометрії, астрономії, фізики та в інших галузях.

Тригонометричні рівняння і нерівності внесені до основного блоку завдань зовнішнього незалежного оцінювання. Важлива відмінність тригонометричних рівнянь від алгебраїчних полягає в тому, що в рівняннях алгебри кінцеве число коренів, а в тригонометричних – нескінченне, що суттєво ускладнює відбір коренів. Специфікою тригонометричних рівнянь також є неєдині форми запису відповіді. Проаналізуємо зміст теми на базовому і профільному рівнях математичної підготовки старшокласників та здійснимо його логіко-математичний аналіз з точки зору можливостей формування компетентностей учнів у навчанні теми на базовому і профільному рівнях . Логіко-математичний аналіз теми «Тригонометричні рівняння» здійснено за підручником: Мерзляк А.

Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 256 с. Логіко-математичний аналіз теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» здійснено за підручником: Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 400с.

РОЗДІЛ II. ПСИХОЛОГО – ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ»

2.1. Педагогічні засади вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей

Тригонометричними рівняннями називаються рівняння, у яких невідома (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції.

Тригонометричні рівняння, які містять більш-менш складні тригонометричні вирази, є складовою частиною багатьох іспитів, зокрема, зовнішнього незалежного оцінювання. Як відомо не існує єдиного методу, слідуючи якому вдалося б розв'язати будь-яке тригонометричне рівняння чи тригонометричну нерівність. Але загальна мета полягає в перетворені даних в рівнянні тригонометричних виразів так, щоб дане рівняння звелося до простого, або «розпалося» на декілька простих.

У кожному конкретному прикладі необхідно знайти свій спосіб перетворення даного рівняння. Іноді доводиться перебирати різні перетворення, випробовувати різні ідеї, перш ніж вдасться знайти той шлях, який приводить до мети. Успіх тут можна забезпечити лише хороше знання тригонометричних формул і вміння гармонічно проводити тригонометричні перетворення, що виробляється тільки достатньою практикою.

У роботі зазначені основні методи розв'язування тригонометричних рівнянь з функціями одного аргументу та з функціями різних аргументів: спосіб зведення до одного аргументу, розкладання на множники, спосіб розв'язання однорідного рівняння, спосіб введення допоміжного кута, спосіб піднесення до квадрату, графічний спосіб.

Знання різних методів розв'язування тригонометричних рівнянь безперечно неабияк допоможе учням легше і швидше розв'язувати рівняння, однак можливість і вміння аналізувати використаний метод краще сприятиме не допущенню помилок при розв'язувані рівнянь.

Також розроблено методичні рекомендації щодо навчання учнів розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей.

2.2. Психологічні погляди на вивчення теми «Тригонометричні рівняння і нерівності»

Для кращого розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей на нього потрібно дивитися як на «задачу» з психологічної точки зору.

В психологічній і педагогічній літературі немає єдиного пояснення терміну «задача». Різні автори по-різному підходять до питання про співвідношення між суб'єктом і задачею.

Процес розв'язування задачі, як процес розумової діяльності суб'єкта , досліджується психологією.

Можна виділити такі найважливіші функції задач в навчальному процесі:

- навчальна – на задачах навчаються учні, зокрема підводять до вивчення теорії, пов'язують теорію з практикою і т.д.;
- виховна – на задачах виховують кмітливість, культуру мови, графічну культуру, наполегливість тощо;
- розвивальна – на задачах розвивають логічне мислення, просторову уяву, раціоналізаторські здібності;
- контролююча – в контрольних і екзаменаційних роботах найчастіше пропонують задачі.

Процес розв'язання задачі повинен складатися з наступних етапів:

1) аналіз умов задачі;
2) пошук плану розв'язання;
3) реалізація знайденого плану, перевірка і доведення того, що отриманий розв'язок задовольняє умови задачі;
4) аналіз отриманих результатів.

РОЗДІЛ ІІІ. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО ПРОФІЛЮ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

3.1. З історії тригонометрії

Термін «тригонометрія», який походить від грецьких слів «тригон» – трикутник і «метрео» – вимірюю і означає у перекладі «вимірювання трикутників», був запропонований у 1595р. німецьким математиком В.Б.Пітіском (1561-1613).

Тригонометрія, як астрономія і географія, зародилася та розвивалася у Вавилоні, Єгипті, Китаї, Індії та інших країнах. Значного розвитку тригонометрія як частина астрономії набула у Стародавній Греції. Греки першими почали розв'язувати прямокутні трикутники, у зв'язку з чим склали тригонометричні таблиці. У цих таблицях містилися довжини хорд, що відповідали центральним кутам круга сталого радіуса. Фактично це були таблиці синусів, оскільки лінія синусів дорівнює половині хорди.

Перші тригонометричні таблиці було складено давньогрецьким астрономом і математиком Гіппархом (біля 150р. до н.е.). Він увів також географічні координати – широту і довготу. Таблиці синусів складали також індійські астрономи, які розглядали і косинус.

Тригонометричні таблиці високої точності було складено у XV ст. Середньоазіатським учнем ал – Каші (XIV – XV ст.) та німецьким астрономом і математиком Регіомонтаном (1436–1476).

У Росії перші тригонометричні таблиці, в складанні яких брав участь Л.Ф.Магницький(1669–1739), було видано у 1703році.

Вчення про тригонометричні функції почало розвиватися ще у IV – V ст. у працях індійських вчених. Термін «sinus» хоч і було введено латинською мовою у XII ст., але переклали його з індійської «архадживе», що означає «половину хорди».

Регіомонтан (латинізоване ім'я німецького астронома і математика Йоганна Мюллера (1436-1476)) склав також детальні тригонометричні таблиці, завдяки його працям плоска і сферична тригонометрія стала самостійною дисципліною і в Європі.

У IX – X ст. середньоазіатські вчені ввели поняття тангенса, котангенса, секанса (величини, оберненої до косинуса) і косеканса (величини, оберненої до синуса). Термін «тангенс» було введено у 1583р. німецьким математиком Т.Фінком (1561–1656). Латинське слово «tangent» означає «той, що дотикається.

Подальший розвиток тригонометрія отримала в працях видатних астрономів Миколи Коперника (1473-1543), Тихо Браге (1546-1601) і Йогана Кеплера (1571-1630), а також у роботах математика Франсуа Вієта (1540-1603), який повністю розв'язав задачу про визначення всіх елементів плоского або сферичного трикутника за трьома даними.

Довгий час тригонометрія носила чисто геометричний характер. Такою вона була ще в середні століття, хоча іноді в ній використовувалися і аналітичні методи, особливо після появи логарифмів. Поступово тригонометрія органічно увійшла в математичний аналіз, механіку, фізику.

Починаючи з XVII ст., тригонометричні функції почали застосовувати до розв’язання рівнянь, задач механіки, оптики, електрики, радіотехніки, для опису коливальних процесів і т. д. Тому тригонометричні функції всебічно і глибоко досліджувалися і набули важливого значення для всієї математики. Аналітична теорія тригонометричних функцій в основному була створена видатним математиком XVIII ст. Леонардом Ейлером (1707-1783) членом Петербурзької Академії наук.

Таким чином, тригонометрія, що виникла як наука про розв’язання трикутників, з часом розвинулася і в науку про тригонометричні функції. Пізніше частина тригонометрії, яка вивчає властивості тригонометричних функцій і залежності між ними, почали називати гоніометрія. Термін гоніометрія останнім часом практично не вживається.

Вивчення властивостей тригонометричних функцій і залежностей між ними віднесено до шкільного курсу алгебри, а розв’язання трикутників - до курсу геометрії.

3.2. Загальні вказівки до розв'язання тригонометричних рівнянь і нерівностей

Тригонометричним рівнянням називається рівняння, в якому невідоме міститься пів знаком тригонометричних функцій. Розв'язати тригонометричне рівняння – означає знайти всі значення невідомого, при яких рівняння перетворюється на тотожність. Такі значення невідомого називаються його розв'язками, або коренями. Тригонометричні рівняння виду $\sin x = m, \cos x = m, \operatorname{tg} x = m, \operatorname{ctg} x = m$ називаються найпростішими рівняннями. До них також відносять рівняння більш загального вигляду $\sin(ax + b) = m$, $\cos(ax + b) = m$, $\operatorname{tg}(ax + b) = m$, $\operatorname{ctg}(ax + b) = m$, де $a \neq 0$. Після застосування формул для розв'язання найпростіших рівнянь кожне з цих рівнянь зводиться до лінійного алгебраїчного рівняння відносно x . Так розв'язуючи рівняння $\operatorname{tg}(ax + b) = m$, дістанемо:

$$ax + b = \operatorname{arctg} m + k\pi,$$

звідки

$$ax = \operatorname{arctg} m - b + k\pi,$$

і, отже,

$$x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} m - \frac{b}{a} + \frac{k\pi}{a},$$

де k– довільне ціле число.

Отже, процес аналітичного розв'язування тригонометричного рівняння полягає у зведені його до одного або кількох найпростіших рівнянь і їх розв'язання.

Зазначимо, що розв'язуючи тригонометричне рівняння, внаслідок деяких перетворень можна дістати рівняння, не еквівалентне даному рівнянню.

З курсу алгебри відомі такі найбільш поширені випадки порушення еквівалентності рівнянь:

1. Множення обох частин рівняння на многочлен від невідомого може привести до появи сторонніх коренів. Стороннім коренем можуть бути ті значення невідомого, при яких цей многочлен дорівнює нулеві.

При розв’язуванні рівняння, яке має невідоме в знаменнику дробу, доводиться обидві частини його множити на спільний знаменник, що може призвести до появи сторонніх коренів.

2. Піднесення обох частин рівняння до степеня з тим самим показником може призвести до появи сторонніх коренів.

3. Ділення обох частин рівняння на многочлен від невідомого може призвести до втрати коренів. Утраченими можуть бути тільки ті значення невідомого, при яких цей многочлен дорівнює нулеві.

4. Додавання до обох частин рівняння виразу, що має невідоме в знаменнику, може призвести до втрати коренів і до появи сторонніх коренів. Утраченими або сторонніми коренями можуть бути тільки ті значення невідомого, при яких знаменник цього виразу дорівнює нулеві.

При розв’язуванні тригонометричних рівнянь може порушитися еквівалентність не тільки внаслідок зазначених перетворень, але і внаслідок перетворень тригонометричних.

Розв’язуючи тригонометричні рівняння, слід не допускати втрати коренів і обов’язково перевіряти розв’язки тих рівнянь, при розв’язування яких могли виникнути сторонні корені. Перевірку треба виконувати, підставляючи всі корені в дане рівняння (яке не зазнало перетворень) [14].

Наприклад, розв’язуючи рівняння $2\cos x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = \sin x,$

дістанемо

$2\sin x + 1 = \sin x, \sin x = -1$

звідки

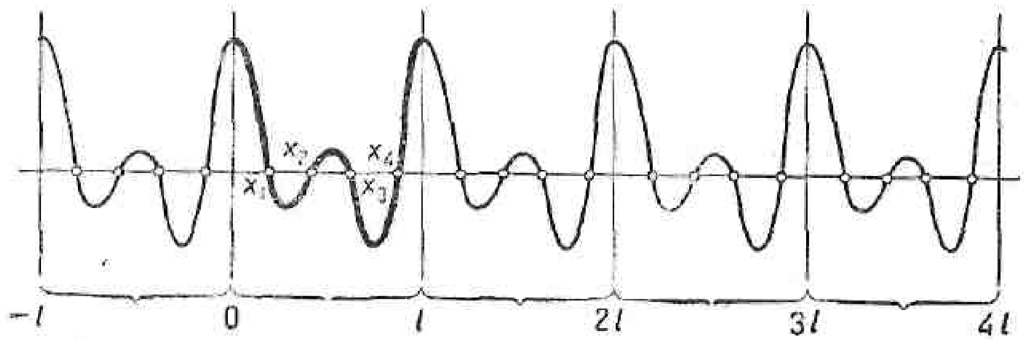
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Корені, що визначаються цією формулою, є сторонніми для даного рівняння, оскільки при $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ліва частина даного рівняння, позбавлена смислу. Рівняння не має розв’язків.

3.3. Про завдання розв'язання тригонометричних рівнянь і нерівностей

Тригонометричні рівняння, як правило, мають нескінченну безліч розв'язків, причому зазвичай спільні розв'язки (тобто множина всіх рішень) задаються однією або кількома формулами (серіями) з цілочисельними параметрами.

У звичайних шкільних вправах розглядаються тригонометричні рівняння виду $f(x) = 0$, де $f(x)$ – періодична функція.



Період l цієї функції будемо називати періодом рівняння. Для розв'язання рівняння, що має період, досить знайти всі його розв'язки, що належать будь-якому півсегменту, наприклад , $0 \le x < l$ по довжині рівному періоду. Нехай $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – множина всіх розв'язків даного рівняння, що належать проміжку $0 \le x < l,$ тоді, з періодичності даного рівняння , множину всіх його розв'язків можна записати у вигляді двосторонніх арифметичних прогресій $x_1 + k_1 l, x_2 + k_2 l, \dots, x_n + k_n l,$ (де $k_1, k_2, \dots, k_n$- довільні цілі числа) з різницею, рівною l. Так, першу серію в розгорнутому вигляді можна записати таким чином:

$$\dots, x_1 - 2l, x_1 - l, x_1, x_1 + l,\ x_1 + 2l, \dots$$

Ми вважаємо корисним, починаючи з першого ж рівняння, пропонувати учням час від часу записувати спільний розв'язок в розгорнутому вигляді. Наприклад, для найпростішого рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ цей запис буде виглядати наступним чином:

$$\left.\begin{array}{c} \dots, \frac{\pi}{3} - 4\pi, \frac{\pi}{3} - 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2\pi, \frac{\pi}{3} + 4\pi, \dots \\ \dots, -\frac{\pi}{3} - 4\pi, -\frac{\pi}{3} - 2\pi, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} + 2\pi, -\frac{\pi}{3} + 4\pi, \dots \end{array}\right\}$$

Для рівняння $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ будемо мати:

$$3x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

звідки

$$x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3}k\pi \\ \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{array}{c} \dots, \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{4}{3}k\pi, \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{2}{3}k\pi, \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3}k\pi, \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{4}{3}k\pi, \dots \\ \dots, \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{4}{3}k\pi, \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}k\pi, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{3}k\pi, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4}{3}k\pi, \dots \end{array}\right\}$$

Такий детальний запис дає можливість учням усвідомити множину часткових рішень, які записано коротко у вигляді формули загального розв'язку.

Якщо загальний розв'язок тригонометричного рівняння задано декількома серіями, то не виключена можливість, що деякі розв'язки зустрічаються в декількох серіях. Такі розв'язки будемо називати повторюваними. На відміну від алгебраїчних рівнянь, для тригонометричних рівнянь (в елементарному викладі) поняття кратного кореня не вводиться, тому всякий корінь, що повторюється рахується один раз.

3.4. Про особливі розв'язки

Поняття кореня рівняння $f(x) = \varphi(x)$ може бути узагальнено в наступному напрямку: якщо число a не належить області визначення рівняння (хоча б одна з функцій $f(x)$ або $\varphi(x)$ при $x = a$ втрачає смисл), але $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - \varphi(x)) = 0$, то число a вважається коренем (особливим) даного рівняння.

Послідовне проведення в шкільному курсі зазначеної точки зору ми вважаємо нереальним, оскільки учні не мають достатніх знань і навичок з теорії границь. Крім того, в рамках шкільного курсу введення поняття особливого розв’язку засноване на принципі продовження функції по неперервності.

Зважаючи на викладене, в шкільному курсі математики слід відмовитись від поняття розв'язку рівняння в особливому випадку.

Будь-яке значення невідомого, при якому ліва або права частина (хоча б одна) рівняння, втрачає сенс, не повинно вважатися розв’язком рівняння.

При розв’язанні рівнянь елементарними методами дане рівняння піддається ряду послідовних перетворень, поки не вийде рівняння (або сукупність рівнянь), яке учні вміють розв’язувати. У цій послідовності (кінцевої) рівняння при переході до подальшого рівняння може змінитися область визначення попереднього рівняння. У зв'язку зі зміною області визначення можливо як набуття сторонніх розв’язків (при розширенні області визначення), так і втрата розв’язків (при звуженні області визначення). Щоб врахувати зміни багатьох розв’язків рівняння, треба в процесі розв’язання рівняння стежити не тільки за самими перетвореннями, а й за послідовними змінами області визначення. Встановивши область визначення вихідного рівняння, треба встановлювати область визначення кожного рівняння отриманої послідовності.

