Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

магістра

на тему

Методика вивчення нерівностей в основній школі

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,
групи М-М-61
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Тарасова Тетяна Романівна

Керівник: к.ф.-м.н., доц., професор кафедри
математики з методикою викладання
Крайчук Олександр Васильович

Рецензенти: к. п. н., доц. доцент кафедри
природничо-математичної освіти Рівненського
обласного інституту післядипломної
педагогічної освіти Харченко Н. Б.

к. ф.-м.н., доц., доцент кафедри вищої
математики Рівненського державного
гуманітарного університету Марач В.С.

Рівне – 2018 року

Зміст

ВСТУП……………………………………………………………………….…...3

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ……………………7

1.1. З історії розвитку поняття «нерівність»……………………………….....7

1.2. Пропедевтика вивчення нерівності в шкільному курсі алгебри……......8

1.3. Аналіз програм та математичних підручників з алгебри основної школи……………………………………………………………...…13

1.4. Основні теоретичні відомості, теорія рівносильності, розв'язок лінійних та квадратичних нерівностей і тих, що до них зводяться……16

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ…………………………………………………………….…..32

2.1. Методика розв'язання лінійних нерівностей……………………….....32

2.1.1. Лінійні нерівності з параметром……………………………….......32

2.1.2. Розв'язування нерівності з модулями…………………….……………..34

2.2. Методика розв'язування ірраціональних нерівностей …………………41

2.3. Методика розв'язування показникових нерівностей……………………48

2.4.Методика розв'язування логарифмічних нерівностей……………...……52

2.5. Методика розв'язування тригонометричних нерівностей………………59

РОЗДІЛ ІІІ. ОРГАНІЗАЦІЯ І ПРОВЕДЕННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ……………………………………………………………62

ВИСНОВКИ……………………………………………………….………...66

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……...…………………………...…68

ДОДАТКИ…………………………………………………...…………...71

ВСТУП

Основне завдання вивчення математики в основній школі полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації, і достатньої для успішного вивчення, в першу чергу, природничих предметів, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, або безпосередньо пов'язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів.

Для успішної самореалізації особистості необхідно мати базові знання з математики, а якщо зважати на те, що вибір майбутньої професії тісно пов'язаний з цією наукою, то в цьому випадку необхідне більш повне опанування понять, законів, теорій, використання інноваційних технологій навчання та організація дослідницької і проектної діяльності в галузі математики.

Кожна людина після завершення загальноосвітньої школи постає перед важливим вибором – вибором професії. Беззаперечним фактом є те, що необхідною умовою для вступу до вищих навчальних закладів є участь у зовнішньому незалежному оцінюванні, де більшість випускників складають тести з математики.

Тема «Нерівності» займає важливе місце в курсі алгебри загальноосвітньої школи. Вона багата за змістом, практичними способами та прийомами розв'язування, за можливостями застосування набутих знань при вивченні цілого ряду інших тем шкільного курсу алгебри. Це пояснюється тим, що рівняння і нерівності широко використовуються в різних розділах математики, у вирішенні важливих як теоретичних, так і прикладних задач.

Як показав аналіз науково-методичної літератури, багато вчених працювали над даною темою. Серед них слід відзначити Р.Рекорда, Г.Апостолова, Г.Бевза, Г.Глейзера, В.Голубєва, В.Вавилова, П.Толочкіна.

Роботи Пауля М.В. і Степури І.М. присвячені питанням взаємозв'язку понять нерівності, рівняння і функції; Комова Л.П., Солтан Г.Н. займалися доведенням і розв'язуванням нерівностей на геометричному матеріалі; Недошівкіна Є.Ф. займалася міжпредметними зв'язками при вивченні рівнянь і нерівностей у курсі математики 4-8-х класів; над прикладним аспектом вивчення нерівностей у середній школі працювали Мельникова Н.Б.і Рибдалова Д.Д..

Отже, можна констатувати той факт, що окремі питання методики навчання розв'язування нерівності та вирішення конкретних нерівностей у курсі математики загальноосвітньої школи висвітленні досить повно.

Незважаючи на значний позитивний досвід у методиці викладання теми «Нерівності», як показують аналізи результатів тестів, контрольних, випускних, вступних екзаменаційних робіт, учні недостатньо повно володіють основними знаннями і вміннями розв'язку нерівностей. В якості аргументу наведемо аналізи результатів ЗНО, які показують, що на сьогоднішній день багато випускників допускають помилки саме при розв'язуванні нерівностей.

Розв'язування нерівностей розглядається як ефективний засіб формування в учнів системи математичних знань, умінь і навичок, математичних методів дослідження як засобу їх математичного розвитку. Проте, не зважаючи на постійне удосконалення форм і методів роботи вчителів, аналіз практики навчання показав, що у вмінні учнів розв'язувати нерівності є прогалини. Однією з причин появи учнівських помилок є формальне, поверхневе заучування навчального матеріалу, невміння бачити в ньому принципову відмінність від попереднього. Несвоєчасне виявлення прогалин у знаннях школярів призводить до поступового «запускання» знань. Складається ситуація, коли учень перестає розуміти вчителя, втрачає інтерес до навчання, віру в себе і на тривалий час залишається пасивним спостерігачем. Таким чином тема дослідження є **актуальною**.

На актуальність і своєчасність дослідження вказують також і проблеми шкільної практики. Завдання, пов’язані з розв’язуванням нерівностей, постійно зустрічаються на шкільних математичних олімпіадах та різноманітних конкурсах Аналіз щорічних результатів зовнішнього незалежного оцінюваннвказує на те, що саме розв’язування нерівностей викликає у випускників загальноосвітніх шкіл значні труднощі при складанні тесту з математики. Отже, тема роботи є актуальною і в плані формування всебічно розвинутої особистості учня, передусім у розвитку його логічного, конструктивного мислення, алгоритмічної та інформаційної культури.

Мета дослідження – розробити і теоретично обґрунтувати методику навчання учнів загальноосвітньої школи розв’язувати нерівності.

Тема дослідження – методика навчання учнів основної школи розв’язування нерівностей.

Об’єкт дослідження – процес навчання учнів розв’язування нерівностей в основній школі.

Предмет дослідження – зміст і методика навчання учнів основної школи розв’язування нерівностей.

Гіпотеза дослідження – розроблена система диференціювання знань сприятиме підвищенню рівня знань, вмінь і навичок учнів при розв’язуванні нерівностей.

Мета та висунута гіпотеза визначили **основні завдання дослідження:**

- проаналізувати літературу по темі дослідження;
- систематизувати різні методи і прийоми викладання теми «Нерівності в основній школі» та проаналізувати ефективність використання їх на практиці, визначити основні недоліки та шляхи їх усунення;
- подати методичні рекомендації щодо уникнення помилок при розв’язуванні нерівностей на уроках алгебри.

Теоретичне значення дослідження: визначено зміст навчання курсу «Методика розв'язування нерівностей основній школі», який спрямований на розвиток особистості учнів.

Практичне значення дослідження визначається тим, що:

- уточнено програму з курсу «Методика розв'язування нерівностей в основній школі»;
- створені дидактичні матеріали;
- запропоновані методичні рекомендації щодо навчання розв'язування нерівностей учнів основної школи.

Апробація. Основні результати магістерської роботи пройшли апробацію на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників та студентів Рівненського державного гуманітарного університету в 2017 та 2018 роках і XI Всеукраїнській науково-практичній конференції Інформаційні технології у професійній діяльності (м. Рівне, 20 листопада 2018 року).

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. З історії розвитку поняття «нерівність»

Питання про використання елементів історії у викладанні математики не є новим. Ще в кінці XIX і на початку XX століття він обговорювався на з'їздах викладачів математики. І саме цьому питанню були присвячені, як в межах нашої країни так і за кордоном, спеціальні роботи.

Головною метою для всіх шкіл є: підвищити інтереси учнів і всіх хто навчається, до вивчення математики і поглибити розуміння вивченого матеріалу; розширити розумове бачення і підвищити рівень загальної культури.

Юнаки і дівчата, закінчивши середню школу, повинні мати представлення про місце і роль математики в сучасній культурі. Саме тому вивчаючи тему «Нерівності» не можливо не сказати про її історію і виникнення.

У 1577 р., коли Роберт Рекорд вперше ввів знак рівності, він мотивував своє нововведення наступним чином: ніякі два предмети не можуть бути між собою більш рівними, ніж два паралельних відрізки. Знак рівності Рекорда став загальновживаним лише в XVIII ст., після того як ним стали користуватися Лейбніц і його послідовники.

Виходячи зі знаку рівності Рекорда інший англійський вчений Гарріот ввів знаки нерівності, які вживаються і до сьогодні. Вчений пояснив це в «Практиці аналітичного мистецтва», що вийшла в 1631 р. посмертно. До нововведення писали словами: «більше», «менше». Пеересеченія може мати місце праворуч (>), або ліворуч (<). У першому випадку знак нерівності означатиме «більше», у другому - «менше».

За гіпотезою деяких учених, у Гарріота з'явилася думка ввести ці знаки після його подорожі у Північну Америку. Там на руці в одного корінного американця він побачив знак «???», і тоді вирішив розділити його на два символи. За однією з версій Гарріот ніколи не використовував введені ним символи, бо його праця, де вони зустрічалися, була надрукована лише після смерті вченого.

Незважаючи на те що знаки нерівності були запропоновані через 74 роки після запропонованого Рекордом знака рівності, вони увійшли до вживання набагато раніше останнього. Одна з причин цього явища полягає в тому, що друкарні застосовували в той час для знаків нерівності латинську букву V, тоді як набірного знака рівності (=) у них не було, а виготовляти його тоді було нелегко.

Символи « > », « < » були введені в 1734 р. французьким математиком П'єром Буге. Спочатку їх записували «<=» та «>=». Пізніше Валліс використовував ці позначки вже з однією рискою, але зазначав її над знаком нерівності, проте трохи згодом нерівності набули сучасного вигляду.

1.2. Пропедевтика вивчення нерівності в шкільному курсі алгебри

Робота над нерівностями ведеться з 1 класу, органічно поєднуючись з вивченням арифметичного матеріалу. Програма з математики для I-III класів ставить завдання виконувати порівняння чисел, а також порівняння виразів з метою встановлення відносин "більше", "менше", "дорівнює"; навчити записувати результати порівняння за допомогою знаків ">", "<", "=" і читати отримані нерівності.

Числові нерівності учні одержують у результаті порівняння заданих чисел або арифметичних виразів. Тому знаками ">", "<", "=" з'єднуються не будь - які два числа, не будь-які два висловлювання, а лише ті, між якими існують зазначені відносини. Якщо одне число більше (менше) іншого чи один вираз має значення більше (менше), ніж інший вираз, то, з'єднані відповідним знаком, вони утворюють нерівність. Таким чином спочатку у молодших школярів формуються поняття лише про правильні нерівності.

Однак у процесі роботи над рівняннями, виразами і нерівностями із змінною учні, підставляючи різні значення змінної, накопичують спостереження і переконуються в тому, що рівності та нерівності бувають як

правильні, так і неправильні. Такий підхід до розкриття понять визначає відповідну методику роботи над нерівностями.

Ознайомлення з нерівностями в початкових класах безпосередньо пов'язується з вивченням нумерації і арифметичних дій.

Порівняння здійснюється спочатку на основі порівняння множин, яке виконується, як відомо, за допомогою встановлення взаємно однозначної відповідності. Цьому способу порівняння множин навчають дітей у підготовчий період і на початку вивчення нумерації чисел першого десятка. Одночасно виконується рахунок елементів множин і порівняння отриманих чисел (кружечків 7, трикутників 5, кружечків більше, ніж трикутників, 7 більше, ніж 5). Надалі при порівнянні чисел учні спираються на їх місце в натуральному ряді: 9 менше, ніж 10, тому що під час підрахунку, число 9 називають перед числом 10; 5 більше, ніж 4, бо число 5 називають після числа 4. Встановлені відносини записуються за допомогою знаків ">", "<", "=". Учні навчаються читанню і запису нерівностей.

Згодом при вивченні нумерації чисел в межах 100, 1000, а також нумерації багатозначних чисел, порівняння чисел здійснюється або на основі зіставлення їх за місцем у натуральному ряді, або на основі розкладу чисел за десятковим складом і порівняння відповідних розрядних чисел, починаючи з вищого розряду ($75 > 48$, тому що 7 десятків більше, ніж 4 десятка; $75 > 73$, так як десятків порівну, а одиниць у першому числі більше, ніж у другому).

Порівняння величин спочатку виконується з опорою на порівняння самих предметів за даними властивостями, а потім здійснюється на основі порівняння числових значень величин, до чого задані величини виражаються в однакових одиницях виміру. Порівняння величин викликає труднощі в учнів, тому, щоб навчити їх виконувати цю операцію потрібно систематично в 1-3 класах пропонувати різноманітні вправи, наприклад:

- Підберіть рівну величину: 7 км 500 м = □ м, 3080 кг = □ т □ кг.
- Підберіть числові значення величин, щоб запис був вірним:

□ год < □ хв, □ см = □ дм □ см, □ т □ ц = □ кг;

- Вставте найменування у величин так, щоб запис був вірним:

16 хв > 16...

Подібні вправи допомагають дітям засвоїти не лише поняття рівних і нерівних величин, але і відносин одиниць виміру.

Перехід до порівняння виразів здійснюється поступово. Спочатку в процесі вивчення додавання і віднімання в межах 10 діти тривалий час вправляються у порівнянні виразу і числа (числа і виразу). Перші нерівності виду $3 + 1 > 3$, $3 - 1 < 3$ корисно отримувати з рівності (3 = 3), супроводжуючи перетворення відповідними операціями над множинами. Наприклад, на партах відкладено 3 трикутника і 3 кружечка і записано: $3 = 3$. Учитель пропонує дітям присунути до 3 трикутників ще 1 трикутник і записати це (3 + 1 - запис під трикутниками). Число кружечків не зменшилося і дорівнює 3. Учні порівнюють кількість трикутників і кружечків і переконуються, що трикутників більше, ніж кружечків (4 > 3), значить, можна записати: 3 +1 > 3 (три плюс один більше, ніж три). Аналогічна робота ведеться над нерівністю 3-1 < 3 (три мінус один менше, ніж три).

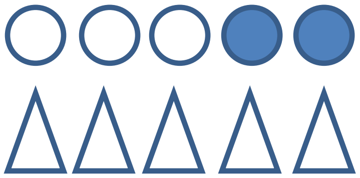
Надалі вираз і число (число і вираз) учні порівнюють не вдаючись до операцій над множинами; знаходять значення виразу і порівнюють його із заданим числом, що є в записах:

$5 + 3 > 5$; $2 < 7 - 4$; $7 = 2+5$.

Після знайомства з назвами виразів учні читають рівності та нерівності так: сума чисел 5 і 3 більша, ніж число 5; число 2 менше, ніж різниця чисел 7 і 4, і т.п.

Спираючись на операції над множинами і порівняння множин, учні практично засвоюють найважливіші властивості рівностей і нерівностей (якщо $a > b$, то $b < a$).

Діти бачать, що якщо кружечків і трикутників порівну (мал.1), то можна сказати, що кружечків стільки ж, скільки трикутників ($3 + 2 = 5$), а також трикутників стільки ж, скільки і кружечків ($5 = 3 + 2$). Якщо ж предметів не порівну (мал.2), то одних - більше ($3 + 1 > 3$), а інших менше ($3 < 3 + 1$).



Мал.1

Мал.2

Надалі при вивченні дій в межах 100, 1000 і 1000000, вправи на порівняння вираження і числа подаються на новому числовому матеріалі і збільшується кількість чисел і знаків дій у виразах.

Порівнюючи неодноразово спеціально підібрані вирази і числа, наприклад: 17 + 0 і 17, 19 - 0 і 19, 7 - 1 і 7, 0 : 5 і 0, 3 + 1 і 3, 3 : 1 і 3 , учні накопичують спостереження про особливі випадки дій, глибше усвідомлюють конкретний зміст дій. Вправи на порівняння виразів і числа закріплюють вміння читати висловлювання й сприяють виробленню обчислювальних навичок.

