Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота
Спеціаліст
(освітньо-кваліфікаційний рівень)
на тему: «Методика вивчення геометричних перетворень в шкільному курсі математикиі »

Виконала: студентка V курсу, групи МЕФІ-51
спеціальності 014 «Середня освіта»
спеціалізації 01405 «Математика »

Мазурець Юлія Олегівна

Керівник канд.пед.наук, доц. Павелків О.М.

Рецензент канд. фіз.- мат. наук, доц. Сяський В.О.

Рівне - 2017 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Зміни в суспільстві, які сталися за останні декілька років, вплинули на систему освіти. Характерним став пошук нових педагогічних технологій, форм, методів навчання. Широкого використання в навчальному процесі набуло впровадження ІКТ, та дидактичне забезпечення, що сприяє становленню всебічно розвиненої особистості, її готовності до неперервної освіти та професійної діяльності.

Вивчення геометрії пов`язане з оволодінням методів пізнання, науковим стилем мислення, розвитком інтуїції, просторової уяви і уявлень.

Застосування у процесі навчання математики мультимедійних технологій відкриває широкі можливості як у викладанні дисципліни, так і в її опануванні . Електронні посібники, створені на базі мультимедіа, здійснюють сильний вплив на пам’ять та уяву, полегшують процес запам’ятовування, дозволяють зробити урок більш цікавим і динамічним.

Програмні засоби навчання математики використовуються у трьох напрямах: ілюстративному, схематичному та інтерактивному. Схематичний метод дозволяє скористатися можливостями комп’ютерних програм для побудови структурно-логічних схем та опорних конспектів. Після комп’ютерної обробки опорні конспекти стають більш наочними та цікавими.

Геометрія, як і будь-який інший навчальний предмет, не може обходитися без наочності. Відомий російський методист-математик В.К. Беллюстин ще на початку XX століття зазначав, що «ніяка абстрактна свідомість неможлива, якщо їй не передує збагачення свідомості потрібними уявленнями».

Відомо, що геометричні образи в дітей формуються на наочній основі, тому розвиток образного мислення залежить не тільки від наукового змісту навчального предмета, але й від засобів наочності, які використовує вчитель.

Наочні методи застосовуються на всіх етапах педагогічного процесу. Їх роль забезпечити всебічне, образне сприйняття, дати опору на мислення.

Відповідно розумінню змісту образного мислення, яке запропоноване І.С. Якиманською, слід розрізняти дві його сторони: створення образа і оперування ним. Те, що учень оволодів прийомами створення просторових образів по їх графічному зображенню, не означає, що він зможе успішно оперувати ним.

Слід згадати сформульований Л.С. Виготським закон, якому підпорядковується діяльність уяви: творча діяльність уяви знаходиться у прямій залежності від багатства і різноманіття попереднього досвіду людини, тому що цей досвід надає матеріал, з якого створюються побудови уяви.

Наприкінці XIX- на початку XX ст. в період міжнародного руху за реформу шкільної математичної освіти Ф. Клейн запропонував зробити геометричні перетворення провідною ідеєю шкільної геометрії. Хоча цілком реалізувати цю ідею не вдалося, однак у 60-ті роки XX ст. в період активізації руху за реформу цікавість до геометричних перетворень в шкільному курсі знову зросла. Висловлювались пропозиції зробити геометричні перетворення основою побудови шкільної геометрії, створювались відповідні підручники. Проте вони не були схвалені педагогічною громадськістю, вчителями.

Початки геометричних знань застосовували вже кілька тисячоліть тому, народи Індії, Єгипту, Персії, Греції та ін. Люди тисячоліттями спостерігали за кругом і серпанком місяця, гладінню озера, вертикальністю стрункого дерева, будували своє житло, обтесували каміння, вимірювали і огороджували ділянки землі, виконували земляні роботи, виготовляли глиняний посуд, удосконалювали форми будівельних об'єктів і поряд з цим створювали, формували свої уявлення та поняття про геометричні образи: круг, коло, квадрат, трикутник, відрізок, пряма, поверхня, куб, циліндр тощо.

Загальновідомо, що ідея геометричних перетворень дуже слабо відображена в шкільних програмах. У минулому намагалися виправити положення включенням спеціальної теми в IX класі. Однак це рішення виявилося незадовільним. Крім недостатньої підготовки вчителів до викладання такої теми в старших класах, можна вказати ще на одну важливу обставину, що також є причиною невдачі. Учнів, які навчені дивитися на геометричні фігури і мислити про них з традиційної «евклідової» точки зору, важко переучувати в старших класах. Їх мислення в галузі геометрії вже натреновано в визначеному напрямку. Розв'язуючи, наприклад, яке-небудь завдання, в якому потрібно обгрунтувати рівність двох відрізків, учень відразу ж починає шукати або будувати два рівних трикутники, в яких відрізки відповідно дорівнюють сторонам, навіть в тому випадку, коли набагато простіше вказати переміщення, що переводить один з цих відрізків в інший. Саме тому, що його мислення спрямоване на пошук рівних трикутників, він не бачить більш простого розв`язку, заснованого на застосуванні перетворень.

Однак, як показав десятилітній досвід введення та широке використання геометричних перетворень, з 6 класу в якості методу доведення теорем і розв'язку завдань викликає в учнів труднощі. Тут береться до уваги більш глибока, психологічного характеру причина. Зазвичай у застосуванні в процесі навчання геометричних креслень, можна спостерігати рівні трикутники, їх можна побудувати, а перетворення можна тільки уявляти. Це, звісно, викликає додаткові труднощі, навіть в тих випадках, коли застосування перетворень заслуговує уваги. Саме доведення за допомогою перетворень може виявитися набагато простіше, однак пошук його важчий.

Активізація творчості, самостійності учнів, формування їх мислення в процесі оволодіння математикою ефективно здійснюється через розв'язування задач на застосування геометричних перетворень.

Знання цієї теми широко використовується в подальшому вивченні геометрії (старших класах). Також геометричні перетворення застосовують в архітектурі, будівництві.

Кожній інженерній споруді або будівлі передує виготовлення її моделей або планів, які набагато відрізняються від оригіналу розмірами, але відповідають йому формою. При виготовленні моделі, наприклад автонавантажувача чи літака, доводиться змінювати розміри оригіналу, користуючись певним масштабом. Те саме доводиться робити під час складання географічних карт, фотокопій тощо. При зменшенні або збільшенні розмірів предметів нам вдається лише з певною точністю зберегти однаковість їх форми, що пояснюється причинами технічного характеру (матеріал, інструменти тощо).

Мета дослідження полягає в розробці методики вивчення даного курсу геометрії, який сприяє підвищенню розуміння, математичного і логічного мислення в учнів та експериментальній перевірці її ефективності.

Об'єктом дослідження є процес вивчення геометричних перетворень в шкільному курсі геометрії.

Предметом дослідження є методика проведення занять з розділу «Геометричні перетворення» та особливості розв'язування задач на їх застосування.

В процесі дослідження була висунута ***гіпотеза***, яка полягає в наступному: застосування новітніх комп'ютерних технологій (програми GRAN-2D) на уроках геометрії під час вивчення геометричних перетворень сприятиме підвищенню рівня знань, дає змогу учням краще засвоїти програмовий матеріал із меншими затратами часу, дає можливість розв'язати більше поурочних вправ, розвиває логічне мислення, зацікавлює дітей.

Поставлена мета і висунута гіпотеза передбачає розв'язання наступних завдань:

1). опрацювання методичної літератури з теми дослідження.

2). вивчення стану досліджуваної проблеми в теорії та на практиці сучасної школи.

3). розробка й експериментальна перевірка змісту занять.

4). розробка методичних рекомендацій по застосуванню ефективності форм і методів вивчення геометрії у шкільному курсі.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому, що дані висновки, розроблена система самостійних робіт, опорних таблиць можуть бути використані вчителями при організації навчального процесу у дев'ятих класах під час вивчення геометричних перетворень для підвищення якості навчального процесу та його вдосконалення.

Апробація результатів дослідження. Основні положення дослідження обговорювались на X Міжнародній науково-практичній конференції студентів та молодих науковців “Наука, освіта, суспільство очима молодих”, яка проходила 17 травня 2017 року в Рівненському державному гуманітарному університеті у рамках Всеукраїнського Фестивалю науки. Результати дослідження відображені у статті «Методика вивчення геометричних перетворень в шкільному курсі геометрії» у збірнику матеріалів X Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих науковців “Наука, освіта, суспільство очима молодих” .

РОЗДІЛ І

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1 Психолого-педагогічні особливості вивчення теми «Геометричні перетворення»

Для ефективнішого засвоєння теми «Геометричні перетворення» потрібно дивитися як на «задачу» з психологічної точки зору.

В психологічній та педагогічній літературі не має єдиного пояснення «задачі». Різні автори по-різному підходять до питання про вивчення і застосування геометричних перетворень.

Щоб геометричні перетворення можна було застосувати, бажано встановити найважливіші їх властивості. В неповній середній школі доводять, що при русі пряма переходить в пряму, промінь – у промінь, відрізок – у відрізок, будь-яка фігура – у рівну їй фігуру, що при русі зберігаються кути між променями, порядок взаємного розміщення точок на прямій. Пропонується також довести, що два рухи, виконані послідовно, дають знову рух, і що перетворення, обернене до руху, є рух. Доведення цих властивостей є в навчальному посібнику. Зауважимо тільки щодо термінології. Нерідко говорять, наприклад, «під час руху прямі переходять у прямі». Це не зовсім правильно, бо рух, як геометричне перетворення, не характеризується часом. Краще говорити «при русі прямі переходять у прямі» і т. ін.

Зрозуміло, що учні не тільки повинні знати, в що переходить, наприклад, пряма при повороті, а й вміти повернути дану пряму навколо даної точки на даний кут. Вони повинні вміти ров'язувати задачі на побудову фігур, в які переходять дані фігури (пряма, коло, точка, трикутник) при русі. Якщо врахувати, що в школі вивчають чотири види рухів, то виходить, що учні повинні вміти виконувати 16 відповідних перетворень. При цьому повинні варіюватись неістотні умови. Наприклад, слід запропонувати учням побудувати коло, симетричне даному відносно даної прямої, якщо ця пряма: а) лежить поза колом; б) перетинає коло, але не проходить через його центр; в) проходить через центр даного кола.

Пояснювати можна так: при русі кожна фігура переходить у рівну їй фігуру, тому коло при перетворенні симетрії переходить у рівне йому коло. Отже, щоб побудувати коло, симетричне даному відносно даної прямої a, будуємо спочатку точку O_1 , симетричну центру O даного кола відносно a. Потім з точки O_1 радіусом, що дорівнює радіусу даного кола, описується потрібне коло. Якщо пряма a проходить через центр O, ніякої побудови виконувати не треба: відносно такої прямої дане коло симетричне само собі [6, с.123].

Під час опрацювання даної теми є можливість розглянути загальне поняття рівності геометричних фігур. Дві фігури називаються рівними, якщо рухом одну з них можна перевести в іншу. Бажано показати учням, що відомі їм окремі означення рівності відрізків, кутів і трикутників не суперечать новому загальному означенню.

Говорячи про рівність геометричних фігур, бажано хоч коротко зупинитись на питаннях стандартизації виробництв, зауважити, що цеглу, листи жерсті, шиферу, скла, фанери, відповідні деталі до машин випускають стандартних розмірів. Принаймні на позакласних заняттях слід розглянути цікаві задачі про заповнення площини рівними фігурами, пов'язавши з цим роботу паркетника, облицювальника та ін. Хоч на кількох конкретних прикладах бажано показати, як можна використовувати відомі учням властивості рухів при розв'язуванні задач.

1.2. Розвиток просторового мислення при вивченні теми геометричні перетворення

Математичні об'єкти мають лише одну характеристику: вони знаходяться в певному відношенні. Тому математичне мислення – це абстрактне, теоретичне мислення, об'єкти якого позбавлені будь-якої дійсності і можуть інтерпретуватися довільним чином аби при цьому зберігалися задані між ними відношення. Однією з найважливіших компонентів математичного мислення є просторове мислення, просторова уява. Отже, геометрична освіта включає в себе образний компонент (А.Д. Александров, Г.Д. Глейзер), під яким розуміється певний рівень розвитку просторової уяви.

Проблемою розвитку просторової уяви займаються багато науковців.

Аналіз літератури показав, що в основному просторову уяву у школярів досліджують на основі геометричного матеріалу (Г.Ф. Владимирський, О.М. Кабанова-Меллер, А.Я. Колосовський, Г.Г. Маслова, Г.М. Нікітина, Н.С. Подходова, А.М. Поляков, А.Д. Семушин, В.С. Столєтнєв, А.І. Фетисов, А.Н. Чалов, М.Ф. Четверухин, Н.М.Шоластер та інші), географії (О.М.Кабанова-Меллер та інші), креслення (Б.Ф. Ломов, О.М.КабановаМеллер, В.С. Столєтнєв, М.Ф. Четверухин, І.С. Якиманська та інші), математиці (В.І. Зикова, І.Я. Каплунович) [19, с.86].

Розвиток просторової уяви у дорослих розглядають Т.Д.Глейзер, І.Я.Каплунович, Л.Ф.Культина, Г.М.Нікітина, А.Н.Пижьянова, В.С.Столєтнєв та інші. Положення про розвиток просторового мислення учнів старших класів засобами геометрії розглянуті в статті Г.М. Нікітиної, Л.Ф. Культинової, А.Н. Пижьянової. Ними виділені вміння, що відносяться до показників розвитку просторового мислення: передача форми, розмірів, розташування елементів в графічній моделі, зміни точки відліку, аналіз і синтез геометричних образів, розгляд об’єкта з різних точок зору, перетворення геометричного представлення в уяві, зміни структури, наочна оцінка лінійних та кутових величин.

Геометричні перетворення вивчають в 9 класі з метою навчити використовувати їх властивості для розв’язування планіметричних задач та задач на застосування геометричних перетворень, а також розвиток просторової уяви, просторового мислення.

Під час мисленнєвої діяльності образи перетворюються так, що в результаті маніпулювання ними ми можемо знайти розв’язання певної поставленої перед нами задачі. Слід відмітити, що понятійне та образне мислення знаходяться у тісному взаємозв'язку, вони доповнюють одне одного. Понятійне мислення дає більш точне та узагальнене відображення дійсності, але це відображення є абстрактним. Образне мислення дозволяє отримати конкретне, суб'єктивне відображення оточуючої нас дійсності.

1.3. Роль геометричних перетворень в процесі вивчення математики та особливості викладання даної теми згідно діючої програми та підручників

Навчальний аспект вивчення геометричних перетворень :

- систематизація знань учнів про властивості рухів;
- формування понять про види руху: симетрія відносно прямої і точки, паралельне перенесення, поворот.

Розвивальний аспект вивчення геометричних перетворень :

- розвиток спостережливості й уваги;
- вироблення навичок пізнавальної і творчої активності;
- розвиток геометричного мислення, навичок математичного мовлення.

Виховний аспект вивчення геометричних перетворень :

- виховання відповідальності, відчуття колективізму, доброти, прагнення допомогти (під час роботи в групах);
- виховання свідомого ставлення до навчальної праці;
- спонукання до самостійного здобуття знань, допитливості.

Стимулюючий аспект вивчення геометричних перетворень :

- формування стійкого інтересу до предмета;
- розвиток уміння користуватися цифровими освітніми ресурсами.

Геометричні перетворення – дуже важливий розділ курсу геометрії. У геометрії Евкліда, яку ми вивчаємо в шкільному курсі математики, переважно досліджуються ті властивості геометричних фігур, що не змінюються при їх русі (образно кажучи, кожну геометричну фігуру можна розглядати як "тверду", наприклад, вирізану з картону), – симетрія та поворот, а також ті, де відбувається перетворення подібності – гомотетія.

Метод геометричних перетворень є досить продуктивним методом розв’язування геометричних задач. Математична теорія симетрії, симетрія у живій та неживій природі, мистецтві, архітектурі, інженерії отримали спільне підґрунтя у геометричних перетвореннях [29, с.135].

У прийнятій 1968 р. програмі шкільного курсу геометричні перетворення вважались однією з провідних змістових ліній геометрії (апаратом для доведення теорем та розв'язування задач. Цей погляд на геометричні перетворення було реалізовано у навчальних посібниках за редакцією А.М.Колмогорова (планіметрія) та Скопця (стереометрія). Слід зазначити, що спроба в цих посібниках трактувати геометричні перетворення як відображення площини (простору) на себе з широким використанням термінології і символіки множин призвела до надмірної заформалізованості навчального матеріалу і як результат - до труднощів у його сприйманні.

За підручником геометрія О. В. Погорєлова рухи розглядались у 8 класі, а подібність фігур - у 9 класі. При цьому в зазначених паралельних підручниках по-різному означаються провідні поняття геометричних перетворень, визначене різне місце для їх застосування при доведенні теорем і розв'язуванні задач.

Учні повинні розуміти суть кожного із зазначених у програмі видів геометричних перетворень, знати їх властивості, ознаки подібності трикутників і вміти застосовувати їх до розв'язування найпростіших задач.

Система введення понять теми «Рухи» залежить від місця цієї теми в загальній структурі курсу планіметрії. У шкільному підручнику з геометрії до понять теми слід віднести 12 понять, нових для учнів, серед яких: поняття перетворення фігури, руху, точок, симетричних відносно даної точки і відносно даної прямої, означення перетворень симетрії відносно даної точки і відносно даної прямої, поняття центрально-симетричної фігури і фігури, симетричної відносно прямої, повороту площини навколо даної точки, паралельного перенесення, співнапрямлених прямих і загальне поняття рівних фігур .

Поняття перетворення фігури доцільно ввести описово на наочному, інтуїтивному рівні, як це фактично і зроблено в підручнику

Навчання математики у 9 класах загальноосвітніх навчальних закладів здійснюється за новими підручниками:

«Геометрія. 9 клас» (автори Бурда М.І., Тарасенкова Н. А.) видавництва «Зодіак – ЕКО », «Геометрія. 9 клас» (автори А. П. Єршова, О.Ф.Крижановський, С. В. Єршова) видавництва Ранок.

Ці підручники створено відповідно до Державного стандарту та нових програм з геометрії для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів.