Рекомендація стежити за областю визначення рівняння на кожному кроці процесу розв’язання має наступну негативну сторону: вимога скрупульозно виписувати всі умови, при яких обидві частини кожного з розглянутих рівнянь мають сенс, подовжить весь процес розв’язання рівняння і може внести до нього значні ускладнення. Тому на практиці можна робити інакше. При спрощенні аналітичних виразів та рівнянь лише в рідкісних випадках виконуються перетворення, що звужують область визначення; найбільш часто зустрічаються перетворення, як, наприклад, скорочення дробових виразів, "відкидання" спільного знаменника, скорочення взаємно протилежних доданків, почленні зведення рівняння до натурального степеня, не звужують область визначення, а можуть її розширити. Отже, при таких перетвореннях можлива лише поява сторонніх, але не втрата розв’язків; тому достатньо випробувати отримані значення невідомого шляхом підстановки у вихідне рівняння з метою усунення сторонніх розв'язків.

Приклад. Дано рівняння $\frac{1+\cos 2x}{2\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$ (1)

Перетворивши, отримаємо $\frac{\cos x(\sin x - 1)}{\sin x} = 0,$ (2)

$$\cos x = 0, \sin x = 1, \quad (3)$$

і, нарешті, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Простежимо за зміною області визначення.

Область визначення рівняння (1) така: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ і $x \neq k\pi$; вона знаходиться із умов $\cos x \neq 0, \cos 2x \neq 1$.

Значення x, що не належать області визначення, знаходяться із сукупності рівнянь $\cos x = 0, \cos 2x = 1$ звідки $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ і $x = k\pi$.

Область визначення рівняння (2) така: $x \neq k\pi$; вона знаходиться із умови $\sin x \neq 0$.

Область визначення сукупності рівнянь (3) – множина всіх дійсних чисел.

При переході від рівняння (1) до рівняння (2) розширення області визначення відбулося через скорочення дробових виразів: відпадає умова $\cos x \neq 0$.

При переході від рівняння (2) до сукупності рівнянь (3) відпадає умова $\sin x \neq 0$.

У даному прикладі всі розв'язки виявилися сторонніми.

3.5. Про перевірку коренів

Перевірка коренів рівняння може переслідувати дві мети відповідно до наступних двох випадків:

- по-перше, в процесі розв'язання будується ланцюжок рівнянь, нееквівалентних між собою.

- по-друге, в процесі розв'язання будується ланцюжок рівнянь, еквівалентних між собою.

У першому випадку перевірка коренів є складовою частиною розв'язання.

У другому випадку з математичної точки зору ніякої перевірки коренів не потрібно, якщо, в процесі розв’язання не допущено помилок. Вимога виконати перевірку може мати лише дидактичні цілі (самоконтроль).

У всіх випадках учню повинна бути ясна мета перевірки - чи потрібна вона взагалі або чи є лише засобом контролю. Щоб відповісти на це питання, учень повинен чітко усвідомити весь процес розв’язання рівняння. Ми вважаємо що є неправильним вимагати виконувати перевірку в усіх випадках. Звикнувши завжди робити перевірку, учні перестануть замислюватися, навіщо вони її робили.

Невиконання перевірки в першому випадку слід вважати як математичну помилку. Перевірка другого роду виконується лише в окремих випадках за спеціальним указом вчителя, а також у тих випадках, коли учень не впевнений у правильному розв’язанні або сумнівається у правильності відповіді.

Перевірка коренів необхідна, якщо в процесі розв’язання рівняння застосовується звільнення від радикалів, скорочення дробових виразів на загальний функціональний множник чисельника і знаменника і звільнення від дробів. Перевірка також необхідна при розв’язанні рівняння $f(x) = 0$ способом розкладання на множники, якщо хоча б один із множників лівої частини при деяких значеннях невідомого втрачає сенс.

3.6. Основні тригонометричні формули

1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу. Якщо взяти значення всіх 6 тригонометричних функцій при одному значенні аргументу, то між ними виявляються залежності, які виражаються такою «системою основних співвідношень»:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Цінність цих 5 основних співвідношень у тому, що вони дають можливість, вважаючи відомим значення якої-небудь однієї з 6 тригонометричних функцій, виразити залежно від нього значення 5 інших.

З 5 основних співвідношень корисно вивести (суто аналітично, не вдаючись до рисунка) ще кілька формул. Важливіші за інші формули

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha \qquad\qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

які легко дістати, подаючи $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

2.Формули зведення. Формули зведення дають можливість, знаючи тригонометричні функції для будь-яких дуг I чверті, знаходити за допомогою дуже простого розрахунку їх значення для будь-яких дуг і відіграють велику роль у практичних застосуваннях тригонометрії; завдяки цьому навіть тригонометричні таблиці складаються лише для дуг I чверті. Формул цих багато, вони часто бувають потрібні, і завдання викладача є не лише виведення, а й вказування способів швидкого їх відтворення. Формули зведення запишемо у вигляді таблиць:

Назва функції не змінюється					
x	$-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\cos x$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$

Назва функції змінюється				
x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$

Запам’ятати їх усі, зрозуміло, нелегко, а потреба в них зустрічається часто. Існує особливе *мнемонічне* правило, яке наводиться в різних варіантах у багатьох підручниках і зводиться до такого: якщо в лівій частині формули зведення фігурує дуга в ціле число півкіл ($0, \pi, 2\pi$), то в правій треба писати ту саму функцію, що ц у лівій; в інших випадках у правій частині записується *функція*, тобто якщо зліва синус, косинус, тангенс, то справа відповідно косинус, синус, тангенс і навпаки; перед знаком функції справа пишуть знак плюс або мінус залежно від того, чи має функція, записана зліва, додатне чи від’ємне значення у випадку, коли дуга α належить до дуги I чверті. Щоб це правило було застосоване до формул зведення від’ємних дуг, треба вважати, що $-\alpha = 0-\alpha$.

Приклади. Якщо зліва $\cos(\pi+\alpha)$, справа пишемо $\cos\alpha$ із знаком мінус, бо при дузі a, яка належить I чверті, дуга $\pi+\alpha$ належить III чверті, а косинус в III чверті від'ємний; отже, $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$. Якщо ж зліва $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)$, пишемо справа $\operatorname{ctg}\alpha$ із знаком плюс, бо при a в I чверті дуга $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ теж в I чверті, а тангенс в I чверті додатний.

Хоч це мнемонічне правило формулюється досить довго, учні легко його схоплюють і охоче застосовують. Давати яке-небудь доведення цього правила не потрібно: воно випливає з розгляду повного переліку формул зведення[4].

3.Формули додавання і віднімання.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$$

4. Формули подвійного аргументу. Це формули, які виражають функцію 2α через функції аргументу α.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

5.Формули половинного аргументу.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Ці три формули можна також розглядати як формули зниження степеню.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

6.Формули перетворення суми в добуток.

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

7. Формули перетворення добутку на суму.

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

8. Універсальна тригонометрична підстановка (формули, що виражають $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$).

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Дані формули широко використовуються для спрощення виразів, доведення тотожностей, розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей та ін.

9. Формули потрійного кута.

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

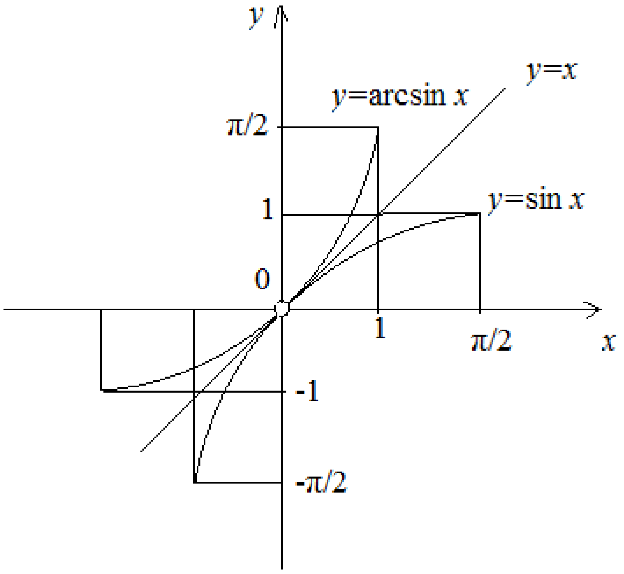
$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

3.7. Обернені тригонометричні функції

Функція, обернена до $y = \sin x$. Функція $y = \arcsin x$ є оберненою до функції $y = \sin x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Графік функції $y = \arcsin x$ дістанемо з графіка функції $y = \sin x$,, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$.

Властивості функції $y = \arcsin x$:



1) Областю визначення функції є множина $[-1; 1]$, областю значень – множина $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При цьому, якщо $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ то $0 \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, а якщо $-1 \le x \le 0$, то $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le 0$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат (функція непарна), тобто $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

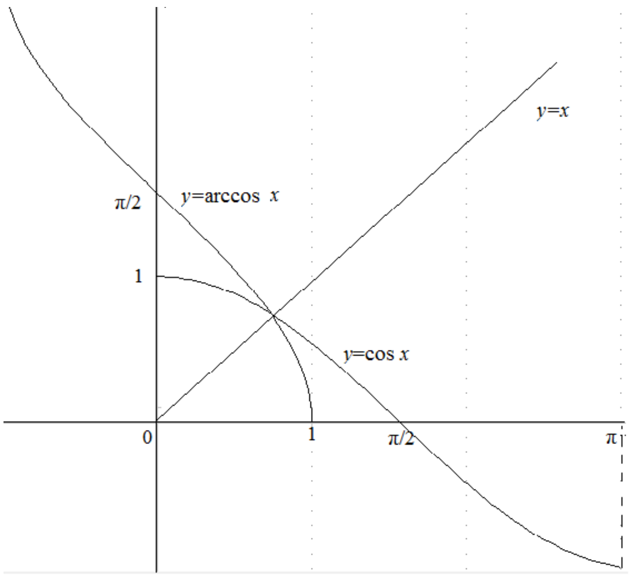
3) Функція не є періодичною.
4) Дорівнює нулю при $x = 0$.
5) Зростаюча за теоремою про властивість оберненої функції.
6) Додатна при $x \in [0; 1]$ і від'ємна при $x \in [-1; 0]$.
7) Набуває найбільшого значення, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$, якщо $x = 1$, і найменшого $-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = -1$.

Функція, обернена до $y = \cos x$. Функція $y = \arccos x$ є оберненою до функції $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$.

Графік функції $y = \arccos x$ дістанемо з графіка функції $y = \cos x$,, якщо $x \in [0; \pi]$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$.

Властивості функції $y = \arccos x$:

1) Областю визначення функції $y = \arccos x$ є множина $[-1; 1]$, а областю значень – множина $[0; \pi]$. Якщо $0 \le x \le 1$, то $0 \le \arccos x \le \frac{\pi}{2}$ при $-1 \le x \le 0$ $\frac{\pi}{2} \le \arccos x \le \pi$.



2) Графік функції не симетричний ні відносно початку

координат, ні відносно осі *Oy*. Це означає, що функція не є ні парною, ні непарною.

Для неї виконується рівність $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 1$.

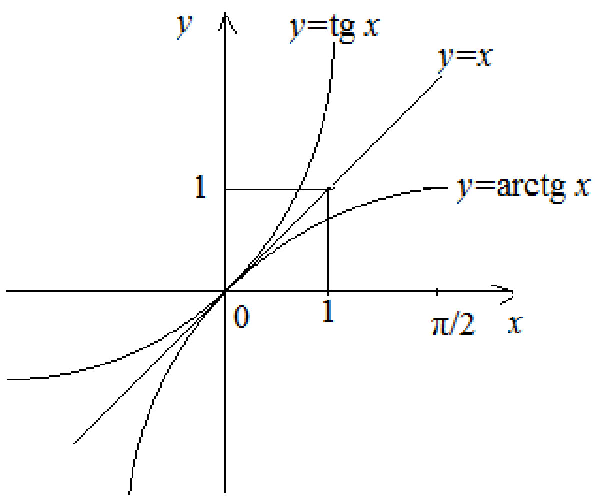
5) Функція спадна.

6) Додатна на всій області визначення.

7) Функція набуває найбільшого значення π, якщо x =-1 і найменшого 0, якщо $x = 1$.

Функція, обернена до $y = \mathrm{tg}\, x$. Функція $y = \mathrm{arctg}\, x$ є оберненою до функції $y = \mathrm{tg}\, x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Графік функції $y = \mathrm{arctg}\, x$ дістанемо з графіка функції $y = \mathrm{tg}\, x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$.



Властивості функції $y = \mathrm{arctg}\, x$:

1) Областю визначення функції $y = \mathrm{arctg}\, x$ є множина $(-\infty; +\infty)$, а областю значень – множина $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо $0 \le x < +\infty$, то $0 \le \mathrm{arctg}\, x < \frac{\pi}{2}$, якщо $-\infty < x \le 0$, то $-\frac{\pi}{2} < arctg\, x \le 0$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат, це означає, що функція непарна, тобто $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\, x$.

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 0$.

5) Функція зростаюча.

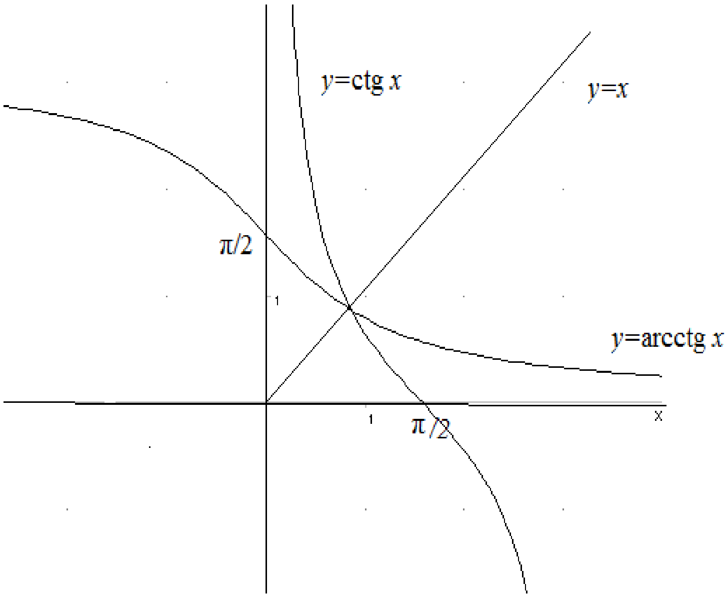
6) Додатна, якщо $0 \le x < +\infty$, і від'ємна, якщо – $-\infty < x \le 0$.

7) Функція не набуває найбільшого і найменшого значень [10].

Функція, обернена до $y = \mathrm{ctg}\, x$. Функція $y = \mathrm{arcctg}\, x$ є оберненою до функції $y = \operatorname{ctg} x$, якщо $x \in (0; \pi)$.

Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ дістанемо з графіка функції $y = \operatorname{tg} x$, якщо $x \in (0; \pi)$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$.

Властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$:



1) Областю визначення функції $y = \operatorname{arcctg} x$ є множина $(-\infty; +\infty)$, а областю значень – множина $(0; \pi)$.

2) Графік функції не симетричний ні відносно початку координат, ні відносно осі Oy. Це означає, що функція не є ні парною, ні непарною.

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 1$.

5) Функція спадна.

6) Додатна при $x \in \left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right)$ і від'ємна при $x \in \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$.

7) Функція не набуває найбільшого і найменшого значень.

3.8. Найпростіші тригонометричні рівняння і їх розв'язки

Означення 1. *Тригонометричними рівняннями* називаються рівняння, у яких невідома (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції. Наприклад, $\sin x - \cos x = 0$; $2\sin x + \cos x = \frac{3}{2}\sin^2 2x$; $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$; $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$ і т.д.

Означення 2. *Коренем* або *розв'язком* тригонометричного рівняння називається значення x, при підстановці якого в рівняння отримаємо правильну числову рівність. Наприклад, $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $x = 3k\pi \pm \pi + \frac{\pi}{2}$ і т.д

Розв’язати тригонометричне рівняння означає знайти ці значення x або довести, що це рівняння не має коренів [2].

Тригонометричні рівняння, у яких змінна входить лише під знак тригонометричної функції, або зовсім не мають розв'язків, або мають здебільшого безліч їх внаслідок властивості періодичності тригонометричних функцій.

Означення 3. *Найпростішими* тригонометричними рівняннями називаються рівняння виду

$$\sin x = a,$$

$$\cos x = a,$$

$$\operatorname{tg} x = a,$$

$$\operatorname{ctg} x = a,$$

де a – деяке число.

