# ЗМІСТ

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Метою навчання математики в школі є не лише оволодіння конкретними математичними знаннями, але й інтелектуальний розвиток учнів, формування якостей мислення, характерних для математичної діяльності і необхідних людині для продуктивного життя в суспільстві. Зараз освіта характеризується як процес навчання і виховання в інтересах особи, суспільства і держави, спрямований на розвиток індивіда, його індивідуальних, розумових і фізичних здібностей, обдарованості і таланту.

Проблемі вивчення понять «здібність» і «обдарованість» присвячено безліч досліджень в галузі психології, педагогіки і методики навчання математики. Значний внесок в розвиток цієї теорії внесли: В. Крутецький, С. Рубінштейн, М. Холодна, Р. Пономарьова, Т. Іванова, М. Фіцула, А. Колмогоров, М. Зиганов, С. Лейтес, Л. Виготський, Ф. Гальтон та ін.

Спеціальні математичні здібності якнайповніше досліджені В. Крутецьким, А. Колмогоровим і Д. Мордухай-Болтовським та ін. З цих досліджень виходить, що математичні здібності проявляються у високому рівні розвитку основних пізнавальних процесів (уява, пам’ять, мислення, сприймання), а також в захопленості математичними обчисленнями, символами, пошуком гарних рішень, якістю і швидкістю математичної діяльності.

Підходи до виявлення розвитку дитячої обдарованості розробляли Н. Лейтес, А. Матюшкін, В. Юркевич, В. Панов стержневим моментом яких є підхід до обдарованості як до процесу цілісного розвитку особистості і свідомості обдарованих дітей, що реалізовує творчий потенціал їх розвитку. Враховуючи це, в якості базової характеристики обдарованості виділяється творча активність людини як прояв творчої природи психіки і її розвитку залежно від освітнього середовища. Для створення необхідного освітнього середовища існують: ранній вступ до школи, профільне навчання, приватні школи, збагачення традиційного освітнього процесу, розробку індивідуальних (авторських) програм (Росток); гуртки, факультативи, олімпіади, конкурси.

Розробкою факультативних занять займалися Л. Бондар, Г. Апостолова, О. Гартфіль, Л. Заболотня, Л. Домбровська. Критерії обдарованості визначені О. Савенковим, Д. Богоявленською.

Необхідно відмітити, що створення класів і шкіл з поглибленим вивченням математики, проведення різних конкурсів і олімпіад, диференціація навчання в основному використовується для навчання і розвитку учнів 8-11 класів, в той час, як робота по виявленню обдарованих дітей повинна починатися в 5-6 класах, де існує небезпека «втратити» таких дітей. Крім того, за результатами опитувань вчителів і батьків учнів є проблеми, пов'язані з розвитком здібних дітей в 5-6 класах, до яких відносяться відсутність психологічної допомоги, спеціальної методичної літератури, і дидактичних матеріалів, обмежені фінансові можливості батьків тощо.

Програма для факультативних занять схвалена для використання у загальноосвітніх навчальних закладах науково-методичною комісією з математики НМР з питань освіти Міністерства освіти і науки України (протокол від 24.06.2010 р. №4) [21].

Аналіз підручників з математики для 5-6 класів показує, що вони не містять необхідного набору завдань, спрямованих на розвиток обдарованих учнів, тобто завдань на розвиток різних пізнавальних процесів, що забезпечують досягнення цілей розвитку здібних дітей. Сучасні освітні стандарти, програми математичної освіти для загальноосвітньої школи лише виділяють математиків, що розвивають можливості, але не приділяють уваги їх використанню для розвитку обдарованих дітей в процесі навчання.

Таким чином, не зважаючи на досягнуті успіхи в теорії і практиці роботи з обдарованими дітьми, існують невирішені питання, пов'язані з навчанням таких дітей в середній загальноосвітній школі. Тому проблема виявлення обдарованих дітей є актуальною.

**Об'єктом дослідження** є процес навчання математики учнів основної школи.

**Предметом дослідження** є методика організації роботи вчителя математики з обдарованими учнями 5-6 класів.

**Мета дослідження** – дослідити та впровадити методику відбору обдарованих учнів 5-6 класів вчителем математики і систематизувати навчально-методичні матеріали факультативних занять для роботи з обдарованими школярами.

Мета дослідження визначає наступні **завдання:**

- Проаналізувати психолого-педагогічну та методичну літературу по темі дослідження.
- Дослідити особливості, форми, методи роботи вчителя з обдарованими дітьми.
- Систематизувати навчально-методичний комплекс вчителя математики для роботи з обдарованими учнями 5-6 класів.
- Здійснити діагностику обдарованості з математики учнів 5-6 класів.

При вирішенні даних завдань доцільно використовувати наступні **методи дослідження:**

1. Загальнонаукові (аналіз, синтез, узагальнення).
2. Історико-педагогічний (порівняльний).
3. Пошуково-бібліографічний (вивчення джерел, матеріалів, періодичних видань).
4. Метод термінологічного аналізу (уточнення значень і смислів основних понять).
5. Метод розпізнавання та встановлення ознак (педагогічна діагностика).
6. Емпіричний метод одержання інформації (бесіда).

**Практичне значення** роботи полягає в тому, що розроблений зміст і методика може бути використана вчителями шкіл при організації навчання математики на уроках, на факультативних заняттях, для підвищення якості вмінь учнів 5-6 класів, активізації їх пізнавальної діяльності.

**Структура і обсяг дипломної роботи.** Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (32 найменування) та додатку. Загальний обсяг дипломної роботи 104 сторінки. Робота містить 4 таблиці та 8 рисунків.

# РОЗДІЛ 1
# ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ АСПЕКТИ РОБОТИ З ОБДАРОВАНИМИ УЧНЯМИ

## 1.1 Сутність поняття «обдарованість дитини»

У тлумачних словниках поняття: «здібний», «обдарований», «талановитий» уживаються як синоніми, що відображують рівень прояву здібностей. Отже, установлюючи складові обдарованості, необхідно основним уважати поняття здібність. М. Б. Теплов визначає три ознаки цього поняття.

По-перше, здібності — це індивідуально-психологічні особливості, що відрізняють одну людину від іншої.

По-друге, здібності — це не будь-які індивідуальні особливості взагалі, а такі, що стосуються успішного виконання якої-небудь діяльності або багатьох діяльностей.

По-третє, поняття здібність не визначає ті знання, навички або вміння, що вже вироблені в конкретної людини [29].

На думку О. Я. Савченко, обдарованість — це сукупність задатків особистості як передумова розвитку її здібностей до певних видів діяльності. Талант — це певна природна якість, що демонструє особливі здібності. Обдарованість — це стан таланту, ступінь прояву таланту [25].

У психологічному словнику М. З. Д'яченка, Л. О. Кандиновича талант трактується як природна обдарованість і видатні здібності до якої-небудь діяльності [11].

Відповідно до теорії психологічної науки, чинниками, за якими здійснюється психічний розвиток дитини, є:

• природні передумови;

• соціальні умови життя;

• система саморозвитку [11].

Дослідження свідчать, що генетично обумовлений компонент (дар) значною мірою визначає як кінцевий результат, так і темп розвитку. З моменту народження цей генетичний дар під впливом середовища перетворюється на єдину лінію розвитку. Реальна обдарованість залежить не тільки від задатків, але й від того, у якому середовищі зростала дитина, який отримала розвиток, як сама піклувалась про розвиток свого потенціалу.

Реальна обдарованість — не просто статичний божий чи генетичний дар. Обдарованість існує лише в динаміці, у розвитку, а тому постійно змінюється. Отже, необхідно зауважити, що обдарованість — лише потенціал, який може сприяти успіху, а може й не реалізуватись [15].

На сьогодні досить актуальним є поняття «творча особистість». Більшість авторів відзначають, що творчо обдарована особистість — це людина, якій притаманні певні якості, здібності, особливості психічних процесів, завдяки яким її діяльність відзначається новизною, неповторністю, для якої потреба в творчості є життєвою необхідністю, а творчий стиль діяльності — характернішим.

Творча особистість — це творчо активна особистість, яка справді не боїться конфліктів із собою та навколишньою дійсністю. Характерними рисами творчої особистості є сміливість у розв'язанні проблеми, багата уява, без якої неможливе генерування оригінальної ідеї, завзяття в довершенні наміченого, незважаючи на можливі конфлікти з колегами і навіть із суспільною думкою [14].

Риси творчої особистості:

• готовність до ризику;

• імпульсивність, оригінальність та незалежність суджень;

• нерівномірність успіхів у навчальних предметах;

• почуття гумору та схильність до жарту;

• небажання сприймати щось на віру, критичний погляд на такі речі, що немовби повинні стати «священними»;

• сміливість уяви та думки [28].

Обдаровані люди характеризується наполегливістю, надзвичайно розвиненою працьовитістю, глибоким і стійким інтересом до певної діяльності [6].

До найпопулярніших моделей обдарованості належить концепція, розроблена американським ученим Джозефом Рензулі. Згідно з цією концепцією, обдарованість — це не просто високий коефіцієнт інтелекту чи висока креативність, це поєднання трьох основних характеристик: інтелектуальних здібностей, креативності та наполегливості.

Джозеф Рензулі пропонує вважати обдарованими не тільки тих, хто за всіма трьома параметрами перевищує ровесників, а навіть тих, хто демонструє високий рівень хоча б за одним із них [22]. Таким чином, контингент обдарованих значно розширюється.

Визначають два основні типи обдарованості:

• загальна (розумова);

• спеціальна (соціальна, моторна, практична, художня).

У наші дні проблема виявлення, розвитку і навчання обдарованих дітей викликає значний інтерес у психологічних і педагогічних колах. Численні дослідження особливостей розвитку обдарованих дітей підкреслюють актуальність цієї проблеми як у нашій країні, так і за кордоном.

Обдарованими називають дітей, які, на думку фахівців, через видатні здібності демонструють високі досягнення в одній або декількох сферах: інтелектуальній, у сфері творчого або продуктивного мислення, організаторській, художній, спортивній та ін [8].

Чітких критеріїв обдарованості дотепер не вироблено, хоча більшість фахівців погоджуються з думкою, що обдарованим дітям притаманний випереджальний розвиток, тобто випередження своїх однолітків за низкою психічних параметрів. У пізнавальній сфері це виявляється у надзвичайній допитливості, здатності стежити за декількома процесами одночасно, активно досліджувати навколишній світ, сприймати зв'язки між явищами і робити відповідні висновки, створюючи в уяві альтернативні системи тощо.

Перевищення середньовікових норм на стадії «прийому» інформації поєднується з відмінною пам'яттю і раннім мовленнєвим розвитком, що сприяють накопиченню та інтенсивному використанню значного обсягу інформації. Крім того, обдарованих дітей зазвичай відрізняють зосередженість і велика завзятість у розв'язанні поставлених завдань, винахідливість і багата фантазія.

Сьогодні існує декілька теоретичних моделей обдарованості, що визначають основні параметри, за якими будуються навчальні програми, педагогічні технології роботи з обдарованими дітьми.

Д. Б. Богоявленська у своїх роботах дає таке визначення обдарованості: «Обдарованість — це системна якість психіки, що розвивається протягом життя і визначає можливість досягнення людиною більш високих (незвичайних, неабияких) результатів в одному або декількох видах діяльності порівняно з іншими людьми» [4].

Крім того, вона виділила три головні види обдарованості:

• академічна, що виявляється в швидкості та легкості опанування значного обсягу готових знань;

• інтелектуальна, що полягає в особливій розумовій самостійності, у підвищеній критичності мислення, здатності самостійно глобально, по-філософськи осмислювати складні інтелектуальні проблеми;

• творча, тобто здатність до творчої самореалізації в різних галузях життєдіяльності [4].

Стосовно школярів можна виділити низку ознак, що засвідчують про можливу обдарованість в тій або іншій сфері:

• легкість навчання і засвоєння навчального матеріалу;

• тривала концентрація уваги, багатий словниковий запас, здатність до абстрактного мислення;

• схильність до дискусії з учнями і педагогами, неприйняття суворих вимог дисципліни;

• допитливість, винахідливість, наполегливість, цілісність, високі ідеали;

• підвищене почуття гумору, гостра реакція на несправедливість тощо [28].

У той же час, їм, як правило, бракує емоційного балансу, вони бувають нетерплячими, гіпердинамічними, часто їм властиві перебільшені страхи і підвищена уразливість. Відмінними рисами обдарованих дітей інколи називають підвищений енергетичний рівень (тривалість сну, наприклад, у них менше, ніж в однолітків) або порівняно відносну нерівномірність (гетерохронність) розвитку різних психічних функцій (наприклад, розвиток координації рухів може відставати від розвитку пізнавальних здібностей) тощо.

Характерна особливість обдарованої дитини полягає в поєднанні у неї властивостей свого і подальшого віку [24]. Як правило, в фізичному й емоційному розвитку обдаровані діти перебувають у межах своєї вікової норми, при цьому значно перевершуючи однолітків інтелектуально. Ця перевага часто призводить до розвитку в обдарованих дітей серйозних соціально-психологічних проблем [28]:

• емоційні, особистісні та інші психологічні бар'єри, що ускладнюють прояв творчої природи обдарованої дитини;

• випереджальний розвиток, нетрадиційні погляди на навколишній світ і, як наслідок, відмову від підпорядкування загальним вимогам у школі;

• шкільні труднощі внаслідок того, що діти з раннім розвитком думають значно швидше, ніж висловлюють свої думки;

• нестабільність інтересів і поєднання їх широти з поверховістю знань;

• прагнення до лідерства, часто з рисами диктаторства, що призводить до проблем міжособистісної комунікації;

• іноді — занижена самооцінка, прагнення не «виділятися» серед однолітків;

• невідповідність інтелектуальних, соціальних і етичних потреб обдарованої дитини до реального змісту шкільної програми і кола спілкування, що призводить до неприязні до школи й однолітків;

• підвищена чутливість до різних подразників і стимулів, що часто вважається гіперактивністю [28].

Наявність зазначених вище психологічних особливостей обдарованої дитини дозволяє стверджувати, що такі діти можуть і повинні бути включені до своєрідної «групи ризику», і для них необхідно спеціально розробляти технологію психологічного супроводу їх розвитку, як в умовах традиційних освітніх закладів, так і в спеціалізованих умовах [12].

Робота педагогів і психологів з обдарованими дітьми ускладнюється багатьма чинниками. Згідно із даними різних досліджень у цій галузі, наголошуються такі основні недоліки в педагогічній діяльності:

• учителі часто не прагнуть до виявлення обдарованих дітей у своєму класі; це часто пов'язано зі слабкою психологічною підготовкою, відсутністю систематичних знань про обдарованих дітей, недостатнім розвитком дослідницьких навичок, відсутністю методик навчання обдарованих дітей;

• учитель часто не має нагоди організувати індивідуальне навчання обдарованої дитини [25].

Разом із тим, більшість педагогів відзначають, що наявність у класі обдарованої дитини стимулює вчителя під час підготовки до уроків і в цілому позитивно впливає на загальний інтелектуальний рівень класу. Виявлення, вивчення і підтримка обдарованих дітей сьогодні в багатьох країнах здійснюються за рахунок спеціально розроблених державних програм. Для визначення здібностей і обдарованості використовуються спеціальні методики. Тривалий час інтелект розглядали як головний показник обдарованості. У наш час визначилися дві основні тенденції в дослідженні дитячої обдарованості: більшу увагу привертають так звані «неінтелектуальні» чинники інтелекту (тобто значення тих або інших якостей особистості для розвитку здібностей), і посилюється інтерес до природних передумов інтелекту [8].

Проблема наслідування здібностей і обдарованості дуже складна, і не завжди спадковий потенціал є гарантією майбутньої творчої продуктивності. Якою мірою творчі імпульси перетворяться на творчу індивідуальність, багато в чому залежить від впливу оточуючих. Інколи обдаровані діти не демонструють високих досягнень через відсутність інтенсивної та постійної педагогічної підтримки.

Те, що обдаровані діти здатні самі розв'язувати складні ситуації, особливо в період інтенсивного формування особистості (вік від 2 до 7 років) є дуже шкідливим [15]. Час вступу до школи, підлітковий період, коли можливі особливо яскраві прояви законів гетерохронності (нерівномірності) індивідуального розвитку, можуть виявитися періодами найбільших стресів для обдарованих дітей. Особливу проблему становить поєднання обдарованості з ранніми проявами у дітей психічної патології, у тому числі спадково обумовленою. Думки, що стосуються термінів початку навчання обдарованих дітей, досить суперечливі. Деякі вчені вважають, що умови раннього навчання найбільш сприятливі для юних музикантів і математиків. Таланти в гуманітарній галузі виявляються пізніше, і скорочення дошкільного періоду не завжди сприяє їх розвитку. Кожен з обдарованих учнів вимагає індивідуального підходу [8, 6-7].

## 1.2 Характерні особливості обдарованих дітей

У результаті досліджень науковцями виділено такі характерні особливості обдарованих дітей [28]:

- часто «перескакують» через послідовні етапи свого розвитку;
- у них чудова пам’ять, яка базується на ранньому мовленні;
- рано починають класифікувати інформацію, що надходить до них;

- із задоволенням захоплюються колекціонуванням, при цьому їхня мета — не приведення колекції в ідеальний порядок, а її реорганізація, систематизація на нових підставах;

- мають великий словниковий запас, із задоволенням читають словники та енциклопедії, придумують нові слова і поняття;

- можуть займатися кількома справами одразу, наприклад, стежити за декількома подіями, що відбуваються навколо них;

- дуже допитливі, активно досліджують навколишній світ і не терплять жодних обмежень своїх досліджень;

- у ранньому віці здатні простежувати причинно-наслідкові зв'язки, робити правильні висновки;

- можуть тривалий час концентрувати свою увагу на одній справі, вони буквально «занурюються» у своє заняття, якщо воно їм цікаве;

- мають розвинуте почуття гумору;

- постійно намагаються вирішувати проблеми, які їм поки що не під силу;

- відрізняються різноманітністю інтересів, що породжує схильність починати кілька справ одночасно;

- часто роздратовують ровесників звичкою поправляти інших і вважають себе такими, що завжди мають рацію;

- їм бракує емоційного балансу, вони часто нетерплячі та поривчасті [28].

## 1.3 Виявлення обдарованих та здібних дітей

Під час проведення діагностики обдарованості школяра необхідно дотриматись принципів виявлення обдарованих дітей:

- комплексний характер оцінювання різних аспектів поведінки та діяльності;
- тривалість ідентифікації;

- аналіз дій дитини у тих сферах діяльності, що максимально відповідають її нахилам і здібностям;
- використання тестів та тренінгових методик;
- переважна опора на сучасні методи діагностики [4].

О. Савенковим виділено три групи особистісних характеристик інтелектуально-творчого потенціалу дитини:

- ✓ інтерактивні особистісні характеристики (допитливість, надчутливість до проблем, словниковий запас, здатність до оцінювання);
- ✓ характеристики сфери розумового розвитку (оригінальність мислення, гнучкість мислення, продуктивність мислення, класифікація і категоризація, висока концентрація уваги, пам’ять);
- ✓ характеристика сфери особистого розвитку (захопленість завданням, перфекціонізм – прагнення доводити продукт будь-якої своєї діяльності відповідно до найвищих вимог, нонконформізм - прагнення протистояти думці більшості, лідерство, змагальність, широта інтересів, гумор) [24].

Отже, система психічних характеристик складає основу особистісного потенціалу дитини, її обдарованості.

Спираючись на особистісні характеристики інтелектуально-творчого потенціалу, виявляючи обдарованих і здібних дітей, необхідно відстежувати і вивчати такі характерні особливості:

- ➢ інтелект;
- ➢ креативність;
- ➢ соціальна компетентність;
- ➢ психологічні здібності;
- ➢ не когнітивні особливості характеристики (використання опитувальників);
- ➢ характеристики шкільного і сімейного оточення;
- ➢ досягнення, захоплення [12].

### 1.4 Особливості роботи з обдарованими учнями

Дослідження і практика свідчать, що розвиток творчої обдарованості може бути затриманий, а іноді і втрачений на будь-якому етапі розвитку дитини. Багато спеціалістів одностайні з приводу причин, що заважають оптимальній реалізації природних задатків дитини, що їх можна розподілити на три категорії:

• методика викладання та навчальні програми не відповідають запитам обдарованих дітей;

• у містах із низьким рівнем освіти розвиток дитини не стимулюється її оточенням, тому вона не може високо оцінити значення освіти;

• психологічні передумови, що заважають реалізації здібностей дитини, часто закладаються в сім'ї. Батькам необхідні знання і навички, що дозволяють забезпечити належний розвиток їхніх обдарованих дітей [8, 7-8].

