Форма № Н-9.02

Міністерство освіти і науки України

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та методики викладання математики

ДИПЛОМНА РОБОТА

спеціаліст

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему:

«Методика вивчення показникових рівнянь та нерівностей з використанням інноваційних технологій навчання»

Студентки V курсу групи МЕФІ-51
напряму підготовки
7.04020101 «Математика*»
Чухач Тетяни Михайлівни

____

Керівник:
доц. Коваль Володимир Васильович

____

Рецензенти: д-р. фіз.-мат. наук,
проф., зав. кафедри
прикладної математики НУВГП
Турбал Юрій Васильович

____

канд. фіз.-мат. наук, проф.
Петрівський Борис Петрович

____

Рівне – 2016 року

ЗМІСТ

ВСТУП

XXI століття в усіх сферах життєдіяльності людини і суспільства в цілому висуває нові, раніше невідомі завдання. Це ставить перед людиною, а отже, і перед освітою – сферою, що готує молоде покоління до життя, – небачені раніше невідомі завдання. Зумовлено це переходом людства на перетині тисячоріч до нового типу цивілізації.

Освіта – основа розвитку особистості, суспільства, нації та держави. Вона є найбільш масштабною і людиномісткою сферою суспільства, визначальним чинником його політичної, соціально-економічної, культурної й наукової організації.

Головним джерелом оновлення освіти є визначення розвитку особистості як головної мети навчання у школі. Шкільна практика показує, що школа, на жаль, ще залишається «школою пам’яті» і ніяк не піднімається до рівня школи мислення. При такому підході учень може зберігати в пам’яті великий об’єм інформації, але не вміти її використовувати ні в межах навчального процесу, ні тим більше, в нестандартних ситуаціях. Усунення цього протиріччя є основою удосконалення освіти.

Актуальність теми полягає в тому, що тема «Показникова функція» займає велике місце в шкільній програмі з математики в 10 класі, їй приділяється багато часу. У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені і корені та їх властивості, засвоюють поняття показникової функцій, її властивості та графік, навички та вміння виконувати тотожні перетворення показникових виразів, розв’язувати показникові рівняння й нерівності та їх системи.

Останнім часом розв’язуванню задач, а точніше показникових рівнянь або нерівностей, приділяється багато уваги, осбливо на вступних екзаменах до ВУЗів та інших навчальних закладів. Тому розгляд цієї теми дуже важливий.

Мета дипломної роботи - системазувати відомості про показникові рівняння й нерівності та їх системи в шкільному курсі алгебри старшої школи і розкрити роль і місце вивчення показникових рівнянь та нерівностей в школі за допомогою інноваційних технологій навчання та вибрати методику подання цієї теми.

Предмет дослідження: зміст та митодика уроків при вивченні теми: «Показникові рівняння і нерівності».

Об'єкт дослідження: показникові рівняння і нерівності та методи їх розв'язання.

В основу дослідження покладена *гіпотеза* про те, що у процесі вивчення показникових рівнянь та нерівностей з використанням різних методів їх розв'язання в учнів буде формуватися більша зацікавленість до вивчення алгебри, зростатиме рівень знань, уважність, наполегливість, зосередженість.

Для досягнення мети були поставленні такі **завдання**:

1. Систематизувати відомості про розв'язування показникових рівнянь й нерівностей та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи.

2. З'ясувати місце показникових рівнянь й нерівностей та їх систем в діючій та проекті нової програми з математики, конкретизувати вимоги до знань, умінь і навичок учнів.

3. Проаналізувати сучасні діючі і пробні підручники з алгебри.

4. Запропонувати методичні рекомендаціі щодо викладання теми «Показникова функція» в середній загальноосвітній школі з використанням інноваційних технологій навчання .

5. Підібрати диференційовану систему вправ.

6. Подати приклади розв'язування рівнянь та нерівностей різної складності та задачі для самостійного розв'язування.

7. Опробувати розроблену методику в сучасній школі.

8. Створити посібник по даній темі.

9. Зробити висновки.

Практичне значення роботи полягає в тому, що розроблений зміст і методика може бути використана вчителями шкіл при організації навчання математики на уроках, на факультативних заняттях, для підвищення якості знань учнів 10 класів, активації їх пізнавальної діяльності.

Теоретичне значення полягає у дослідженні і обґрунтуванні методів розв'язання рівнянь та нерівностей та доцільність їх використання при вивченні математики в школі.

В процесі роботи використовувались такі *методи*:

- дослідницький метод при вивченні психологопедагогічної, наукової та методичної літератури з предмету дослідження;
- аналітичні методи;
- практична реалізація запропонованої методики.

При проведенні уроків в школі пропонується застосовувати такі методи:

- пояснювально - ілюстраційний;
- конкретно - індуктивний;
- дослідницький.

Робота складається з: вступу, 4 розділів, які включають в себе: науково–теоретичні основи дослідження, психолого – педагогічні основи дослідження, методику вивчення показникових рівнянь і нерівностей, педагогічний експеримент та статистичну обробку його результатів, висновків та списку використаних джерел.

Апробація розробленої методики здійснювалася при проведенні X Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформаційні технології в професійній діяльності», де я виступила з доповіддю «Методика вивчення показникових рівнянь і нерівностей з використанням ІКТ» та публікації статті на аналогічну тему у електроному виданні. Дана методика також відображена у розгобленому мною навчально-методичному посібнику на тему: «Методика вивчення показникових рівнянь та нерівностей з використанням інноваційних технологій навчання».

РОЗДІЛ І.НАУКОВО-ТЕОРИТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Навчальні цілі при вивченні теми «Показникова функція»

Зміст і структуру освіти визначають цілі. Своє вираження вони завжди приймають у вигляді переліку певних вимог, які характеризують кінцевий результат процесу навчання і виховання.

У програмі з математики для середньої школи, зокрема в розділі « Тематичне планування навчального матеріалу», зміст освіти по кожному із курсів (математика, геометрія, алгебра, алгебра і початки аналізу) розбито на навчальні теми. Вивчаючи кожну з них, вчитель і учні ставлять перед собою певні цілі. Саме їх ми і будемо називати навчальними.

Навчальні цілі – ідеальне уявлення результату, який має бути досягненим в ході вивчення тієї чи іншої навчальної теми.

Слід відмітити, що навчальна ціль як ідеальний результат майбутньої діяльності проектується при вивченні математики такими п’ятьма напрямками:

1) формування світогляду і особистості учня;
2) формування мислення і мовної культури учня;
3) розвиток прикладних і політехнічних вмінь;
4) розвиток загальнотрудових і навчальних вмінь;
5) вимоги до математичної підготовки учнів.

Кожний із цих напрямків, очевидно, теж визначає цілі, які будуть похідні від навчальної. Їх у дидакитиці прийнято поділяти на три групи, відповідно називаючи кожну з груп: дидактична або освітня мета, виховна мета і розвиваюча. Формуються навчальні цілі завжди свідомо і мають бути науково-обгрунтованими та прктично досяжними [2].

Визначимо навчальні цілі, які повинні бути поставленні перед вчителем і учнями в процесі вивчення теми «Показникова функція»:

1. Учні повинні вміти зображати графік показникової функцій, повинні знати основні показникові тотожності.

2. Учні повинні вміти роз'вязувати типові вправи на використання основних показникових тотожностей. Вміти розв'язувати основні показникові рівняння, нерівності та їх системи.

Сформульовані цілі визначають певний рівень навчально-пізнавальної діяльності учнів під час вивчення даної теми. Це так званий рівень вмінь і навичок. У дидактиці виділяють кілька таких рівнів. Будемо дотримуватись класифікації рівнів, яка дана в посібнику:

I-й рівень – рівень знайомства,

II-й рівень – рівень відтворення,

III-й рівень – рівень умінь і навичок,

IV-й рівень – рівень творчості.

Учень, який досяг I-го рівня навчально-пізнавальної діяльності, здатний впізнати предмет, об'єкти, процеси, властивості, але тільки за їх виглядом описом, зображенням, характеристикою. Кажуть, що він володіє знаннями-знайомствами.

Іноді ці знання умовно поділяють на знання про об'єкти що вивчаються і оперативні знання (про зв'язки між об'єктами).

Учень, який досягнув II-го рівня, повинен вміти відтворити (повторити) інформацію, операції, дії, засвоєнні під час навчання. В цьому випадку кажуть, що він володіє знаннями-копіями. Розділяють буквальне і реконструктивне відтворення.

На III-му рівні учень повинен уміти виконувати дії, загальна методика і послідовність (алгоритм) яких вивчені на заняттях, але зміст і умови їх виконання нові.

Успішно навчаючись учень може досягнути IV-го рівня. Тоді він здатний самостійно орієнтуватись в нових, нестандартних ситуаціях, складати програму дій і виконувати їх, пропонувати нові, невідомі йому раніше розв'язання. Його діяльність носить пошуковий характер.

Визначені цілі, очевидно, будуть цілями III-го рівня, саме того, який повинен бути досгнутий всіма учнями в процесі вивчення теми «Показникова функція». Проте процес засвоєння підпорядкований ієрархії рівнів діяльності: учень не може перейти на III-й рівень, минувши рівні I і II. Тому, крім визначених цілей III-го рівня, повинні бути сформульовані цілі I-го і II-го рівнів. Вони безпосердньо проектуються вже виділеними цілями III-го рівня. Так, в нашому випадку це дві цілі: «Учні повинні знати означення показникової функцій», «Учні повинні знати і вміти доводити властивості показникової функцій». Щодо цілей IV-го рівня, то їх визначити потрібно, але відносити до класу дидактичних не варто. Оскільки досягнути їх всі учні класу не можуть. Правильно буде, якщо віднести їх до класу розвиваючих.

Багато вчених присвятили цій темі книги: «Алгебра і початки аналізу 10–11кл» Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубінчук О.С., Вороний О. М. «Готуємось до олімпіади з математики», Семенов В. О., Тристан В. М. «Доведення нерівностей. Показникові і логарифмічні нерівності».

Підкоригувавши формулювання чотирьох визначених цілей та встановивши відповідно до принципу ієрархії порядок їх досягнення, матимемо, що тема: «Показникова функції», вивчається 20 год, метою є: Вивчивши тему учні повинні знати означення показникової функції;вміти доводити їх властивості, будувати графіки функції, розв’язувати вправи на використання основних властивостей функцій з достатнім обгрунтуванням в ході розв’язання [1].

Теоретичний матеріал теми не весь вивчається на одному й тому ж рівні. Певна його частина вивчається на рівні знайомства, інша на рівні знань чи умін і навичок. Для того, щоб знати на якому рівні яка частина матеріалу вивчається (щоб виділити головне і знати другорядне) здійснюють розбиття всього матеріалу на елементи знань.

Під елементом знань розуміють логічно завершену порцію інформації. В математиці кожному елементу знань встановлюють його статус : поняття - П; факт- Ф; твердження -Т; ознака -О; метод -М; спосіб дії -СД.

Розбиття навчального матеріалу на елементи знань і побудова графічної схеми взаємозв'язку між ними називається логіко-дидактичним аналізом навчального матеріалу.

1.2. Огляд навчально – методичних посібників та статей, присвячених даній проблемі

Семенов В.О. «Доведення нерівностей»

Семенов В.О. Доведення нерівностей: Показникові і логарифмічні нерівності [Текст] / В.О. Семенов. – Харків: Видавнича група «Основа»: «Тріада +», 2007. – 192 с. – (Бібліотека журналу «Математика в школах України». Вип. 10 (58)).

У пропонованій книзі розглянуто доведення понад 400 показникових і логарифмічних нерівностей різного ступеня складності, від зовсім простих до складних, олімпіадних задач.

Ця книга – спроба авторів зібрати в одному посібнику всі логарифмічні та показникові нерівності.

Посібник буде корисним у першу чергу учням спеціалізованих фізико-математичних шкіл та профільних класів математичного спрямування середніх загальноосвітніх шкіл, ліцеїв, гімназій та їх учителям.

О. Мазур. «Математика в сучасній школі»

Показникові нерівності [Текст] / О. Мазур // Математика в сучасній школі : наук. - метод. журн. - 2013. - № 10. У цій статті розповідається про показникові нерівності, як їх розв'язувати і наводяться приклади їх застосування у Зовнішньому незалежному оцінювані.

В.В. Ачкан. «Математика в школі»

Використання прикладних задач у процесі вивчення показникових рівнянь у класах різних профілів / В.В. Ачкан // Математика в школі. – 2011.

– № 4. Розповідається про показникові рівняння, способи їх розв’язку і застосування прикладних задач. Розрахований на учнів старших класів шкіл.

Веліховська А.Б. «Готуємось до олімпіади з математики»

Веліховська А.Б. Готуємось до олімпіади з математики [Текст] / А.Б. Веліховська. – Харків: Видавнича група «Основа», 2007. – 160 с. – (Бібліотека журналу «Математика в школах України». Вип. 2 (50)).

Посібник призначено для використання під час факультативної роботи з математики та для підготовки до участі у математичних олімпіадах. У ньому описано основні методи та ідеї розв’язування олімпіад них задач.

Розрахований на учнів старших класів шкіл, учителів, керівників гуртків юних математиків.

Ушаков Р.П. «Математичні етюди»

Ушаков Р. П. Математичні етюди. Книга 2 [Текст] / Р. П. Ушаков. – Харків: Видавнича група «Основа», 2008. – 136, [6] с. – (Бібліотека журналу «Математика в школах України». Вип. 3 (63)).

Пропонована книга створена автором на основі багаторічного досвіду викладання математики. Книга складається з двох розділів: «Інтеграл», «Нерівності», матеріали яких можуть використовувати учні при вивченні показникових нерівностей, які навчаються у класах з поглибленим вивченням математики, готуються до участі в олімпіадах різного рівня.

Посібник стане в пригоді вчителям під час організації факультативних та гурткових занять із зазначеної тематики. Для вчителів математики та учнів загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій.

Шкіль М. І. «Алгебра і початки аналізу 10 клас»

Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.: Зодіак – ЕКО, 2005. – 272 с.

В підручнику представлений навчальний матеріал для трьох рівнів навчання. Поглиблений рівень передбачений для тих учнів, які мають можливість і бажають засвоїти алгебру й початки аналізу в широкому і глибшому обсягах, зокрема тему: «Показникові рівняння і нерівності». Крім теоретичного матеріалу, передбаченого чинною програмою, до підручника включено деякі питання теорії показникових рівнянь і нерівностей, що виходять за межі програми.

Нелін Є. П. «Алгебра і початки аналізу 10 клас»

Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : профільн. рівень / Є. П. Нелін. — Х. : Гімназія, 2010.— 416 с.

Основний матеріал про показникові рівняння і нерівності, який повинні засвоїти учні, структуровано у формі довідкових таблиць на початку параграфа, які містять систематизацію теоретичного матеріалу та способів діяльності з цим матеріалом у формі спеціальних орієнтирів для розв'язування завдань. У першу чергу учні повинні засвоїти матеріал, який міститься в таблицях. Тому під час пояснення нового матеріалу доцільно працювати з підручником, використовуючи відповідні таблиці та рисунки. Усі потрібні пояснення й обґрунтування теж наведено в підручнику, але кожен учень може вибирати власний рівень ознайомлення з цими обґрунтуваннями.

Мерзляк А. Г. «Алгебра і початки аналізу 10 клас»

Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2010. — 352 с.

У пунктах викладено теоретичний матеріал по темі: «Показникові рівняння і нерівності». Особливу увагу звертайте на текст, виділений жирним шрифтом. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані курсивом.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. До кожного пункту теми підібрано задачі для самостійного розв’язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв’язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе». Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендовано звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили! Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Бевз Г. П. «Алгебра і початки аналізу 10 – 11 клас»

Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 – 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г. П. Бевз. – К.: Освіта, 2005. – 255 с.

У параграфі про показникові рівняння і нерівності викладено теоретичні відомості і вміщено задачі на їх засвоєння. Задачі обов’язкового рівня, які мають уміти розв’язувати всі учні, позначено нуликом, а порівняно важкі – зірочкою. Для учнів, які цікавляться математикою, вміщено добірку задач підвищеної складності.

Є в підручнику також завдання для самостійних робіт. З них два перших варіанти легші від наступних, що дає змогу диференціювати навчання. Їх можна використовувати і для контрольних робіт.

1.3. Впровадження інноваційних технологій навчання в сучасну освіту

В даний час відбувається інтенсивне впровадження сучасних комп'ютерних технологій у викладання природничих навчальних дисциплін.

При цьому найбільший ефект досягається при використанні комп'ютерів у навчанні вирішення стандартних завдань різного класу. Це пояснюється тим, що в процесі навчання організується активний діалог комп'ютера з користувачем в зручному для нього режимі. Навчають, пропонується завдання для вирішення, тип і складність якої він може вибрати самостійно. При цьому він може скористатися різними видами допомоги. Якщо він не знає, як вирішувати цю задачу, йому може бути продемонстровано докладний, методично обгрунтоване рішення даного завдання. Після цього учень може спробувати вирішити аналогічну задачу або перейти на більш простий рівень вирішення завдань.

Процес інформатизації освіти зачіпає всі сфери функціонування школи. Використання інформаційно-комунікативних технологій в школі дозволяє істотно змінити професійну діяльність всіх учнів освітнього процесу. Рівень застосування засобів інформаційно-комунікативних технологій в педагогічній діяльності є одним з важливих показників розвитку інформаційних компетенцій педагога [6].

Проведення уроків з використанням інформаційних технологій - це потужний стимул у навчанні. Використання мультимедіа, як правило, дозволяє надати навчаються більше можливостей для самостійної та незалежної роботи, а також - гнучко варіювати навчальні графіки. Безсумнівно, з'являються нові навчальні методики, нова педагогіка, нові інструменти і нові ресурси, доступні вчителю.

У інформаційно-комунікативних технологій існує безліч визначень, і майже всі вони сходяться на тому, що ці технології включає в себе текстову, графічну, анімаційну, відео-і звукову інформацію в інтегрованому поданні, допускає різні способи структурування та подання.

Розглядаючи інформаційно-комунікативні технології як засіб навчання, в різних академічних контекстах мультимедійні продукти і послуги Інтернету можуть використовуватися для вироблення творчих навичок та розвитку критичного мислення. ІКТ можуть бути використані для поліпшення якості освіти в окремих предметних областях, в тому числі в математиці.

Індивідуалізація процесу навчання. Використання мультимедіа дозволяє учням самостійно працювати над навчальними матеріалами та самостійно вирішувати, як вивчати матеріали, в якій послідовності і як використовувати інтерактивні можливості програмних забезпечень, як реалізувати спільну роботу з іншими членами навчальної групи. Таким чином, навчаються стають активними учасниками освітнього процесу.

Навчаються можуть впливати на свій власний процес навчання, підлаштовуючи його під свої індивідуальні здібності й уподобання. Вони можуть вивчати саме той матеріал, який їх цікавить, повторювати матеріал стільки разів, скільки їм потрібно, і це допомагає усунути багато перешкод їх індивідуальним сприйняттям [19].

1.4. Використання інформаційно-комунікаційних технологій при вивченні теми «Показникова функція»

В даний час розроблена комп'ютерна підтримка курсу будь-якого предмета, у тому числі і математики. Не підміняючи собою, підручник чи інші навчальні посібники, електронні видання володіють власними дидактичними функціями. Вони не прив'язані жорстко до будь-якого конкретного підручника, в них представлені найбільш значущі питання змісту освіти для основної та старшої школи. Основну роль відіграє задачний матеріал, використання якого варіюється учителем. Програмне забезпечення включає в себе навчальні та контролюючі програми, електронні підручники з планіметрії, стереометрії, алгебри, алгебри і початків аналізу. За допомогою цих програм учень самостійно може перевірити свій рівень знань з теорії, виконати теоретико-практичні завдання. Тут є теоретичні питання, зразки виконання завдань, завдання для самоперевірки. Програми зручні своєю універсальністю. Вони можуть бути використані і для самоконтролю, і для контролю з боку вчителя.

У своїй практиці викладач може використовувати навчальних і контролюючих програм з окремих тем курсу математики для роботи з учнями, здатними досить швидко засвоювати навчальний матеріал на обов'язковому рівні. Такі учні почергово працюють в індивідуальному режимі за комп'ютером і після успішного виконання завдань переходять до вправ вищого рівня складності. Учитель в цей час з класом відпрацьовує матеріал обов'язкового рівня навчання. Така діяльність дозволяє цій групі учнів не нудьгувати, не розслаблятися, а бути зайнятими власною справою, в результаті якого вони зацікавлені. Також корисно застосовувати навчальні програми в якості тренажера при корекції знань окремих учнів. Ця робота хороша тим, що учень самостійно за допомогою комп'ютера повторює практично весь матеріал по темі. Пред'являються навчальні завдання за ступенем складності, учням дається можливість запросити певну форму допомоги, передбачити виклад навчального матеріалу з ілюстраціями, графіками, прикладами і т.д. Це усуває одну з найважливіших причин негативного ставлення до навчання - неуспіх, обумовлений нерозумінням, значними прогалинами у знаннях.