Очевидно, рівняння $\sin x = a$ і $\cos x = a$ мають розв'язки лише при $|a| \leq 1$, а рівняння $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$ – при будь-яких значеннях a.

Розглянемо теореми, на підставі яких можна визначити розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь.

Теорема 1. *Якщо* $\sin x = a$, *де* $-1 < a < 1$, *то*

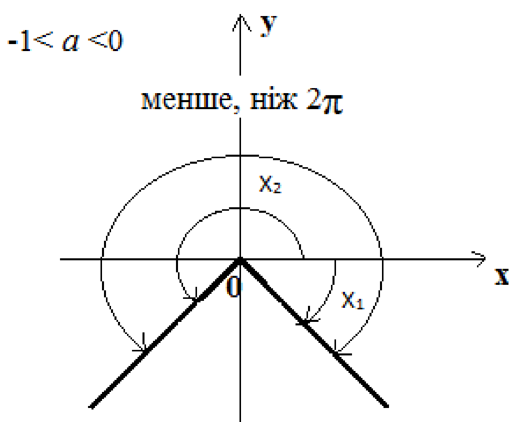
$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a,$$

де k *– довільне ціле число.*

Доведення. Щоб визначити всі розв'язки рівняння $\sin x = a$ ($-1 < a < 1$), досить знайти його розв'язки, що належать довільному проміжку довжини періоду 2π, і далі періодично повторити ці розв'язки з періодом 2π.

Очевидно, одним із розв'язків рівняння $\sin x = a$ є $x_1 = \arcsin a$. За умовою $|a| < 1$, тому $x_1 \neq \pm\frac{\pi}{2}$, і рівняння $\sin x = a$ має ще один розв'язок $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \arcsin a$, який відрізняється від x_1 менше, ніж на 2π.

На рис.1 графічно зображено розв'язки x_1 і x_2 при $0 \leq a < 1$ і $-1 < a < 0$.



$0 \leq a < 1$.

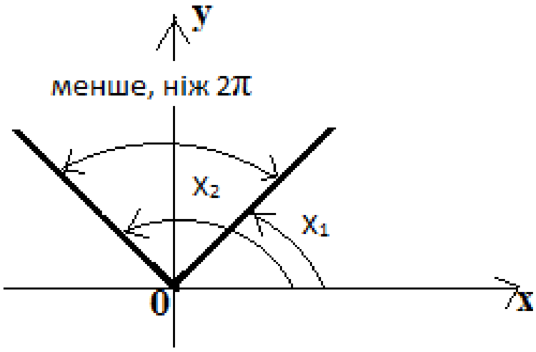


Рис 1.

Крім розв'язків x_1 і x_2, рівняння $\sin x = a$ не має інших розв'язків, які б відрізнялися від x_1 і від x_2 менше, ніж на 2π. Тому всі розв'язки рівняння $\sin x = a$ можна дістати за формулами

$$x = x_1 + 2n\pi = 2n\pi + \arcsin a,$$

$$x = x_2 + 2n\pi = 2n\pi + \pi - \arcsin a = (2n+1)\pi - \arcsin a,$$

де n – довільне ціле число.

Ці дві. формули можна записати у вигляді однієї формули так:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a,$$

де k – довільне ціле число.

Теорема 2. *Якщо* $\sin x = 1$, *то*

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

де k – *довільне ціле число.*

Доведення. Одним з розв'язків рівняння $\sin x = 1$ є $x = \frac{\pi}{2}$. Інших розв'язків, які б відрізнялися від $\frac{\pi}{2}$ менше, ніж на2π, немає. Тому всі розв'язки рівняння $\sin x = 1$ можна подати так:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

де k – довільне ціле число.

Так само можна довести і таку теорему.

Теорема 3. *Якщо* $\sin x = -1$, *то*

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

де k – *довільне ціле число.*

Наводимо теореми, на яких ґрунтується розв'язування рівняння $\cos x = a$.

Теорема 4. *Якщо* $\cos x = a$, *де* $-1 < a < 1$, *то*

$$x = 2k\pi \pm \arccos a,$$

де k *– довільне ціле число.*

Доведення. Одним із розв'язків рівняння $\cos x = a$ є $x_1 = \arccos a$. Оскільки $|a|<1$, то $x_1 \neq 0$ і $x_1 \neq \pi$. Тому рівняння $\cos x = a$ має ще один розв'язок $x_2 = -x_1 = -\arccos a$, який відрізняється від x_1 менше, ніж на 2π.

На рис. 2 зображено розв'язки x_1 і x_2 при $0 < a < 1$ і $-1 < a < 0$.

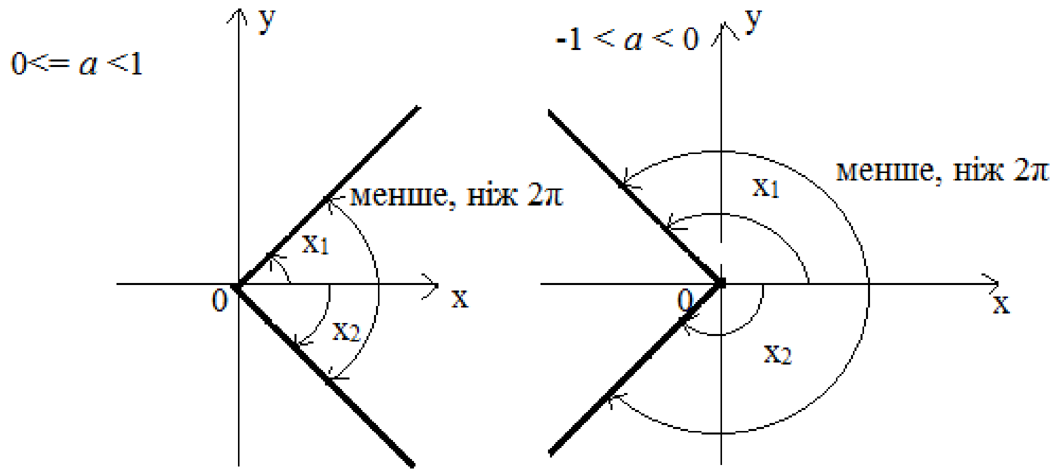


Рис. 2

Крім розв'язків x_1 і x_2, рівняння $\cos x = a$ не має інших розв'язків, які б відрізнялися від x_1 і від x_2 менше, ніж на 2π. Тому всі розв'язки рівняння $\cos x = a$ можна дістати за формулами

$$x = x_1 + 2k\pi = 2k\pi + \arccos a,$$

$$x = x_2 + 2k\pi = 2k\pi - \arccos a,$$

тобто

$$x = 2k\pi \pm \arccos a,$$

де k – довільне ціле число.

Теорема 5. *Якщо* $\cos x = 1$, *то*

$$x = 2k\pi,$$

де k *– довільне ціле число.*

Доведення. Одним із розв'язків рівняння $\cos x = 1$ є $x = 0$. Інших розв'язків, які б відрізнялися від 0 менше, ніж на 2π, немає. Тому всі розв'язки рівняння $\cos x = 1$ можна подати так:

$$x = 2k\pi,$$

де k – довільне ціле число.

Так само можна довести ще й таку теорему.

Теорема 6. *Якщо* $\cos x = -1$, *то*

$$x = \pi + 2k\pi,$$

де k *– довільне ціле число.*

Зауваження. Оскільки a = 0 задовольняє умову – 1< a <1, то рівняння $\cos x = 0$ можна розв'язувати за формулою $x = 2k\pi \pm \arccos 0 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$. Проте це рівняння можна розв'язувати, користуючись простішою формулою

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

де k – довільне ціле число, яку неважко довести.

Теорема 7. *Якщо* $\operatorname{tg} x = a$, *то*

$$x = k\pi + \operatorname{arctg} a,$$

де k *– довільне ціле число.*

Доведення. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ має розв'язок $x = \operatorname{arctg} a$. Очевидно, це рівняння не має інших розв'язків, які б відрізнялися від $\operatorname{arctg} a$. менше, ніж на π, тому всі розв'язки рівняння $\operatorname{tg} x = a$ визначаються формулою

$$x = k\pi + \operatorname{arctg} a,$$

де k – довільне ціле число.

Аналогічно можна довести і таку теорему.

Теорема 8. *Якщо* $\operatorname{ctg} x = a$, *то*

$$x = k\pi + \operatorname{arcctg} a,$$

де k *– довільне ціле число.*

Зазначимо, що так само можна довести дещо загальніші теореми: якщо x_0 – будь – який розв'язок деякого з рівнянь

$$\sin x = a, (-1 < a < 1),$$

$$\cos x = a, (-1 < a < 1),$$

$$\operatorname{tg} x = a,$$

$$\operatorname{ctg} x = a,$$

то відповідно

$$x = k\pi + (-1)^k x_0,$$

$$x = 2k\pi \pm x_0,$$

$$x = k\pi + x_0,$$

$$x = k\pi + x_0,$$

де k – довільне ціле число [2].

Для систематизації знань можна подати таку таблицю,яка зручна у використанні і значно полегшує виконання завдань та сприяє кращому запам’ятовуванні.

a	sin$t$=a	cos$t$=a
a<-1	*Немає розв'язків*	*Немає розв'язків*
a=-1	$t=-\pi/2+2\pi k,\ k\in Z$	$t=\pi+2\pi k,\ k\in Z$
a=0	$t=-\pi k,\ k\in Z$	$t=\pi/2+\pi k,\ k\in Z$
a=1	$t=\pi/2+2\pi k,\ k\in Z$	$t=2\pi k,\ k\in Z$
0<│a│<1	$t=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ k\in Z$	$t=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$
a>1	*Немає розв'язків*	*Немає розв'язків*
a	tg$t$=a	ctg$t$=a
$a\in R$	$t=\mathrm{arctg}\,a+\pi k,\ k\in Z$	$t=\mathrm{arcctg}\,a+\pi k,\ k\in Z$

Розглянемо приклади розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sin\left(30° - \frac{3x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Розв’язання. Подаючи це рівняння у вигляді

$$-\sin\left(\frac{3x}{2} - 30°\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

або

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - 30°\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

розв'язуємо його відносно $\frac{3x}{2} - 30°$. Дістанемо:

$$\frac{3x}{2} - 30° = 180°k + (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

звідки

$$\frac{3x}{2} - 30° = 180°k + (-1)^k \cdot 45°$$

і

$$x = 120°k - (-1)^k \cdot 30° + 20°,$$

де k – довільне ціле число.

У разі потреби, беручи k парним і непарним числом, формулу $x = 120°k - (-1)^k \cdot 30° + 20°$ можна подати у вигляді двох формул:

при $k = 2n$, $x = 120° \cdot 2n - (-1)^{2n} \cdot 30° + 20° = 240°n - 10°$;

при $k = 2n + 1$, $x = 120° \cdot (2n + 1) - (-1)^{2n+1} \cdot 30° + 20° = 240°n + 170°$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\cos\frac{\pi - 2x}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Розв’язання. Маємо:

$$\cos\frac{2x - \pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Розв’язуючи це рівняння відносно $\frac{2x-\pi}{3}$, знаходимо:

$$\frac{2x - \pi}{3} = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right).$$

$$\frac{2x - \pi}{3} = 2k\pi \pm \left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{2x - \pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},$$

звідки

$$x = 3k\pi \pm \pi + \frac{\pi}{2},$$

де k – довільне ціле число.

Якщо це потрібно, формулу $x = 3k\pi \pm \pi + \frac{\pi}{2}$

можна подати у вигляді двох формул:

$$x = 3k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ і } x = 3k\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 3.Розв’язати рівняння

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$$

Розв’язання. Ліву частину даного рівняння перетворимо так:

$$\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} = \frac{1}{2},$$

звідки

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0\ ,$$

або

$$\sin 2x = 0\ .$$

Отже,

$$2x = k\pi \ \text{ і } \ x = \frac{k\pi}{2},$$

де k – довільне число.

Приклад 4. Розв’язати рівняння

$$\cos\left(3\pi \cos\frac{\pi}{2}x\ \right) = -1.$$

Розв’язання. Розв’язуючи це рівняння відносно $3\pi \cos\frac{\pi}{2}x$, дістанемо:

$$3\pi \cos\frac{\pi}{2}x\ = \pi + 2k\pi,$$

або

$$\cos\frac{\pi}{2}x\ = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3},$$

де k – ціле число.

Оскільки $\left|\cos\frac{\pi}{2}x\ \right| \leq 1$, то для k допустимі такі значення: k =0,1,-1,-2. Тому дане рівняння еквівалентне сукупності чотирьох рівнянь:

$\cos\frac{\pi}{2}x\ = \pm\frac{1}{3}$ і$\cos\frac{\pi}{2}x\ = \pm 1.$

Сукупність рівнянь $\cos\frac{\pi}{2}x = \pm\frac{1}{3}$ еквівалентна рівнянню

$$\cos^2\frac{\pi}{2}x = \frac{1}{9},$$

звідки

$$\frac{1-\cos\pi x}{2} = \frac{1}{9}$$

$$\cos\pi x = -\frac{7}{9}$$

$$\pi x = 2n\pi \pm \arccos\left(-\frac{7}{9}\right)$$

$$x = 2n \pm \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)$$

де n – довільне ціле число.

Далі розв'язуємо сукупність рівнянь $\cos\frac{\pi}{2}x = \pm 1$. Дістанемо:

$$\cos^2\frac{\pi}{2}x = 1,$$

звідки

$$\sin\frac{\pi}{2}x = 0,$$

$$\frac{\pi}{2}x = n\pi \text{ і } x = 2n,$$

де n – довільне ціле число.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg}(3\operatorname{arctg}2x) = -1$$

Розв'язання. Маємо:

$$3\operatorname{arctg}2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}2x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$$

де k – ціле число.

Оскільки $0 < arc\operatorname{tg}2x < \pi$, то в останньому рівнянні для k допустимі такі значення: $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$.

Отже дане рівняння еквівалентне сукупності трьох рівнянь:

$\operatorname{arctg}2x = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}2x = \frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{arctg}2x = \frac{11\pi}{12}$

звідки

$2x = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$, $2x = \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{12}$, $2x = \operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12}$.

Тому

$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{12}$, $x_3 = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Розв'язання. Маємо:

$$\sqrt{x} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4},$$

де, оскільки $\sqrt{x} \geq 0, k = 0,1,2,3, \ldots$, причому, якщо $k = 0$, то у формулі слід зняти знак плюс. Тому

$$x = \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right)^2$$

де k – довільне натуральне число і, крім того, $x = \frac{\pi^2}{16}$.

3.9.Схема розв'язування тригонометричних рівнянь

Схема розв'язування тригонометричних рівнянь:

1. Намагаємося всі тригонометричні функції звести до одного аргументу;
2. Якщо не вдалося, намагаємося звести всі тригонометричні вирази до однієї тригонометричної функції;
3. Якщо до одного аргументу звести вдалося, а до однієї функції – ні, то пробуємо звести рівняння до однорідного;
4. В інших випадках всі члени рівняння в одну сторону і намагаємося дістати добуток або використовуємо спеціальні прийоми розв'язування.

Якщо в тригонометричне рівняння входить $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$, дріб, корінь парного степеня, то розв'язання рівняння починаємо з області визначення і слідкуємо за рівносильністю перетворень або використовуємо рівняння – наслідки. У такому випадку потрібна перевірка.

Розглянемо застосування даної схеми.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0.$$

Розв’язання. Зведемо дане рівняння до однієї тригонометричної функції, поділивши праву і ліву частини рівняння на $\cos^2 x$. Отримаємо:

$$\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 4 = 0,$$

розв’язавши дане рівняння, як квадратне відносно $\operatorname{tg} x$, отримаємо два розв’язки:

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ і } \operatorname{tg} x = -4,$$

звідки

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ і } x = k\pi - \operatorname{arctg} 4,$$

де k – довільне ціле число.

3.10. Методи розв’язання тригонометричних рівнянь

Розглянемо окремо методи розв’язання деяких тригонометричних рівнянь на прикладах і обґрунтуємо доцільність використання кожного з них.

1. Спосіб зведення до однієї тригонометричної функції (алгебраїчний метод). Цим способом розв'язують рівняння, до складу яких входять різні тригонометричні функції одного і того самого аргументу. Використовуючи основні тригонометричні тотожності, всі функції виражають через одну функцію, а потім розв'язують алгебраїчне рівняння відносно цієї функції [10].