Розвиток обдарованості може бути ефективнішим при дотриманні певних умов. Більшість дослідників проблеми обдарованості свідчать про те, що ефективності роботи з обдарованим дітьми сприяють:

• своєчасна діагностика інтелектуальних особливостей і здібностей учня;

• гуманне співробітництво учителя та учня;

• взаємодія педагогів і батьків;

• створення для учня ситуацій упевненості в собі;

• забезпечення учневі права на пошук і помилку без зниження оцінки, надання можливості виправлення помилки і підвищення оцінки [22];

• використання такої системи управління пізнавальною діяльністю і заохочення її результатів, що перетворюють ситуативну впевненість на стійку;

• підтримка ініціативи дитини у всіх видах діяльності;

• гуманізація сфери спілкування з однолітками та дорослими;

• надання можливості реалізації фізичної активності;

• навчання прийомів самостійної роботи, способів самоконтролю, дослідницької діяльності, уміння отримувати знання самостійно;

• відсутність демонстрації виняткових досягнень, що спричиняють ревність і неприйняття однокласниками, але разом із цим і неприпустимість зменшення досягнень та унікальних здібностей [22].

Для якісної організації роботи з обдарованими дітьми використовують відповідні стратегії навчання:

1) стратегії навчання, що спираються на кількісні зміни:

• прискорення — передбачає збільшення темпу освоєння навчального матеріалу;

• інтенсифікація — передбачає зміну не темпу засвоєння, а збільшення обсягу навчального матеріалу, тобто підвищення інтенсивності навчання;

2) стратегії, що спираються на якісні зміни:

• диференціація навчання;

• індивідуалізація навчання [25].

Яку б стратегію навчання не використовували педагоги, необхідно пам'ятати про формування соціальної компетентності: здатність розбиратися в людях і встановлювати з ними ефективні ділові взаємини. Емпатія (здатність до співпереживання), активна, ділова доброта — одні з головних ознак соціальної компетентності.

Працюючи з обдарованими дітьми, необхідно використовувати активні й інтерактивні методи, методи активізації творчого пошуку, до яких належать: метод евристичної загадки, метод «мозкової атаки», метод синектики, метод гірлянд запитань, метод ліквідації безвихідних ситуацій тощо.

В обдарованої дитини існує багато проблем, які можна розв'язати, якщо оточення поважатиме дитину як особисту цінність, якщо дитина відчуватиме, що її не тільки доброзичливо сприймають, але й люблять та намагаються зрозуміти, підтримують у процесі пізнання, не обмежуючи при цьому її внутрішню свободу. Саме тоді слово «неможливо» можна замінити на — «чудово», «цікаво», «дивовижно», «захоплююче» [15].

Таким чином, умовами успішної роботи з обдарованими дітьми є:

• осмислення значення розвитку обдарованих дітей кожним членом колективу і посилення у зв'язку з цим уваги до проблеми формування позитивної мотивації навчання;

• визнання того, що система роботи з обдарованими учнями — один із пріоритетних напрямів роботи школи;

• постійне вдосконалення науково-методичної роботи та освітнього процесу загальноосвітніх навчальних закладів;

• залучення до роботи з обдарованими учнями вчителів, які мають високі професійні та особистісні якості, а також «вузьких» спеціалістів (психологів, керівників предметних гуртків тощо) [8].

### 1.4.1 Форми і методи роботи з обдарованими дітьми

Найважливішою проблемою нашого суспільства є збереження і розвиток обдарованості. Перед учителями постає основне завдання: сприяти розвитку кожної дитини. Тому важливо встановити рівень здібностей та їх різноманітність у наших дітей, але не менш важливо вміти правильно здійснювати їхній розвиток [6].

В обдарованих дітей чітко виявляється потреба в дослідницькій і пошуковій активності — це одна з умов, що дозволяє учневі зануритися в творчий процес навчання і виховує в ньому жагу до знань, прагнення до відкриттів, активної розумової праці та самопізнання [8].

У навчальному процесі розвиток обдарованої дитини слід розглядати як розвиток її внутрішнього діяльнісного потенціалу, здатності бути автором, активним творцем свого життя, уміти ставити мету, шукати способи її досягнення, бути здатним вільно обрати і відповідати за нього, максимально використовувати свої здібності.

Саме тому методи і форми роботи вчителя повинні сприяти розв'язанню поставлених завдань. Для цієї категорії дітей застосовуються такі методи роботи:

• дослідницький;

• частково-пошуковий;

• проблемний;

• проектний [22].

Форми роботи:

1. Класно-урочна (робота в парах, у малих групах), різнорівневі завдання, творчі завдання.

2. Консультації за проблемою, що виникла.

3. Наукові гуртки, факультативні заняття.

4. Дискусії.

5. Ігри.

Ефективними є і такі форми роботи, як:

• предметні олімпіади;

• інтелектуальні марафони;

• різні конкурси і вікторини;

• словесні ігри і забави;

• проекти з різної тематики;

• рольові ігри;

• індивідуальні творчі завдання тощо.

Ці методи і форми дають можливість обдарованим дітям обрати відповідні форми і види творчої діяльності [8].

### 1.4.2 Поради педагогічному працівникові

Учителеві для роботи з обдарованими дітьми необхідно мати певні якості:

1. Учитель не повинен вихваляти кращого учня. Не потрібно вирізняти обдаровану дитину за індивідуальні успіхи, краще заохотити спільні заняття з іншими дітьми.

2. Учителеві не варто приділяти багато уваги навчанню з елементами змагання. Обдарована дитина частіше від решти дітей ставатиме переможцем, що може викликати неприязнь до неї інших учнів.

3. Учитель не повинен робити з обдарованої дитини «вундеркінда». Недоречне акцентування на її винятковості спричиняє роздратованість, ревнощі друзів, однокласників. Інша крайність — зловмисне прилюдне приниження унікальних здібностей — звісно, неприпустима.

4. Учителеві необхідно пам'ятати, що здебільшого обдаровані діти погано сприймають суворо регламентовані заняття, що повторюються [8].

## 1.5 Особливості підготовки вчителів до роботи з обдарованими учнями

Підготовка вчителя до певного виду діяльності – це процес формування його професійної готовності, що містить:

- сумарну характеристику здобутих знань;
- компетенцію як загальну здатність, засновану на знаннях, досвіді, цінностях, нахилах, набутих у процесі навчання;
- готовність як вмотивоване прагнення виконати свій обов’язок учителя [13].

Основою професійної готовності вчителя є його професійна компетентність, істотними ознаками якої є сукупність критеріїв, що визначаються комбінацією структурних складових: система знань, їх глибина, широкий діапазон; постійне прагнення оновлювати свої знання, інтерес до наукових досліджень, гнучкість мислення, комунікабельність, культура, діалектичний світогляд, володіння методами аналізу, синтезу, порівняння; високорозвинені духовні та моральні орієнтації *(табл. 1.1)* [10].

Застосовуючи термін «професійна компетентність педагога» необхідно розуміти єдність теоретичної та практичної готовності до здійснення педагогічної діяльності. Професійно компетентним є той педагог, який на достатньому рівні здійснює педагогічну діяльність, педагогічне спілкування, досягає високих результатів у навчанні й вихованні учнів. Важливу роль в особистісній характеристиці педагога відіграє професійна педагогічна самосвідомість.

*Таблиця 1.1*

**Знання та вміння, необхідні для забезпечення високого рівня професійно-педагогічної підготовки вчителя до роботи з обдарованими учнями**

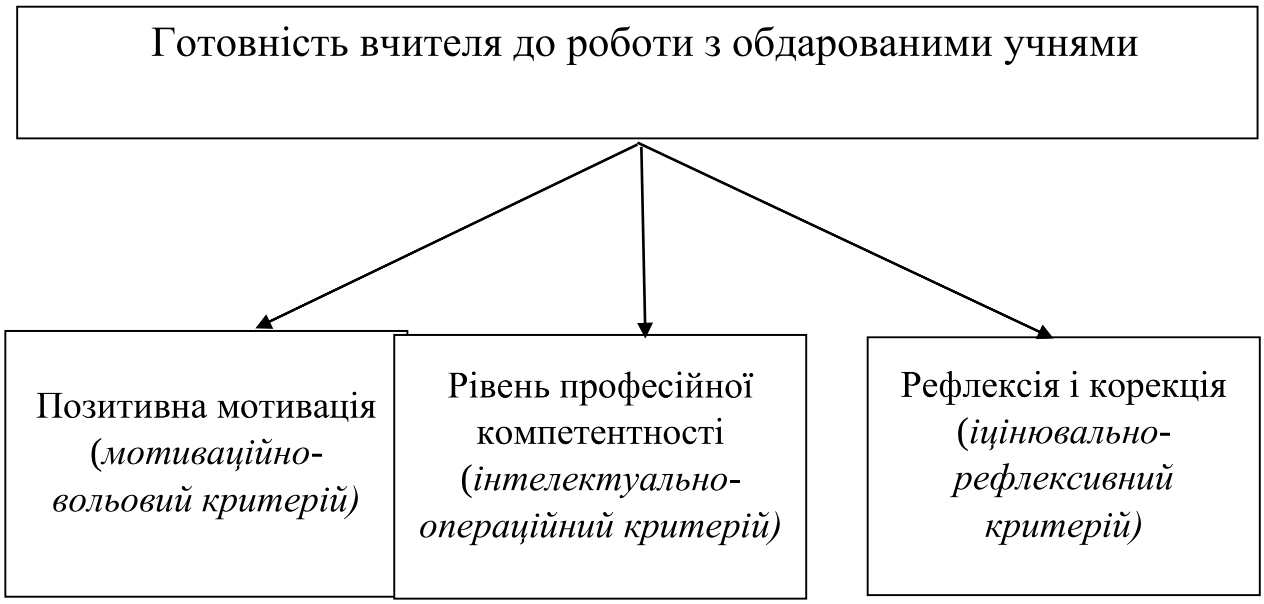
| **Загальнонаукові та фахові** | **Фізіологічні та психологічні** | **Педагогічні та методичні** |
|---|---|---|
| Теорія відповідного предмету, основи суміжних предметів та вміння використовувати знання у процесі роботи з розвитку здібностей і обдарувань учнів | Вікові особливості фізичного та психічного розвитку школяра, психологія навчання й виховання. Поняття і види обдарованості та здібностей | Сутність педагогічного процесу; теорія і методика навчання та виховання школярів, наукова організація праці вчителя і учня |

[10, 17-18]

Модернізація змісту освіти передбачає формування рефлексії як необхідної передумови повноцінного навчання, саморозвитку, самореалізації. Рефлексія допомагає сформулювати (за потреби – скорегувати) мету діяльності, обрати раціональні способи досягнення цієї мети, а також спрогнозувати результати. Якщо органи чуття є для людини джерелом зовнішнього досвіду, то рефлексія – це джерело досвіду, спосіб самопізнання, необхідний інструмент мислення [1].

Готовність учителя до роботи з обдарованими учнями виявляється у високому рівні професійно-педагогічної компетентності до даного виду діяльності, що базується на сукупності спеціальних знань, умінь та стійкому вмотивованому бажанні здійснювати цю діяльність. Зважаючи на вище сказане, визначено такі компоненти готовності вчителя до роботи з обдарованими учнями: позитивна мотивація, достатній рівень професійно-педагогічної компетентності, рефлексія і корекція.

Оцінка реальних рівнів сформованості готовності вчителів до роботи з обдарованими учнями має здійснюватися на основі визначених структурних компонентів готовності, критеріїв (мотиваційно-вольовий, інтелектуально-операційний, оцінювально-рефлексивний) та змістовних характеристиках зазначених компонентів (показників) готовності *(Див. рис. 1)* [10].




[10].

Рис. 1.1 Структурні компоненти готовності вчителів до роботи з обдарованими учнями

Мотиваційно-вольовий критерій характеризується професійною спрямованістю та наявністю особистісних якостей, що визначають придатність спеціаліста здійснювати роботу з розвитку здібностей та обдарувань учнів (усвідомлення професійних цілей, ціннісних орієнтацій, принципів, наявність інтересу до навчально-виховної роботи у сучасній школі; любов до дітей, гуманізм, демократизм тощо).

Інтелектуально-операційний критерій відображає наявність певного рівня професійної компетентності (необхідних загальних гуманітарних і спеціальних знань з теорії та методики навчально-виховної роботи; професійних умінь, необхідних для ефективної реалізації діагностичної, прогностичної, конструктивної, формувальної, комунікативної, аналітичної функцій за основними напрямами роботи:

1) створення умов розвитку особистості в шкільному колективі;

2) індивідуальна корекційна робота з обдарованими учнями;

3) взаємодія з іншими учасниками навчально-виховного процесу для реалізації цілей та завдань діяльності [13].

Оцінювально-рефлексивний критерій готовності характеризує вчителя з точки зору його вміння аналізувати результати своєї діяльності, усвідомлення ним власного рівня професійної підготовки до реалізації мети і завдань роботи, а також усвідомлення потреби в професійній самоосвіті, самовдосконаленні.

Співвідношення професійних якостей, знань та вмінь, що відповідають зазначеним критеріям і показникам, міра їх усвідомлення, виразності, усталеності й активності прояву мають складати якісну характеристику рівня готовності вчителя до роботи з обдарованими учнями [1].

Дослідження готовності здійснюється на основі комплексу різноманітних методик:

• безпосередньо, через опитування вчителів;

• опосередковано, через її прояви в окремих аспектах методичної та практичної діяльності вчителів, засобами аналізу (результативності спеціальної підготовки, активності й успішності участі вчителів у науково-дослідній, методичній роботі навчального закладу, рівня результативності навчання і виховання учнів; суб'єктної позиції вчителів в освітньому процесі) [1].

Готовність учителя до роботи з обдарованими учнями має бути результатом його цілеспрямованої системної підготовки. З точки зору, згідно з якою зміст підготовки до роботи з обдарованими учнями є складовим елементом змісту підвищення кваліфікації вчителя, що містить теоретичну й практичну інформацію, необхідну для здійснення відповідних професійних функцій .

Зміст навчання – це педагогічно обумовлена, логічно впорядкована й зафіксована у навчальній документації (програма, підручник) наукова інформація про матеріал, який потрібно засвоїти. Зміст навчання –це рівень розвитку особистості, предметної та соціальної компетентності людини, який формується у процесі виконання навчально-пізнавальної діяльності й може бути зафіксований як її результат на даний момент часу. Саме тому у процесі проектування змісту навчального матеріалу повинен враховуватися принцип єдності змістової та процесуальної сторони навчання [10].

Практична реалізація змісту навчання відбувається у реальному педагогічному процесі, пов'язаному з вибором системи методів, форм і засобів навчання. Зважаючи на це, можна виходити не з окремого елементу навчання, а з цілісної моделі професійної діяльності [1]. Під час розробки системи підготовки вчителів до роботи з обдарованими учнями можна використовувати таку структуру педагогічної технології:

• крупні технологічні структури – структурні блоки освітнього процесу, що послідовно реалізуються (мета – зміст – форми роботи – діагностика – зворотний зв'язок – корекція);

• технологічні мікроструктури – «організаційний каркас» роботи, що визначає зміну організаційних форм і методів впливу, спрямовуючих процес до досягнення поставленої мети;

• технологічні системні мікроутворення – цілеспрямований підбір взаємопов'язаних послідовно взаємодіючих форм навчання, які формують міцні системні знання, уміння та навички, грані особистості, якості й риси характеру;

• технологічні ланки – окремі частини крупних технологічних структур, що набувають самостійного педагогічного значення;

• методико-технологічні ланки – сума взаємопов'язаних, послідовно задіяних методів, способів, прийомів, завдань, що забезпечують обробку й закріплення навчальних умінь, трудових дій;

• технологічні засоби – апаратурне забезпечення педагогічної технології, що також є самостійною техніко-технологічною ланкою [13].

З процесом відбору змісту навчання безпосередньо пов'язана мотивація навчальної та професійної діяльності – сукупна система мотивів, що відповідають за спонукання й діяльність. Процес мотивації розпочинається з виникнення потреб особистості. За умови заданої ззовні мети вона накладається на вже існуючу систему потреб, тому варто прагнути, щоб учителі прийняли мету як власну, що відповідає їхнім установкам і цінностям. Розвитку мотивації вчителів під час їх підготовки до роботи з обдарованими учнями сприяє створення умов:

• усвідомлення теоретичної та практичної значущості знань;

• емоційна форма викладу навчального матеріалу;

• показ «перспективних ліній» у розвитку наукових понять;

• професійна спрямованість навчальної діяльності;

• вибір завдань, що створюють проблемні ситуації в структурі навчальної діяльності;

• допитливість і «пізнавальний психологічний клімат» у навчальній групі, прагнення самоаналізу, самооцінювання, самовдосконалення [9].

Підготовка учителів до нових видів діяльності свідчить про необхідність володіння технологіями педагогічного діагностування. Під педагогічною діагностикою вчені розуміють процес, що відповідає умовам оптимального виконання таких педагогічних завдань:

• встановлення характеру мотивації навчання особистості;

• визначення умов для саморозвитку й творчої самореалізації особистості;

• оцінювання рівня професійної компетентності й рівня розвитку професійної компетенції [8].

Невід'ємною складовою системи підготовки вчителів до роботи з обдарованими учнями є самостійна робота вчителя. Вона являє собою різноманітне, багатофункціональне явище та має не лише особистісне, але й суспільне значення. Самостійна робота – це діяльність, що організовується учителем, правильне планування змісту самостійної роботи; вибір засобів для реалізації цього змісту; швидке й правильне орієнтування у мінливій обстановці під час виконання самостійної роботи; використання механізму зворотного зв'язку [10, 14-15].

Важливими умовами підготовки вчителя до роботи з обдарованими учнями є рефлексія й корекція. У психолого-педагогічній літературі рефлексія характеризується як процес самопізнання людиною своїх внутрішніх психічних актів і станів (переживань, почуттів, думок), тобто здатність і вміння бачити себе, свої дії, стосунки з людьми, вивчати свій власний світ, розуміти себе. З іншого боку, рефлексія – це бачити й усвідомлювати те, як до тебе ставляться інші люди, як вони тебе розуміють [1]. Психологи виділяють у процесі рефлексії шість позицій, що характеризують взаємне відображення суб'єктів: суб'єкт, яким він є насправді; суб'єкт, яким він бачить самого себе; суб'єкт, яким він здається іншим, й ті ж три позиції, але з боку іншого суб'єкта.

Таким чином, рефлексія – це процес подвійного, дзеркального взаємовідображення суб'єктами один одного, змістом якого виступає відтворення їхніх особливостей. Найважливішою умовою саморозвитку вчителя є соціально-перцептивний вид рефлексії, пов'язаний із процесом пізнання педагогом тих, хто навчається, переосмисленням, переперевіркою власних уявлень, думок про учнів. Такий підхід під час підготовки учителів має дозволити корегувати подальшу роботу поетапно, цілеспрямовано, системно підготувати вчителя до роботи з обдарованими учнями [10].

Учитель повинен володіти знаннями та вміннями, необхідними для успішної, результативної роботи з обдарованими учнями:

• цілеспрямовано поєднувати різні види діяльності на уроці;

• правильно організовувати самостійну роботу учнів, раціонально використовувати завдання практичного й творчого рівнів;

• застосовувати диференційований та індивідуальний підхід до учнів;

• надавати учневі свободу вибору галузі застосування своїх здібностей, методів досягнення мети;

• заохочувати роботу над проектами, запропонованими учнями;

• надавати авторитетну допомогу учням, які висловлюють несхожу на інші точку зору [32].

Зважаючи на потребу суспільства у розвитку творчих здібностей дітей, важливою є педагогічна орієнтація для створення умов їх творчої діяльності. Обдарована особистість сама собі допоможе, якщо вчитель підтримає її творчість. Саме тому вчитель має бути творчим, щоб навчальний процес був цікавим, різнобічним та результативним. З одного боку, учитель повинен мати особисте бажання розвивати в учнів творчі здібності, а з іншого – усвідомлювати, що до традиційного механізму підготовки й проведення уроку потрібно вносити суттєві зміни.

З цього погляду критеріями творчої педагогічної діяльності вчителя є [30]:

• розроблення інноваційних підходів до навчально-виховного процесу, модернізація змісту, форм, методів і засобів навчання й виховання з метою розвитку здібностей і обдарувань учнів;

• здійснення систематичного самоаналізу своєї роботи та професійної діяльності інших учителів з метою творчого узагальнення власного досвіду і досвіду своїх колег;

• вияв гнучкості під час вибору оптимальних методів і форм роботи з обдарованими учнями [30].

Учителі-практики добре знають, що на кожному уроці недоцільно давати завдання лише творчого характеру, але необхідно створити психологічний клімат, у якому діти прагнуть висловлювати будь-які відповіді, припущення, навіть помилкові. Важливою якістю є чуйність учителя до переживань та потреб дітей, адже лише такий учитель здатний допомогти їм упоратись з негативними емоціями.

Необхідно бути доброзичливим і терпимим до відповідей дитини, уміти приймати і спокійно обговорювати навіть такі варіанти рішень, які, на перший погляд, здаються абсурдними. Невиправні негативні наслідки може мати байдужість педагога до успіхів дітей. Значне завищення чи заниження вимог до дитини, необ’єктивність в оцінках також не можуть заохочувати до прояву творчих здібностей. Враховуючи особливості психіки обдарованих школярів, від педагога вимагається наявність певних психофізичних якостей. Найголовнішими серед них є міцне здоров’я, особлива витривалість нервово-психічної системи, уміння точно й коректно виражати свої почуття через жести, міміку [1].