У результаті вирішення завдань учень може переконатися в правильності свого рішення або дізнатися про допущену ним помилку візуальним шляхом, отримавши відповідну «картинку» на екрані. Працюючи з студіюючої програмою, учень отримує можливість довести рішення задачі до кінця, спираючись на необхідну допомогу. Створюється сприятливий психологічний клімат, тому що учень не комплексує через незнання теми, а самостійно добуває знання за допомогою навчальної програми. Але це зовсім не знижує рівень приналежності викладача до проведення уроку. Викладач на інформаційному уроці лише перестає бути авторитарним і єдиним джерелом знання, і стає керівником і помічником навчаються в освітньому процесі. Навчаються надається можливість самостійно шукати потрібні їм знання в мінливому світі, і тому їм потрібна значна кількість індивідуальних стратегій навчання, які дозволили б кожному з них стати активним учасником навчального процесу. Але не можна забувати і про вірного методичному підході при побудові уроку з використанням ІКТ. Так само як в звичайному уроці, тут також мають бути присутніми цілі та етапи уроку [24].

Розглянемо, які можливості надає викладачеві математики інформаційно-комунікативні технології при вивченні нової теми. Як правило, в даний час створення графіки для багатьох педагогів набагато складніше, ніж написати звичайний навчальний план. Так як, створення графіки вимагає від педагога не тільки відмінне знання теми, програми, а й хороші знання і володіння інформаційними технологіями. Це трудомісткий процес, але «мета виправдовує засоби».

В даний час розроблена комп'ютерна підтримка не тільки для навчання, але і в тому числі для контролю знань учнів. При організації контролю знань, умінь і навичок учнів також можна використовувати тестування за допомогою комп'ютера. Тестовий контроль з допомогою комп'ютера передбачає можливість швидше і об'єктивніше, ніж при традиційному способі, виявити знання і незнання учнів. Цей спосіб організації навчального процесу зручний і простий для оцінювання в сучасній системі обробки інформації. Практично по кожному поділу математики складені тести, які входять в навчальні програми. Але ці готові програми не враховують індивідуальних особливостей учнів та рівня навченості класу. Тому буде корисно використовувати програми-тестувальники, розроблений самим викладачем, в якому можна було б питання і відповіді легко вносити і змінювати. Створений в Excel тест "My Test" також дає можливість вносити питання і відповіді і змінювати їх. У даному тесті запитання вибираються з великого їх набору у випадковому порядку, що виключає списування, підказки й т.д. В процесі тестування підраховується кількість правильних відповідей і по завершенні тестування учневі виставляється оцінка на основі критерію для тестових технологій. Такий вид контролю дозволяє за досить короткий час уроку перевірити рівень знань, умінь і навичок по черзі у групи учнів класу, коли інші учні виконують інший вид роботи. На наступних уроках тестування проходять інші учні, так що до заключного уроку по темі пройти тестування встигають все. У викладачів з хорошим знанням не тільки мультимедіа, інформаційних технологій, а й програмування, є можливість створити програму-тестувальник, враховуючи і зовнішній вигляд тесту за допомогою програми Delphi.

1.5. Роль використання інформаційно-комунікативних технологій у викладанні математики

У нашому суспільстві інформаційні технології в освіті відіграють все більш істотне значення. Сучасний навчальний процес вже складно уявити без використання електронних підручників, навчальних програм, тренажерів, лабораторних практикумів і тестуючих програм.

Роль інформаційних технологій в системі освіти розділилася на два напрями. На першому інформаційні технології є інструментарієм для вирішення окремих педагогічних завдань в рамках традиційних форм освіти і методів навчання. Що стосується другого напрямку, то тут інформаційні технології займають більш активну роль і забезпечують нові можливості. До основних переваг другого напрямку можна віднести наступне:

- створюються умови для самостійного опрацювання навчального матеріалу;
- можливість роботи з математичними і програмними моделями досліджуваних об'єктів;
- можливість пошуку інформації та більш зручного доступу до неї, подання до мультимедійній формі рідкісних інформаційних матеріалів;

- можливість автоматизованого контролю та більш об'єктивне оцінювання знань і вмінь.

З вище викладеного випливає, активна роль інформаційних технологій в освіті полягає в тому, що вони не тільки виконують функції інструментарію, що використовується для вирішення певних педагогічних завдань, а й стимулюють розвиток дидактики та методики, сприяють створенню нових форм навчання і освіти [25].

РОЗДІЛ ІІ. ПСИХОЛОГО – ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1. Психолого – педагогічні основи процесу навчання

Педагогічна психологія — галузь психологічної науки, яка досліджує психологічні проблеми виховання й навчання особистості — основних механізмів спрямованої соціалізації людини.

Предметом педагогічної психології є дослідження психологічних закономірностей процесу спрямованої соціалізації, тобто перетворення біологічної істоти в людську особистість у соціальному, спеціально організованому середовищі.

Педагогіка розглядає цілі і завдання навчання і виховання дітей, його засоби і методи, способи їх реалізації на практиці. Одночасно з цим предметом педагогічних досліджень є так само загальний актуальний зміст освіти. Що ж до особистості учня, індивідуальних психологічних особливостей вчителя, взаємин між учителем (вихователем) і дитиною, то це є предметом спеціального, уважного і детального вивчення в психології.

Психологічною підставою педагогічного процесу є:

- Теорії особистості (З. Фрейд, С. Л. Рубінштейн, Г. Олпорт, К. Левін, Е. Фромм, Л. І. Божович);
- Теорія діяльності (О. М. Леонтьєв, С. Л. Рубінштейн);
- Вікова психологія (психологія розвитку);
- Теорії навчання (висхідні до біхевіоризму);
- Психологія пізнавальних процесів (когнітивна психологія, гештальтпсихології, психологія мови);
- Психологія індивідуальних відмінностей (темперамент, характер, здібності);
- Соціальна психологія колективів, спілкування і особистості;
- Інженерна психологія (взаємодія людини з ТЗН, ЕОМ);

- Культурно-історична теорія (Л. С. Виготський);
- Системний підхід у психології (В. М. Бехтерєв, М. Вертгеймер, Б. Г. Ананьєв, Б. Ф. Ломов);
- Нейропсихологія (О. Р. Лурія);
- Психодіагностика;
- Порівняльна психологія;
- Гуманістична психологія;
- Психотерапія.

Педагогічний процес – спеціально організована, динамічна взаємодія педагога і дітей, спрямована на забезпечення їх навчання, виховання, розвитку.

Зміст педагогічного процесу визначається концептуальними засадами освітньо-виховної системи. Головною метою його є раціональна організація навчально-виховної роботи, спрямованої на всебічний розвиток дитини.

Ідею єдності виховання і навчання, яка визначає цілісність педагогічного процесу, обґрунтував К. Ушинський. Він стверджував, що від комбінації основних елементів найбільше залежить виховна сила школи.

Російський педагог, психолог Петро Каптерев (1849 – 1922), досліджуючи різноманітні особливості взаємодії педагога і вихованців, наголошував, що навчання, освіта, привчання, виховання, настанови, переконання, напучування, вимоги «позначають різні властивості, сторони, засоби і моменти одного великого цілого – педагогічного процесу».

Педагогічний процес є головною структурною одиницею цілеспрямованої й організованої взаємодії педагога і вихованця, під час якої дитина опановує соціальний досвід. Значною мірою він відрізняється від виховного процесу, що здійснюється постійно під впливом усієї сукупності чинників, які формують особистість.

Сучасні дослідники розглядають педагогічний процес як динамічну педагогічну систему, спрямовану на вирішення розвивальних і освітніх завдань; передавання соціального досвіду старшими і засвоєння його підростаючими поколіннями шляхом їх взаємодії [22].

Сутність педагогічного процесу полягає в єдності навчання, виховання і розвитку. Саме цим обумовлюються його функції:

— навчальна (формування мотивації, досвіду навчально-пізнавальної та практичної діяльності, засвоєння основ наукових знань, ціннісних орієнтацій особистості);

— виховна (формування моральних, естетичних якостей і ставлень людини);

— розвивальна (формування і розвиток психічних процесів, властивостей і якостей особистості).

Одиницею педагогічного процесу є педагогічне завдання – певна педагогічна ситуація, співвіднесена з метою діяльності й умовами її здійснення. Головними компонентами педагогічного процесу є його суб'єкти: педагог і вихованець.

Педагогічний-процес не є спонтанним явищем. Він підпорядкований певним об'єктивно існуючим, постійним і необхідним внутрішнім взаємозв'язкам і взаємозалежностям, тобто закономірностям.

Закономірності педагогічного процесу – об'єктивні, стійкі й істотні зв'язки, які зумовлюють ефективність навчання, виховання, розвитку особистості дитини.

Ці закономірності відображають стійкі залежності між усіма елементами педагогічного процесу: діяльністю педагога, діяльністю вихованця, об'єктом засвоєння (змістом навчання), виховними, розвивальними впливами.

До найважливіших закономірностей педагогічного процесу належать:

1. Органічна єдність навчання, виховання, розвитку. Успішне функціонування кожного із цих компонентів є передумовою ефективності інших: навчання спрямоване на вирішення завдань виховання і розвитку; виховання сприяє розвитку і навчанню; розвиток створює сприятливі передумови для навчання та виховання і є їх результатом.

2. Змістова, організаційна та операційно-технологічна цілісність. Змістова цілісність педагогічного процесу забезпечується відображенням у меті й змісті освіти досвіду людства, у взаємозв'язку знань (у тому числі про способи дій), умінь і навичок досвіду творчої діяльності, досвіду емоційно-ціннісного ставлення до світу. Організаційна цілісність педагогічного процесу є наслідком єдності процесів освоєння, організації змісту освіти і матеріальної бази; ділової взаємодії педагогів і вихованців щодо змісту освіти і в міжособистісному спілкуванні; самоосвіти та самовиховання. Операційно-технологічна цілісність виявляється у внутрішній цілісності процесів освоєння, організації змісту освіти і матеріальної бази, ділової взаємодії педагога і вихованців, освіти і самоосвіти.

3. Динамічність. Масштабність усіх наступних змін залежить від змін на попередньому етапі, взаємодія між педагогами і вихованцями вибудовується за «ступеневим» принципом: чим вищі проміжні досягнення, тим вагоміший кінцевий результат.

4. Залежність досягнутого рівня розвитку особистості від спадковості, навчально-розвивального середовища, включення у навчально-виховну діяльність, ефективності засобів педагогічного впливу.

5. Єдність внутрішніх мотивів і зовнішніх, у тому числі педагогічних стимулів.

6. Взаємозв'язок чуттєвого, логічного і практичного. Ефективність його залежить від якості сприймання, логічного осмислення, практичного використання знань і вмінь.

Ефективність реалізації закономірностей педагогічного процесу залежить від гармонійної єдності його об'єктивних і суб'єктивних чинників, передусім від усвідомлення педагогом своєї місії, уміння організувати продуктивну взаємодію з дітьми, максимально задіяти особистісний потенціал кожного з них, постійного прагнення підняти цю взаємодію на вищий рівень.

2.2. Розвиток творчих здібностей на уроках математики

Математичні здібності - це здатність утворювати на математичному матеріалі узагальнені, згорнуті, гнучкі й обернені асоціації та їх системи. До складових математичних здібностей слід віднести:

– здатність до формалізації математичного матеріалу, відокремлення форми від змісту, абстрагування від реальних ситуацій і їх кількісних відношень та просторових форм; оперування структурами відношень і зв'язків;

– здатність до узагальнення матеріалу;

– здатність до оперування числовою і знаковою символікою;

– здатність до логічних міркувань, пов'язаних з потребою доводити, робити висновки;

– здатність до скорочення процесу міркувань;

– здатність до переходу від прямого до оберненого ходу думки;

– гнучкість мислення незалежно від впливу шаблонів.

Математика сприяє виробленню особливого виду пам'яті — пам'яті, спрямованої на узагальнення, творення логічних схем, формалізованих структур, виховує здатність до просторових уявлень.

Наявність математичних здібностей в одних учнів і недостатня розвинутість їх в інших вимагає від учителя постійного пошуку, шляхів формування і розвитку таких здібностей у школярів.

Рівнева диференціація з урахуванням психології математичних здібностей учнів збільшує можливості роботи вчителя. Такий підхід створює умови для розвитку здібностей учнів, які мають природжені задатки до занять математикою, і забезпечує посильною роботою учнів, які не мають таких задатків. Виконуючи посильні завдання, учень отримує впевненість у своїх силах.

Вивчаючи математичні здібності, В. А. Крутецький дійшов висновку, що "мозок деяких людей своєрідно орієнтований (настроєний) на виокремлення з навколишнього світу подразників типу просторових і числових відношень та символів і на оптимальну роботу саме з такими подразниками". Тому "звичайним математиком можна стати, видатним, талановитим математиком треба народитися".

Щоб вивчення математики викликало в учня задоволення, треба, щоб він заглибився у суть ідеї цієї науки, відчув внутрішній зв'язок усіх ланок міркувань, які дають можливість зрозуміти і саме доведення, і його логіку.

Якщо учень хоча б раз досяг ясності в розумінні суті, проник у внутрішній зв'язок понять і логічних висновків, то йому буде важко задовільнитися потім заучуванням без розуміння. І тоді він здійснить відкриття: процес власної думки вимагає значно менших зусиль і витрат часу, ніж вивчення напам'ять [12].

Щоб привчити учнів самостійно мислити, викликати в них віру у власні сили і розум , також виховати впевненість у своїх можливостях, необхідно примусити їх пройти через певні труднощі, а не подавати все в готовому вигляді.

У системі розвиваючого навчання під час вивчення математики важливе місце посідає обчислювальна практика. На 5-6 класи припадає основний обсяг роботи обчислень з раціональними числами. У наступних класах ці навички розвиваються і закріплюються, зростає питома вага наближених обчислень, використовується прикидка, оцінювання результатів обчислень. Широке використання мікрокалькуляторів не зменшує ролі обчислень без них і особливо усного виконання дій. Отже, користуючись мікрокалькуляторами, треба вміти робити прикидку очікуваного результату й округлювати його до потрібної точності, замінюючи деякі операції усним виконанням, уміти проаналізувати здобуту інформацію. Слід мати на увазі і розвиваючу функцію усних обчислень: вони активізують увагу і пам'ять учнів, спонукають їх до раціональної діяльності [29].

Якщо в учнів середніх класів добре сформовані ці навички, це є запорукою того, що в старших класах розв'язування задач не буде викликати особливих труднощів.

Уміння розв'язувати ту чи іншу задачу залежить від багатьох чинників. Але передусім необхідно навчитися розрізняти основні типи задач і уміти розв'язувати найпростіші з них.

Увесь процес розв'язування задачі можна розділити на вісім етапів:

– аналіз задачі;
– схематичний запис задачі;
– пошук способу розв'язування задачі;
– виконання розв'язування задачі;
– перевірка розв'язку задачі;
– дослідження задачі;
– формулювання відповіді задачі;
– аналіз розв'язування задачі.

Математичні задачі, для розв'язування яких в шкільному курсі математики існують готові правила, або ці правила безпосередньо випливають з означень чи теорем, що визначають програму розв'язування цих задач у вигляді послідовності кроків, називають стандартними. При цьому передбачається, що для виконання окремих кроків розв'язування стандартних задач в курсі математики існують конкретні правила.

У процесі психолого-педагогічної роботи виявлено, що розвиток творчих здібностей на уроках математики безпосередньо залежить від активації здібностей, пізнавального інтересу до навчання; науково-діяльного і евристичного мислення. Основними умовами розвитку творчих здібностей є: відповідна побудова навчального процесу з орієнтації на теоретичне мислення; використання методів проблемного навчання, забезпечення необхідної емоційно-доброзичливої атмосфери і активних способів розвитку самостійності дітей, їхньої фантазії, уяви; опора на зону найближчого розвитку дитини, диференційований підхід у навчанні [23].

У шкільному віці одним з ефективних способів розвитку здібностей до математики є рішення школярами нестандартних логічних задач. Крім того, розв‘язування проблемних задач здатне прищепити інтерес дитини до вивчення «класичної» математики.

Психолого-педагогічна діяльність щодо створення умов для розвитку здібностей та обдарувань дітей і молоді тісно пов'язана з їх вихованням. Надавши обдарованій природою людині певну суму знань можна створити просто інтелектуала («живий комп‘ютер»), але не творця. Проблему розвитку здібностей обдарованої молодої людини можна вважати вирішеною лише за умови, коли у життя входить творча особистість з високим рівнем інтелекту, вихована на засадах моральності, тобто психологічно налаштована на соціально та суспільно корисну діяльність.

РОЗДІЛ III. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНОВАЦІЙНО – КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

3.1. Методичні особливості навчання

Показникові рівняння.

Основою нової форми навчання є робота з комп'ютером. Звичайно, не можна все зводити до нього, – і кількість годин, проведенних за екраном, не може служити критерієм якості навчання, як це намагаються представити в деяких приватних школах. Але безсумнівно одне – комп'ютер відмінний помічник для організації індивідуального навчання. Бо як тільки педагог перестає бачить в учневі просто сосуд, який треба наповнити знаннями та вміннями, йому доводиться шукати індивідуальний підхід до кожного, підлаштовуватися до його інтересів, темпу засвоєння матеріалу, особистих особливостей психіки. Широке впровадження в навчальний процес нових інформаційних технологій відкриває широкі перспективи щодо поглиблення і розширення теоретичної бази знань, надання результатам навчання практичного значення, активізації пізнавальної діяльності, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу учнів з урахуванням вікових особливостей, індивідуальних нахилів.

На сьогодні розроблено значну кількість програмних засобів, що дозволяють розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності, а також контролювати знання. Це такі програми як DERIVE, EURIKA, GRAN1, Maple, MathCad , MyTextXPro (див. додаток А). Причому одні з цих програм розраховані на фахівців досить високої кваліфікації в галузі математики, інші – на учнів середніх навчальних закладів та студентів.

Можливість провести необхідний чисельний експеримент, швидко виконати потрібні обчислення чи графічні побудови, перевірити ту чи іншу гіпотезу, випробувати той чи інший метод розв’язування задачі, вміти проаналізувати та пояснити результати, отримані за допомогою комп’ютера, з’ясувати межі можливостей застосування комп’ютера чи обраного методу розв’язування задачі має надзвичайне значення у вивченні математики.

Приступаючи до розв’язування найпростійших показникових рівнянь, доцільно вписати на довідковій таблиці або на дошці основні формули дій із степенями.

Спочатку доцільно розглянути найпростіші рівняння виду $2^{x-5} = \sqrt[5]{8}$. Записуючи праву частину рівняння як степінь числа 2, дістаємо $2^{x-5} = 2^{\frac{3}{5}}$. Оскільки основи даних степенів рівні і самі степені рівні, то маємо змогу прирівняти показники: $x - 5 = \frac{3}{5}$. Тоді дістаємо: $x = 5\frac{3}{5}$.

Звертаємо увагу учнів на те, що записані вище формули, якщо їх застосовувати зліво направо, дають змогу замість двох степенів записати один степінь. Отже, *якщо в лівій і правій частинах даного показникового рівняння тільки добутки, частки, степені або корені, то можна це рівняння завжди звести до найпростійшого рівняння виду* $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $(a > 0)$. Цей орієнтир бажано занотувати в зошитах учнів, щоб вони в подальшому вільно пізнавали такі показникові рівняння, які безпосередньо зводяться до найпростіших.

Приклад 1: Розв’язати рівняння

$$\frac{3^{x-1}\left(\sqrt[5]{9}\right)^x}{\sqrt[3]{3^x}} = \frac{27^x}{\sqrt[7]{81}}.$$

Розв’язування: Звертаємо увагу учнів на те, що в лівій і правій частинах цього рівняння є добуток, частка, степінь або корінь із степеня числа 3. Отже, це рівняння можна безпосередньо звести до найпростішого. Тобто після перетворення степенів дістаємо:

$$3^{x-1+\frac{2x}{5}-\frac{x}{3}}=3^{3x-\frac{4}{7}}$$

Звідси $x-1+\dfrac{2x}{5}-\dfrac{x}{3}=3x-\dfrac{4}{7}$.

Розв'язавши це рівняння дістаємо: $x=-\dfrac{45}{203}$.

Після відпрацювання розв'язання найпростійших рівнянь бажано запропонувати учням загальну схему пошуку розв'язку складніших показникових рівнянь. Ця схема може бути, наприклад, такою:

Звільняємось від числових доданків у показниках степенів.

Пробуємо всі степені звести до однієї основи.

Якщо не вдається звести до однієї основи, то пробуємо звести до двох основ так, щоб дістати однорідне рівняння.

В інших випадках використовуємо спеціальні прийоми розв'язування: а) використовуємо монотонність показникової функції; б) оцінюємо множину значень функції, у лівій і правій частині рівняння і т.д.

Приклад 2: Розв'язати рівняння $4^{x+1}-13\cdot 6^{x}+9^{x+1}=0$.