Розв’яжемо рівняння

$$\sin x - \cos x = 0 \tag{1}$$

Переносимо $\cos x$ у праву частину і виражаємо його через $\sin x$ $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$. Дістаємо

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} \tag{2}$$

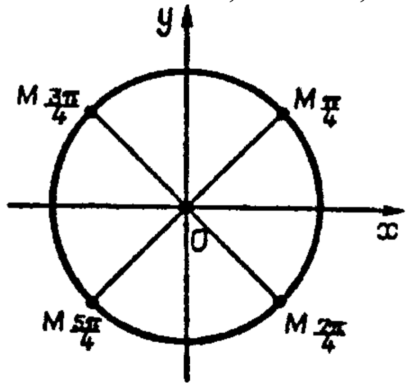
Підносимо обидві частини останнього рівняння до квадрата. Дістаємо $\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$, або $2\sin^2 x = 1$, звідки $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

Маємо два найпростіші тригонометричні рівняння:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$, або $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$,

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi$, або $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

Оскільки ми виконували піднесення обох частин рівняння (2) до квадрата, то можливі порушення рівносильності, тобто рівняння $\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$, а отже, і $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, можуть мати сторонні розв'язки.



Щоб відкинути сторонні розв'язки, зробимо перевірку на відрізку завдовжки 2π, зокрема на $[0; 2\pi]$, враховуючи, що найменшим додатним періодом синуса і косинуса є число 2π. Для цього зручно використати одиничне коло.

Позначимо на одиничному колі всі точки, які відповідають числам, що містяться у знайдених серіях розв'язків.

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi \text{ і } x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Перша формула, якщо $k = 0, \pm1, \pm2,$, дає точки $P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{3\pi}{4}}$

Друга формула, якщо $k = 0, \pm1, \pm2,$, дає точки $P_{\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{5\pi}{4}}$

Підставимо кожне із здобутих чисел у дане рівняння:

якщо $x = \frac{\pi}{4}$ то $\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, 0 = 0$;

якщо $x = \frac{3\pi}{4}$ то $\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 0$;

якщо $x = \frac{7\pi}{4}$ то $\sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq 0$;

якщо $x = \frac{5\pi}{4}$ то $\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, 0 = 0$;

Отже, дане рівняння задовольняють лише розв'язка з двох множин:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z \text{ і } x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z.$$

Їх можна записати однією формулою, якщо перетворити другу формулу так:

$$x=\frac{5\pi}{4}+2n\pi=\frac{\pi}{4}+\pi+2n\pi=\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi$$

У першій серії до $\frac{\pi}{4}$ додають число $2n\pi$, а у другій – $(2n+1)\pi$. Парні і непарні числа утворюють множину цілих чисел. Тому об'єднана формула розв'язків матиме вигляд

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z.$$

Способом зведення до однієї функції можна розв'язувати, наприклад, такі рівняння $6\cos^2 x-5\sin x+5=0, \cos^2 x+\sin^2 x-\cos x=0$ та ін.

2. Спосіб розкладання на множники. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь цим способом усі члени рівняння переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток двох або кількох співмножників дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли принаймні один із співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають смислу.

Розв'яжемо рівняння

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2.$$

Розв’язання.

Маємо:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=2,$$

звідки після відповідних перетворень дістаємо:

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0,$$

$$2\cos 3x\cos x+2\cos 7x\cos x=0,$$

$$2\cos x\,(\cos 3x-\cos 7x)=0,$$

$$4\cos x\cos 2x\cos 5x=0.$$

Розв'язуючи сукупність рівнянь

$$\cos x=0, \cos 2x=0, \quad \cos 5x=0,$$

знаходимо:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5},$$

це k – довільне ціле число.

Оскільки розв'язки $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ містяться у множині розв'язків $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, то шукані значення x визначається такими двома формулами:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5},$$

де k – довільне ціле число.

При розв’язуванні рівняння за допомогою методу розкладання на множники воно не може бути рівносильним одержаній сукупності рівнянь, оскільки можлива поява сторонніх коренів. Щоб уникнути помилок у відповіді, треба виключити з одержаних значення невідомого ті, для яких задане рівняння не має смислу.

3. Спосіб розв’язання однорідних рівнянь. Цей спосіб застосовують під час розв’язування однорідних тригонометричних рівнянь. Рівняння виду

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_3 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \dots + a_n \cos^n x = 0, \quad (3)$$

де n – натуральне число, $a, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – сталі коефіцієнти, називається *однорідним* рівнянням *n – го* степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$ [2].

Розв’яжемо рівняння

$$8\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 2.$$

Розв’язання.

Враховуючи, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ дане рівняння подаємо у вигляді

$$8\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

звідки

$$6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Це рівняння еквівалентне рівнянню

$$6\text{tg}^2 x - \text{tg}\, x - 1 = 0,$$

яке, у свою чергу, еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$\text{tg}\, x = \frac{1}{2} \text{ і } \text{tg}\, x = -\frac{1}{3},$$

звідки

$$x = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \text{ і } x = k\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

де k – довільне ціле число

4. Спосіб введення допоміжного аргументу. Розв’яжемо рівняння

$$3\sin x + 3\cos x = \sqrt{8}.$$

Розв’язання.

$$3\sin x + 3\cos x = \sqrt{8}$$

Винесемо спільний множник за дужки:

$$3(\sin x + 1 \cdot \cos x) = \sqrt{8}$$

або

$$3\left(\sin x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{8}$$

Помноживши обидві частини рівняння на $\cos\frac{\pi}{4}$ будемо мати:

$$3\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{8},$$

або

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3},$$

звідки

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{2}{3} - \frac{\pi}{4},$$

де k – довільне ціле число.

Спосіб уведення допоміжного аргументу застосовують під час розв’язування лінійних рівнянь виду $a\sin x + b\cos x = c$. Дане рівняння є окремим випадком лінійного [2].

5. Спосіб піднесення до квадрата.

Розв’яжемо рівняння

$$\sin x - \cos x = 0$$

Розв’язання.

При піднесенні даного рівняння до квадрату, отримаємо:

$$(\sin x - \cos x)^2 = 0,$$

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0,$$

$$1 - \sin 2x = 0,$$

$$\sin 2x = 1,$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

У цьому разі піднесення до квадрату не спричиняє появу сторонніх коренів.

Порівнюючи розглянуті способи розв'язання рівнянь, неважко зробити висновок, що найменш раціональним є перший (алгебраїчний) спосіб, який призводить до появи сторонніх розв'язків і потребує перевірки [2].

6. **Спосіб розв'язання тригонометричних рівнянь шляхом дослідження обох частин на екстремум.**

Розв'яжемо рівняння

$$(4 - \cos 2x)(2 + 3\sin y) = 12 + 13\sec^2 z$$

Розв'язання.

$$(4 - \cos 2x)(2 + 3\sin y) = 12 + 13\sec^2 z$$

$$x, y \epsilon R, z \neq \frac{\pi}{2} + \pi p, p \epsilon Z.$$

Оцінимо значення виразів, що входить у дане рівняння

$$(4 - \cos 2x)(2 + 3\sin y) = 12 + 13\sec^2 z$$

а) $4 - \cos 2x \leq 5$

б) $2 + 3\sin y \leq 5$

в) $12 + 13\sec^2 z \geq 25$

Отже, рівність досягається у випадку, коли ліва і права частина рівняння дорівнюють по 25.

Маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \sin y = 1 \\ \sec^2 z = 1 \end{array}\right.$$

і

$$\left[\begin{array}{c}\cos 2x = -1 \\ \sin y = 1 \\ \left[\begin{array}{l}\sec z = 1 \\ \sec z = -1\end{array}\right.\end{array}\right.$$

звідки

$$\left[\begin{array}{c}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m\epsilon Z \\ \left[\begin{array}{c}z = 2\pi l, l\epsilon Z \\ z = \pi + 2\pi n, n\epsilon Z\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, y = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ z = 2\pi l$ або $z = \pi + 2\pi n, k, m, n, l\ \epsilon Z$

3.11. Графічні методи розв’язування тригонометричних рівнянь

Тригонометричні рівняння звичайно розв'язуються виключно *аналітичним* методом. Але дуже важливо і як засіб уникнення завдяки великій наочності багатьох помилок, і як засіб діставати в деяких випадках розв'язки, недоступні для аналітичного методу, застосування *графічного* методу з використанням обох способів геометричної інтерпретації тригонометричних функцій, тобто і тригонометричного круга, і графіків функцій в прямокутних координатах. В усякому разі корисно взяти за правило доводити до кінця розв'язування кожного тригонометричного рівняння, відмічаючи ті точки тригонометричного круга, в яких закінчуються шукані дуги, причому кожна точка круга вказує на нескінченну множину дуг, які закінчуються в ній.

Спосіб розв'язування тригонометричних рівнянь за графіками функцій є дуже корисним і цікавим.

Для розв’язання рівняння виду $F_1(x) = F_2(x)$, потрібно записати рівняння у вигляді $y = F_1(x)$ та $y = F_2(x)$. Побудувавши в одній системі координат графіки цих графіків, розв’язками рівняння будуть абсциси точок перетину графіків.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.

Розв'язати рівняння

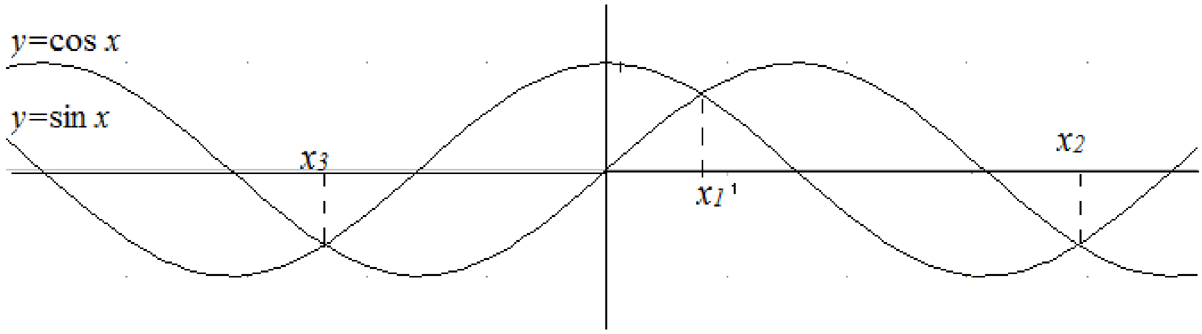
$$\sin x - \cos x = 0$$

Розв'язання.

Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y = \sin x \text{ та } y = \cos x$$

Побудувавши в одній системі координат графіки цих функцій, знайдемо розв'язки рівняння як абсциси точок перетину графіків.



Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

Приклад 2.

Розв'язати рівняння

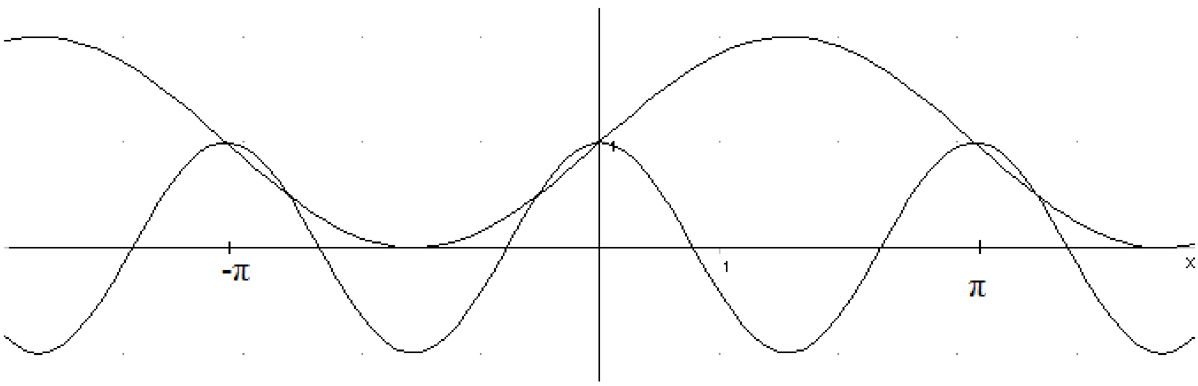
$$\cos 2x = 1 + \sin x$$

Розв'язання.

Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y = \cos 2x \text{ та } y = 1 + \sin x$$

Побудувавши в одній системі координат графіки цих функцій, знайдемо розв'язки рівняння як абсциси точок перетину графіків.



Відповідь: $x = k\pi, k \in Z$.

Графічний спосіб є досить наочним, але не зручність полягає в тому, що кожного разу (хоч і схематично) треба будувати графіки тригонометричних функцій.

3.12. Тригонометричні рівняння з параметрами

Розв’язання рівняння, що містить параметри, полягає в наступному: для кожної допустимої системи значень параметрів визначити множину всіх розв’язків даного рівняння. Таким чином, в процес розв’язання, в якості його складової частини, входить дослідження наступних питань: знаходження множини допустимих систем значень параметрів, визначення кількості розв’язків для кожної допустимої системи значень параметрів, встановлення тих систем значень параметрів, для яких застосовні отримані формули розв’язків. Дослідження всіх цих питань становить, як правило, значні труднощі нерідко доводиться розглядати нерівності і системи нерівностей, розв’язання яких перевищує можливості учнів середньої школи. З цієї причини в задачниках шкільного типу тригонометричні рівняння, що містять параметри, представлені лише невеликим числом прикладів. Ми вважаємо, що у шкільній практиці вчитель повинен обмежитися лише дуже малим числом рівнянь з параметрами, зате виконати розв’язки з належною повнотою, пам'ятаючи, що саме дослідження представляє найбільш цінну частину розв’язку з точки зору математичного розвитку учнів. Учитель повинен попередньо сам виконати розв’язки (з дослідженням) і переконатися в його доступності для учнів.

Розглянемо приклади розв'язування тригонометричних рівнянь з буквеними параметрами.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sin(x+\alpha)-\sin x=\sin\alpha \tag{4}$$

відносно невідомого x

Розв’язання. Маємо:

$$\sin(x+\alpha) - \sin x - \sin\alpha = 0,$$

$$2\sin\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2} - 2\sin\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{x+\alpha}{2}\left(\cos\frac{x+\alpha}{2} - \cos\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0,$$

звідки

$$\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{x+\alpha}{2} = 0. \qquad (5)$$

Розглянемо два випадки.

а) Нехай $\alpha = 2k\pi$, де k – ціле число. Тоді $\frac{\alpha}{2} = k\pi, \sin\frac{\alpha}{2} = 0$ і рівняння (5), а отже, і еквівалентне йому рівняння (4) справджуються при будь-якому значенні x.

б) Нехай $\alpha \neq 2k\pi$, де k – ціле число. Тоді $\frac{\alpha}{2} \neq k\pi$, $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$ і з рівняння (5) виходить, що

$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x+\alpha}{2} = 0,$$

звідки

$$\sin\frac{x}{2} = 0 \text{ або } \sin\frac{x+\alpha}{2} = 0$$

і, отже,

$$x = 2n\pi \text{ і } x = 2n\pi - \alpha,$$

де n - будь-яке ціле число.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\cos^2(x+\alpha) + \cos^2(x-\alpha) = \sin 2\alpha \qquad (6)$$

відносно невідомого x.

Розв'язання. Дане рівняння перетворюємо так:

$$\frac{1+\cos(2x+2\alpha)}{2} + \frac{1+\cos(2x-2\alpha)}{2} = \sin 2\alpha,$$

$$\cos(2x+2\alpha) + \cos(2x-2\alpha) = -2(1-\sin 2\alpha),$$

$$\cos 2\alpha\cos 2x = -\,(1-\sin 2\alpha) \qquad (7)$$

Розглянемо такі випадки.

а) Нехай $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k – ціле число. Тоді $2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ і рівняння (7) набирає вигляду

$$0 \cdot \cos 2x = 0.$$

Це рівняння, а отже, і рівняння (6) мають нескінченну множину розв'язків. Розв'язком є будь-яке число *x*.

б) Нехай $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$ де k – ціле число. Тоді $2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ і рівняння (7) набирає вигляду

$$0 \cdot \cos 2x = -\,2.$$

Це рівняння, а отже, і рівняння (6) не мають розв'язків.

в) Нехай $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k – ціле число. Тоді $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\cos 2\alpha \neq 0$ і з рівняння (7) дістаємо:

$$\cos 2x = -\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha},$$

або, оскільки

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

$$\cos 2x = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \tag{8}$$

Рівняння (8) має розв'язки, якщо

$$-1 \leq \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1,$$

звідки

$$-\frac{\pi}{4} + l\pi \leq \alpha - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + l\pi$$

і

$$l\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + l\pi,$$

де *l* – ціле число.