Важливою якістю педагога є вміння залучати до процесу розвитку обдарованості батьків, координувати свої дії з ними, надавати допомогу в усвідомленні власних прагнень і потреб. Участь сім’ї є важливим елементом розвитку обдарованих дітей. У завдання вчителя входить здійснення пошуку ефективних шляхів спільної роботи сім’ї та школи. Учителі інколи відчувають певні проблеми у процесі спілкування з батьками обдарованих учнів, які часто самі є талановитими й неординарними [8].

Таким чином, учителі, що працюють з обдарованими дітьми, повинні навчитися знаходити контакт з батьками обдарованих дітей, застосовувати різні шляхи залучення батьків до процесу навчання та виховання їхніх дітей, уміти запропонувати свій спосіб оцінювання рівня розвитку здібностей та виявлення потреб дітей. Характерною якістю кваліфікованих педагогів є здатність навчити батьків умінню спостерігати за власними дітьми з метою сприяння їхньому розвитку.

Отже, для роботи з обдарованими дітьми від учителя вимагається:

• загальна професійна педагогічна підготовка, предметні, психолого-педагогічні, методичні знання та вміння;

• високий рівень професійної компетентності у контексті системи пошуку, підтримки та розвитку особистості;

• наявність професійно важливих особистісних якостей (необхідного рівня інтелектуального розвитку, адекватної самооцінки, творчого особистого світогляду, доброзичливості та об’єктивності під час оцінювання діяльності учнів, почуття гумору, неупередженості, впевненості, енергійності);

• особлива витривалість нервово-психічної системи, емоційна стабільність;

• уміння розпізнавати ознаки обдарованості в інтелектуальній діяльності, творчих проявах, художній майстерності, спілкуванні, руховій сфері та заохочувати своїх учнів;

• уміння залучати до виявлення та розвитку обдарованості учня батьків, однолітків, створюючи з їх допомогою сприятливе середовище для розвитку здібностей та обдарувань учня;

• почуття відповідальності за результати роботи з обдарованими учнями;

• безперервне підвищення рівня професійно-педагогічної компетентності для поліпшення результативності роботи з обдарованими учнями [10, 15-16].

# РОЗДІЛ 2
# НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТЬ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ РОБОТИ З ОБДАРОВАНИМИ УЧНЯМИ 5-6 КЛАСІВ

## 2.1 Програма факультативного курсу «Математичний калейдоскоп» для учнів 5-6 класів

*Програма затверджена Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України*

Автор: Гартфіль О. Р., вчитель математики Макарівського НВК «Загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – природничо-математичний ліцей» [21].

*Пояснювальна записка*

Орієнтація навчально-виховного процесу на розвиток здібностей дитини потребує вдосконалення форм роботи з учнями, які цікавляться математикою. З цією метою слід ширше використовувати варіативний компонент навчального плану. Одним з його компонентів в математиці може бути запропонований курс «Математичний калейдоскоп».

*Мета і основи завдання курсу:*

1) Сформувати стійкий інтерес учнів до математики;
2) Виявити і розвинути математичні здібності учнів;
3) Формувати логіку та інтуїцію учнів, їх просторову уяву;
4) Розширити і поглибити знання з вивченого програмованого матеріалу.

*Структура програми*

Вивчення курсу розраховано на 70 годин (35 годин у 5 класі, 35 годин у 6 класі). У разі вивчення курсу протягом двох років (5-6 класи) тижневе навантаження становить 1 годину.

Програма подана у табличній формі, що містить: розподіл навчального часу, зміст навчання та вимоги до навчальних досягнень учнів, а також орієнтовне календарно-тематичне планування.

Зміст навчального матеріалу структурований за темами з визначенням кількості годин на їх вивчення. Програма містить такі теми: «Обчислювальний практикум», «Задачі на зважування й переливання», «Ігри», «Конструкції», «Дроби. Відсотки. Пропорції», «Модуль», «Елементи теорії множин», «Методи розв’язування нестандартних задач» ( 6 клас). Деякі теми програми курсу органічно пов’язані зі змістом навчального матеріалу шкільного курсу математики, а деякі мають самосійний характер.

Розподіл змісту і навчального часу в програмі є орієнтованим. Учителю надається право корегувати його залежно від конкретних навчальних ситуацій.

Особливості організації навчання

Організувати роботу учнів на заняттях можна в таких формах: заслуховування доповідей, підготовлених учнями; проведення колективних обговорень розв’язування задач, порівняння способів їх розв’язування; математичні змагання; узагальнення пошуку нових шляхів розв’язування задач. Потрібно навчити учнів висувати гіпотези, шукати шляхи їх доведення , за допомогою проблемних запитань створювати дискусії, формувати вміння робити висновки.

Розподіл навчального часу: *5 клас ( 35 годин)*

| № з/п | Тема | Кількість годин |
|---|---|---|
| 1 | Обчислювальний практикум | 9 |
| 2 | Задачі на зважування й переливання | 6 |
| 3 | Ігри | 8 |
| 4 | Конструкції | 5 |
| 5 | Логічні задачі | 7 |

**6 клас (35 годин)**

| № з/п | Тема | Кількість годин |
|---|---|---|
| 1 | Цифри і системи числення | 5 |
| 2 | Подільність чисел | 6 |
| 3 | Конструкції | 4 |
| 4 | Дроби. Відсотки. Пропорції | 7 |
| 5 | Модуль числа | 5 |
| 6 | Елементи теорії множин | 4 |
| 7 | Методи розв'язування нестандартних задач | 4 |

**Зміст навчального матеріалу та вимоги до навчальних досягнень учнів**

**5 клас**

| К-сть годин | Зміст навчального матеріалу | Навчальні досягнення учнів |
|---|---|---|
| 9 | **Тема 1. Обчислювальний практикум**<br>Магічні квадрати. Числові головоломки. Математичні ребуси. | Учень (учениця):<br>• *заповнює* «магічні» квадрати, в яких два із базових чисел задано по діагоналі (одне в центрі квадрата);<br>• *розгадує* числові головоломки і ребуси. |
| 6 | **Тема 2. Задачі на зважування й переливання**<br>Терези без гирьок. Терези з гирьками. Переливання. | Учень (учениця):<br>• *розв'язує* задачі на зважування й переливання. |
| 8 | **Тема 3. Ігри** | Учень (учениця): |

| | | |
|---|---|---|
| | Відгадування задуманого числа. Математичні фокуси. Симетрія. Стратегії. | • *відгадує* закон, за яким відбувається гра;<br>• *створює* алгоритм гри на відгадування чисел;<br>• *знаходить* виграшну стратегію в грі;<br>• *відгадує* математичні закономірності математичних фокусів. |
| 5 | **Тема 4. Конструкції**<br>Головоломки із сірниками. Задачі на розрізання фігур | Учень (учениця):<br>• *розв'язує* геометричні головоломки та задачі на розрізання. |
| 7 | **Тема 5. Логічні задачі**<br>Основні поняття логіки. Висловлювання. Логічні запитання.<br>Логічні таблиці. Задачі, що розв'язуються з кінця. Софізми. | Учень (учениця):<br>• *знає* основні поняття логіки;<br>• *має уявлення* про софізми, *розв'язує* нескладні софізми;<br>• *розв'язує* логічні задачі за допомогою таблиць. |

**6 клас**

| **К-сть годин** | **Зміст навчального матеріалу** | **Навчальні досягнення учнів** |
|---|---|---|
| 5 | **Тема 1. Цифри і системи числення**<br>Поняття системи числення. Види систем числення. Запис чисел у десятковій системі числення. Запис чисел у | Учень (учениця):<br>• *уміє* подавати числа за допомогою числа 10 у вигляді $\alpha_n 10^n + \alpha_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + \alpha_1 10 + \alpha_0 10^0$, де кожен з коефіцієнтів $\alpha_{n,} \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$, $\alpha_0$ є однією з десяти цифр |

| | | |
|---|---|---|
| | позиційних системах числення, відмінних від десяткової. Арифметичні дії у різних позиційних системах числення. Цифрові задачі. | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, причому $\alpha_n \neq 0$; подати числа за допомогою степенів числа 2 у вигляді $\alpha_n 2^n + \alpha_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + \alpha_1 2 + \alpha_0 2^0$, де кожен з коефіцієнтів є однією з двох цифр 0 або 1, причому $\alpha_n \neq 0$;<br>• *переводить* число з десяткової системи числення в двійкову і навпаки;<br>• *застосовує* знання про системи числення до розв'язування задач. |
| 6 | **Тема 2. Подільність чисел**<br>Ознаки подільності на 4 і 25, 8 і 125, 7 (11 чи 13). Ознаки подільності на складені числа. Властивості подільності. Прості числа. НСК і НСД. Різні способи знаходження НСК і НСД. | Учень (учениця):<br>• *знає* ознаки подільності на 4 і 25, 8 і 125,7 (11 чи 13), на складені числа; властивості подільності; різні способи знаходження НСК і НСД;<br>• *уміє* застосовувати ознаки подільності , властивості подільності, алгоритм Евкліда для знаходження НСД до розв'язування задач підвищеної складності. |
| 4 | **Тема 3. Конструкції**<br>Головоломки із сірниками. Розрізання.<br>Розфарбовування.<br>Конструювання | Учень (учениця):<br>• *змінює* структуру фігури за допомогою перекладання сірників та розрізання фігур; |

| | | |
|---|---|---|
| | | • *розв'язує* геометричні головоломки із сірниками, задачі на розрізання та розфарбовування. |
| 7 | **Тема 4. Дроби. Відсотки. Пропорції**<br>Три типи задач на дроби. Розв'язування задач за допомогою зображення дробів на відрізку. стародавні задачі, пов'язані з поняттям дробу. Три типи задач на відсотки. Задачі на відсотки, пов'язані зі збільшенням (зменшенням) числа на кілька відсотків. Розв'язування задач за допомогою пропорцій. Концентрація. Задачі на розчини, суміші і сплави. | Учень (учениця):<br>• *розв'язує* задачі на дроби за допомогою рівнянь;<br>• *має уявлення* про застосування відсотків у повсякденному житті;<br>• *розв'язує* задачі на розчини, суміші і плави; задачі на відсотки, пов'язані з і збільшенням (зменшенням) ціни товару на кілька відсотків. |
| 5 | **Тема 5. Модуль числа**<br>Поняття модуля числа. Геометричний зміст модуля. Властивості модуля. Розв'язування рівнянь виду \|x\|= α,<br>\| α x + b\|=c. Геометрична інтерпретація розв'язання рівнянь з модулем. | Учень (учениця):<br>• *уміє* знаходити модуль числа; спрощувати числові вирази, що містять модулі;<br>• *розв'язує* найпростіші рівняння з модулем з використанням геометричного змісту модуля. |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | **Тема 6. Елементи теорії множин**<br>Поняття множини та елемента множини. Порожня множина. Способи задання множин. Підмножина. Основні операції над множинами (переріз, об'єднання, різниця). Зображення відношень між множинами за допомогою кругів Ейлера – Венна. | Учень (учениця):<br>• *має уявлення* про основні елементи теорії множин;<br>• *уміє* виконувати основні операції над множинами; зображувати відношення між множинами за допомогою кругів Ейлера – Венна. |
| 4 | **Тема 7. Методи розв'язування нестандартних задач**<br>Задачі на застосування принципу Діріхле. Розв'язування задач за допомогою кругів Ейлера – Венна. | Учень (учениця):<br>• *уміє* використовувати круги Ейлера – Венна , принцип Діріхле до розв'язування задач. |

## ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ КУРСУ 5 КЛАС

| **Номер заняття** | **Дата** | **Тема та зміст заняття** |
|---|---|---|
| **Тема 1. Обчислювальний практикум (9 годин)** | | |
| 1-3 | | Магічні квадрати |
| 4-6 | | Числові головоломки |

| | | |
|---|---|---|
| 7-9 | | Математичні ребуси |
| **Тема 2. Задачі на зважування й переливання (6 годин)** | | |
| 10-11 | | Терези без гирьок |
| 12-13 | | Терези з гирьками |
| 14-15 | | Переливання |
| **Тема 3. Ігри (8 годин)** | | |
| 16-17 | | Відгадування задуманого числа |
| 18-19 | | Математичні фокуси |
| 20-21 | | Симетрія |
| 22-23 | | Стратегії |
| **Тема 4. Конструкції (5 годин)** | | |
| 24-25 | | Головоломки із сірниками |
| 26-28 | | Задачі на розрізання фігур |
| **Тема 5. Логічні задачі (7 годин)** | | |
| 29 | | Основні поняття логіки. Висловлювання |
| 30-31 | | Логічні запитання.  Логічні таблиці |
| 32-33 | | Задачі, що розв'язуються з кінця |
| 34-35 | | Софізми |

**6 клас**

| **Номер заняття** | **Дата** | **Тема та зміст заняття** |
|---|---|---|
| **Тема 1. Цифри і системи числення ( 5 годин)** | | |
| 1 | | Поняття системи числення. Види систем числення. Запис чисел у десятковій системі числення |
| 2 | | Запис чисел у позиційних системах числення, відмінних від десяткової. Арифметичні дії у різних позиційних системах числення |
| 3-5 | | Цифрові задачі |

| | | |
|---|---|---|
| **Тема 2. Подільність чисел (6 годин)** | | |
| 6—7 | | Ознаки подільності на 4 і 25, 8 і 125, 7 (11 чи 13) |
| 8-9 | | Ознаки подільності на складені числа. Властивості подільності |
| 10-11 | | Прості числа. НСК і НСД. Різні способи знаходження НСК і НСД |
| **Тема 3. Конструкції ( 4 години)** | | |
| 12 | | Головоломки із сірниками |
| 13 | | Розрізання |
| 14 | | Розфарбовування |
| 15 | | Конструювання |
| **Тема 4. Дроби. Відсотки. Пропорції ( 7 годин)** | | |
| 16 | | Три типи задач на дроби |
| 17 | | Розв'язування задач за допомогою зображення дробів на відрізку. Стародавні задачі, пов'язані з поняттям дробу |
| 18-19 | | Три типи задач на відсотки. Задачі на відсотки, пов'язані зі збільшенням (зменшенням) числа на кілька відсотків |
| 20 | | Розв'язування задач за допомогою пропорцій |
| 21-22 | | Концентрація. Задачі на розчини, суміші і сплави |
| **Тема 5. Модуль числа (5 годин)** | | |
| 23-24 | | Поняття модуля числа. Геометричний зміст модуля. Властивості модуля |
| 25-27 | | Розв'язування рівнянь виду $\|x\|= \alpha$, $\| \alpha x + b\|=c$. Геометрична інтерпретація розв'язання рівнянь з модулем |
| **Тема 6. Елементи теорії множин ( 4 години)** | | |

| | | |
|---|---|---|
| 28-29 | | Поняття множини та елемента множини. Порожня множина. Способи задання множин. Підмножина. Основні операції над множинами (переріз, об'єднання, різниця) |
| 30-31 | | Зображення відношень між множинами за допомогою кругів Ейлера – Венна |
| **Тема 7. Методи розв'язування нестандартних задач (4 години)** | | |
| 32-33 | | Задачі на застосування принципу Діріхле |
| 34-35 | | Розв'язування задач за допомогою кругів Ейлера – Венна |

[21, 15-22]

## 2.2 Зміст навчально-методичного матеріалу факультативного курсу з математики для 5 класу

***Обчислювальний практикум***

*Методика розв'язування магічних квадратів*

Питання про активність учнів у процесі навчання є корінним питанням методики викладання математики. Викладання повинно бути організоване так, щоб використовувані методи навчання максимально сприяли пробудженню в учнів інтересу до занять і активізували їхню пізнавальну діяльність.

У свою чергу, активність та інтерес до занять мають бути використані як засіб засвоєння учнями певної суми знань, умінь і навичок, а також як шлях до досягнення загального математичного розвитку учнів.

Часто доводиться помічати, що на уроках математики в 5–6 класах учні неохоче, без цікавості розв'язують вправи на всі дії над цілими або дробовими числами. Одним із засобів активізації мислення учнів при вивченні математики є розв'язування цікавих завдань за їхнім змістом. Це завдання, зокрема, може бути здійснене шляхом заповнення порожніх клітинок, магічних квадратів тощо [7].

Наведемо конкретні приклади.

**Приклад 1.** Розгляньте квадрат на рис. 2.1 а). Визначивши закономірність утворення чисел у квадраті, заповніть за тією самою закономірністю числами порожні клітинки квадратів, зображених на рис. 2.1 б)–г). Чим цікавий цей квадрат?

Троє учнів, які першими виконають завдання, заповнюють порожні клітинки квадратів, нарисованих на дошці (рис.2.1).

Закономірність розміщення чисел у кожному квадраті на рис. 2.1 а) полягає в тому, що сума чисел у кожному рядку, стовпчику і по діагоналях дорівнює одному і тому самому числу 150.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 30 | 80 | 80 | | 60 | 40 | | 20 | 20 | | 40 |
| 90 | 50 | 10 | | 50 | | | | 70 | | 50 | |
| 20 | 70 | 60 | 40 | | 20 | | | 60 | 60 | | |

а) б) в) г)

Рис. 2.1

Заповнені квадрати ( б, в, г) матимуть такий вигляд (Рис.2.2):

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 10 | 60 | 40 | 90 | 20 | 20 | 90 | 40 |
| 30 | 50 | 70 | 30 | 50 | 70 | 70 | 50 | 30 |
| 40 | 90 | 20 | 80 | 10 | 60 | 60 | 10 | 80 |

а) б) в)

Рис. 2.2

**Приклад 2.** Заповніть порожні клітинки квадратів (рис. 2.3) так, щоб сума чисел у кожному рядку, кожному стовпчику і по діагоналях дорівнювала одному і тому самому числу.

| | | |
|---|---|---|
| 30 | | |
| | 60 | |
| | 40 | 90 |

а)

| | | |
|---|---|---|
| 30 | | |
| 100 | | 20 |
| 50 | | |

б)

| | | |
|---|---|---|
| | 80 | |
| | 60 | |
| | 40 | 90 |

в)

Рис. 2.3

Троє учнів, які першими заповнили клітинки квадратів, заповнюють порожні клітинки квадратів нарисованих на дошці (рис. 2.4).

| | | |
|---|---|---|
| 30 | 80 | 70 |
| 100 | 60 | 20 |
| 50 | 40 | 90 |

а)

| | | |
|---|---|---|
| 30 | 80 | 70 |
| 100 | 60 | 20 |
| 50 | 40 | 90 |

б)

| | | |
|---|---|---|
| 30 | 80 | 70 |
| 100 | 60 | 20 |
| 50 | 40 | 90 |

в)

Рис. 2.4

Такі вправи, безумовно, зацікавлять учнів, і вони захочуть дізнатися яка природа цих чисел. Які числа в сумі по рядках, стовпчиках і діагоналях дають один і той самий результат?

Щоб учні самі могли здогадатися, як побудований такий ряд чисел, даємо задачі для самостійного опрацювання [7].

*Задачі для самостійного опрацювання*

**1.** Заповни порожні клітинки квадратів (рис. 2.5) так, щоб сума чисел у кожному рядку, кожному стовпчику і по кожній із діагоналей дорівнювала одному й тому самому числу. Випиши числа з кожного квадрата у порядку зростання. Що можна сказати про послідовність дев’яти чисел, записаних у квадратах?

| | | |
|---|---|---|
| 110 | | 150 |
| | 140 | |
| 130 | | |

а)

| | | |
|---|---|---|
| 130 | | |
| | 140 | |
| 110 | | 150 |

б)

| | | |
|---|---|---|
| | | 150 |
| | | 100 |
| | 120 | 170 |

в)

| | | |
|---|---|---|
| 110 | 160 | 150 |
| 180 | 140 | 100 |
| 130 | 120 | 170 |

г)

Рис. 2.5

Ті учні, які заповнили числами всі три квадрати, виписують із квадрата всі числа у порядку зростання їхньої величини і роблять відповідний висновок: кожне наступне число більше від попереднього на 10 (100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180). Квадрат, заповнений такими числами, матиме вигляд ( рис. 2.5, г).

**2**. Заповни порожні клітинки квадратів (рис.2.6) так, щоб сума чисел у кожному рядку, стовпчику і по діагоналях становила 255. Знайди суму чисел, розміщених у кожному квадраті.

| | | |
|---|---|---|
| 40 | | 100 |
| | 85 | |
| | | |

а)

| | | |
|---|---|---|
| 70 | | |
| | | |
| 130 | | 100 |

б)

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 85 | 115 |
| | | 40 |

в)

[7]

*Методика розв'язування числових головоломок*

Математичні ігри та головоломки дуже популярні, як і всі ігри. І далеко не завжди найскладніша гра є найцікавішою. Часто мільйони людей з незгасним інтересом грають у найпростіші ігри, і саме ці ігри викликають інтерес та входять в історію математики, прославляючи своїх творців.

Найбільш наближеними до математики є головоломки, які утворилося з колись існуючих (а деякі з ще існуючих) ігор. Головоломка являє собою завдання, для розв’язування якого, як правило, потрібні вміння міркувати за знаходити закономірності, а не наявність спеціальних знань. Головоломки вимагають кмітливості і винахідливості. Кожна шарада, кожна запропонована загадка, кожна нова задача, яку доводиться розв’язувати в головоломках, породжують цілий ланцюг всіляких розв’язувань і запитань. До таких головоломок відносять числові головоломки.