Розв'язування: Звільнившись від числових доданків у показниках, дістаємо: $4^{x}\cdot 4-13\cdot 6^{x}+9^{x}\cdot 9=0.$

Як бачимо, звести всі степені до однієї основи не вдається, тому пробуємо звести всі степені до двох основ. Помічаємо, що $4^{x}=2^{2x}$, $9^{x}=3^{2x}$, а $6^{x}=2^{x}\cdot 3^{x}$. Тоді наше рівняння перетворюється в таке: $2^{2x}\cdot 4-13\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}+3^{2x}\cdot 9=0.$

Звертаємо увагу учнів на те, що всі члени цього рівняння мають однаковий сумарний степінь – $2x$. Згадуємо означення і ідею розв'язку однорідного рівняння. (Рівняння, всі члени якого мають однаковий сумарний степінь, називається однорідним. Розв'язується однорідне рівняння діленням на найвищий степінь) [3].

Після відпрацювання зазначених прийомів розв'язування показникових рівнянь доцільно звернути увагу учнів на те, що для розв'язування деяких показникових рівнянь доречно використовувати теорему про корінь. Нагадаємо цю теорему:

Якщо функція f *зростає (або спадає) на деякому проміжку, то рівняння* $f(x)=a$ *не може мати більше ніж один корінь у цьому проміжку.*

Приклад 3: Розв'язати рівняння $3^x+4^x=5^x$.

Розв'язування: Зведемо це рівняння до виду $f(x)=a$, $f(x)-$ зростаюча або спадна функція. Для цього поділимо обидві частини цього рівняння на $5^x \neq 0$, дістаємо:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$$

Але $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ і $\left(\frac{4}{5}\right)^x$ спадні функції, отже, і їх сума $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ теж спадна функція. Тоді за теоремою про корінь дане рівняння може мати тільки один корінь. Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що $x=2$ є коренем даного рівняння. Інших коренів рівняння не має.

Відповідь: $x=2$.

Доцільно виділити для учнів загальну ідею виконаного розв'язування, наприклад, у такому вигляді:

1. За допомогою підстановки конкретних значень змінної знаходимо один або кілька коренів даного рівняння.
2. Доводимо, що дане рівняння інших коренів не має.

При доведенні того, що рівняння не має інших коренів, крім знайдених, поряд з теоремою про корінь інколи використовується така властивість: якщо на деякій множині X функція f зростає, а функція φ спадає, то рівняння $f(x)=\varphi(x)$ не може мати на множині X більш ніж один корінь.

Приклад 4: Розв'язати рівняння $2^x+3^x=\frac{5}{x}$.

Розв'язування: Підбором знаходимо, що $x=1-$ корінь рівняння.

Доведемо, що інших коренів це рівняння не має. Рівняння не може мати від'ємних коренів, бо при $x<0$ ліва частина – додатнє число, а права частина – від'ємне. При $x>0$ функція $\varphi(x)=\frac{5}{x}$ спадає, а функція $f(x)=2^x+3^x$ зростає як сума двох зростаючих функцій. Отже коли $x>0$, рівняння має тільки один корінь $x=1$.

Відповідь: $x=1$.

Розв'язуючи показникові рівняння, можна використовувати ті загальні прийоми, які використовувались при розв'язуванні інших типів рівнянь. Наприклад, розв'язуючи рівняння виду $f(x)=0$, можна розкласти $f(x)$ на множники і використати умову рівності добутку нулю [9].

Показникові нерівності.

При розв'язуванні найпростіших показникових нерівностей, що дуже доступно викладено в підручнику, доцільно звернути увагу учнів на те, що іноді потрібен спеціальний аналіз для оцінки основи показникової функції.

Приклад 5: Розв'язати нерівність $(\sin 2)^{x^2-x}\geq \sin^2 2$

Розв'язування: Оскільки $0<\sin 2<1$ (очевидно, що $\sin 2\neq 1$, отже, $\sin 2<1$, крім того, $\sin 2>0$), то показникова функція $(\sin 2)^t$ є спадною. При переході в даній нерівності до аргументу знак нерівності змінюється на протилежний, тобто дана нерівність рівносильна нерівності $x^2-x\leq 2$. Розв'язуючи цю квадратну нерівність, дістаємо: $x\in[-1;2]$.

Розв'язуючи складніші показникові нерівності, бажано звернути увагу учнів на доцільність використання тієї самої схеми розв'язування нерівностей, що й для показникових рівнянь.

Бажано показати учням можливість застосування узагальненого методу інтервалів до розв'язування показникових нерівностей. Доцільно нагадати відому їм з курсу 10-го класу схему розв'язання нерівностей виду $f(x)>(<)0$ (де $f(x)$ – неперервна на кожному інтервалі своєї області визначення функція) методом інтервалів, а саме:

1. Знаходимо область визначення нерівності.
2. Знаходимо нулі функції.

3. Позначаємо нулі функції на області визначення і знаходимо знак у кожному інтервалі, на які розбивається область визначення.

Приклад 6: Розв'язати нерівність $25\cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

Розв'язування. Перенесемо всі члени нерівності в ліву частину і розв'яжемо нерівність $25\cdot 2^x - 10^x + 5^x - 25 > 0$ методом інтервалів.

1. Область визначення: x – будь-яке число.
2. Нулі функції: $25\cdot 2^x - 10^x + 5^x - 25 = 0$

$$25\cdot 2^x - 25 - 10^x + 5^x = 0$$

$$25(2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) = 0$$

$$(2^x - 1)(25 - 5^x) = 0$$

$$2^x - 1 = 0 \text{ або } 25 - 5^x = 0$$

$$2^x = 1 \text{ або } 5^x = 25$$

$$x = 0 \text{ або } x = 2.$$

3. Позначимо нулі функції на області визначення і знайдемо знаки лівої частини нерівності в кожному інтервалі.

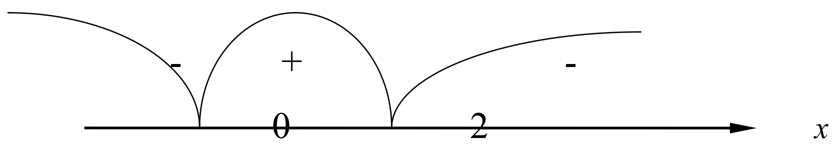


Рис. 3.1

Відповідь: $x \in (0;2)$.

Іноді під час розв'язування складніших нерівностей використовують властивості монотонності функцій.

Приклад 7: Розв'азанти нерівность $5^x + 3\cdot 2^{x+1} < 7$

Розв'язування: Функція $f(x) = 5^x + 3\cdot 2^{x+1}$ зростає на множині всіх дійсних чисел як сума зростаючих функцій. Знайдемо корінь рівняння $f(x) = 7$. За теоремою про корінь це рівняння має єдиний корінь. Легко бачити, що x = 0 – корінь цього рівняння. Враховуючи зростання функції $f(x)$, дістаємо, що при $x<0$, $f(x)<f(0)$, де $f(0)=7$; при $x>0$, $f(x)>f(0)$, де $f(0)=7$. Отже, розв'язком даної нерівності буде $x<0$.

3.2. Класифікація і способи розв'язання показникових рівнянь та нерівностей

Функція, задана формулою $y=a^x$, де $a>0$ и $a\neq 1$. називається показниковою функцією.

Сформулюємо основні властивості показникової функції .

1. Область визначення – множина R дійсних чисел або вся числова пряма. Властивість підкреслює, що степінь a^x визначена при будь-якому дійсному показнику *x*.

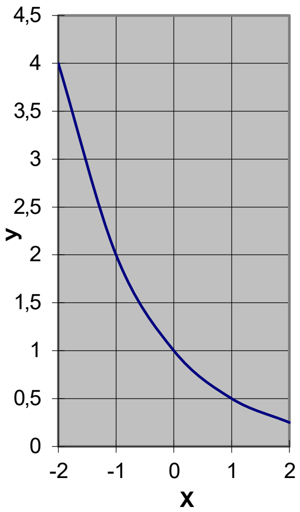
2. Область значень - множина R_+ всіх додатних дійсних чисел (0;+∞).

3. Функція не є ні парною, ні непарною.

4. Якщо $a>1$, функція зростає на всій числовій прямій, тобто якщо $x_1<x_2$, то $a^{x_1}<a^{x_2}$. Якщо $0<a<1$, функція спадає на множині R, тобто якщо $x_1<x_2$, то $a^{x_1}>a^{x_2}$.

5. Графіки функцій для випадків $a>1$, $0<a<1$ зображені на малюнках.

Показникова функція – це строго монотонна функція, визначена на всій числовій прямій.



$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ Рис. 3.2

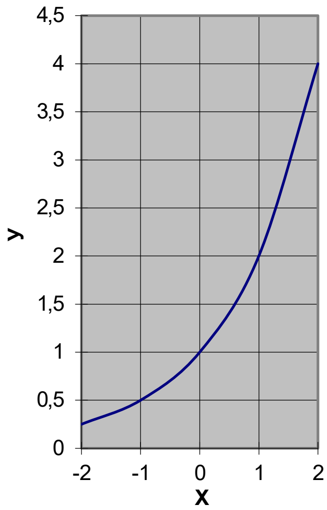


Рис. 3.3 $y=2^x$

Показникові рівняння відносяться до трансцендентних рівнянь. Показниковими називаються рівняння, в яких невідоме входить тільки до показників степенів при постійних основах.

Показникові і логарифмічні рівняння не мають загального методу розв'язування.

Розв'язування показникових рівяннь на основні властивостей степенів: два степеня з однією і тією ж додатною і відмінною від одиниці основою рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх показники.

Теорема: Нехай $a > 0$ і $a \neq 1$. Рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильно рівнянню $f(x) = g(x)$.

Доведення: Доведемо, що якщо $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то $f(x) = g(x)$. Дійсно, так як показникова функція строго монотонна, то з рівності її значень $a^c = a^d$, слідує рівність показників $c = d$. Навпаки: якщо $f(x) = g(x)$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Властивості степеня

1) $a^{t_1} \cdot a^{t_2} = a^{t_1 + t_2}$;

2) $\dfrac{a^{t_1}}{a^{t_2}} = a^{t_1 - t_2}$;

3) $\left(a^{t_1}\right)^{t_2} = a^{t_1 \cdot t_2}$;

Використовуя ці властивості, рівняння

$a^x = b$, де $a > 0, a \neq 1, b > 0$, (1)

потрібно розв'язувати так: $a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Якщо замість x у показнику степеня стоїть деяка функція f(x), тобто рівняння має вигляд

$a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0,$ (2)

то за допомогою логарифмирования обох частин цього рівняння (це можливо, тому що обидві частини рівняння додатні), приходимо до еквівалентного рівняння

$f(x) = \log_a b$.

Деякі показникові рівняння приводяться до виду (1) або (2) за допомогою рівностей

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy},$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$
$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $4^x = 8^{2x-3}$.

Розв'язування: Оскільки

$4^x = \left(2^2\right)^x = 2^{2x}$, $\quad 8^{2x-3} = \left(2^3\right)^{2x-3} = 2^{6x-9}$, то

$2^{2x} = 2^{6x-9} \Leftrightarrow 2x = 6x - 9 \Leftrightarrow x = 9/4$.

Рівняння виду

$a^{f(x)} = 1, a > 0, \quad a \neq 1,$

рівносильно рівнянню $f(x) = 0$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $10^{x^2+x-2} = 1$.

Розв'язування: Данне рівняння рівносильне рівнянню $x^2 + x - 2 = 0$. З цього данне рівняння має два корені: $x_1 = -2, x_2 = 1$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.

Розв'язування: Перепишемо данне рівняння у вигляді

$$3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}.$$

Використовуючи властивості членів пропорції, маємо

$$\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}} = \frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}},$$

після спрощення $3^{4-x} = 2^{4-x}$. Перетворивши данне рівняння до виду $\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} = 1$, отримуємо 4-$x$=0, звідки слідує, що x=4.

Розв'язування показникових рівнянь, які зводяться заміною змінних до алгебраїчного рівняння. Якщо показникове рівняння має вигляд

$$g\left(a^{f(x)}\right) = 0, \qquad (3)$$

то заміною $y = a^{f(x)}$ воно зводиться до рівняння виду $a^{f(x)} = y_i$, де y_i– корені рівняння $g(y) = 0$. Так, наприклад, рівняння $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$, де A, B, C – деякі числа, $a > 0$, $a \neq 1$, зводиться до розв'язування рівносильної йому сукупності рівнянь $a^x = y_1, a^x = y_2$– де y_1, y_2–корені рівняння $Ay^2 + By + C = 0.$

Приклад 11. Розв'язати рівняння $4^{\sqrt{x^2-2}+x} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$

Розв'язування: Позначимо $2^{\sqrt{x^2-2}+x} = y$ і роблячи заміну змінних, отримуємо квадратне рівняння

$$y^2 - \frac{5}{2}y - 6 = 0,$$

коренями якого будуть $y_1 = 4, y_2 = -\frac{3}{2}.$ Таким чином розв'язання данного рівняння звелося до розв'язування рівнянь

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4, \quad 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = -\frac{3}{2}$$

Друге рівняння розв'язків не має, тому що $2^{x+\sqrt{x^2-2}} > 0$при всіх допустимих значеннях *x*. З першого рівняння отримуємо

$$x + \sqrt{x^2 - 2} = 2.$$

$\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x$, підносимо обидві частини рівняння у квадрат маємо $x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$. Зведемо подібні члени, отримуємо єдиний корінь $x = \frac{3}{2}$. Перевіркою переконуємося, що цей корінь задовольняє початковому рівнянню.

Показникові рівняння, основи степенів яких є послідовними членами геометричної прогресії, а показники степеня однакові, приводяться до рівнянь виду (3) діленням на будь-який з крайніх членів.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0.$

Розв'язування: Розділимо обидві частини рівняння на 9^x. Маємо

$$6\left(\frac{4}{9}\right)^x - 13\left(\frac{6}{9}\right)^x + 6 = 0.$$

Позначаючи $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$ і виконуючи заміну змінних, отримуємо рівняння $6y^2 - 13y + 6 = 0,$ коренями якого будуть $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{2}{3}.$ Таким чином розв'язування рівняння зводиться до розв'язування двох простіших показникових рівнянь

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2},\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}.$ Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -1.$

Рівняння виду $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$, де $\alpha, \beta, -$ дійсні числа, а основи *a* та *b* є взаємооберненими додатніми числами (*ab*=1), можна розв'язувати наступним чином. Ввести змінну $t = a^{f(x)}$ та, використовуючи рівність (*ab*=1), перейти від рівняння $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$ до рівняння $\alpha t^2 + ct + \beta = 0$

Тоді рівняння $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$ буде рівносильне сукупності двох показникових рівнянь: $a^{f(x)} = t_1, a^{f(x)} = t_2,$ де t_1, t_2- корені рівняння $\alpha t^2 + ct + \beta = 0$, якщо це рівняння немає розв'язків, то і рівняння $\alpha \cdot a^{f(x)} + \beta \cdot b^{f(x)} + c = 0$ також не має розв'язків [16].

Рівняння виду $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)},$ де $f(x), \varphi(x), p(x) -$ функції невідомого *x,* називаються степенево-показниковими рівняннями. Еквівалентні цьому рівнянню $f(x)$=1 та системі $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) = p(x). \end{cases}$, тобто розв'язується наступним чином:

1. Перевіряємо, чи не будуть для $f(x)$>0 корені рівняння $f(x)$=1 коренями рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$;
2. Перевіряємо, якщо при $f(x) = -1$, функції $\varphi(x)$, $p(x)$ одночасно дорівнюють або парному, або непарному числу, то корені рівняння $f(x) = -1$, будуть і коренями рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$.

3. Тоді для $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$ рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$ еквівалентно рівнянню $\varphi(x) = p(x)$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $(1+x^2)^{1+\sqrt{x}} = (1+x^2)^{2+\sqrt{x}}$.

Розв'язування: $D(f): x \geq 0.$

1) Знаходимо корені початкового рівняння серед розв'язків рівняння $(1+x^2=1) \Leftrightarrow (x^2=0) \Leftrightarrow (x=0)$.

Перевіркою переконаємось, що x=0 належить області допустимих значень та зодовольняє початковому рівнянню, тобто є коренем рівняння.

2) Для $\begin{cases} 1+x^2 > 0, \\ 1+x^2 \neq 1 \end{cases}$ данне рівняння еквівалентне рівнянню

$(1+\sqrt{x} = 2+\sqrt{x}) \Leftrightarrow (1=2)$

Отримуємо невірну числову рівність. Це говорить про те, що у данному випадку рівняння не має розв'язків.

Відповідь: x=0.

Приклад 14: Розв'язати рівняння $(x-2)^{x^2+2x} = (x-2)^{11x-20}$.

Розв'язування: $D(f): (x > 2)$

1) $x-2=-1 \Leftrightarrow$ $x_1 = 3$. Бачимо, що $x_1 \in D(f)$ і задовільняє даному рівнянню, тобто є його коренем.

2) $x-2=-1$ $\Leftrightarrow$ $x_2 = 1$. Перевіряємо значення $\varphi(x), p(x)$ при $x_2 = 1$, $\varphi(x) = x^2 + 2x$, $\varphi(1) = 1+2 = 3$; $p(x) = 11x - 20$, $p(1) = 11 - 20 = -9$. Отримали, що функції набувають одночасно непарні значення. Тобто $x_2 = 1$ є коренем рівняння.

3) для $\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-2 \neq 1 \end{cases}$ початкове рівняння еквівалентно рівнянню

$$(x^2+2x = 11x-20) \Leftrightarrow (x^2 - 9x + 20 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 4, \\ x_4 = 5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{1,3,4,5\}$

Тобто коренями рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$, вважаються тільки розв’язки змішаної системи $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ \varphi(x) = p(x) \end{cases}$,

і ті значення x, для яких $f(x)=1$, якщо при цих значеннях визначені $\varphi(x)$ та $p(x)$, та додатково перевіряють, якщо при $f(x) = -1$, функції $\varphi(x)$, $p(x)$ одночасно дорівнюють або парному, або непарному числу, то корні рівняння $f(x) = -1$, будуть і корнями рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$. Функція виду $(f(x))^{\varphi(x)}$ визначена тільки при $f(x)>0$, тому те значення x, яке формально задовольняє рівності $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$, але при яких $f(x) \le 0$, не прийнято прийняти коренями рівняння $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{p(x)}$.

Деякі спеціальні методи розв’язування показникових рівнянь. Деякі рівняння зводяться до розглянутих вище, якщо перетворити окремі їх елементи, використавши основну логарифмічну тотожність.

Приклад 15. Розв’язати рівняння $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$

Розв’язування: Перетворимо другий доданок у лівій частині рівняння:

$x^{\log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = 3^{\log_3^2 x}.$

Підставляючи одержаний вираз в початкове рівняння, отримаємо

$2 \cdot 3^{\log_3^2 x} = 162.$

Рівняння $2 \cdot 3^{\log_3^2 x} = 162.$ еквівалентне рівнянню $\log_3^2 x = 4,$ яке в свою чергу еквівалентне двом рівнянням

$\log_3 x = 2, \quad \log_3 x = -2.$

Розв’язуючи останні рівняння, отримуємо $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}.$

Відповідь: $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}.$

Деякі рівняння, які містять невідоме у показнику степеня, вдається розв’язати за допомогою дослідження функції, яка входять до лівої та правої частини рівняння. Монотонність функції часто дозволяє визначити число коренів рівняння, а іноді і знайти значення.

Приклад 16. Розв’язати рівняння $7^{6-x} = x + 2.$

Розв’язування: Корінь *x*=5 може бути знайденим підбором. Інших розв’язків рівняння не має, так як функція $f(x) = 7^{6-x}$ монотонно спадає, а $g(x) = x + 2$ монотонно зростає, тобто графіки цих функцій можуть перетинатися не більше ніж один раз.

Тобто графічним способом не важко знайти наближені розв’язки рівнянь такого виду $a^{f(x)} = \varphi(x)$. Знання графиків функції $y = a^{f(x)}$ та $y = \varphi(x)$ не рідко дозволяє визначити число розв’язків рівняння та їх наближені, а іноді і точні значення.

Означення: нерівності, де хоча б одна з функцій є показниковою, називаються показниковими нерівностями.

Розв’язування найпростійших показникових нерівностей базується на використанні властивостей монотонності показникової функції.

Розглянемо розв’язання найпростійших показникових нерівностей.

1. Нерівність $a^x > c$, де $a > 0$, $a \neq 1$

а) якщо $c \leq 0$, то нерівність виконується при будь-якому значенні x (оскільки для будь-якого значення x $a^x > 0$);

б) якщо $c > 0$, то записавши нерівність у вигляді $a^x > a^{\log_a c}$, дістанемо:

коли $a > 1$, $x > \log_a c$,

коли $0 < a < 1$, $x < \log_a c$,

2. Нерівність $a^x < c$, де $a > 0$, $a \neq 1$

а) якщо $c \leq 0$, то нерівність не має розв’язку;

б) якщо $c > 0$, то записавши нерівність у вигляді $a^x < a^{\log_a c}$, дістанемо:

коли $a > 1$, $x < \log_a c$,

коли $0 < a < 1$, $x > \log_a c$.

Приклад17: Розв’язати нерівність $1 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 25$

Розв’язування: Оскільки $5^0 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 5^2$, то $0 < 1 - \frac{1}{2}x < 2,$

$-2 < \frac{1}{2}x - 1 < 0$, $-1 < \frac{1}{2}x < 1$, і, нарешті, $-2 < x < 2$

Відповідь: $-2 < x < 2$.