Діюча шкільна програма та підручники Геометрія за ред. Бурди, Тарасенка; Геометрія за ред. Мерзляка, Полонського, Якіра; Геометрія за ред. Єршової , Годобородька, Крижанівського передбачає вивчення геометричних перетворень в 9 класі.

У темі «Геометричні перетворення» розглянуто рух та його види, гомотетію, перетворення подібності, властивості цих перетворень. Тепер подібність фігур розглядається в більш загальному, ніж у 8 класі, аспекті – як результат перетворень на площині. Значну увагу слід приділити опису перетворень за допомогою декартових координат на площині, встановленню відповідності між сутністю перетворення та його алгебраїчною інтерпретацією. Цей математичний апарат надає інструментарій для розв'язування широкого класу задач, у тому числі й тих, що розв'язувалися раніше іншими способами.

В підручник «Геометрія. 9 клас» А. П. Єршової, О.Ф. Крижановського, С.В.Єршова успадковується система організації навчального матеріалу, змістові лінії, апарат орієнтування. Разом з цим, у порівнянні з попередніми підручниками, з'являються нові дидактичні акценти, пов'язані із специфікою «геометрії методів».

Структура, обсяг і співвідносність розділів навчального матеріалу повністю відповідають діючій програмі. Однак порівняно з традиційними підходами до розгляду відповідного навчального матеріалу, запропоновано декілька важливих інновацій. Зокрема, введення описового значення співнапрямлених променів дає змогу задавати паралельне перенесення напрямом і відстанню. Це дає можливість спростити низку доведень і сформувати уявлення учнів про геометричне перетворення на площині без обов'язкової «прив'язки» до системи координат. Матеріал про основні види симетрій (центральну та осьову) доповнено відомостями про поворотну та переносну симетрії (що вкрай важливо з огляду на вивчення тригонометрії в 10 класі) та прикладами застосування геометричних перетворень у різних царинах практичної діяльності людини. Розділ «Геометричні перетворення» завершується додатковим параграфом, у якому викладено особливості відповідного методу геометрії. Значно збільшено кількість практичних вправ і задач, урізноманітнено задачі на готових кресленнях.

Ознаки подібності трикутників прийнято викладати окремо, хоча спільні ідея і засіб доведення уможливлюють одночасне сприйняття учнями усіх трьох ознак. Такий підхід не тільки прискорює процес засвоєння матеріалу, а й міцно цементує його у цілісну систему, оволодіння якою звільняє учнів від необхідності запам'ятовування зайвої інформації.

РОЗДІЛ ІІ
МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

2.1 Наочність – необхідна умова успішного вивчення геометрії

Наочність - один із видів дидактичного забезпечення. Наочність і практичність навчання геометрії є необхідними умовами успішного її вивчення.

Геометрія, як і будь-який інший навчальний предмет, не може обходитися без наочності. Відомий російський методист-математик В.К. Беллюстин ще в початку XX століття зазначав, що «ніяка абстрактна свідомість неможлива, якщо їй не передує збагачення свідомості потрібними уявленнями».

Формування абстрактного мислення у школярів з перших шкільних кроків вимагає попереднього поповнення їх свідомості конкретними уявленнями. При цьому вдале і вміле застосування наочності спонукає дітей до пізнавальної самостійності і підвищує їхній інтерес до предмету, є найважливішою умовою успіху [19, с.131].

У тісному зв'язку з наочністю навчання знаходиться і його практичність.
Саме з життя черпається конкретний матеріал для формування наочних геометричних уявлень. У цьому випадку навчання стає наочним, узгодженим з життям дитини, відрізняється практичністю. Так виникла ідея викладання так званої наочної геометрії. Сказане було добре відомо російським педагогам минулих років і успішно застосовувалося на практиці.

Щоб організувати спостереження учнів, від вчителя потрібно відома обережність. Поширена помилка - застосування дуже яскравою наочності, коли її навчальна сутність затьмарюється яскравими фарбами. Недосвідчений учитель часто привертає увагу дітей до другорядних деталей. Зайве оздоблення роздаткового матеріалу. Схема, таблиця містять колір тільки для виділення сенсу, але не для прикраси .

Наочні методи застосовуються на всіх етапах педагогічного процесу. Їх роль забезпечення всебічних, образне сприйняття, дати опору на мислення.

Кожен вчитель постійно повинен розуміти, що міцні знання у дітей будуть у тому випадку, якщо він буде спиратися на життєвий досвід дитини.

Постійно повинна проводитися робота, пов'язана з наглядом, порівнювання груп предметів. Широко повинна використовуватися наочність, дидактичний матеріал.

При вивченні нового матеріалу рекомендується така побудова уроку, при якому робота починається з різноманітних демонстрацій, проведених учителем або учнем. Застосування наочності на уроках математики при вивченні геометричного матеріалу, дозволяє міцно і свідомо засвоїти дітям всі програмні питання.

Мова математики - це мова символів, умовних знаків, креслень, геометричних фігур, схем. Діти, починаючи з першого класу, користуються при рахунку геометричними фігурами (квадрати, прямокутники, кола, відрізки і т.д.)

Геометричний прийом умовного позначення речей і їх відносини малюнків, кресленням і т.п. є засобом більш легкого уявлення та запам'ятовування досліджуваного. Найпростішим геометричним зображенням величини і її частин є так зване одномірне або лінійні діаграми. Наочність можна використати й при поясненні геометричних перетворень. А саме використання системи опорних таблиць .

2.2. Властивості руху та методика їх вивчення

Ідея перетворень є однією з провідних у сучасній математичній науці і в різних галузях її застосувань. Вона тісно пов'язана з ідеями функції, відображень, які широко використовуються в практиці. Поняття перетворення фігури доцільно ввести описово на наочному, інтуїтивному рівні як це фактично і зроблено в підручнику.

Якщо кожну точку даної фігури змістити яким-небудь чином, то ми дістанемо нову фігуру. Говорять, що ця фігура утворилася *перетворенням* даної (рис. 1).

Перетворення однієї фігури в іншу називається *рухом,* якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки X і У першої фігури у точки X', Y' другої фігури так, *що* $XY = X'У$ (рис.2). *Зауваження.* Поняття руху в геометрії пов'язане із звичайним уявленням про переміщення. Але якщо, говорячи про переміщення, ми уявляємо неперервний процес, то в геометрії для нас матиме значення тільки початкове і кінцеве положення фігури.

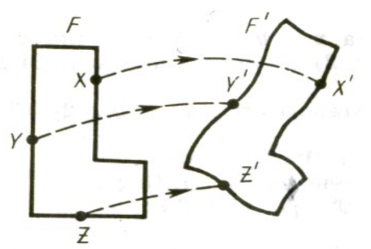


Рис. 1.

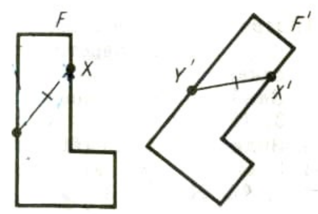


Рис. 2.

Нехай фігура F переводиться рухом у фігуру F', а фігура F' переводиться рухом у фігуру F'' (рис. 3).

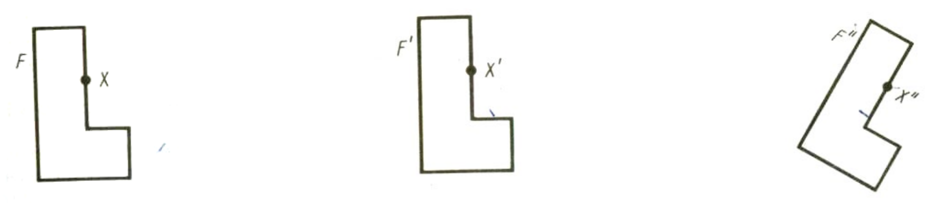


Рис. 3.

Перетворення, що переводить фігуру F у фігуру F', при якому відстані між відповідними точками змінюються в тому самому відношенні $k > 0$, називається *перетворенням подібності,* або *подібністю*. Це означає, що коли довільні точки X і Y фігури F при перетворенні подібності переходять у точки X' і Y' фігури F' то $X'Y = k \cdot XY$, де $k > 0$. Число k називається *коефіцієнтом подібності.*

Чи існує зв'язок між перетворенням подібності і переміщенням? Так. Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$, тобто переміщення є окремим випадком перетворення подібності.

Нехай під час першого руху точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', а під час другого руху точка X' фігури F' переходить у точку X'' фігури F''. Тоді перетворення фігури F у фігуру F'', при якому довільна точка X фігури F переходить у точку X'' фігури F'', зберігає відстань між точками, а тому є також рухом [25, с .158].

Цю властивість руху виражають словами: *два рухи, виконані послідовно, дають знову рух.*

Для кращого засвоєння учнями матеріалу використовуємо опорний конспект (див. додаток1).

Властивості руху та методика їх вивчення

Учні повинні розуміти суть кожного із зазначених у програмі видів геометричних перетворень, знати їх властивості, і вміти застосовувати їх до розв'язування найпростіших задач. При цьому в різних підручниках по-різному означаються провідні поняття геометричних перетворень, визначене різне місце для їх застосування при доведенні теорем і розв'язуванні задач. За підручником Бурди М. І. властивості руху пояснюються так.

Т е о р е м а 1. *Точки, що лежать на прямій, під час руху переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.*

Це означає, що коли точки A .B, C, які лежать на прямій, переходять у точки A_1 .B_1, C_1, то ці точки також лежать на прямій; якщо точка B лежить між точками A і C, то точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1.

Доведення. Нехай точка B прямої AC лежить між точками A і С. Доведемо, що точки A_1,B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Якщо точки A_1, B_1, C_1 не лежать на прямій, то вони є вершинами трикутника. Тому $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. За означенням руху звідси випливає, що $AC < AB + BC$. Проте за властивістю вимірювання відрізків $AC = AB + BC$.

Ми прийшли до суперечності. Отже, точка B_1 лежить на прямій A_1C_1. Перше твердження теореми доведено.

Покажемо тепер, що точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1.

Припустимо, що точка A_1 лежить між точками B_1 і C_1. Тоді $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$ і тому $AB + AC = BC$. Але це суперечить рівності $AB + BC = AC$. Таким чином, точка A і не може лежати між точками B_1 і C_1.

Аналогічно доводимо, що точка C_1 не може лежати між точками A_1 і B_1

Оскільки з трьох точок $A_1, B_1 C_1$ одна лежить між двома іншими, то цією точкою може бути тільки B_1 .Теорему доведено.

З теореми 1. випливає, що ***під час руху прямі переходять у прямі, півпрямі — у півпрямі, відрізки — у відрізки*** (рис. 4),

Доведемо, що ***під час руху зберігаються кути між півпрямими.***

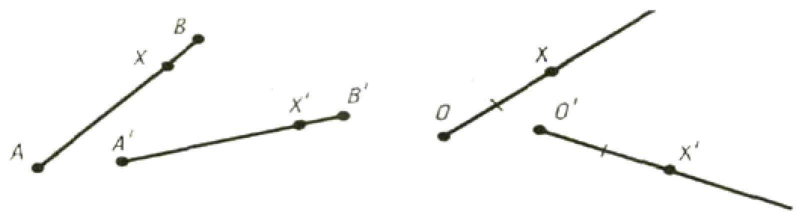


Рис. 4.

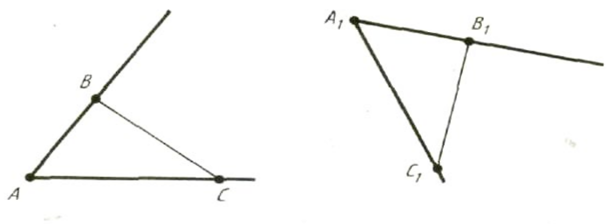


Рис. 5.

Нехай AB і AC — дві півпрямі, що виходять з точки A і не лежать на одній прямій (рис. 5). Під час руху ці півпрямі перейдуть у деякі півпрямі A_1B_1і $A_1 C_1$. Оскільки рух зберігає відстані, то трикутники ABC і $A_1 .B_1, C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. З рівності трикутників випливає рівність кутів *BAC* і $B_1 A_1 C_1$, що й треба було довести [1, с.147].

Стислий зміст вивченого матеріалу учням можна подати у вигляді конспекту (див додаток 2).

Симетрія відносно точки

Різними методичними підходами можна послуговуватися, вводячи поняття центрально-симетричних і симетричних відносно даної прямої точок. У сучасних підручниках прийнято конструктивні означення. Перетворення симетрії відносно точки можна вводити так.

Рис. 6.

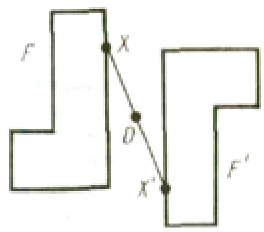


Рис. 7.

Нехай *O* — фіксована точка і *X* — довільна точка площини (рис. 6). Відкладемо на продовженні відрізка *OX* за точку *O* відрізок *OX'*, що дорівнює *OX*. Точка *X'* називається *симетричною точці X відносно точки O*. Точка, симетрична точці O, є сама точка O. Очевидно, точка симетрична точці *X'* є точка *X*.

Перетворення фігури *F* у фігуру *F'*, при якому кожна її точка *X* переходить у точку *X'* симетричну відносно даної точки O, називається *перетворенням симетрії відносно точки O*. При цьому фігури *F* і *F'* називаються *симетричними відносно точки O* (рис. 7).

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру *F* у себе, то вона називається *центральносиметричною,* а точка O називається *центром симетрії.*

Наприклад, паралелограм є центральносиметричною фігурою. Центром симетрії його є точка перетину діагоналей (рис. 8).

Тільки у [illegible] няття, можна довести таку теорему:

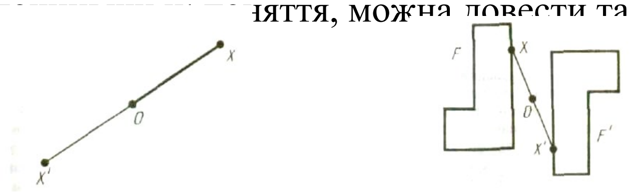
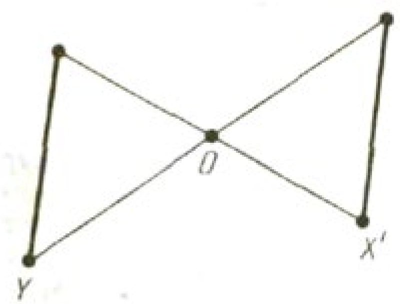


Рис. 7.

Теорема 3. *Перетворення симетрії відносно точки є рухом.*

Доведення. Нехай *X* і У — дві довільні точки фігури *F* (рис. 9). Перетворення симетрії відносно точки *O* переводить їх у точки *X'* і *У'*. Розглянемо трикутники *XOY* і *X'OY'*. Ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. У них кути при вершині О рівні як вертикальні, а *OX* = *OX', OY* = *OY'* за означенням симетрії відносно точки О. З рівності трикутників випливає рівність сторін *XY* — *X'Y'*. А це означає, що симетрія відносно точки *O* є рух. Теорему доведено [3, с.140].



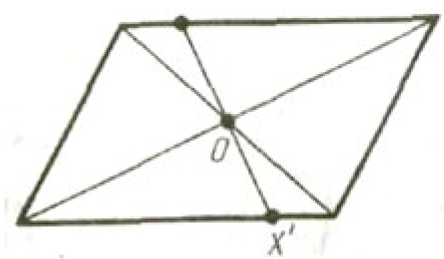


Рис. 8. Рис. 9.

Наслідок. Симетрія відносно точки має всі властивості руху.

Задача 1. Доведіть, що паралелограм є центральносиметричною фігурою відносно точки перетину його діагоналей.

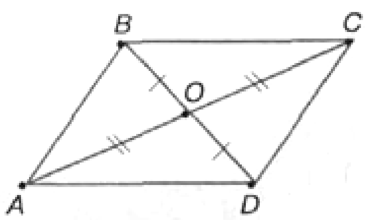


Рис.10.

Розв'язання. Нехай *O* — точка перетину діагоналей паралелограма *ABCD* (рис. 10). Оскільки діагоналі *AC* і *BD* поділяться точкою *O* навпіл, то точки *A* і *C, B* і *D.* симетричні відносно точки *O.*

Тоді сторони *AB* і *CD, BC* і *AD* також симетричні відносно точки *O.* Тому симетрія відносно точки перетину діагоналей паралелограма переводить його у себе [5, с.136].

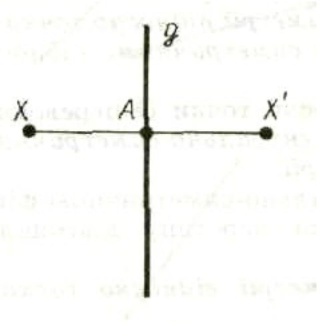
При опрацюванні даного матеріалу також використовуємо опорний конспект (див. додаток 3).

Симетрія відносно прямої

При введенні поняття фігури, симетричної відносно даної точки і даної прямої, важливо, щоб учні навчились будувати точку, відрізок, промінь, пряму, трикутник, коло, кут, паралелограм тощо, симетричні відповідним фігурам відносно точки і відносно прямої. Слід звернути увагу учнів на те, що оскільки положення прямої і відрізка задається двома будь-якими точками (променя - початковою точкою і будь-якою іншою його точкою, кола - центром і будь-якою його точкою, трикутника - положенням його вершин і т.д.), то для побудови симетричної фігури досить побудувати точки, симетричні тим, які визначають положення фігури. За діючими підручниками вводиться таке пояснення.

Нехай *g* — фіксована пряма (рис. 11). Візьмемо довільну точку *X* і опустимо перпендикуляр *AX* на пряму *g.* На продовженні перпендикуляра за точку А відкладемо відрізок *AX',* що дорівнює відрізку *AX.* Точка *X'* називається *симетричною точці X відносно прямої g.* Якщо точка *X* лежить на прямій *g,* то симетрична їй точка є сама точка *X.* Очевидно, що точка, симетрична точці *X',* є точка *X.*

Перетворення фігури *F у* фігуру F', при якому кожна її точка *X* переходить у точку *X',* симетричну відносно даної прямої *g,* називається *перетворенням симетрії відносно прямої g.* При цьому фігури *F* і *F'* називаються *симетричними відносно прямої g* (рис. 12).