Порівняти два вирази значить порівняти їх значення. Порівняння виразів вперше включається вже в кінці вивчення додавання і віднімання в межах 10, а потім ці вправи систематично пропонуються учням. Наприклад, треба порівняти суми: 6 + 4 і 6 + 3. Учень міркує так: перша сума дорівнює 10, друга - 9, 10 більше, ніж 9, отже, сума чисел 6 і 4 більше, ніж сума чисел 6 і 3. Це міркування відображається в записах:

$6 + 4 > 6 + 3$ $7 - 5 < 7 - 3$ $4+4=10-2$ $10 > 92 < 48 = 8$

При подальшому вивченні дій вправи на порівняння виразів ускладнюються: складнішими стають вирази, учням пропонуються завдання такі як «вставити в один з виразів якесь число так, щоб отримати вірні рівності або нерівності»; «перевірити, чи дані рівності (нерівності) вірні, невірні виправити, змінивши знак відношення або число в одному з виразів»; «скласти з даних виразів вірні рівності або вірні нерівності». Самі вирзи підбираються таким чином, щоб, порівнюючи вирази, учні бачили властивості і залежності між компонентами і результатами дій. Наприклад, після того як встановили за допомогою обчислень, що сума 60 + 40 більше суми 60 + 30, вчитель пропонує порівнювати відповідні складові цих сум, і діти відзначають, що перші доданки в цих сумах однакові, а другий доданок в першій сумі більший, ніж у другій. Багато разів, помічаючи цю залежність, учні приходять до узагальнення і потім свої знання використовують при порівнянні виразів.

Таким чином, вправи на порівняння чисел і виразів, з одного боку, сприяють формуванню понять про рівність в нерівностях, а з іншого боку, засвоєнню знань про нумерація та арифметичні дії, а також виробленню обчислювальних навичок.

Нерівності виду: $x + 3 < 7$, $10 - x > 5$, $x - 4 > 12$, $72 : x < 36$ вводяться в 2 класі. Заздалегідь ведеться відповідна підготовча робота: включаються вправи, в яких змінна позначається не буквою, а "віконечком" (квадратом):

□ +3 < 7, 10 - □ > 5, □ - 4 > 12, 72 : □ < 36. Учням пропонується підібрати таке число, щоб отримати вірний запис. При виконанні таких вправ вчитель повинен спонукати дітей до підстановки різних чисел; наприклад, у нерівності □ > 0 можна підставити число 1 (1 > □), можна 2 (2 > □), можна 3 (3> □) і т.д. Після того як названо кілька чисел, корисно узагальнити побачене (наприклад, у другій нерівності можна підставити будь-яке число, яке менше 5).

Розглядаючи в 2 класі нерівність, наприклад, $x + 3 < 10$, учні, шляхом підбору, знаходять, при яких значеннях невідомого x значення суми $x + 3$ менше, ніж 10. У кожному такому завданні дається декілька чисел - значень змінної. Учні підставляють значення невідомого у вираз, обчислюють значення виразу і порівнюють його із заданим числом. У результаті такої роботи учні вибирають значення змінної, при яких дана нерівність є вірною.

Терміни «розв'язати нерівність», «розв'язок нерівності» не вводяться в початкових класах, оскільки в багатьох випадках обмежуються підбором тільки кількох значень змінної, при яких отримується правильна нерівність.

Пізніше у вправах з нерівностями значення змінної не даються, учні самі підбирають їх. Такі вправи, як правило, виконуються під керівництвом вчителя.

Вправи з нерівностями закріплюють обчислювальні навички, а також допомагають засвоєнню арифметичних знань. Наприклад, підставляючи різні числові значення компонентів, діти бачать зміну результатів дій залежно від зміни одного з компонентів. Тут уточнюються знання дітей у конкретному сенсі кожної дії (так, підставляючи значення від'ємника, діти переконуються в тому, що від'ємник не більше зменшуваного). Працюючи з нерівностями, учні закріплюють уявлення про змінну і готуються до вирішення нерівності в старших класах.

1.3. Аналіз програм та математичних підручників з алгебри основної школи

Систематичне вивчення числових нерівностей з однією змінною та їхніх систем передбачено у 9 класі, хоча з найпростішими числовими нерівностями учні мали справу в попередніх класах, порівнюючи числа і числові вирази.

Вимоги до знань і умінь:

1) знати означення числової нерівності, мати уявлення про нерівності першого та другого степеня з однією змінною, систему нерівностей з однією змінною;

2) вміти розв'язувати нерівності першого та другого степеня з однією змінною та системи нерівностей першого степеня з однією змінною.

У попередніх виданнях шкільного підручника алгебри за редакцією А.І. Маркушевича вводились елементи математичної логіки, поняття і символи рівносильності і логічного слідування «<=», «=>», термінологія множин, формулювалось означення рівносильних нерівностей. Без цих понять не можна забезпечити свідоме і глибоке засвоєння питань розв'язування нерівностей та їх систем. Безперечно, в класах з поглибленим вивченням математики цей навчальний матеріал разом з теоремами про рівносильність має вивчатись.

Щодо тлумачення понять числової нерівності і нерівності зі змінною, то тут також можливі різні методичні підходи. Довгий час у шкільних підручниках обмежувались геометричним тлумаченням числової нерівності: число *a* називали більшим за число *b,* якщо точка, що зображує число *a* на координатній прямій міститься праворуч від точки, що зображує число *b.* В процесі систематичного вивчення нерівностей у курсі алгебри формулювалось і доводилось твердження про властивість числових нерівностей: число *a* більше за число *b,* якщо різниця *a - b* - додатне число, і число *a* менше від числа *b,* якщо різниця *a - b* - від'ємне число; навпаки, якщо різниця *a -b* - додатне число, то число *a* більше за число *b* і якщо різниця *a-b* – від’ємне число, то число *a* менше від числа *b*.

В останньому виданні підручника алгебри [6] автори залишають геометричне тлумачення числової нерівності, хоча деякі попередні підручники повернулись до традиційного підходу вивчення числових нерівностей - першу частину сформульованого вище твердження прийнято як означення числової нерівності. При вивченні теми «Нерівності», за даними підручниками, зображуються властивості числових нерівностей, як доводити нерівності, що таке нерівності зі змінною та система нерівностей, як розв'язувати нерівності. Також можна дізнатися у яких випадках можна додавати і множити числові нерівності і навчитися оцінювати значення виразів.

Вивчаючи властивості числових нерівностей варто скористатися таблицею (табл. 2.1), в якій зіставляються відношення «рівне», «більше», «менше» на множині чисел. Таблиця покаже спільне в означенні і властивостях числових рівностей і числових нерівностей, виявить відмінності цих відношень і сприятиме кращому запам'ятовуванню їх.

Таблиця 1.1

Числові рівності	Числові нерівності
Число *a* називається таким, що дорівнює числу *b*, якщо різниця *a-b*дорівнює нулю	Число *a* називається більшим за число *b*, якщо різниця *a-b* – додатня. Число *a* називають меншим від числа *b*, якщо різниця *a-b* - від'ємна.
При будь-яких *a* і *b* якщо *a—b,* то *b=a*	При будь-яких *a* і *b,* якщо *a<b,* то *b>a* і, навпаки, якщо *a>b,* то *b<a*
При будь-яких *a,b* і с, якщо *a=b*і в=с, *то a=c* (властивість транзитивності рівностей)	При будь-яких *a,b* і с, якщо *a<b* і *b>c*, то *a<c;* якщо *a>b* і *b*>с, то *a>c* (властивість транзитивності)
Якщо *a—b* і *c* — будь-яке число, то *a+c=b+c*	Якщо *a<b* і *c* - будь-яке число, то *a+c<b+c*; якщо *a>b* і *c* - будь-яке число, то а+с>*b*+с
Якщо *a=b* і *c* - будь-яке число, то *ac=bc*	Якщо *a<b*і *c>0*, то *ac<bc;* Якщо *a<b* і *c>0,* то *ac>bc;*
Якщо *a=b* і *c=d,* то *a+c=b+d*	Якщо *a>b* і *c>0*, то *ac>bc;* Якщо *a>b* і *c<0,* то *ac<bc*
Якщо *a=b* і *c=d*, то *ac=bd*	Якщо *a<b* і *c<a*, то *a+c<b+d;*
Наслідок. *Якщо* a=b*, то* $a^2 = b^2$	Якщо *a>b* і *c>d*, то *a+c>b+d*

Якщо $a=b$ і $a\neq 0$, $b\neq 0$,то $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$	Якщо $a<b$ і $c<d$ $(a,b,c$ – додатні числа), то ac<bd *Наслідок.* Якщо $a<b, a<0, b<0$,то$a^2<b^2$ Якщо $a<b$ (a і b – числа одного знака), то $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;

Аналізуючи підручники, не можливо не зауважити, що в шкільних підручниках значно більша увага приділяється темі «рівняння», хоча «нерівності» є значно складнішими для сприйняття учнями.

1.4 Основні теоретичні відомості, теорія рівносильності, розв'язок лінійних та квадратичних нерівностей і ті, що до них зводяться

Нерівність [inequality] - співвідношення між числами (або будь-якими математичними виразами, здатними приймати чисельне значення), яке вказує, яке з них більше чи менше іншого. Над цими виразами можна, за певними правилами, проводити наступні дії: додавання, віднімання, множення і ділення (причому при множенні або діленні нерівності на відємне число знак даної нерівності змінюється на протилежний).

Нерівністю ще називають співвідношення двох виразів з однією чи кількома змінними. Якщо ж ці вирази містять одну змінну, то нерівність називають нерівністю з однією змінною або лінійною. У загальному випадку нерівність з однією змінною записують у вигляді:

$f(x)<g(x)$ або $f(x)\leq g(x)$, причому першу нерівність називають строгою, а другу - нестрогою.

Число x_0 називають розв'язком нерівності, якщо, підставивши його в нерівність, отримують правильну числову рівність. Сукупність всіх розв'язків називають множиною розв'язків.

Розв'язати нерівність означає знайти множину її розв'язків.

Як і для рівнянь область визначення нерівності складає перетин областей визначення функцій $f(x)$ *та* $g(x)$. Якщо область визначення

нерівності - порожня множина, така нерівність розв'язків немає.

Нехай є дві нерівності:

$$f_1(x) < g_1(x)\ (1)\ \ \textit{та}\ f_2(x) < g_2(x)\ (2)$$

з множинами розв'язків X_1 *та* X_2 відповідно.

Означення 1. Якщо всі розвязки нерівності (1) задовольняють нерівність (2) (множина X_1 є множиною X_2 ($X_2 \supset X_1$), то нерівність (2) називають наслідком нерівності (1). Символьно це позначають так: (1) => (2).

Зауваження. На відмінну від рівнянь, при розв'язуванні нерівностей використовувати перетворення наслідку не можна. Це пов язано з тим, що, як правило, множини розв'язків нерівностей включають в себе відрізки або промені. Зрозуміло, що перевірити всі точки відрізка не можемо, бо їх нескінченно багато.

Означення 2. Якщо всі розвязки нерівності (1) задовольняють нерівність (2), і навпаки, всі розвязки нерівності (2) задовольняють нерівність (1) ((1)=> (2) і (2)=> (1)), то нерівності (1) і (2) називаються рівносильними або еквівалентними ((1)<=> (2)).

Якщо нерівності рівносильні, то $X_1 = X_2$.

Числові нерівності та їх властивості

Порівняння чисел широко використовують на практиці. Наприклад, економіст порівнює планові показники з фактичними, лікар порівнює температуру хворого з температурою здорової людини, токар порівнює розміри деталі, яку обточує, з заданими. В усіх випадках порівнюються числа конкретного виду. Проте зручно мати такий спосіб порівняння чисел, який охоплював би всі випадки. Він полягає в тому, що складають різницю чисел і з'ясовують, буде вона додатним числом, від'ємним числом чи нулем. Порівнюючи числа за цим способом, користуються таким означенням.

Означення 3. Число *а більше* від числа b $(a>b)$, якщо різниця $a-b$ — додатне число;
число *а менше* від числа b, $(a<b)$, якщо різниця $a-b$ — від'ємне число.

Для будь-яких двох чисел a і b тільки одне з трьох співвідношень є правильним: $a=b$, $a>b$, $a<b$. Нерівності $a>b$ і $a<b$ називаються *строгими.* Розглядають також *нестрогі* нерівності: $a \geq b$ і $a \leq b$. Нерівність $a \geq b$ означає, що $a>b$ або $a=b$, тобто *а не менше* за b. Нерівність $a \leq b$ означає, що $a<b$ або $a=b$, тобто *а не більше* від b. Наприклад, $15>11$, $7=7$, $3<5$, $4=4$ (все це правильні нерівності).

Розглядають також *подвійні* нерівності: $a<b<c$, $a \leq b < c$, $a \leq b \leq c$, $a<b \leq c$. Наприклад, подвійна нерівність $a<b<c$ означає, що одночасно $a<b$ і $b<c$, подвійна нерівність $a<b<c$ означає, що одночасно $a<b$ і $b<c$.

Геометрично нерівність $a>b$ означає, що на числовій осі точка з координатою a лежить праворуч від точки з координатою b, а коли $a<b$ — ліворуч. Наприклад, точка з координатою —0,075 лежить праворуч від точки з координатою $-\frac{4}{14}$, бо $-0{,}075 > -\frac{4}{14}$.

Розглянемо теореми, які виражають властивості числових нерівностей.

Теорема 1. Якщо $a>b$, то $b<a$ (властивість антисиметричності).

Доведення. Якщо $a>b$, то $a-b>0$ і $b-a<0$, тобто $b<a$. Якщо ввести знак => (випливає), то перша властивість запишеться так:

$$a>b \Rightarrow b<a.$$

Теорема 2. Якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$ (транзитивність).

Доведення. Доведемо, що різниця $a-c>0$. Додамо до цієї різниці b і $-b$, дістанемо: $a-c=a-c+b-b=(a-b)+(b-c)$. За умовою,

$a > b$ і $b > c$, отже, доданки $a - b$ і $b - c$ додатні, а це означає, що і різниця $a - c$ додатна, тобто $a - c > 0$ і $a > c$. Скорочено: $(a > b$ і $b > c) \Rightarrow a > c$. Аналогічно доводиться **Теорема**: якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Теорема 3. Якщо $a > b$ і c — будь-яке число, то $a + c > b + c$.

Доведення. Доведемо, що різниця $(a+c) - (b + c) > 0$. Розглянемо різницю $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$. За умовою, $a > b$, тому $a - b > 0$. Звідси

$(a + c) - (b + c) > 0$ і тому $a + c > b + c$.

Отже, якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то дістанемо правильну нерівність: $(a > b$, c — будь-яке$) \Rightarrow a+c>b+c$.

***Наслідок**. Якщо $a > b + c$, то $a - c > b$.*

Теорема 4. Якщо $a > b$ і $c > 0$, то $ac > bc$.

Доведення. Щоб довести, що $ac - bc > 0$, подамо різницю $ac - bc$ у вигляді добутку $a - bc = c(a - b)$. Оскільки, за умовою $c > 0$ і $a > b$, то $a - b > 0$. Тоді

$c\ (a-b) > 0$, звідки $ac - bc > 0$ і $ac > bc$.

Отже, якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то дістанемо правильну нерівність. *Скорочено:* $(a > bc, c > 0)$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Теорема 5. Якщо $a > b$ і $c < 0$, то $ac < bc$.

Доведення. Аналогічно, як і у четвертій теоремі доводимо, що різниця

$ac - bc < 0$, тоді $ac < bc$.

Таким чином, якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число і замінити знак нерівності на протилежний, то дістанемо правильну нерівність.

Дії над числовими нерівностями.

1. <u>Додавання числових нерівностей.</u> Нехай маємо правильні числові нерівності однакового знака: $-3 < 4$ і $5 < 7$. Почленно додамо ці нерівності. Отримаємо правильну нерівність того ж знака, а саме: $-3 + 5 < 4 + 7$ або $2 < 11$. У загальному випадку справджується така **Теорема**:

Якщо почленно додати правильні нерівності однакового знака, залишивши їхній спільний знак, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай $a < b$ і $c < d$. Потрібно довести, що $a + c < b + d$. Щоб отримати суму $a+c$, додамо до обох частин першої нерівності число c, а щоб отримати суму $b+d$, додамо до обох частин другої нерівності число b. Одержимо правильні нерівності: $a + c < b + c$, $b + c < b + d$. За теоремою 2 з останніх двох нерівностей випливає, що $a + c < b + d$.