3. Нерівності виду $a^{g(x)} > a^{\varphi(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$

а) якщо $a > 1$, то нерівність еквівалентна $f(x) < \varphi(x)$

б) якщо $0 < a < 1$, то нерівність еквівалентна $f(x) > \varphi(x)$

4. Нерівності виду $a^{g(x)} < a^{\varphi(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$

а) якщо $0 < a < 1$, то нерівність еквівалентна $f(x) > \varphi(x)$

б) якщо $a > 1$, то нерівність еквівалентна $f(x) < \varphi(x)$

Приклад 18: Розв'язати нерівність $(0{,}1)^{4x^2-2x-2} \leq (0{,}1)^{2x-3}$

Розв'язування: Данна нерівність рівносильна нерівності

$4x^2 - 2x - 2 \geq 2x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0.$

Таким чином, початковій нервності задовільняють всі дійсні числа.

Відповідь: $x \in R$.

Розв'язання будь-якої нестрогої показникової нерівності відмінно від розв'язання відповідної строгої нерівності тільки включенням у множину всіх розв'язків коренів відповідного рівняння.

Нерівність виду $a^{f(x)} \geq b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, може бути розв'язана за допомогою логарифмування обох частин (це можливо, тому що обидві частини нерівності додатні). При всіх $b \leq 0$ нерівність справедлива для будь-якого x з ОДЗ нерівності. А нерівність $a^{f(x)} \leq b$ при $b \leq 0, a > 0$, $a \neq 1$ розв'язків не має.

Приклад 19: Розв'язати нерівність $3^{2x-1} < 11^{3-x}$

Розв'язування: Обидві частини нерівності додатні при будь-якому значенні x. Прологарифмувавши обидві частини нерівності за основою 3, отримаємо нерівність $2x - 1 < (\log_3 11)(3 - x)$ рівносильну початковій.

Таким чином $(2 + \log_3 11)x < 1 + 3\log_3 11$. Звідсі з врахуванням того, що $2 + \log_3 11 > 0$, знаходимо всі розв'язки початкової нерівності - проміжок

Відповідь: $x < \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}$.

Деякі спеціальні методи розв'язування показникових нервностей.

Нерівності виду $\alpha a^{f(x)} + \beta b^{f(x)} + \gamma \geq 0$, де $\alpha \neq 0,\ \beta, \gamma$ - будь-які дійсні числа, а основи a і b є протилежними взаємно оберненими числами $(ab = 1)$, можливо розв'язати за допомогою заміни $t = a^{f(x)}$ (так як і рівняння).

Деякі показникові нерівності містять вирази виду $f(x)^{g(x)}$ (степенево-показникова). Нагадаємо, що за означенням $f(x)^{g(x)} = a^{g(x)\log_a f(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, тобто функція $f(x)^{g(x)}$ визначена тоді, коли визначені обидві функції $f(x)$, $g(x)$ і , крім того, $f(x)$>0.

Тобто $(f(x))^{\varphi(x)} > 1 \Leftrightarrow (f(x))^{\varphi(x)} > (f(x))^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$, або

$$(f(x))^{\varphi(x)} < 1 \Leftrightarrow (f(x))^{\varphi(x)} < (f(x))^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

А також розв'язуються шляхом логарифмування з обов'язковим дослідженням області допустимих значень. При цьому знак нерівності зберігається, якщо логарифмуємо за основою $\alpha > 1$, і змінюється на протилежний, якщо $0 < \alpha < 1$.

3.3. Застосування GRAN1 до розв'язування показникових рівнянь та нерівностей

Сьогодні все більш актуальним стає питання про застосування комп'ютера у навчанні, і не лише на уроках інформатики, а й на інших – математики, фізики, хімії, біології тощо. Сьогодні існує багато різних спеціально розроблених для навчання програм-тренажерів, програм-тестів, готових презентацій для вивчення нового матеріалу та ін. Питання впровадження таких програм у навчальний процес останнім часом все більше привертає увагу науковців (І. Аман, Т. Архіпова, С. Власенко, С. Ганжела, О. Крайчук, Т. Лисенко, Т. Підгорна, А. Шемейко, Л. Страннікова та ін.).

Комп’ютерна підтримка уроків зацікавлює учнів і полегшує розуміння методів і понять математики. Використання програмних засобів дає наочні уявлення про основні поняття математики, сприяє розвитку образного мислення, підштовхує учнів до дослідницької діяльності. Нині використовуються багато прикладних програм для вивчення математики. Одні з них розраховані на спеціалістів достатньо високої кваліфікації в області математики, інші – на учнів середніх учбових закладів або студентів ВУЗів, які тільки – но почали вивчати основи вищої математики. Найбільш придатними для вивчення курсу математики в школі є програми:

- ✓ DERIVE – знаходить розв’язки рівнянь в числових і буквених виразах, границі функції, похідні різних порядків, невизначені й визначені інтеграли, виконує операції над векторами і матрицями, визначає числові характеристики статистичних вибірок, виконує графічні побудови у двовимірному і тривимірному просторах та інше.
- ✓ GRAN1 – програма, призначена для аналізу функціональних залежностей та статистичних закономірностей; доцільно використовувати в школі під час вивчення курсу алгебри і деяких розділів планіметрії.
- ✓ GRAN 2D – оперує геометричними об’єктами на площині.
- ✓ GRAN3D – пакет, орієнтований на розв’язування стереометричних задач обчислювального типу. Учням надається можливість створювати, модифікувати та аналізувати моделі просторових об’єктів довільної форми.
- ✓ Mathcad - програмний засіб, середовище для виконання на комп'ютері різноманітних математичних та технічних розрахунків,

забезпечена простим в освоєнні і в роботі графічним інтерфейсом, яка надає користувачеві інструменти для роботи з формулами, числами, графіками та текстами. У середовищі Mathcad доступні більше сотні операторів та логічних функцій, призначених для чисельного і символьного розв'язування математичних задач різної складності.

- ✓ Maple - програмний пакет, система комп'ютерної алгебри. Система Maple призначена для символьних обчислень, хоча має ряд засобів і для чисельного рішення диференціальних рівнянь і знаходження інтегралів. Володіє розвиненими графічними засобами. Має власну мову програмування, що нагадує Паскаль.

Використання цих програм дає можливість учню розв'язувати окремі завдання, не знаючи відповідного аналітичного апарата, методів і формул, правил перетворення виразів і ін..

Але слід пам'ятати, що комп'ютер – це лише засіб, який допомагає у навчанні і ні в якому разі не повинен звільнити учня від міркувань. Тому слід ретельно добирати вправи і завдання на урок [6].

Програма *GRAN1* призначена для графічного аналізу функцій, звідки і походить її назва (GRaphic ANalysis).

Після активізації програми на екрані з'явиться система координат. У верхньому рядку екрану знаходиться «головне меню» – перелік «послуг», до яких можна звернутися в процесі роботи з програмою. При зверненні до деякого пункту головного меню з'являється перелік пунктів (послуг) відповідного підменю.

Пункти підменю у свою чергу можуть розгалужуватися на підпункти, перелік яких з'являється при зверненні до відповідного пункту підменю.

Звернення до підпункту певного пункту меню записують однією командою, розділяючи символом «/» назви пунктів та підпунктів.

Назви підпунктів підменю, використання яких у даний момент не є коректним, подані блідішим кольором.

Програма оснащена контекстно-чутливою допомогою. Якщо вказівник встановлено на певну послугу, то при натисканні клавіші F1 з'являється допоміжне вікно із стандартним інтерфейсом системи допомоги Windows, у якому даються короткі відомості про призначення зазначеної послуги і про правила її використання.

На самому початку роботи з програмою необхідно встановити деякі параметри, обравши послугу «*Виправлення/Налагодження параметрів програми…*». Тут здійснюється вибір мови, якою будуть відображатися всі повідомлення в програмі, а також точність обчислень, які виконуються за програмою – кількість десяткових знаків в числах, що змінюється від 0 до 6.

Звернення до окремих послуг програми (без перебирання пунктів головного меню і підпунктів відповідних підменю) при необхідності можна здійснити за допомогою функціональних клавіш чи певних комбінацій клавіш.

Відповідність окремих функціональних клавіш і комбінацій клавіш послугам програми в кожен момент роботи з програмою показано у відповідних підменю пунктів головного меню.

Перш ніж вводити вирази чи таблиці, що характеризують деяку залежність між змінними, необхідно вказати тип задання залежності у вікні «*Список об'єктів*» (на екрані вгорі праворуч,) Для цього слід перейти у дане вікно. Це можна зробити за допомогою «мишки», натиснувши ліву клавішу «*мишки*», коли її курсор знаходиться в області вікна, або обравши пункт меню «*Об'єкт/Список об'єктів*».

У GRAN1 можна побудувати графіки восьми основних типів залежностей між змінними: явна, параметрична, полярна, неявна,таблична, статистична вибірка, коло.

Одночасно у вікні можна відобразити до п'яти графіків, усі вони автоматично малюються різними кольорами. Колір ліній кожного об'єкта відображається у вікні *Список об'єктів* біля рівняння функції. Загальний алгоритм побудови графіка залежності між змінними:

1. Вибрати у вікні *Список об'єктів* тип залежності між змінними.

2. Вибрати у меню Об'єкт команду *Створити*.

3. Увести у поле діалогового вікна *Введення виразу* залежності відповідний вираз і вибрати кнопку *ОК*.

4. Вибрати у меню *Графік* команду *Побудувати графік*.

Розглянемо алгоритми побудови показникових рівнянь і нерівностей на таких прикладах.

Алгоритм розв'язування рівнянь складається з трьох етапів:

1. Побудувати графік залежності.

2. Відмітити на координатній площині точку перетину графіка функції з віссю Ох.

3. Визначити координати вказівника, які відображаються у верхньому рядку вікна *Графік*. Це і буде наближеним коренем рівняння. Отримані у такий спосіб значення є наближеними. Похибка виникає за рахунок того, що переміщення вказівника на *Робочому пол*і має свій крок.

Приклад 20: Розв'язати рівняння $5^x=5^3$.

Для цього потрібно виконати таку послідовність дій:

1. Запустити програму *GRAN1*.

2. Вибрати у вікні *Список об'єктів* тип залежності *Явна: Y(X)=Y*.

3. Вибрати у меню *Об'єкт* команду *Створити*.

4. Увести в поле *Y(X)=* діалогового вікна *Введення виразу* залежності ввести вираз: (5^x) і аналогічно зробити для виразу: (5^3).

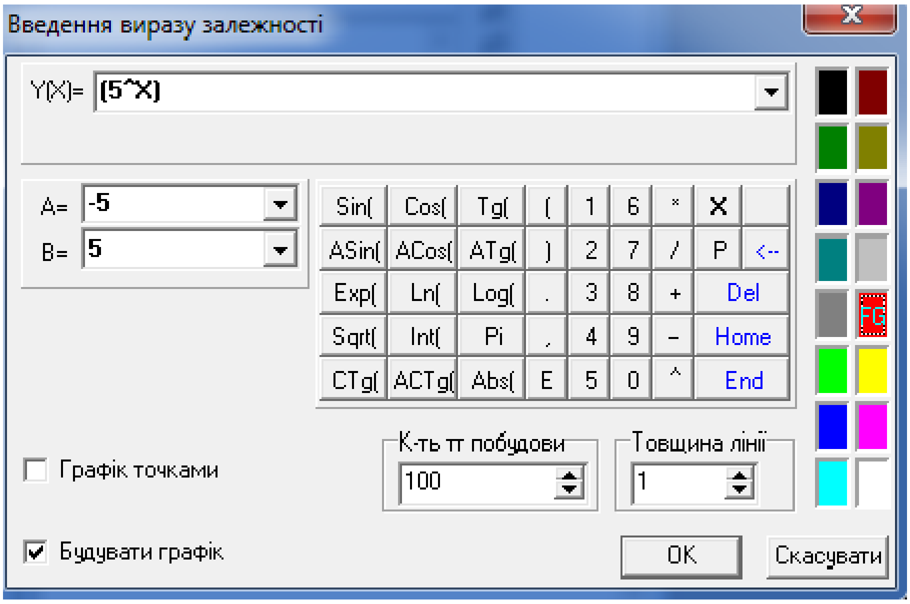


Рис. 3.4

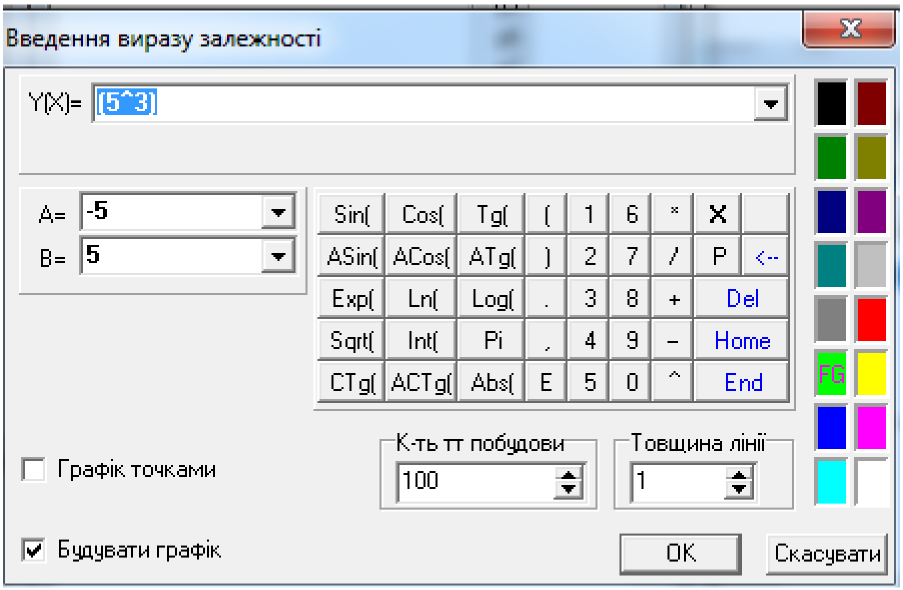


Рис. 3.5

5. Вибрати у меню *Графік* команду *Побудувати графік*. На екрані у вікні *Графік* отримаємо графік уведеної функції.

6. Виконати *Графік* ⇒ *Список точок на графіку* ⇒ *Запис*.

7. Установити вказівник послідовно в точки перетину графіка функції з віссю *Ox*.

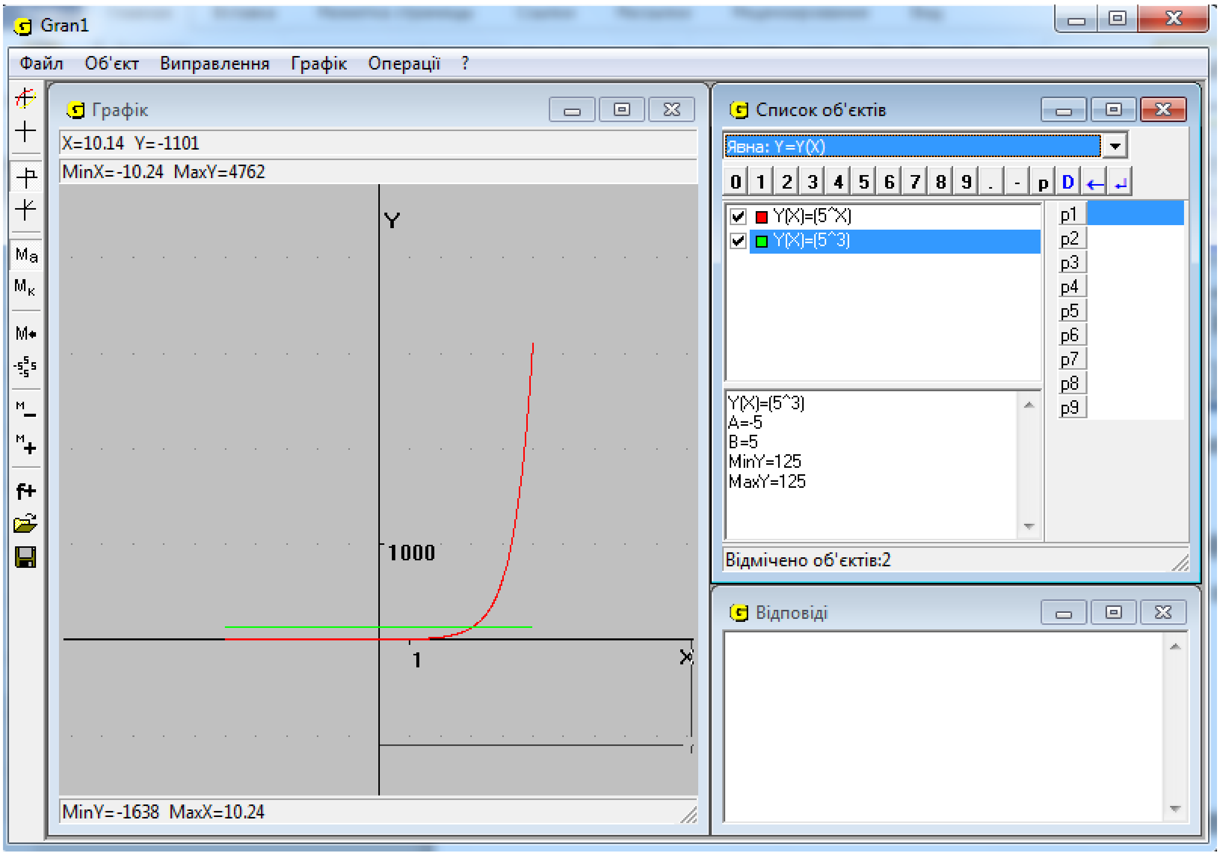


Рис. 3.6

10.Визначити наближене значення кореня рівняння, яке відображається у нижній частині вікна *Графік*.

Відповідь: x = 3.

Якщо точок перетину графіка з віссю Ох буде кілька, то рівняння матиме кілька розв’язків, які й відображатимуться в таблиці значень у вікні *Графік* під координатною площиною.

Приклад 21: Розв’язати рівняння $4^x = \frac{1}{16}$.

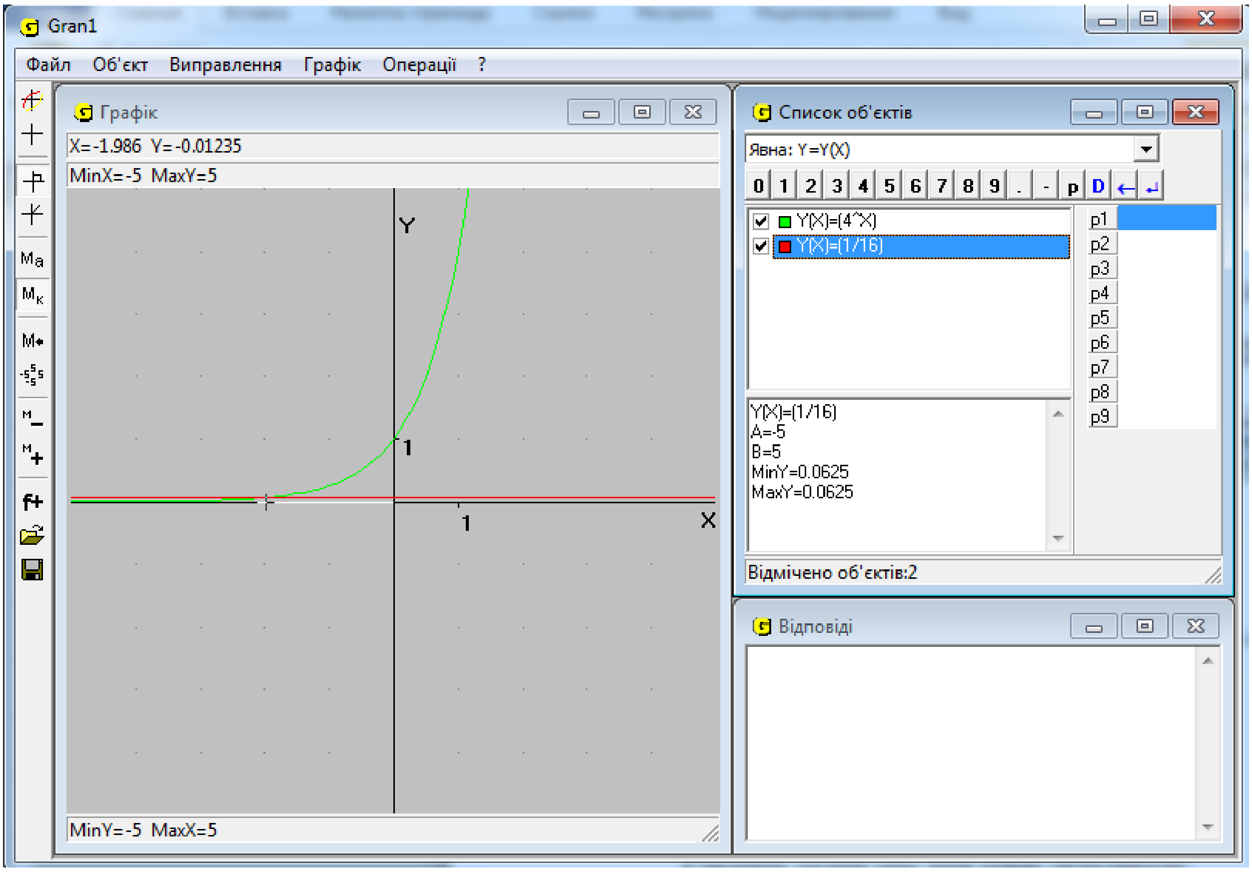


Рис. 3.7

Відповідь: x=-2.