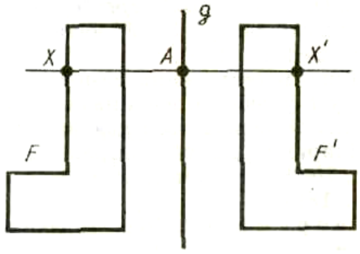
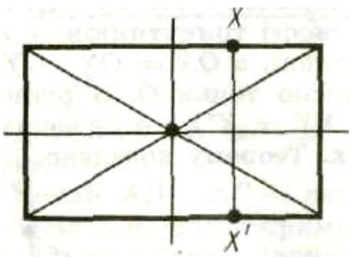


Рис. 11.

Рис.12

Якщо перетворення симетрії відносно прямої *g* переводить фігуру *F* у себе, то ця фігура називається *симетричною відносно прямої g,* а пряма *g* називається *віссю симетрії* фігури [1, с.160].



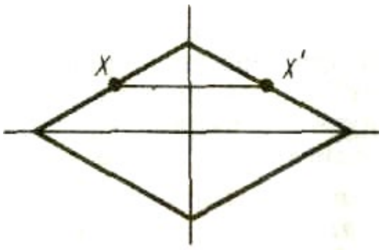


Рис. 13.

Рис. 14.

Наприклад, прямі, що проходять через точку перетину діагоналей прямокутника паралельно його сторонам, є осями симетрії прямокутника (рис. 13). Прямі, на яких лежать діагоналі ромба, є його осями симетрії (рис. 14).

Теорема 4. *Перетворення симетрії відносно прямої є рух.*

Доведення. Приймемо дану пряму за вісь *y* декартової системи координат (рис. 15). Нехай довільна точка *A (x; y)* фігури *F* переходить у точку *A(x'; y')* фігури *F'.* З означення симетрії відносно прямої випливає, що точки *A* і *A'* мають рівні ординати, а абсциси відрізняються тільки знаком: $x' = -x$.

Візьмемо дві довільні точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2\,;\,y_2)$. Вони перейдуть у точки $A'(-x;\,y)$ і $B'(-x_2\,;\,y_2)$.

Маємо:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Звідси бачимо, що $AB = A'B'$. Це означає, що перетворення симетрії відносно прямої є рух. Теорему доведено.

В різних підручниках доведення трактується по-різному. Потрібно знайти такий спосіб доведення, щоб в результаті учні якнайкраще засвоїли матеріал.

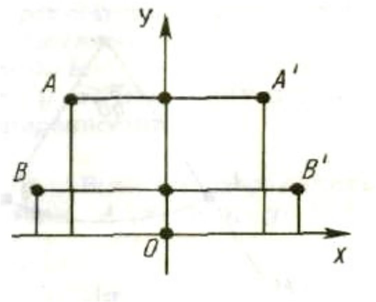


Рис.15

Другий спосіб доведення

Доведення. Нехай симетрія відносно прямої l переводить довільні точки X, $У$ фігури F у точки X' фігури F'. Розглянемо загальний випадок, коли точки X, $У$ не лежать на прямій, перпендикулярній до l (рис. 16). Доведемо, що XY — $X'У'$.

Нехай пряма l перетинає відрізки XX' і YY' відповідно в точках A і В. $\triangle\, ABX = \triangle\, ABX'$ як прямокутні з рівними катетами.

У них $\angle\, XAB = \angle\, X'AB = 90°$, $AX = AX'$ за означенням осьової симетрії, сторона AB — спільна. Звідси випливає: $BX = BX'$ і $\angle\, ABX = \angle\, ABX'$. $\angle\, XYB = \angle\, X'Y'B$ за двома сторонами і кутом між ними. У них $BX = BX'$ за доведеним, $BY = BY'$ за означенням осьової симетрії, $\angle\, XBY = \angle\, X'BY'$ ($\angle\, XBY = 90° - \angle\, ABX$, $\angle\, X'BY' = 90° - \angle\, ABX'$). З рівності трикутників випливає: $XY = X'Y'$. (Випадки, коли точки X і Y лежать на прямій l або на прямій, перпендикулярній до l, розгляньте самостійно).

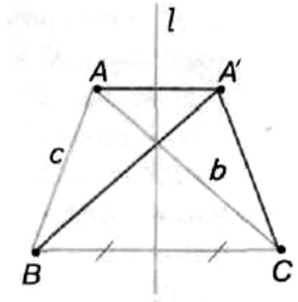


Рис .16.

Наслідок. Симетрія відносно прямої має всі властивості руху.

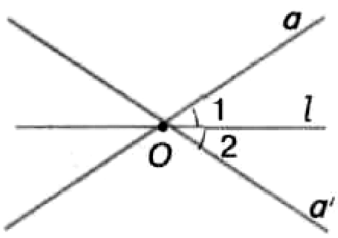
Задача 2 . Доведіть, що прямі a і a' симетричні відносно осі симетрії l або перетинаються в точці, яка лежить на осі симетрії, і утворюють з нею рівні кути або паралельні їй.

Розв'язання. Можливі два випадки.

1) Пряма a перетинає вісь l у деякій точці O (рис. 17). Оскільки при осьовій симетрії точка O переходить у себе, то вона лежатиме і на симетричній прямій a'. Таким чином, симетричні прямі a і a' перетинаються в точці, яка лежить на осі l. Кути 1 і 2, утворені цими прямими з віссю l, симетричні відносно l і тому рівні.

2) Пряма o паралельна осі симетрії l. Пряма a' симетрична прямій a, не може перетинати вісь l, оскільки тоді пряма a також перетинала б вісь l (випадок 1). Отже, $a' \parallel l$.

Симетрія застосовується у розв'язуванні задач. Задану в умові задачі фігуру (або її елементи) замінюємо фігурою, симетричною даній відносно деякої точки або прямої. Розглянемо приклад.



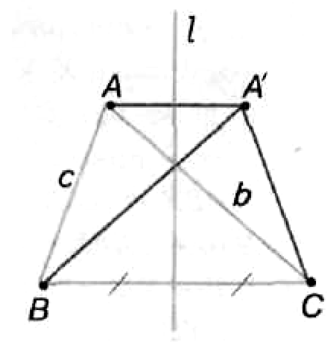


Рис. 17. Рис. 18.

Задача. Побудуйте трикутник за двома сторонами *b* і *c* та різницею кутів *B* і *C,* які лежать проти цих сторін.

Аналіз. Припустимо, що Δ *ABC* побудовано (рис. 18), причому $\angle B - \angle C = \alpha$ $(\angle B > \angle C)$. Побудуємо Δ *A'CB,* симетричний трикутнику *ABC* відносно прямої *l* — серединного перпендикуляра до відрізка *BC.* Розглянемо Δ *AA'C,* у якого $AC = b$, $A'C = c$, $\angle A'CA = \angle A'C - \angle ACB = \angle B - \angle C = a$. Цей трикутник можна побудувати.

Побудова. Будуємо: Δ *AA'C* за двома сторонами *b,* с і кутом між ними α ; пряму *l* — серединний перпендикуляр до відрізка *AA';* точку *B,* симетричну точці *C* відносно прямої *l.* Δ *ACB*— шуканий.

Слово «симетрія» грецького походження і в перекладі означає сумірність, правильне відношення, однаковість у розміщенні частин.

Для візуального сприйняття учнями даного матеріалу використаємо опорний конспект (див. додаток 4).

Паралельне перенесення та його властивості.

Паралельне перенесення дуже часто використовується в математиці та її застосуваннях в інших науках та практиці. Зокрема, в алгебрі і математичному аналізі паралельне перенесення і симетрії використовуються при побудові графіків складних функцій, у кресленні при побудові різноманітних фігур. Перш ніж вводити означення паралельного перенесення, корисно спочатку продемонструвати цей вид руху на рухомій планіметричній моделі, виготовленій з картону і кальки. Це дасть змогу учням помітити суттєву ознаку паралельного перенесення (це перетворення, за якого точки зміщуються в одному й тому самому напрямі на ту саму відстань). Проте учнів треба переконати в необхідності формулювання строгого математичного означення, в якому не вживалось би поняття «в одному й тому самому напрямі», оскільки воно само потребує означення. Означення та властивості доцільно ввести вчителеві і проілюструвати його прикладами.

Подивіться на рисунок 19. Кожну точку фігури *F* змістили в одному й тому самому напрямі (вздовж паралельних прямих *XX', AA', BB'...)* на одну й ту саму відстань *(XX' = AA' = BB').* Одержали фігуру *F'.* Говорять, що фігура *F* перейшла у фігуру *F'* унаслідок паралельного перенесення на відстань XX'.

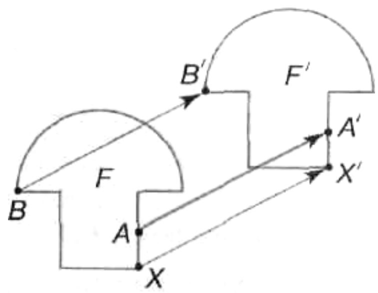


Рис. 19.

Перетворення, при якому всі точки фігури зміщуються в одному й тому самому напрямі і на одну й ту саму відстань, називається ***паралельним перенесенням.***

Паралельне перенесення задається формулами:

$x' = x + a,\ y' = y + b.$

Ці формули виражають координати x', y' точки, у яку переходить точка (x, y) при паралельному перенесенні [5,125].

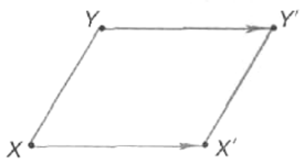
Теорема 6.*(властивість паралельного перенесення). Паралельне перенесення є рухом.*

Доведення.

Справді, дві довільні точки $A(x_1\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ переходять при паралельному перенесенні у точки $A'(x_1+a;\ y_1+b)$, $B'(x_2+a;\ y_2+b)$

Тому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$



Звідси, *AB=A'B'.* Таким чином, паралельне перенесення зберігає відстані, тобто є рухом, що й треба було довести.

Другий спосіб доведення. . Рис.20.

Доведення. Нехай *X* і *Y* — дві довільні точки фігури (рис. 20). Паралельне перенесення переводить їх у точки *X'* і *Y'* фігури *F'*. Рис.20.

Доведемо, що *XY* = *X'Y'*. За означенням паралельного

перенесення, *XX'*= *YY'* і *XX'* || *YY'*. Тоді чотирикутник *XYY'X'* — паралелограм. У паралелограма протилежні сторони рівні, отже, *XY*— *X'Y'*. (Випадок, коли рівні відрізки *XX'* і *YY'* лежать на одній прямій, розгляньте самостійно.)

***Наслідок 1.* Паралельне перенесення має всі властивості переміщення.**

***Наслідок 2.* При паралельному перенесенні пряма переходить** у **паралельну їй пряму або у себе**.

Справді, паралельність прямих випливає з паралельності відрізків *XY* ***і*** *X'Y'* (рис. 21). Якщо ж пряма паралельна напряму перенесення, то кожна точка прямої переходить у точку цієї самої прямої, а сама пряма переходить у себе.

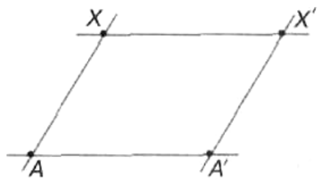


Рис. 21

Щоб побудувати точку *X'* в яку переходить точка *X* при паралельному перенесенні, що переводить точку *A* в точку *A'*, скористай-теся наслідком 2: проведіть паралельні прямі так, як показано на рисунку 21.

Для кращого засвоєння учнями матеріалу, необхідно вивчені означення закріпити прикладами.

Задача 3. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Доведіть, що бічна сторона дорівнює різниці основ трапеції.

Розв'язання . Нехай *a, b* — основи, *c* — бічна сторона рівнобічної трапеції (рис. 22). Доведмо, що *c* = *a* — *b.* Виконаємо паралельне перенесення бічної

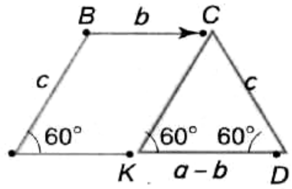


Рис. 22

сторони *AB* так, щоб точка *B* перейшла у точку С. Тоді точка *A* перейде у точку *K.* Оскільки паралельне перенесення є переміщенням, то воно кут переводить у рівний йому кут. Отже, $\angle DKC = \angle KAB = 60°$. Тоді ΔKCD - рівносторонній і $KD = c$. З другого боку, $KD = AD — AK = AD — BC = a — b$. Маємо: $c = a — b$.

Нехай деяке переміщення переводить фігуру *F* у фігуру *F',* а інше переміщення переводить фігуру *F'* у фігуру *F''.* Тоді послідовне виконання цих переміщень називається їх *композицією.*

Одна з композицій має таку властивість: **послідовне виконання двох осьових симетрій з паралельними осями симетрій є паралельним перенесенням.** Доведемо це твердження.

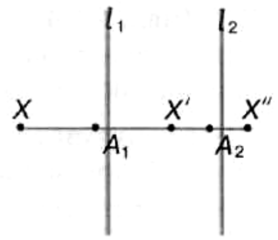


Рис .23.

Нехай задано дві осьові симетрії з паралельними осями l_1 і l_2 (рис. 23). Симетрія з віссю l_1 точку *X* переводить у точку *X',* а симетрія з віссю l_2 точку *X'* переводить у точку *X''.* Точки *X, X', X''* лежать на одній прямій, оскільки $XX' \perp l_1$ і $X'X'' \perp l_2$, а прямі l_1 і 1_2 паралельні. Позначимо через A_1 і A_2 точки перетину прямої *XX'' з* l_1 і 1_2 .

Тоді XX''- $2A_1A_2$.

Справді, $XX''= XA_1 + A_1X'+ XA_2 + A_2X''= 2\ A_1\ X'+ 2XA_2 = 2(\ A_1X'+ X'A_2) = 2\ A_1A_2$. Отже, відрізок, що сполучає точки *X* і *X'',* дорівнює відрізку $2A_1A_2$, який визначений заданням прямих l_1 і 1_2 . А це означає, що композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням на відстань $2A_1A_2$.

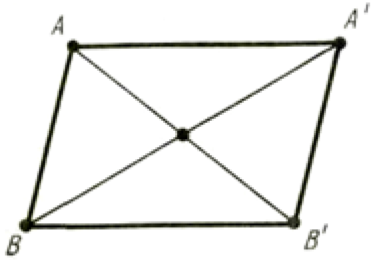
Назва «паралельне перенесення» зумовлена тим, що ***при паралельному перенесенні точки зміщуються вздовж паралельних прямих (або прямих, які збігаються) на одну й ту саму відстань.***

Справді, нехай точки $A(x_1\ y_1)$,і В$(x_2; y_2)$ переходять у точки $A'(x_1+a;\ y_1 + b)$, $B'(x_2+a;\ y_2 + b)$ (мал. 24). Середина відрізка *AB'* має координати

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$

Ті самі координати має і середина відрізка *A'B*. Звідси випливає, що діагоналі чотирикутника *AA'B'B* перетинаються і точкою перетину діляться пополам (рис.24.). Отже, цей чотирикутник — паралелограм. А в паралелограма протилежні сторони *AA'* і *BB'* паралельні і рівні.

Зазначимо, що в паралелограма *AA'B'B* паралельні і дві інші протилежні сторони *AB* і *A'B'*. Звідси випливає, що при ***паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну пряму (або в себе).***



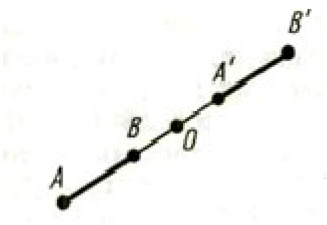


Рис. 24. Рис. 25.

Зауваження. У попередньому доведенні припускалось, що точка *B* не лежить на прямій *AA'*. *У* випадку, коли точка В лежить на прямій *AA'*, точка *B'* теж лежить на цій прямій, бо середина відрізка *AB'* збігається із серединою відрізка *BA'* (рис. 25). Отже, всі точки *A, B, A', B'* лежать на одній прямій. Далі

$$AA' = \sqrt{(x_1 + a - x_1)^2 + (y_1 + b - y_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$BB' = \sqrt{(x_2 + a - x_2)^2 + (y_2 + b - y_2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким чином, у цьому випадку точки *A* і *B*_зміщуються вздовж прямої *AB* на одну й ту саму відстань $\sqrt{a^2 + b^2}$, а пряма *AB* переходить у себе.

Теорема 7. *Які б не були дві точки A і A', існує одне і до того єдине паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку A'.*

Доведення. Спочатку доведемо існування паралельного перенесення, яке переводить точку *A* у *A'*. Введемо декартові координати на площині. Нехай a_1 і a_2 — координати точки *A* і a'_1, a'_2 — координати точки *A'*. Паралельне перенесення, задане формулами $x' = x + a'_1 - a_1$, $y' = y + a'_2 - a_2$, переводить точку A у точку A'. Справді, якщо $x = a_1$ і $y = a_2$, дістанемо $x' = a'_1$, $y' = a'_2$.

Доведемо єдиність паралельного перенесення, яке переводить точку A у точку A'. Нехай X - довільна точка фігури і X' - точка, в яку вона переходить при паралельному перенесенні (рис. 26). Як відомо, відрізки XA' *і* AX' мають спільну середину O. Задання точки X однозначно визначає точку O — середину відрізка $A'X$. А точки A і O однозначно визначають точку X', оскільки точка O є серединою відрізка AX'. Однозначність у визначенні точки X' і означав єдиність паралельного перенесення. Теорему доведено повністю.

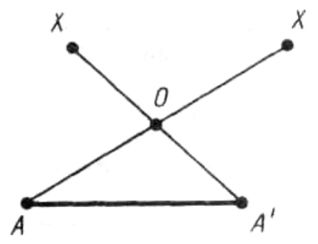


Рис. 26.

***Задача* 4** . При паралельному перенесенні точка *(1; 1)* переходить у точку (-1; 0). В яку точку переходить початок координат?

Розв'язання.