Під числовою головоломкою розуміють головоломку, умова якої подана у вигляді числового виразу (рівності, нерівності тощо) або вимога передбачає виконання дій з числами.

Числові головоломки поділяють на наступні види.

1. Головоломки на знаходження числа або чисел.

2. Головоломки на виконання дій.

3. Головоломки на встановлення закономірностей.

4. Цікаві головоломки.

Головоломки на знаходження числа або чисел. До головоломок даного виду відносять головоломки, що передбачають знаходження числа або чисел за сформульованими в умові задачі закономірностями. Наведемо приклад такої задачі.

**Приклад 1.** Розставте всі цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 так, щоб отримане число ділилось на всі числа від 2 до 18. [26].

**Відповідь.** 4876391520, 2438195760, 4753869120, 3785942160

Головоломки на виконання дій**.** Головоломки цього виду передбачають знаходження числа або чисел за арифметичними діями, запропонованими в умові задачі. Приклад такої задачі подано в задачах для самостійного опрацювання [5].

*Задачі для самостійного опрацювання*

**1**. Не змінюючи порядок розміщення цифр, розставте між ними знаки арифметичних дій і дужки так, щоб в результаті виконання цих дій в кожному ряду отримали б число 1. Якщо потрібно, то дві цифри, які стоять поряд, можна вважати двозначним числом.

1 2 3 □ 1;

1 2 3 4 □ 1;

1 2 3 4 5 □ 1;

1 2 3 4 5 6 □ 1;

1 2 3 4 5 6 7 □ 1;

1 2 3 4 5 6 7 8 □ 1;

1 2 3 4 5 6 7 8 9 □ 1.

**2.** Знайдіть закономірність і запишіть два наступних числа:

1, 3, 5, 7, …;

2, 4, 6, 8, …;

1, 3, 9, 27, …;

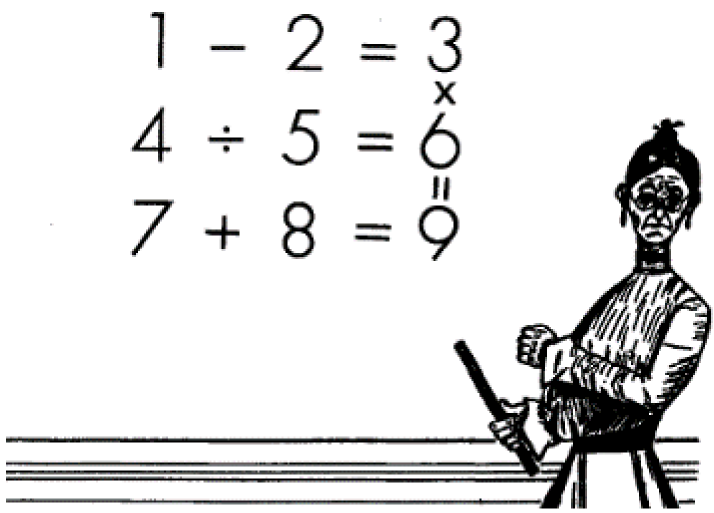
5, 12, 19, 26, …;

800, 400, 200, 100, …;

1, 1, 2, 3, 5, 8, ….

**3.** Вчителька міс Норт пропонує розв’язати задачу, і при цьому нелегку.

– Я написала дуже цікаве рівняння. Але, на жаль, розташувала цифри від 1 до 9 в неправильному порядку. Потрібно переставити їх так , щоб всі 4 приклади мали правильне розв’язання. Зауважимо, що маємо 3 горизонтальних рівняння і 1 вертикальне див. мал. 1.




Мал. 1 [26].

*Методика розв'язування математичних ребусів*

Ребус – це головоломка, в якій зашифроване слово. Це слово подається у вигляді малюнків з використанням букв і цифр, а також відповідних фігур і предметів. Ребус – одна з найцікавіших головоломок.

Існують певні правила розгадування ребусів:

1. Кома на початку слова означає, що потрібно забрати першу букву в слові, а кома в кінці – забрати останню букву. Дві коми – забираємо дві букви.
2. Закреслені цифри свідчать про те, що букви, які стоять на цьому місці – забираються.
3. Не закреслені цифри показують, що букви, які стоять на місці 2 і 3 потрібно поміняти місцями.
4. Якщо малюнок перевернутий, то загадане слово читається задом наперед. Назви всіх предметів читаються тільки в називному відмінку.
5. Стрілка або знак «Рівності» вказує на те, що одну літеру потрібно замінити іншою.

6. Букви, слова або картинки можуть зображатися всередині інших букв, над іншими буквами, поза ними. Тоді додаються прийменники в, над, на , під, за .
7. Цифри під картинкою вказують на те, що з даного слова потрібно взяти букви, які стоять під відповідними номерами і поставити їх в тому порядку, в якому стоять цифри [5].

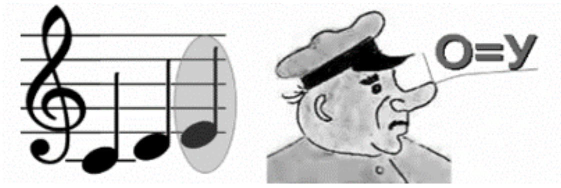
Розглянемо приклади ребусів:

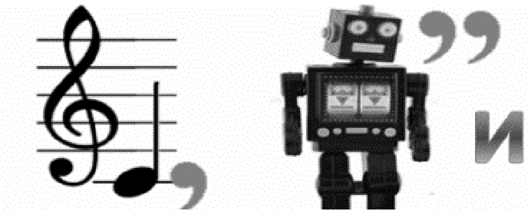
1. 

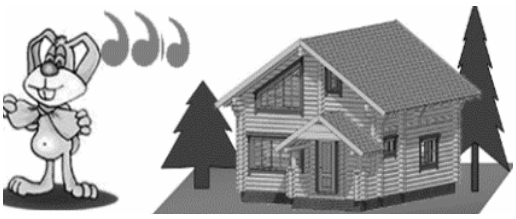
Відповідь: Ромб

На картинці зображена «Бомба». Замінюємо першу букву «Б» на букву «Р». Утворюється слово «Ромба». І кома вкінці означає забрати останню букву. Забираємо букву «а». Отримали слово «Ромб»

*Ребуси для самостійного опрацювання:*

1. 


2. 


3. 

4. 


### ***Задачі на зважування й переливання***

*<u>Методика розв'язування задач на зважування</u>*

Серед логічних задач певне місце займають задачі на зважування: за допомогою терезів без гир пропонується за певну кількість зважувань виявити один із предметів, що відрізняється від інших лише масою. Найпростіші з таких задач —ті, в яких відомо, більша маса шуканого предмета від маси інших, чи ні. Крім того, цей предмет —один серед інших (тобто всі інші мають однакову масу). Загальний спосіб розв'язування таких задач полягає в тому, що задану сукупність предметів ділять на три рівні частини. Коли її не можна поділити без залишку, то дві частини роблять рівними, а третю —близькою до кожної з них (трохи меншою). Під час такого розподілу за одне зважування виділяється частина, що містить шуканий предмет. Далі процес повторюється до тих пір, поки виділена третина складатиметься з одного предмета. Починати розв'язування таких задач необхідно з найпростішого випадку (три предмети) [27].

**Приклад 1.** Серед 3 монет 1 фальшива (легша від двох інших, однакових за масою). Як за допомогою одного зважування на терезах без гир виділити фальшиву монету?

**Розв'язання.** Покладемо на кожну шальку терезів по одній монеті, а третю відкладемо. Якщо шальки перебувають у рівновазі, то відкладена монета і є фальшивою. У протилежному випадку терези покажуть легшу, тобто фальшиву монету.

**Приклад 2.** Серед 9 однакових на вигляд монет 1, фальшива, легша за інші. Як її знайти за допомогою двох зважувань на терезах без гир?

**Розв'язання.** Поділимо 9 монет на 3 купки по 3 монети і порівняємо маси будь-яких двох купок. Купка, що містить фальшиву монету, буде легшою за іншу. Зважуючи купки так само, як у попередній задачі зважували окремі монети, за одне зважування знайдемо купку, в якій одна з трьох монет — фальшива. За допомогою другого зважування можна знайти фальшиву монету (див. задачу 1) [27].

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1.** Із 27 однакових на вигляд монет 1, фальшива, легша за інші. Скількома зважуваннями на терезах без гир можна виявити фальшиву монету?

**2.** У фальшивомонетника є 40 зовні однакових монет, серед яких 2 фальшиві. Вони легші, ніж інші, мають однакову масу. Як за допомогою 2 зважувань на терезах без гир відібрати 20 справжніх монет?

**3.** Як із 61 монети за 4 зважування виділити фальшиву (важчу за справжні)? У тому випадку, коли з умови задачі невідомо, яка маса «особливого» предмета (легший він чи важчий за інші), для його виділення необхідно, як правило, виконати додаткове зважування. Так, наприклад, у задачі про виділення з 9 монет 1 фальшивої (про яку невідомо, легша вона від справжніх чи важча) двома зважуваннями не обійтися, доведеться переважувати монети тричі.

Іноді такі задачі дещо видозмінюють, вводячи, наприклад, обмежену кількість гир певної маси.

**4.** Є 10 мішків із монетами. В одному з мішків усі монети фальшиві і мають масу 9 г кожна, а в інших мішках —монети по 10 г. Є терези і гирки, за допомогою яких можна врівноважити будь-який вантаж масою від 1 до 1000 г. Як за одне зважування встановити, в якому мішку всі монети фальшиві?

**5.** На столі лежать 10 перенумерованих капелюхів. У кожному капелюсі лежить по 10 золотих монет. В одному з капелюхів знаходяться фальшиві монети. Справжня монета має масу 10 г, а підроблена —лише 9 г. Є ваги зі шкалою в грамах. Як за допомогою лише одного зважування визначити, в якому з капелюхів знаходяться фальшиві монети? За допомогою даних ваг можна зважувати не більше, ніж 750 г [27].

*Методика розв'язування задач на переливання*

Задачі на «переливання» можна розв'язувати з кінця, зважаючи на те, що необхідно зробити і вважаючи, що шукане вже знайдено. Ходи розв'язання доцільно записувати до таблиці [27]. Наведемо приклади розв'язання.

**Приклад 1.** Як, маючи лише дві посудини місткістю 3 і 5 л, налити з водопровідного крана 4 л води?

**Розв'язання.** Почнемо з кінця, тобто пригадаємо, що ми маємо отримати. Необхідно, щоб у посудині місткістю 5 л було 4 л води.

Як цього досягти? Із посудини місткістю 5 л відлити 1 л. Як це зробити? Необхідно у посудині місткістю 3 л мати 2 л. Як їх отримати? З посудини місткістю 5 л відлити 3 л. Тепер подамо розв'язання у вигляді таблиці.

| Ходи | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 л | 5 | 2 | 2 | — | 5 | 4 |
| 3 л | — | 3 | — | 2 | 2 | 3 |

Пошук бажаного результату можна було розпочати з дії 3 + 1, що привело б до розв'язання, записаного у наступній таблиці.

| Ходи | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 л | — | 3 | 3 | 5 | — | 1 | 1 | 4 |
| 3 л | 3 | — | 3 | 1 | 1 | — | 3 | — |

З чисел 3 і 5 можна скласти вирази, які мають значення 4:

$5 - 3 + 5 - 3 = 4$ і $3 + 3 - 5 + 3 = 4$

Нескладно переконатися, що отримані вирази відповідають раніше знайденим розв'язанням.

*Задачі для самостійного розв'язання.*

**1.** Є дві посудини місткістю 8 і 5 л. Як за їх допомогою налити з водопровідного крана 7 л води?

**2.** Як, маючи лише дві посудини місткістю 5 і 7 л, налити з водопровідного крана 6 л води?

**3.** Є дві посудини місткістю 17 і 5 л. Як за допомогою цих посудин налити з водопровідного крана 13 л води?

**4.** Є три посудини:в одну вміщується 8 л, у другу —5 л, а в третю — 3 л. Перша посудина наповнена водою, а дві інші —порожні. Як за допомогою цих посудин відміряти 1 л води? Як відміряти 4 л води?

**5.** Одній пані у кав’ярні подали одну чашку кави і невеликий глечик молока. Після того, як пані випила півчашки кави, вона доповнила чашку молоком. Випивши третину отриманого напою, вона знову долила молока, щоб чашка була повною. І, нарешті, випивши шосту частину кави з молоком, востаннє долила молока, повністю наповнивши чашку, і випила все до останньої краплини. Чого більше випила пані —кави або молока?[27]

***Ігри***

*Методика розв’язування задач на відгадування задуманого числа*

**Приклад 1.** Нехай кожний задумає яке-небудь ціле число (краще невелике, щоб простіше було виконувати обчислення). Тепер помножити це число на п’ять, до добутку додати 4 та цю суму подвоїти. Тепер додати 99, вийшло трьохзначне число. Закреслити перші дві цифри, а залишити тільки останню. До того, що залишилось, додати 23, а потім розділити на п’ять. (Кожний отримав «шість».)

**Розв’язання.** Нехай $x -$ задумане число, то маємо: $(5x+4)\cdot 2 = 10x+8,$ додаємо 99 отримуємо: $10x+8+99=10x+107=10x+100+7=10(x+10)+7$, тобто, у цього числа 7 одиниць, це і є число, яке завжди буде залишатися після закреслення. Як бачимо, це число завжди постійне і не залежить від задуманого. Далі зовсім просто: $7+23=30,\ 30 \div 5 = 6.$

**Приклад 2.** Задумати число з двох цифр, додати 7, суму відняти від 110, до різниці додати 15, додати задумане число. Число, що отримали, розділити навпіл, від результату відняти 9, різницю помножити на три. Отримали 150.

**Розв'язання.** Нехай $x -$ задумане число, тоді після чотирьох дій отримали:

$$110-(x+7)+15+x=110-x-7+17+x=118.$$

Тому далі потрібно виконувати дії з постійним числом

$118 \div (118 \div 2-9)\cdot 3=150.$[5]

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1.** Щоб відгадати, скільки у вашого однокласника братів і скільки сестер, попросіть його зробити так. До кількості братів додати 3, число, що отримали помножити на 2. До результату додати кількість сестер та додати 5. За результатом можна сказати, скільки у вашого товариша братів і сестер. Як це можна зробити?

**2.** Задумайте число, менше від 100. Додати до нього 12, суму відняти від 130, до різниці додати 5, до результату додати задумане число. Від суми відняти 120, різницю помножити на 7, відняти 1, залишок поділити навпіл. Додати 30. Отримали 40. Чому це так?.

**3.** Задумати число (крім 0), подвоїти його, додати 1, помножити на 5. Відкинути всі цифри, крім останньої. Останню цифру помножити на неї ж, скласти цифри результату. Отримали 7. Який секрет фокуса?

**4.** Коли подорожні підійшли до річки, то попросили господаря човна переправити їх на інший берег. Для сплати за послуги подорожні пропонували золотий ланцюжок із 6 ланок. Човняр погодився, але за умови, що перевозити він буде всіх по одному, бо човен витримує тільки двох і сплачувати треба кожного рейсу по одній ланці, причому розпиляти можна не більше однієї ланки. Подорожні подумавши, погодились, як вони ділили ланцюжок?[5].

*Методика відгадування математичних фокусів*

Якщо математику сказати слово “фокус” — він спершу подумає про фокус еліпса, параболи чи гіперболи (це спеціальні точки, які визначають ці фігури).

Для всіх інших слова “математика” і “фокуси” в одному реченні можуть здаватись дивиною — але математику таки можна застосовувати у всіх галузях, в тому числі й в розвагах. Математичні фокуси дуже зручні для дитячого свята, наукового фестивалю, незвичайного уроку — можна обійтись без складного обладнання та спецефектів. Але сам фокусник повинен вміти добре рахувати в умі (жодні незвичайні здібності непотрібні) і знати кілька математичних правил та закономірностей — ознаки подільності, в тому числі на 7 та 11, кілька прийомів швидких розрахунків та нескладну табличку для визначення днів тижня.

Математика в цирку

Математичні фокуси можуть бути дуже видовищними — якщо на сцену виходить справжній майстер.

Фокус Девіда Копперфілда “Цирковий поїзд”

До великої дошки прикріплені картки з зображеннями різних вагонів циркового поїзда, які стоять на трьох сусідніх коліях. Фокусник запрошує одного з глядачів вибрати один з 4 вагонів — “Ведмеді”, “Гімнасти та фокусники”, “Леви”, або “Слони”. Рухатись в таблиці можна куди завгодно на 1 крок вліво, вправо, вгору чи вниз — але не можна рухатись по діагоналі.

| | | |
|---|---|---|
| Клоуни | Ведмеді | Шатер |
| Гімнасти та фокусники | Тепловоз | Слони |
| Службовий вагон | Леви | Буфет |

Крок 1 — зробіть 4 переміщення. Ви не можете опинитись в буфеті, тому приберіть цю картку.

Крок 2 — зробіть 5 переміщень. Ви не можете опинитись в вагоні слонів, тому приберіть цю картку.

Крок 3 — зробіть 2 переміщення. Ви не можете опинитись в вагоні левів, тому приберіть цю картку.

Крок 4 — зробіть 3 переміщення. Ви не можете опинитись в вагоні з шатром чи в службовому вагоні, тому приберіть ці картки.

Крок 5 — зробіть 3 переміщення. Багато з вас тільки що були в вагоні з ведмедями — тому приберіть цю картку.

Крок 6 — зробіть 1 переміщення.

Фокусник не бачив, де ви почали рух і куди ви переміщувались — але тепер він урочисто оголошує, що ви опинились у вагоні гімнастів та фокусників!

Арифметичні фокуси вміють показувати тварини які виступають в цирку чи розважають друзів господаря. Але це — лише вміння тварин правильно реагувати на непомітні для глядачів сигнали господаря чи дресирувальника. Собаки-математики гавкають певну кількість разів — до сигналу, коні — стукають копитом, дельфіни дістають м’яч з потрібним числом.

Естрадні майстри швидких розрахунків колись були дуже популярні — але зараз це вже не дуже цікаво — складно перевірити, що така людина не має у вусі непомітного навушника. Є багато прийомів, що дозволяють швидко рахувати усно — але поговоримо про справжні математичні фокуси. Тут немає жодного обману, ніяких ілюзій — лише знання математичних правил та закономірностей.

Різниця будь-якого натурального числа та суми його цифр завжди ділиться на 9

На цьому принципі базуються дуже багато математичних фокусів — для деяких крім математики потрібно також трохи тренування.

Даємо глядачу коробку з сірниками, відвертаємось чи закриваємо очі. Просимо глядача залишити в коробці якусь частину сірників (більше 10) і заховати інші. Сірники в коробці треба порахувати і знову викинути певну кількість сірників, що дорівнює сумі цифр тієї кількості сірників, яку глядач залишив в коробці.

Тепер просимо розсипати на столі ті сірники які залишились — і тепер ми зможемо їх миттєво “порахувати” — правда, до цього доведеться навчитись швидко на око визначати 9, 18, 27, 36, 45, 63 і так далі сірників (числа, кратні 9).

Якщо число ділиться на 9, сума його цифр також ділиться на 9

Закреслена цифра

Просимо глядача задумати число (наприклад, 4-значне — хоча обмеження кількості знаків залежить від вашої здатності рахувати в умі), помножити його на 9, закреслити в ньому одну цифру крім 0 чи 9 і назвати суму інших цифр. Знання того факту, що сума всіх цифр разом з викресленою має ділитись на 9, дозволить легко визначити викреслену цифру — вона дорівнюватиме різниці названого вам числа та найближчого більшого числа, яке ділиться на 9.

Наприклад, глядач задумав число 6283, порахував, що 6283´9=56547 і викреслив цифру 5. Сума цифр, що залишились, дорівнює 22, найближче більше число, яке ділиться на 9 — це 27, значить, викреслена цифра $27-22=5$.

Якщо б ми дозволили викреслювати цифри 0 чи 9 — сума цифр, що залишились, все одно ділилася б на 9, і ми не змогли б визначити, яка з цих цифр була викреслена. Фокус буде більш видовищним, якщо ми не будемо просити не викреслювати 0 та 9 — а заготуємо табличку з сотні 3-4 значних чисел на вибір — таких, щоб результати їхнього множення на 9 не містили цифр 0 та 9.

Цей фокус можна поєднати з попереднім — можна викреслювати цифри не з якогось числа, помноженого на 9, а з різниці числа та суми його цифр (ця різниця завжди ділиться на 9).

*Методика відгадування стратегій*

Спробуйте здогадатися, чому в цій грі виграє завжди перший гравець?

**Приклад 1.** Двоє по черзі розрізають папір у клітинку, розміром 40×30 клітинок. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розріз будь-якої частини вздовж лінії клітинок. Програє той, хто не зможе зробити хід.