Приклад 22: Розв'язати рівняння $3^x = \frac{9}{\sqrt[3]{9}}$.

Потрібно виконати таку послідовність дій:

1. Запустити програму *GRAN1*.

2. Вибрати у вікні *Список об'єктів* тип залежності *Явна: Y(X)=Y*.

3. Вибрати у меню *Об'єкт* команду *Створити*.

4. Увести в поле *Y(X)=* діалогового вікна *Введення виразу* залежності ввести вираз: (3^x) і аналогічно зробити для виразу: (9/(9^(1/3)).

5. Вибрати у меню *Графік* команду *Побудувати графік*. На екрані у вікні *Графік* отримаємо графік уведеної функції.

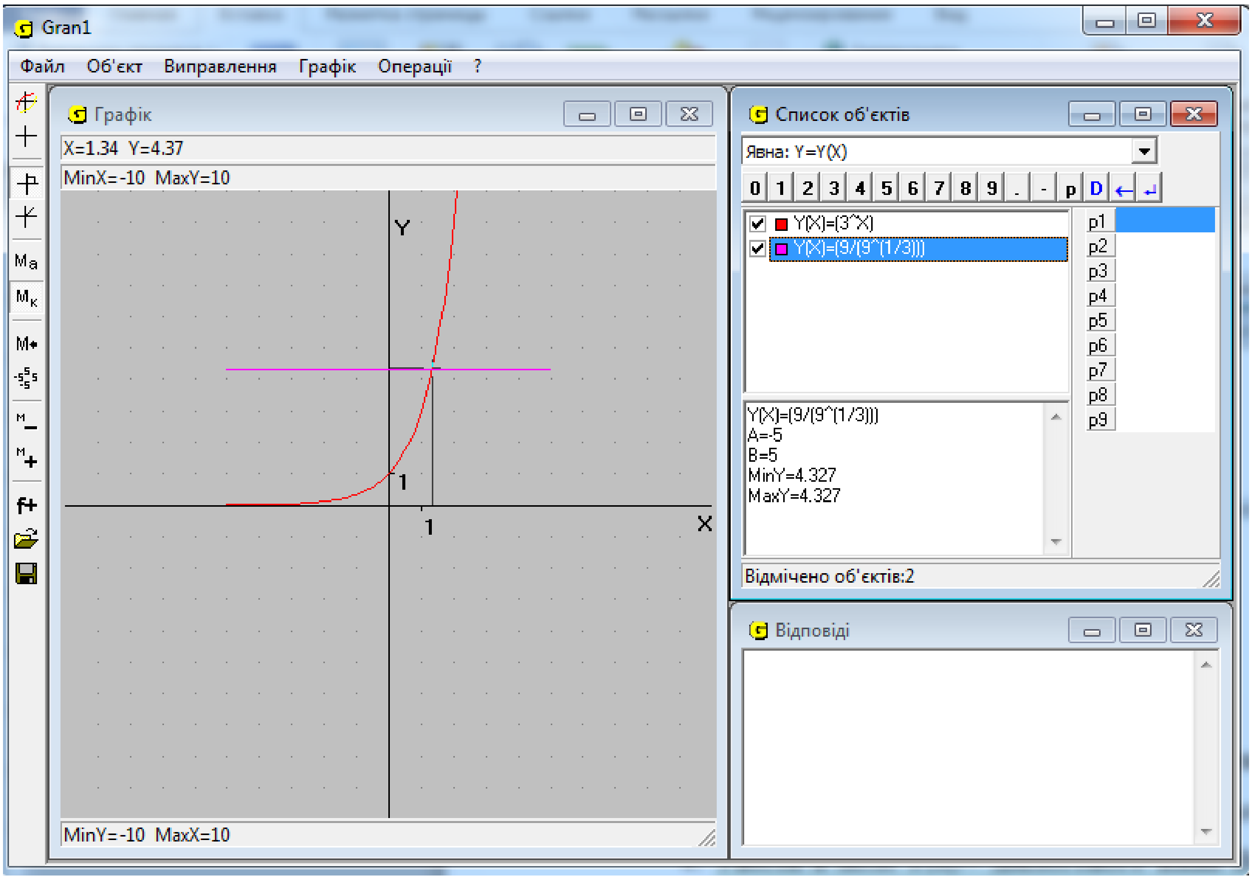


Рис. 3.8

Відповідь: x=1,34.

Приклад 23: Розв’язати рівняння $(0,1)^x = 1000$.

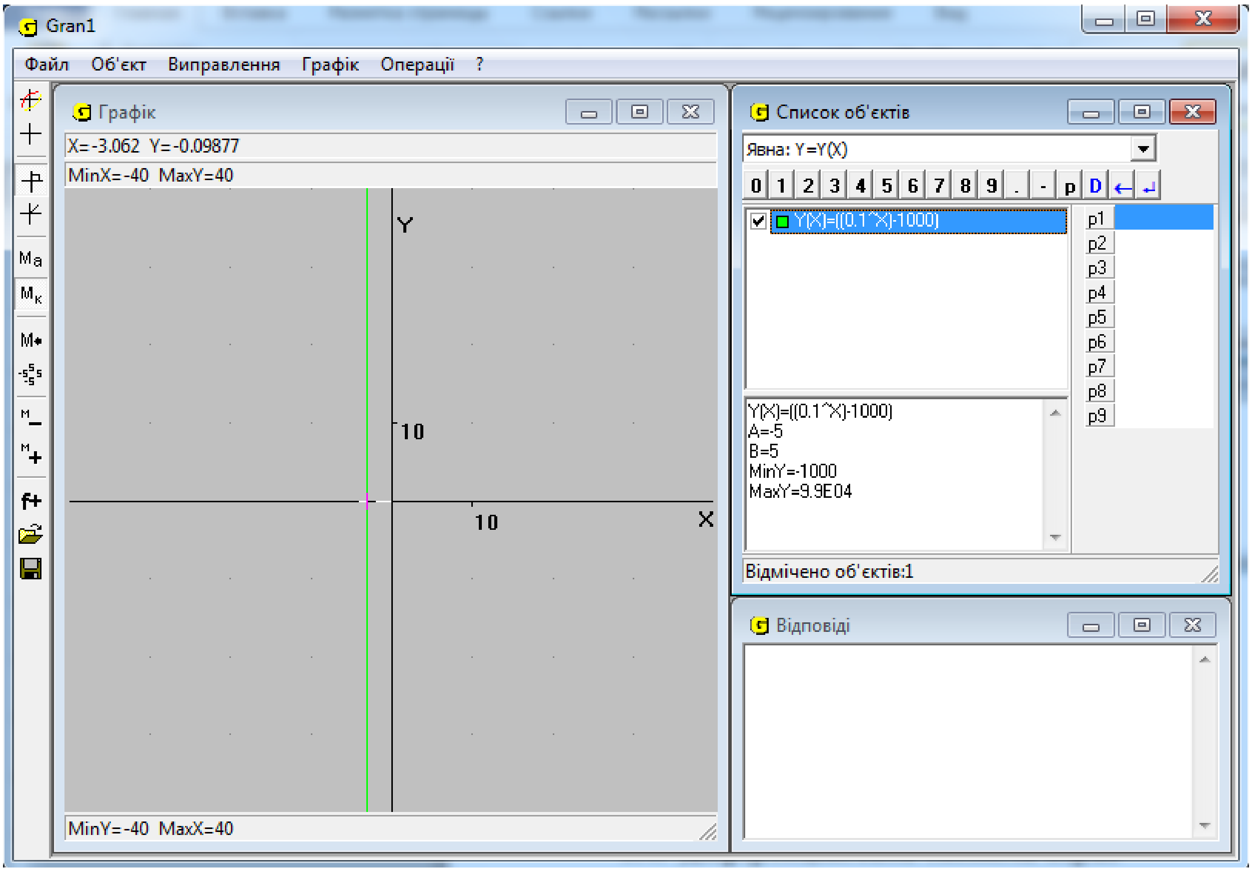


Рис. 3.9

Відповідь: x=-3,062.

Приклад 24: Розв'язати рівняння $3^{x^2-x-2} = 81$.

Потрібно виконати таку послідовність дій яку ми виконували раніше, тільки в поле *Y(X)=* діалогового вікна *Введення виразу* залежності ввести вираз: ((3^((X^2)-X-2))-81).

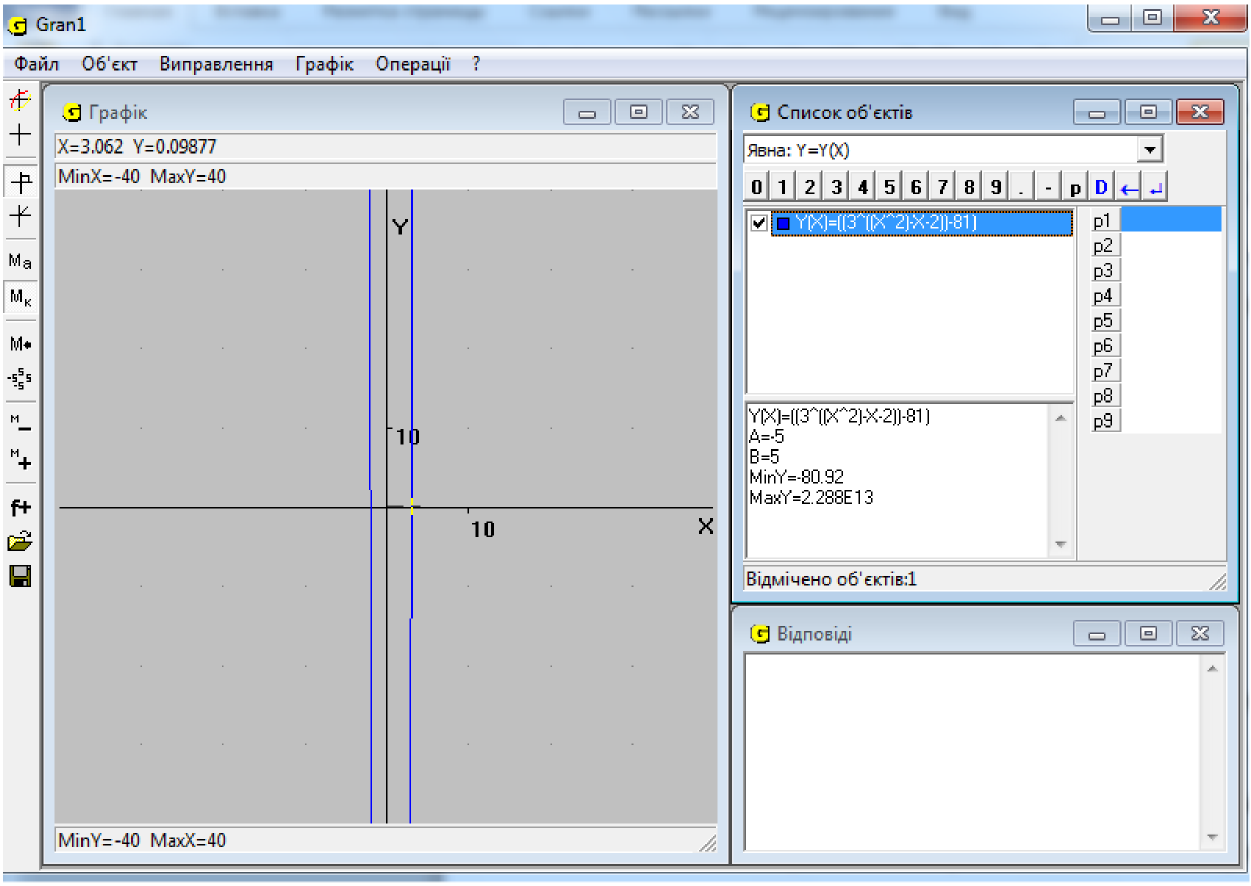


Рис. 3.10

Відповідь: дане рівняння має два розв'язки x=-2; x=3.

Приклад 25: Розв'язати рівняння $(\frac{1}{7})^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

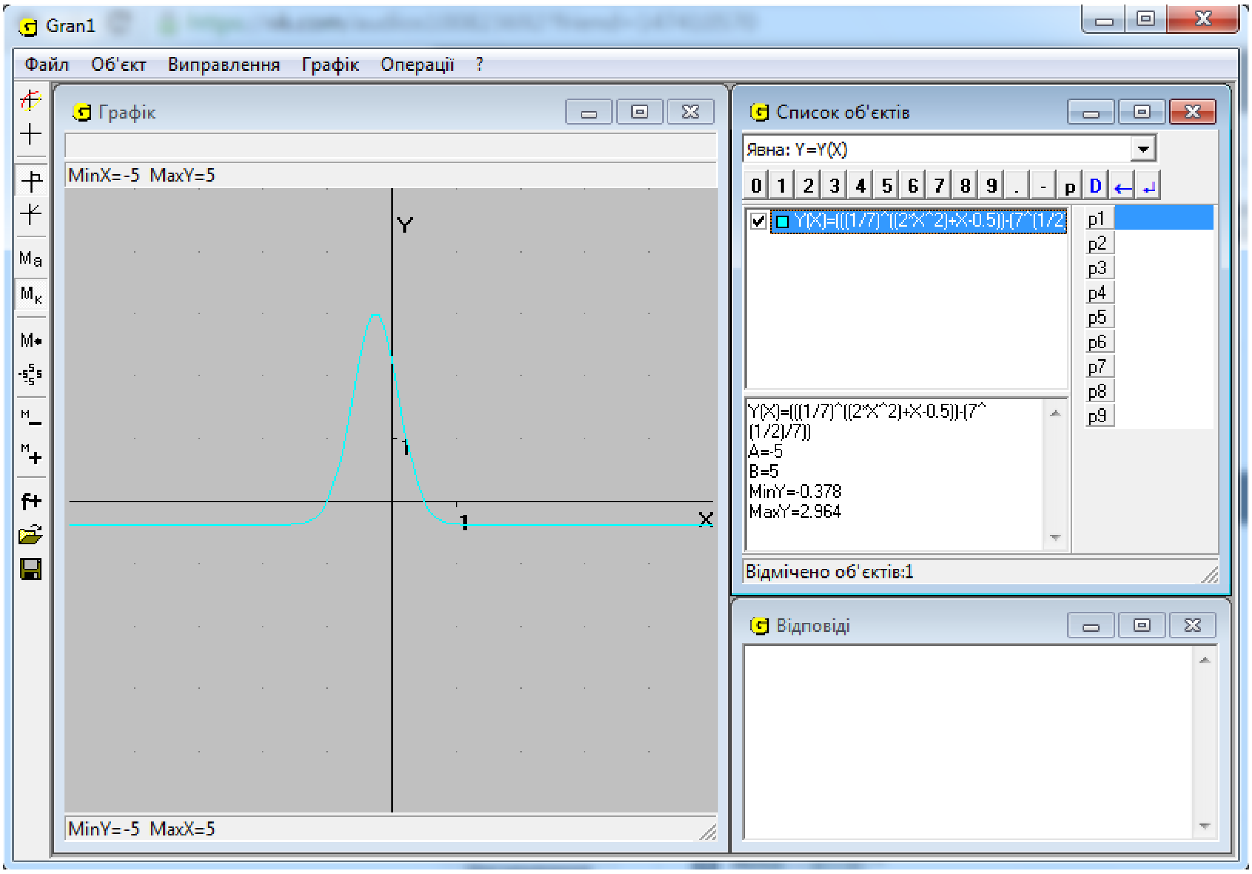


Рис. 3.11

Відповідь: як бачимо дане рівняння має два розв’язки x=-1; x=1/2.

Приклад 26: Розв’язати рівняння $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 6$.

1. Запустити програму *GRAN1*.

2. Вибрємо тип залежності *Явна: Y(X)=Y*.

3. У меню *Об’єкт* вибираємо команду *Створити*.

4. Увести в поле *Y(X)=* діалогового вікна *Введення виразу* залежності ввести вираз: (((3+2*(2^(1/2)))^(1/2))^X+((3-2*(2^(1/2)))^(1/2)^X))-6

5. Будуємо графік даного рівняння.

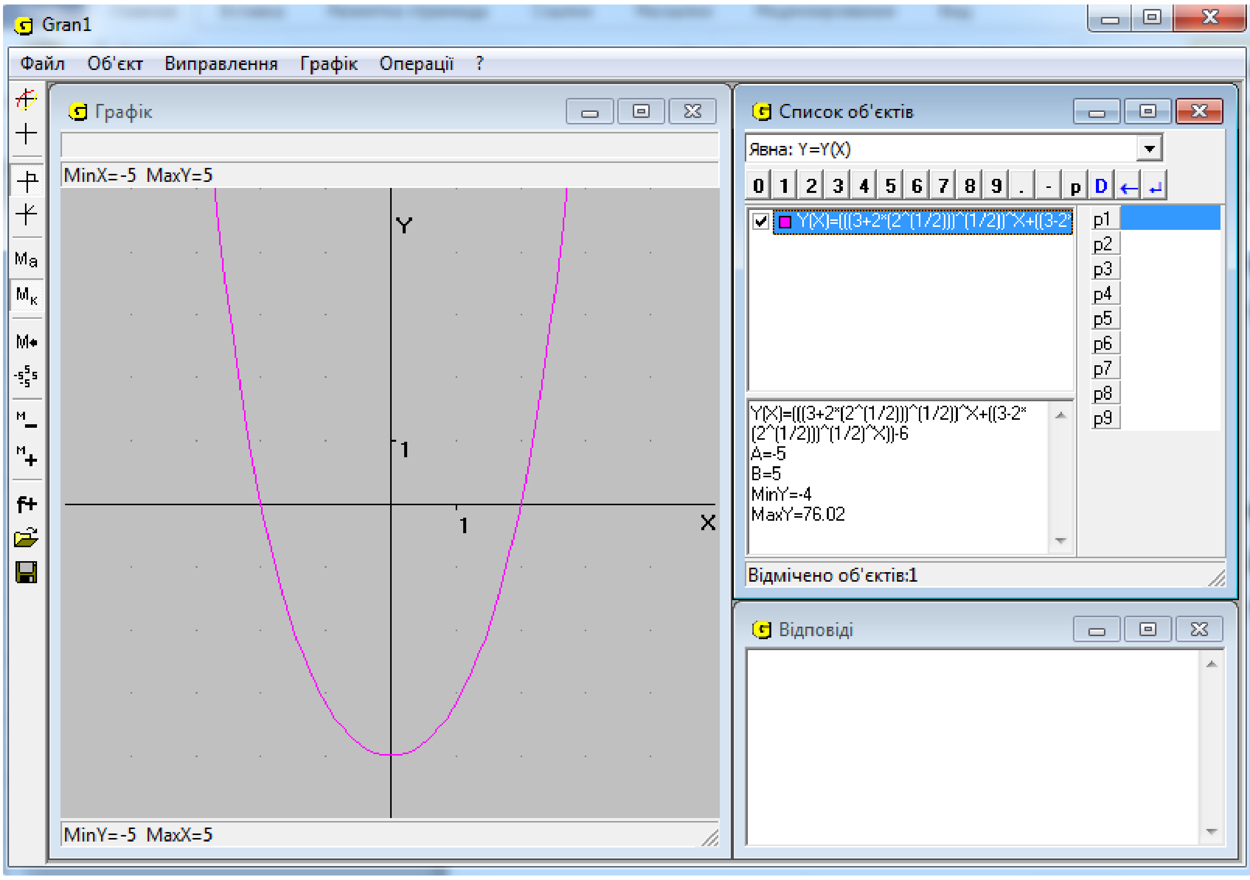


Рис. 3.12

Відповідь: x=-2; x=2.

Щоб за допомогою графічних побудов одержати множину розв'язків нерівності виду $f(x) \leq c$, де $f(x)$ – деякий вираз, заданий на проміжку $[a,b]$, потрібно побудувати графіки залежностей $y = f(x)$ і $y = c$ (для значень x з $[a,b]$)і визначити (з використанням послуги "*Координати*"), при яких значеннях x графік залежності $y = f(x)$ лежить не вище, ніж графік залежності $y = c$. Множина таких значень x і буде множиною розв'язків нерівності $f(x) \leq c$. Множина розв'язків нерівності виду $f_1(x) \leq f_2(x)$ визначається цілком аналогічно. Крім того, цей випадок можна звести до попереднього, оскільки нерівність $f_1(x) \leq f_2(x)$ еквівалентна нерівності $f_1(x) - f_2(x) \leq 0$. Множина розв'язків нерівності виду $f(x) \geq c$ чи виду $f_1(x) \geq f_2(x)$ визначається цілком аналогічно до попереднього.