При цих значеннях α з рівняння (8) знаходимо:

$$x = n\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left[\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

де *n*- довільне ціле число.

Оскільки рівняння (8) еквівалентне рівнянню (6) лише при умові $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, то знайдені розв'язки рівняння (8) будуть коренями даного рівняння (4), якщо

$$l\pi \leq \alpha < \frac{\pi}{4} + l\pi \quad \text{і} \quad \frac{\pi}{4} + l\pi < \alpha \leq \frac{\pi}{2} + l\pi,$$

де l – ціле число.

Отже, якщо $k\pi \leq \alpha < \frac{\pi}{4} + k\pi$ або $\frac{\pi}{4} + k\pi < \alpha \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$, де k – ціле число, то $x = n\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left[\text{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$, де n - будь-яке ціле число; якщо $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k – будь-яке число, то x – будь-яке число. При всіх інших знаних α рівняння не має розв'язків.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$(a + 1)\cos x - (a - 1)\sin x = 2a$$

відносно невідомого x.

Розв’язання. У лівій частині рівняння $\cos x$ і $\sin x$ виразимо через $\sin\frac{x}{2}$ і $\cos\frac{x}{2}$. Дістанемо:

$$(a + 1)\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) - 2(a - 1)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2a\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right),$$

або

$$(3a + 1)\sin^2\frac{x}{2} + 2(a - 1)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + (a - 1)\cos^2\frac{x}{2} = 0. \qquad (10)$$

Розглянемо два випадки.

а) Нехай $a = -\frac{1}{3}$. Тоді рівняння (10) має вигляд

$$-\frac{8}{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{4}{3}\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

або

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0,$$

звідки

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \ \text{ або } \ 2\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:

$$x = \pi + 2k\pi \quad \text{і} \quad x = 2k\pi - 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2},$$

де k – довільне ціле число.

б) Нехай $a \neq -\frac{1}{3}$. Тоді $3a + 1 \neq 0$. Обидві частини рівняння (10) ділимо на $\cos^2\frac{x}{2}$. Дістанемо:

$$(3a + 1)\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 2(a - 1)\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + (a - 1) = 0,$$

звідки

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-a\pm\sqrt{2(1-a^2)}}{3a+1} \tag{11}$$

Найпростіші рівняння (11)мають розв'язки, якщо

$$1 - a^2 \geq 0,$$

звідки

$$-1 \leq a \leq 1.$$

Але $a \neq -\frac{1}{3}$. Тому

$$-1 \leq a \leq -\frac{1}{3} \quad \text{і} \quad -\frac{1}{3} \leq a \leq 1.$$

При $a = -1$ і $a = 1$ $1 - a^2 = 0$ і рівняння (11) будуть однаковими. Тому слід розглянути окремі випадки, коли $a = -1$ і $a = 1$.

При $a = -1$ з (11) дістаємо: $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = -1$ і $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, де k – довільне ціле число.

При $a = 1$ з (11) дістаємо: $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 0$ і $x = 2k\pi$, де k – довільне ціле число.

Якщо $-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}$ або $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$, то рівняння (11) мають такі розв'язки:

$$x = 2k\pi + 2\mathrm{arctg}\frac{1 - a \pm \sqrt{2(1 - a^2)}}{3a + 1},$$

де k – довільне ціле число.

Отже, якщо $a = 1$, то $x = 2k\pi$, де k – довільне ціле число; якщо $a = -1$, то $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, де k – довільне ціле число; якщо $a = -\frac{1}{3}$ то $x = 2k\pi - 2\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$де k – довільне ціле число; якщо $-1 < a < -\frac{1}{3}$ або $-\frac{1}{3} < a < 1$, то $x = 2k\pi +$

$2\mathrm{arctg}\frac{1-a\pm\sqrt{2(1-a^2)}}{3a+1}$, де k – довільне ціле число, і, нарешті, якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння не має розв’язків.

3.13.Тригонометричні нерівності

Два вирази, сполучені знаком >,<, або ≥, ≤, утворюють нерівність.

Основні властивості нерівностей:

- якщо з однієї частини нерівності перенести в другу доданок з протилежним знаком, то дістанемо рівносильну їй нерівність;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне і те саме додатне число, то дістанемо рівносильну їй нерівність;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від’ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то дістанемо рівносильну їй нерівність [9].

Розв’язання будь – яких тригонометричних нерівностей, як правило, зводиться до розв’язування найпростіших нерівностей:

$$\sin x \geq a \text{ або } \sin x \leq a\,;$$

$$\cos x \geq a \text{ або } \cos x \leq a\,;$$

$$\mathrm{tg}\, x \geq a \text{ або } \mathrm{tg}\, x \leq a\,;$$

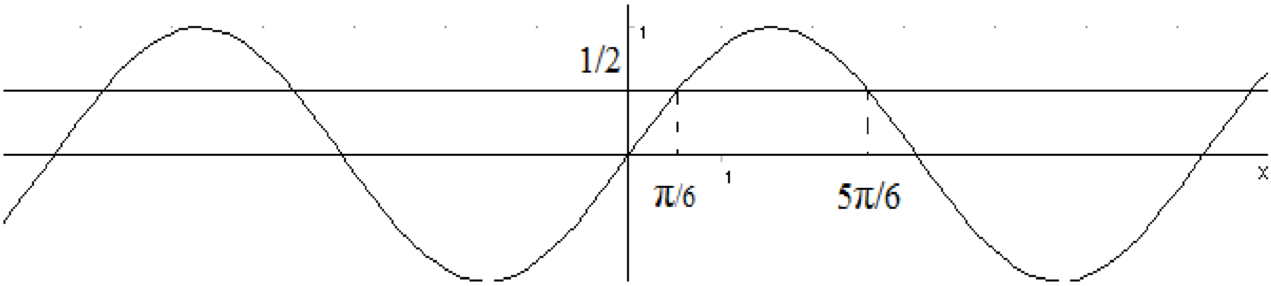
$$\mathrm{ctg}\, x \geq a \text{ або } \mathrm{ctg}\, x \leq a\,;$$

Як і найпростіші тригонометричні рівняння, нерівності природно розв’язувати графічно [10]. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

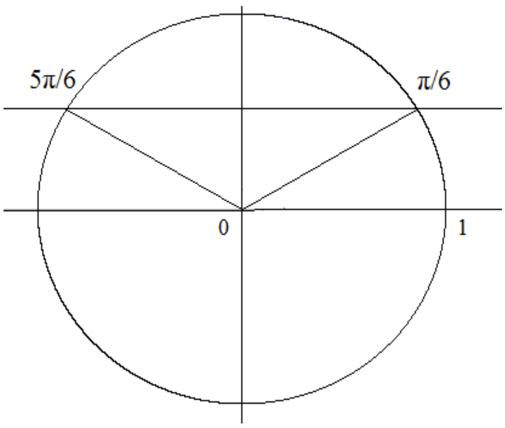
Розв’язання.

Позначимо функції, які стоять у лівій і правій частинах, через $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ побудуємо схематично їх графіки.



Розв'язками нерівності будуть абсциси всіх точок графіка синусоїди, які містяться вище від прямої $y = \frac{1}{2}$. Враховуючи періодичність функції синус, досить знайти розв'язки на будь – якому відрізку області визначення завдовжки 2π і додати до знайдених чисел період $2n\pi, n \in Z$. Виберемо, наприклад, проміжок $[0; 2\pi]$. З малюнка випливає що множиною значень x з відрізка $[0; 2\pi]$, для яких відповідні точки графіка синусоїди розміщені вище від точок прямої $y = \frac{1}{2}$, буде $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Додавши до цих чисел період $2n\pi$, дістанемо множину всіх розв'язків даної нерівності $\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

Графічний спосіб є досить наочним, але незручність полягає в тому, що кожного разу (хоч і схематично) треба будувати графіки тригонометричних функцій.

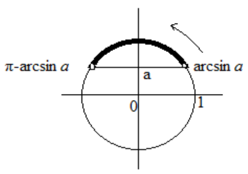
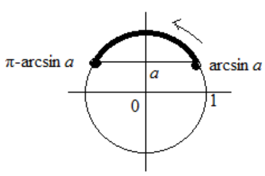
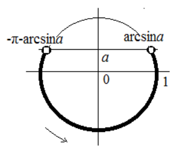
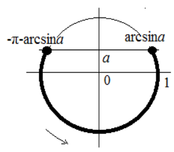


Дещо зручнішим є спосіб розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей за допомогою одиничного кола. Для даної нерівності розв'язування цим способом проводять аналогічно розв'язуванню найпростішого тригонометричного рівняння.

Побудуємо одиничне коло. Відкладемо на осі Оy ординату $\frac{1}{2}$ і через кінець відрізка проведемо пряму, паралельну осі Оx. Розв'язання даної нерівності зводиться до знаходження на одиничному колі всіх точок, у яких ординати більші за $\frac{1}{2}$. Ці точки відповідають шуканим числам a, що є розв'язками даної тригонометричної нерівності. З малюнка випливає, що такими точками є точки дуги кола, які розміщені над прямою $y=\frac{1}{2}$ відповідають числам множини $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ довжина якого дорівнює періоду 2π.

Додаючи до цих чисел період функції $2n\pi$, дістанемо множину всіх розв'язків нерівності $\sin x>\frac{1}{2}$.

Розглядаючи розв'язання нерівності виду $\sin x>a$ і $\sin x<a$ у загальному випадку, необхідно накласти обмеження на число a.

a	$\sin x > a$	$\sin x \geq a$	$\sin x < a$	$\sin x \leq a$
$a<-1$	$x\in R$	$x\in R$	Немає розв'язків	Немає розв'язків
$a=-1$	$x\neq-\pi/2+2\pi k$	$x\in R$	Немає розв'язків	$x=-\pi/2+2\pi k$
$\|a\|<1$	 $(\arcsin a+2\pi k;\pi-\arcsin a+2\pi k)$	 $[\arcsin a+2\pi k;\pi-\arcsin a+2\pi k]$	 $(-\pi-\arcsin a+2\pi k;\arcsin a+2\pi k)$	 $[-\pi-\arcsin a+2\pi k;\arcsin a+2\pi k]$
$a=1$	Немає розв'язків	$x=\pi/2+2\pi k$	$x\neq\pi/2+2\pi k$	$x\in R$
$a>1$	Немає розв'язків	Немає розв'язків	$x\in R$	$x\in R$

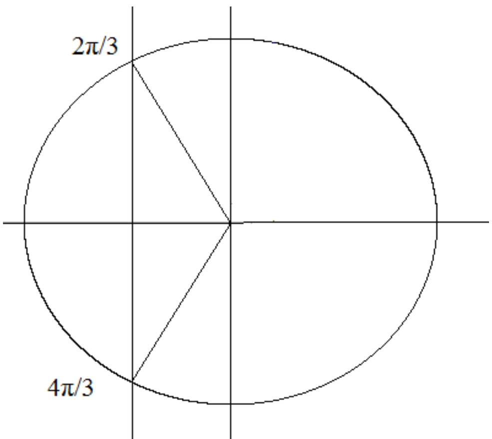
Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\cos x\leq-\frac{1}{2}$$

Розв’язання.

Знайдемо спочатку розв'язки на відрізку $[-\pi;\pi]$. Розв'язання даної нерівності зводиться до знаходження на одиничному колі всіх точок P_α, що мають абсциси, які менші або дорівнюють $-\frac{1}{2}$.

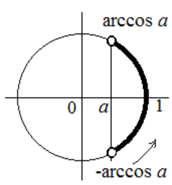
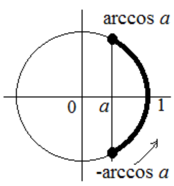
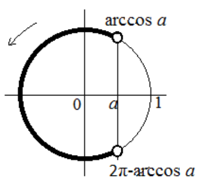
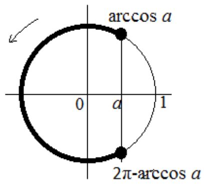
Всі ці точки відповідають на одиничному колі числам a, які є розв'язками даної нерівності.



Відкладемо на осі Оx відрізок OA, що відповідає абсцисі , і проведемо через його кінець A пряму, паралельну осі Оy.

Шукані точки одиничного кола лежать лівіше від прямої $x =-\frac{1}{2}$ або на самій прямій і належать дузі $P_{\frac{2\pi}{3}}P_{\frac{4\pi}{3}}$. Отже, множиною розв'язків нерівності, що належить відрізку$[-\pi;\pi]$ є $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$.Додаючи до цих чисел період косинуса, дістанемо всі розв’язки нерівності $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z$.

Розглядаючи розв'язання нерівності виду $\cos x > a$ і $\cos x < a$ у загальному випадку, необхідно накласти обмеження на число a.

a	cos $x>a$	cos $x\geq a$	cos $x<a$	cos $x\leq a$
a<-1	$x\in R$	$x\in R$	Немає розв'язків	Немає розв'язків
a=-1	$x\neq\pi+2\pi k$	$x\in R$	Немає розв'язків	$x=\pi+2\pi k$
$\|a\|$<1	 (-arccos a+2πk; arccos a+2πk)	 [-arccos a+2πk; -arccos a+2πk]	 (arccos a+2πk; 2π-arccos a+2πk)	 [arccos a+2πk; 2π-arccos a+2πk]
a=1	Немає розв'язків	x=2πk	$x\neq 2\pi k$	$x\in R$
a>1	Немає розв'язків	Немає розв'язків	$x\in R$	$x\in R$

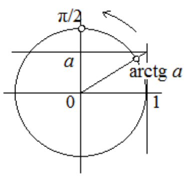
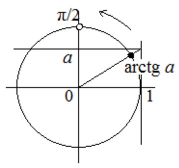
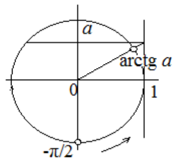
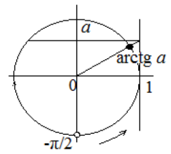
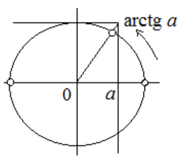
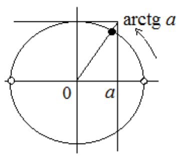
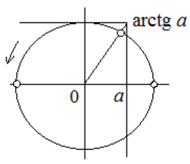
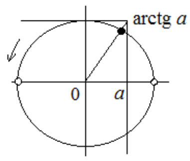
Приклад 3. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Розв’язання.

Враховуючи періодичність тангенса, знайдемо розв'язки даної нерівності спочатку на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Якщо α – розв’язок даної нерівності, то ордината точки T_α лінії тангенсів, що дорівнює tg a, має бути менша за $\sqrt{3}$. Всі такі точки лежать на дотичній нижче від точки $T_{\frac{\pi}{3}}$. Відповідні точки P_a одиничного кола належать дузі, позначеній на малюнку. Ці точки відповідають числам α, що належать проміжку $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

Додаючи до знайдених чисел період тангенса, дістанемо всі розв'язки даної нерівності $-\frac{\pi}{2} + n\pi < \alpha < \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z$.

Розв’язки найпростіших тригонометричних нерівностей tg $x > a$, tg $x < a$, ctg $x > a$, ctg $x < a$ можна подати у вигляді таблиць:

A	tg $x>a$	tg $x\geq a$	tg $x<a$	tg $x\leq a$
$a \in$R				
a	(arctg a+πk; π/2+πk)	[arctg a+πk; π/2+πk)	(-π/2+πk; arctg a+πk)	(-π/2+πk; arctg a+πk]
a	ctg $x>a$	ctg $x\geq a$	ctg $x<a$	ctg $x\leq a$
$a \in$R				
a	(πk;arcctg a+πk)	(πk;arcctg a+πk]	(arcctg a+πk;π+πk)	[arcctg a+πk;π+πk)

Розглянемо тригонометричні нерівності, що зводяться до найпростіших.

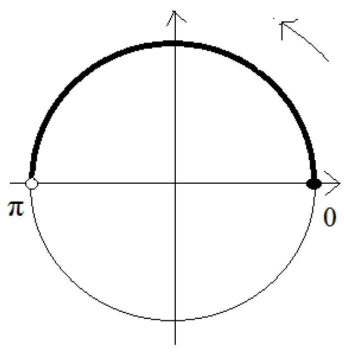
Приклад 1. Розв’язати нерівність

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} \geq 0.$$

Розв’язання.

Оскільки $1+\cos x \geq 0$ для всіх значень x, то початкова нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$



Виділимо на одиничному колі множину точок, що задовольняють ці умови. Маємо (враховуючі період) $x \in [2\pi k;\ \pi + 2\pi k), k \in Z$.

Відповідь: $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k), k \in Z$.