Аналогічно можна довести: якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

<u>2.Множення числових нерівностей.</u> Нехай маємо правильні нерівності: $7 > 2$ і $5 > 3$. Почленно перемножимо ці нерівності. Одержимо правильну нерівність $7 \cdot 5 > 2 \cdot 3$ або $35 > 6$.

Почленно перемножимо нерівності $-3 < 1$ і $-4 < 6$. Одержимо неправильну нерівність $12 < 6$.

У першому випадку всі числа даних нерівностей були додатні, у другому - додатні й від'ємні. Сформулюємо таку **Теорему**:

Якщо почленно перемножити правильні нерівності однакового знака, ліві й праві частини яких — додатні числа, залишивши при цьому їхній спільний знак, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай $a < b$ і $c < d$, де a, b, c і d — додатні числа. Потрібно довести, що $ac < bd$. Помножимо обидві частини нерівності $a < b$ на додатне число c, а обидві частини нерівності $c < d$ — на додатне число b. Одержимо правильні нерівності: $ac < bc$, $bc < bd$. За теоремою 2 з останніх двох нерівностей випливає, що $ac < bd$.

Аналогічно можна довести: якщо $a > b$ і $c > d$, де a, b, c і d — додатні числа, то $ac > bd$.

Наслідок. Якщо $a<b$, a і b — додатні числа*,* n — натуральне число, то $a^n < b^n$.

Для доведення наслідку досить узяти n нерівностей $a < b$ і почленно їх перемножити.

1. *<u>Оцінювання значень виразів.</u> Розглянемо приклад.*

Дано: $6<a<8$ і $10< b< 12$. Оцініть значення виразу:

1) $a + b$; **2)** $a-b$; **3)** ab;

Розв'язання.

1) Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$6 < a < 8$

$10 < b< 12$

$16 < a + b < 20$.

2) Помноживши кожну частину нерівності 10 < 6 <12 на -1, отримуємо:

$$-10> - b> - 12$$

або $$-12< - b < -10.$$

Враховуючи, що $a - b = a + (-b)$, далі маємо:

$6 < a < 8$

$-12 <-b < -10$

$- 6 < a - b < - 2$.

3) Оскільки $a > 6$ і $b > 10$, то a і b набувають додатних значень. Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримуємо:

$6 < a < 8$

$10 < b < 12$

$60 < ab < 96$.

Нерівності з однією змінною

Поняття нерівності з однією змінною та її розв'язку.

Розглянемо нерівність $2x + 5 > 11$. Для одних значень x дана нерівність перетворюється у правильну числову нерівність, для інших — у неправильну. Наприклад, якщо $x = 5$, то одержимо правильну числову нерівність

$2\text{-}5 + 5 > 11$; $15 > 11$, а якщо x=1, то матимемо неправильну числову нерівність $2 - 1 + 5 > 11$; $7 > 11$.

Якщо потрібно знайти усі значення x, для яких нерівність $2x + 5 > 11$ є правильною, то кажуть, що потрібно розв'язати нерівність $2x + 5 > 11$, яка містить одну змінну x. Якщо x =5, то нерівність $2x + 5 > 11$ є правильною. Кажуть, що число 5 є розв'язком даної нерівності, або задовольняє дану нерівність.

Означення 4. Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність.

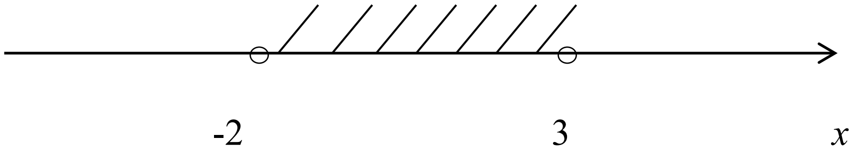
Розвязати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв 'язків немає.

Нерівність з однією змінною переважно має безліч розв’язків. Так, розв'язками нерівності $2x + 5 > 11$ є числа 3,5; 4; 5; $5\frac{1}{3}$ тощо. Множини розв'язків нерівностей інколи можна записувати у вигляді *числових проміжків.*

Числові проміжки.

Розглянемо кілька прикладів.

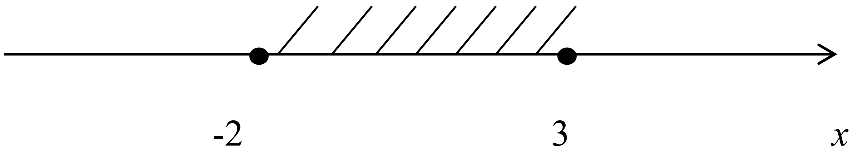
1) Нерівність $-2 < x < 3$ задовольняють усі дійсні числа, які більші від -2 і менші від 3, тобто всі дійсні числа, що лежать на числовій прямій між числами -2 і 3. Множину всіх чисел, що задовольняють подвійну нерівність $-2 < x < 3$, називають *числовим проміжком*, або просто *проміжком*, і позначають (-2; 3) (читають: «проміжок від -2 до 3»). На координатній прямій його зображуюбражують так:



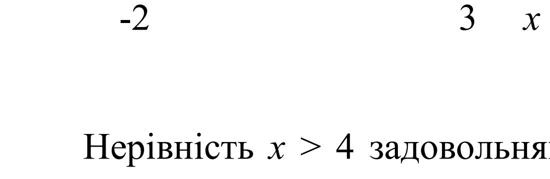
Проміжок заштриховують, точки -2 і 3 зображують «порожніми» («виколотими»).

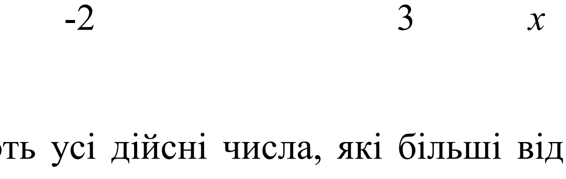
Число 2,5 задовольняє подвійну нерівність $-2 < x < 3$, а число 4 її не задовільняє. Кажуть, що число 2,5 *належить* проміжку (-2; 3), а число 4 йому *не належить.*

2) Нерівність $-2 \leq x \leq 3$ задовольняють усі дійсні числа, які лежать між Числами -2 і 3, або дорівнюють числам -2 або 3. Множину таких чисел позначають так: [-2; 3] (читають: «проміжок від -2 до 3, включаючи -2 і 3»). На координатній прямій його зображають так:

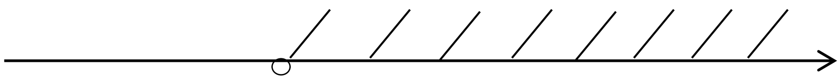


Множини чисел, які задовольняють подвійні нерівності $-2 \leq x < 3$ і $-2 < x \leq 3$, позначають відповідно [-2; 3) і (-2; 3] (читають: «проміжок від -2 до 3, включаючи -2» і «проміжок від -2 до 3, включаючи 3»). Ці проміжки зображують на координатній прямій так:



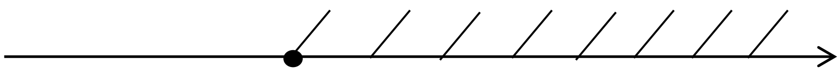


Нерівність $x > 4$ задовольняють усі дійсні числа, які більші від 4. На координатній прямій ці числа зображують точками, які лежать праворуч від точки з координатою 4. Множину чисел, які задовольняє нерівність $x > 4$, зображують півпрямою, що міститься праворуч від точки з координатою 4 без цієї точки (див. 24ал.. 8). Таку множину називають проміжком від 4 до плюс нескінченності й позначають $(4; +\infty)$.



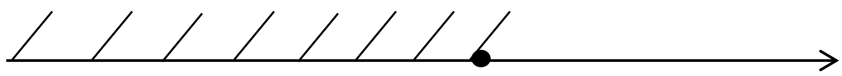
4 x

Множину чисел, які задовольняють нерівність $x \geq 4$, зображують півпрямою (див. Рис. 9). Цю множину позначають $[4; +\infty)$ (читають: «проміжок від 4 до плюс нескінченності, включаючи 4»).



4 x

Множину чисел, які задовольняють нерівність $x < 8$, записують $(-\infty; 8)$ і читають «проміжок від мінус нескінченності до 8». Множину чисел, які задовольняють нерівність $x < 8$, записують $(-\infty; 8]$ і читають: «проміжок від мінус нескінченності до 8, включаючи 8». На координатній прямій ці числові проміжки зображують так:



8 x

Множину всіх дійсних чисел зображують усією координатною прямою і позначають так: $(-\infty; +\infty)$.

<u>Об'єднання та переріз числових проміжків.</u>

Розглянемо два проміжки: [-1; 4) і (2; 7). Проміжок [-1;7) утворюють усі числа, які належать проміжку [-1;4) або проміжку (2; 7). Кажуть, що проміжок [-1;7) є *об'єднаннялі* проміжків [-1; 4) і (2; 7). Записують [-1; 4) U (2; 7) = [-1 ;7), де «U» - знак об'єднання.

Означення 5. Об'єднанням числових проміжків називають множину всіх чисел, які належать хоча б одному з цих проміжків.

Проміжок (2; 4) утворюють усі спільні числа з проміжків [-1; 4) і (2; 7), тобто усі числа, які належать кожному з проміжків [-1;4) і (2; 7). Кажуть, що проміжок (2; 4) є *перерізом* проміжків [-1;4) і (2; 7). Записують: [-1; 4) ∩ (2; 7) = (2; 4), де «∩» — знак перерізу.

Означення 6. Перерізом числових проміжків називають множину всіх чисел, які належать кожному з цих проміжків.

Лінійні нерівності з однією змінною

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2(6x + 5) + 3x < 40$.

$12x + 10 + 3x < 40;$

$12x + 3x < 40 - 10;$

$15x < 30;$

$x < 2.$

Множиною розв'язків нерівності є числовий проміжок (-∞; 2).

Відповідь: (-∞; 2).

Приклад 2. Розв'язати нерівність $4(3x + 7) - 9x > 20 + 3x$.

$12x + 28 - 9x > 20 + 3x;$

$12x - 9x - 3x > 20 - 28;$

$0\cdot x > -8.$

Для будь-якого значення x значення лівої частини нерівності $0 \cdot x > -8$ дорівнює нулю, а нуль більший від -8. Отже, множиною розв'язків даної нерівності є множина всіх дійсних чисел, тобто проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $14x + 17 < 6(x + 2)$.

$14x + 17 < 8x + 6x + 12$;

$14x - 8x - 6x < 12 - 17$;

$0 - x < -5$.

Нерівність $0 \cdot x < -5$ не має розв'язків, бо для будь-якого х значення її лівої частини дорівнює нулю, а нуль не менший від -5.

Відповідь: розв'язків немає.

У результаті перетворень ми звели першу нерівність до нерівності $15x < 30$, другу — до нерівності $0 \cdot x > -8$, третю — до нерівності $0 \cdot x < -5$. Нерівності такого виду називають *лінійніми нерівностями з однією змінною.*

Означення 7. Нерівності виду $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, де a і b — деякі відомі числа,

а x — змінна, називають *лінійними нерівностями з однією змінною.*

Якщо $a \neq 0$, то для розв'язання лінійної нерівності з однією змінною потрібно поділити обидві частини нерівності на a. Якщо $a = 0$, то або розв'язком нерівності є будь-яке число, або нерівність не має розв'язків.

Виділимо такі основні кроки розв'язування нерівностей:

1) *якщо нерівність містить дроби, то множимо обидві частини нерівності на найменший спільний знаменник дробів, які входять у нерівність;*
2) *якщо у нерівності є дужки, то розкриваємо їх;*
3) *переносимо доданки, які містять змінну, в одну частину нерівності (як правило, в ліву), а доданки, які не містять змінної, — в іншу частину (як правило, в право);*
4) *зводимо подібні доданки;*

5) *якщо одержали лінійну нерівність і коефіцієнт біля змінної не дорівнює нулю, то ділимо на нього обидві частини нерівності;*
6) *якщо коефіцієнт біля змінної дорівнює нулю, то встановлюємо, чи нерівність немає розв'язків, чи її розв'язком є будь-яке число.*

Доведення нерівностей

У попередньому теоретичному матеріалі було доведено кілька нерівностей. Ми використовували такий прийом: розкладали різницю лівої і правої частин нерівності та порівнювали її з нулем. Проте існує й ряд інших способів доведення нерівностей. Ознайомимося з деякими з них.

Міркування «від супротивного»

Сама назва цього методу багато в чому відображає його суть.

Приклад 1. Для будь-яких значень a_1, a_2, b_1, b_2 доведіть нерівність

$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ (*)

Розв'язання. Нехай нерівність, що доводиться, є неправильною. Тоді знайдуться такі числа a_1, a_2, b_1, b_2, що буде правильною нерівність

$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 > (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

Звідси:

$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2$;

$2a_1b_1a_2b_2 > a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$;

$a_1^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 < 0$;

Остання нерівність є неправильною. Отримана суперечність означає, що нерівність (*) є правильною.

Нерівність (*) є окремим випадком більш загальної нерівності:

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$ (**)

Нерівність (**) називають нерівністю Коші - Буняковського.

Метод використання очевидних нерівностей

Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$.

<u>*Розв 'язання.*</u> Очевидно, що при будь-яких значеннях *a, b, c* виконується така нерівність: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 > 0$.

Звідси:

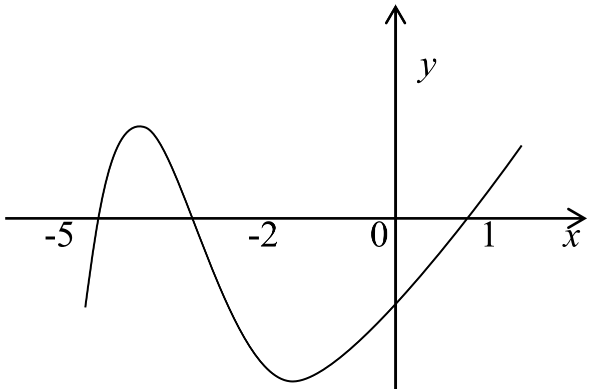
$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 – 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0$;

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 > 2ab + 2bc + 2ac$;

$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$.

<u>Квадратичні нерівності</u>

На рисунку зображено графік деякої функції $y = f(x)$, областю визначення якої є множина дійсних чисел.



За допомогою цього графіка легко визначити проміжки знакосталості функції f а саме: $y > 0$ на кожному з проміжків (-5; -2) і (1; +∞); $y < 0$ на кожному з проміжків (-∞; -5) і (-2; 1).

Установивши проміжки знакосталості функції f, ми тим самим розв'язали нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Проміжки (-5; -2) і (1; +∞) разом складають множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$. У таких випадках кажуть, що множина розв'язків нерівності $f(x) > 0$ є об'єднанням зазначених проміжків. Тоді множину розв'язків позначимо так: (-5; -2)U(1; +∞).

Множина розв'язків функції $f(x) < 0$: (-∞; -5) U (-2; 1).

Такий метод розв'язування нерівностей $f(x)> 0$ і $f(x < 0$ за допомогою графіка функції $y = f(x)$ називають **графічним.**

Покажемо, як за допомогою цього методу розв'язуються квадратні нерівності.

Означення 8. Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0$, де x - змінна, і a,b,c - деякі числа, називають квадратними.