Розв’язки системи нерівностей виду $f_1(x) \geq c$, $f_2(x) \geq c$, …, $f_m(x) \geq c$ знаходять як множину точок М, що задовольняють всі нерівності одночасно: $M = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_m$, де M_i множина розв’язків нерівності $f_i(x) \geq c$.

Для графічного розв’язування системи нерівностей зазначеного виду в програмі *GRAN1* передбачена послуга «*Операції/С-ма нерівностей y(x)<(>)c...*». При зверненні до цієї послуги з’являється вікно, в якому необхідно вказати знак нерівностей (> або <) та число c. Позначення залежностей (типу $y = f(x)$), для яких буде розглядатися система нерівностей $f_i(x) > c$ (або $f_i(x) < c$), перед зверненням до послуги повинні бути відмічені міткою ☑, а їх графіки побудовані у вікні «*Графік*». Система може складатись і з однієї нерівності.

При розв’язуванні системи нерівностей виду $f_i(x) \geq c$ (чи $f_i(x) \leq c$) на осі Ox відзначаються (червоним кольором) точки, що задовольняють усім зазначеним нерівностям одночасно. У вікні «*Відповіді*» дається список наближених значень координат кінців відрізків на осі Ox, точки яких є розв’язками усіх нерівностей системи. Значення коренів обчислюються на відрізку, спільному для усіх відрізків задання функцій, що визначають нерівності системи.

Приклад 27: Розв’язати нерівність $3^{2-x} > 27$.

Для цього потрібно виконати таку послідовність дій:

1. Запустити програму *GRAN1*.

2. Вибрати у вікні *Список об’єктів* тип залежності *Явна: Y(X)=Y*.

3. Вибрати у меню *Об’єкт* команду *Створити*.

4. Увести в поле *Y(X)=* діалогового вікна *Введення виразу* залежності ввести вираз: (3^(2-X))-27.

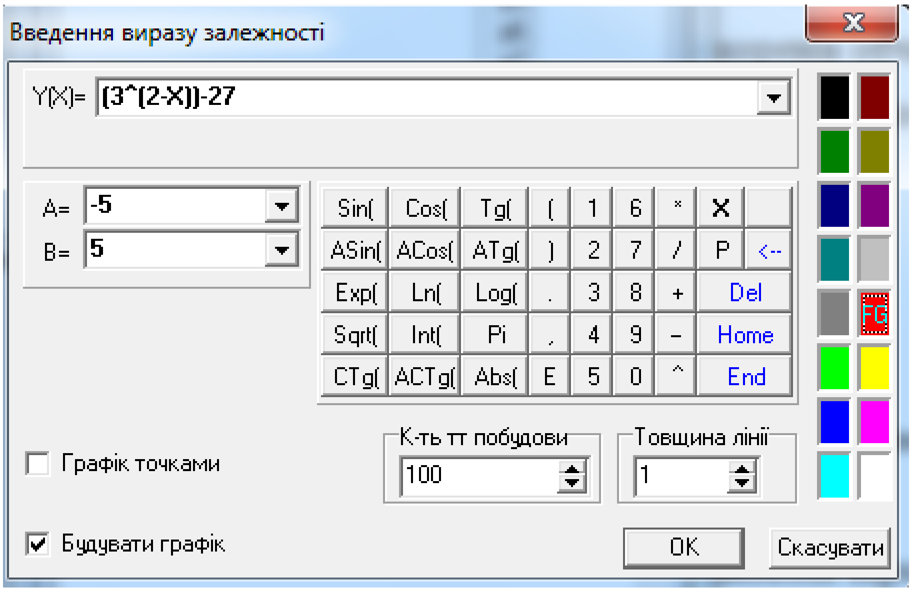


Рис. 3.13

5. Вибрати у меню *Графік* команду *Побудувати графік*. На екрані у вікні *Графік* отримаємо графік уведеної функції.

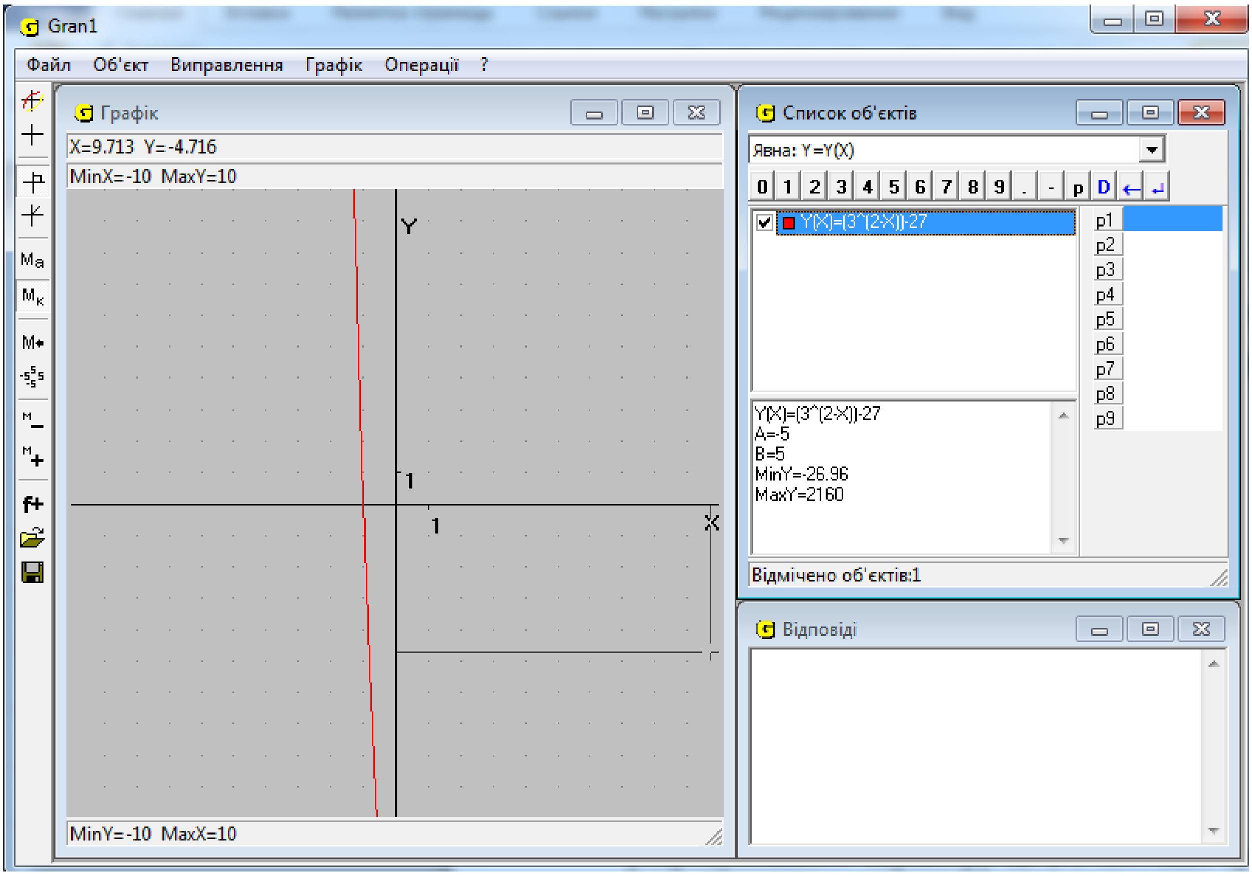


Рис. 3.14

6. Вибираємо послугу *«Операції/С-ма нерівностей y(x)<(>)c...»* та ставимо знак нерівності.

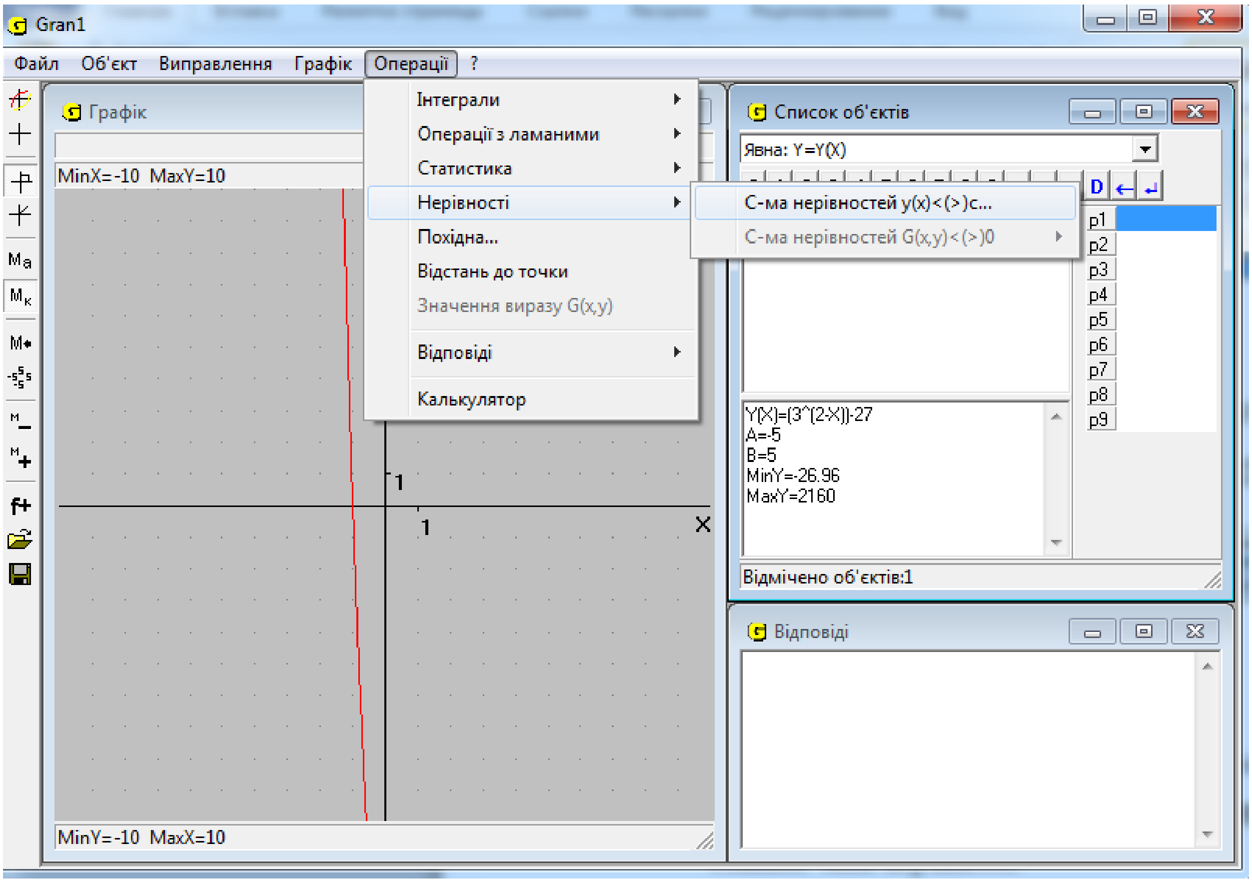


Рис. 3.15

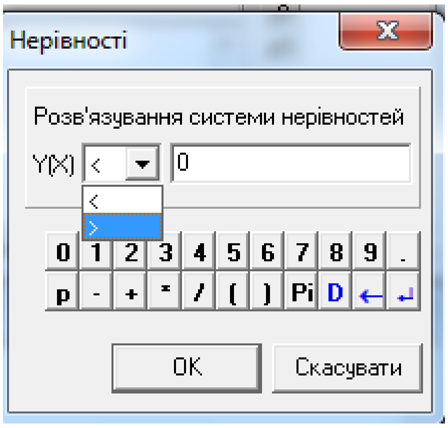


Рис. 3.16

7. У вікні «*Відповіді*» отримаємо розв’язок нерівності.

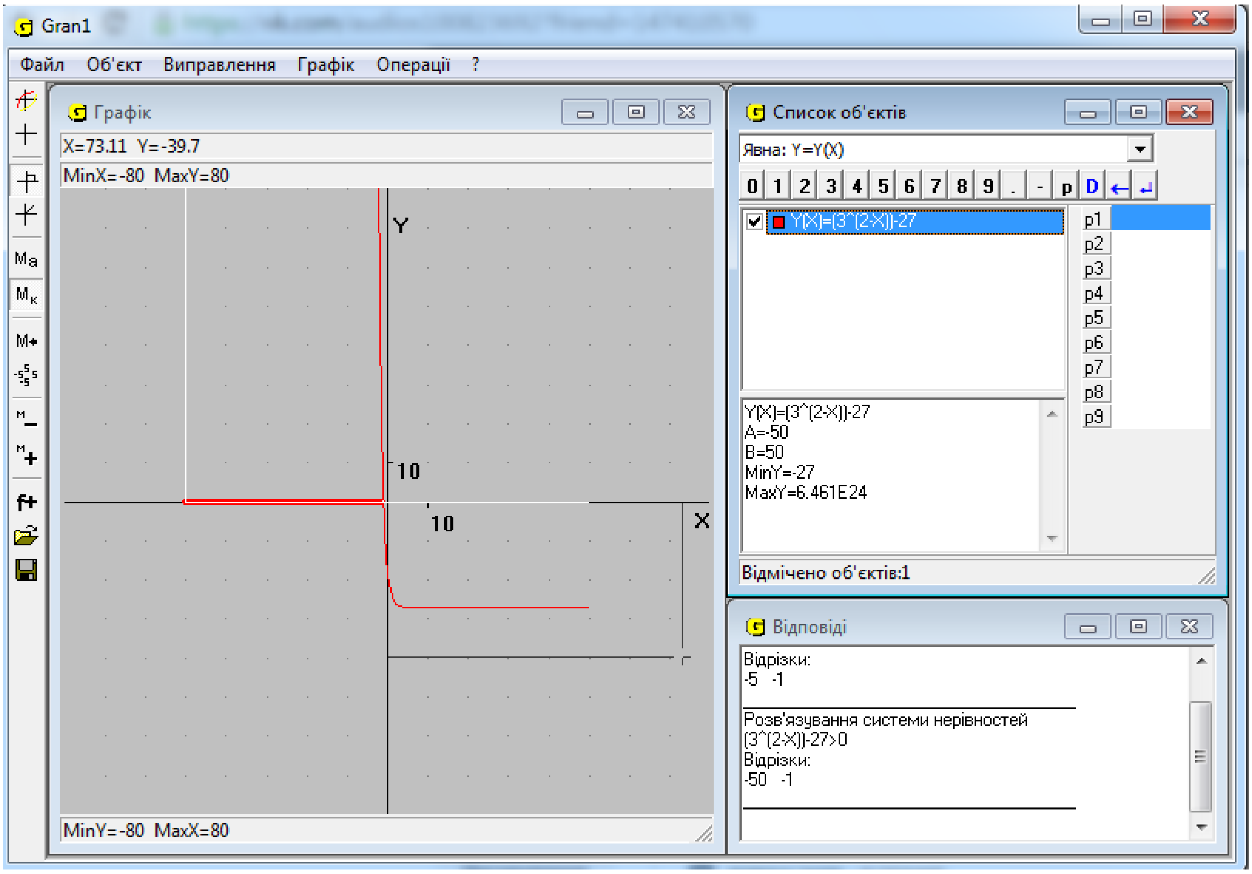


Рис. 3.17

Відповідь: x < -1.

Приклад 28: Розв'язати нерівність $0{,}5^{5-2x} < 8$.

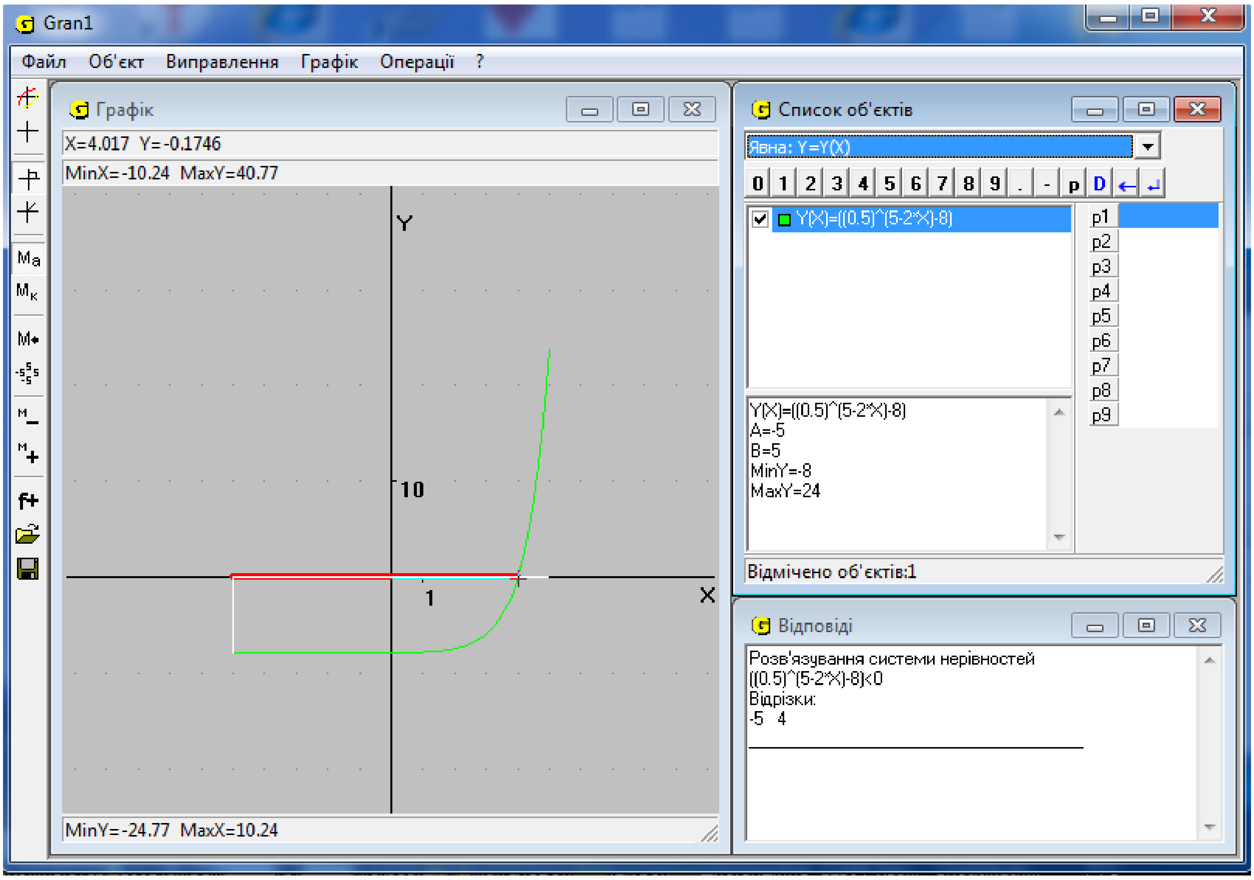


Рис. 3.18

Відповідь: x<4.

Приклад 29: Розв’яжіть нерівність $2^{5x+6} > 2^{x^2}$.

Потрібно вибрати у вікні *Список об’єктів* тип залежності *Явна: Y(X)=Y*. У меню *Об’єкт* команду *Створити*. Увести в поле *Y(X)=* діалогового вікна *Введення виразу* залежності ввести вираз: ((2)^(5*X+6)-(2)^(X^2)).

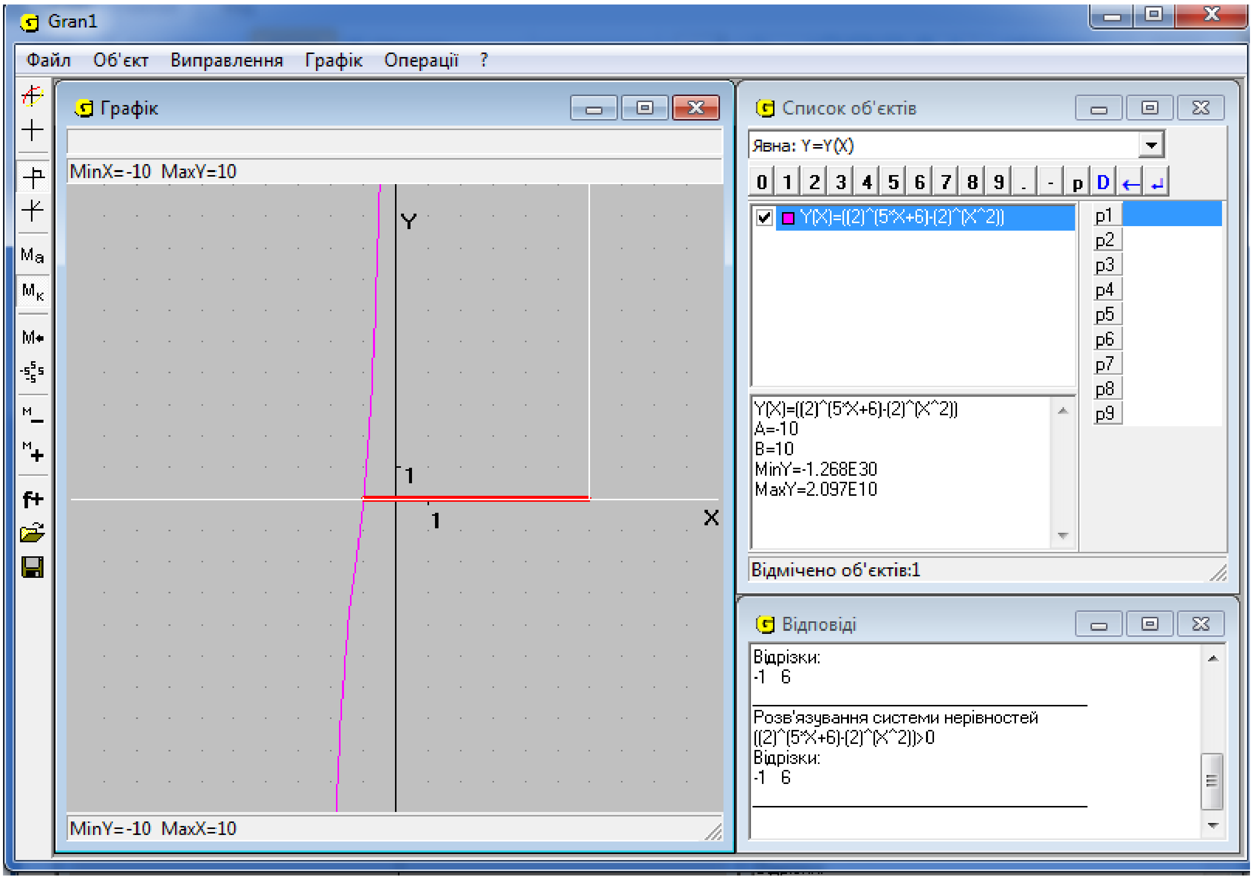


Рис. 3.19

Відповідь: $-1 < x < 6$.