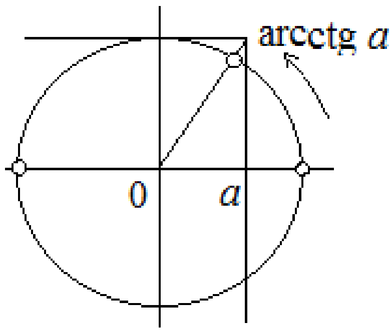
Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1.$$

Розв'язання.

Спростимо ліву частину нерівності

$$\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x = \sin 4x + \cos 4x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos(4x - 2x)}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} 2x.$$



Маємо нерівність $\operatorname{ctg} 2x > 1$, яка після заміни $2x = t$ зводиться до найпростішої $\operatorname{ctg} t > 1$.

Тоді $\pi k < t < \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ (ілюстрація на малюнку). Повертаючись до x, маємо: $\pi k < 2x < \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

$$\frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in Z$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + \sin x - 1 < 0.$$

Розв'язання.

Спрощуючи ліву частину, маємо

$$8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + \sin x - 1 = 8 \sin^2 x (\sin^2 x - 1) + (\sin x - 1)$$
$$= (\sin x - 1)\,(8 \sin^2 x (\sin x + 1) + 1).$$

Оскільки $\sin x + 1 \geq 0$, то $8\sin^2 x(\sin x + 1) \geq 0$ і $8\sin^2 x(\sin x + 1) + 1 \geq 0$. Тому початкова нерівність рівносильна такій: $\sin x - 1 < 0, \sin x < 1$. Звідки $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Відповідь: $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

РОЗДІЛ IV. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ІКТ У ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ»

Сьогодні, в умовах інформатизації суспільства є дуже актуальною проблема використання інформаційних комп'ютерних технологій . Ці технології, з одного боку, можуть стати незамінним помічником учителя, спростити його роботу, а з іншого, вивести методику викладання предметів на якісно новий рівень, покращити якість освіти. Впровадження інформаційні технології в школі відкриває широкі перспективи гуманітаризації освіти й гуманізації навчального процесу, поглиблення й розширення теоретичної бази знань, активізації навчального інтересу, створення умов для найбільш повного розкриття здібностей учнів, допомагає розвитку мислення та здійсненню індивідуального підходу до кожної дитини. Це стосується й навчання математики, методів розв'язання задач, побудови й аналізу математичних моделей різноманітних процесів й явищ, інтерпретації й узагальнення результатів такого аналізу. На уроках даного предмету зазвичай не вистачає наочностей, ілюстрацій, тому дуже часто його учні вважають не цікавим та «сухим». Для того щоб зацікавити учнів за допомогою комп'ютера на уроках математики можна представити презентації, різні малюнки, графіки і таблиці, які наочно демонструють матеріал, що вивчається. На сьогодні розроблена вже значна кількість програмних засобів, що дозволяють вирішувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності. Це такі програмні засоби, як GRAN,

Maple, Mathematika, MathLab,і інші. Причому одні з них орієнтовані на фахівців досить високої кваліфікації в галузі математики, інші на учнів середніх навчальних закладів або студентів вузів, що лише почали вивчати шкільний курс математики або основи вищої математики. Їх використання дає змогу ефективно будувати та досліджувати математичні моделі, проводити навчальні дослідження, що відповідає вимогам Болонського процесу удосконалення вищої освіти. Питання впровадження таких програм у навчальний процес останнім часом все більше привертає увагу науковців (І. Аман, Т. Архіпова, С. Власенко, С. Ганжела, О. Крайчук, Т. Лисенко, Т.

Підгорна, А. Шемейко, Л. Страннікова та ін.). Виділяють сім основних класів систем комп’ютерної математики: системи для чисельних обчислень, табличні процесори, матричні системи, системи для статистичних, для спеціальних обчислень, системи для аналітичних обчислень (комп’ютерної алгебри), універсальні системи. Найбільш зручними для підтримки вивчення курсу математики в середніх навчальних закладах видаються комплект програм GRAN (GRAN1, Gran-2D, Gran3D, ін.). Названі засоби призначені у першу чергу для розв'язання певних класів задач різними методами й можуть бути віднесеними до так називаних програм - розв’язувань. Перевагами даних програм є те, що вони не потребують від користувача спеціальних знань, поглибленого вивчення комп’ютера, а досить лише найпростіших понять повністю доступних для учнів та учителя. Використання даних програм дає можливість учневі вирішувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів, тощо. Наприклад, учень може вирішувати рівняння й нерівності і їхні системи, не знаючи формул для відшукування коренів, методу виключення змінних, досліджувати функції, не знаючи алгоритмів їхнього дослідження. Разом з тим завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язання задачі, учень чітко й легко буде вирішувати досить складні задачі, упевнено володіти відповідною системою понять і правил. Використання програмних засобів відзначеного типу дає можливість у багатьох випадках зробити розв'язання задачі настільки ж доступним, як простий розгляд малюнків або графічних зображень. Їх використання дає змогу значною мірою

підсилити інтелектуальну діяльність, можливість автоматизувати виконання не тільки чисельних, а й аналітичних (символьних) обчислень та графічних побудов. З іншої сторони такий підхід дозволяє забезпечити урок значною кількістю наочності, розвиває образне мислення, просторову уяву, дозволяє досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, неформально вирішувати задачу. При цьому на передній план виступає з'ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної математичної моделі, матеріальна інтерпретація отриманих за допомогою комп'ютера результатів. Всі технічні операції щодо розробки побудованої математичної моделі, реалізації методу відшукування розв’язування, оформлення й подання результатів розробки вхідних даних покладають на комп’ютер. Комп'ютерні програми згаданого типу можуть бути використані практично на всіх уроках математики, починаючи вже з п'ятих - шостих класів, причому мета такого застосування може бути різною. Для прикладу, при вивченні графіків функції, можна широко застосувати програми GRAN1, Gran-2D. За їхньою допомогою учитель може швидко та точно показати покрокову побудову графіків функцій, та їх перетворення, що забезпечує краще розуміння учнями матеріалу. При вивченні планіметрії за допомогою Gran2D вчитель демонструє геометричні фігури, змінює їх площу, будує бісектриси кутів чи висоти трикутника, швидко описує коло навколо трикутника. При вивченні стереометрії в сучасних умовах є незамінним Gran-3D, адже жоден підручник, і жоден малюнок вчителя крейдою на дошці не зможе показати просторову фігуру в тривимірному просторі, як це робить дана програма. Дуже зручним є те, що фігуру можна крутити, розглядати з різних кутів, будувати перерізи, міняти площу, колір. Причому всі ці маніпуляції здійснюються душе швидко, що економить час уроку. Учням подобається така наочність, їх пізнавальний інтерес зростає. Дуже часто учні починають відставати при вивченні стереометрії саме через те, що не можуть чітко уявити фігури, тому не розуміють їх властивостей, з використанням Gran-3D ця проблема вирішується.

Програми даного типу можуть бути використані на уроках алгебри, перш за все при обчисленні границь, похідної та інтеграла, також за їх допомогою можна продемонструвати графічний метод розв’язку рівнянь та нерівностей. Переваги дійсно вражаючі, але виникають і певні проблеми. Перш за все це забезпечення технічними засобами. Зрозуміло, що заняття з математики, орієнтовані на використання засобів навчання згаданих типів, повинні проводитися відповідним чином в оснащеному технічними й програмними засобами класі. В цьому випадку кожен учень сам візьме участь у виконанні завдання.У таких класах повинні вивчатися всі навчальні предмети, а не тільки основи інформатики й обчислювальної техніки. Це у свою чергу буде сприяти розширенню й поглибленню міжпредметних зв'язків, інтеграції окремих навчальних предметів, їхньому взаємопроникненню й взаємодії, що в остаточному підсумку дасть можливість в окремих навчальних закладах або класах оперувати елементами нових інформаційних технологій й інформаційної культури при вивченні різних навчальних дисциплін. Проте в більшості школах України такого забезпечення немає. У цьому випадку можна скористатися наявністю мультимедійної дошки, але тоді усі завдання буде виконувати вчитель, а учні лише спостерігати. Також частину уроків можна проводити у комп'ютерному класі. Звісно, що використання інформаційних технологій дає змогу збагатити математичну науку, розширити її застосування, суттєво вплинути на математичну діяльність і у цьому напрямку Україна ще повинна зробити певні кроки. Використання комплекту програм GRAN є дуже корисним на уроках математики, адже дані програмні засоби значно полегшують роботу учителя та активізують пізнавальний інтерес у дітей, урозноманітнюють уроки, та виводять навчання на якісно новий рівень. Однією з основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу є лінія рівнянь і нерівностей, яка має розгалужену систему внутрішньопредметних зв'язків з іншими лініями курсу. Через це рівняння і нерівності традиційно широко представлені в завданнях державної підсумкової атестації з математики, в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання та в завданнях вступних іспитів до ВНЗ із математики, хоча результати виконання цих завдань в останні роки суттєво погіршилися. Це зумовлює актуальність проблеми визначення і обґрунтування можливості вдосконалення методики вивчення рівнянь, нерівностей та їх систем у курсі алгебри і початків аналізу на основі компетентнісного підходу із використанням ІКТ.

Якщо загальні теоретичні питання впровадження компетентнісного підходу розроблені досить ґрунтовно (О.В. Овчарук, О.І. Пометун, Д. Равен, О.Я. Савченко, А.В. Хуторський та ін.), то реалізація його при вивченні математики тільки починає розроблятися (С.А. Раков, О.В. Шавальова).

Вважаю за доцільне віднести до предметно-галузевих математичних компетентностей учня наступні: процедурну, логічну, технологічну та дослідницьку. Необхідною умовою формування логічної, дослідницької та технологічної компетентностей учнів є використанням ІКТ у процесі вивчення рівнянь та нерівностей. При цьому, на наш погляд, можливі два шляхи: по-перше, системне використання ІКТ під час уроків вивчення рівнянь та нерівностей; по-друге, впровадження у 11 класах за рахунок шкільного компонента спецкурсу ”Використання ІКТ для розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем”. У даному виступі ми зосередимо свою увагу саме на другому із них.

Метою даного спецкурсу є сприяння набуттю учнями технологічної, логічної і дослідницької математичних компетентностей, ключових життєвих компетентностей (в першу чергу навчальної) та підвищенню інформаційної грамотності учнів.

Відповідно завданнями курсу є:

сформувати в учнів знання, навички та вміння роботи з навчальними математичними пакетами (наприклад, “Gran-1D”, “DERIVE”, “1C School-Graph”);

навчити учнів розв’язувати типові задачі з використанням навчального математичного програмного забезпечення (пакети символьних перетворень, наприклад, “Gran-1D”, “DERIVE”, “1C SchoolGraph”);

навчити учнів досліджувати графіки тригонометричних, ірраціональних, показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей за допомогою комп’ютерних експериментів;

навчити учнів проводити графічні навчальні дослідження рівнянь і нерівностей з модулем та з параметрами, систем рівнянь та нерівностей;

сприяти розвитку продуктивного, творчого мислення учнів.

Вивчення курсу розраховано на 32 години. Він складається з п’яти розділів. Перший вступний розділ розрахований на 2 год. і передбачає знайомство учнів із навчальними математичними пакетами (педагогічними програмними засобами). Під час експериментального навчання ми переважно використовували ППЗ “Gran-1D” та ППЗ “1C SchoolGraph”, але можливе застосування ППЗ “DERIVE” та інших програмних засобів, які дають змогу будувати та аналізувати графіки рівнянь, нерівностей та їх систем.

Другий розділ “Тригонометричні та ірраціональні рівняння і нерівності” розрахований на 6 год. і передбачає розгляд наступних тем: “Графічний спосіб розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей”, “Графічний спосіб розв’язування ірраціональних рівнянь і нерівностей”, “З’ясування властивостей тригонометричних та ірраціальних функцій і їх використання при розв’язуванні рівнянь та нерівностей.”

Третій розділ “Показникові та логарифмічні рівняння та нерівності” розрахований на 6 год. і передбачає розгляд наступних тем: “Графічний спосіб розв’язування показникових рівнянь та нерівностей”, “Графічний спосіб розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей”, “З’ясування властивостей показникових та логарифмічних функцій та їх використання при розв’язуванні рівнянь.”

Четвертий розділ “Рівняння та нерівності з модулем і з параметрами” розрахований на 10 год. і передбачає розгляд наступних тем: “Застосування графіків при розв’язуванні рівнянь і нерівностей з модулем”, “Застосування графіків при розв’язуванні рівнянь і нерівностей з параметрами”, “Графічні навчальні дослідження при розв’язуванні рівнянь і нерівностей з параметрами та з модулем.”

П’ятий розділ “Системи рівнянь та нерівностей” розрахований на 8 год. і передбачає розгляд наступних тем: “Графічний спосіб розв’язування систем рівнянь”, “Спосіб заміни ірраціонального рівняння рівносильною системою з побудовою графіків її рівнянь”, “Графічні навчальні дослідження при розв’язуванні систем тригонометричних, ірраціональних, показникових, логарифмічних рівнянь та нерівностей”, “Графічні навчальні дослідження при розв’язуванні систем рівнянь та нерівностей з параметрами і з модулем”

Результати експериментального навчання показали, що впровадження спецкурсу “Використання ІКТ для розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем” сприяє набуттю учнями не тільки технологічної, але й логічної та дослідницької математичних компетентностей. При цьому корисно застосувати ППЗ “GRAN1”, адже його використання під час розв’язання рівнянь, нерівностей та їх систем з параметрами вимагає від учнів доцільного застосування різних методів розв’язування, використання знань із різних розділів математики, вміння, будувати графіки рівнянь, нерівностей та їх систем за допомогою комп’ютера та проводити графічні і аналітичні дослідження; є засобом формування у них евристичних правил-орієнтирів.

Нагальним і важливим є розробка комп’ютерно-орієнтованих методик організації вивчення усіх змістово-методичних ліній курсу алгебри та початків аналізу з метою сприяння набуттю старшокласниками математичних компетентностей.

Приклад проведення уроку з використанням ІКТ наведено у додатку.

РОЗДІЛ V. ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

В процесі експериментального етапу – на основі напрацьованої теоретичної інформації і розроблених рекомендацій здійснювався педагогічний експеремент, пов'язаний із формуванням у учнів 10 класів умінь і навичок розв'язування тригонометричних рівнянь, нерівностейи і їх системи.

Педагогічний експеримент здійснювався за такими етапами:

- власне формуючий експеримент, в процесі якого розвязувалися тригонометричні рівняння, нерівності іїх системи і проводилася систематична цілеспрямована робота із формування відповідних навичок;
- теоретико-узагальнюючий – основна увага спрямовувалася на теоретичний аналіз і узагальнення результатів формуючого експерименту, оформлення роботи та з'ясування подальших перспектив розроблених методичних рекомендацій.

Експериментальне дослідження ми проводили у Гімназія №2м.Дубно. Нами було охоплено 18 учні 10-А класу (експериментального) і 15 учнів 10-Б класу (контрольного). У процесі формуючого експерименту ми пропонували десятикласникам добірку завдань, диференційованих за складністю і спрямованих на вироблення вмінь розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності в 10 класі. Ці завдання використовувалися як на уроках, так і на позакласних заняттях з математики і для самостійної роботи учнів.

Проаналізувавши результати роботи у 10–А класі протягом вересня - листопада, всі учні експериментального класу постійно працювали з рекомендаціями, які є розробленими в даній роботі. Учитель фіксував, як кожен учень розв'язує тригонометричні рівняння і нерівностя: повністю, частково чи зовсім не розвязує. Виявилося, що в переважній більшості випадків із завданнями II рівня справлялися лише 5 учнів. У наступних місяцях ці показники дещо покращилися. В кінці I семестру учитель провів контрольну роботу, в якій було 3 обов'язкові і одне необов'язкове завдання – задача «із зірочкою». Цю задачу бралися розв'язувати 10 учнів (із 18 учнів класу), але розв'язало її 8 учнів. Спостерігаючи за роботою класу, ми виявили зростання інтересу учнів до розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей. З'явилася група учнів, яка самостійно справлялася з більшістю додаткових завдань.

Аналогічні дослідження були проведені і в 10–Б класі. Протягом першого семестру серед учнів цього класу теж виділилася група сильніших учнів, які працювали із завданнями. Було помічено деякі відмінності у роботі учнів при розв'язуваннні тригонометричних рівнянь і нерівностей.