Будь-яке паралельне перенесення задається формулами: $x' = x + a$, $y' = = y + b$, Оскільки точка *(1; 1)* переходить у точку *(-1; 0)*, то $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$. Звідси $a = -2$, $b = -1$. Таким чином, наше паралельне перенесення, яке переводить точку *(1; 1)* у *(-1; 0)*, задається формулами $x' = x - 2$, $y' = y - 1$. Підставляючи в ці формули координати початку $(x = 0, y = 0)$, дістанемо $x' = -2$, $y' = -1$. Отже, початок координат переходить у точку *(-2; -1)* [4, с.85].

Поворот

При введенні поняття повороту варто підкреслити, що будь-який поворот може бути заданий: 1) центром O, кутом повороту a ($0° \leq a \leq 180°$), напрямом повороту або 2) центром повороту і двома відповідними точками X і X'. У цьому разі ефективно скористатися таким доведенням.

Нехай дано кут α і точку *О* (рис. 27). Візьмемо довільну, відмінну від О, точку *X.* Точці X поставимо у відповідність таку точку *X'*, що:

1) відстані *ОХ* і *ОХ'* рівні;

2) кут між променями *ОХ* і *ОХ'* дорівнює α .

Такий перехід точки Х у точку Х' називається

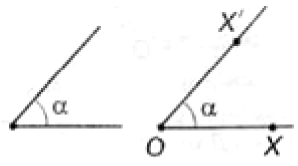


Рис.27.

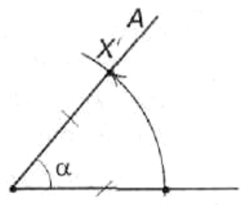


Рис.28

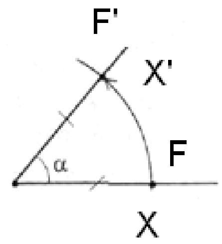


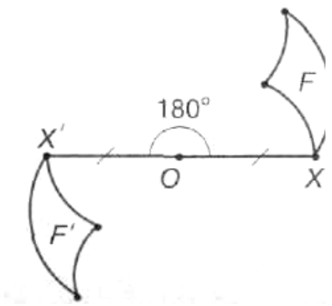
Рис.29

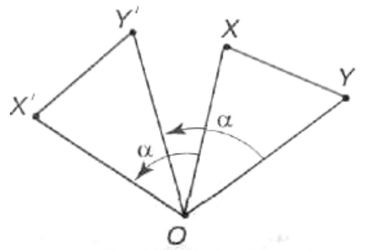
поворотом *навколо точки О* на кут а проти годинникової стрілки. Сама точка *О* переходить після повороту в себе. Точка *О* називається *центром повороту,* кут між променями *ОХ* і *ОХ'* - *кутом повороту* проти годинникової стрілки (рис. 28).

Якщо центр *О* і кут а повороту задано, то точку *X'* у яку переходить точка *X* внаслідок повороту проти годинникової стрілки, будуємо так (мал. 25): проводимо промінь *ОХ*; від променя *ОХ* відкладаємо кут *ХОА,* що дорівнює кутові α ; на промені *ОА* знаходимо точку *X',* яка лежить на відстані *ОХ* від центра *О.*

Якщо на площині дано деяку фігуру *F,* то для кожної її точки *X* можна знайти точку *X',* у яку перейде *X* у наслідок повороту навколо точки *О* на кут α (рис. 29). У результаті отримаємо фігуру *F',* в яку перейшла фігура *F* при заданому повороті. При цьому точка *О* переходить у себе.

Поворот на кут 180° навколо точки *О* є симетрією відносно точки *О* (рис. 30).





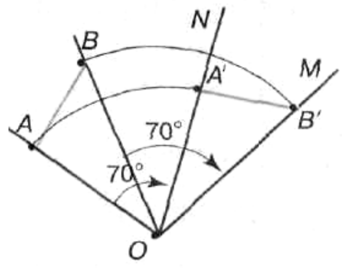


Рис.30. Рис. 31. Рис. 32.

Теорема 5. *(властивість повороту). Поворот є рухом.*

Доведення. Нехай поворот навколо точки *O* на кут α точки *X*, *Y* фігури *F* переводить у точки *X'*, *Y'* фігури *F'* (рис. 31). Доведемо, що *XY* = *X'Y*. Розглянемо загальний випадок, коли точки *O, X, Y* не лежать на одній прямій. Δ *OXY* = Δ *OX'Y* за двома сторонами і кутом між ними. У них *OX* = *OX', OY* = *OY* за означенням повороту і $\angle$ XOY= $\angle$ X'OY (кожний з цих кутів дорівнює різниці кута а і кута *YOX*). З рівності трикутників випливає *XY* = *X'Y'* (випадок, коли точки *O, X*, *Y* лежать на одній прямій розгляньте самостійно) [22].

Наслідок. Поворот має всі властивості руху.

Задача 5 . Побудуйте відрізок, у який переходить відрізок *AB* при повороті навколо точки *O* на кут 70° за годинниковою стрілкою.

Розв'язання. Проводимо промені *OA* і *OB* (рис. 32). Відкладемо за годинниковою стрілкою $\angle$ *AON* = 70° і $\angle$ *BOM* = 70°. Відкладемо на промені *ON* відрізок *OA'=OA*, а на промені *OM* — відрізок *OB'* = *OB*. Сполучаємо точки *A'* і *B'*.

Розглянемо фігури, зображені на рисунках 33 -35. Кожна з цих фігур внаслідок повороту навколо точки О на деякий кут переходить у себе. Правильний трикутник (мал. 31) переходить у себе при повороті на 120° (тобто – $\frac{360^0}{3}$) навколо його центра О.

Справді, *OA* = *OB* = *OC*, $\angle$ AOB = $\angle$ BOC=$\angle$ AOC = 120°, тому трикутник ABC переходить у себе при даному повороті.

Аналогічно можна показати, що квадрат переходить у себе при повороті на кут $\frac{360^0}{4}$ навколо його центра (мал. 31), правильний шестикутник — при повороті на кут $\frac{360^0}{6}$ навколо його центра (мал. 32) у правильний шестикутник. Зрозуміло, що будь-який правильний многокутник з *n* вершинами переходить у себе внаслідок повороту навколо свого центра на кут $\frac{360^0}{n}$. Якщо фігура *F* унаслідок повороту навколо деякої точки *O* на кут $\frac{360^0}{n}$ *(n* — натуральне число) переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має *симетрію обертання порядку n.* Точка *0* називається *центром обертання n-го порядку* фігури *F.* Отже, рівносторонній трикутник, квадрат, правильний шестикутник, правильний трикутник мають симетрію обертання порядку 3, 4, 6, *n* відповідно [37].

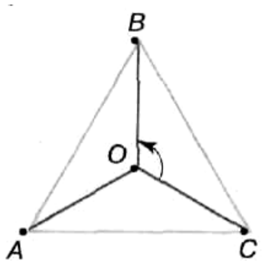


Рис. 33.

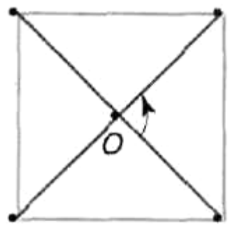


Рис. 34.

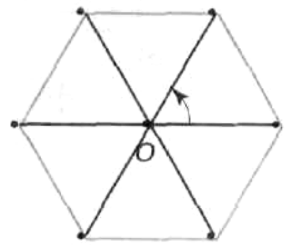


Рис. 35.

При поясненні тем «Паралельне перенесення» і «Поворот» можна використати конспект (див. додатки 5, 6).

Рівність фігур

Із введенням означення рівності фігур важливо зазначити, що попередні означення рівності відрізків, кутів, трикутників виражають одне й те саме. На прикладі означень рівності трикутників фактично і доводиться рівносильність раніше введеного і нового означення через рух.

Дві фігури називаються *рівними,* якщо вони переводяться рухом одна в одну.

Для позначення рівності фігур користуються звичайним знаком рівності. Запис $F = F'$ означає, що фігура F дорівнює фігурі F'. У записі рівності трикутників: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ передбачається, що вершини, які суміщаються під час руху, стоять на відповідних місцях. За такої умови ***рівність трикутників, що визначається через суміщення їх рухом, і рівність, як ми її розуміли досі, виражають одне і те саме.***

Це означає, що коли у двох трикутниках відповідні сторони рівні і відповідні кути рівні, то ці трикутники суміщаються рухом. І навпаки, якщо два трикутники суміщаються рухом, то у них відповідні сторони рівні і відповідні кути рівні. Доведемо обидва ці твердження.

Нехай трикутник ABC суміщається рухом з трикутником $A_1B_1C_1$, причому вершина A переходить у вершину A_1, B -- у B_1, C -- у C_1. Оскільки під час руху зберігаються відстані і кути, то для наших трикутників $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Нехай тепер у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ маємо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Доведемо, що вони суміщаються рухом, причому вершина A переходить у вершину A_1, B -- у B_1, C -- у C_1. Застосуємо до трикутника ABC перетворення симетрії відносно прямої а, яка перпендикулярна до відрізка AA_1 і проходить через його середину (рис. 36). Дістанемо трикутник $A_1B_2C_2$. Якщо точки B_1 і B_2 різні, то застосуємо до нього симетрію відносно прямої b, яка проходить через точку A_1 і перпендикулярна до прямої B_1B_2. Дістанемо трикутник $A_1B_1C_3$.

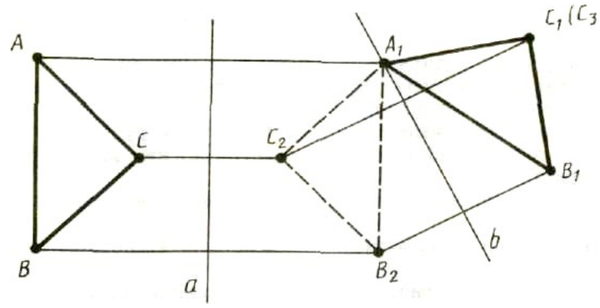


Рис. 36.

Якщо точки C_1 і C_3 лежать з одного боку від прямої A_1B_1, то вони збігаються. Справді, оскільки кути $B_1A_1C_1$ і $B_1A_1C_4$ рівні, то промені A_1C_1 і A_1C_3 збігаються, а через те, що відрізки A_1C_1 і A_1C_3 рівні, то збігаються точки C_1 і C_3. Таким чином, трикутник ABC рухом переведено у трикутник $A_1B_1C_1$.

Якщо точки C_1 і C_3 лежать з різних боків від прямої A_1B_1, то для доведення треба ще застосувати симетрію відносно прямої A_1B_1.

2.3. Перетворення подібності. Гомотетія

Тема «Подібність фігур», у складі якої вивчається перетворення подібності, в умовах роботи за підручниками має не тільки теоретичне значення, оскільки тут вивчається важливе відношення фігур, а й політехнічну, прикладну спрямованість. Справді, подібність і гомотетія широко використовуються в фото- і кіносправі, картографії, архітектурі, машино- і приладобудуванні, де доводиться моделювати об'єкти.

Можливі різні методичні підходи до вивчення теми «Подібність фігур». Оскільки відношення подібності фігур є узагальненням відношення рівності, а перетворення подібності є узагальненням руху, то природно, означення подібних фігур і вивчення їх властивостей пов'язане з перетворенням подібності.

Найважчим з погляду сприймання учнями методики вивчення є поняття перетворення подібності. Якщо учні засвоять це поняття, то означення подібних фігур як таких, які переводяться одна в одну перетворенням подібності, не призведе до труднощів. Ввести поняття перетворення подібності та його властивості згідно підручників (Бурда М.І.; Апостолова Г.І.) можна так.

Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $к$ - 1, тобто **переміщення** є **окремим випадком перетворення подібності.**

Теорема (властивість перетворення подібності). При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.

Доведення. Нехай точки A, B і С лежать на одній прямій і точка В лежить між точками A і С (рис. 37).

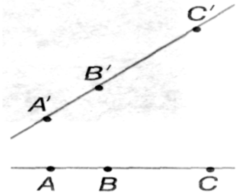


Рис .37.

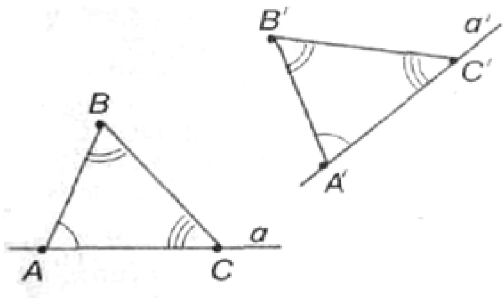
Тоді $AC = AB + BC$. Деяке перетворення подібності переводить точки *A, B, C* у точки *A′, B′, C′*. За означенням перетворення подібності, маємо:
$A'C = к \cdot AC = к \cdot (AB + BC) = к \cdot AB + к \cdot BC = A'B' + B'C'$. З рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки *A′, B′, C′* лежать на одній прямій, а точка *B′* лежить між точками *A′* і *C′*.

Наслідок. **Перетворення подібності прямі переводить у прямі, промені - у промені, відрізки — у відрізки.**

Приймемо без доведення ще таку властивість: **перетворення подібності** кут **переводить** у **рівний йому** кут.

Властивості перетворення подібності подано на рис.38.

Перетворення подібності   Властивості



1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь.
2. Відрізок переходить у відрізок (AB у $A'B'$, BC у $B'C'$, AC у $A'C'$).
3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$).

Рис.38.

Дві *фігури* називаються *подібними,* якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

Якщо фігура *F* подібна фігурі *F′,* то записують $F \sim F'$, або (коли треба вказати коефіцієнт подібності) $F \sim F'$.

Прикладами подібних геометричних фігур можуть бути будь-які два квадрати, два кола.

З властивостей перетворення подібності випливає, що у подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки - пропорційні. Зокрема, у подібних многокутників *ABC…E* і *A′B′C…E′* (рис. 39.) :

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \ldots,$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots = \frac{EA}{E'A'}.$$

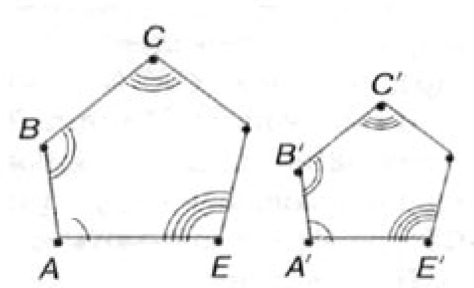


Рис.39.

Теорема 2. *(про відношення площ подібних многокутників). Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.*

Дано: *F* і *F'*— подібні многокутники з коефіцієнтом подібності *к*.

Довести $\frac{S'_F}{S_F} = k^2$.

Доведення. Розіб'ємо многокутник *F* на трикутники Δ_1, Δ_2…,Δ_n. Оскільки многокутники *F* і *F′* подібні, то існує перетворення подібності, яке переводить многокутник *F* у многокутник *F′* а трикутники розбиття многокутника *F* у трикутники Δ'_1, Δ'_2…,Δ'_n відповідного розбиття многокутника *F'*. Площа многокутника *F′* дорівнює сумі площ трикутників Δ_1, Δ_2…,Δ_n а площа многокутника *F′* дорівнює сумі площ трикутників Δ'_1, Δ'_2…,Δ'_n . Якщо коефіцієнт подібності *k,* то сторони і висоти трикутників многокутника *F′* у А разів більші за відповідні сторони і висоти трикутників многокутника *F.* Звідси випливає: $S_{\Delta'_1} = k^2 S_{\Delta_1}$, $S_{\Delta'_2} = k^2 S_{\Delta_2}$,…, $S_{\Delta'_n} = k^2 S_{\Delta_n}$.

Додавши ці рівності почленно, дістанемо:

$$S_{F'} = S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \ldots + S_{\Delta'_n} = k^2 (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \ldots + S_{\Delta_n}) = k^2 S_F.$$

Звідки $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Цей факт справджується для будь-яких фігур.

Коефіцієнт подібності *h* дорівнює відношенню довжин відповідних лінійних елементів фігур *F* і *F'.* Тому **площі подібних фігур відносяться, як квадрати їх відповідних лінійних** елементів.

Гомотетія

Для введення поняття гомотетія можна використати такий спосіб.

Розглянемо особливий спосіб побудови подібних фігур (рис. 40, 41.).

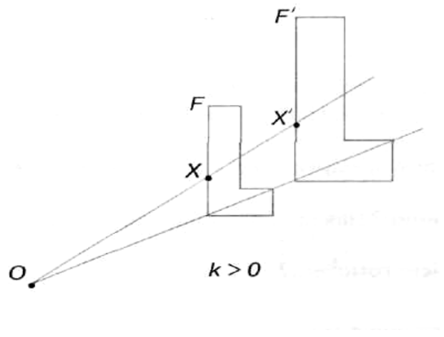


Рис. 40.

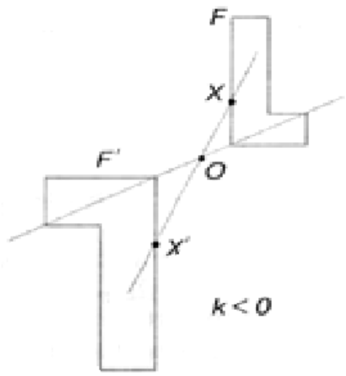


Рис. 41.

Нехай, *F* - дана фігура. Позначимо довільну точку *O*. Через кожну точку *X* фігури *F* проведемо промінь *OX* і відкладемо на ньому відрізок *OX',* що дорівнює *k* • *OX.*

Отримаємо шукану фігуру *F'.*

На рисунку 40 точки *X* і *X'* лежать на одному промені ОХ, а на рисунку 41 - на доповняльних променях *OX* і *OX'.* Щоб розрізняти ці випадки, вважають, що у першому випадку *k* >0, а у другому випадку *k* <0. Фігури *F* і *F'* називають *гомотетичними*.

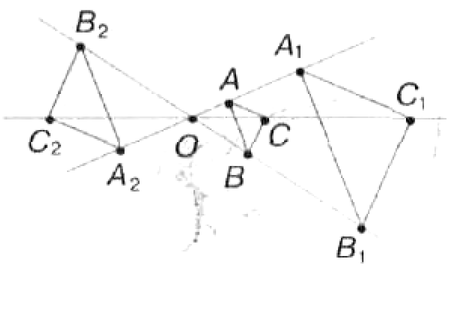


Рис. 42.