Приклад 30: Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{38}{3^{x+1}} + 3 < 0$.

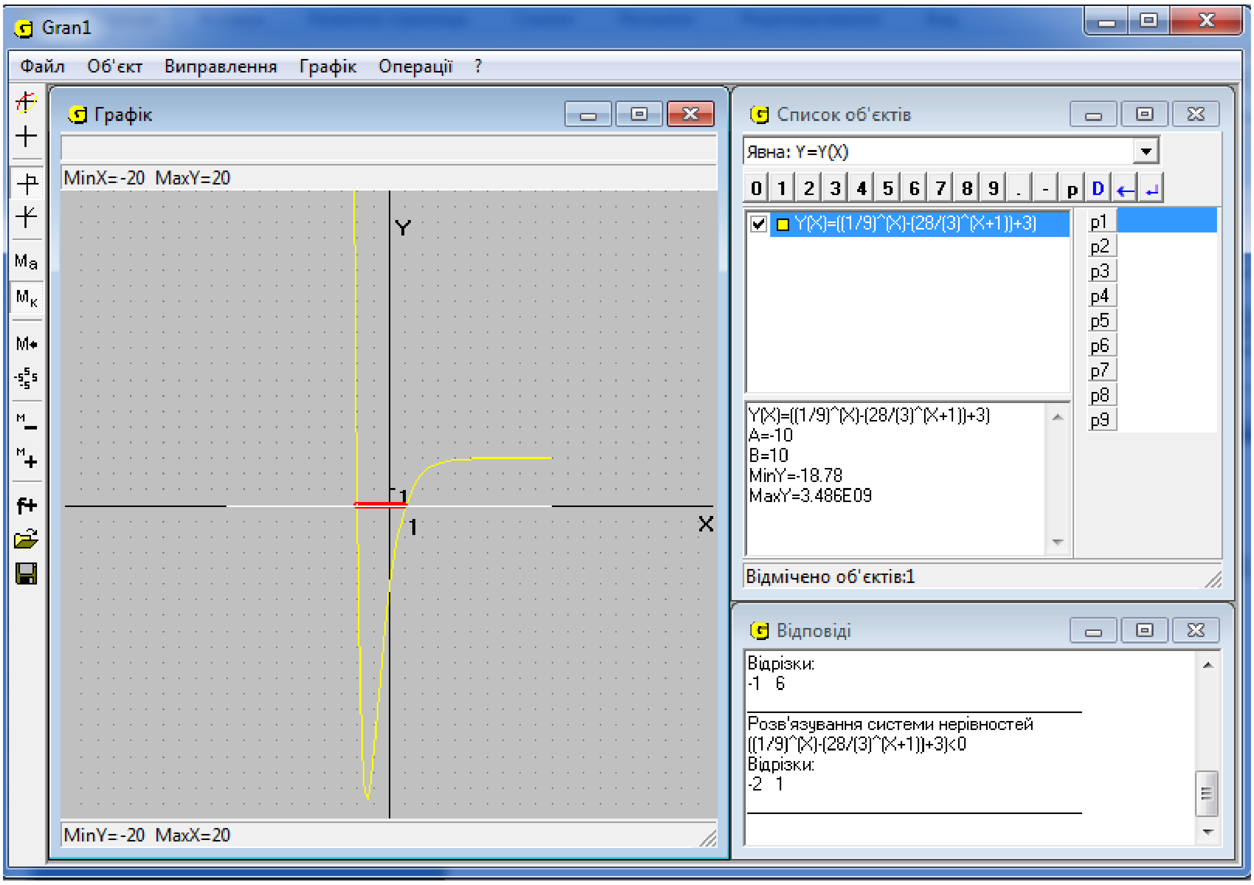


Рис. 3.20

Відповідь: $-2 < x < 1$.

Приклад 31: Розв'язати нерівність $3 * 4^x + 2 * 9^x < 5 * 6^x$.

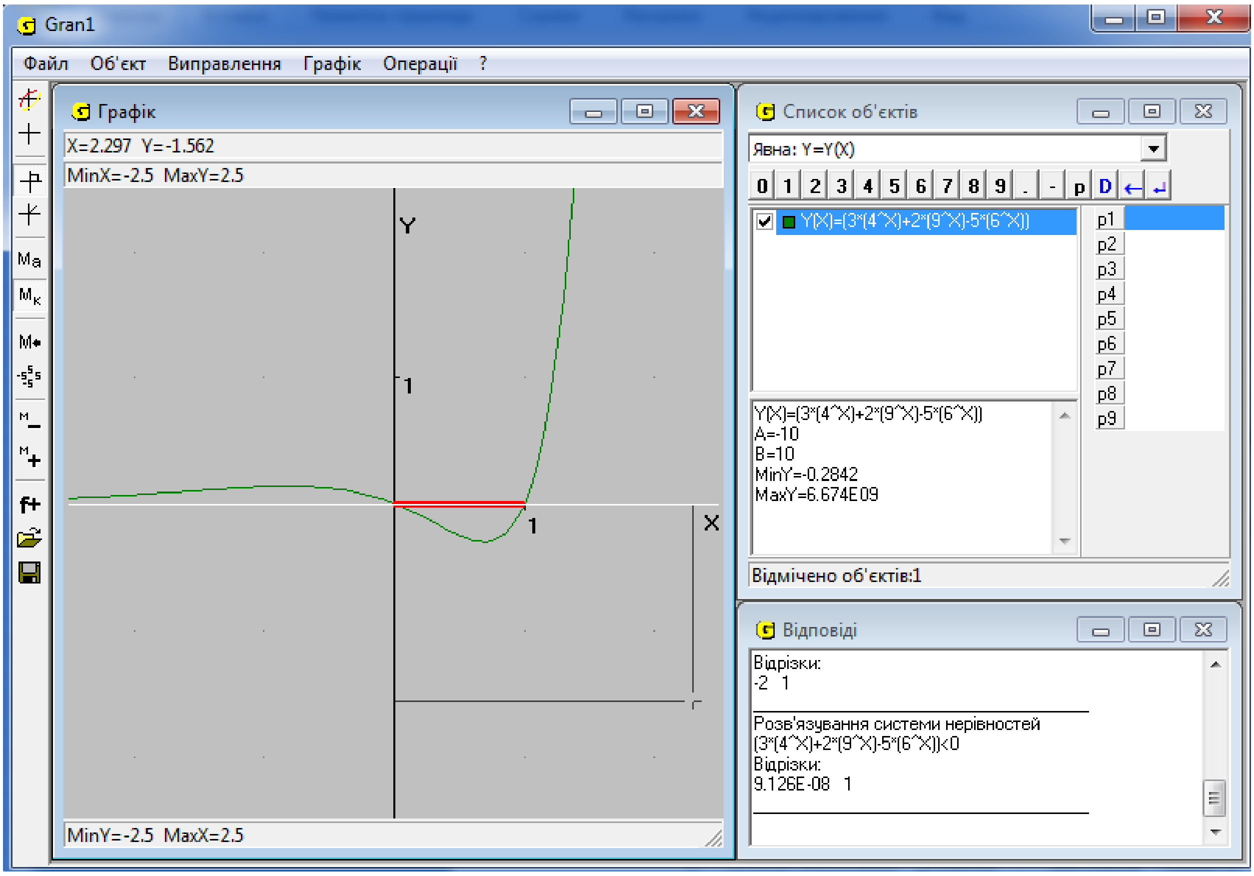


Рис. 3.21

Відповідь: $0 < x < 1$.

Приклад 32: Розв'яжіть нерівність $5 * 3^{2x-1} - 9^{x-0,5} < 9^x + 4 * 3^{2x-2}$.

Виконуємо таку ж саму послідовність дій тільки в поле *Y(X)=* діалогового вікна *Введення виразу* залежності ввести вираз: (5*(3^(2*X-1))-9^(X-0.5)-9^X-4*3^(2*X-2)).

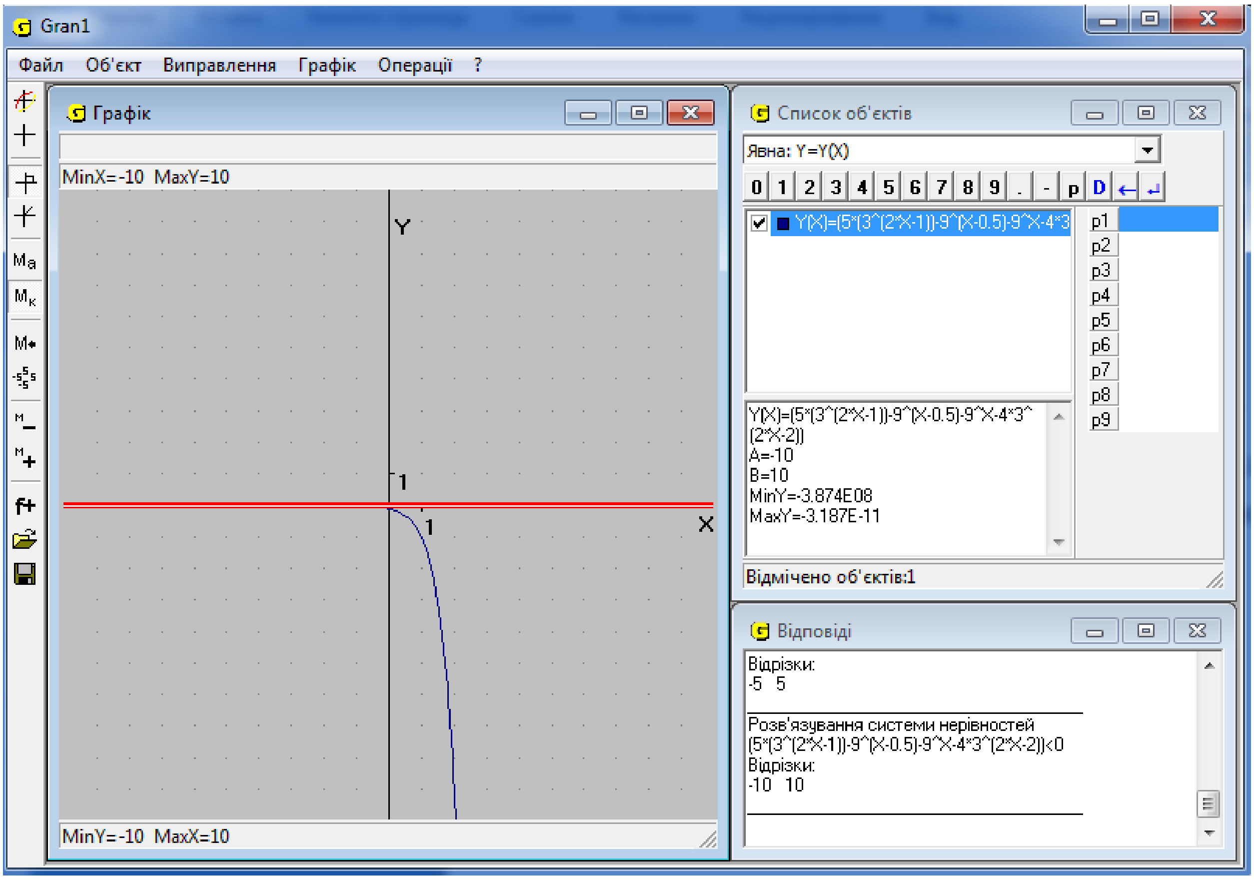


Рис. 3.22

Відповідь: розв’язком є вся числова пряма.

Приклад 33: Розв’язати нерівність: $2^{\sqrt{1-x}} \geq x$.

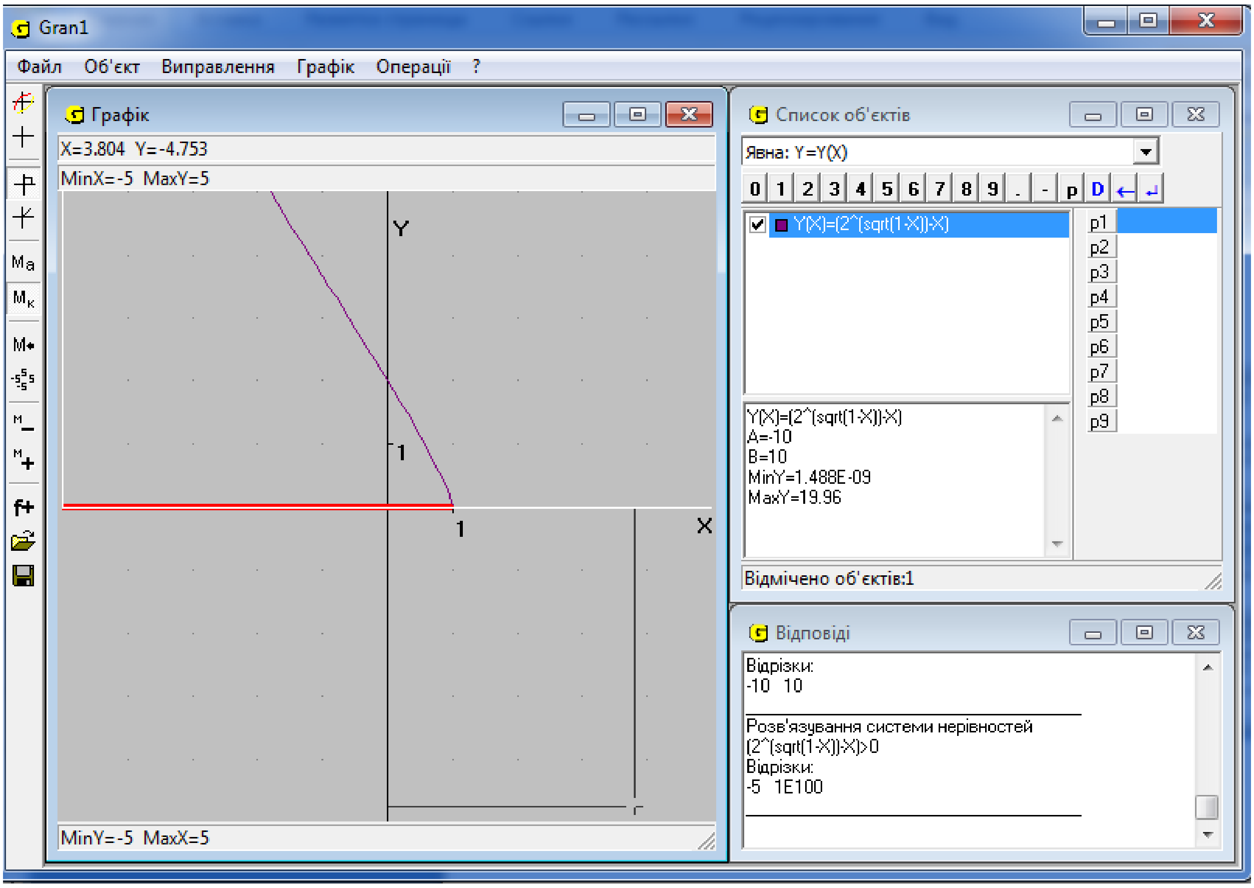


Рис. 3.23

Відповідь: $x \leq 1$.

Приклад 34: Розв’язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > 2 - x$.

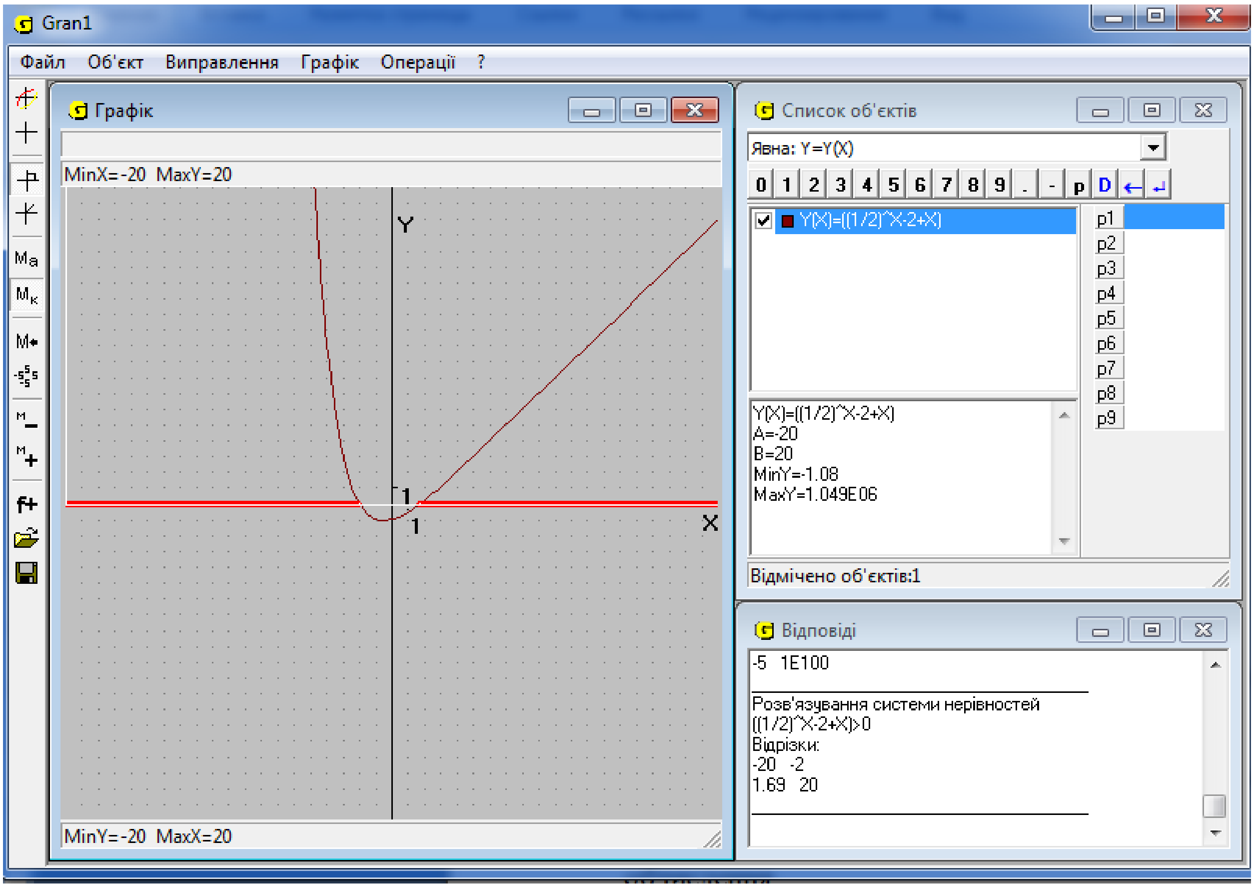


Рис. 3.24

Відповідь: $(-\infty; -2)$і $(1{,}7;\ +\infty)$.

Приклад 35: Розв'язати нерівність $5 * 3^{3*x^2} > 3 * 5^{3*x^2}$.