**Розв'язання** . Після кожного ходу кількість частинок збільшується рівно на 1. Спочатку був один шматок. В кінці гри, коли не можна зробити жоден хід, папір розрізаний на клітинки 1x1. А їх – 120. Таким чином, гра буде тривати рівно 119 ходів. Останній, 119-й хід (також, як і всі інші ходи з непарними номерами), зробить перший гравець. Тому він в цій грі перемагає, причому незалежно від того, як він буде грати.

Для викладачів. Звичайно, це ігра-жарт, але вона дозволяє без особливого напруження подати школярам розуміння причини виграшу першого гравця.

Математична гра – це гра двох осіб (інколи трьох). Ходи гравці роблять по черзі, жоден з них не може пропустити хід). Вважається що гравці грають сумлінно, найкращим чином. У таких іграх можна визначити кінцевий результат, тобто передбачити виграш одного з гравців [23].

Для розв'язування ігрової задачі треба сформулювати виграшну стратегію одного з гравця та довести, що така стратегія веде до виграшу.

Домовимося називати гру, в якій результат не залежить від того, як грає суперник, грою-жартом.

Завдання для осмислення поняття виграшної стратегії:

Виправте помилки в умові задачі:

**Приклад 2.** На столі лежать 1978 сірників. Два хлопчики по черзі можуть брати 1 чи 2 сірники. Який хлопчик виграє, якщо він має грати для цього?

В даній умові не вказано умову виграшу. Не зрозуміло, як в даній грі визначається переможець.

Осмислення виграшної стратегії за допомогою поняття симетрії:

В багатьох задачах-іграх виграшна стратегія досягається за допомогою вдалого ходу-відповіді на будь-який хід суперника. Існування такого ходу може забезпечити симетрія фігури, розбиття на пари, доповненням до числа.

От ще декілька ігор, що ілюструють ту ж ідею «симетричної» стратегії виграшу [23].

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1.** Двоє по черзі ставлять коні в клітинки шахової дошки так, що коні не б'ють один одного. Програє той, хто не може зробити хід.

**2.** Двоє по черзі ставлять королі у клітинки дошки 9х9 так, що королі не б'ють один одного. Програє той, хто не може зробити хід. Хто забезпечить собі виграш?

**3.** Двоє по черзі ставлять слони у клітинки шахової дошки. Черговим ходом слід побити хоча б одну небиту клітинку. (Слон б'є і клітинку, на якій він знаходиться). Програє той, хто не може зробити хід. Хто забезпечить собі виграш?

**4.** Дано клітчасту дошку 10 х 10. За хід дозволяється покрити будь-які 2 сусідні клітинки прямокутником 1х2 так, щоб прямокутники не перекривались. Програє той, хто не може зробити хід. Хто забезпечить собі виграш?

**5**. В кожній клітинці дошки 11 х 11 стоїть шашка. За хід дозволяється зняти з дошки будь-яку кількість шашок, що йдуть підряд, або з одного вертикального, або з одного горизонтального ряду. Виграє той, хто зняв останню шашку. Хто забезпечить собі виграш?[23].

***Конструкції***

*<u>Методика розв'язування головоломок зі сірниками</u>*

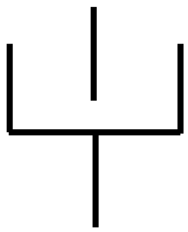
Задачі з сірниками – це задачі, для розв'язання яких необхідно забрати та або перекласти сірники чи порахувати в конструкції із сірників кількість фігур певного виду. Під час розв'язання таких задач сірники ламати не можна.

Головоломки зі сірниками є однією з найпоширеніших категорій головоломок з невеликими предметами. Перші такі задачі з'явилися близько 3000 років тому в Китаї, задовго до появи самих сірників. В Китаї вже тоді існували геометричні вправи з фігурами, складеними з бамбукових паличок однакового розміру. Однак до наших днів дійшли лише деякі зі старовинних задач [26].

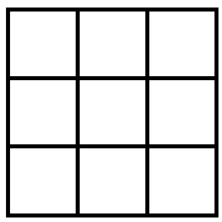
Популярність повернулась до задач із сірниками наприкінці XIX століття. У цей час вийшла книга німецького автора Софуса Тромгольта «Ігри з сірниками. Задачі й розваги». Дану книгу незабаром було перекладено російською мовою й видано у 1907 році.

*Задачі для самостійного опрацювання.*

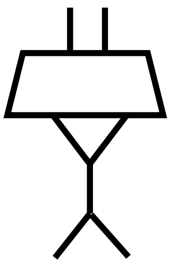
**1.** «Муха» залетіла в фужер. Перекласти 2 сірники так, щоб «муха» вилетіла із фужера. «Муху» не чіпати.



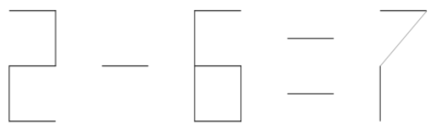
**2.** Забрати 4 сірники так, щоб залишилося 5 квадратів.



**3.** Перекласти три рівних трикутники так, щоб утворилося 5 рівних трикутників.



**4.** Перекласти один сірник так, щоб утворилася правильна рівність.



*Методика розв’язування задач на розрізання фігур*

«Сім раз відміряй, один раз – відріж!» - Цей вислів застерігає нас не поспішати, при розв’язуванні задач.

Задану фігуру, яка для полегшення роботи часто розділена на рівні клітинки, потрібно розрізати на дві, чи більше однакових частин. Якщо ці частини можна накласти одна на одну так, що вони співпадуть, то задача розв’язана правильно[26].

**Приклад 1.** Квадрат містить 16 клітинок. Розділіть квадрат на дві рівні частини так, щоб лінія перерізу йшла по сторонах клітинок. ( способи розрізу квадрата на дві частини вважатимемо різними, якщо частини квадрата розрізані одним способом, не рівні частинам, отриманим другим способом.) Скількома способами можна це зробити?

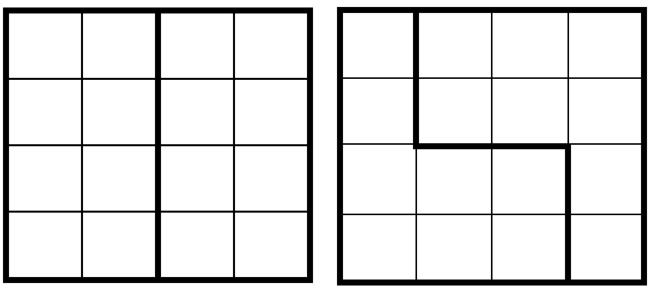


Рис. 2.1

Ключ: Знайти кілька рішень не важко. На рис. 2.1 деякі з них показано. Але знайти всі розв’язки і ні одного не втратити вже важче.

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1.** Прямокутник $3 \times 4$ містить 12 клітинок. Знайдіть 5 способів розрізання прямокутника на дві рівних частини так, щоб лінія розрізу йшла по сторонах клітинок ( способи розрізу на дві частини вважатимемо різними, якщо частини розрізані одним способом, не рівні частинам, отриманим другим способом).

**2.** Прямокутник $3 \times 5$ містить 15 клітинок і центральна клітинка видалена. Знайдіть 5 способів розрізання залишеної фігури на дві частини так, щоб лінія розрізу йшла по сторонах клітинок.

**3.** Квадрат $6 \times 6$ розграфлений на 36 однакових квадратів. Найдіть 5 способів розрізу квадрата на дві рівні частини так, щоб лінія розрізу йшла по сторонах квадрата.

**4.** Розділіть фігуру (рис. 2.2) на три рівні частини так, щоб лінія розрізу йшла по сторонах квадратів.

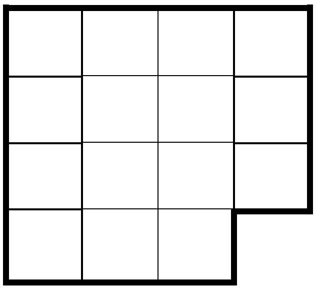


Рис. 2.2

**5**. Розділіть квадрат $5 \times 5$ клітинок з вирізаною центральною клітинкою на чотири рівні частини [26].

***Логічні задачі***

<u>*Методика розв'язування логічних задач*</u>

Слово «Логіка» походить від грецького слова «логос» і в перекладі означає: слово, поняття, ідеї, розум.

Логіка – наука про закони й оперування правильним мисленням.

Найважливіші логічні закони:

- Закон протиріччя;
- Закон виключення третього;
- Закон тотожності, закон моральної логіки;
- Закон достатньої підстави.

Закон тотожності формулюється так: будь-яка думка про предмет у процесі даного міркування тотожна сама собі, скільки б разів вона не повторялась.

Думка тотожна сама собі тоді, коли вона стосується одного й того є предмета і її зміст залишається одним і тим же, скільки разів вона висловлюється. Якщо ж зміст думки змінюється або вона відноситься до іншого предмета, то така думка не може вважатися тією ж самою, тотожною самій собі, це буде уже інша думка.

Закон тотожності у вигляді формули записується так: $A \in A$, $A = A$, $A \leftrightarrow A$, $A \subseteq A$.

Закон суперечності твердить: два протилежні висловлювання не є одночасно істинними; у крайньому разі одне з них неодмінно хибне. Наприклад, не можуть бути одночасно істинними судження: "Петренко є співучасником даного злочину", "Петренко не є співучасником даного злочину". Одне з цих суджень обов'язково хибне. Отже, істинність одного із протилежних суджень зобов'язує нас визначити друге судження хибним, оскільки вони не можуть бути одночасно істинними. Але встановлення хибності одного з протилежних суджень не в усіх випадках призводить до визнання істинним другого. Пояснюється це різним характером суперечних суджень.

Закон суперечності поширюється на всі протилежні судження: і на супротивні (контрарні), і на суперечні (контра-дикторні). Коли ми маємо справу з суперечними судженнями, то, з'ясувавши хибність одного з них, маємо визначити істинність другого. У тих же випадках, коли судження є супротивним, то хибність одного судження згідно із законом суперечності не є обґрунтуванням для визначення істинним другого, котре теж може бути хибним.

Закон суперечності, як і будь-який формально-логічний закон, застосовний тільки до таких суджень, у котрих ідеться про один і той же предмет, в один і той же час і в тому ж самому відношенні. Якщо ж у судженнях ідеться про різні предмети або про різні ознаки одного й того ж предмета, то такі судження не є суперечними і, отже, до них закон суперечності незастосовний. Так, не є суперечним судження: "Пальто, викрадене у потерпілого, було коричневим" і "Пальто, знайдене у обвинуваченого, не було коричневим", якщо предметом думки цих суджень є різні пальта.

Закон виключеного третього формується так: із двох суперечних суджень про один і той же предмет, в один і той же час і в одному й тому ж відношенні одне неодмінно істинне, друге хибне, третього бути не може.

Наприклад, із двох суджень "Обвинувачуваний у момент здійснення злочину був осудним" та "Обвинувачуваний у момент здійснення злочину не був осудним" — одне неодмінно істинне, а друге хибне. Якщо буде встановлено, що істинним є перше судження, то друге буде обов'язково хибним, а якщо істинним визнане друге судження, то перше буде неодмінно хибним.

У вигляді формули закон виключеного третього записується так: А або не-А. У математичній логіці цей закон має формулу $A \lor A$ .

Зміст закону виключеного третього полягає в тому, що він забороняє визнавати одночасно хибним або одночасно істинним два суперечні судження.

Із закону виключеного третього випливає така вимога: у процесі міркування не можна вважати одночасно хибними два суперечні судження і визнавати істинним якесь третє судження.

Закон достатньої підстави формулюється так: будь-яка істинна думка має достатню підставу.

Із закону достатньої підстави випливає така його вимога: будь-яка думка може бути істинною тільки тоді, коли вона обґрунтована. Так, для того, щоб судження "Петренко є співучасником цього злочину" було визнане істинним, необхідно привести підстави його істинності, тобто треба висловити ряд суджень, із яких би неодмінно випливало твердження про те, що Петренко справді є співучасником цього злочину. Якщо ж таких суджень наведено не буде, то висловлене положення ("Петренко є співучасник цього злочину") не може вважатися істинним.

У науці й щоденному мисленні нічому не можна йняти віри, як цього вимагає релігія; будь-яке положення, всяка думка має бути обґрунтованою, доведеною. Довести ту чи іншу думку — означає обґрунтувати її, тобто навести інші думки (судження), які були б достатньою підставою її достовірності. Достатньою підставою якоїсь думки є такі інші думки, раніше визнані істинними, із яких неодмінно випливає істинність даної думки.

Судження, котрі наводяться для обґрунтування істинності іншого судження, називаються логічною підставою. А те судження, яке випливає з інших суджень, як і підстави, називається логічним наслідком.

У вигляді формули закон достатньої підстави записується так: А є тому, що є В, де А є наслідком, а В — підставою цього наслідку.

Висловлювання – речення мови, що розглядається в зв’язку з тими чи іншими оцінками його істинності.

Приклади висловлювань:

«Оттава – столиця Канади» - істинне висловлювання,

«Монреаль – столиця Канади» - хибне висловлювання,

«Був крикуном, але мовчазним» (Т. Корбьєр) – суперечливе висловлювання.

Логічна величина це поняття, що виражається через слова «Брехня» та «Істина».

Логічна змінна – це логічна величина, що позначена символічно. Тобто, якщо ми кажемо, що X – логічна змінна, то це означає, що вона може приймати тільки два значення – «Істина» та «Брехня».

Логічний вираз – простий чи складний висловлювання. Складний вираз будується з множини простих, з’єднаних логічними операціями. Наведемо приклад розв’язування [17].

**Приклад.** Два чоловіки підійшли до річки. Біля пустинного берега стояв човен, в який міг поміститись тільки один чоловік. Все ж таки обидва туристи переправились через річку без будь-якої допомоги на цьому човні і продовжили свій шлях. Як вони це зробили?

**Відповідь:** двоє підійшли до різних берегів річки, тому спочатку переправився один, а потім інший.

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1**. В одній кімнаті сидить жаба, яка в кожну секунду подвоюється. Через 29 секунд вона заповнила пів кімнати. Через скільки секунд вона заповнить цілу кімнату.

**2**. Двоє батьків і двоє синів поділили між собою 30 грн. При чому кожен отримав по 10 грн, як це могло статись?

Іноді, щоб знайти правильну відповідь задачу починають розв'язувати з кінця. Розглянемо приклад такої задачі [17].

**Приклад.** Селянин прийшов до царя і запитав: „Цар, дозволь мені взяти з твого садка одне яблуко". Цар відповів: „ Мій садок обнесений трьома заборами. В кожному заборі є тільки одні ворота і коло кожних воріт стоїть сторож. Якщо скажеш, скільки яблук треба тобі взяти , щоб виконати наступні умови: першому сторожу віддати половину яблук, які візьмеш, і ще 1 яблуко; другому сторожу віддати половину з тих, що залишилися і ще 1 яблуко; третьому сторожу віддати половину того, що залишилося ( після того, як віддаси другому) і ще 1 яблуко, а тобі щоб лишилося 1 яблуко, то я дозволю тобі піти в сад."

Селянин подумав трошки і відповів царю. Цар дозволив йому піти в сад. Яке число назвав селянин ?

**Розв'язання.** Звертаємо увагу на те, що після того, як селянин віддав третьому сторожу половину і ще 1 яблуко в нього залишилося 1 яблуко. Отже 1 + 1 яблуко – це половина.

1) $(1+1)\cdot 2 = 4$ ( ябл.) – було перед тим, як віддати третьому сторожу, або після того, як віддали другому сторожу;
2) $(4+1)\cdot 2 = 10$ ( ябл.) – було перед тим, як віддати другому сторожу, або після того, як віддали першому сторожу;

3) $(10 + 1) \cdot 2 = 22$ ( ябл.) – було перед тим, як віддати першому сторожу або треба взяти з садка.

Відповідь: 22 яблука.

Софізм (з грецької «хитрий», «вигадка») – це міркування навмисне побудовані так, що вони місять логічну помилку і, звичайно, приводять до хибних висновків.

Арифметичні софізми – це числові рівності, що мають неточність або помилку, непомітну з першого погляду [5]. Розглянемо приклад.

**Приклад 1**. П’ять дорівнює семи

**Доведення.** Нехай $a = \frac{3}{2}b$ . Помножимо обидві частини рівності на 4: $4a = 6b$. Уявимо $4a$ як $14a - 10a$, а $6b$ як $21b - 15b$: $14a - 10a = 21b - 15b$. Перенесемо $15b$ та $14a$ в іншу сторону рівності, змінюючи при цьому знак на протилежний: $15b - 10a = 21b - 14a$. Винесемо спільний множник за дужки: $5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$. Поділимо обидві частини на $(3b - 2a)$: $5 = 7$.

Помилка: $(3b - 2a) = 0$, а на нуль ділити не можна [5].

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1.** Два помножити на два дорівнює п’яти.

Доведення: Нехай вихідне співвідношення – очевидна рівність: $4 \div 4 = 5 \div 5$ Винесемо за дужки спільний множник кожної частини рівності і ми отримаємо $4 \cdot (1 \div 1) = 5 \cdot (1 \div 1)$. Розкладемо число 4 на множники: $(2 \cdot 2)(1 \div 1) = 5 \cdot (1 \div 1)$. Нарешті, знаючи, що $1 \div 1 = 1$ встановлюємо, що $2 \cdot 2 = 5$. Де помилка?

**2.** Всі числа рівні між собою.

Доведення: нехай $m \neq n$. Маємо тотожність:
$m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2mn + m^2,\ (m - n)^2 = (n - m)^2$. Маємо, що
$m - n = n - m$, або $2m = 2n,\ m = n$. Де помилка?[5]

## 2.3 Змісту навчально-методичного матеріалу факультативного курсу з математики для 6 класу

### *Цифри і системи числення*

<u>*Методичні рекомендації*</u>

Однією з формальних мов є система числення.

Система числення – сукупність способів і засобів запису чисел для проведення підрахунків. Звичайною для нас і загальноприйнятою є позиційна десяткова система числення. Як умовні знаки для запису чисел вживаються цифри.

Найпростішим способом запису натурального числа є зображення його за допомогою відповідної кількості паличок або рисочок. Таким способом можна користуватися для невеликих чисел.

Розрізняють такі типи систем числення:

- Непозиційні
- позиційні;
- змішані.

Непозиційній системи числення:

Непозиційна система числення – система числення, в якій значення кожної цифри в довільному місці послідовності цифр, яка означає запис числа, не змінюється.

У непозиційній системі кожен знак у запису незалежно від місця означає одне й те саме число [3]. Добре відомим прикладом непозиційної системи числення є римська система, в якій роль цифр відіграють букви алфавіту: I – один, V – п'ять, X – десять, C – сто, L – п'ятдесят, D – п'ятсот, M – тисяча. Наприклад, 324 = CCCXXIV. У непозиційній системі числення незручно й складно виконувати арифметичні операції [3].

<u>Недоліками непозиційних систем числення є:</u>

- громіздкість зображення чисел;
- труднощі у виконанні операцій.

| Римська цифра | Десяткове значення |
|---|---|
| I | 1 |
| V | 5 |
| X | 10 |
| L | 50 |
| C | 100 |
| D | 500 |
| M | 1000 |

Позиційні системи числення:

Позиційна система числення – система числення, в якій значення кожної цифри залежить від місця в послідовності цифр у записі числа. Для позиційних систем числення характерні наочність зображення чисел і відносна простота виконання операцій.

У позиційних системах числення одна і та ж цифра (числовий знак) у записі числа набуває різних значень залежно від своєї позиції. Таким чином, позиція цифри має вагу у числі. Здебільшого вага кожної позиції кратна деякому натуральному числу $b$ ($b$>1), яке називається *основою* системи числення.

Основа системи числення – число, яке означає, у скільки разів одиниця наступного розрядку більше за одиницю попереднього[3].

Винахід позиційної системи числення, заснованої на помісному значенні цифр, приписують шумерам і вавилонцям. Її було розвинуто індусами і вона отримала неоціненні наслідки для історії людської цивілізації.

Для запису чисел системи числення з основою до 36 включно у якості цифр використовуються арабські цифри (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) а потім букви латинського алфавіту (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z). При цьому, a = 10, b = 11 і т.д.

Загальноприйнятою в сучасному світі є десяткова позиційна система числення, яка з Індії через арабські країни прийшла в Європу. Араби взяли за основу число 10, тому що в якості обчислювального пристрою вони використовували 10 пальців рук. В десятковій системі для запису числа використовується десять цифр від 0 до 9 і основою є число 10. Число у цій системі числення можна представити у вигляді степенів десяти, наприклад:

$$237_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$130678_{10} = 1 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Тут 10 є основою системи числення, а показник степеня – це номер позиції цифри в записі числа (нумерація ведеться зліва на право, починаючи з нуля). Арифметичні операції у цій системі виконують за правилами, запропонованими ще в середньовіччі. Наприклад, додаючи два багатозначних числа, застосовуємо правило додавання стовпчиком. При цьому все зводиться до додавання однозначних чисел, для яких необхідним є знання таблиці додавання [3].

Також поширені системи числення з основами:

- 2 – двійкова (у дискретній математиці, інформатиці, програмуванні);
- 8 – вісімкова (у програмуванні);
- 12 – дванадцяткова (мала широке застосування у давнину, подекуди використовується і нині);
- 16 – шістнадцяткова (поширена у програмуванні, а також для кодування шрифтів);
- 60 – шістдесяткова (для виміру кутів і, зокрема, довготи і широти).