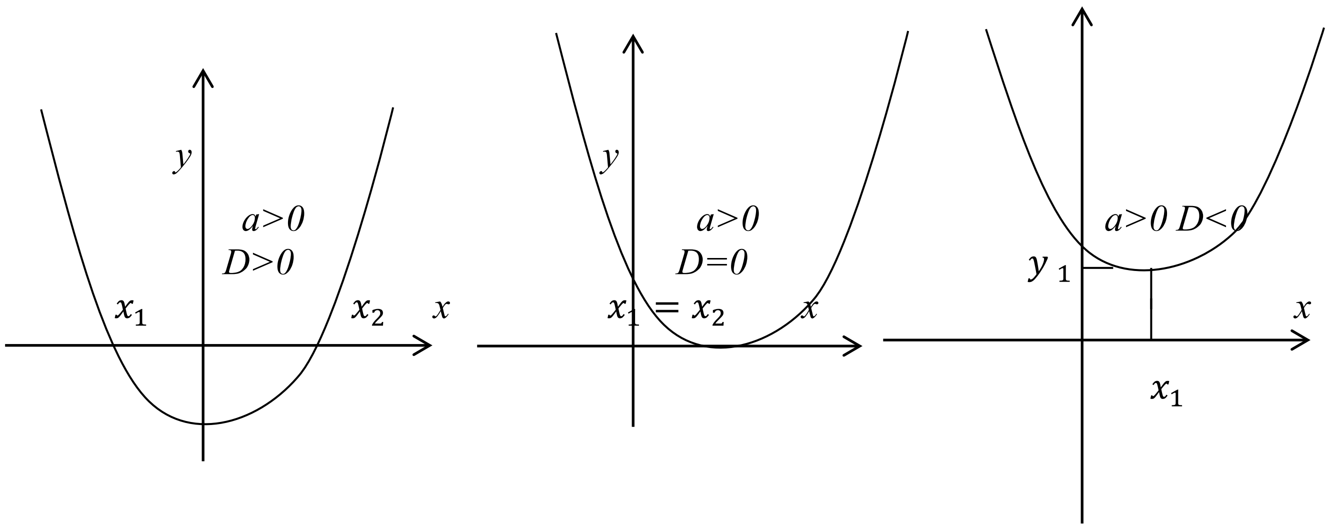
Зясуємо, як визначити положення графіка квадратичної функції
$y = ax^2 +bx+ c$ відносно осі абсцис.

Наявність і кількість нулів квадратичної функції $y = ax^2 +bx+ c$ визначають за допомогою дискримінанта D квадратичного тричлена $ax^2 +bx+ c$:

- якщо $D > 0$, то нулів у функції два;
- якщо $D = 0$, то нуль один;
- якщо $D < 0$, то нулів немає.

Знак старшого коефіцієнта квадратичного тричлена $ax^2 +bx+ c$ визначає напрям віток параболи $y = ax^2 +bx+ c$. При $a > 0$ вітки напрямлені в гору, при $a < 0$ - вниз.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 +bx+ c$ відносно осі абсцис залежно від знаків чисел a і D відображено в таблиці (x_1 і x_2 - нулі функції, x_0–абсциса).

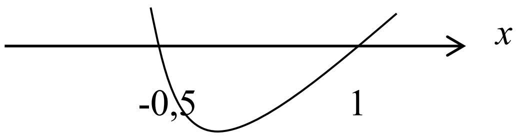


	$ax^2 + bx + c > 0$	
$x \in (-\infty; x_1)\ U\ (x_2; \infty)$	$x \in (-\infty; x_1)\ U\ (x_1; \infty)$	$x \in (-\infty; \infty)$

	$ax^2+bx+c\geq 0$	
$x \in (-\infty;\ x_1]\ U\ [x_2;\infty)$	$x \in (-\infty;\ \infty)$	$x \in (-\infty;\ \infty)$
	$ax^2+bx+c<0$	
$x \in (x_1;\ x_2)$	$x \in \varnothing$	$x \in \varnothing$
	$ax^2+bx+c\leq 0$	
$x \in [x_1;\ x_2]$	$x = x_1$	$x \in \varnothing$

Приклад. Розв'яжіть нерівність $2x^2-x-1>0$.

*Розв'язання:*Для квадратичного тричлена $2x^2-x-1$ маємо: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Знаходимо клітинку, яка відповідає цим умовам - відповідає клітинка 1. Розвяжемо рівняння $2x^2-x-1= 0$. Отримаємо: $x_1 = 1$, $x_2= - 0,5$. Схематично це виглядає так:



З рисунка видно, що відповідна квадратична функція набуває додатніх значень на кожному з проміжків (-∞; -0,5) і (1; + ∞).

Відповідь: (-∞; -0,5) і (1; + ∞).

Розвязування нерівностей методом інтервалів

Багато алгебраїчних нерівностей зводиться до нерівностей вигляду

$$(x-a_1)(x-a_2)\ ...\ (x-a_n)\ ?\ 0.$$

Тут $a_1, a_2\ \ ...\ a_n$ — деякі дійсні числа, причому $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n$. Проміжки знакосталості виразу, що стоїть в лівій частині нерівності, легко встановити, користуючись властивістю лінійної функції $y = x - b$, яка від'ємна при $x < b$ і додатня при $x > b$. Виходячи з цього, легко переконатися, що при $x > a_n$ всі співмножники додатні, бо з нерівності $x > a_n$ випливають нерівності $x > a_n > a_{n-1} \ldots > a_1$, а отже, добуток додатній. При $a_{n-1} < x < a_n$ додатні всі співмножники, крім останнього, отже, добуток від'ємний. Продовжуючи міркування, одержуємо просте правило: вказаний добуток змінює свій знак у кожній з точок $a_1, \boldsymbol{a_2} \ \boldsymbol{\ldots a_n}$, починаючи з додатнього на проміжку ***(a_n*** **;** +оо).

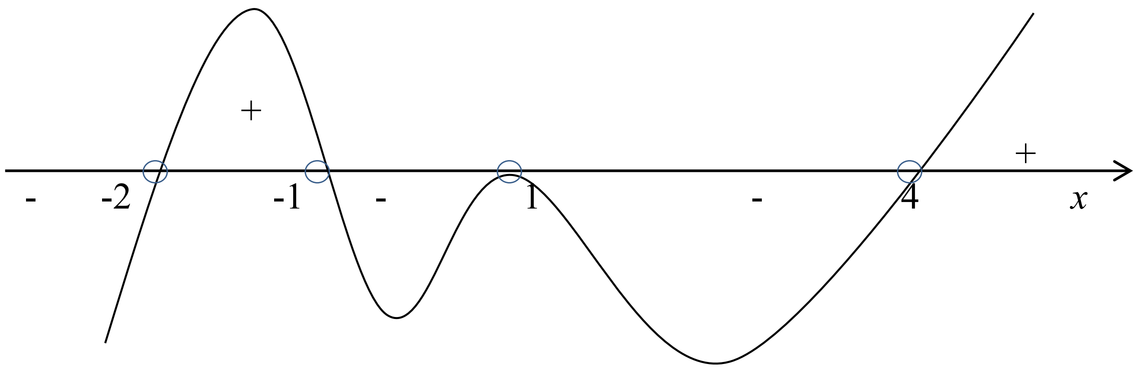
Приклад. Розв'язати нерівність

$$(x + 1)(x - 1 (x + 2)(x - 4) > 0.$$

Розв'язування.

Проводимо числову пряму і відкладаємо на ній точки, в яких хоча б один із співмножників перетворюється на нуль. Це такі точки:
$x = -2$; $x = -1$; $x = 1$; $x = 4$.

Користуючись узагальненим правилом інтервалів, проводимо "змійку", починаючи з додатнього значення на проміжку $x \in (4; +\infty)$ і змінюючи знак на протилежний в точках $x = -2$; $x = -1$; $x = 4$, для яких показники степеня непарні, і не змінюючи знак в точці $x = 1$, бо вираз (x - 1) входить у добуток з парним показником.



Тоді виберемо проміжки, на яких добуток має додатній знак (за умовою).
Відповідь: $x \in (-2; -1) \cup (4; +\infty)$.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

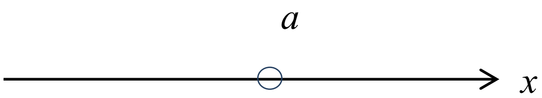
2.1 Методика розв'язання лінійних нерівностей

2.1.1 Лінійні нерівності з параметром

Параметр - це фіксоване позначення літерами, яке є невідомим числом. Щоб розв'язати нерівність з параметром, необхідно знайти всі його розвязки для кожного допустимого значення параметра. Перш за все, необхідно визначити *контролюючу точку* - коефіцієнт, який стоїть біля *x,* та розглянути всі можливі значення параметра, яких він може набувати.

Приклад 1. Розв'язати нерівність: $ax < 1$.

Розв'язування. Область визначення даної нерівності - множина дійсних чисел. Контрольною точкою є параметр *a*.



На рисунку бачимо числову пряму, яку значення параметра *a* розділяє на умовні два поміжки ($-\infty$; a) і (a; $+\infty$). Проте у ці проміжки входять не всі значення, оскільки *a* також може дорівнювати і 0: $a=0$.

Отже, для розв’язку даної нерівності розглядаємо три випадки, коли:

1. $a<0$;
2. $a = 0$;
3. $a > 0$.

Аналіз трьох можливостей дозволяє отримати результат:

- якщо $a < 0$: $x > \frac{1}{a}$;
- якщо $a = 0$: $0x < 1$, то *x* - будь-яке число;
- якщо $a > 0$, $x < \frac{1}{a}$.

Відповідь: при $a < 0$ $x > \frac{1}{a}$; при $a = 0$ x - будь-яке число; при $a > 0$ $x < \frac{1}{a}$.

Приклад 2. Розвязати нерівність $(a - 5)x < 12$.

Розв'язання. Розглянемо три випадки:

1) $a-5 = 0$;

2) $a-5 < 0$;

3) $a-5 > 0$.

1. Якщо $a - 5 = 0$, тобто $a = 5$, то матимемо нерівність $0 \cdot x < 12$, розв'язком якої є будь-яке число.
2. Якщо $a - 5 < 0$, тобто $a < 5$, то поділивши обидві частини

нерівності на число $a-5$, одержимо: $x > \frac{12}{a-5}$.

3. Якщо $a - 5 > 0$, тобто $a > 5$, то поділивши обидві частини нерівності на додатне число $a-5$, одержимо: $x < \frac{12}{a-5}$.

Відповідь: якщо $a=5$, то x - будь-яке число;

якщо $a < 5$, $x > \frac{12}{a-5}$;

якщо $a > 5$, $x < \frac{12}{a-5}$.

Параметри досить широко застосовуються при розв'язанні нерівностей і не лише у вправах такоготипу. Мова йде про клас задач, де за рахунок параметра на змінну накладаються якісь штучні обмеження. Для таких задач характерні наступні формулювання: при якому значенні параметра нерівність має лише один розв'язок, два, нескінченну множину, чи жодного; розв'язком нерівності є якась підмножина множини дійсних чисел і т.п.

Приклад 3. При яких a нерівність $(x - a)(x-2) \leq 0$ має єдиний розв'язок?

Розв 'язання. Очевидно, що $a = 2$ задовольняє вимозі задачі. Дійсно, при $a = 2$ отримуємо нерівність $(x-2)^2 \leq 0$, що має єдиний розв'язок. Для випадку, коли $a \neq 2$ розв'язком нерівності буде відрізок, тобто безліч розв'язків. Відповідь: $a=2$.

2.1.2 Розвязування нерівносей з модулями.

Розглянемо нерівності виду $|\mathrm{x}-\mathrm{a}|<b,$ де $b>0$ $(|\mathrm{x}-\mathrm{a}|>b)$.

Такі нерівності можна розв'язувати, використовуючи алгебраїчний зміст модуля числа.

<u>Приклад 1.</u> Розвязати нерівність: $|\mathrm{x}-2|<3;$

<u>*Розвязання.*</u> Дана нерівність рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2\geq 0\\ x-2<3\end{cases}\\ \begin{cases}x-2<0\\ -x+2<3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2\\ x<5\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ x>-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x\in(-1;5)$$

Відповідь: $x \in (-1;5)$.

<u>Приклад 2.</u> Розв'язати нерівність: $|\mathrm{x}+1|\geq 2;$

<u>*Розв' язання.*</u>

$$|\mathrm{x}+1|\geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\geq 0\\ x+1\geq 2\end{cases}\\ \begin{cases}x+1<0\\ -x+1\geq 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq -1\\ x\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ x\leq -3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ x\leq -3\end{array}\right.$$

Відповідь: x є $(-\infty; -3]$ U $[1;+\infty)$.

А тепер спробуємо розв'язати ці нерівності, спираючись на геометричну інтерпретацію модуля.

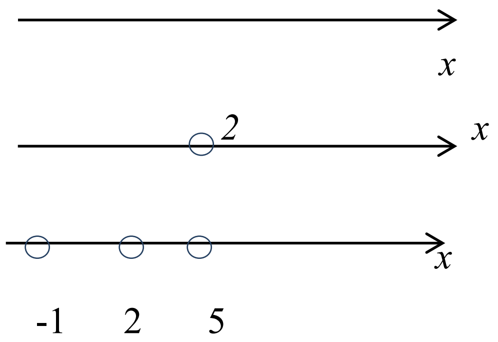
Перш, ніж розв'язувати нерівність $|\mathrm{x}-2|<3$, розглянемо геометричну інтерпретацію співвідношення $|\mathrm{x}-2|=3$.

Прочитаємо рівняння на геометричній мові: відстань від точки 2 до невідомої точки x дорівнює 3 л.од. Тобто, щоб розв'язати рівняння $|\mathrm{x}-2|=3$ потрібно:

1) побудувати числову пряму x;
2) нанести на неї точку 2.
3) від точки 2 вліво і вправо відкласти відстань 3. Бачимо утворені точки.

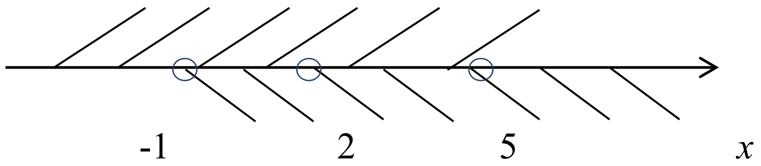
Для розв'язання нерівності $|\mathrm{x}-2|<3$ аналогічно виконуємо 3 попередніх пункти що і для рівняння.

1) 2) 3)

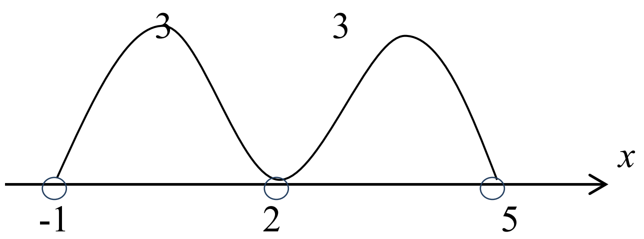


Отримали числову пряму. Далі постає запитання: де буде та точка, відстань від точки *x* до якої менша за 3 л.од.?

Відповідь покажемо на проміжку:



Знайшовши спільне, визначимо розв'язок даної нерівності. Зробимо висновок: точки, що задовольняють нерівність $|x-2|<3$ мають знаходитися від точки з координатою 2 на відстанях, що менші за 3.



Тоді розв'язком даної нерівності будуть усі точки, що розташовані між точками -1 та 5, тобто *x* є (-1;5).

Слід зауважити, що розв'язання нестрогих нерівностей аналогічний даним. Відмінність лише в тому, що ми повинні включити точки, в даному випадку точки -3 і 1. Тому розв'язком нестрогої нерівності буде об'єднання інтервалів: $x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

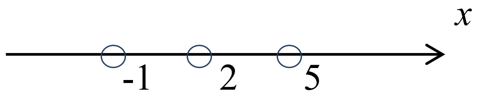
Для кращого розуміння розв'яжемо ще кілька прикладів на геометричну інтерпретацію модуля.

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $|x-2| > 3$.

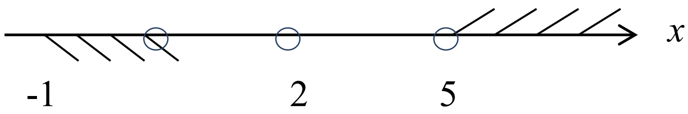
Розв'язання. Перш, ніж розв'язувати нерівність $|x-2| > 3$ розглянемо геометричну інтерпретацію співвідношення $|x-2| = 3$. Прочитаємо рівняння на геометричній мові: відстань від точки 2 до невідомої точки *x* дорівнює 3 л.од. Тобто, щоб розв'язати рівняння $|x-2| > 3$, потрібно:

1) побудувати числову пряму *x*;
2) нанести на неї точку 2.
3) від точки 2 вліво і вправо відкласти відстань 3. Бачимо утворені точки.

Аналогічно попередньому прикладу, побудувавши числову пряму



виникає запитання: де буде та точка, відстань від точки *x* до якої більша за 3 л.од.?



Отже, розв'язком нерівності є : $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність: $|2x+3| < 3$.