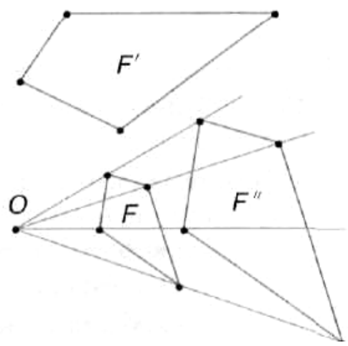


Рис. 43.

Перетворення називається *гомотетією*, якщо воно переводить кожну точку *X* фігури *F* у точку *X'* фігури *F'* так, що *OX'* = | *k* |*OX*, де k - будь- яке число, відмінне від нуля, *O* - фіксована точка, *X'* є *OX.*

Число k називається коефіцієнтом гомотетії, точка O - центром гомотетії.

На рисунку 42 трикутник ABC при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k= 3$ переходить у трикутник $A_1B_1C_1$, а при гомотетії з коефіцієнтом k = - 2 і тим самим центром - у трикутник $A_2B_2C_2$ гомотетія має всі властивості перетворення подібності. Крім того, вона має ще особливу властивість: **гомотетія переводить пряму у паралельну їй пряму або у саму себе, якщо дана пряма проходить через центр гомотетії.** Можна також сказати, що гомотетія є перетворенням подібності з коефіцієнтом $|k|$.

Розглянемо зв'язок між подібністю і гомотетією. **Якщо дві фігури подібні, то існує третя фігура, яка гомотетична першій і дорівнює другій.**

Доведемо це. Нехай $F \sim F'$ (Рис. 43). Отже, при цьому перетворенні відстані між точками фігури F зміняться у фігурі F' в k разів. Розглянемо гомотетію з довільним центром O і коефіцієнтом, який дорівнює коефіцієнту подібності k. Ця гомотетія фігуру F переведе у фігуру F'', причому відстані між її точками також зміняться в к разів. Отже, відстані між відповідними точками у фігурах F'' і F' рівні, тобто $F'= F''$. Отримали, що побудована фігура F'' гомотетична фігурі F і дорівнює фігурі F'. Звідси випливає, що будь-яку фігуру можна перевести у подібну їй фігуру за допомогою послідовного виконання гомотетії і переміщення [31, c.202].

Слід звернути увагу учнів на те, що кожні дві гомотетичні фігури подібні, але не кожні дві подібні фігури гомотетичні. Гомотетія дає спосіб побудови подібних фігур і вважається заданою, якщо:

1) задано центр гомотетії О і коефіцієнт гомотетії;

2) задано центр гомотетії O і дві відповідні точки X і X'.

Як наочність при поясненні теми «перетворення подібності», «Гомотетія» опорний конспект (див. додаток 1).

2.4. Розв'язування вправ на застосування геометричних перетворень

Система задач підручника, містить в основному вправи на побудову фігур при різних видах руху і задачі на доведення властивостей окремих фігур у разі виконання рухів. Обмежуватись лише цими задачами для учнів, які добре встигають, не можна. Треба розглянути кілька задач на побудову, в яких ефективно використовуються геометричні перетворення. Такі задачі доцільно пропонувати і надалі при вивченні наступних тем.

Задача 6.

1.Паралельне перенесення.

Побудова образу трикутника ABC при паралельному перенесенні.

1.Побудова довільного трикутника *ABC.*

2.Через усі його вершини проведіть паралельні прямі.

3.Відкладіть на всіх прямих в одному напрямку відрізки однакової довжини: $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

4.З'єднавши здобуті точки A_1, B_1, і C_1, дістаєте образ трикутника *ABC* при паралельному перенесенні.

2. Поворот.

Поворотом фігури *F* навколо центра *O* на даний кут φ ($0° \leq \varphi \leq 180°$) у заданому напрямку називається таке перетворення, за якого кожній точці *X* фігури *F* відповідає точка *X'* так, що $OX = OX'$ і кут $XOX' = \varphi$ і промінь

OX' відкладається від променя *OX* у заданому напрямку.

Точка *O* називається центром повороту, а кут φ — кутом повороту.

Поворот може здійснюватися у двох напрямках: за годинниковою стрілкою й проти неї [17, с.333].

Побудова фігури, в яку переходить трикутник при повороті біля точки O на кут 90° за годинниковою стрілкою.

1) Побудуйте довільний трикутник *ABC***,** виберіть точку *O* — центр повороту.

2) Проведіть промінь *OA,* побудуйте промінь OA_1 так, щоб кут $AOA_1 = 90°$ (у напрямку за годинниковою стрілкою).

3) Відкладемо на промені OA_1 відрізок $OA_X = OA$. Точка A_1 — образ точки *A* за цього повороту.

4) Аналогічно побудуємо точки B_i і C_1, в які за повороту переходять точки B і C.

5) З'єднавши точки A_i, B_1,C_1, дістаємо образ трикутника ABC за повороту.

3. Центральна симетрія (симетрія щодо точки).

Нехай O — фіксована точка. X — довільна точка площини. Відкладемо на промені XO відрізок OX_1 =OX. Точки X і X_1 називаються симетричними щодо точки O.

Точка O є центром симетрії і вона симетрична сама собі.

Перетворення фігури F у фігуру F_1, за якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1, фігури F_1, симетричну щодо точки O, називається перетворенням симетрії щодо точки O [16].

При цьому фігури F і F_1 називаються симетричними щодо точки o.

Якщо перетворення симетрії щодо точки переводить фігуру F у себе, то вона називається центрально-симетричною.

Побудова фігури, симетричної даній щодо точки O.

1) Побудуйте довільний трикутник ABC, виберіть точку O — центр симетрії.

2) Проведіть промінь AT, продовжіть його за точку O, відкладіть на ньому точку A_1 на відстані $OA_1 = OA$. Точка A_1 — образ точки A за даного перетворення.

3) Аналогічно побудуємо точки B_1 і C_1, які за цього перетворення симетрії переходять у точки B і C.

4) З'єднавши точки A_1, B_1, C_1, дістаємо образ трикутник ABC за умови симетрії щодо точки O.

4. Осьова симетрія (симетрія відносно прямої).

Нехай a — фіксована пряма, X — довільна точка. Опустимо перпендикуляр XA на пряму a. На продовженні перпендикуляра за точку A відкладемо AX_1= AX.

Точки X і X_1 називаються симетричними відносно прямої a.

Якщо точка X лежить на прямій a, то вона симетрична сама собі.

Перетворення фігури F у фігуру F_1, за якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1, симетричну відносно прямої a називається перетворенням симетрії відносно прямої a.

При цьому фігури F і F_1 називаються симетричними відносно прямої a.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої переводить фігуру F у себе, то вона називається симетричною щодо осі a, а пряма a називається віссю симетрії. Наприклад, осями симетрії ромба є прямі, на яких лежать його діагоналі.

Побудова фігури, симетричної даній відносно прямої.

1) Побудуйте довільний трикутник ABC, виберіть прямуй.

2) Із точки A опустіть перпендикуляр AT на пряму a.

3) На продовженні перпендикуляра відкладіть відрізок $OA_1 = OA$. Точка A_1, симетрична точці A відносно прямої a.

4) Аналогічно побудуйте точки B_1 і C_1, симетричні точкам B і C відносно прямої a.

5) З'єднавши точки A_1, B_1 і C_1, дістанемо трикутник $A_1B_1C_1$, симетричний трикутнику ABC відносно прямої a.

Задача 7.

Деяка точка, що знаходиться всередині рівностороннього трикутника, віддалена від його вершин відповідно на 3 см, 4 см і 5 см. Знайти довжину сторін трикутника рис.44.

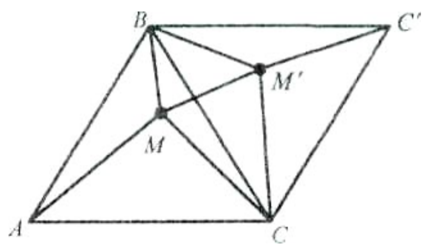


Рис. 44.

Розв'язання.

Нехай Δ *ABC* — рівносторонній, *M* — деяка точка така, що *MB* = 3 см, *MC*= 4 см, *MA* = 5 см.

Виконаємо поворот з центром у точці *B* на кут 60° проти годинникової стрілки Δ *ABC.* Тоді точка А відобразиться у точку С, точка *C* — у точку *C'* , точка *M* — у точку *M'.* $\angle$ *C'BC = 60°*, *BM'= BM* = 3 см, $\angle$ *M'BM* == 60°. Оскільки Δ *ABC* = Δ *CBC'*, то *M'C* = 5 см, M'C' = 4 см.

Сполучимо точки *M* і *M'*. Δ *MBM'* — рівносторонній і *MM'* = 3 см. Отже, Δ *MM'C* — прямокутний, оскільки його сторони дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см, причому $\angle$ *M'MC* = 90°. Тоді$\angle$ *BMC*= 60° + 90° = 150°. З Δ *BMC* за теоремою косинусів знаходимо: $BC^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos150° = 25 + 12\sqrt{3}$ (см). Отже, довжина кожної сторони даного рівностороннього трикутника дорівнює $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$ см.

Задача 8.

Позначте довільні точки А і В. Побудуйте коло з центром А і радіусом 3 см. Побудуйте фігуру, в яку перейде це коло під час переміщення, що переводить точку А в точку В.

Розв'язання.

$A \rightarrow B, R=R_1$; $M \rightarrow N$. $AB = MN$.

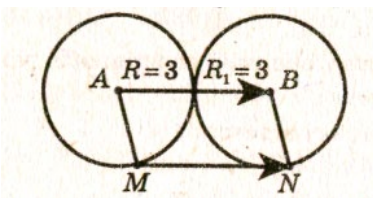


Рис. 45.

Задача 9.

Побудуйте два прямокутних трикутники, що мають кут 30^0 і менший катет довжиною 2 см. У першому трикутнику з вершини прямого кута через середину гіпотенузи проведено промінь. Побудуйте фігуру, у яку він переходить під час переміщення, що переводить перший трикутник у другий.

Розв'язання :

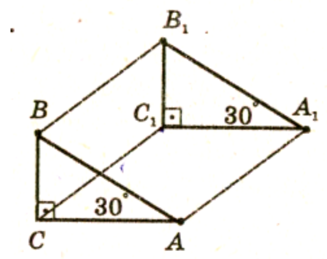


Рис. 46.

Задача 10.

Чи існує переміщення, що переводить ΔABC у $\Delta A'B'C'$, якщо:

1. $\angle A=110^0$, $\angle B'=120^0$;
2. $\angle C=20^0$, $\angle A=60^0$;
3. $AC=6$ см, $A'B'=B'C'=3$ см?

Розв'язання .

1) Не існує, бо $\angle A \to \angle A'$, а якщо $\angle A'$- тупий, то $\angle B'$ повинен бути гострим.

2) Існує, $\angle C \to \angle C'=20^0$, а $\angle A'$ може бути будь-яким.

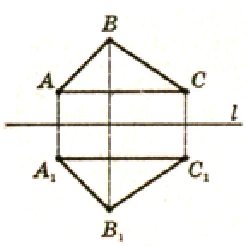
3) Не існує, бо $AC \to A'C'=6$; трикутник з сторонами 3,36 не існує.

Задача 11.

Побудуйте трикутник , симетричний трикутнику ABC відносно прямої l, яка : 1) не перетинає трикутник; 2) містить сторону AC трикутника.

Розв'язання .

1).



2).

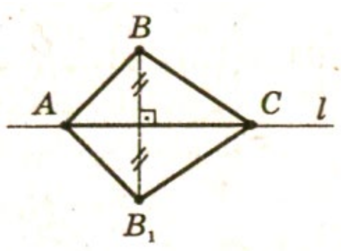


Рис. 47. Рис. 48.

Задача 12.

Доведіть, що пряма, яка містить висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, є віссю симетрії трикутника.

Доведення .

ΔABC — рівнобедрений в і ньому висота BD ⊥ AC являється і бісектрисою, і медіаною: ∠A = ∠2, AD = DC, AB = BC, ∠A = ∠C. ΔABC симетричний ΔCBD відносно прямої *l*, на якій лежить висота BD (рис.49).

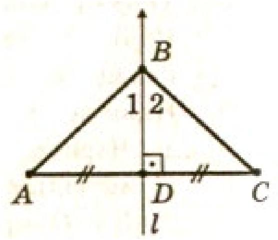


Рис. 49.

Задача 13.

Доведіть, що діагоналі ромба є його осями симетрії.

Доведення .

Діагоналі ромба являються його осями симетрії, бо вони взаємно перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл (рис.50).

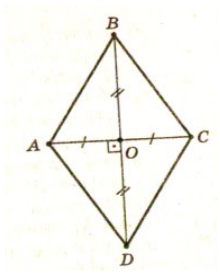


Рис. 50.

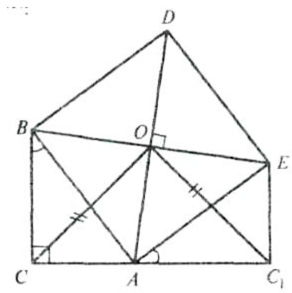


Рис.51.

Задача 14.

На гіпотенузі *AB* прямокутного трикутника *ABC* побудовано квадрат *ABDE* в тій півплощині відносно *AB*, якій не належить трикутник *ABC*. Знайти відстань від вершини *C* прямого кута до центра квадрата, якщо катети *BC* і *AC* мають відповідно довжини *12 см* і *10 см*.

Розв'язання.

Виконаємо поворот трикутника ABC навколо центра квадрата O на кут $90°$ проти годинникової стрілки. Тоді точка B відобразиться в точку A, точка A — в точку E, а точка C — в точку C_1, і $\angle BCA$ - $\angle AC_1E$,

$\angle CBA = \angle EAC_1$,.

Оскільки $\angle BAE=90°$, то $\angle CAB + \angle BAE + \angle EAC_1=180°$.

Точки C, A, C_1 лежать на одній прямій, $OC = OC_1$, $\angle COC_1=90°$, $AC_1=$ $12см$.

З $\triangle COC_1$ маємо: CO = (см).

Задача 15.

Дано: $ABCD$— паралелограм, O — точка перетину діагоналей. Довести що точка O є центром паралелограма.

Доведення .

Як відомо, точкою перетину діагоналі паралелограма діляться навпіл. Тому $AO = OC$ $BO = OD$, тобто при симетрії відносно точок О $A \rightarrow$ C, C $\rightarrow$ A, $D \rightarrow B$, $B \rightarrow D$, таким чином, $ABCD \rightarrow CDAB$. $ABCD$ — паралелограм.

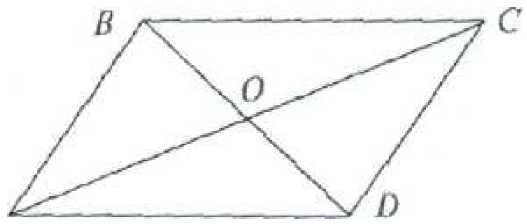


Рис. 52.

Задача 16.

Дано: Коло, центром якого є точка А(4; 9) і яке проходить через точку $B(1;$ 5). Запишіть рівняння кола, симетричне даному відносно початку координат.

Розв'язання.

Задане коло має центр у точці $A(4; 9)$ і радіус , $R^2 = AB_2 =(1-4)^2 +(5-9)^2 =9+16 = 25$. При симетрії відносно точки $O(0; 0)$ центр кола $A(4;9)$ відобразиться в точку $A'(-4; -9)$, а радіус не зміниться. Тому рівняння кола, яке симетричне найденому відносно точки, яка є початком координат, має вигляд: $(x+4)^2+(y+9)^2=25$.

2.5. Геометричні перетворення в природі і мистецтві

Симетрія відносно точки

Фігури, що мають центр симетрії, часто зустрічаються в довкіллі. Наприклад, пропелер літака (рис.52), орнамент (рис.53), квітка (рис.54), морська зірка (рис.55), сніжинка (рис.56).

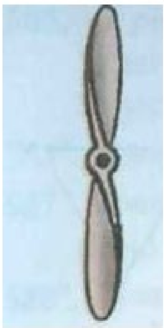
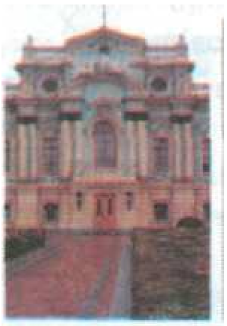




Рис.52. Рис.53. Рис.54. Рис.56. Рис.57.

Симетрія відносно прямої

Фігури, що мають вісь симетрії, часто трапляються в техніці (рис. 58), архітектурі (рис. 59,60), природі (рис. 61), побуті (рис. 62).

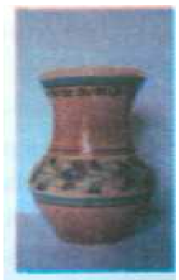


Рис.59. Рис.60. Рис.61. Рис.62.

Симетрія характерна для представників тваринного світу називається, білатеральною симетрією (рис.63).

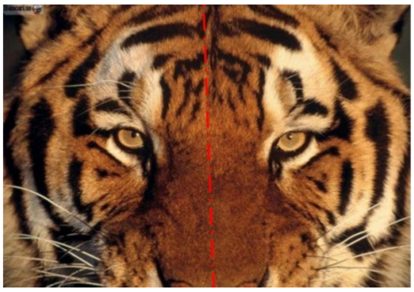
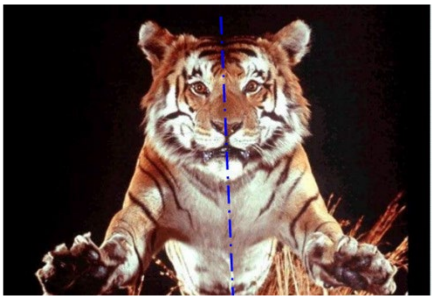




Рис. 63.

Паралельне перенесення

Паралельне перенесення малюнків (вони однакові й періодично повторюються) є на вишивках, шпалерах, тканинах, паркетній підлозі, орнаментах. На малюнках подано орнаменти на старовинній грецькій вазі (рис.64), вітражі у Соборі Паризької Богоматері (Франція, середньовіччя) (рис. 65), на стіні палацу Дарія в Сузах (давня Персія) (рис. 66)



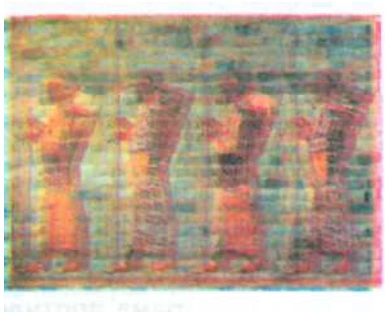


Рис.64

Рис.65 Рис.66

Перетворення подібності

Подивіться на рисунок 77. З одного плану ділянки місцевості виготовили інший. При цьому відношення відстаней між відповідними парами точок на планах рівні і дорівнюють 2,5 (відношенню масштабів) (рис. 78.).