Для переведення чисел із системи числення з основою p в систему числення з основою q з використанням арифметики старої системи числення з основою p потрібно:

- для переведення цілої частини:
    - послідовно число, записане в системі основою p ділити на основу нової системи числення, виділяючи остачі. Останні

записані у зворотному порядку, будуть утворювати число в новій системі числення;

- для переведення дробової частини:
    - послідовно дробову частину множити на основу нової системи числення, виділяючи цілі частини, які й будуть утворювати запис дробової частини числа в новій системі числення.

Цим самим правилом зручно користуватися в разі переведення з десяткової системи числення, тому що її арифметика для нас звичніша.

Приклади: $999{,}35_{10}=1111100111{,}01011_{2}$

для цілої частини:

```
999 | 2
----+-----
  1 | 499 | 2
      ----+-----
        1 | 249 | 2
            ----+-----
              1 | 124 | 2
                  ----+-----
                    0 | 62 | 2
                        ---+-----
                         0 | 31 | 2
                             ---+-----
                              1 | 15 | 2
                                  ---+-----
                                   1 | 7 | 2
                                       --+-----
                                       1 | 3 | 2
                                           --+---
                                           1 | 1
```

для дробової частини:

```
  0, 35
      2
  -------
  0,|70
    | 2
  -------
  1,|40
    | 2
  -------
  0,|80
    | 2
  -------
  1,|60
    | 2
  -------
  1,|20
```

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1**. Двійкові числа переведіть в десяткову форму:

100011011 =

11111111 =

000100001 =

Десяткові числа переведіть в двійкову форму та оформіть результат у вигляді наступної таблиці (Див. табл. 2.1):

Таблиця 2.1

| Десяткове число | Двійкове число | | Десяткове число | Двійкове число | | Десяткове число | Двійкове число |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | 6 | | | 12 | |
| 1 | 1 | | 7 | | | 13 | |
| 2 | 10 | | 8 | | | 14 | |
| 3 | 11 | | 9 | | | 15 | |
| 4 | 100 | | 10 | | | 16 | |
| 5 | 101 | | 11 | | | 17 | |

Дані десяткові числа переведіть в двійкову форму. Розпишіть принцип переведення:

**2.** Яку кількість дискет необхідно мати, щоб скопіювати на них 14 електронних повідомлень, що надійшли на електронну поштову скриньку, якщо одне повідомлення містить 7300 символів (1 символ займає 8 біт) і прикріплений файл об’ємом 30 Кбайт. Дискета має об’єм – 1,4 Мбайт.

**3.** Яка кількість часу в секундах потрібна для передачі по мережі електронного повідомлення, яке має 68 сторінок тексту (одна сторінка містить 20 рядків по 60 символів у рядку (1 символ займає 1 байт або 8 біт), якщо швидкість передачі даних мережі становить 28 кілобіт за секунду (28 Кбіт/с).

**4.** З якою мінімальною продуктивністю (Кбіт за секунду) має працювати модем, для забезпечення завантаження однієї сторінки з мережі

Internet за 10 секунд. Відомо, що ця сторінка містить 4000 символів (1 символ займає 8 біт) та 3 графічних об'єкта (рисунка) по 9 Кбайт кожний.

**5**. Опис видів сільськогосподарської продукції та послуг підприємства розміщується на 130 сторінках (кожна сторінка тесту має 21 рядок по 64 символи в кожному (1 символ займає 8 біт). Скільки часу необхідно для передачі такого документа по електронній мережі, пропускна здатність якої становить 1 Мбіт/с [3].

*Методика розв'язування задач на подільність чисел*

Ознака подільності – це правило, що дозволяє швидко визначити, чи є число кратним заздалегідь заданому числу, без необхідності виконувати ділення.

Розглянемо кілька ознак поділу.

Ознака подільності на 4: число ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли число з двох останніх його цифр нулі, або ділиться на 4.

Наприклад, 50736 ділиться на 4, бо число 36 ділиться на 4.

Ознака подільності на 7: число ділиться на 7 тоді і тільки тоді, коли результат віднімання подвоєною останньою цифрою з цього числа без останньої цифри ділиться на 7.

Наприклад, 364 ділиться на 7, бо $36 - (2 \cdot 4) = 28$ ділиться на 7 [31].

Ознака подільності на 8: число ділиться на 8 тоді і тільки тоді, коли число, утворене трьома його останніми цифрами, ділиться на 8.

Наприклад, 3654168 ділиться на 8, так як 168 ділиться на 8.

Ознака подільності на 11: на 11 діляться тільки ті числа, у яких різниця між сумою цифр, які займають непарні місця, і сумою цифр, які займають парні місця, ділиться на 11.

Наприклад, 9163627 ділиться на 11, так як сума цифр, що займають непарні місця, є $9 + 6 + 6 + 7 = 28$, а сума цифр, що займають парні місця, є $1 + 3 + 2 = 6$

Різниця між числами $28 - 6 = 22$, а це число ділиться на 11.

Ознака подільності на 25: число ділиться на 25 тоді і тільки тоді, коли дві його останні цифри становлять число, яке ділиться на 25 [31].

Наприклад, 65475 ділиться на 25, так як 75 ділиться на 25.

Ознака подільності на 125: число ділиться на 125 тоді і тільки тоді, коли число, утворене трьома його останніми цифрами, ділиться на 125.

Наприклад, 56375 ділиться на 125, так як 375 ділиться на 125.

Теорема про подільність на складені числа: для того, щоб натуральне число ділилось на складене число $n = bc,$ де НСД$(b, c) = 1$, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на $b$ і $c$ .

Дану теорему можна застосувати багаторазово.

Так, щоб число ділилося на 60, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 4 і на 15. У свою чергу, щоб число ділилося на 15, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 3 і на 5. Отже, для того, щоб число ділилося на 60, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на 4, на 3 і на 5.

Натуральне число, яке ділиться тільки на одиницю і саме на себе називається простим. Натуральне число, яке має більше двох дільників, називається складеним.

Найбільше натуральне число, на яке ділиться число $a$ і $b$, називається найбільшим спільним дільником (НСД) цих чисел. Щоб знайти НСД двох (або більшої кількості) чисел, треба розкласти ці числа на прості множники і знайти добуток спільних простих множників:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Наприклад, $\text{НСД}(180{,}450) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$, якщо $\text{НСД}(a, b) = 1$, то числа $a$ і $b$ називаються взаємно простими [19].

*Подільність суми, різниці та добутку*

**Теорема 1** (достатня умова подільності суми). Якщо кожний додаток ділиться на натуральне число n, то й його сума ділиться на це число.

**Доведення.**

$$a \vdots n => a = nq_1, b \vdots n => b = nq_2$$

Тому $a + b = nq_1 + nq_2 = n(q_1 + q_2) => (a + b) \vdots n$

Теорему доведено.

**Зауваження.** Обернене твердження невірне! Тому подільність суми не є достатньою умовою для подільності доданків.

**Теорема 2** (достатня умова подільності різниці). Якщо $a, b$ ділиться на n і $a \geq b$, то $a - b$ теж ділиться на n.

**Теорема 3** (необхідна й достатня умова подільності суми). Якщо однин з двох доданків ділиться на дане число, то щоб його сума ділилася на це число необхідно й достатньо, щоб і другий доданок ділився на це число.

**Доведення.**

*Достатність.*

$$a \vdots n => a = nq_1, b \vdots n => b = nq_2$$

Тому $a + b = nq_1 + nq_2 = n(q_1 + q_2) => (a + b) \vdots n$

*Необхідність.*

$$a \vdots n^3(a + b) \vdots n => \big((a + b) - a\big) \vdots n => b \vdots n$$

Теорему доведено.

**Теорема 4** (достатня умова подільності добутку) Якщо один з множників ділиться на натуральне число n, то й добуток ділиться на це число.

**Доведення.**

$$a \vdots n => a = nq => ab = (nq)b = n(qb) => ab \vdots n$$

Теорему доведено.

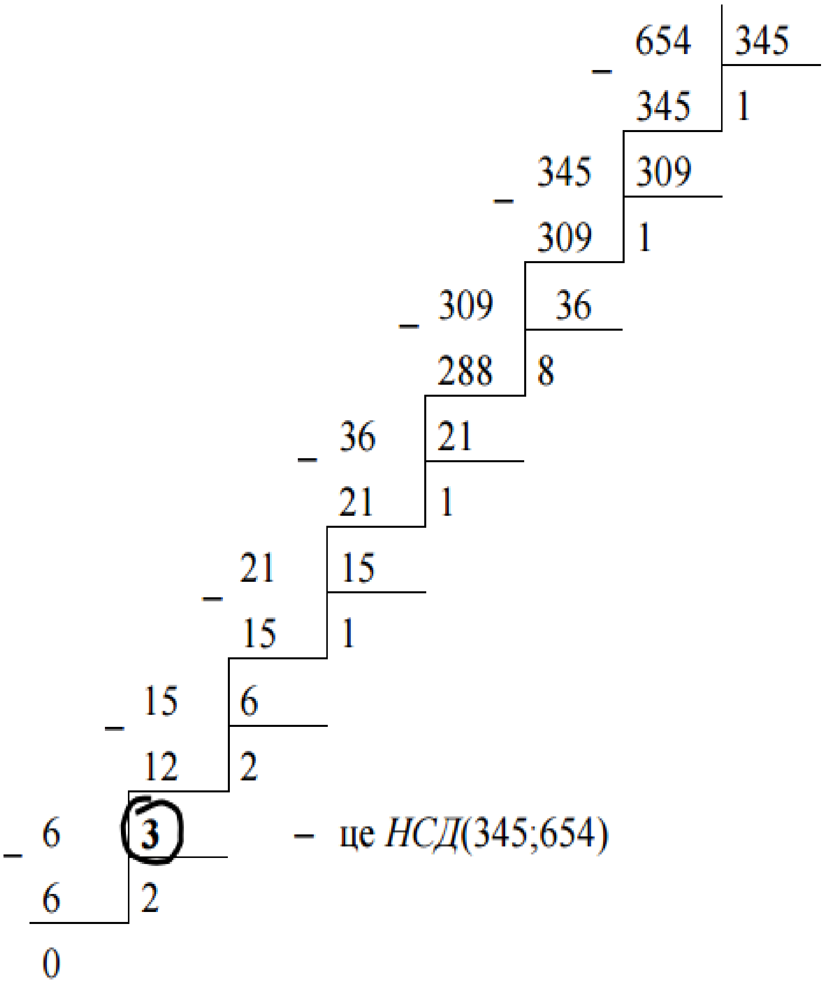
**Наслідок:** якщо $a \vdots m\ i\ b \vdots n,$ то $ab \vdots mn.$

Ще один спосіб знаходження НСД – алгоритм Евкліда. Кожен спільний дільник двох чисел є одночасно дільником меншого з них і остачі від ділення більшого числа на менше.

Найбільший спільний дільник двох чисел це найбільше число, що ділить обидва дані числа без залишку. Алгоритм Евкліда заснований на тому, що НСД не змінюється, якщо від більшого числа відняти менше.

Оскільки більше з двох чисел постійно зменшується, повторне виконання цього кроку дає все менші числа, поки одне з них не дорівнюватиме нулю. Коли одне з чисел дорівнюватиме нулю, те, що залишилось, і є НСД.

Розглянемо приклад.




Щоб знайти найбільший спільний дільник трьох чисел, користуються правилом: $\text{НСД}(a; b; c) = \text{НСД}(\text{НСД}(a; b); c)$

Найменше натуральне число, яке ділиться на $a, b$ називається найменшим спільним кратним (НСК) цих чисел. Щоб знайти НСК двох (або більшої кількості) чисел, треба розкласти ці числа на прості множники і доповнити розклад першого з них тими множниками інших чисел, яких не вистачає в розкладі першого, після чого знайти добуток отриманих множників.

Наприклад, $\text{НСК}(180{,}450) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 900$

Для того, щоб знайти НСК двох чисел $a$ та $b$ досить знайти найбільший спільний дільник цих чисел , а потім поділити добуток цих чисел на знайдений найбільший спільний дільник:

$$\text{НСК}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{НСД}(a, b)}$$

**Приклад 1.** Знайти найменший спільний знаменник дробів: $\frac{3}{4}, \frac{1}{6}$ та $\frac{7}{8}$

**Розв'язок.** Найменший спільний знаменник цих дробів – це найменше спільне кратне знаменників:

$$\text{НСК}(4; 6; 8) = \text{НСК}(\text{НСК}(4; 8); 6) = \text{НСК}\ (8; 6) = 24$$

Відповідь: 24.

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1.** Знайти найбільший спільний дільник чисел:

1) 2016 і 1320;
2) 1920 і 1536;

**2.** Написати три такі пари складених чисел, щоб у кожній парі числа були взаємно простими.

**3.** Знайти найменше спільне кратне:

1) перших п'яти парних чисел;
2) перших чотирьох складених чисел.

**4**. Між шкільними бібліотеками поділили 92 тлумачних і 138 орфографічних словників української мови. Скільки було шкіл, якщо відомо, що їх не менше ніж 25 і всі школи отримали однакові комплекти зі словників двох видів?

**5**. Довжина кроку Чебурашки дорівнює 15 см, а крокодила Гени – 50 см. Яку найменшу однакову відстань має пройти кожний із них, щоб вони обидва зробили по цілому числу кроків? [19]

***Конструкції***

*Методи розрізання та розфарбовування фігур*

Множина точок площини називається фігурою. При цьому ця множина точок може бути скінченною або нескінченною. У шкільних задачах найчастіше зустрічаються многокутники (багатокутники) – фігури, обмежені замкненими ламаними. Щодо розміщення многокутників на площині необхідно окремо виділити теорему Жордана, суть якої, на перший погляд, здається цілком очевидною, однак яка дозволяє виконувати доведення багатьох задач набагато формальніше та чіткіше.

**Теорема Жордана.** Довільна замкнена без самоперетинів ламана ділить площину на дві області – внутрішню (обмежену) та зовнішню (необмежену), причому довільний шлях із точки, яка лежить у внутрішній області, у точку, яка лежить у зовнішній області, перетинає цю ламану, а довільні дві точки кожної з цих областей можна з'єднати шляхом, який не перетинає ламаної.

Фігура називається опуклою, якщо разом з кожними своїми двома точками вона містить також весь відрізок з кінцями в цих точках.

Опуклим многокутником називається многокутник Ф, який має одну з таких рівносильних властивостей:

а) Ф є опуклою фігурою;

б) Ф розміщений в одній півплощині відносно прямої, яка містить будь-яку із його сторін;

в) усі його кути менші за 180°;

г) Ф є перетином кількох півплощин.

Для довільної скінченної множини точок площини існує її (єдина) опукла оболонка – найменший опуклий многокутник, який містить всі ці точки. Розв'язання деяких задач варто розпочинати саме з розгляду опуклої оболонки певної множини точок. Часто це дозволяє значно прискорити процес розв'язання та спростити його [17]. Розглянемо приклад.

**Приклад 1.** На площині дано 2n + 3 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій та жодні чотири з яких не лежать на одному колі. Довести, що з цих точок можна обрати три точки так, що серед необраних точно n точок лежать всередині кола, проведеного через обрані точки, а точно n – зовні цього кола.

**Розв'язання.** Розглянемо опуклу оболонку множини даних точок. Нехай AB – одна із її сторін. Усі інші вершини занумеруємо в порядку зростання кутів, під якими видно з них відрізок AB, тобто $\angle AC_1B < \angle AC_2B < ... < \angle AC_{n+1}B < ... < \angle AC_{2n+1}B$ (оскільки жодні чотири точки не лежать на одному колі, то всі такі кути різні). Проведемо коло через точки A, B, $C_{n+1}$. Точки $C_1$, $C_2$, …, $C_n$ лежать зовні цього кола, а точки $C_{n+2}$, $C_{n+3}$, …, $C_{2n+1}$ – всередині нього, чого і потрібно було досягти.

Методом математичної індукції доводиться (спробуйте зробити це самостійно) таке, цікаве для подальших застосувань, твердження [17].

**Теорема Хеллі.** Нехай на площині дано n опуклих фігур, кожні три з яких мають спільну точку. Тоді всі ці n фігур мають спільну точку.

Якщо об'єднання фігур $D_1$, $D_2$, …, $D_n$ містить дану фігуру Ф, то говорять, що фігури $D_1$, $D_2$, …, $D_n$ утворюють покриття фігури Ф. При цьому фігури $D_1$, $D_2$, …, $D_n$ можуть перетинатися.

Множина точок, відстань від яких до точки A менша, ніж (додатне) число ε (читається – епсілон), називається ε-околом точки A. Точка, яка належить фігурі Ф разом з деяким своїм околом, називається внутрішньою точкою фігури Ф. Якщо всі точки фігури Ф є її внутрішніми точками, то ця фігура називається відкритою.

Точка, довільний (навіть дуже-дуже маленький) окіл якої містить як точки, що належать фігурі Ф, так і точки, які не належать цій фігурі, називається межовою (або граничною) точкою цієї фігури. Множина всіх межових (граничних) точок фігури називається межею (або границею) цієї фігури.

Покриття фігури Ф фігурами $D_1$, $D_2$, …, $D_n$, що не мають спільних внутрішніх точок, називається розрізанням фігури Ф. Як правило, прийнято розглядати такі розрізання, що об'єднання фігур $D_1$, $D_2$, …, $D_n$ дає точно фігуру Ф.

При розв'язуванні задач, пов'язаних з покриттями та розрізаннями, найчастіше використовуються загальні властивості фігур, пов'язані з їх розташуванням та орієнтацією на площині [17].

**Приклад 2.** Чи можна даний правильний трикутник покрити двома меншими правильними трикутниками?

Розв'язання. Кожен з менших трикутників може покрити тільки одну вершину більшого, тому одна з вершин обов'язково залишиться не покритою.

У деяких задачах спрацьовує ідея розфарбовування. При цьому вважають, що фігура розфарбована у декілька кольорів, якщо кожній її точці поставлено у відповідність один із цих кольорів. Зустрічаються задачі, де розфарбування уже дано. Однак найчастіше розфарбування з певними властивостями потрібно придумати самостійно.

Пам'ятайте, що ваше розфарбування має спростити та формалізувати шлях розв'язання, а не ускладнити його. Тому спершу підберіть таке розфарбування, яке, на перший погляд, буде зручним у даному випадку, а вже потім використовуйте його властивості для подальшого розв'язання. Якщо у процесі подальшого розв'язання ви помітили, що розфарбування можна було виконати простіше, перейдіть до нього. Адже чим простішим буде ваше розв'язання (розфарбування), тим менша вірогідність того, що ви заплутаєтесь у своїх думках.

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1.** У кожній клітинці дошки розмірами 5x5 сидить жук. За свистком кожен жук переповзає в одну із сусідніх по діагоналі клітин. При цьому в деяких клітинах може виявитися по кілька жуків, а деякі клітини стануть незайнятими. Знайдіть найменше можливе число незайнятих клітин.

**2.** На папері в клітинку задано довільні n клітинок. Доведіть, що з них можна вибрати не менше, ніж $\frac{n}{4}$ клітинок, що не мають спільних точок.

**3.** Доведіть теорему Хеллі, використовуючи метод математичної індукції (або інші відомі вам методи).

**4.** Довести, що всередині довільного опуклого семикутника є точка, яка не належить жодному з чотирикутників, утворених четвірками його сусідніх вершин.

**5.** Вказівка. Скористайтесь теоремою Хеллі. Куб розбито на 27 однакових кубиків. У початковий момент жук знаходиться в центральному кубику. З кожного кубика жук може переходити до сусіднього, що має з ним спільну грань. Чи зможе жук обійти всі кубики, побувавши в кожному по одному разу? [17]

### *Дроби. Відсотки. Пропорції*

*<u>Три типи задач на дроби</u>*

Задачі на дроби бувають трьох видів:

1) Знаходження дробу від числа;
2) Знаходження числа за його дробом;
3) На знаходження частини дробу, яку складає одне число від іншого.

Щоб знайти дріб від числа, треба це число помножити на цей дріб.

**Приклад 1.** Троє робітників виготовили 216 деталей. Перший робітник виготовив $\frac{7}{18}$ цих деталей, другий – $\frac{13}{36}$. Скільки деталей виготовив третій робітник?

Розв’язання. Приймемо кількість усіх деталей за 1, тоді

1) $1-\left(\frac{7}{18}+\frac{13}{36}\right)=1-\left(\frac{14}{36}+\frac{13}{36}\right)=1-\frac{27}{36}=\frac{9}{36}-\frac{1}{4}$ (частину) – усіх деталей виготовив третій робітник;
2) $216\cdot\frac{1}{4}=54$ (деталі) – виготовив третій робітник

Відповідь. 54 деталі.

Щоб знайти число за значенням дробу, треба це значення поділити на цей дріб [19].

**Приклад 2**. Довжина прямокутного паралелепіпеда дорівнює 45 см, ширина становить $\frac{4}{9}$ довжини і $\frac{12}{7}$ висоти. Обчисліть об'єм прямокутного паралелепіпеда.