Розв'язання. 1-й спосіб. Зведемо дану нерівність, до виду такої нерівності, спосіб розв'язування якої нам відомий.

$$2|x+1{,}5| < 3$$

Поділимо обидві частини нерівності на 2. Матимемо:

$$|x+1{,}5| < 1{,}5$$

Далі розв'язуємо аналогічно попереднім прикладам.

2-й спосіб. Введемо заміну змінної. $2x = a;$

Підставивши, отримаємо: $|a+3| < 3$. Далі розв'язуємо аналогічно попереднім прикладам.

Нерівності виду $|f(x) > a|$ ***або*** $|f(x) < a|$

При розв'язуванні таких нерівностей із знаком модуля можна користуватися наступними властивостями абсолютної величини:

1. Нерівність $f(x) < a$ ($a > 0$) рівносильна подвійній нерівності $-a < f(x) < a$, або системі нерівностей $\begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases}$
2. Нерівність $|f(x)| > a,\ (a > 0)$ рівносильна сукупності двох нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{array}\right.$$

У разі нестрогої нерівності усі знаки нерівностей доповнюються знаком рівності.

Приклад 1. Розв'язати нерівність: |x + 4| > 6.

Розв'язання. Дана нерівність за властивістю (2) рівносильна сукупності двох нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} x + 4 < -6 \\ x + 4 > 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 10 \\ x > 2 \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in$ (-∞; - 10) U (2; +∞).

Приклад 2. Розв'язати нерівність: $|x^2 + 2x - 2| \leq 1$.

Розв'язання.

Задана нерівність з модулем рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 \leq 1 \\ x^2 + 2x - 2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ x^2 + 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 1) \leq 0 \\ (x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2}) \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язком є перетин проміжків [-3;-1]∩ [-1-$\sqrt{2}$; -1+$\sqrt{2}$].

Відповідь: $x \in$[-3;-1]∩ [-1-$\sqrt{2}$; -1+$\sqrt{2}$].

Нерівності виду $|f(x)| < g(x)$.

Такі нерівності зводяться до системи раціональних нерівностей. У нерівності виду $|f(x)| < g(x)$ вираз більший за невід'ємну величину $|f(x)|$, тому він повинен набувати лише додатних значень, а нерівність
даного виду рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases};$$

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $|x^2 - 4x + 1| < 2x + 1$;

Розв 'язання. Права частина нерівності може набувати тільки додатних значень, тому маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ -(2x + 1) < x^2 - 4x + 1 < 2x + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ -2x - 1 < x^2 - 4x + 1, \\ x^2 - 4x + 1 < 2x + 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x^2 - 2x + 2 > 0, \\ x^2 - 6x < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x \in \mathrm{R}; \\ x(x - 6) < 0. \end{cases}$$

Друга нерівність виконується при всіх $x \in \mathrm{R}$, бо дискримінант

$x^2 - 2x + 2$ - від'ємний.

Графічно знаходимо множини розв'язків системи нерівностей.

Відповідь: $x \in (0;6)$.

Нерівність виду $|f(x)| > g(x)$

Дана нерівність рівносильна такій сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in ОДЗ; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) < -g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Приклад 4. Розв'язати нерівність: $|x^2 + x - 2| > x$.

Розв 'язання. Задана нерівність з модулем рівносильна сукупності трьох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 < -x. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ (x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3}) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язок нерівності знаходимо об'єднанням проміжків, що є розв'язками системи цієї сукупності.

Відповідь: $x \in (-\infty$; -1 + $\sqrt{3}) U(\sqrt{2}$; ∞).

Нерівність виду $|f(x)| \cup |g(x)|$.

Схеми розв'язання відповідних нерівностей:

1. $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) < 0$;
2. $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leq g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \leq 0$;
3. $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) > 0$;
4. $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \geq g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \geq 0$;

Приклад 5. Розв'язати нерівність: $|2\,x^2 + 5x - 7\,| > |2x - 2|$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини цієї нерівності до квадрата і подамо отриману рівносильну нерівність у вигляді різниці квадратів:

$$(2\,x^2 + 5x - 7\,)^2 - (2x - 2)^2 > 0.$$

Застосуємо формулу різниці квадратів двох виразів, звідки одержимо рівносильну нерівність:

$$(2\,x^2+3x-5)(\,2\,x^2+7x-9)>0.$$

Прирівняємо дану нерівність до нуля.

$$(2\,x^2+3x-5)(\,2\,x^2+7x-9)=0.$$

Розв'язок дане рівняння матиме тоді, коли хоча б один із множників дорівнюватиме 0:

$$2\,x^2+3x-5=0 \text{ або } 2\,x^2+7x-9=0;$$

Знайдемо корені кожного з рівнянь за дискримінантом:

$$D=b^2-4ac.$$

Розв'язками першого рівняння є $x_1=1$; $x_2=-\frac{5}{2}$, а другого - $x_3=1$, $x_4=-\frac{9}{2}$. Звідси бачимо, що 1 є двократним коренем. Отримали:

$$(x-1)^2(x+\frac{5}{2})(x+\frac{9}{2})>0.$$

За допомогою «змійки» знаходимо розв'язок вихідної нерівності: будуємо числову пряму *x*, наносимо точки і визначаємо знаки на проміжках.

<u>Відповідь:</u> $x\in(-\infty;-\frac{9}{2})\cup(-\frac{5}{2};1)$.

Для кращого розуміння розглянемо ще один приклад.

<u>Приклад 6.</u> Розв'язати нерівність: $|2\,x^2+5x-7\,|<|2x-2|$.

<u>*Розв язання.*</u> Як і в попередньому прикладі використаємо спосіб піднесення до квадрату обох частин нерівності:

$$(2\,x^2+5x-7\,)^2<(2x-2)^2;$$

Аналогічно попердьому розв'язання отримаємо рівносильну нерівність у вигляді різниці квадратів:

$$(2\,x^2+5x-7\,)^2-(2x-2)^2<0;$$

Застосуємо формулу:

$$(2\,x^2+5x-7-2x+2)(2\,x^2+5x-7+2x-2)<0.$$

Зведемо подібні доданки:

$$(2\,x^2+3x-5)(2\,x^2+7x-9)<0.$$

Виконавши аналогічні перетворення щодо попереднього прикладу, отримаємо ті ж самі значення x_1, x_2, x_3, x_4. Тоді за допомогою «змійки» знаходимо розв'язок вихідної нерівності, а в цьому випадку проміжок має бути зі знаком «−».

Відповідь: $x \in \left(-\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Для розв'язання нестрогих нерівностей такого ж типу необхідно виконувати ті ж дії, що і в попередніх прикладах та включити крайні точки отриманого проміжку.

2.2. Методика розв'язання ірраціональних нерівностей. Метод зведення до еквівалентної системи або сукупності раціональних нерівностей

Основним методом розв'язування ірраціональних нерівностей є зведення вихідної нерівності до рівносильної системи або сукупності систем раціональних нерівностей. [17]

Найбільш прості ірраціональні нерівності мають вигляд:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ або $\sqrt{A(x)} \le B(x)$;

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ або $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$;

3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ або $\sqrt{A(x)} \ge \sqrt{B(x)}$.

Ірраціональна нерівність виду $\sqrt{A(x)} < B(x)$ або $\sqrt{A(x)} \le B(x)$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} A(x) \le B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Перша нерівність у системі (1) є результатом піднесення вихідної нерівності до степеня, друга нерівність є умовою <u>існування</u> кореня у вихідній нерівності, а третя нерівність системи виражає умову, при якій цю нерівність можна підносити до квадрату.

Ірраціональна нерівність $\sqrt{A(x)} > B(x)$ або $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$ рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}A(x) > B^2(x),\\ B(x) \ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}A(x) \ge 0,\\ B(x) < 0.\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A(x) \ge B^2(x),\\ B(x) \ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}A(x) \ge 0,\\ B(x) \le 0.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (2)$$

Звернемося до першої системи схеми (2). Перша нерівність цієї системи є результатом піднесення вихідної нерівності до квадрату, друга - умова, при якій це можна робити.

Друга система схеми (2) відповідає випадку, коли права частина негативна, і підносити до квадрату не можна. Але в цьому й немає необхідності: ліва частина вихідної нерівності - арифметичний корінь – невід'ємна при всіх x, при яких вона визначена. Тому вихідна нерівність виконується при всіх x, при яких існує ліва частина. Перша нерівність другої системи і є умовою існування лівої частини.

Ірраціональна нерівність $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ або $\sqrt{A(x)} \ge \sqrt{B(x)}$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases}A(x) > B(x),\\ B(x) \ge 0.\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}A(x) \ge B(x),\\ B(x) \ge 0.\end{cases} \qquad (3)$$

Оскільки обидві частини вихідної нерівності вірні при всіх x, при яких вони визначені, то їх можна піднести до квадрату. Перша нерівність у системі (3) є результатом піднесення вихідної нерівності до степеня. Друга нерівність є умовою існування кореня у вихідній нерівності. Зрозуміло, що нерівність $A(x) \ge 0$ виконується при цьому автоматично.

Схеми (1) - (3) - наш основний інструмент при розв'язанні ірраціональних нерівностей, до них зводиться розв'язання практично будь-якої задачі. Розберемо декілька прикладів. [8]

Приклад. Розв'язати нерівність $\sqrt{10x+5} < -3.$

Розв'язування. Зауважимо, що права частина цієї нерівності негативна, в той час як ліва частина невід'ємна при всіх значеннях x, при яких вона визначена. Тому нерівність розв'язків не має.

Приклад. Розв'язати нерівність $\sqrt{3x-9} < -5.$

Розв'язування. Як і в попередньому прикладі, зауважимо, що права частина даної нерівності негативна, а ліва частина вихідної нерівності невід'ємна при всіх значеннях *x,* при яких вона визначена. Це означає, що ліва частина більша правої частини при всіх значеннях *x,* що задовольняють умові $x \geq 3$.

Відповідь: $x \in [3;+\infty)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x-3} < 1$.

Розв'язування. Відповідно до схеми (1) розв'язання нерівностей цього типу, запишемо рівносильну йому систему раціональних нерівностей

$$\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$$

Умова $B(x) = 1 \geq 0$ виконано при всіх *x,* і немає необхідності додавати його до виписаної системі.

Відповідь: $x \in \left[\frac{3}{2};2\right)$.

Приклад . Розв'язати нерівність $\sqrt{4x-3} > 1$.

Ця нерівність розв'язується за допомогою схеми (2). У даному випадку $B(x) = 1$, тому можна відразу записати нерівність, рівносильну вихідному рівнянню $4x-3 > 1^2$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+18} < 2-x$.

Розв'язування. Ця нерівність може бути розв'язана за допомогою схеми (1). Система, рівносильна вихідній нерівності, має вигляд

$$\begin{cases} x+18 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x+18 < (2-x)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 18, \\ x \leq 2, \\ x^2-5x-14 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x < 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2.$$

Відповідь: $x \in [-18;-2)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

Розв'язування. Дану нерівність можна розв'язувати з допомогою схеми (2). Воно рівносильне сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\x^2+x-2\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\x^2+x-2>x^2.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\x\ge 1,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\x^2>2.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\x>2.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$.

Приклад . Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+1}>\sqrt{2-3x}.$

Розв'язування. Згідно зі схемою (3), така нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases}2x+1>2-3x,\\2-3x\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{1}{5},\\x\le\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}<x\le\frac{2}{3}.$$

Відповідь**:** $\frac{1}{5}<x\le\frac{2}{3}$

Розглянемо розв'язування ірраціональних нерівностей такого вигляду $\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}<C(x).$

Оскільки $\sqrt{A(x)}\ge 0$, $\sqrt{B(x)}\ge 0$, то повинні виконуватися умови $\sqrt{A(x)}\ge 0$ і $\sqrt{B(x)}\ge 0$, $\sqrt{B(x)}<C(x)$ (відповідно $\sqrt{A(x)}<C(x)$).

Приклад . Розв'язати нерівність $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}<6.$

Розв'язування. Дана нерівність рівносильна наступній системі нерівностей:

$$\begin{cases}x\ge 0,\\x+7\ge 0,\\\sqrt{x}<6,\\x+7<(6-\sqrt{x})^2.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0,\\x\ge -7,\\x<36,\\x+7<36-12\sqrt{x}+x.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<36,\\12\sqrt{x}<29\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x<36,\\0\le x<\frac{841}{144}\end{cases}$$

Розв'язання вихідної нерівності є спільною частиною розв'язків всіх нерівностей системи, тобто має вигляд $x\in\left[0;\frac{841}{144}\right)$.

Відповідь: $x\in\left[0;\frac{841}{144}\right)$.

Тепер перейдемо до розв'язування складніших завдань, намагаючись звести їх розв'язання до стандартних ситуацій - до найпростіших нерівностей, розглянутим вище. Прийоми багато в чому аналогічні прийомам, що застосовуються при розв'язанні ірраціональних рівнянь.

Якщо у нерівності зустрічаються два квадратних радикала, зазвичай доводиться нерівність підносити до квадрату двічі, забезпечуючи при цьому необхідні для цієї операції умови.

Приклад . Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2.$

Розв'язування. Перенесемо другий радикал в праву частину, щоб обидві частини нерівності стали невід'ємними, і його можна було піднести до квадрату:

$$\sqrt{2x+3}>\sqrt{x-2}+2 \Leftrightarrow 2x+3>x-2+4\sqrt{x-2}+4 \Leftrightarrow x+1>4\sqrt{x-2}$$

Ми прийшли до найпростішої стандартної нерівності, яке згідно зі схемою (1) рівносильно системі:

$$\begin{cases} x-2\ge 0, \\ x+1\le 2, \\ 16(x-2)<x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x^2-14x+33>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x>11 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le x<3, \\ x>11. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in[2;3)\cup(11;+\infty)$.

Зауваження. При отриманні нерівності $x+1>4\sqrt{x-2}.$ ми не виписували допустимі значення невідомого, так як там фігурував $\sqrt{x-2}$, який існує при $x\ge 2$ але при цих значеннях x існує і $\sqrt{2x+3}.$

Приклад. Розв'язати нерівність $\frac{\sqrt{x^2-25}}{x+6}<1$.

Розв'язування. Почнемо з відшукання допустимих значень невідомого:

$$\begin{cases} x^2-25\ge 0, \\ x+6\ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -5, \\ x\ge 5, \end{array}\right. \\ x\ne 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-6, \\ -6<x\le -5, \\ x\ge 5. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що для позбавлення від радикала досить піднести таку нерівність до квадрату. Але для цього необхідно, щоб обидві частини його були ненегативні, що виконується лише при виконанні умови $x+6>0$ (Так як всі інші вирази, що входять у нерівність, ненегативні). Але за цієї умови можна помножити таку нерівність на позитивний вираз $x+6$.

Отже, якщо $x>-6$, така нерівність перетвориться і вирішується так:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ \sqrt{x^2-25}<x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ x^2-25<x^2+12x+36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{61}{12}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{61}{12}<x\le -5,\\ x\ge 5.\end{array}\right.$$

У тому випадку, коли $x<-6$, така нерівність буде виконуватися, тому що його негативна ліва частина стане менш позитивною правої.

Відповідь: $x\in(-\infty;-6)\cup\left(-\dfrac{61}{12};-5\right]\cup\left[5;+\infty\right)$.

Зауваження. При розв'язанні останнього завдання ми фактично отримали такі нові схеми, що легко виводяться з схем (1) і (2):

$$\frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)}>1 \Leftrightarrow \begin{cases}B(x)>0,\\ A(x)>B^2(x);\end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)}\ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases}B(x)>0,\\ A(x)\ge B^2(x);\end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)}<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}B(x)>0,\\ 0\le A(x)<B^2(x);\end{cases}\\ \begin{cases}B(x)<0,\\ A(x)>0;\end{cases}\end{array}\right. \tag{5}$$

$$\frac{\sqrt{A(x)}}{B(x)}\le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}B(x)>0,\\ 0\le A(x)<B^2(x);\end{cases}\\ \begin{cases}B(x)<0,\\ A(x)\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

Якщо в правій частині подібної нерівності не одиниця, а будь-яке інше число крім нуля, можна поділити на нього обидві частини нерівності та, в залежності від знаку цього числа, перейти до нерівностей зі схем (4) або (5).