Можна сказати, що один план отримали з іншого перетворенням подібності.

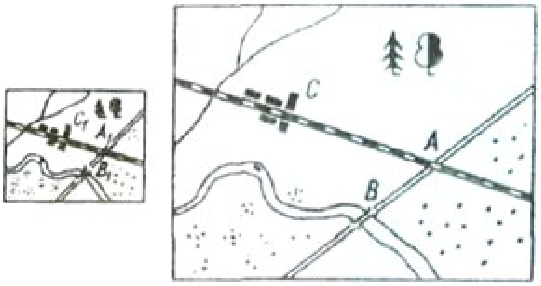


Рис. 67.

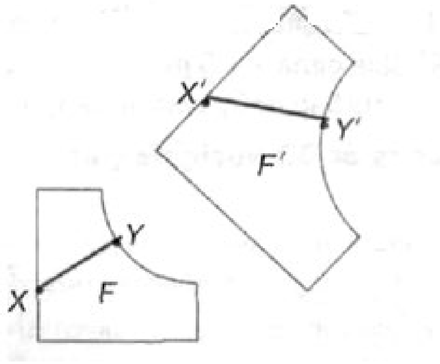


Рис. 68.

РОЗДІЛ ІІІ

Використання новітніх інформаційних технологій при вивченні теми геометричні перетворення

3.1. Дидактичний матеріал. Його місце в навчальному процесі геометрії

Дидактичний матеріал — особливий тип наочного навчального посібника, здебільшого карти, таблиці, набори карток з текстом, цифрами або малюнками, які роздаються учням для самостійної роботи в класі і вдома.

Під електронним дидактичним матеріалом розуміють цілеспрямовано розроблені документи, для використання у навчальному процесі за допомогою прикладних програм загального призначення і побудовані відповідно до змісту навчальної теми і методики навчання предмету. Використання електронних дидактичних матеріалів дозволить вчителю:

- ідивідуалізувати, диференціювати та інтенсифікувати процес навчання (оптимальність поєднання індивідуальної, групової, колективної роботи навчання на уроці);
- посилити мотивацію навчання за рахунок використання різних видів діяльності і джерел інформації (комп'ютер не є новиною на уроках інформатики, але є новим засобом на уроках інших предметів);
- здійснювати контроль із зворотним зв'язком за наслідками діяльності учня;
- візуалізувати навчальну інформацію;
- моделювати та імітувати об'єкти, що вивчаються або досліджуються, (комп'ютер може не тільки створити модель, а й дозволяє змінити умови демонстрування, відтворивши інформацію з оптимальним темпом її сприймання учнем);
- забезпечити доступ до мережі інформації (доступ до Інтернету, електронних довідників і т. д.);
- формувати інформаційну компетенцію вчителя та учнів [21, с.82].

Переваги використання електронних дидактичних матеріалів

Формування інформаційно-комунікаційної компетентності (ІКТ-компетентність) вчителя є в наш час одним з найбільш актуальних завдань системи безперервної педагогічної освіти. Як показує практика, більшість вчителів-предметників ще не готові до використання комп'ютера не тільки на уроках, а й у підготовці до їх проведення. Можна назвати деякі причини виникнення такої ситуації:

- відсутність або завантаженість комп'ютерного класу;
- недостатня якість або кількість ППЗ;
- відсутність робочого реєстру технологічних особливостей навчання у комп'ютерному класі з різних предметів;
- комп'ютерна безграмотність вчителя;
- вузьке бачення технічних можливостей комп'ютерної техніки;
- обмежене розуміння щодо створення власних комп'ютерних продуктів (наприклад, дидактичних матеріалів) і т. д.

Необхідно показати вчителю переваги електронних дидактичних матеріалів. Першим етапом формування ІКТ-компетентності вчителя повинно бути ознайомлення його з можливостями і використанням прикладного програмного забезпечення загального призначення для підготовки, наприклад, дидактичних матеріалів. Для цього можна скористатися такими засобами, як текстовий та графічний редактори, електронними таблицями і т д . Їх можна використовувати для створення дидактичних матеріалів на екрані комп'ютера (електронні) чи роздрукувати на папері (друковані). Перший варіант вимагає певних навичок роботи за комп'ютером як вчителя, так і учня, а також необхідність проведення уроків у комп'ютерному класі. Другий варіант повністю виключає необхідність використання комп'ютера на уроці, а підготовлені дидактичні матеріали на паперових носіях дозволять інтенсифікувати процес навчання [21, с.77].

3.2 . Можливості застосування інформаційно- комп’ютерних технології при вивченні теми «геометричні перетворення»

Одним із видів дидактичного забезпечення на уроках геометрії є використання комп’ютерних технологій.

Використання комп’ютерних програм на уроках геометрії розвиває інтерес учнів до вивчення предмета, підвищує ефективність їхньої самостійної роботи, індивідуалізації процесу навчання шляхом: покращення наочності навчання, сприяння формуванню абстрактних уявлень про геометричні моделі, поглиблення самостійності вивчення курсу, створення комфортних умов проведення різних форм контролю знань, що допомагає в розробці індивідуальних заходів для корекції знань учнів у межах досягнення визначених цілей навчання.

Основна мета застосування комп’ютерних технологій на уроках геометрії – активізувати пізнавальну діяльність учнів; посилити самостійність в опануванні знаннями, вміннями і навиками, мотивацію та інтерес до навчання геометрії і, тим самим, покращити навчальні досягнення учнів. Наприклад, при вивченні теми «Геометричні перетворення» актуальним є використання таких педагогічних програмних засобів (ППЗ): Power Point, DG, GRAN-2D, «Жива геометрія» та «My Test».

Інтегрованість забезпечується поданням наочно-образної, графічної інформації в поєднанні із знаково-символьною, спільний аналіз яких сприяє виробленню евристичних умінь. Крім того, графічні образи понять властивостей геометричних фігур нерідко підкріплюються їх числовими характеристиками, що дає змогу проводити невеликі дослідження, полегшує усвідомлення суті нових геометричних фактів.

Добре те, що одну й ту саму наочність можна використовувати з різним цільовим призначенням. Наприклад, симетричне відображення трикутника (відносно точки, відносно прямої та центральна) призначене для вироблення вмінь виконувати основні побудови; воно ж використовується для самостійного «відкриття» учнями властивостей симетричного відображення, а також для застосування їх в типових ситуаціях. Аналіз комп'ютерних зображень реальних предметів дозволяє перенести їх властивості на відповідні їм моделі, де увага приділяється поелементному їх створенню, тобто поняття вводяться шляхом з'ясування можливості комп'ютерної побудови відповідних геометричних образів. Внаслідок цього учень самостійно формулює означення нових понять, властивості геометричної фігури чи засвоює способи діяльності.

Така робота може здійснюватися на різних етапах уроку:

– перевірки домашнього завдання;

– створення проблемної ситуації;

– пояснення нового матеріалу;

– закріплення вивченого;

– перевірки знань у процесі уроку.

Можна виділити позитивні особливості роботи з комп'ютерною технікою:

- *скорочення часу вироблення технічних навичок учнів;*
- *досягнення оптимального темпу роботи учня;*
- *перетворення учня на суб'єкт навчання (так як програма вимагає від нього активного управління);*
- *застосування в навчальній діяльності комп'ютерного моделювання реальних процесів;*
- *забезпечення навчання матеріалами із віддалених баз даних, використовуючи засоби телекомунікацій;*
- *набуття діалогу з програмою характеру навчальної гри, що у більшості учнів підвищує мотивацію навчальної діяльності.*

Потрібно враховувати і недоліки:

- *відсутність емоційності діалогу з програмою;*
- *майже повна відсутність розвитку мовлення, графічної та писемної культури учнів;*

- *виникнення, крім помилок у вивченні навчального предмету, яких учень допускається і на традиційних уроках, також технологічних помилок – помилок роботи з комп'ютерною програмою;*
- *обмеження контролю знань кількома формами – тестами або програмованим опитуванням;*
- *наявність спеціальних знань самого викладача.*

Які ж особливості комп'ютеризованого уроку. Особливо потрібно виділити наступне: крім звичайної мети уроку, урок з комп'ютерною підтримкою має технологічну мету: навчання новому методу навчальної діяльності, використанню конкретної навчальної комп'ютерної програми. Головною особливістю такого уроку є те, що перевизначаються потоки інформації на уроці – діалог викладача з учнем відбувається через комп'ютер, який виступає в ролі третього компоненту навчання, індивідуального для кожного учня [8, с.15].

Можна виділити три основні задачі, які необхідно розв'язати для успішного проведення комп'ютеризованого уроку: ***дидактичну, методичну та організаційну***. Під дидактичним забезпеченням розуміють навчальні матеріали уроку, конкретна навчальна програма та апаратура. Методична задача – визначення методів використання комп'ютерів при викладанні теми, аналіз результатів уроку і постановка наступної навчальної мети. Організаційна задача, яка легко вирішується під час традиційного уроку, стає головною. Вона полягає в тому, щоб виробити і закріпити в учнів навички роботи з навчальною програмою, організувати роботу, уникаючи перевантаження учнів та нераціонального використання часу.

Фактори, що найбільше впливають на побудову уроку:

- методична мета уроку і тип уроку, який нею визначається (пояснення нового матеріалу, закріплення, узагальнення матеріалу, проміжний контроль тощо);
- кількість учнів у групі і кількість комп'ютерів в навчальному кабінеті;
- гігієнічні вимоги до роботи учнів за комп'ютером;

- рівень підготовки групи;
- готовність учнів до нового виду навчальної діяльності (від того, наскільки учні добре володіють прийомами роботи з комп’ютерними програмами залежить темп і успіх уроку).

З точки зору викладача урок можна представити у вигляді наступної схеми:

Етап				**Час**
1.	**Організаційний момент, постановка мети**			**2 хв.**
2.	**Робота з комп’ютером**	**Інші форми роботи**	**Інші форми роботи**	**10-12 хв..**
3.	**Інші форми роботи**	**Робота з комп’ютером**	**Інші форми роботи**	**10-12 хв.**
4.	**Інші форми роботи**	**Інші форми роботи**	**Робота з комп’ютером**	**10-20 хв.**
5	**Підведення підсумків, домашнє завдання**			**4-5 хв.**

Така схема побудови уроку з успіхом виправдовує себе. На такому уроці викладач виступає в якості консультанта, а не в якості „джерела знань”.

Якщо в групі є учень, що має міцні навички роботи з комп’ютером, можна використовувати його як технічного консультанта. На цю роль можна запросити вчителя інформатики .

У світі існує багато інформаційних засобів (програм) для спрощення складних математичних розрахунків і громіздких геометричних побудов. Складність програм змінюється – від найпростіших навчальних до складних професійних систем.

Впровадження в навчальний процес нових інформаційних технологій потребує переосмислення традиційної системи навчання, її змісту, методів і форм організації, залишаючи при цьому незмінними цілі навчання. Це пов’язано з тим, що будь-який засіб (у нашому випадку таким засобом є комп’ютер), включений в ту чи іншу діяльність, впливає на саму діяльність, а особливо тоді, коли йому властиві специфічні, характерні тільки для нього функції. Однак нові інформаційні технології можуть принципово вплинути на процес навчання тільки в тому випадку, коли ці технології будуть включені в нову модель навчання, а їх засоби повною мірою реалізують притаманні тільки їм функції. Основна мета такої моделі навчання – сприяти розвитку учня як особистості, формувати в нього потребу і здібності до дослідницької діяльності, самоосвіти, самовираження та ін. Модель такого навчального процесу повинна базуватися на формулі: діяльність – рефлексія – теоретичні знання і практичні навички. Учень у даній діяльності повинен виступати в ролі активного суб’єкта, а педагог – у ролі організатора комунікацій у тріаді викладач-учень-комп’ютер [22,с. 137].

Якщо розглядати комп’ютер як результат технічного, технологічного досягнення людства , то він виступає тут і як предмет вивчення, і як предмет, який формує навчальне середовище, і як засіб управління навчальною діяльністю, і як засіб зв’язку, і як засіб навчальної діяльності. Останній підхід до визначення місця комп’ютера в навчально-виховному процесі все більше поширюється в освітянській громадськості. Ці якості комп’ютера, його властивість виступати у різних іпостасях (залежно від педагогічного завдання та педагогічної ситуації) суттєво відрізняють його від традиційних технічних засобів навчання. Залучення комп’ютера до навчально-виховного процесу – це залучення не тільки техніки, а й того зовнішнього інтелекту, який презентовано через технологію та програмне забезпечення. Таким чином, застосування комп’ютера в навчально-виховному процесі за умови правильного визначення його місця дає підстави сподіватися на певні зрушення, поворот дидактичного простору обличчям до майбутнього, яке проектується сьогодні.

3.3.Особливості геометричних перетворень в програмі GRAN-2D

Метод геометричних перетворень є досить продуктивним методом розв'язування геометричних задач. Математична теорія симетрії, симетрія у живій та неживій природі, мистецтві, архітектурі, інженерії отримали спільне підґрунтя у геометричних перетвореннях.

Між тим, при навчанні даної теми вчитель зустрічається з певними труднощами у своїй педагогічній практиці. Це може бути пояснено навіть не стільки браком часу, що відводиться на розгляд даної теми, скільки обмеженістю відповідної наочності, що і викликає труднощі у сприйманні матеріалу. Не завжди вчитель має змогу підготувати достатню кількість моделей, що ілюструють відповідний теоретичний або задачний матеріал, тим більше, що, як правило, такі моделі не відрізняються суттєвою різноманітністю [11, с.147].

Однак, необхідно відмітити, що наявність відповідного програмного продукту не призводить автоматично до зростання рівня навченості учнів або їх зацікавленості у вивченні предмету. Необхідне врахування й інших чинників, зокрема, відповідність розглядуваного програмного продукту шкільному курсу математики, наявність в цьому програмному продукті зручних інструментів, використання яких дозволяє на якісно новому рівні підходити до вивчення матеріалу, а також наявність методичного забезпечення, орієнтованого на навчання з використання такого продукту.

Природньо, програмний продукт не може бути статичним, він повинен розвиватися. Розробники повинні враховувати появу нових та розвиток вже існуючих технологій (мультимедійних, мережевих тощо), нові педагогічні та методичні ідеї. У відповідності до цього в програму GRAN-2D (версія 2.0, 2007 рік) були додані нові засоби опрацюванню геометричних фігур на площині, що дозволить значно ефективніше використовувати дану програму в навчальному процесі. Загалом в даній версії програми відбулося чимало змін та доповнень, порівняно з попередньою. Зокрема, вони стосуються інтерфейсу програми, роботи з окремими об'єктами (точками, відрізками, прямими тощо), з'явилися нові об’єкти та послуги. В даній роботі розглядаються деякі нові можливості використання програми GRAN-2D, що стосуються саме вивчення геометричних перетворень на площині, хоч при цьому будуть використовуватися й інші оновлені послуги.

Як вже згадувалось вище, серед значної кількості різноманітних геометричних перетворень, в шкільному курсі математики розглядають лише симетрію (відносно точки та прямої), поворот, паралельне перенесення та гомотетію. Всі ці перетворення геометричних об’єктів можна робити і за допомогою програми GRAN-2D (крім того, в програмі доступні такі геометричні перетворення, як інверсія та деформація, які не розглядаються в шкільному курсі геометрії).

Що стосуються симетрії відносно точки і прямої при паралельному перенесенні, то дані послуги програми практично не змінилися у порівнянні з попередньою версією, а всі нововведення будуть детально розглянуті нижче при розгляді повороту [7, с.88].

За допомогою ППЗ *GRAN-2D* можна здійснювати геометричні перетворення деяких об’єктів, а саме паралельне перенесення, поворот (відносно деякої точки) та деформацію об’єктів типу “***Точка”, “Лінія”, “Ламана”, “Коло”* та *“Інтерполяційний поліном”.*** Для цього призначено послуги пункту головного меню “***Об’єкт\Перетворення”.***

Параметри перетворення можна задавати як через введення координат вектора перенесення чи кута повороту у відповідні поля, так і графічно “з екрану”, користуючись мишкою.

У першому випадку для виконання деякого перетворення слід звернутися до послуги меню “***Об’єкт\Перетворення\Параметри”****,* а в другому – до підпунктів меню “***Об’єкт\Перетворення\З екрану – Паралельне перенесення”*** або ***“Поворот”****,* в залежності від того, який тип перетворення об’єктів необхідно здійснити.

При зверненні до послуги “***Об’єкт\Перетворення\Параметри”*** з'являється вікно “***Перетворення об’єктів”*** з вкладинками “***Паралельне***

перенесення”*, *“Поворот” та “***Деформація”*** .

Для виконання необхідного перетворення перш за все слід перейти на вкладинку з назвою потрібної операції, після чого у полі під написом “***Застосувати операцію до об’єкта”*** потрібно вказати назву заздалегідь створеного об’єкта, перетворення якого необхідно здійснити.

Якщо встановити відмітку біля напису “***Створити результуючий об’єкт”***, то після виконання операції вихідний об’єкт залишиться без змін, а буде створено новий об’єкт – результат виконання операції стосовно вихідного об’єкта. Задавши всі параметри перетворення, слід натиснути кнопку “***Виконати”***.

Для задання “з екрану” параметрів перетворення об’єктів призначено послуги “***Об’єкт\Перетворення \З екрану\ Паралельне перенесення”*** та *“**Об’єкт\ Перетворення\З екрану\Поворот”***.

Для переміщення деякого об’єкта у нове положення необхідно підвести вказівник мишки до зображення цього об’єкта, натиснути ліву клавішу мишки та тримаючи її у натисненому стані, переміщувати вказівник у потрібному напрямі. При цьому “зафіксований” об’єкт буде переміщуватись разом із вказівником. Перемістивши таким чином об’єкт у потрібне положення, слід звільнити ліву клавішу мишки.