Аналізуючи завдання, які не міг розв'язати жоден учень, і завдання, з якими деякі учні справлялися частково, ми зіткнулися з потребою з'ясувати питання про форми організації роботи над розв'язанням тригонометричних рівнянь: фронтальну, індивідуальну, групову і методику їх використання.

Методика формуючого експерименту включала проведення спеціально розроблених уроків і їх фрагментів та окремих позаурочних занять; безпосереднє проведення занять самим дослідником; спостереження за діями вчителя і учнів у процесі роботи при розв'язуванні тригонометричних рівнянь; анкетування та аналіз усних відповідей і письмових контрольних робіт учнів; проведення бесід з учителями і учнями про розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей експериментальної системи.

Результативність дослідження оцінювалася на основі розв'язання учнями тригонометричних рівнянь і нерівностей, частково використовувалося порівняння результатів початкового і кінцевого зрізів, а також бесід з учителями та безпосередніх спостережень.

У ході першого етапу експерименту була проведена контрольна робота, яка проводилася в експериментальному та контрольному класах на початку листопада, після завершення етапу повторення навчального матеріалу. Результати цієї контрольної роботи приблизно однакові і в контрольному, і в експериментальному класах.

У ході формуючого експерименту були виявлені труднощі, які виникають в учнів при розв'язуванні тригонометричних рівнянь і нерівностей.

Краще діти справлялисянь із розв'язанням тригонометричних рівнянь і нерівностей, якщо вчитель використовував багаторазове пояснення. Зауважимо, що лише сильні учні класу обходилися без допомоги при розв’язуванні тригонометричних рівнянь. Інші ж учні нерідко мали труднощі в самостійній роботі при розв’язуванні, тому робота з учнями, які мають середній рівень знань, на уроці здебільшого була можлива лише у фронтальній формі.

У лютому місяці в експериментальному і контрольному класах були проведені контрольні роботи (див. Додаток 1.). Перше, друге та третє завдання стосувалося суто програмового матеріалу, четверте не виходило за межі програми, але мало певні ускладнення у формулюванні.

	Правильно розв’язали (у відсотках)	
Класи	1- 2 е завдання	3-е завдання
10-Б контрольний	76	77
10-А експерим.	80	83

Виконання додаткових завдань в експериментальному
і контрольному класах

	Правильно розв’язали (у відсотках)
Класи	4-е завдання
10-Б контрольний	77
10-А експерим.	82

Порівняння наслідків виконання контрольної роботи свідчить про те, що в експериментальному класі рівень умінь розв’язувати тригонометричні рівняння і нерівності, значно вищий, ніж у контрольному, причому особливо відрізняються результати розв’язання додаткового завдання. Ми пояснюємо це цілеспрямованою роботою у процесі навчання учнів 10 класів розв’язувати тригонометричні рівняння і нерівності, яка проводилася відповідно до завдань формуючого експерименту, що привело до позитивних зрушень у розвитку мислення школярів.

Виявлення ефективності розробленої системи вправ і задач у формуванні математичних уявлень і понять у учнів 10 класів ми здійснювали на основі порівняння сформованості відповідних навичок та вмінь в учнів експериментального класу порівняно з контрольним, де використовувалася звичайна система навчання.

На основі відповідних показників ми визначили уміння і навички, пов'язані із диференційованим підходом при розв'язуванні тригонометричних рівнянь і нерівностей. За рівнем розвитку даних умінь ми визначили три рівні сформованості математичних уявлень і понять десятикласників про розв'язання тригонометричних рівнянь:

1) *високий* – у школяра сформовані уміння, пов'язані із розв'язуванням тригонометричних рівнянь, і здатність безпомилкового виконання завдань або самостійного виправлення допущених помилок при зауваженні вчителя;

2) *середній* – учень виконує усі попередні завдання на належному рівні, але припускається кількох неістотних помилок, які виправляє з незначною допомогою вчителя;

3) *низький* – в учня не сформовані пропедевтичні уміння розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей, не розвинені загальні уміння розв'язування завдань.

Робота, яка проводилася нами в експериментальному класі, позитивно вплинула на підвищення якості знань і вмінь школярів. Так, учні експериментального класу значно краще виконали запропоновані завдання, ніж учні контрольного.

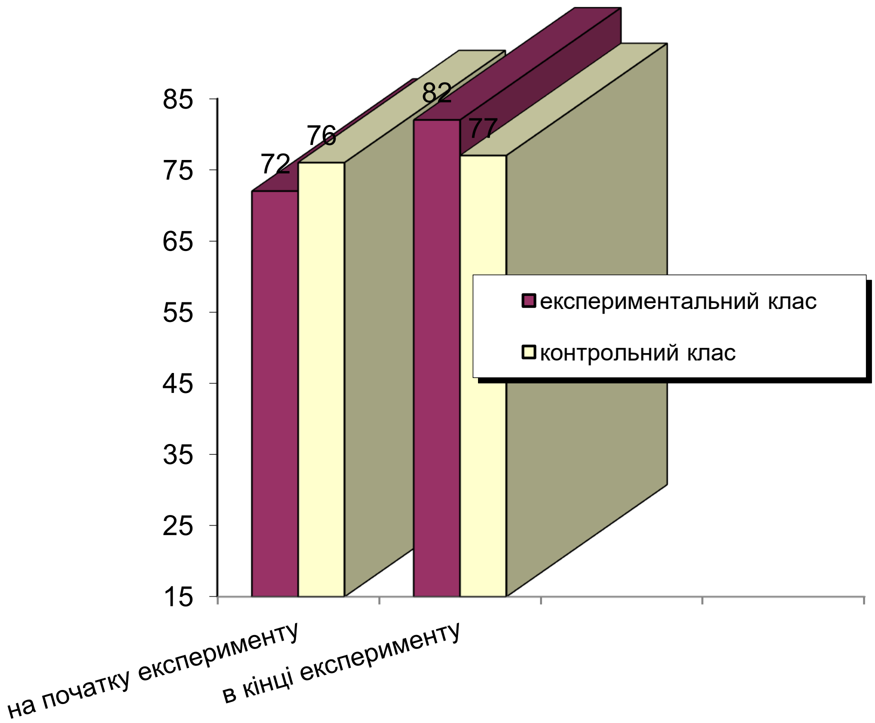
Отримані результати формуючого експерименту підтвердили гіпотезу, що використання запропонованої добірки завдань позитивно вплинули на формування відповідних уявлень і понять в учнів експериментального класу.

Таким чином, ми отримали результати, які підтвердили ефективність формуючого експерименту. Із 18 учнів експериментального класу 5 учнів продемонстрували високий рівень розвитку математичних уявлень і понять, 10 – середній і 3 – низький.

У контрольному класі (15 учнів) високий рівень розвитку математичних уявлень і понять мають 2 учні, середній – 9 і низький – 4 школярів. Порівняно з початком експерименту, показники сформованості відповідних умінь розв'язувати нестандартні завдання зросли в обох класах (початковий рівень відповідно 76 і 72%). Проте в експериментальному класі наприкінці дослідження ці показники виявилися значно вищими (відповідно 77 і 82% – *див. діаграму*).

Діаграма

Загальний рівень сформованості умінь диференційованого підходу при розв'язуванні тригонометричних рівнянь і нерівностей в експериментальному і контрольному класах на початку і в кінці експерименту



Проведення експериментального дослідження дало змогу виявити і оцінити ефективність використання добірки завдань, диференційованих за складністю і спрямованих на вироблення вмінь розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності. У процесі використання розробленої добірки завдань в учнів експериментального класу порівняно з контрольним значно підвищився рівень сформованості відповідних знань і умінь, що свідчить про ефективність застосовуваного напрямку роботи.

ВИСНОВКИ

Диференціація – одна з ключових проблем організації сучасної школи. У старшій школі вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики.

Навчання в профільних фізико-математичних класах передбачає істотне збільшення частки самостійної пізнавальної та практичної діяльності учнів.

Аналіз психолого-педагогічної та науково-методичної літератури показав, що методичні розробки по навчанню учнів потребують подальшої розробки з врахуванням змін, які відбуваються в сучасній профільній школі.

В процесі роботи було:

- проаналізовано різні методи і прийоми викладання теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» та ефективність використання їх на практиці;
- розроблено методичні рекомендації щодо навчання учнів розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей.

У першому розділі викладені педагогічні засади і педагогічні погляди на вивчення «Тригонометричні рівняння і нерівності».

В другому розділі було розглянуто методику навчання учнів фізико-математичного профілю розв’язувати тригонометричні рівняння, нерівності і їх системи.

В третьому розділі описали педагогічний експеримент і його результати , який був проведений у Гіназії №2 м.Дубно , у 10-А і 10-Б класі.

В курсовій роботі вміщено велика кількість різних прикладів розв’язання тригонометричних рівнянь, нерівностей і їх систем. Це дасть змогу навіть малодосвідченому читачеві ґрунтовно вивчити порушені питання. Увесь матеріал роботи можна використовувати на заняттях, в позакласній роботі і для індивідуальних завдань учнів. Робота містить багато методичних рекомендацій для вчителів і буде корисною, особливо для вчителів-початківців, студентів педагогічних закладів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навчальний посібник. – 3-тє видавництво,перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1989. – 366с.

2. Биркгоф Г. Математика и психология. – М.: Советское радио. 1977.– 400с.

3. Болтянський и др. Лекции и задачи по элементарной математике.– М.: Наука, 1971.–592с.

4. Брадіс В.М. Методика викладання математики в середній школі /Под ред. О.І.Маркушевича. Пер з 3–го рос. вид. Учбовий посібник для пед. Ін.-в та держ.ун-в. Вид 2-ге. К.: Рада школи.1954.– 483с.

5. Горбатий П.А. Досвід викладання тригонометрії в СШ. 1993

6. Горнштейн П.І., Полонський В.Б., Якір М.С. Задачі з параметрами. – К.: РІА “Текст”; МП “Око”, 1992. – 290 с.

7. Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Розв’язування задача з параметрами за допомогою програми GRAN1 // Математика в школі – 2006. – № 4. – С. 25 – 28.

8. Гричулич С. Прийоми індивідуалізації самостійної роботи учнів на уроці./Математика в школі.-2000.- №3

9. Груденов Я.И.Психолого – дидактические основи методики обучения математике.–М.: Педагогика, 1987.

10. Гуринович К.М. Математика: Задачи и решения: Из д-е 2-е

11. Державне учбовр-педагогічне видавництво «Радянська школа», 1961.– 208с.

12. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп’ютером. Посібник для вчителів. К.: РННЦ “ДНІТ”. – 2004. – 255 с.

13. Задачі з математики Вишенський В.О., Перестюк М.О., Самійленко А.М. – К.: Вища школа, 1985. – 264 с.

14. Збірник задач з математики для вступників до втузів/ В.К.Єгерев, В.В.Зайчев, Б.А.Кордемський та ін.;За ред. М.І.Сканаві;Пер. з рос.:

Є.В.Бондарчук, Ю.Ю.Кострица, Л.П.Оніщенко. – 2-ге вид., стер. – К.: Вища шк., 1994. – 445 с.:іл.

15. Кожеуров Павел Яковлевич. Тригонометрия. М., физматгиз, 1962. – 336с.

16. Лебединцев К.Ф. Преподование алгебры и начал анализа. – К.: Радянская школа,1984.– 247с.

17. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, Д.А.Номіровський В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків : Гімназія, 2010. – 415 с.

18. Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту. Профільний рівень – Електронний ресурс. Режим доступу https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

19. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2009. – 379 с.

20. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв’язувати задачі // А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Київ : Генеза, 2008. – 312 с. 37. Мирошин В. Отбор корня в тригонометрических уравнениях / В.Мирошин // Математика. – Додаток до газети «Перше вересня». – 2006. – № 17. – С. 56–59.

21. Новоселов С.И.Руководство по преподаванию тригонометрии. Пособие для учителей. М.: Государственное учебно–педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1958.– 184с.

22. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств: Справочник. – М.:Изд.-во МГУ, 1991. – 144 с.

23. Пінчук О.П. До проблем формування ключових компетенцій у старшокласників. Роль математики та інформатики у вирішенні цієї проблеми / О.П. Пінчук // Наука і сучасність: зб. наук. пр. / Нац. пед.

ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Київ, Логос, 2002. – Том XXXIII. – С.109–116. 45. Погребиський І. Б. Тригонометрія : посіб. для учителів / І.Б.Погребиський, П.Ф. Фільчаков. – Київ : Рад. шк., 1951. – 251с.

24. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія / С.А.Раков. – Х.:Факт, 2005. – 360 с.

25. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.

26. Резуненко В.О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів / В.О. Резуненко, В.О. Ярмак. – Харків : Вид. група «Основа», 2011. – 94 с. 50. Тематична атестація. Математика. 10 клас. – Тернопіль : СМП Астон, 2000. – 80 с.

27. Решетников Н. Н. Тригонометрия в школе / Н.Н. Решетников. – Москва : Педагогический университет, 2006. – 278 с. 52. Рыбников К. А. История математики в двух томах. — М. : Изд. МГУ, 1960. — Т. I.

28. Рижков М. О. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 8-11 / М.О. Рижков. – Харків : Вид. група «Основа», 2008. – 96 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України». – Вид. 9 (69)

29. Сканави М.И. Элементарная математика / М.И.Сканави. – М., 1974.– 592 с.

30. Смоляков А. Н. Прийоми рішення тригонометричних рівнянь / А.Н.Смоляков, П.Ф. Севрюков // Математика в школі. – 2004. – № 1. – С. 24– 26.

31.. Тригонометричні функції. Завдання та розв’язки. – К.: Видавничий дім «Перше вересня», 2016. – Серія «Бібліотека «Шкільного світу»».

32. Триус Ю.В. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання: Монографія / Ю.В.Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 400 с.

33. Чирко В.О. Інформаційна технологія і математична освіта.// Комп’ютер в школі та сім’ї. – К.: 1998, №2.- с. 32 – 33.

34. Шиманський Р.І. Тригонометрія. Посібник для вчителів. К.

35. Шкіль М.І. та інші. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 –11 класів середніх закладів освіти / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак–ЕКО, 1998. – 608с.

36. Я.Л.Каплан. Рівняння. – К.:Радянська школа.1968.– 406с.

ДОДАТКИ

Додаток 1.

Контрольна робота

Варіант 1	Варіант 2
1. Розв'язати рівняння $\sin x = \sin 2x \cos 3x$	1. Розв'язати рівняння $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$
2. Розв'язати рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$	2. Розв'язати рівняння $8\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 2.$
3. Розв'язати нерівність $\frac{\sin x}{1 + \cos x} \geq 0.$	3. Розв'язати нерівність $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$
4. Розв'язати рівняння з параметром $\sin(x + \alpha) - \sin x = \sin \alpha$ відносно невідомого x	4. Розв'язати рівняння з параметром $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(\alpha - x) = 2 \operatorname{tg} \alpha$ відносно невідомого x.

Додаток 2.

Конспект уроку

Тема. Розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь і нерівностей з параметрами з використанням прикладного програмного засобу **GRAN 1.**

Загальнопізнавальні цілі:

- формувати уміння і навички учнів розв'язувати задачі з параметрами, аналізувати та порівнювати розв'язання; формувати навички роботи з прикладним програмним засобом GRAN1 та ін.
- поглибити знання учнів про рівняння, системи рівнянь;
- розвивати логічне мислення, вміння аналізувати ситуацію;
- виховувати самостійність у роботі, бажання доводити розпочату справу до її завершення;
- виробити уміння в учнів самостійно аналізувати умову й знаходити спосіб розв’язання конкретної задачі, виявляти і заохочувати математичні здібності та таланти;
- навчити використовувати ІКТ для розв’язування математичних задач.

Обладнання: ППЗ «Бібліотека електронних наочностей АЛГЕБРА 7-9 кл.», ППЗ GRAN 1, робочі аркуші з клавіатурними комбінаціями GRAN 1 та графіками, комп’ютерний клас .

Тип уроку*:* інтегрований урок математики та інформатики

ХІД УРОКУ

1. **Організація діяльності на уроці.**

Акцентую увагу учнів на особливостях роботи з ППЗ GRAN 1, зокрема повідомляю про клавіатурні комбінації та пункти меню програми, що будуть використовуватися під час побудови графіків, визначаю учнів-консультантів, нагадує правила безпеки праці за комп'ютером. Разом з учнями повторюю правила запису арифметичних виразів: чисельник та знаменник дробу необхідно записувати в дужках, знак множення позначається * (і його не можна пропускати у запису виразу), піднесення до степеня позначається знаком ^ а функція модуль — ABS. Використання під час побудови графіка різного масштабу (масштаб користувача, автоматичне масштабування) дозволяє досягти найкращого зображення, а це полегшує його аналіз.