Розв'язання.

1) $45 \cdot \frac{4}{9} = \frac{45 \cdot 4}{9} = 20$ (см) – ширина прямокутного паралелепіпеда;
2) $20 \div \frac{12}{7} = \frac{20 \cdot 7}{12} = 11\frac{2}{3}$ (см) – висота прямокутного паралелепіпеда;
3) $45 \cdot 20 \cdot 11\frac{2}{3} = 10500$ (см$^3$) – об'єм прямокутного паралелепіпеда.

Відповідь. 10500 (см$^3$).

Щоб знайти, яку частину становить одне число від другого, треба перше число поділити на друге й одержати звичайний або десятковий дріб.

**Приклад 3.** У книжці 270 сторінок. Сашко прочитав 30 сторінок. Яку частину книжки він прочитав?

Розв'язання. $30 \div 270 = \frac{30}{270} = \frac{1}{9}$.

Відповідь: Сашко прочитав $\frac{1}{9}$ частину книжки [19].

Розв'язувати задачі можна за допомогою зображення дробів на відрізку. Для цього будуємо пряму, позначаємо відрізок на цій прямій, довжина якого відома або є шуканою за умовою задачі, приблизно визначаємо відому частину цього відрізка, над відрізком і над його частиною позначаються відомі чи не відомі величини, під ним відомі чи невідомі дроби.

*Три типи задач на відсотки*

Всі задачі на відсотки можна поділити на три групи:

- Задачі на знаходження відсотків від числа;

- Задачі на знаходження числа за його відсотками;
- Задачі на знаходження відсоткового відношення [2].

Для того, щоб знайти р відсотків від даного числа а, треба:

1) перевести р відсотків у десятковий дріб;

2) помножити число а на одержаний десятковий дріб.

**Приклад 1.** До магазину завезли 600 кг шоколадних цукерок, печива та мармеладу. Цукерки становили 40 % завезеного товару, печиво – 25 %. Скільки кілограмів мармеладу завезли до магазину?

**Розв'язання.**

1) $40 + 25 = 65$ (%) – завезеного товару становлять шоколадні цукерки та печиво.
2) $100-65=35$ (%) – становить мармелад.
3) $600 \div 100 = 6$ (кг) – становить 1 % маси завезеного товару.
4) $6 \cdot 35 = 210$ (кг) – завезено мармеладу.

Відповідь: 210 кг.

Для того щоб знайти все число за відомою частиною b і числом відповідних відсотків р, треба:

1) перевести р відсотків у десятковий дріб;

2) розділити b на одержаний десятковий дріб.

**Приклад 2**. За день робітник виготовив 48 деталей, що становить 120 % кількості деталей, яку він мав виготовити за планом. Скільки деталей робітнику потрібно виготовити за планом?[18]

**Розв'язання**.

1) $48 \div 120 = 0{,}4$ (деталі) – становить 1% плану.
2) $0{,}4 \cdot 100 = 40$ (деталей) – треба було виготовити за планом.

Відповідь: 40 деталей.

Щоб знайти відсоток числа b від числа a, треба дріб $\frac{b}{a}$ помножити на 100%.

**Приклад 3.** Скільки відсотків складає число 0,3 від 20?

**Розв'язання.** $\frac{0,3}{20} \cdot 100\% = \frac{0,3 \cdot 100\%}{20} = 0,3 \cdot 5\% = 1,5\%$.

Відповідь: 1,5%.

*Задачі для самостійного опрацювання***.**

**1**. За перший день турист пройшов 7,2 км, за другий день – 150% того, що за перший. Скільки кілометрів пройшов турист за три дні, якщо за другий день він пройшов 90% того, що за третій?

**2.** Відправившись у морську подорож Сіндбад-мореплавець узяв 1200 л прісної води. Щотижня він витрачав 15% запасу води, що в нього залишався. Скільки літрів води залишилося у Сіндбада через тиждень подорожі? [18]

**3.** Учні посадили біля школи дерева. Фруктові дерева становлять $\frac{11}{15}$ посаджених дерев. Вишні становлять $\frac{4}{11}$ фруктових дерев. Скільки всього дерев посадили учні, якщо вишень посадили 12?

**4**. Барон Мюнхаузен розповідав, що коли його послали з важливим донесенням з Києва до Парижа, він проскакав на коні 2400 км за 4 дні. За перший день він подолав $\frac{3}{20}$ відстані, за другий – $\frac{4}{15}$ , за третій – $\frac{7}{30}$. Скільки кілометрів проскакав барон Мюнхаузен за четвертий день?[19]

***Модуль числа***

<u>*Методика розв'язування рівнянь з модулями*</u>

Модулем числа називають відстань від точки, яка зображує число на координатній прямій, до початку відліку. Це і є геометричний зміст модуля. З цього означення слідує, що модуль числа не може бути від'ємним числом.

Модуль числа $a$ позначається $|a|$ та має такі властивості:

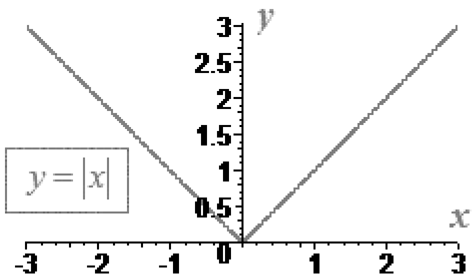
$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

1. $|a| \geq 0;$
2. $|a| = |-a|;$
3. Якщо $|a| = |b|$, то $a = b$, або $a = -b$

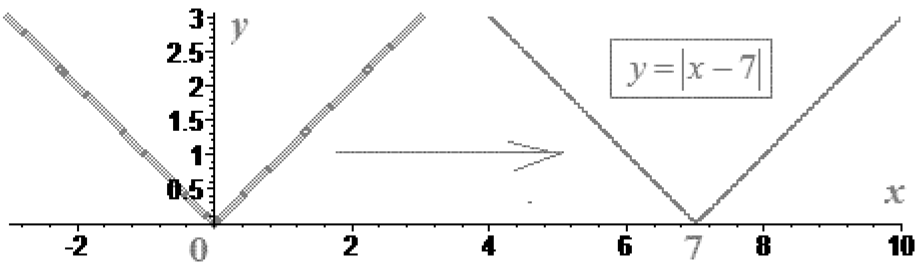
Під простими рівняннями з модулями маємо на увазі рівняння виду *|x|=5; |x-3|=2; ||2x-1|-5|=3; |1-x|=4* в яких змінна входить одноразово та лінійно.

Розв'язувати рівняння з модулями можна за допомогою означення і графічно. В даній статті більша увага буде приділена саме графічному методу розкриття модулів. Для цього поступово буде розкрита суть перетворень з модулями. В такий спосіб вдається розв'язати безліч тестових задач, в яких потрібно знайти кількість розв'язків рівняння з модулем.

Для наочності наведемо графік функції *y*=|*x*|

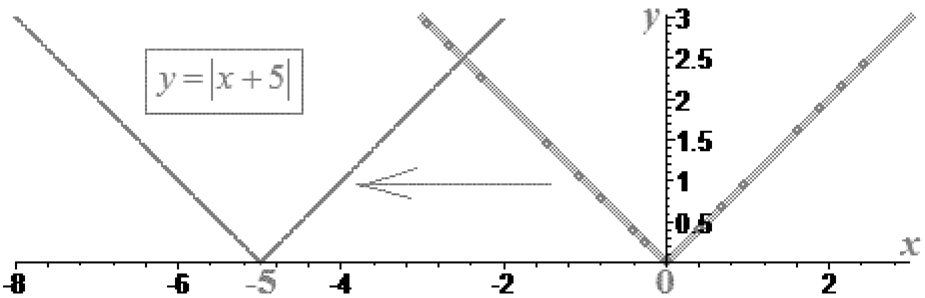



Далі зобразимо зміщення графіку модуль функції по осі Ох, наприклад *y*=|*x-7*|. Такий запис означає, що функція рівна нулю, коли дужа рівна нулю *x-7=0; –> x=7*. Отже "галочка" переноситься вправо на *7*.



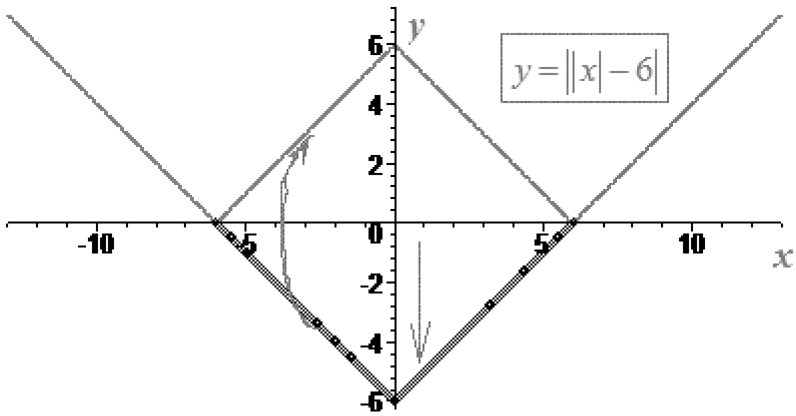
Якщо підмодульну функцію помножити на *(-1)* то графік функції не зміниться |*7-x*|=|*x-7*|.

Якщо під модулем маємо додавання |$x$+$5$|, то зміщення графіка модуль функції виконуємо в бік від'ємних змінних




Найцікавіше в обчисленнях відбувається, коли маємо рівняння виду модуль в модулі|$x$|-$6$|, ||$x$|+$3$|

Тоді виконуємо перенесення графіку внутрішнього модуля по осі вниз або вгору, та симетричне відображення значень, які йдуть нижче осі O$x$ угору.




*Задачі для самостійного опрацювання*

1. Розв’язати рівняння:
   1) $|x-1|=2$;
   2) $|1-x|=4$;
   3) $||7x-2|-6|=5$;
   4) $||2x-1|-5|=3$;
   5) $|2x-1|=3x+1$;

***Елементи теорії множин. Круги Ейлера-Венна***

<u>*Методичні рекомендації*</u>

Поняття множини і її елемента відносять до основних, первинних понять математики. Вважають, що ці поняття не визначаються.

Під множиною розуміють сукупність певних об’єктів, які об’єднані спільними властивостями. При цьому природа самих об'єктів, що становлять ту або іншу множину нас не буде цікавити. Об’єкти будь-якої природи, що утворюють множину, називаються її елементами [20].

Наприклад, $a = 5$ – елемент множини цифр десяткової нумерації.

Львів – елемент множини міст України.

Множини бувають скінченні і нескінченні. Множини позначають великими літерами латинського алфавіту $A, B, C, \ldots$, а їх елементи – маленькими $a, b, c, d \ldots$ .

Множина, у якої не має жодного елемента називається порожньою. Позначається $\emptyset$.

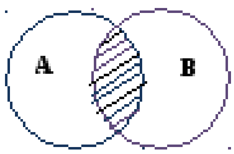
Дві множини називаються рівними, якщо вони складаються з однакових елементів.

Якщо множина В складається з деяких елементів множини А, то множина В називається підмножиною множини А $B \subseteq A$.

Над множинами можна виконувати деякі операції. Розглянемо деякі з них.

Перерізом множин А і В називається множина С, яка складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать кожній із даних множин.

Позначаємо це так: $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{C}$



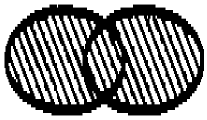

**Приклад 1**. А – множина всіх дільників числа 32, В – множина всіх дільників числа 24.

$$A = \{1, 2, 4, 6, 8, 16, 32\}, \ \ B = \{1, 2, 3, 4, 6,8,12, 24\}$$

$$C = A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$$

Об'єднанням або сумою двох множин А і В називається така множина R, яка складається з усіх елементів множин А і В і лише з них.

Позначаємо це так: $A \cup B = R$.



Кожний зі спільних елементів береться в множину лише один раз.

**Приклад 2**. Для множин А і В з прикладу 1 об'єднанням буде

$R = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32\}$.

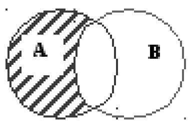
**Приклад 3**. Множина дійсних чисел є об’єднанням множин раціональних та ірраціональних чисел: $Q \cup I = R$.

Різницею двох множин А і В називається така множина D яка складається з усіх елементів множини А, які не належать множині В.

Записуємо $D = A \setminus B$.

**Приклад 4.** $A = \{5, 6, 8, 12\}$, $B = \{5, 6\}$, $D = \{8,12\}$.

**Приклад 5**. $A = \{5, 6\}$, $B = \{5, 12, 6\}$, $D = \varnothing$.




Коли множина В є підмножиною множини А ($B \subseteq A$), то різниця $D = A \setminus B$ називається доповненням множини В відносно множини А і позначається $D_A B$ [20].

**Приклад 6.** $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, $D_A B = \{5\}$.

Скінченна множина, для якої істотний порядок елементів, називається впорядкованою.

Вказати порядок розміщення елементів у скінченній множині з n елементів — означає поставити у відповідність кожному елементу даної множини певне натуральне число від 1 до $n$.

**Приклад 7**. Множини A = {1, 2, 7} і B = {2, 7, 1} є рівними, якщо вони не впорядковані, A = B.

Якщо ж вони є впорядкованими, то A ≠ B.

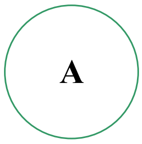
**Приклад 8.** Із 30 учнів класу потрібно вибрати двох:

а) старосту і його заступника;

б) для чергування у класі.

У випадку а) — це впорядкована множина.

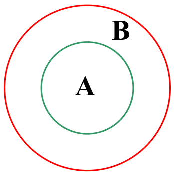
Для наочності скінчену множину елементів довільної природи зображають у вигляді множини точок, обмежених кривими, що не мають само перетинів.



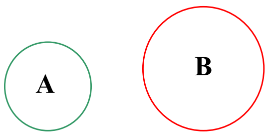

A – довільна скінчена множина.

Такі зображення називаються діаграмами Ейлера –Венна, або кругами Ейлера.

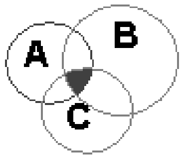
Наприклад, зображення множини A, що є підмножиною множини B (A ∈B) за допомогою кругів Ейлера матиме такий вигляд:




Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх переріз є порожньою множиною.



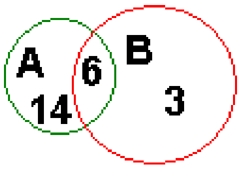

Зображення перерізу трьох множин A, B і C.




За допомогою кругів Ейлера зручно розв’язувати деякі типи задач.

**Приклад 9.** У деякій групі учнів 20 дітей захоплюються спортом, 9 – музикою, 6 – музикою і спортом. Визначити кількість учнів у групі і кількість тих учнів, які захоплюються тільки спортом, тільки музикою.

Множини, про які йдеться у задачі, зобразимо кругом Ейлера. Нехай А – множина учнів, що захоплюються спортом (їх 20). В – множина учнів, що захоплюються музикою (їх 9). Оскільки є учні, що мають два захоплення, то круги Ейлера , що відповідатимуть множинам В і А будуть перетинатись.




Спільній частині множин А і В відповідає число 6 (воно відповідає множині А і множині В). оскільки у множині А –

20 елементів, то не вистачає ще 14 (20-6=14).

У множині В – 9 елементів, а оскільки 6 елементів уже відмічено, то не вистачає ще 3 (9-6=3).

У кожен круг ставимо відповідне число. Одержали наочну картину, яка дає можливість відповісти на запитання задачі.

14+6+3=23 – кількість усіх учнів у групі;

14 учнів – захоплюється тільки спортом;

3 учні - захоплюються тільки музикою.

Відповідь: 23 учні; 14 учнів, 3 учня.

*Задачі для самостійного опрацювання.*

1. Знайти $A \cup B$, $A \cap B, A \backslash B$, якщо:

а) А={1, 2, 3, 4, 5, 6}; В={8 ,7, 3,1};

б) А={1, 3, 5, 7}; В={2, 4, 6, 8}.

2. Довести, що для будь-яких множин А, В, С правильна рівність:

а) $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$;

б) $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

3. Записати всі двоцифрові числа, цифри десятків, яких належать множині A={2, 3, 4}, а цифра одиниць – множині B={1 ,7}.

4. У класі 38 учнів. З них 16 грають у баскетбол, 17 – у хокей, 18 – у волейбол. Захоплюються баскетболом і хокеєм – 4, баскетболом і волейболом – 3, волейболом і хокеєм – 5. троє учнів не захоплюються ні баскетболом, ні волейболом, ні хокеєм. Скільки учнів захоплюється одночасно трьома видами спорту? Скільки учнів захоплюється одним з цих видів спорту?

5. У класі 36 учнів. До волейбольної секції записалось 17 дітей, до баскетбольної – 11, шахової – 9. Шестеро учнів не записалось до жодної секції. Відомо, що ніхто з учнів не записався до трьох секцій. С кільки дітей записалось у дві секції? [20]

*Відповідності. Графи*

Бінарною відповідністю φ між елементами множин A і B називається будь-яка підмножина декартового добутку множин A і B. Позначають:
$\varphi \subset A \times B$.

Множина A – область відправлення; множина B – область прибуття. Відповідності позначаються малими буквами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \varphi$, або великими буквами латинського алфавіту $R, S, T$.

Якщо між елементами $a, b$ пари $(a, b)$ існує відповідність $\alpha$, то позначається це так $(a, b) \in \alpha$, або $\alpha(a) = b$. Записи читаються так: елемент $a$ знаходиться у відповідності $\alpha$ з елементом $b$.

Існують різні способи задання відповідностей:

1) Переліком, коли записується вся множина пар, що належать цій відповідності;

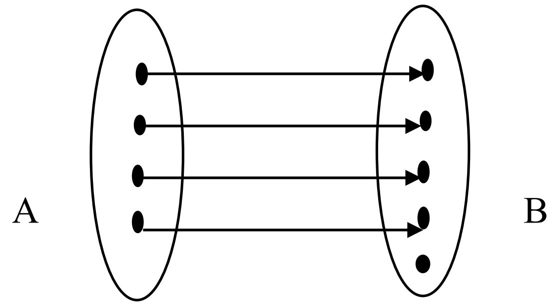
2) Таблицею (по аналогії з табличним заданням декартового добутку);

3) Графом. Графом називають систему точок і стрілок, які сполучають деякі з цих точок.

У загальному випадку образ елемента а означується як множина всіх елементів $y \in B,$ для яких $a\ \alpha\ y$. Може трапитись так, що з даної точки не виходить ні одна стрілка. Тоді образ елемента а порожній $\alpha(a) = \emptyset$.

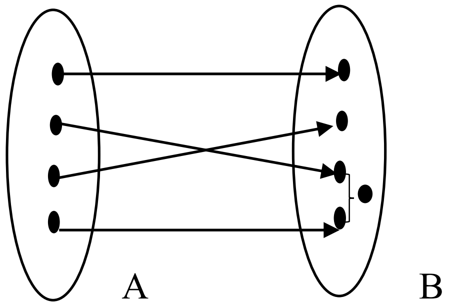
Відображенням множини А у множину В називається така відповідність між цими множинами, при якій кожному елементові $x \in A$ відповідає єдиний елемент з множини В.

Відображенням, при якому кожен елемент множини В є образом не більше, ніж одного елемента множини А ( тобто, в кожну точку множини В входить не більше, ніж одна стрілка), називають ін’єктивним відображенням множини А в В. Граф ін’єктивного відображення має вигляд:




Якщо при відображенні кожен елемент множини В є образом одного чи кількох елементів множини А, тобто У=В (множина А відображається на всю множину В), то дане відображення називається відображенням множини А на В або сюр’єктивним відображенням.

На графі сюр’єктивні відображення мають ту особливість, що в кожну точку множини В входить стрілка.

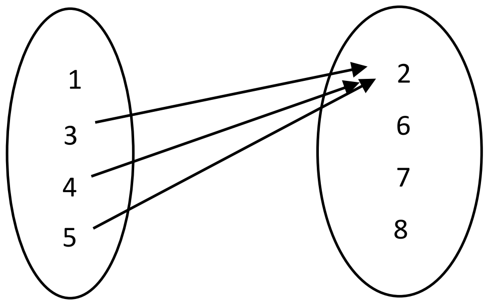



Відображення називається бієктивним або взаємнооднозначним, якщо воно одночасно ін’єктивне або сюр’єктивне, або коли кожний елемент множини В є образом точно одного елемента множини А.

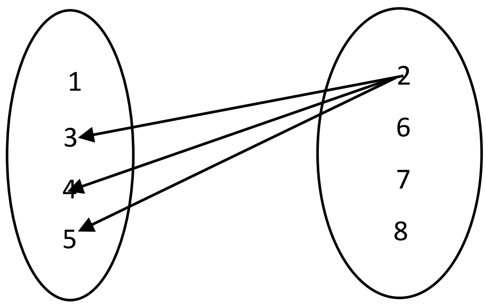
Щоб дістати граф оберненої відповідності, треба у графі відповідності $\alpha$ замінити всі стрілки на протилежні [20, 25-27].