Потрібно зазначити, що в програмі передбачається чітке розмежування між симетрією відносно прямої, променя або відрізка. Так, якщо віссю симетрії є пряма, то симетрична точка завжди буде існувати. Якщо ж віссю симетрії є промінь або відрізок, то симетрична точка буде існувати лише тоді, коли перпендикуляр, опущений із заданої точки на пряму, що визначає вісь симетрії (і яка включає в себе вказаний промінь або відрізок), перетинає цей промінь або відрізок. На рис.79 можна бачити, що для точки $S1$ існують симетричні точки як відносно прямої AB, так і відносно відрізка CD. Однак для точки $S2$ існує лише симетрична точка відносно прямої AB і не існує симетричної відносно відрізка CD.

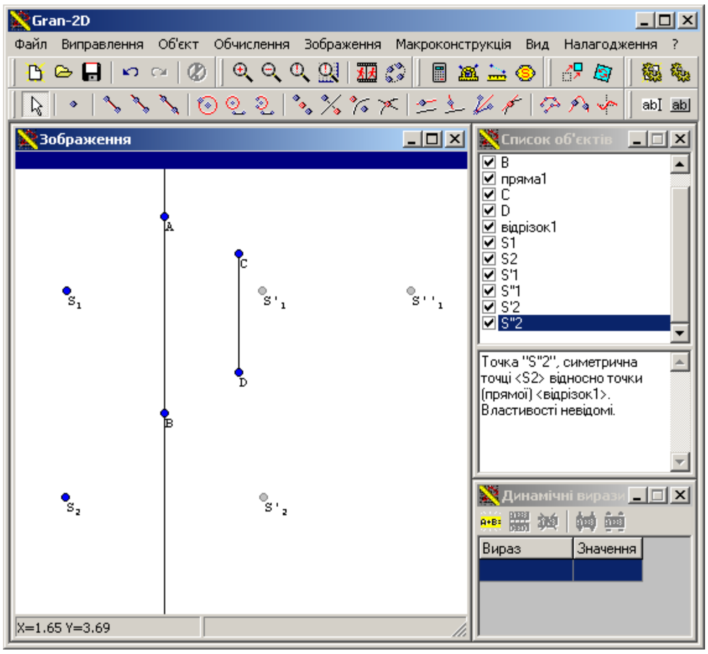


Рис. 69.

Якщо тема симетрії або паралельного перенесення є відносно простою для розуміння учнями, то при вивченні теми повороту виникають певні складнощі. Саме тому детальніше зупинимось на деяких особливостях побудови комп'ютерних моделей в програмі GRAN-2D, що можуть бути цікавими при розгляді даного питання.

Перетворення однієї фігури в іншу називають ***рухом****, якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки A і B першої фігури у точки A1, B1 другої фігури так, що AB=A1B1.* ***Поворотом площини*** *навколо даної точки називається такий рух, при якому кожний промінь, що виходить з даної точки, повертається на один і той самий кут в одному і тому самому напрямі. Цей кут називається кутом повороту* [4, с.95].

Для дослідження властивостей повороту підготуємо зображення, згідно рисунку 80. Спочатку розмістимо дугу, яка в подальшому буде задавати кут повороту (на мал. 78. такою дугою є дуга, що визначається точками *A*, *B*, *C*). Крім того розмістимо точку *O*, яка буде визначати центр повороту, та примітивні фігури над якими буде виконано поворот: точку (точка *F* на рисунку), відрізок, промінь, пряму, коло, замкнену ламану.

Спочатку розглянемо найбільш простий випадок: поворот точки навколо іншої точки. Для цього створимо точку, яка буде результатом повороту точки *F* навколо точки *O* на кут *ABC*. Це можна зробити, створивши аналітичну точку (команда ***"Об'єкт / Створення / Аналітична точка"***).

В результаті даної операції буде створено точку *V*. Тепер, змінюючи кут повороту чи положення опорних точок повороту *O* та *F*, можна бачити, що положення результуючої точки *V* відповідним чином змінюється, проте залежність її від опорних об'єктів залишається сталою.

Для виконання повороту більш складного об'єкту необхідно виконати поворот базових точок, що визначають даний об'єкт: для відрізка або прямої – це дві точки, для *n*-кутника – кількість точок буде дорівнювати *n*. Тому використовувати описаний вище спосіб для кожної з точок досить незручно.

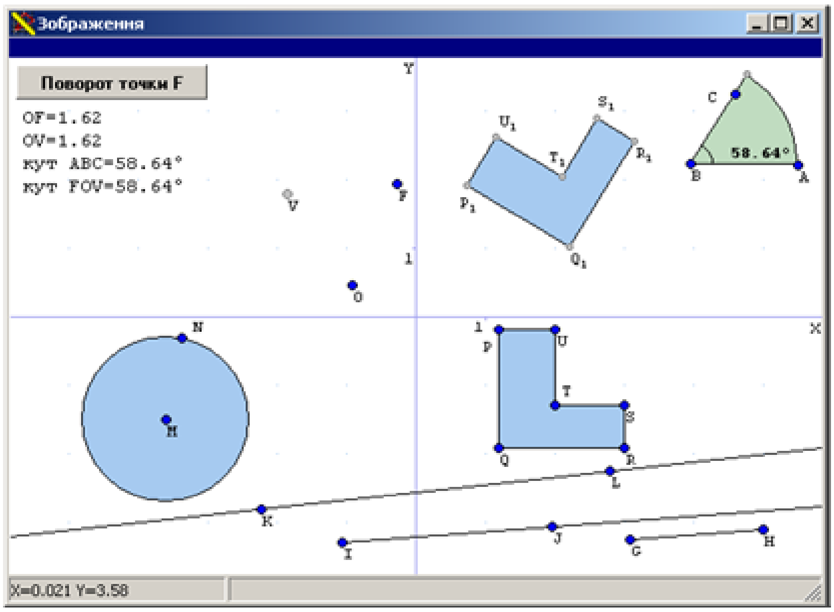


Рис. 70.

Щоб відобразити результат повороту навколо точки *O* на кут *ABC* інших об'єктів (крім ламаної) можна поступити наступним чином:

- прикріпити точку *F* до відповідного об'єкту (для цього необхідно підвести точку *F* до цього об'єкту, в контекстному меню точки вибрати ***"Прикріпити точку"*** та вказати відповідний об'єкт)
- побудувати геометричне місце точок (скориставшись послугою ***"Зображення / ГМТ"***), вказавши точку *F*, як точку на об'єкті, а точку *V*, як залежну.

Для виконання повороту ламаної можна побудувати відповідні аналітичні точки до всіх опорних точок ламаної, а потім їх з'єднати новою ламаною.

Проте такий спосіб хоча і є дієвим, але виявляється достатньо громіздким, особливо у випадку застосування геометричних перетворень до многокутників. Тому в програмі передбачена й інша можливість для виконання повороту за рахунок автоматизації попередніх дій. Зокрема, за даним методом можна швидко повернути не тільки відрізок, промінь, пряму або коло, а й ламану будь-якої складності.

Для цього слід скористатись послугою ***"Об'єкт / Перетворення параметрично"*** закладинка ***"Поворот"*** (рис. 81). Далі необхідно вказати:

- до якого об'єкту буде застосовуватися перетворення;
- точку, що визначає центр повороту;
- вказати кут повороту. Кут повороту вказується в градусах явно або за допомогою формули (рис. 81).

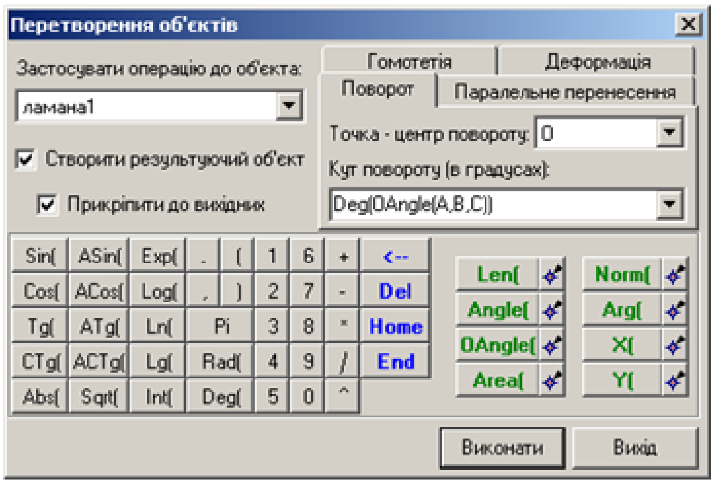


Рис. 71.

Оскільки необхідно, щоб в результаті перетворення був створений новий об'єкт і він був зв'язаним (підтримувалася залежність результуючого об'єкту від вихідного), необхідно відмітити послуги ***"Створити результуючий об'єкт"*** та ***"Прикріпити до вихідних"***.

Як відомо, композиція двох поворотів відносно одного центру є також поворот. Однак, якщо повороти виконуються навколо різних центрів, то відповідь про результат композиції двох таких перетворень не є очевидною. За допомогою комп'ютерних експериментів можна не тільки переконатися, що результатом таких перетворень також є поворот, але й визначати параметри цього повороту. Покажемо це на наступній комп'ютерній моделі. Для даного дослідження підготуємо зображення згідно рисунка 81. Визначимо кути поворотів *IHL* та *DCG*, відповідні центри поворотів *O1* та *O2*, і розмістимо дві вільні точки *A* та *B*. Виконаємо побудови для експериментальної перевірки. Повернемо точку *A* навколо точки *O1* на кут *IHL*, а потім одержану в результаті цього повороту точку *A1* повернемо навколо точки *O2* на кут *DCG*. Результатом є точка *A2*. Аналогічні операції проводимо для точки *B* (рис. 82).

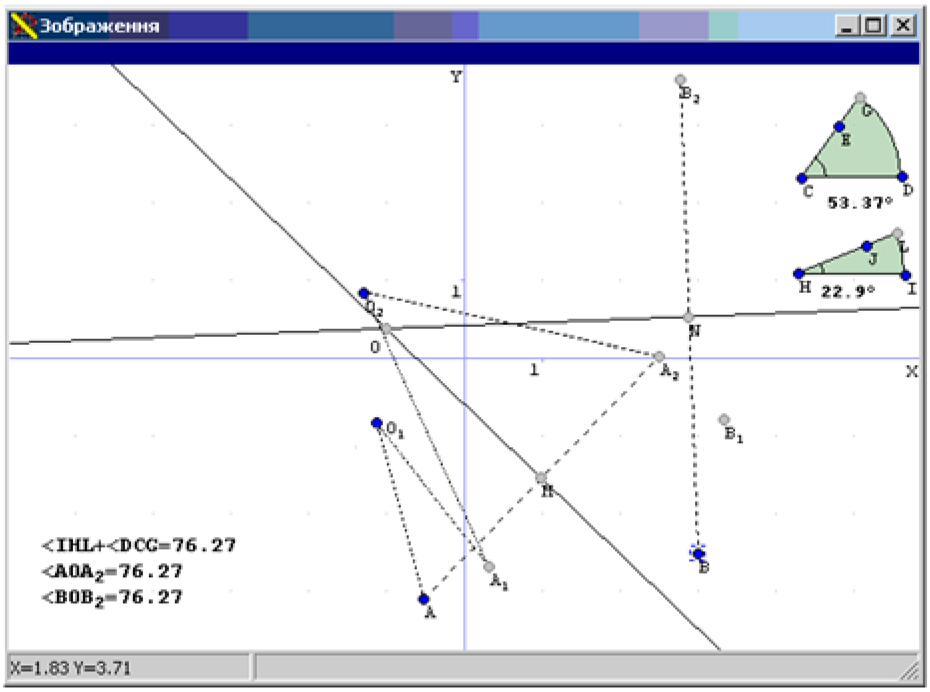


Рис. 72.

Припустимо, що точки *A2* та *B2* є результатом повороту точок *A* і *B* навколо деякого центру *O*. Центр повороту можна знайти як точку перетину двох серединних перпендикулярів до пар точок "другий прообраз" – "образ" (тобто до відрізків *AA2* та *BB*2). Результати досліджень та вимірів показують, що точки *A2* та *B2* можуть бути одержані з точок *A* та *B* результатом повороту навколо точки *O* на один і той самий кут.

Більш того, можна з'ясувати, що чисельно величина цього кута повороту дорівнює алгебраїчній сумі двох кутів повороту, що утворюють композицію. Зрозуміло, що перевірка величини кута відбувається з певною точністю, проте вірогідність правильності цього факту в цілому дуже велика (можна сказати, що після комп'ютерного підтвердження гіпотези з'являється зовсім нове почуття впевненості у правильності відповідної теореми, особливо в тих учнів, у яких наочно-образний тип мислення превалює над абстрактно-логічним).
Для теоретичного обґрунтування залишається розглянути задачу, що підтвердить експериментальні побудови. Для цього необхідно дослідити конфігурацію, яку утворюють два центри вихідних поворотів *O1* і *O2* та центр гіпотетичного повороту *O*, та скористатися твердженням, згідно якого композиція двох симетрій відносно прямих, що перетинаються, є поворот відносно точки перетину на подвійний кут, що утворюють ці прямі (кут утворюється осями симетрії у напряму проти годинникової стрілки).

Зазначимо, що особливості побудови розглядуваних моделей (наприклад, створення результуючих об'єктів та їх безпосереднє перетворення в залежності від вихідних) є такими ж для симетрії, паралельного перенесення та гомотетії.

Цікавою проблемою для учнів може стати пошук таких фігур, і особливо многокутників, які при обертанні навколо певної точки, переходять самі в себе. Зокрема, серед опуклих многокутників такими є правильні многокутники. Саме правильні многокутники та задачі з ними доволі часто розглядаються в шкільному курсі геометрії. Отже, саме моделі таких многокутників доводиться будувати у відповідних програмах.

Якщо побудова правильного трикутника або квадрата є відносно простою, то вже побудова правильних многокутників із більшою кількістю сторін часто викликає труднощі. Розглянемо, зокрема, побудову моделі правильного многокутника на прикладі побудови правильного шестикутника.

1. Будуємо довільний відрізок *AB* - радіус майбутнього кола (рис. 83).

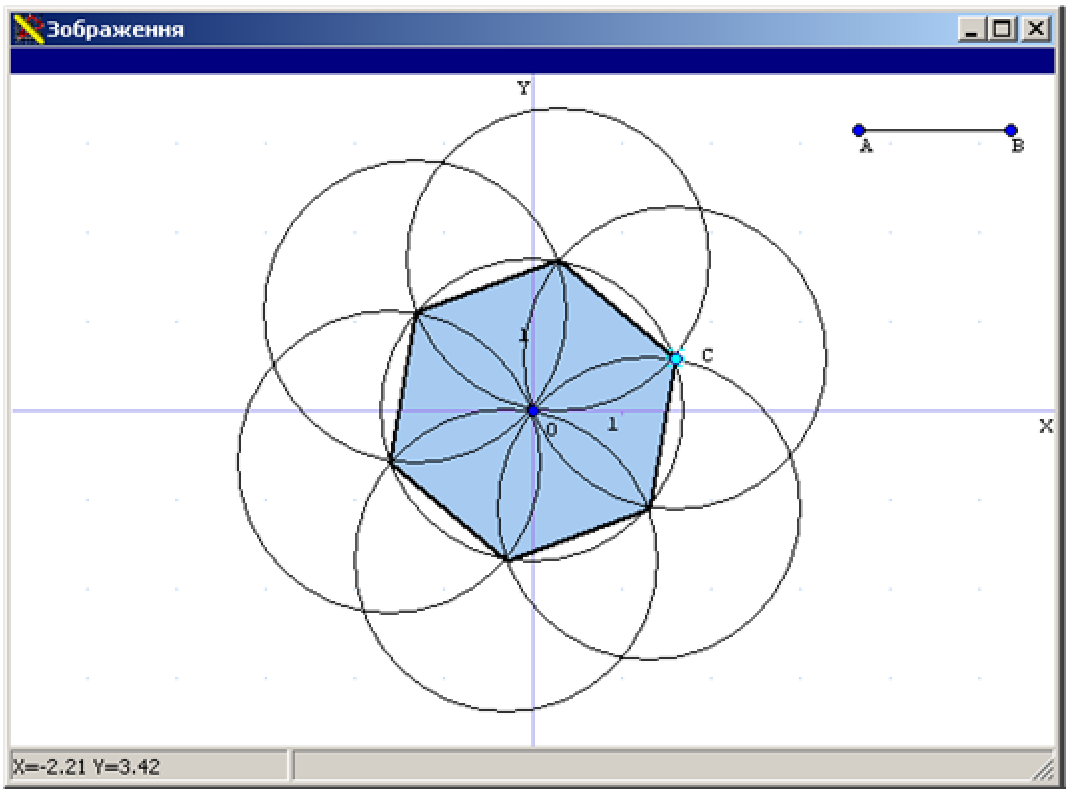


Рис. 73.

2. Будуємо коло за заданим радіусом із центром в довільній точці *O*, скориставшись інструментом ***”Коло за радіусом”***.

3. Створюємо точку на колі *C*, скориставшись інструментом ***”Створення точки”***. Дана точка буде прив’язаною до кола і може вільно рухатись вздовж нього.

4. Відкладаємо від побудованої точки хорду кола, довжина якої дорівнює радіусу кола. Для цього необхідно:

- побудувати коло за заданим радіусом *AB* з центром в точці *C*, скориставшись інструментом ***”Коло за радіусом”***;
- побудувати точку перетину вихідного кола з побудованим колом, скориставшись інструментом ***”Точка перетину”***.

5. Повторюємо попередній пункт ще 5 разів, приймаючи за вихідну точку кола, яку було побудовано на попередньому кроці.

6. Будуємо многокутник з вершинами в побудованих точках, скориставшись інструментом ***”Ламана”***.

7. Ховаємо всі допоміжні побудови.

В результаті отримаємо зображення правильного шестикутника. Дана побудова відповідає побудові многокутника за допомогою циркуля і лінійки. Крім того, що вона є достатньо громіздкою, такі побудови можуть використовуватися лише для правильних многокутників із числом сторін: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, тощо. Однак їх не можна використати для побудови правильних многокутників із числом сторін: 7, 9, 11, 13, 14, 18, та інших .
Саме тому за основу побудови правильних многокутників можна взяти деякі їх властивості, що стосується кутів таких многокутників, які використовуються при побудові правильних многокутників в програмі GRAN-2D.