Множення обох частин нерівності на функцію

Вирази $\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b}$ і $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}$ називаються *сполученими один одному.*

Зауважимо, що їхній твір $\alpha^2 a-\beta^2 b$ вже не містить коренів з a і b. Тому в ряді завдань замість зведення в квадрат, що призводить до занадто громіздких виразів, розумніше помножити обидві частини нерівності на вираз, поєднаний однією з них.

Приклад. Вирішити нерівність $\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3}<2x-1$.

Розв'язування. Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases} 5x+1\ge 0, \\ x+3\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{5}$

Помножимо обидві частини даної нерівності на вираз, поєднаний його лівій частині і, очевидно, позитивне в ОДЗ:

$$(5x+1)-(x+3)<(2x-1)(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}) \Leftrightarrow 2(2x-1)<(2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right)$$

Подальше розв'язання залежить, очевидно, від знаку загального множника лівої і правої частин отриманої нерівності $(2x-1)$.

Якщо він менше нуля, тобто $-\frac{1}{5}\le x<\frac{1}{2}$, то скоротивши на цей негативний множник, переходимо до нерівності:

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}<2 ,$$

з якого знаходимо прямим зведенням в квадрат (адже обидві частини цієї нерівності позитивні) $-\frac{1}{5}\le x<\frac{4-\sqrt{19}}{2}$

У другому випадку, якщо загальний множник позитивний (тобто при $x>\frac{1}{2}$), після скорочення на нього отримуємо нерівність $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}>2$, з якої прямим зведенням в квадрат (адже обидві частини цієї нерівності позитивні) отримуємо, що воно справедливо при $x>\frac{1}{2}$.

Залишилося вказати, що в третьому можливому випадку - якщо загальний множник дорівнює нулю, - нерівність не виконується: ми отримуємо тоді 0>0 , але це нетак.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{4-\sqrt{19}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Метод введення нової змінної

Для розв'язання ірраціональних нерівностей, так само як і для розв'язання ірраціональних рівнянь, можливо застосовувати метод введення нової змінної.

Іноді вдається ірраціональну функцію, що входить у нерівність, замінити новою змінною таким чином, що щодо цієї змінної нерівність стає раціональною [23].

Приклад. Розв'язати нерівність $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$.

Розв'язування. Перепишемо вихідне рівняння $-9\sqrt[4]{x} + \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + 18 \geq 0$.

Зробимо заміну $t = \sqrt[4]{x}$, $t \geq 0$. Тоді отримаємо

$$\begin{cases} -9t + t^2 + 18 \geq 0, \\ t \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 6, \\ t \leq 3, \end{array}\right. \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6, \\ 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Таким чином, для визначення x отримуємо сукупність нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} \geq 6, \\ 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 6^4, \\ 0 \leq x \leq 3^4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1296, \\ 0 \leq x \leq 81, \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in [0;81] \cup [1296;+\infty)$.

2.3. Методика розв'язування показникових нерівностей.

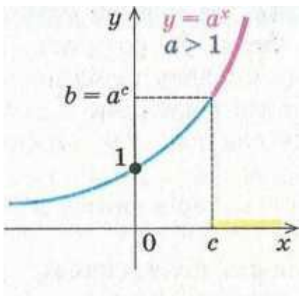
Розв'язування найпростіших показникових нерівностей виду $a^x > b$ (або $a^x > b$, де $a > 0$ і $a \neq 1$) ґрунтується на властивостях функції $y = a^x$**,** яка зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. Наприклад, щоб знайти розв'язки нерівності $a^x > b$ при $b > 0$, досить подати b у вигляді $b = a^c$. Одержуємо нерівність

$a^x > a^c$. (1)

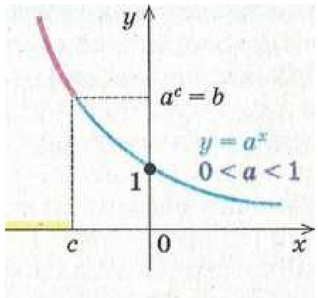
При $a > 1$ функція a^x зростає, отже, більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тому з нерівності $a^x > a^c$ одержуємо $x > c$ (знак цієї нерівності збігається зі знаком нерівності $a^x > a^c$).

При $0 < a < 1$ функція a^x спадає, отже, більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, тому з нерівності $a^x > a^c$ одержуємо $x < c$ (знак цієї нерівності протилежний знаку нерівності $a^x > a^c$).

Графічно це проілюстровано на рисунку:



а



б

Наприклад, щоб розв'язати нерівність $5^x > 25$, досить подати цю нерівність у вигляді $5^x > 5^2$, урахувати, що $5 > 1$ (функція 5^x — зростаюча, отже, при переході до аргументів знак нерівності не змінюється), і записати розв'язки: $x > 2$.

Зауважимо, що розв'язки заданої нерівності можна записувати у вигляді $x > 2$ або у вигляді проміжка $(2; +\infty)$.

Аналогічно, щоб розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$, досить подати цю нерівність у вигляді $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, урахувати, що $\frac{1}{4} < 1$ (функція $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ - спадна, отже, при переході до аргументів знак нерівності змінюється на протилежний), і записати розв'язки: $x < 2$.

Ураховуючи, що при будь-яких додатних значеннях a значення a^x завжди більше нуля, одержуємо, що *при* $b \le 0$ *нерівність* $a^x < b$ *розв'язків не має, а нерівність* $a^x > b$ *виконується при всіх дійсних значеннях* x.

Наприклад, нерівність $7^x < -7$ не має розв'язків, а розв'язками не* рівності $7^x > -7$ є всі дійсні числа.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язуванні! найпростіших показникових нерівностей, відзначимо, що

при $a > 1$ нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ — нерівності $f(x) < g(x)$.

Коротко це твердження можна записати так:

при $a > 1$ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$ (знак нерівності зберігається);

при $0 < a < 1$ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$. (знак змінюється на протилежний).

Щоб обґрунтувати рівносильність відповідних нерівностей, досить відзначити, що при $a > 1$ нерівності

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$

$f(x) > g(x)$

можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^x$ при $a > 1$ є зростаючою й більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу (і навпаки: більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції). Отже, усі розв'язки нерівності $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (які перетворюють її на правильну числову нерівність) будуть і розв'язками нерівності $f(x) > g(x)$, та навпаки: усі розв'язки нерівності $f(x) > g(x)$ будуть розв'язками нерівності $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ А це означає, що нерівності $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ і $f(x) > g(x)$ — рівносильні [21].

Аналогічно обґрунтовується рівносильність нерівностей $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ і $f(x) > g(x)$ *при* $0 < a < 1$.

У найпростіших випадках при розв'язуванні показникових нерівностей, як і при розв'язуванні показникових рівнянь, треба за допомогою основних формул дій над степенями звести (якщо це можливо) задану нерівність до виду $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} > a^{g(x)}$).

Для розв'язування більш складних показникових нерівностей найчастіше використовують заміну змінних або властивості відповідних функцій.

Аналогічно до розв'язування показникових рівнянь усі рівносильні перетворення нерівності завжди виконуються на її області допустимих значень (ОДЗ), тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цієї нерівності. Для показникових нерівностей досить часто областю допустимих значень є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ не знаходять і не записують до розв'язання нерівності [21].

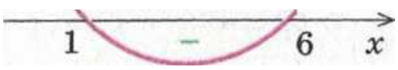
Приклад. Розв'язати нерівність $(0,6)^{x^2-7x+6} \geq 1$.

Розв'язування. Запишемо праву частину нерівності як степінь числа 0,6: $1 = (0,6)^{\circ}$.

Оскільки 0,6 < 1, то при переході від степенів до показників знак нерівності змінюється на протилежний (одержуємо нерівність, рівносильну заданій).

$(0,6)^{x^2-7x+6} \geq (0,6)^0$.

Оскільки функція $y = (0,6)^t$ є спадною, то $x^2 - 7x + 6 \leq 0$. Звідси $1 \leq x \leq 6$
Для розв'язування одержаної квадратної нерівності використаємо графічну ілюстрацію.



Відповідь: $[1;6]$

Якщо ж у процесі розв'язування показникової нерівності рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то доводиться згадувати про ОДЗ.

Приклад. Розв'язати нерівність $(0,1)^{4x^2-2x-2} \leq (0,1)^{2x-3}$

Розв'язування. Данна нерівність рівносильна нерівності

$4x^2 - 2x - 2 \geq 2x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0.$

Таким чином, початковій нервності задовільняють всі дійсні числа.

Відповідь: $x \in R$.

Розв'язання будь-якої нестрогої показникової нерівності відмінно від розв'язання відповідної строгої нерівності тільки включенням у множину всіх розв'язків коренів відповідного рівняння.

Нерівність виду $a^{f(x)} \geq b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, може бути розв'язана за допомогою логарифмування обох частин (це можливо, тому що обидві частини нерівності додатні). При всіх $b \leq 0$ нерівність справедлива для будь-якого x з ОДЗ нерівності. А нерівність $a^{f(x)} \leq b$ при $b \leq 0, a > 0$, $a \neq 1$ розв'язків не має.

Приклад. Розв'язати нерівність $3^{2x-1} < 11^{3-x}$

Розв'язування. Обидві частини нерівності додатні при будь-якому значенні x. Прологарифмувавши обидві частини нерівності за основою 3, отримаємо нерівність $2x - 1 < (\log_3 11)(3 - x)$ рівносильну початковій.

Таким чином $(2 + \log_3 11)x < 1 + 3\log_3 11$. Звідсі з врахуванням того, що $2 + \log_3 11 > 0$, знаходимо всі розв'язки початкової нерівності - проміжок

Відповідь: $-\infty < x < \dfrac{1 + 3\log_3 11}{2 + \log_3 11}$.

2.4. Методика розв'язування логарифмічних нерівностей.

Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей.

Означення: Нерівності, де хоча б одна з функцій логарифмічна, називаються логарифмічними нерівностями.

Найпростішими логарифмічними нерівностями звичайно вважають нерівності виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$).

I. При $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a t$ зростає на всій своїй області визначення (тобто при $t > 0$), і тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу. Отже, переходячи в нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ від значень функції до значень аргументу (у даному випадку переходячи до виразів, які стоять під знаком логарифма), ми повинні залишити той самий знак нерівності, тобто

f(x)>g (x).

Враховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (більшому додатному значенню аргументу відповідає більше значення функції), одержуємо, що на ОДЗ нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна нерівності *f(x)>g (x).* Коротко це можна записати так:

при $a > 0$ $$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

II. При $0 < a < 1$ логарифмічна функція $y = \log_a t$ спадає на всій своїй області визначення (тобто при t > 0), і тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу. Отже, переходячи в нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ від значень функції до значень аргументу, ми повинні знак нерівності змінити на протилежний, тобто

f (x) < g (x).

Враховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (меншому додатному значенню аргументу відповідає більше значення функції), одержуємо, що при $0 < a < 1$ нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ на її ОДЗ рівносильна нерівності *f (x) < g (x).* Коротко це записуємо так:

при $0 < a < 1$ $$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Підсумовуючи одержані результати, відзначимо, що *для розв'язування нерівності* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *за допомогою рівносильних перетворень необхідно врахувати її ОДЗ, а при переході від значень функції до значень* *аргументу (тобто до виразів, які стоять під знаком логарифма) ураховувати значення а: при а* > 1 *знак нерівності не змінюється, при* 0 < *a* < 1 *знак нерівності змінюється на протилежний* [16].

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_2 x > 3$.

Розв'язування. Оскільки $3 = \log_2 2^3$, то можна записати: $\log_2 x > \log_2 2^3$. Ця нерівність рівносильна такій: $x > 2^3$. Звідси $x = 8$

Відповідь: (8;+∞).

Приклад. Розв'язати нерівність $\lg(-x) < -1$.

Розв'язання. Запишемо цю нерівність у вигляді (1):

$\lg(-x) < \lg 10^{-1}$,

звідки знайдемо розв'язок $0 < -x < 0{,}1$, або $-0{,}1 < x < 0$.

Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей виконується за допомогою або рівносильних перетворень заданої нерівності (і зведення її до відомого виду нерівностей), або методу інтервалів.

Схема рівносильних перетворень логарифмічних нерівностей повністю аналогічна схемі рівносильних перетворень логарифмічних рівнянь:

- *ураховуємо ОДЗ заданої нерівності;*
- *стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної нерівності.*

У цьому випадку на ОДЗ кожен розв'язок заданої нерівності буде розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності буде розв'язком першої, тобто ці нерівності будуть рівносильними (на ОДЗ).

Розв'язання логарифмічних нерівностей потребує міцних знань з багатьох розділів алгебри. Потрібно вміти свідомо користуватися означенням логарифма, логарифмуванням та потенціюванням і, що дуже важливо, пам'ятати про те, що властивості логарифмічної функції різні при основах, менших або більших одиниці. Суттєвим при розв'язуванні таких нерівностей є обмеженість області визначення логарифмічної функції.

Розв'язання будь-якої нестрогої логарифмічної нерівності відрізняється від розв'язання відповідної строгої логарифмічної нерівності тільки включенням у множину всіх її розв'язків множину коренів відповідного логарифмічного рівняння [25].

Існують різні способи оформлення розв'язання логарифмічної нерівності. Найбільш поширені з них - метод переходу до розв'язання рівносильних совокупностей нерівностей і метод розбиття ОДЗ даної нерівності на проміжки, на яких розв'язуються відповідні рівносильні (на проміжку, що розглядається) нерівності. По суті, ці методи розв'язування однакові і розрізняються тільки способом оформлення.

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$

Розв'язування. Дана нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} 3x-4 > x-2, \\ x-2>0. \end{cases}$.

Звідси $\begin{cases} x>1, \\ x>2. \end{cases} \Rightarrow x>2$

Відповідь: $(2;+\infty)$

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{2^{-1}}(x-1) - 5 > 0.$

Розв'язування. Оскільки областю визначення даної нерівності є проміжок $(1;+\infty)$, то виконується рівність $\log_2(x-1)^2 = 2\log_2(x-1)$. Тоді дану нерівність можна переписати так: $4\log_2^2(x-1) + \log_2(x-1) - 5 > 0.$ Нехай $\log_2(x-1) = t.$ Отримуємо: $4t^2 + t - 5 > 0,$ $\left[\begin{array}{l} t < -\frac{5}{4}, \\ t > 1. \end{array}\right.$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) < -\frac{5}{4}, \\ \log_2(x-1) > 1. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) < \log_2 2^{-\frac{5}{4}}, \\ \log_2(x-1) > \log_2 2. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 0 < x-1 < 2^{-\frac{5}{4}}, \\ x-1 > 2. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{32}}, \\ x > 3. \end{array}\right.$

Відповідь: $\left(1;1+\frac{1}{\sqrt[4]{32}}\right) \cup (3;+\infty).$

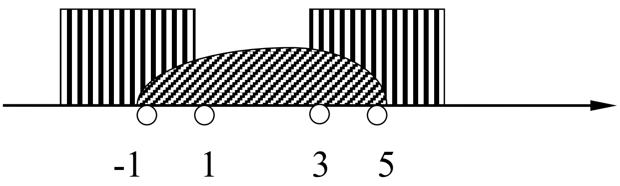
Приклад. Розв'язати нерівність $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$

Розв'язування. Користуючись властивістю логарифмічної функції, дістаємо, що дана нерівність рівносильна нерівності

$0<x^2-4x+3<8$ або $\begin{cases} x^2-4x+3<8 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$,

$$\begin{cases} x^2-4x+3<8 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$$

Розв'яжемо ці нерівності:



Відповідь: $3<x<5,\ -1<x<1.$

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}(3-2x)<1.$

Розв'язування. Скориставшись співвідношенням $1=\log_{x^2}x^2,$ розв'яжемо дві системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2>1 \\ 0<3x-2<x^2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 0<x^2<1 \\ 0<x^2<3x-2 \end{cases}$.

Шуканий розв'язок: $x\in(2;+\infty).$

Відповідь: $x\in(2;+\infty).$

Приклад. Розв'язати логарифмічну нерівність $\log_x\left(x^2-x-2\right)<2.$

Розв'язування. Запишемо дану нерівність у вигляді :

$\log_x\left(x^2-x-2\right)<\log_x x^2.$

Звідси дістаємо дві системи:

1) $\begin{cases} x>1 \\ 0<\left|x^2-x-2\right|<x^2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 0<x<1 \\ \left|x^2-x-2\right|>x^2>0 \end{cases}$.