За допомогою комп’ютера учні будують та аналізують графіки функцій та залежностей, використовуючи технологічні картки, які є біля кожного комп'ютера. Завдання на картках згруповано за рівнем складності та відповідно до етапів уроку. (Параметри для побудови графіків добирають на етапі підготовки до уроку так, щоб отримати найкраще зображення.)

У курсі алгебри нам доводилося мати справу з рівняннями, у яких коефіцієнти при змінних (або вільний член) були буквеними. Розв'яжемо деякі з таких завдань (усно).

1.Розв'яжіть рівняння $ax = b$.

2.Для яких значень параметра k рівняння

x^2 - $кx$ +1 = 0 не має розв'язків?

*3.*Яку множину розв'язків (скінчену чи нескінченну) має рівняння $sinx = ax + b$ залежно

від значення a та b

4.Для яких значень параметра a рівняння $\sqrt{x} = a$ не має розв’язків?

На уроці розглянемо основні методи розв'язування рівнянь (та їх систем) з параметрами.

Означення 1. Рівнянням (нерівністю, системою) з параметрами називають таке рівняння (нерівність, систему), у якому хоча б один із коефіцієнтів або вільний член є буквеним.

Означення 2. Розв'язати рівняння (нерівність, систему) з параметрами означає знайти всі його розв'язки залежно від значень параметра або показати, що їх немає.

Основні способи розв'язування задач з параметрами

Серед основних способів розв'язування задач з параметрами є такі:

1)графічний;

2)аналітичний;

3)графічно-аналітичний.

Нагадуємо пакет програм «Бібліотека електронних наочностей АЛГЕБРА 7-9 кл.» побудова графіків, виконуємо такі побудови:

1. $A(2;-6)$; $A(a;b)$;

2. $y = ax - 3$; $y = ax - 3$;

3. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$; $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$;

4. $y = \dfrac{a}{x}$ $y = \dfrac{4}{x}$;

Букви *a; b; R* у цих виразах можемо вважати параметрами.

Завантажуємо GRAN 1 і починаємо працювати з графіками.

Завдання 1. Знайти максимальну кількість розв'язків рівняння

$$|x^2-3x-7| = a.$$

Розв'язання

За допомогою комп'ютера будуємо графіки функцій:

$y = |x^2 - 3x - 7|$ (стаціонарний графік), $y = a$ (рухомий графік).

Знаходимо найбільшу кількість їх спільних точок, а саме 4, яка відповідає максимальній кількості розв'язків. Встановлюємо, при яких значеннях параметра *a* розв'язків буде найбільше, робимо висновок, записуємо відповідь у зошити:

1) *Якщо* $a<0$, *то розв'язків немає;*

2) *Якщо* $a=0$ *або* $a > \dfrac{37}{4}$, *то розв'язків два;*

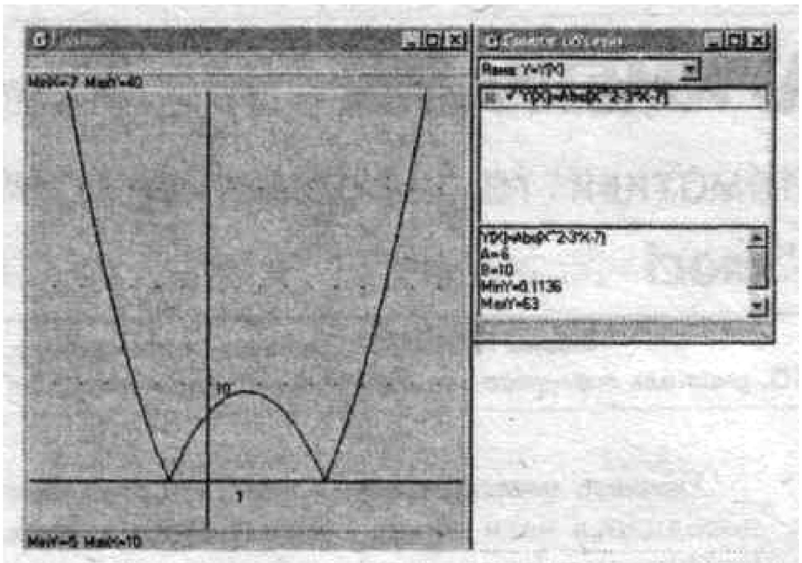
3) *Якщо* $0 < a < \dfrac{37}{4}$, *то розв'язків чотири.*

Технологічна картка 1

1.Завантажте програму GRAN 1.

2.Побудувати графік функції $y = |x^2 - 3x - 7|$ та $y = a$.

(Меню — Файл — Відкрити — F1).



Завдання 2. Скільки розв'язків залежно від значення параметра має рівняння

$$|x^2 - 6|x| + 8| - a = 3?$$

Розв'язання

Подамо рівняння у вигляді

$$|x^2 - 6|x| + 8| = 3 + a.$$

За допомогою комп'ютера будуємо графіки функцій:

$y = |x^2 - 6|x| + 8|$ (стаціонарний графік),

$y = 3 + a$ (рухомий графік).

За кількістю спільних точок графіків (n) робимо висновок про кількість розв'язків рівняння:

1)якщо $3 + a < 0$, тобто $a < -3$, то $n = 0$ і розв'язків немає;

2)якщо $3 + a = 0$, тобто $a = -3$, то $n = 4$ і рівняння має 4 розв'язки;

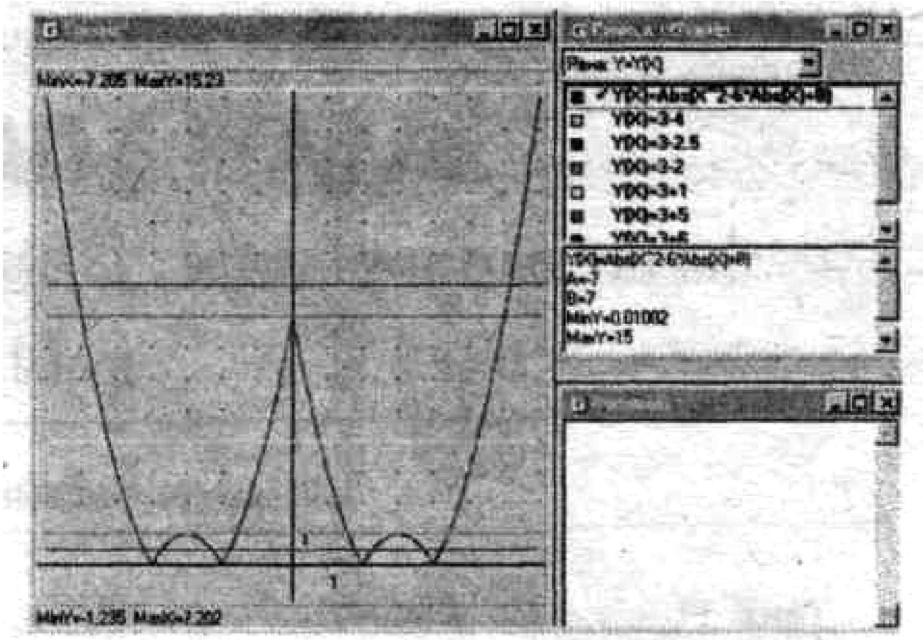
3)якщо $0 < 3 + a < 1$, тобто $-3 < a < -2$, то $n = 8$ і рівняння має 8 розв'язків;

4)якщо $3 + a = 1$, тобто $a = -2$, то $n = 6$ і рівняння має 6 розв'язків;

5)якщо $1 < 3 + a < 8$, тобто $-2 < a < 5$, то $n = 4$ і рівняння має 4 розв'язки;

6)якщо $3 + a = 8$, тобто $a = 5$, то $n = 3$ і рівняння має 3 розв'язки;

7) якщо $3 + a > 8$, тобто $a > 5$, то $n = 2$ і рівняння має 2 розв'язки.



Технологічна картка 2

1. Побудуйте графіки функцій:

$y = |x^2 - 6|x| + 8|$ *та* $y = 3 + a$ для $a = -4$, $a = -2{,}5$, $a = -2$, $a = 1$, $a = 5$, $a = 6$.

2.Для кожної функції задайте межі відрізка: $a = -7$, $a = 7$.

3.Перед початком роботи з новим об'єктом не забудьте вилучити попередній (виділіть
функцію та натисніть *Delete).*

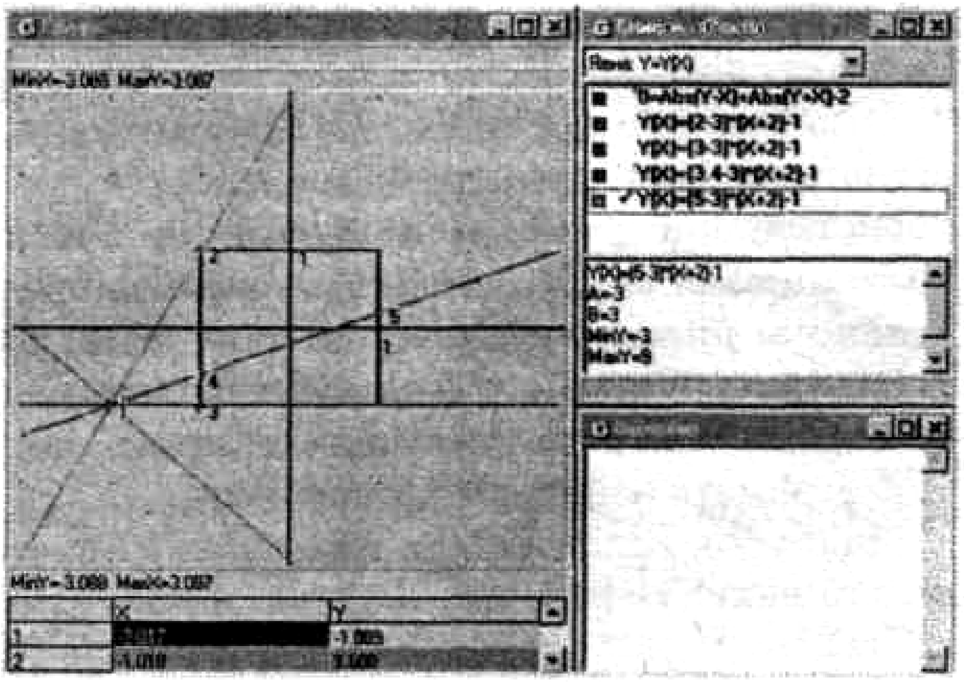
Завдання 3. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} y = (a-3)(x+2) - 1, \\ |y - x| + |y + x| = 2 \end{cases}$$ залежно від значень параметра?

Розв'язання

Будуємо рухомий графік функції $y = (a - 3)(x + 2) - 1$

(множина прямих, що мають кутовий коефіцієнт $a - 3$ і проходять через точку (-2; -1)). Будуємо графік рівняння $|y - x| + |y + x| = 2$ (квадрат зі стороною 2, центр якого знаходиться в точці $(0; 0)$, а сторони паралельні осям координат).



За кількістю точок перетину графіків робимо висновок про кількість розв'язків системи:

1)якщо a - 3 = 0, тобто a = 3, то система має безліч розв'язків;

2)якщо a — 3 = 2, тобто a = 5, то система має 1 розв'язок;

3)якшо 3 < a < 5, то система має 2 розв'язки.

4)якшо a < 3 або a > 5, то розв'язків немає.

Технологічна картка 3

1. Побудуйте графіки функцій $|y - x| + |y + x| = 2$ та $y = (a - 3)(x + 2) - 1$ для a = 2, a = 3, a = 3,4, a = 5.
2. Для кожної функції задайте межі $A = -3$, $B = 3$.

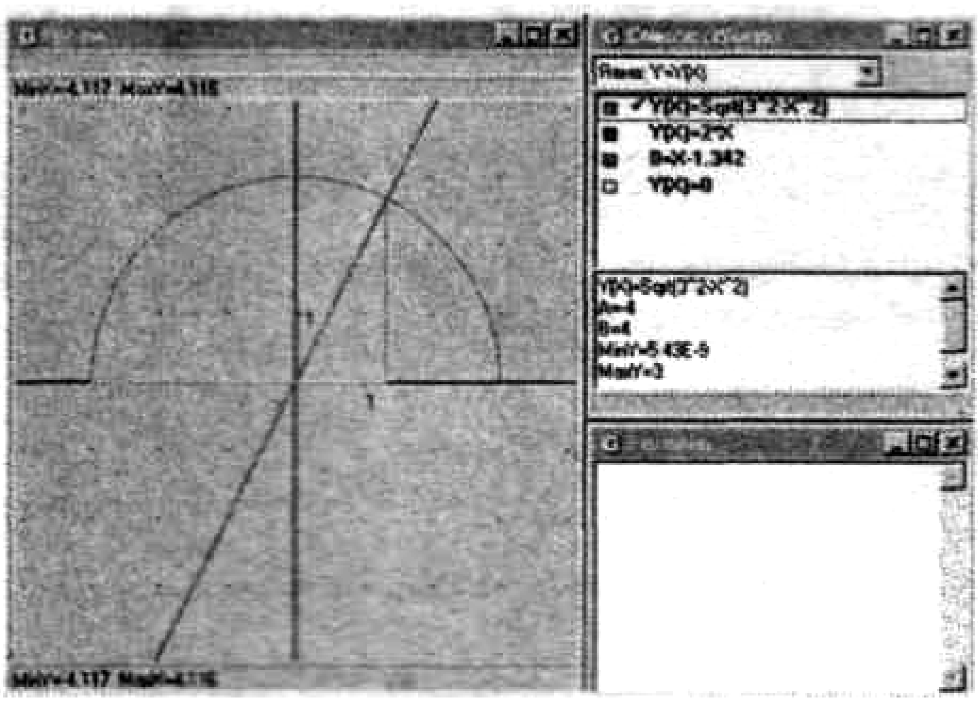
3. Для якіснішого відображення графіків задайте однаковий масштаб на осях *(Графік —*
Властивості — х→у).

Завдання 4. Знайти всі значення параметра, для кожного з яких розв'язком нерівності

$\sqrt{a^2 - x^2} \geq 2$, є відрізок, довжина якого $I = 4$.

Розв’язання

Будуємо графік функції $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (множина невід'ємних півкіл з центром (0; 0); рухомий графік) і функції $y = 2x$ (стаціонарний графік).



На малюнку виділяємо ту частину півкола, яка відповідає даній нерівності, та множину відповідних їй значень x — розв'язків нерівності.

Щоб знайти множину розв’язків скористаємося формулою довжини відрізка, що лежить
на осі абсцис: $I = x_2 - x_1$, де x_2 - координата правого кінця відрізка , x_1 — лівого. Зрозуміло,
що $x_1 = -|a|$. Щоб знайти x_2, розв'яжемо рівняння:

$\sqrt{a^2 - x^2} = 2x$; $a^2 - x^2 = 4x^2, 5x^2 = a^2$

Оскільки $x_2 > 0$, то $x_2 = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$ Знаходимо значення I :

$x_2 - x_1 = \frac{|a|}{\sqrt{5}} + |a| = \frac{|a|(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}$, оскільки $I = 4$ то отримаємо:

$\frac{|a|(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}} = 4;$ $|a| = \frac{4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, $a_1 = -\frac{4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, $a_2 = \frac{4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

Технологічна картка 4

1. Побудуйте графіки функцій $y = \sqrt{3^2 - x^2}$ та $y = 2a$, задавши межі A = -4, В=4.

2.Побудуйте графік функції y = 0, задавши межі A = -3, В = 1,32.

3.Побудуйте графік функції 0 = x — 1,322, задавши межі $A = -4$, $B = 4$.

Завдання 5. Скільки розв'язків має система

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

залежно віл значень параметра?

Учні самостійно виконують завдання та контролюють правильність побудов на екрані ПК, порівнюючи їх із попередньо розданим друкованим зразком. Це дозволяє учням з недостатньо сформованими навичками роботи з комп'ютером не відстати від решти учнів класу. На етапі виконання побудови графіків відповідних функцій учні, в разі необхідності, можуть скористатися допомогою консультантів або вчителя.

II. **Домашнє завдання.**

Оскільки у всіх є дома комп’ютери, доцільно дати додому GRAN 1 та завдання

1. Знайти розв'язки рівняння

$|x^2\text{-}4|x|+3| + a = 2$ залежно від значень параметра.

2. Для яких значень a нерівність $\sqrt{3^2 - x^2} > a - x$ не має розв'язків?

3. Придумати (підібрати) графічне завдання з параметром та розв’язати його.