Задача 17.

Побудувати трикутник за даними трьома сторонами.

Розв'язання.

Розв'язуючи дану задачу, будемо вважати, що на робочій області ППЗ Gran-2D зображено три відрізки - незамкнені ламані з однієї ланки кожна.

Використовуючи паралельне перенесення (за допомогою послуги "Операції/Операції з ламаними/Перетворення ламаної"), сумістимо один з кінців якого-небудь з відрізків з яким-небудь кінцем будь-якого іншого відрізка, а один з кінців третього відрізка з яким-небудь з кінців, що залишився вільним, одного з двох попередніх відрізків. Вилучимо тепер (знявши мітки з об'єктів) вихідні відрізки, образи яких отримані з використанням паралельного перенесення. Далі побудуємо два кола з центрами в кінцях відрізка, до якого приєднані два інші, і які проходять через вільні кінці відрізків, що виходять з центрів.

Якщо ці кола перетинаються, то їхні центри разом із точкою перетину визначають вершини шуканого трикутника. Вилучимо тепер відрізки, які не з'єднують центри кіл, і побудуємо нову замкнену ламану з вершинами у вказаних точках (центрах і точці перетину кіл). Це і буде шуканий трикутник (рис. 74).

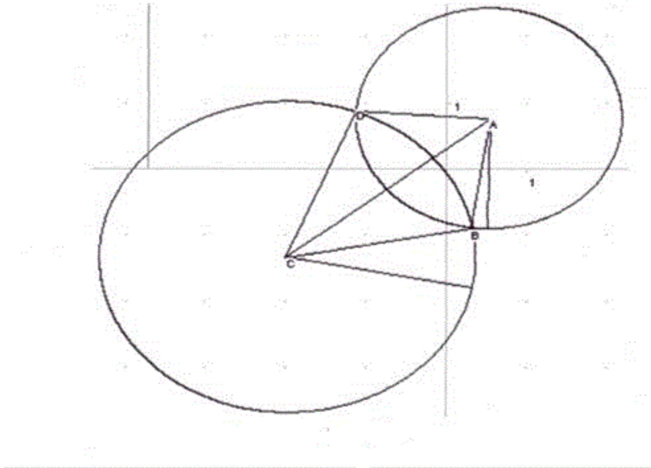


Рис. 74.

Задача 18 .

Побудувати рівносторонній трикутник так, щоб його вершини лежали на трьох заданих паралельних прямих.

Розв'язання.

Вибравши одну вершину трикутника довільним чином на середній з трьох заданих прямих, здійснюємо поворот верхньої прямої навколо цієї вершини на кут 60°. Точка перетину образу верхньої прямої внаслідок повороту та нижньої прямої Буде другою вершиною нашого трикутника. Третю вершину знайдемо, наприклад. Як точку перетину кола, з центром в першій вершині, що проходить через другу знайдену точку, та верхньої прямої. Сполучивши всі три знайдені точки за допомогою ламаної отримуємо рівносторонній трикутник з вершинами, що лежать на трьох заданих паралельних прямих (рис.75).

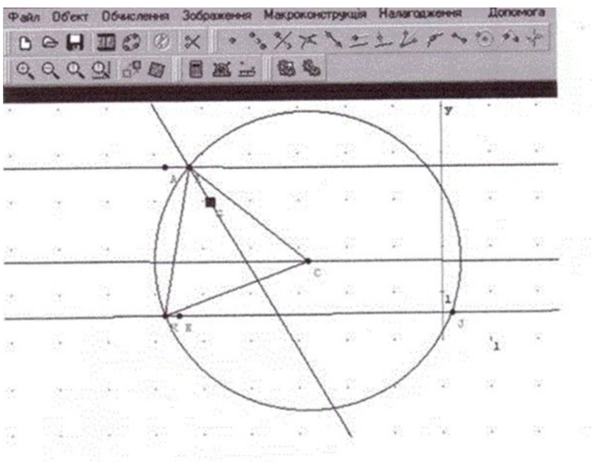


Рис.75.

3.4. Поточний та підсумковий контроль

Розробка системи самостійних робіт є необхідною умовою для систематичної цілеспрямованої організації самостійної діяльності на уроках геометрії у дев'ятих класах.

Самостійні роботи розроблені по основних темах геометричних перетворень у дев'ятих класах і розраховані на 20 – 25 хвилин, у двох варіантах.

Оформлення самостійних робіт для академічного рівня полягає в наступному: самостійні роботи містять тестову частину; окремі листки містять завдання і табличку, які роздаються кожному учневі, учень заповнює табличку, тобто вписує свої дані – ім'я, прізвище та клас, а також проти номера завдання вказує варіант вірної відповіді, саме розв'язування проводиться в робочих зошитах; після завершення першої частини, учень в робочих зошитах розв'язує завдання другої частини; після завершення відведеного часу, учень здає листок та зошит вчителю на перевірку.

Оформлення самостійних робіт для поглибленого вивчення проводиться таким чином: самостійні роботи не містять тестової частини; кожному учневі роздається листок із завданнями, учень розв'язує задачі в робочих зошитах; після завершення відведеного часу, здає листок та зошит вчителю на перевірку.

Таким же самим способом проводяться контрольні роботи.

Завдання самостійних та контрольних робіт для поглибленого вивчення геометрії за рівнем складності поділенні на три групи і мають такі позначки: $^{\mathbf{0}}$ - *початковий та середній рівні*, * - *достатній рівень*, ** - *високий рівень*. Завдання початкового та середнього рівнів максимально оцінюється в 6 балів. Правильно розв'язані завдання достатнього рівня оцінюються в 3 бали. Якщо учневі вдалося розв'язати завдання високого рівня, він отримує ще 3 бали.

Завдання самостійних та контрольних робіт для академічного рівня за рівнем складності поділяються на такі групи: $^{\mathbf{0}}$ - *початковий та середній рівні (тестові завдання)*, * - *достатній рівень*, ** - *високий рівень*. Виконання першої частини завдань максимально оцінюється в 6 балів. Правильно

розв'язані завдання достатнього рівня оцінюються 4 бали. Якщо учень розв'язав завдання високого рівня, то він отримує оцінку 12 балів
(див. додаток 7).

3.5. Педагогічний експеримент та статистична обробка результатів

Під педагогічним експериментом традиційно розуміють заздалегідь сконструйований та реалізований процес навчання, що дає можливість спостерігати педагогічні явища в контрольованих умовах. Важливими особливостями педагогічного експерименту є можливість внесення до процесу навчання (відповідно до завдань експерименту), створення умов для виявлення різноманітних аспектів організації та управління навчально-пізнавальною діяльністю учнів, урахування якісних та кількісних результатів навчання.

Отже, експеримент – це науково поставлений дослід у галузі навчальної чи виховної роботи, вивчення обстежуваного педагогічного явища в спеціально створених і контрольних умовах .

Педагогічний експеримент планується, як правило, з метою визначення або уточнення основних напрямів здійснення наукового дослідження, дослідної перевірки його результатів, ефективності розробленої методичної системи.

Експериментальне дослідження проводилося у Рівненській ЗОШ №24 I-III ступенів. Для експерименту було вибрано два класи 9-А і 9-Б, у яких рівень успішності з математики був однаковий.

Вивчаючи розділ геометрії «Геометричні перетворення» у 9-Б класі, на уроках було дидактичне забезпечення, а саме : застосовано інформаційні технології (використання програми GRAN-2D) (див. додаток 8); використано опорні таблиці, мультимедійні презентації та було використано ряд самостійних робіт для перевірки рівня знань учнів. Так після проведення експериментального уроку учні ще більше зацікавились вивченням геометричних перетворень, у них виникло багато запитань, а це сприяє розвитку їх логічного мислення.

На підсумковому уроці була проведена контрольна робота у 9-А і 9-Б класах(див. додаток 9). Після опрацювання результатів виконання підсумкової контрольної роботи, було оцінено навчальні здобутки учнів двох класів, зроблено певні узагальнення й висновки.

9-Б клас при вивченні теми «Паралельне перенесення» використовував програму GRAN-2D, 9-А клас дану програму не застосовував.

Рівень засвоєння розв'язування задач на геометричні перетворення (поворот) в учнів 9-Б класу помітно зріс. Це видно із результатів виконання контрольної роботи.

Результати виконання контрольної роботи подані в таблиці 1.

Таблиця 1.

Бали	Класи	
	9-Б	9-А
	Кількість учнів	
	28	28
	Позитивні результати	
4-6	15	16
7-9	10	9
10-12	3	1

Отже результати контрольної роботи свідчать про те, що застосування інформаційних технологій (програми GRAN-2D) дає змогу учням краще засвоїти програмовий матеріал із меншими затратами часу, дає можливість розв'язати більше поурочних вправ, розвиває логічне та аналітичне мислення, зацікавлює дітей. Але використання програми GRAN-2D має і певні недоліки. На мою думку, основним недоліком є те, що учні не виконують геометричних побудов за допомогою лінійки, олівця та циркуля.

Ми дійшли висновку, що використання програми GRAN-2D на уроках геометрії є невід'ємною часткою сучасного навчального процесу.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання дипломної роботи зроблено спробу якнайглибше розкрити тему «Геометричні перетворення» в шкільному курсі математики; була опрацьована велика кількість методичної та психолого-педагогічної літератури, також були реалізовані такі завдання:

1) вивчено аналіз методичної літератури з теми дослідження;
2) систематизувано теоретичний матеріал з відповідного курсу геометрії.
3) розроблено та експериментально перевірено зміст занять.
4) вдосконалено та опрацьовано методику вивчення даного курсу геометрії, який сприяє підвищенню розуміння, математичного і логічного мислення в учнів та експериментальної перевірки його ефективності.

На основі проведеного дослідження можна стверджувати:

1. Дидактичне забезпечення до вивчення геометричних перетворень сприяє підвищенню розуміння геометрії, розвитку просторового мислення, формуванню в учнів вмінь розв’язувати вправи на застосування переміщень, вміння застосовувати їх при розв’язуванні задач з планіметрії і стереометрії.

2. Широке застосування мультимедійних технологій різко підвищує ефективність активних методів навчання для всіх форм організації навчального процесу.

3. Впровадження в навчальний процес нових інформаційних технологій навчання, що базуються на комп’ютерній підтримці навчально-пізнавальної діяльності, відкриває перспективи щодо гуманізації навчального процесу, розширення та поглиблення теоретичної бази знань і надання результатам навчання практичної значущості.

4. Системи самостійних робіт є необхідною умовою для систематичної цілеспрямованої організації самостійної діяльності на уроках геометрії.

Дана тема дає широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості, розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, розвиток спостережливості й уваги, вироблення навичок пізнавальної і творчої активності, розвиток геометричного мислення, навичок математичного мовлення.

Активізація творчості, самостійності учнів, формування їх мислення в процесі оволодіння математикою ефективно здійснюється через розв’язування задач на застосування геометричних перетворень за допомогою дидактичного забезпечення.

В роботі розглянуто використання на уроках математики комп’ютера, а саме деякі нові можливості використання програми GRAN-2D, що стосуються саме вивчення геометричних перетворень на площині. Також розглядається застосування на уроках геометрії використання опорних таблиць, мультимедійних презентацій; описується застосування самостійних та контрольних робіт для перевірки та контролю знань учнів.

Застосування інформаційних технологій (програми GRAN-2D) дає змогу учням краще засвоїти програмовий матеріал із меншими затратами часу, дає можливість розв’язати більше поурочних вправ, опорні таблиці розвивають логічне та аналітичне мислення учнів, мультимедійні презентації зацікавлюють дітей, підвищують інформативність уроку.

Матеріали даної роботи спрямовані на розвиток мислення учнів, пам’яті, розвиток інтелектуальних та пізнавальних здібностей школярів, вміння переносити набуті знання і навички в нову ситуацію.

Дану роботу можна використовувати на математичних гуртках та факультативних заняттях. Матеріали даної дипломної роботи, як джерело додаткової інформації, можуть використовувати вчителі математики, учні шкіл з поглибленим вивченням предмету, або учні, які цікавляться математикою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Атанасян Л.С. Геометрия: Учеб. для 7-9 кл. сред. шк. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.В.Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1992. – 206 с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики. / Г. П. Бевз // Вид 2-е, перероб. і доп. Навч. посібник для студ. мат. фак. пед. інст.. – К.: Вища школа, 1977.- 376 с.
3. Бевз Г.П. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. сред. шк. / Г.П.Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владимирова. - М.: Просвещение, 1992. – 352 с.
4. Бурда М.І. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл./ М. І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак – ЕКО, 2009.– 240 с.
5. Бурда М. І.. Геометрія: Эксперим. навч. посібник для 9 кл. шк. з поглибл. теорет. і практ. вивченням математики. / М.І. Бурда, Л.М.Савченко, М.С.Собко. - К.: Освіта, 1994. – 144с.
6. Глейзер Г.И. История математики в школе (9-10 кл.) / Г.И.Гейзер. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.
7. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. / Я.И.Груденов. – М.: Просвещение, 1990. – 223 с.
8. Гуревич Р. С. Впровадження комп'ютерних технологій у навчально-виховний процес закладів освіти / Р. С. Гуревич. – Вінниця: ВДПУ, 2000. – 30 с.
9. Дубинчук. Е.С. Преподавание математики в средних ПТУ (2-й год обучения). / Е.С.Дубинчук, З.Й.Слепкань. – К.: Вища шк., 1988. – 135 с.
10. Дубинчук О.С.Методичні особливості навчання геометрії в середньому ПТУ. / О.С. Дубинчук, З.І. Слєпкань, С.М.Філіпова . – К.: Вища шк., 1992.– 271 с.
11. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. / М.І.Жалдак. – К.: Техніка, 2002. – 250 с.
12. Кисельов А П. Геометрія: Підруч. і зб. задач для 8 і 9 кл. / А.П.Кисельов, М.О. Рибкін //8-ме вид. – К.: Рад. шк., 1972. – 100 с.

13. Клопський В М. Геометрія: Навч. посібник для 9-10 кл. серед. шк./ В.М.Клопський, З.А.Скопець, М.І.Ягодовський //6-те вид. – К.: Рад. шк., 1980. – 248 с.

14. Коваль В.В. Загальна методика викладання математики./ В.В.Коваль, ., О.В. Крайчук, Г.Я. Клекоць. – Р: РДГУ, 2005. – 165с.

15. Козира В. М. Технологія кроку з математики / В. М. Козира. – Тернопіль: Астон, 2002. – 284 с.

16. Кондратьєва Л.І. Календарно-тематичне планування з математики. 5-11 класи / Л. І. Кондратьєва, О. М. Тепцова. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2016. – 112 с.

17. Конфорович А. Г. История развития математики: Альбом: Учеб. нагляд. пособие. / А.Г. Конфорович, А.М.Андриевская. – К.: Вища шк., 1987. – 94 с.

18. Крамеренко Т.І. Проблеми творчого розвитку учнів. Т.І. Крамаренко // Математика в школах України. – 2013. - № 9. – С. 38-43.

19. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников./ В.А.Крутецкий. – М.: Просвещение, 1988. – 431 с.

20. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії. / І.А. Кушнір. – К.: Абрис, 1994. – 464с.

21. Лоповок Л.М. Збірник задач для 9-10 кл.: Дидактичні матеріали для вчителів. / Л.М.Лоповок. – К.: Рад. шк., 1994. – 120 с.

22. Машбиця Ю. І. 21. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів / Ю. І. Машбиця. – К: ІЗМН, 2000. – 264 с.

23. Медяник А. Г. Учителеві про шкільний курс геометрії. / А.Г. Медяник. – К.: Рад. шк., 1988. – 156 с.

24. Метельский Н.В. Психолого-педагогические основы дидактики математики. / Н.В.Метельский. – М: Выш. шк., 1987. – 160с.

25. Мерзляк А.К. Геометрія: підруч. для 9 кл. / А.К.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 272с.

26. Пометун О. І. Сучасний урок: Інтерактивні технології навчання / О. І. Пометун. – К: Видавництво А.С.К, 2004. – 325 с.

27. Попадюк І.М. Поворот / І.М. Попадюк //Математика в школах України. – 2013.-№ 7. – С.32-35.

28. Прохорова О. Впроваження сучасних педагогічних технологій в практику роботи / О.Прохорова // Математика в школах України. – 2010. - № 31. – С. 6-11.

29. Роганін О.М. Математика. Усе про ЗНО-2015 + тренувальні вправи / О.М.Роганін. – Харків: ФОП Співак Т.К., 2015. – 208 с.

30. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие для пед. ин-тов./ Н.М.Рогановский. - М: Высш. шк., 1990. – 266 с.

31. Рудченко І.І. Види рухів. Геометрія. 8 клас / І.І. Рудченко // Математика в школах України. – 2007. - № 15. – С.32-39.

32. Савченко С.Б. Вміння виділити головне та суттєве в навчальному процесі /С.Б.Савченко // Математика.- 2003. - №35.- С. 8-11.

33. Савченко С.Б. Нестандартний урок. Поворот /С.Б.Савченко // Математика в школі. – №32. 2005. – С. 2-7.

34. Слєпкань З.І. Методика навчання математики : Підручник для студ. спец. пед. навч. Закладів / З.І. Слєпкань. - К.: Зодіак ЕКО, 2000. – 260 с.

35. Слєпкань З.І. Психолого – педагогічні основи навчання математики / З.І. Слєпкань.- К.: Радянська школа, 1989.- 158 с.

36. Столяр А.А. Педагогіка математики / А.А.Столяр. - М: Вища школа, 1984.- 360 с.

37. Столяр А.А. Методика викладання математики в середній школі / А.А.Столяр. – Харків, 1992. – 180 с.

38. Чижова О.І. Перетворення фігур на площині / О.І.Чижова // Математика в школах України. – 2015. -№ 25. – С.1-8.

39. Шипілова І.Ю. Перетворення симетрії / І.Ю. Шипілова // Математика. – 2003.- №7. – С. 12-14.

40. Ходоровська С.І. Психолого – педагогічна діагностика в роботі вчителя / С.І.Шипілова //Математика в школі. –2010.- № 5. – С.21-25.