Побудуємо графік функції $y=\left|x^2-x-2\right|$.

При $1 < x < 2$ маємо:

$2 + x - x^2 < x^2$, $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{a};\ 2 \right).$

При $x > 2$ маємо:

$-2 - x + x^2 < x^2$, $x > -2$, $x \in (2; +\infty).$

При $0 < x < 1$ маємо:

$2 + x - x^2 > x^2$, $x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4};\ \frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)$; $x \in (0; 1).$

Відповідь: $x \in (0; 1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};\ 2 \right) \cup (2;\ \infty)$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}(2 + x) < 0.$

Розв'язування:

Перший спосіб: Данна нерівність рівносильна нерівності $\log_{x^2}(2 + x) < \log_{x^2} x^2$, яке рівносильно сукупності двох систем

а) $\begin{cases} x^2 > 1, \\ 2 + x < x^2, \\ 2 + x > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ x^2 < 2 + x. \end{cases}$

Розв'язками системи а) є проміжки $-2 < x < -1$ і $2 < x < +\infty$.

Розв'язками системи б) є проміжки $-1 < x < 0$ і $0 < x < 1$.

Об'єднавши отримані множини розв'язків систем сукупності, знаходимо множину всіх розв'язків початкової нерівності - всі x з чотирьох проміжків:

$-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $2 < x < +\infty$.

Другий спосіб: Область допустимих значень данної нерівності визначається

системою $\begin{cases} x^2 > 1, \\ x^2 \neq 1, \\ 2 + x > 0 \end{cases}$, звідки знаходимо ОДЗ нерівності:

$-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $2 < x < +\infty$.

а) Розглянемо спочатку данну нерівність на множині $(-2;-1)\cup(1;+\infty)$. На цій множині вона рівносильна нерівності $2+x<x^2$ (так як $x^2>1$), розв'язком якої на цій множині є проміжки $-2<x<-1$, $2<x<+\infty$.

б) На множині $(-1;0)\cup(0;1)$ дана нерівність равносильна нерівності $2+x>x^2$ (так як $x^2<1$), розв'язками якого на цій множині є проміжки $-1<x<0$ і $0<x<1$.

Об'єднавши отримані розв'язки, отримуємо множину розв'язків початкової нерівності - всі x з чотирьох проміжків:

Відповідь: $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $x>2$.

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей слід уникати перетворень, які можуть привести до втрати або появи сторонніх розв'язків, так як в протилежному випадку обгрунтування правильності відповіді, як правило, є більш складною задачею, чим розв'язання початкової нерівності. Тим самим, по суті, єдиним методом розв'язування логарифмічних нерівностей є метод переходу до рівносильних нерівностей (системам або сукупностям)

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_3(x+2)(x+4)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7$.

Розв'язування: Області допустимих значень нерівності належать всі значення x, які задовільняють умові $x>-2$. При цих значеннях невідомого

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=-\log_3(x+2),\ \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7=\log_3 7$$

та $\log_3(x+2)(x+4)=\log_3(x+2)+\log_3(x+4)$;

тому початкову нерівність можна записати у вигляді

$$\log_3(x+2)+\log_3(x+4)-\log_3(x+2)<\log_3 7,$$

або $\log_3(x+4)>\log_3 7$.

Таким чином, початкова нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} \log_3(x+4) < \log_3 7 \\ x > -2 \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності цієї системи є проміжок $-4 < x < 3$. З цих значень x другій нерівності задовольняють тільки ті x, які належать інтурвалу $-2 < x < 3$. Тобто, множиною всіх розв'язків початкової нерівності є інтервал $-2 < x < 3$.

Відповідь: $-2 < x < 3$.

2.5. Методика вивчення тригонометричних нерівностей.

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Розв'язування будь-яких тригонометричних нерівностей, як правило, зводиться до розв'язування найпростіших нерівностей:

$\sin x \geq a$ або $\sin x \leq a$;

$\cos x \geq a$ або $\cos x \leq a$;

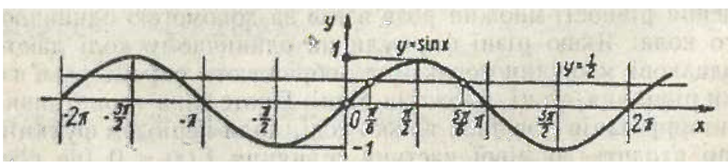
$tgx \geq a$ або $tgx \leq a$;

$ctgx \geq a$ або $ctgx \leq a$.

Як і найпростіші тригонометричні рівняння, нерівності природно розв'язувати графічно. Розглянемо приклади [16].

Приклад. Розв'язати нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$

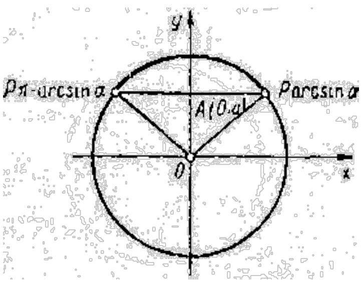
Розв'язування. Позначимо функції, які стоять у лівій і правій частинах, через $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ побудуємо схематично їх графіки (мал.).

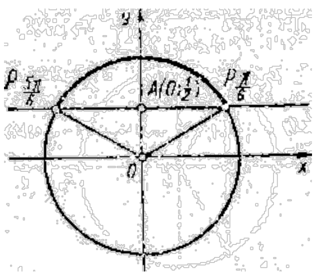


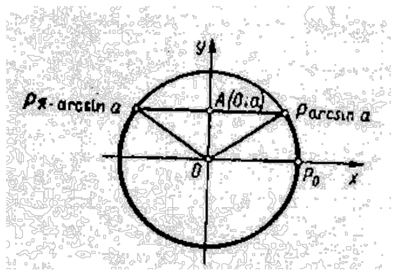
мал.

Розв’язками нерівності будуть абсциси всіх точок графіка синусоїди, які містяться вище від прямої $y = \frac{1}{2}$. Враховуючи періодичність функції синус, досить знайти розв’язки на будь-якому відрізку області визначення завдовжки 2π і додати до знайдених чисел період $2\pi n$, $n \in Z$. Виберемо, наприклад, проміжок $[0;\ 2\pi]$. З малюнка випливає що множиною значень x з відрізка $[0;\ 2\pi]$, для яких відповідні точки графіка синусоїди розміщені вище від точок прямої $y = \frac{1}{2}$, буде $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Додавши до цих чисел період $2\pi n$, дістанемо множину всіх розв’язків даної нерівності $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

Дещо зручнішим є спосіб розв’язування найпростіших тригонометричних нерівностей за допомогою одиничного кола. Для даної нерівності розв’язування цим способом проводять аналогічно розв’язуванню найпростішого тригонометричного рівняння. Побудуємо одиничне коло (мал. 1). Відкладемо на осі Oy ординату $\frac{1}{2}$ і через кінець відрізка проведемо пряму, паралельну осі Ox.







мал.1 мал. 2

мал. 3

Розв’язання даної нерівності зводиться до знаходження на одиничному колі всіх точок, у яких ординати більші за $\frac{1}{2}$. Ці точки відповідають шуканим числам a, що є розв’язками даної тригонометричної нерівності. З малюнка випливає, що такими точками є точки дуги кола, які розміщені над прямою

$y=\frac{1}{2}$ і відповідають числам множини $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$, довжина якого дорівнює періоду 2π .

Додаючи до цих чисел період функції $2n\pi$, дістанемо множину всіх розв'язків нерівності $\sin x>\frac{1}{2}$.

Розглядаючи розв'язання нерівності виду sin x > a у загальному випадку, необхідно накласти обмеження на число a. Якщо $a\geq$ 1, то нерівність sin x > a розв'язків не має, бо при будь-якому x завжди | sin x | ≤ 1. Якщо ж a < - 1, то нерівність sin x > a виконується при будь- якому x, тобто множиною розв'язків такої нерівності є множина R.

У загальному випадку нерівність sin x > a, де $-1\leq a\leq 1$, розв'язують аналогічно (мал. 2). Точки $P_{\arcsin a}$ і $P_{\pi-\arcsin a}$ зображують числа arcsin a і $\pi-\arcsin a$. Розв'язками нерівності на відрізку $[-\pi;\pi]$є множина (arcsin a; $\pi-\arcsin a$), а множиною всіх розв'язків будуть проміжки

$$\arcsin a+2n\pi<x<\pi-\arcsin a+2n\pi, n\in Z$$

Аналогічно розв'язують нерівність sin x < a. На малюнку 3 показано дугу, що відповідає розв'язкам цієї нерівності.

Більш складні тригонометричні нерівності розв'язують способами, що аналогічні до способів розв'язування тригонометричних рівнянь такого ж типу.

РОЗДІЛ ІІІ. ОРГАНІЗАЦІЯ І ПРОВЕДЕННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

У процесі проходження педагогічної практики в школі був проведений педагогічний експеримент з метою кращого засвоєння учнями знань, умінь та навичок, для підвищення інтересу учнів до математики.

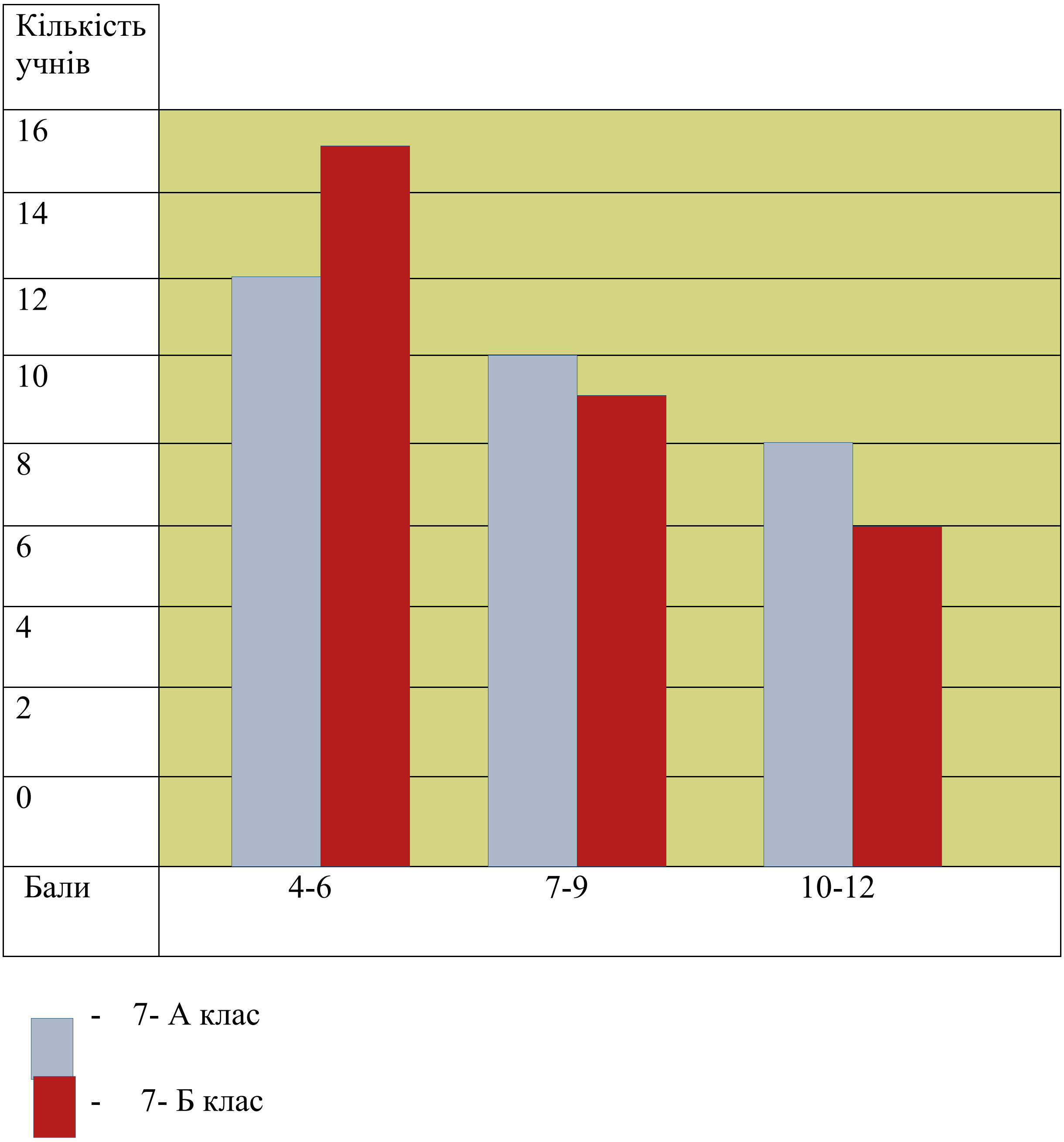
Для проведення експерименту було вибрано два класи: 7-А і 7-Б, у яких рівень успішності з математики був однаковий.

Спочатку у цих двох класах була запропонована нульова контрольна робота. Результати контрольної роботи наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

<table>
<tr><td>Бали</td><td colspan="2">Класи</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>7-А</td><td>7-Б</td></tr>
<tr><td colspan="2">Кількість учнів</td></tr>
<tr><td>30</td><td>30</td></tr>
<tr><td colspan="2">Позитивні результати</td></tr>
<tr><td>4-6</td><td>12</td><td>15</td></tr>
<tr><td>7-9</td><td>10</td><td>9</td></tr>
<tr><td>10-12</td><td>8</td><td>6</td></tr>
</table>

Результати нульової контрольної роботи візуально проілюстровані на діаграмі 1.



Діаграма 1. Результати нульової контрольної роботи

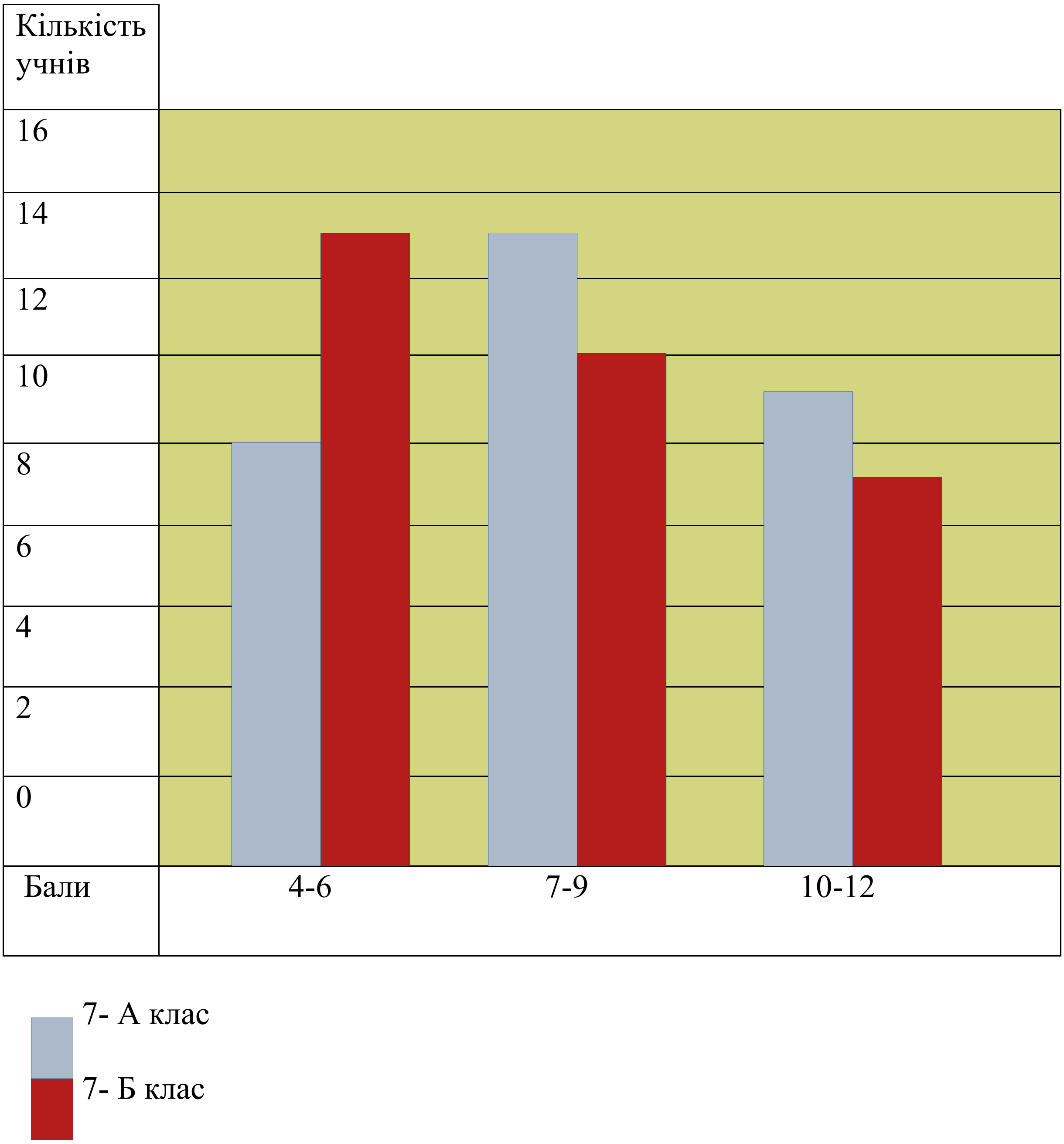
У процесі вивчення в курсі алгебрі теми «Нерівності» у 7-А класі на уроках було використано розроблені нами диференційовані завдання. Під час уроку учням надавалися різні методи розв'язування нерівностей і вони могли обрати для себе найефективніший – найпростіший та звірити розв'язання нерівностей з однолітками, які розв'язували їх іншими способами. У результаті учні свідомо зацікавились вивченням теми «Нерівності» та навчилися робити перевірку. У 7-Б класі тема «Нерівності» вивчалася традиційними засобами. На підсумковому уроці одочасно була проведена контрольна робота у 7-А і 7-Б класах. Після перевірки та опрацювання результатів виконання підсумкової контрольної роботи було оцінено та порівняно навчальні здобутки учнів обох класів. Результати виконання підсумкової контрольної роботи подані в таблиці 2.