**Приклад 1.** Для множин A={1,2,3,4,5} і B={2,6,7,8} задано відповідність «a>b», де a Є A, b Є B. Побудуйте граф даної та оберненої до даної відповідності.

**Розв'язання.** Спочатку побудуємо граф даної відповідності. Для цього множини A і B зобразимо овалами, їх елементи точками. Сполучимо ті елементи множин A і B, які перебувають у відповідності «більше».




Для побудови графа оберненої відповідності поміняємо у графі даної відповідності напрям стрілок на протилежний.




*Задачі для самостійного опрацювання*

1. Дано дві множини A={-1,-2,-3,0,1,2,3}, N – множина натуральних чисел. Поставити у відповідність кожному числу aЄA його квадрат. Побудувати його граф.

2. Між елементами множин X ={1,2,3} і Y={1,4,9,25} встановлено відповідність «y є квадратом x» де x є X, y є У. задати цю відповідність переліком пар, побудувати її граф.

3. A={1,3,4,5} і B={2,7,10}. Задати відповідності переліком пар та побудувати її граф, якщо $(a,b) \in A \times B, a < b$ [20, 29-31].

***Методи розв'язування нестандартних задач***

*Методика розв'язування задач на застосування принципу Діріхле*

При́нцип Діріхле́ (також принцип коробок Діріхле, принцип голубів або кролів і кліток) — комбінаторне твердження, сформульоване німецьким математиком Петером Діріхле.

Найчастіше в україномовній і російськомовній літературі використовується неформальне формулювання з кролями і клітками. В англомовній літературі частіше у формулюванні присутні голуби.

Найпоширеніше наступне формулювання цього принципу:

«Припустимо, деяке число кроликів розсаджені в клітках. Якщо число кроликів більше, ніж число кліток, то хоч би в одній з кліток буде більше одного кролика.». Доведення самого принципу дуже просте, в ньому використовується підрахунок кролів у клітках. Якщо б у кожній клітці сиділо не більше ніж один кріль, то всього в наших n клітках сиділо не більше ніж n кролів, що суперечить умові. Таким чином, ми довели принцип Діріхле методом від супротивного [5]. Розглянемо приклад.

**Приклад 1.** У школі навчаються 400 учнів. Довести, що хоча б двоє з них народилися в один день року.

Розв'язання. Найбільше в році буває 366 днів. Якщо дні вважати клітками, як у формулюванні принципу Діріхле, а учнів — кроликами, то в деякій клітці сидять не менше як  кроликів, тобто більше від одного кролика. Отже, не менше двох учнів народилися в один день року.

Можна міркувати від супротивного. Припустимо, що кожний день відзначають день народження не більше, ніж один учень, тоді всього учнів не більше від 366 — суперечність.

*Задачі для самостійного опрацювання.*

**1.** Кіт Базіліо пообіцяв Буратіно відкрити велику таємницю, якщо той складе чарівний квадрат 6 × 6 із чисел +1, −1, 0 так, щоб всі суми по рядкам, по стовпцям і по великим діагоналям були різні. Чи може Буратіно скласти такий квадрат?

**2.** На Землі океан займає більше половини площі поверхні. Довести, що в світовому океані можна вказати дві діаметрально протилежні точки.

**3**. У ящику лежать 10 пар чорних рукавичок і 10 пар червоних одного розміру. Скільки рукавичок потрібно витягнути з ящика навмання, щоб серед них були:

а) хоча б дві рукавички одного кольору;

б) хоча б одна пара рукавичок одного кольору?

**4.** Довести, що серед довільних трьох цілих чисел можна знайти два числа, сума яких ділиться на 2.

**5.** Довести, що серед довільних семи цілих чисел можна знайти три, сума яких ділиться на 3 [5].

# РОЗДІЛ 3
# ДІАГНОСТИКА ОБДАРОВАНОСТІ УЧНІВ 5-6 КЛАСІВ З МАТЕМАТИКИ

## 3.1 Методика проведення діагностики

Діагностика проводилась у загальноосвітній школі № 24 м. Рівне серед учнів 5-6 класів в два етапи. У відборі брали участь 5-А, 5-Б, 5-В та 6-А, 6-Б класів.

В основі критеріїв ми взяли критерії О. Савенкова. На першому етапі відбувався відбір учнів 5-6 класів за такими критеріями:

1) За інтерактивними особистісними характеристиками (допитливість, надчутливість до проблем, здатність до оцінювання).

2) За характеристикою сфери розумового розвитку (оригінальність мислення, гнучкість мислення, продуктивність мислення, пам'ять, висока концентрація уваги).

3) За самостійно проявленим бажанням розв'язувати нестандартні, логічні задачі.

4) За результатами участі у попередніх позакласних заходах з математики.

5) Для 5-х класів також проводилась бесіда з вчителями початкової школи.

На другому етапі були представлені 5 задач для кожної паралелі (див. додаток). В результаті відбирались учні, які розв'язали від 3 до 5 задач.

Таким чином учні 5-х класів максимально могли набрати 6 «+», а 6-х класів – 5 «+».

В результаті двох етапів відбиралися учні 5-х класів, які мали від 4 до 6 «+», а 6-х – від 3 до 5 «+».

Наведемо приклад діагностики відбору учнів в 6-А класі (див. табл.3.1).

Таблиця 3.1

**Діагностика відбору учнів 6-А класу**

| | І етап | | | | ІІ етап | К-сть обд. дітей |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 3-5 задач | |
| 1. Бугайчук Олександра | + | | + | + | + | 4 |
| 2. Брижицька Владислава | | | + | + | | |
| 3. Герасимчук Олександр | | | | + | | |
| 4. Дроботюк Володимир | + | + | | | | |
| 5. Засько Владислав | | + | | + | | |
| 6. Капітонова Валерія | | | | | | |
| 7. Карпець Марія | + | + | | | | |
| 8. Коновалюк Іванна | + | | + | | | |
| 9. Малімон Роман | | + | | + | | |
| 10. Мальчев Максим | | | | + | | |
| 11. Мельничук Дмитро | | + | + | + | + | |
| 12. Оксюта Марія | + | | + | | | |
| 13. Панасюк Владислав | | | | + | | |
| 14. Ревуцька Наталія | | | | | | |
| 15. Смаль Юлія | | + | + | + | + | |
| 16. Стрілецький Дмитро | + | + | | | | |
| 17. Чуб Владислав | | | | + | | |
| 18. Юхимчук Денис | + | | | + | | |
| 19. Ярощук Анна | + | + | + | + | + | |

## 3.2 Результати діагностики обдарованості школярів

За методикою, наведеною в першому розділі і за проведеною діагностикою в результаті такого відбору було виявлено 12 учнів 5-х класів і 6 учнів 6-х класів.

Проведені результати можна записати у вигляді таблиці (табл. 3.2)

Таблиця 3.2

| Питання відбору | 5-А | 5-Б | 5-В | 6-А | 6-Б |
|---|---|---|---|---|---|
| І етап: | | | | | |
| 1. За інтерактивними особистісними характеристиками (допитливість, здатність до оцінювання) | 6 | 8 | 5 | 8 | 9 |
| 2. За характеристикою сфери розумового розвитку (оригінальність, продуктивність мислення, пам'ять, висока концентрація уваги) | 7 | 7 | 4 | 8 | 5 |
| 3. Самостійно проявили бажання розв'язувати нестандартні задачі | 5 | 7 | 7 | 7 | 6 |
| 4. За участю у попередніх позакласних заходах з математики | 8 | 9 | 8 | 12 | 10 |
| 5. За бесідою з вчителями початкової школи (для 5-х класів) | 9 | 10 | 7 | | |
| ІІ етап (Розв'язування задач) | 5 | 6 | 4 | 4 | 3 |
| Кількість обдарованих учнів: | 12 | | | 6 | |

Отже, за результатами відбору по 5-х, 6-х класах виявлено 18 обдарованих учнів.

# ВИСНОВКИ

У дипломній роботі досліджено та впроваджено методику відбору обдарованих учнів 5–6 класів вчителем математики та систематизовано навчально-методичні матеріали факультативних занять для роботи з обдарованими школярами. Результати дослідження згідно з поставленими завданнями дали змогу сформулювати такі висновки.

1. Проаналізована психолого-педагогічна та методична література по темі дослідження дає змогу стверджувати, що проблема виявлення, розвитку і навчання обдарованих дітей викликає значний інтерес у психологічних і педагогічних колах. Обдарованими називають тих дітей, які через видатні здібності демонструють високі досягнення в одній або декількох сферах. Характерними особливостями обдарованих дітей є такі:

- у них чудова пам’ять;
- дуже допитливі, не терплять жодних обмежень в своїх дослідженнях;
- можуть тривалий час концентрувати свою увагу на одній справі;
- постійно намагаються вирішувати проблеми і розв’язувати задачі, які їм не під силу;
- часто нетерплячі та поривчасті.

2. Досліджено особливості, форми та методи роботи вчителя з обдарованими дітьми. І з’ясовано, що ефективності роботи з обдарованими учнями сприяють: своєчасна діагностика інтелектуальних особливостей і здібностей учня, гуманне співробітництво учителя та учня, створення для учня ситуацій упевненості в собі, підтримка ініціативи дитини, навчання прийомів самостійної роботи, способів самоконтролю, дослідницької діяльності, уміння отримувати знання самостійно. Умовами успішної роботи з обдарованими учнями є: осмислення значення розвитку обдарованих дітей кожним членом колективу і посилення у зв’язку з цим уваги до проблеми формування позитивної мотивації навчання; визнання того, що система роботи з

обдарованими учнями – один з пріоритетних напрямів роботи школи; постійне вдосконалення науково-методичної роботи та освітнього процесу загальноосвітніх навчальних закладів.

Визначені методи роботи з обдарованими учнями, а саме: дослідницький, частково-пошуковий, проблемний, проектний. А також визначені форми роботи, такі як консультації за проблемою, що виникла; наукові гуртки, факультативні заняття, дискусії, ігри. Зокрема в нашій роботі розглядаються лише факультативні заняття.

3. Систематизовано навчально-методичний комплекс вчителя математики для роботи з обдарованими учнями 5-6 класів, а саме: взято програму факультативного курсу «Математичний калейдоскоп» Гартфіль О. Р., затвердженої Міністерством освіти і науки України та згідно неї розроблено зміст навчального матеріалу для 5 та 6 класів.

Зокрема, наведено методичні рекомендації, приклади розв’язування та задачі для самостійного розв’язання таких тем: магічні квадрати, числові головоломки, математичні ребуси, задачі на зважування та переливання, задачі на відгадування задуманого числа, математичні фокуси, симетрія, стратегії, головоломки зі сірниками, задачі на розрізання фігур, основні поняття логіки, висловлювання, софізми, поняття та види систем числення, ознаки подільності на 4 і 25, 8 і 125, 7 (11, 13). НСК та НСД, способи їх знаходження, задачі на дроби, відсотки, рівняння з модулями, геометрична інтерпретація розв’язування рівнянь з модулями, елементи теорії множин, круги Ейлера-Венна, задачі на застосування принципу Діріхле.

4. Здійснено діагностику обдарованості з математики учнів 5–6 класів загальноосвітньої школи №24 м. Рівне. Діагностика здійснювалась в два етапи. На першому етапі відбувався відбір учнів за такими критеріями:

- За інтерактивними особистісними характеристиками (допитливість, надчутливість до проблем, здатність до оцінювання).

- За характеристикою сфери розумового розвитку (оригінальність мислення, гнучкість мислення, продуктивність мислення, пам’ять, висока концентрація уваги).
- За самостійно проявленим бажанням розв’язувати нестандартні логічні задачі.
- За результатами участі у попередніх позакласних заходах з математики.
- Для 5-х класів також проводилась бесіда з вчителями початкової школи.

На другому етапі були представлені 5 задач для кожної паралелі.

Таким чином в результаті відбору було виявлено 18 обдарованих учнів.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Афанасьєва В. Є. Формування психологічної готовності педагогів до роботи з обдарованими школярами / В. Є. Афанасьєва // Матер. Всеукр. науково-практ. конфер. «Підготовка педагогічних кадрів до роботи з обдарованими школярами в системі післядипломної педагогічної освіти», м. Рівне, 22–23.11.2007 р. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.roippo.rivne.com/

2. Бабенко С. П. Усі уроки математики. 6 клас І семестр / С. П. Бабенко, І. С. Маркова // Усі уроки. – Х.: Вид. група «Основа», 2014. – 254 с.

3. Білак Ю.Ю. Системи числення: методичні рекомендації з базової теми дисципліни «Інформатика» / Ю. Ю. Білак, Л. Я. Данько-Товтин. – Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2015. – 24 с.

4. Богоявленская Д. Б. Психология одаренности: понятие, виды, проблемы / Д. Б. Богоявленская, М. Б. Богоявленская. – М.: МИОО, 2005. – Вып. 1. – 176 с.

5. Буковська О. І. Математична логіка. 5-9 класи / О. І. Буковська // Математика в школах України– Х.: Вид група «Основа», 2005. – Вип. 11(35). – 176 с.

6. Буряк С. Обдаровані діти / С. Буряк // Здібності. Обдарованості. Таланти. – Бібліотека «Шкільний світ». – К.:2009. – С. 5.

7. Возняк Г. Магічні фігури та числа. 5-6 класи / Г. Возняк, О. Возняк. – Тернопіль: навч. книга «Богдан», 2011. – 80 с.

8. Володарська М. О. Робота з обдарованими дітьми / М. О. Володарська, А. І. Настенко, О. М. Пілаєва та ін. // Початкове навчання та виховання. –Х.: Вид. група «Основа», 2010. – Вип. 1(73). – 190 с.

9. Гільбух Ю. З. Розумово обдарована дитина / Ю. З. Гільбух // Психологія, діагностика, педагогіка. – К.: Освіта, 1992. – 176 с.

10. Джус І. І. Особливості підготовки вчителів до роботи з обдарованими учнями / І. І. Джус // Освіта та розвиток обдарованої особистсті. – 2014. – Вип. №3 (22). – С. 4-18.

11. Дьяченко М. И. Психологический словарь-справочник / М. И. Дьяченко, Л. О. Кандыбович // Библиотека практической психологии. – 2004. – 576 с.

12. Зазимко О. В. Основні теоретичні підходи до визначення обдарованості / О. В. Зазимко // Обдарована дитина. – 1998. – № 8. – С.5-12.

13. Корецька Л. В. Підготовка вчителів до роботи з обдарованими учнями:Навч.- метод. посібн. для сист. післядипл. освіти / Л. В. Корецька, О. Е. Жосан. – Кіровоград: Вид-во Кіровоградського обл. інст. післядипл. пед. освіти ім. В. Сухомлинського, 2008. – 137 с.

14. Красноголов В. О. Визначення поняття “обдарованість” у зарубіжній психолого-педагогічній літературі / В. О. Красноголов // Обдарована дитина. – 1998. – № 5-6. – С. 13.

15. Лейтес Н. С. Способности и одаренность в детские годы / Н. С. Лейтес. – М., 1984. – 123 с.

16. Маланюк П. М. Стежини до математичних узагальнень / П. М. Маланюк. – Тернопіль: Мандрівець, 1997. – 64 с.

17. Маркова І. С. Математика після уроків. Матеріали для позакласної роботи / Упорядн. І С. Маркова // Математика в школах України. – Х.: Вид. група «Основа», 2004. – Вип. 11(23). – 192 с.

18. Мерзляк А. Г. Математика: підручн. для 5 кл. загальноосв. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2013. – 352 с.

19. Мерзляк А. Г. Математика: підручн. для 6 кл. загальноосв. навч. Закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2014. – 400 с.

20. Приймак О. П. Математика. Практичні заняття для студентів І курсу педагогічного факультету (1 семестр) / О. П. Приймак, І. Я. Філюк. – 2-е вид., доповн. – Рівне: РДГУ, 2015. – 68 с.

21. Прокопенко Н.С. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором / упорядн. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – Ч. 1. – 320 с.

22. Рензулли Дж. С. Модель обогащающего школьного обучения: практическая программа стимулирования одаренности детей / Дж. С. Рензулли, С. М. Рис // Основные современные концепции творчества и одаренности: (Сб. статей) / Под ред. Богоявленской Д. Б. – М.: Молодая гвардия, 1992. – С. 214 - 242.

23. Руденко В. М. Стратегія виграшу / В. М. Руденко // Математика в школах України. – 2015. – Вип. 31-32 (475-476). – С. 44-49.

24. Савенков А. И. Детская одаренность: развитие средствами искусства / А. И. Савенков. – М.: Педагогическое общество России, 1999. – 220 с.

25. Савченко О. Я. Дидактика початкової школи. / О. Я. Савченко // Підручник для студентів педагогічних факультетів. – К.: Абрис, 1997. – 389 с.

26. Скляренко О. Ю. Числові головоломки / О. Ю. Скляренко // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо математичного циклу «ІТМ плюс - 2015»: матеріали ІІ міжнародної науково-математичної конференції (3-4 грудня 2015 р. м. Суми): у 3 ч. / упорядн. Чашечникова О. С. – Суми: видавничо-виробниче підприємство «Мрія», 2015. – Ч. 1. – 131 с.

27. Сухарєва Л. С. Задачі на переливання, зважування, перекладання / Л. С. Сухарєва. – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 48 с.

28. Сущенко Г. І. Характерні особливості обдарованих дітей / Г. І. Сущенко // Початкова школа, 1994. – №2. – С. 10-11.

29. Теплов Б. М. Способности и одаренность / Б. М. Теплов // Проблемы индивидуальных различий. – Москва, Изд. Академии наук РСФСР. – С. 9-20.

30. Тригубець Г. Є. Розвиток мотиваційної складової психологічної готовності педагогів до роботи із творчо обдарованими / Г. Є. Тригубець // Матер. Всеукр. науково-практ. конфер. «Підготовка педагогічних кадрів до роботи з обдарованими школярами в системі післядипломної педагогічної освіти», м. Рівне, 22–23.11.2007 р. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.roippo.rivne.com/ .

31. Харік О. Ю. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 5-7 / О. Ю. Харік // Математика в школах України. – Х.: Вид. група «Основа», 2008. – Вип. 8 (68). – 143 с.

32. Черньонков Я. О. Самоосвіта вчителя як показник творчого становлення / Я. О. Черньонков // Педагогічний вісник. – 2007. – № 4. – С. 54–58.

# ДОДАТОК

*Задачі для 5 класу*

1. Члени математичного гуртка одержали завдання. У тридцятиодноцифровому числі 1234567891011121314151617181920, яке утворене записом підряд перших двадцяти натуральних чисел, викреслити двадцять шість цифр так, щоб одержане п’ятицифрове число, що записане цифрами у тому ж порядку було найбільшим (найменшим).

2. Довжина ламаної ABCDE дорівнює 19 см. При цьому сума довжин AB і BC дорівнює 9 см, а довжини BC, CD і DE однакові. Яка довжина сторони AB?

3. Віднови цифри, замінені у записах дій зірочками:

```
* 2 * 5 * | 3 2 5
          |------
* * * * * | 1 * *
---------
* 0 * *
* 9 * *
----------
    * * *
    * * *
    ------
        0
```

4. У курчат і ягнят 46 ніг і 14 голів. Скільки серед них ягнят і скільки курчат? Як змінилась би відповідь, якби ніг було 48?

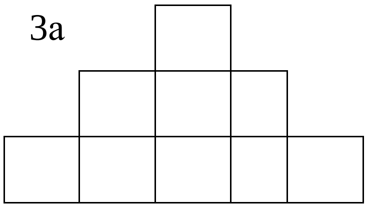
5. Чи можуть три юнаки за 3 год дістатися до міста, віддаленого до села на 60 км, якщо в їхньому розпорядженні є двомісний мотоцикл, на якому можна їхати зі швидкістю 50 км/год? Нагадаємо, що середня швидкість пішоходів 5 км/год [16].

*Задачі для 6 класу*

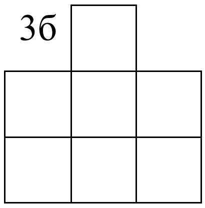
1. Весною Карлсон змарнів на 25%, але влітку додав до своєї маси 20%. Восени він знову схуднув на 10%, але зимою поправився на 20%. Змарнів, чи поправився Карлсон в кінці року?

2. Хлопчик складає із кубиків споруду, вигляд якої спереду зображено на малюнку 3 а, а вигляд збоку – на малюнку 3 б. скільки кубиків він міг використати?

3а



3б



3. Складене число буде ділитися на добуток двох взаємнопростих дільників, якщо воно ділиться на кожне з цих дільників. Наприклад, число 18 ділиться на 6 тому, що воно парне і сума його цифр ділиться на 3. Перевір справедливість цих двох тверджень на інших прикладах.

4. Є свинцеві кульки однакового розміру. Скільки цих кульок потрібно переплавити, щоб відлити кулю, радіус якої у 3 рази більший, ніж радіуси цих кульок? Скільки потрібно взяти малих кульок, щоб виготовити кулю, радіусом у 6 раз більшим?

5. Сім однакових хлібин треба розділити порівну між дванадцятьма особами. Як це зробити. Не розрізаючи жодну хлібину на 12 частин? [16]