Як свідчать результати підсумкової контрольної роботи, фактичний рівень засвоєння розв'язування завдань теми «Нерівності» в учнів 7-А класу помітно виріс.

Таблиця 2

Бали	Класи	
	7-А	7-Б
	Кількість учнів	
	30	30
	Позитивні результати	
4-6	8	13
7-9	13	10
10-12	9	7

Результати підсумкової контрольної роботи візуально проілюстровані на діаграмі 2.



Діаграма 2. Результати підсумкової контрольної роботи

Отже, результати підсумкової контрольної роботи свідчать про те, що учні 7-А класу показали кращу успішність, ніж учні 7-Б класу, оскільки використання диференційованих завданнь зацікавлює дітей, дозволяє учням краще засвоїти навчальний матеріал, дає можливість перевірити свої знання та розвиває їх логічне мислення формує в них математичні компетентності.

ВИСНОВКИ

Приєднання України до Болонської угоди спонукало до вдосконалення старих і створення нових методів, організаційних форм та засобів навчання. Значно змінилася програма як у вищих навчальних закладах так і у загальноосвітній школі. За новою програмою з математики для загальноосвітньої школи досить багато матеріалу школярі або вивчають самостійно, при чому це не завжди найпростіший матеріал, або ж той чи інший матеріал віднесли до розділу, який має назву «Для тих, хто хоче знати більше».

Головне завдання школи сьогодні — формування гармонійно розвиненої, активної, творчої особистості, яка буде здатна навчатися протягом усього життя, вміти застосовувати знання в певних ситуаціях.

Навчальний процес повинен не просто пристосовуватись, підбудовуватись під власний рівень знань і умінь учнів, змінюючи зміст і методи, а орієнтуватись на досягнення максимально важливих результатів кожним учнем і, що не менш важливе, на розвиток мислення, пізнавальних можливостей, інтересів, зацікавленість у вивченні алгебри.

Розв'язування нерівностей формує в учнів уміння досліджувати різного роду функції, сприяє засвоєнню їх властивостей, забезпечує узагальнення і систематизацію отриманих знань. Ось чому дуже важливо сформувати в учнів техніку розв'язування такого роду задач, ознайомити їх з основними методами, підходами, які при цьому використовувалися.

Практика викладання математики в школі переконує, що кожен учень повинен пройти через повноцінний навчальний процес, тому рівень навчання має бути високим для всіх. Однак рівень засвоєння знань учнів є індивідуальним, залежно від їх здібностей та рівня розумового розвитку.

Тема «Нерівності» займає одне із основних місць у структурі шкільної математичної освіти. є досить складною і не менш важливою для учнів. Проте, цьому питанню не надається відповідна увага. Існує досить великий розрив при вивченні даної теми. Вперше учні знайомляться з нерівностями в початкових класах, а систематичний курс вивчення нерівностей, згідно програми, вивчають у 9 класі.

У вступі магістерської роботи було аргументовано актуальність написання роботи на вказану тему, визначено предмет, об'єкт, мету та гіпотезу дослідження, поставлені завдання дослідження.

Перший розділ містить теоретичне обґрунтуванню даної теми, зокрема, історію розвитку поняття «нерівності»; висвітлена пропедевтика вивчення вивчення даної теми в курсі алгебри, аналізу програм та підручників з алгебри та подання нових теоретичних відомостей за сучасною програмою. Другий розділ роботи присвячений методиці розв’язання основих типів нерівностей загальноосвітній школі. У третьому розділі наведені результати педагогічного експерименту.

Особлива увага приділялась вдосконаленю навчальної програми з курсу «Методика розв'язання нерівностей в основній школі».

Дана диференціація розроблених завдань не претендує на універсальність, адже її ефективність перевірялася експериментально лише протягом одного навчального року, але деякі позитивні якісні зміни в рівні знань учнів відбулися.

Розкриваючи питання методики ми зосередили увагу на більш актуальних і легких для застосування учнями методах розв'язування нерівностей.

Аналіз наукових досліджень, що стосуються даної теми, а також експертна оцінка розробленої методики показали, що методична система курсу «Методика розв'язання нерівностей в основній школі» сприяє розумовому розвитку учнів (розвиток мислення, насамперед логічного, а також памяті та уваги), підвищує інтерес до математики як навчальної дисципліни, до самоосвіти, розвиває творчість та ініціативність, формує в учнів необхідні математичні компетентності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амелькин В.В. Задачи з параметром / В.В. Амелькин. – Минск, 1994. – 464 с.
2. Ананченко К.О. Загальна методика викладання математики в школі / К. О. Ананченко. – Мінськ: видавництво «Універсітецкае», 1997. – 392 с.
3. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г.В. Апостолова. – К.: Поліграф сервіс, 2001. – 231с.
4. Бантова М.А. Методика викладання математики в початкових класах / М.А. Бантова; под ред. М.А. Байтова, Г.В. Бельтюкова. – [3-е изд.]. – М.: Просвещение, 1984. – 335 с.
5. Бантова М.А. Методичний посібник до підручника математики / М.А. Бантова ; под ред. Т.В. Бельтюкова, С.В. Степанова. – М.: Просвещение, 2001. – 64 с.
6. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367с.
7. БурдаМ.І. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-11 класи / М.І.Бурда. – К.: ВТФ «Перун», 2011. – 64 с.
8. Вавилов В.В. Задачи по математике: Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов. – М.: Наука, 1988г. — 236с.
9. Глейзер Г.И. История математики в школе: Пособия для учителей / Г.П. Глейзер. – М.: «Просвещение», 1964. –240с.
10. Голубев В. И. Эффективные пути решения неравенств / В. И. Голубев, В. А. Тарасов. – Львов: Журнал «Квантор», 1992. –143с.
11. Гордійчук Г. Б. Історико-педагогічні аспекти неперервної освіти. / Г. Б.Гордійчук. // Всеукр. наук.-практ. конф. Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість. Т. 1– К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2003. – С. 67-70.

12. Гусак Г. М. Математика для подготовительных отделений вузов: Справочное пособие. / под ред. А. А. Гусака, Д. А. Капуцкая. – М.: Выс. шк., 1989. – 495 с.
13. Істоміна Н.Б. Методика навчання математики в початкових классах / Н.Б. Істоміна. – М.: Академія, 2003. – 288 с.
14. Кравчук В. Алгебра: Підручник для 9 класу / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2009. –132с.
15. Мішин В.І. Методика викладання математики в середній школі (Приватна методика) / В.І. Мішин. – Москва: Просвещение, 1987. – 416с.
16. Мерзляк А.Г. Алгебра: Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. — Харків: «Гімназія», 2009. – 214с.
17. Оганесян В.А. Методика викладання математики в середній школі / В.А. Оганесян та ін. – М: Освіта, 1980. – 368 с.
18. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях: Навч. Посібник для учнів 7-11 класів / Є. П. Нелін. — Х.: Світ дитинства, 2002. – 146с.
19. Репа В.К. Задачі з параметрами / В.К. Репа, Н.О. Клешня. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 168с.
20. Роганін О.М. Математика: Практичний довідник / О.М. Роганін, О.І. Каплун. – Харків: ФОП Співак Т.К., 2009. – 416 с.
21. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студ. спец. пед. навч. закладів / З.І.Слєпкань. – К.: Зодіак ЕКО, 2000. – 446с.
22. Слєпкань М.І. Методика навчання математики / М.І. Слєпкань. – К.: Зодіак ЕКО, 2001. – 512с.
23. Столяр А.А. Методика викладання математики в середній школі / А.А.Столяр. – Харків, 1992. – 368с.
24. Толочкин П.Б. Упражнения и методические указании из опыта роботы учителя / П.Б.Толочкин. — М.: Просвещение, 1970. – 362с.

25. Ушаков Р.П. Повторювальний курс математики: Посібник для учнів середніх закладів освіти / за ред. Ядренка М.Й. – [2-ге вид.], випр. і доп. – К.: Техніка, 2003. – 591 с.
26. Шабунін М.І. Математика для вступників до вузів Нерівності і системи нерівностей / М.І. Шабунін. – М.: Акваріум, 1997. – 198с.
27. www.mon.gov.ua

ДОДАТКИ

Додаток 1.

1. Додати почленно нерівності.	
I варіант	***II варіант***
а) $12 > -5$ і $9 > 7$ б) $-2,5 < -0,7$ і $-3 < -2$	а) $13 > 6$ і $7 > 2$ б) $-4,2 < -0,8$ і $-7 < -6$
2. Зобразити на координатнай прямій проміжок:	
а) $[-4; 7]$; б) $(-3;7)$; в) $[4; 12]$; г) $(7;10]$;	а) $[3;8]$; б) $(-2; 5)$; в) $[7; 13)$; г) $(-9; 0]$.
3. Розв'язати нерівність.	
а) $4x < 20$; б) $-3x < -9$; в) $4a - 11 < a + 13$.	а) $3x < 18$; б) $-5x < -10$; в) $6 - 4x < 7 - 6x$.
4. Оцінити значення виразу, знаючи, що:	
$6 < b < 8$; $10 < a < 16$ а) $a + b$; б) ab.	$6 < x < 7$; $3 < y < 4$; а) $x + y$; б) xy.
5. Розв'язати нерівність використовуючи метод інтервалів.	
а) $(x - 4)(x + 10) < 0$; б) $2x(x - 12)(8 + x) > 0$.	а) $(x + 9)(x - 2) < 0$; б) $4x(5 + x)(x - 12,5) > 0$.
6. Розв'язати нерівність найзручнішим способом.	

$\boldsymbol{|2x-1|} \geq 1$	$\boldsymbol{|3-2x|} \geq 1$
7. Довести нерівність.	
$(a^3 - b^3)(a - b) \geq 3ab(a - b)^2$	$(a^2 - b^2) \geq 4ab(a - b)^2$
8. При яких значеннях ***a*** рівняння немає розв'язків?	
$x^2 - (a - 2)x = 2a - 1$	$x^2 + (a + 2)x = a^2 - 1$

Додаток 2.

1. *Диференційована система вправ*:

Система задач має три рівні складності:

I. *Обов'язковий рівень* - містить задачі та вправи, в основному репродуктивного характеру на 2-3 логічних кроки, представлені у формі тестів. Для їх розв'язування учням достатньо знати правила, означення, формули, теореми та ознаки, передбачені навчальними програмами, а також вміти виконувати найпростіші тотожні перетворення, спрощення та обчислення.

II. *Підвищений рівень* - містить завдання на 4-6 логічних кроки, розв'язання яких вимагає від учня творчого застосування одержаних знань з достатньо повним і строгим обґрунтуванням ходу розв'язку.

III. *Поглиблений рівень* - це, як правило задачі та вправи, розв'язання яких вимагає вміння орієнтуватися в нестандартних ситуаціях, застосовувати оригінальні та штучні прийоми, глибини та строгості суджень, характерних для тих, хто вивчає шкільний курс математики на поглибленому рівні.

Логарифмічні рівняння і нерівності;

Обов'язковий рівень.

Знайти корені рівняння.

1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) = -2$

    1) 5,

    2) 3,

    3) 4,

    4) інша відповідь.

2. $5^{2x} = 4$

    1) $\log_2 5$,

    2) $\log_5 2$,

    3) інша відповідь.

3. $\lg\left(x^2+2x+3\right)=\lg 3$

1) -2; 0,

2) інша відповідь,

3) 0; -2.

4. $\log_5(3x+1)=2$

1) 3,

2) 8,

3) інша відповідь.

5. $\lg 2=\lg\left(\frac{x}{2}+4\right)$

1) -4,

2) 4,

3) 2

4) інша відповідь.

При яких значеннях x справедлива рівність.

1. $\log_4\left(x^2-1\right)=\log_4 3$

1) $-1;1$,

2) $-2;2$,

3) $-3;3$,

4) інша відповідь.

2. $\log_{\frac{1}{3}} x=-2$

1) $\frac{1}{9}$,

2) 9,

3) -9

4) інша відповідь.

3. $\log_x 4=-2$

1) 2,

2) $\frac{1}{2}$,

3) -2

4) інша відповідь.

Розв'язати нерівності

1. $\log_{\frac{1}{5}}(4x-1) < -2$

1) $x > 6{,}5$,

2) $x < 6{,}5$,

3) інша відповідь.

2. $\log_{2,5}(2x) > 2$

1) $x < 3{,}125$,

2) $x > 3{,}125$,

3) інша відповідь.

3. $\log_3 \frac{2x+1}{x+1} \geq 1$

1) $(-2;1]$,

2) $(-2;1)$,

3) $[-2;1)$,

4) інша відповідь.

4. $\log_{0,7} x > 1$

1) $x > 0{,}7$,

2) $x < 0{,}7$,

3) інша відповідь.

Підвищений рівень

Розв'язати рівняння

1. $\dfrac{1}{\lg x-6}+\dfrac{5}{\lg x+2}=1$

2. $\log_{0,5} x=\log_{0,5}\left(2x^2-x\right)$

3. $2\ln(-x)=\ln(x+2)$

4. $\lg\left(12x-x^2-19\right)=2\lg(x-1)$

5. $x^{\lg x-2}=1000$

6. $\log_2 x+\log_x 16=5$

Розв'язати нерівності

1. $2^{9x-x3}\geq 1$

2. $\log_{0,3}\dfrac{1+2x}{1+x}>1$

3. $\log_2\left(x^2+3x\right)\leq 2$

4. $\log_5^2 x-\log_5 x>2$

5. $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x>0$

6. $\log_3 x+\log_x 9>2$

7. $(3x-6)\cdot\log_{0,5} x>0$

Поглиблений рівень

Розв'язати рівняння

1. $\log_2 x^2 - \log_2^2(-x) = 3$
2. $\log_{-2x}\left(2x^2 - x - 1\right) = 1$
3. $\dfrac{\log_3\left(2x^2 - x\right)}{\log_2(2x+2)} = 0$
4. $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5$
5. $\log_2 \cos x + \log_{\frac{1}{2}}(-\sin x) = 0$
6. $x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4,5} = 10^{-2\lg x}$

Розв'язати нерівність

1. $\lg^2 x + \lg x^3 + 2 \geq 0$
2. $\log_{x-3}(x-1) < 2$
3. $\log_x \log_2\left(4^x - 12\right) \leq 1$
4. $\dfrac{|x-2| - x}{\lg(x-2)} > 0$
5. $\log_{5-x}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 < 3$
6. $\log_{4+2x}\left(x^2 + x - 2\right) \geq 1$