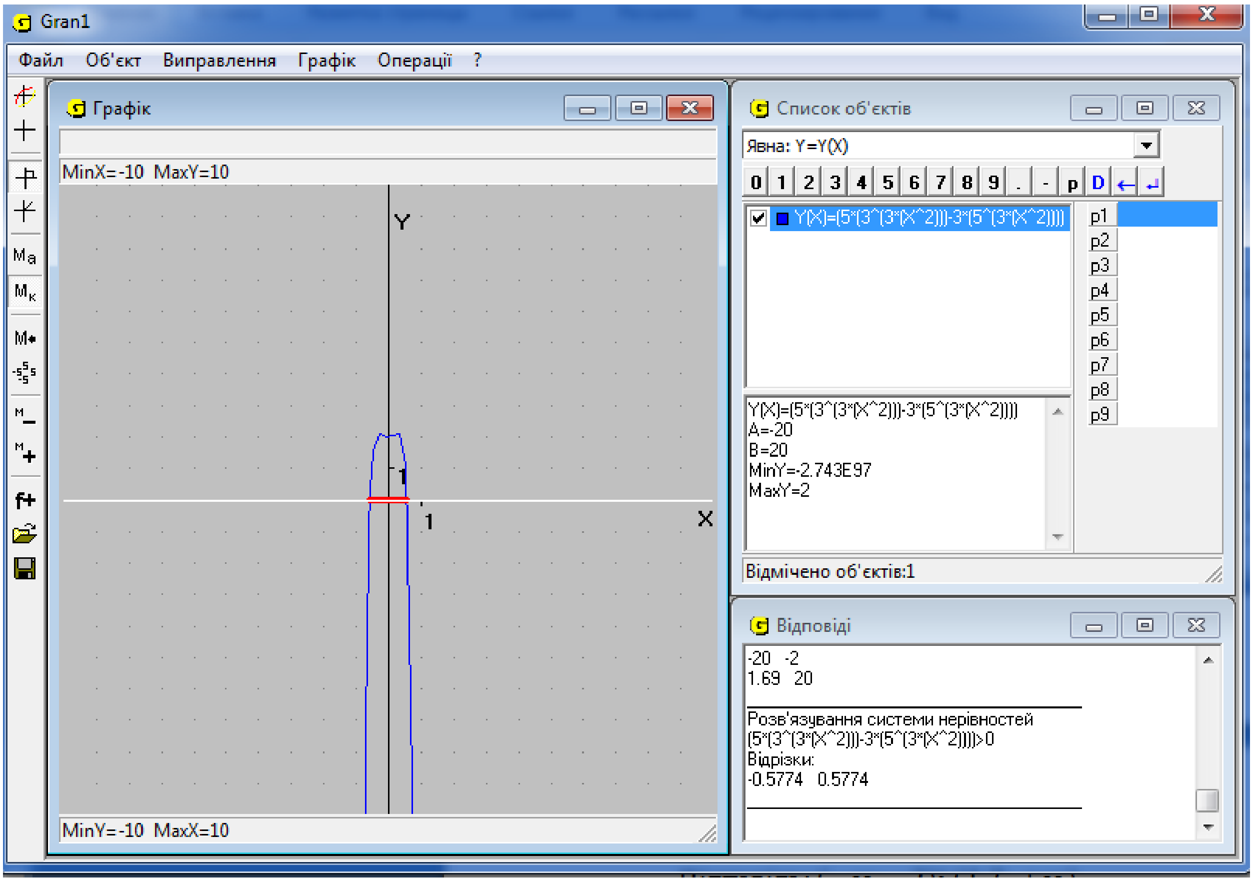


Рис. 3.25

Відповідь: $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Наведені приклади можна демонструвати і пропонувати аналогічні для розв’язання учням у класах залежно від матеріалу, який вивчається.

3.4. Диференційована система вправ

Система задач має три рівні складності:

I. *Обов’язковий рівень* – містить задачі та вправи, в основному репродуктивного характеру на 2–3 логічних кроки, представлені у формі тестів. Для їх розв’язування учням достатньо знати правила, означення, формули, теореми та ознаки, передбачені навчальними програмами, а також вміти виконувати найпростіші тотожні перетворення, спрощення та обчислення.

II. *Підвищенний рівень* – містить завдання на 4–6 логічних кроки, розв'язання яких вимагає від учня творчого застосування одержаних знань з достатньо повним і строгим обгрунтуванням ходу розв'язання.

III. *Поглиблений рівень* – це, як правило задачі та вправи, розв'язання яких вимагає вміння орієнтуватися в нестандартних ситуаціях, застосовувати орігінальні та штучні прийоми, глибини та строгості суджень, характерних для тих, хто вивчає шкільний курс математики на поглибленому рівні.

Обов'язковий рівень.

Розв'язати рівняння.

1. $2^{x+3} \cdot 3^x = 288$

1) $\frac{1}{4}; \frac{1}{7}$,

2) $1{,}5$,

3) 2,

4) $-1{,}5$.

2. $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$

1) 1,

2) 2,

3) 2; 3,

4) інша відповідь.

3. $3^{x+2} - 3^x = 72$

1) 2,

2) 3,

3) 4,

4) інша відповідь.

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

1) 3,

2) -3,

3) 1,

4) інша відповідь.

5. $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{2}\right)^{5x-3}$

1) $\frac{1}{2}$,

2) $\frac{1}{4}$,

3) 2,

4) інша відповідь.

Розв’язати нерівності.

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \geq 8$

1) $x \leq -3$,

2) $x \leq 3$,

3) $x \geq -3$

4) інша відповідь.

2. $4^{2-x} < 64$

1) $x < -1$,

2) $x > -1$,

3) $x > 1$,

4) інша відповідь.

3. $0{,}3^{3x-1} < 0{,}09$

1) $(-\infty;1)$,

2) $(1;\infty)$,

3) $(0;1)$,

4) інша відповідь.

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x-2} \geq 4^{x-1}$

1) $[-1;4]$,

2) $[1;4)$,

3) $(1;4)$,

4) інша відповідь.

5. $1{,}5^x > 2{,}25$

1) $x < 2$,

2) $x > 2$,

3) $x > -2$.

4) інша відповідь.

Підвищений рівень

Розв'язати рівняння

1. $3^{3x+1} - 4 \cdot 27^{x-1} + 9^{1{,}5x-1} = 80$
2. $20^{3x+2} = 4^{x+12} \cdot 5^{5x-8}$
3. $\dfrac{4}{2^x + 2} - \dfrac{1}{2^x + 3} = 2$
4. $\dfrac{1 - 2^{2x}}{2^x - 1} = 1$
5. $2^{2x} = 5 - x$
6. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} = 2x - 1$

Розв'язати нерівності

1. $9^x - 3^x \geq 6$
2. $(0{,}5)^{\frac{x^2-4}{x}} \geq 8$
3. $(0{,}4)^{1-x} \geq (2{,}5)^{\frac{2}{x}}$
4. $2^{1+\frac{8}{x}} \geq 0{,}5 \cdot 2^x$
5. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+4x-1} \geq 9^{2x-4}$

6. $5\cdot(0{,}2)^{2x}-26\cdot(0{,}2)^{x}+5\le 0$

7. $7\cdot 2^{2x}+2^{2x+1}\le 3^{2x+1}+3^{2x}$

Розв’язати нерівность графічно.

1. $2^{x}\ge \frac{1}{2}$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\ge 4$

Поглиблений рівень

Розв’язати рівняння.

1. $4^{x+4}+\frac{16}{4^{x+4}}=17$

2. $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$

3. $\left(\frac{1}{121}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{169}\right)^{1-x}+11^{2x-3}+13^{2x-3}=0$

4. $9^{x^2-x-2}+3^{x^2-x-2}-2=0$

5. $\sqrt[x+8]{5^{3x-2}}=5$

6. $\sqrt[x]{9^{\sqrt{x}}}-3^{\sqrt{x-3}}=0$

7. $x^{x+3}=x^{5},\ x>0$

Розв’язати нерівності

1. $2^{4x+1}-9\cdot 4^{x}+4\le 0$

2. $2^{|x+2|}>16$

3. $(\cos 5)^{3x-x^2}\le \cos^2 5$

4. $7^{1-3x^2-5x}+7^{-3x^2-5x}<7^{6(x+1)}\cdot 8$

5. $(x-1)^{2x-1}<1$

Також можна запропонувати для учнів таку систему вправ для самостійної роботи по темі: «Показникові рівняння і нерівності»:

1. Розв'язати показникові рівняння (звести до спільної основи).

1) $2^{x+1} = 32$

2) $3^{2x-1} = 81$

3) $3^{2x-1} = 1$

4) $0{,}4^{2x+1} = 0{,}16$

5) $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{64}$

6) $2^{2x} = \frac{1}{512}$

7) $4^{x-2} = 2$

8) $3^{6-x} = 9^{x-2}$

9) $(\frac{27}{8})^x = \frac{2187}{128}$

10) $6^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{36}$

11) $(\frac{1}{9})^x = 3^{5x+10}$

12) $(0{,}2)^{2-x} = 5^{2x-1}$

13) $(\frac{3}{7})^{3x+1} = (\frac{7}{3})^{5x-3}$

14) $(\frac{3}{4})^{2x-1} = (\frac{4}{3})^{x-5}$

15) $(1\frac{1}{2})^{x+4} = (\frac{2}{3})^{1-3x}$

16) $(1\frac{2}{5})^{x+4} = (\frac{5}{7})^{2x-5}$

17) $4^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{256}$

18) $(\frac{3}{2})^x * (\frac{8}{9})^x = \frac{64}{27}$

19) $(\frac{1}{4})^x * (\frac{8}{3})^x = \frac{16}{81}$

20) $2^x * 5^x = 0{,}1 * (10^{x-1})^5$

2. Розв'язати показникові рівняння (звести до спільної основи).

1) $\sqrt{3^x} = 9$

2) $\sqrt{5^x} = 25$

3) $9^{3-x} = \sqrt{3}$

4) $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{25}$

5) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$

6) $2^{x-5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

7) $5^{-2x} = \sqrt[4]{5}$

8) $7^{\frac{1}{2x}} = \sqrt[3]{7}$

9) $8^{\frac{3}{x}-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

10) $5^{\frac{x^2-1}{2}} = \sqrt[4]{5}$

11) $7^{-\frac{1}{2(x-1)}} = \sqrt[3]{7}$

12) $1 = (\frac{1}{\sqrt{3}})^{x^2-25}$

13) $\sqrt{2^x} * \sqrt{3^x} = 36$

14) $\sqrt{2^x} * \sqrt{5^x} = 1000$

15) $\sqrt{2^x * 5^x} = 14$

16) $\sqrt{5^x * 7^x} = -35$

17) $\sqrt{8^{x-4}} = \sqrt[4]{4^{2+x}}$

18) $\sqrt{27^{2+x}} = \sqrt[3]{9^{x-3}}$

19) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{x^2-9} = 1$

20) $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$

3. Розв’язати показникові рівняння (ввести заміну і звести до квадратних).

1) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$

2) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

3) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x = 0$

4) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 88 = 0$

5) $6^{2x} - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$

6) $4^x + 2^x = 72$

7) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$

8) $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$

9) $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$

10) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$

11) $4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$

12) $9^{x+1} + 26 \cdot 3^{x-3} = 0$

13) $5^{x^2 - 7x + 12} = 1$

14) $7^{(x+1)\cdot(x+2)} = 1$

15) $2^{x^2 + 2x - 0,5} = 4 \cdot \sqrt{2}$

16) $(0,2)^{x^2 - 16x - 37,5} = 5 \cdot \sqrt{5}$

17) $2^{x^2 - 6x + 0,5} = \dfrac{1}{16 \cdot \sqrt{2}}$

18) $\left(3^{x-3}\right)^{x+4} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \cdot 9^{x-4}$

19) $\left(\dfrac{1}{9} \cdot 9^x\right)^x = 3^{2x+6}$

20) $\dfrac{1}{27} \cdot 9^{x^2} = 9 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x}$

4. Розв’язати показникові рівняння (винести спільний множник за дужки).

1) $2^{x+2} - 2^x = 96$

2) $7^x - 7^{x-1} = 6$

3) $5^{x+1} + 5^x = 150$

4) $4^{x+1} + 4^x = 320$

5) $5^{x+2} + 5^x = 130$

6) $2^{x+1} + 2^x = 48$

7) $3^{x+1} + 3^x = 108$

8) $3^{x+2} - 3^x = 72$

9) $2^{x+3} - 2^x = 112$

10) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$

11) $3 \cdot 2^{4x} - 16^{x} - 32 = 0$

12) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^{x} = 15$

13) $5 \cdot 9^{x} + 9^{x-2} = 406$

14) $3^{2x} + 8 \cdot 9^{x} - 9 = 0$

15) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$

16) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$

17) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$

18) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 28$

19) $3^{x+2} + 3^{ч-1} = 27$

20) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$

5. Розв’язати показникові нерівності.

1) $5^{2x} < 5^{x+1}$

2) $0{,}1^{3x} < 0{,}1^{2x-3}$

3) $0{,}5^{2x} < 1$

4) $10^{3x+2} > 100$

5) $4^{5-2x} \leq 0{,}25$

6) $\dfrac{1}{7^{3x}} < 49$

7) $\left(\sqrt{3}\right)^{x} \leq \dfrac{1}{9}$

8) $0{,}7^{5-2x} \leq 0{,}25$

9) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$

10) $3 \cdot 9^{x-2} > \left(\dfrac{1}{27}\right)^{3x-1}$

11) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} > \sqrt[4]{1{,}5}$

12) $\dfrac{16}{\sqrt{32}} \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3+x}$

13) $3 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x} < \dfrac{1}{9}$

14) $(0{,}2)^{x-5} - (0{,}04)^{x} > 0$

15) $5^{4x} - 25^{x+3} < 0$

16) $3^{4x+3} < \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}}$

17) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} \le \frac{1}{9}$

18) $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x-2} \ge 4^{x-1}$

19) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > 2^{-10}$

20) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3} \ge 3^{1-x}$

РОЗДІЛ IV. ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ТА СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ

З метою перевірки ефективності застосування методики навчання розв'язуванню показникових рівнянь та нерівностей було проведено, під час проходження виробничої практики, педагогічний експеримент при вивченні теми «Показникові рівняння і нерівності» у 10-х класах. У експерименті брали участь учні двох десятих класів ЗОШ №13 м. Рівне.

Експерементальний 10 – Б (15 учнів) вивчав тему, використовуючи розроблену методику, контрольний 10 – А клас (14 учнів) – традиційну методику. Для учнів експериментального класу були проведені уроки, на яких задачі розв'язувалися із використанням поданої в роботі методики.

Мета експерименту: на основі аналізу навчальних посібників та збірників задач з алгебри встановити операційний склад умінь розв'язувати показникові рівняння та нерівності в 10 класах, розкривати їх суть і розробити методику навчання; перевірити ефективність даної методики.

Варто виділити два основні етапи методичних особливостей впровадженої методики:

- ✓ Дослідження рівня знань учнів з предмету. Проведення бесіди, консультації з вчителями та методистами.
- ✓ Впровадження методики на уроках в експериментальному класі, перевірка якості роботи – контрольна робота.

Організація уроків була наступною: при вивченні перших означень, властивостей та теорем урок розпочинався з актуалізації та мотивації навчальної діяльності учнів, потім на основі повтореного учні за допомогою вчителя засвоювати основні поняття нової теми.

У ході першого етапу експерименту були досягнуті такі результати: досліджена проблема в теорії та практиці навчання, розроблена методика проведення уроків по темі «Показникові рівняння і нерівності».

На другому етапі здійснювалася експериментальна перевірка розроблених уроків й методики їх проведення. При цьому були поставлені такі завдання: вивчити вплив запропонованої методики уроків на засвоєння знань в процесі навчання.

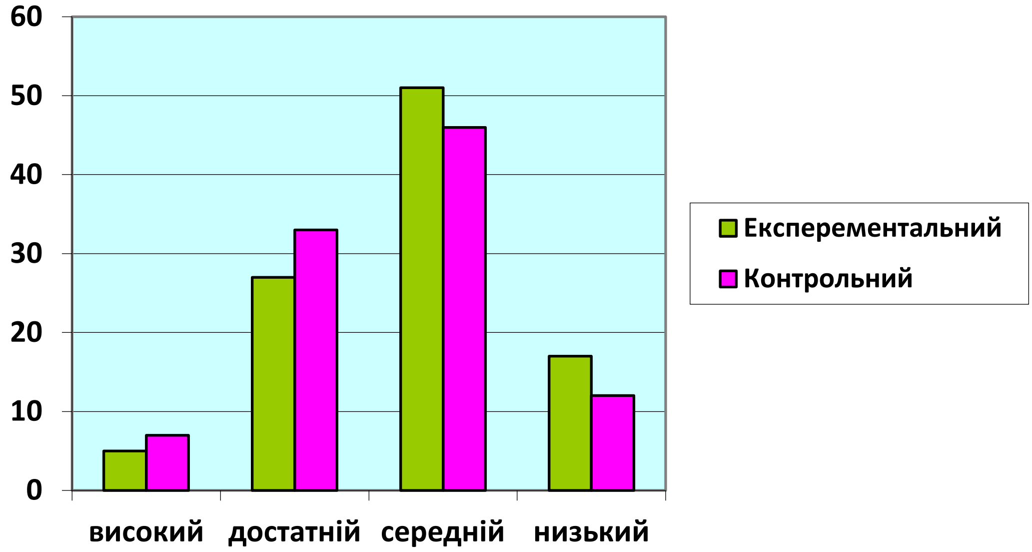
Перед тим, як приступати до проведення уроків, було визначено рівень знань учнів за допомогою аналізу оцінок за І семестр.

Результати рівня знань учнів подані у таблиці:

Класи	Рівні засвоєння знань			
	високий	достатній	середній	низький
Експерементальний клас 10 – Б	5%	27%	51%	17%
Контрольний клас 10 – А	7%	33%	46%	12%

Таблиця 4.1

Для кращої наочності побудуємо гістограму:



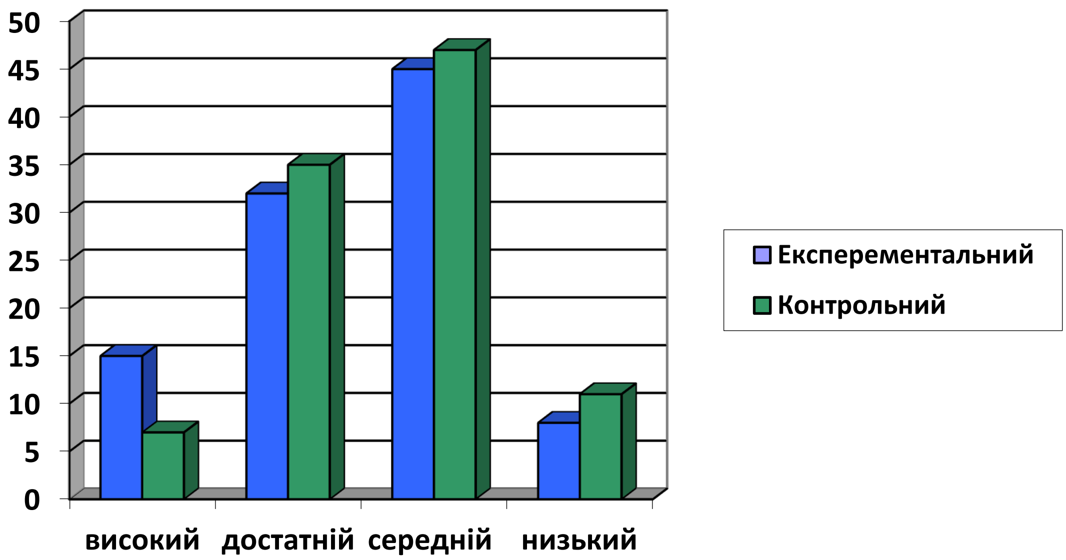
Під час проведення уроків учні виявили інтерес до матеріалу, намагалися самостійно розв'язувати показникові рівняння і нерівності, опрацювали додаткову літературу, пропонували свої ідеї розв'язання задач. На останньому уроці з теми було проведено контрольну роботу в обох класах на 2 варіанти.

Результати експерименту дослідження, проведеного в обох класах відтворені в таблиці:

Класи	Рівні засвоєння знань			
	високий	достатній	середній	низький
Експерементальний клас 10 – Б	15%	32%	45%	8%
Контрольний клас 10 – А	7%	35%	47%	11%

Таблиця 4.2

Побудуємо гістограму:



Якщо порівняти між собою результати контрольних робіт до і після проведення експерименту, то можна сказати, що уроки в експериментальному класі не пройшли дарма. Учні одержали міцніші знання з даної теми.

Отже, це свідчить про досить високу продуктивність методики, розробленої в попередніх розділах курсової роботи. Тобто її використання дозволяє отримати однозначний зріз знань учнів за даною темою, забезпечити індивідуальний підхід в навчанні, враховувати психологічні особливості і наявний рівень знань школярів, підвищити наочність навчання і забезпечити справжній інтерес до явищ, що вивчаються.

ВИСНОВКИ

Застосування нових інформаційних та комунікаційних технологій у шкільній освіті обговорюється на сторінках усіх методичних газет і журналів. При цьому кожному вчителю, безумовно, очевидна доцільність застосування комп'ютерів для навчання в середньому і старшому ланках школи. Багатющі можливості подання інформації на комп'ютері дозволяють змінювати і необмежено збагачувати зміст освіти; виконання будь-якого завдання, вправи з допомогою комп'ютера створює можливість для підвищення інтенсивності уроку; використання варіативного матеріалу і різних режимів роботи сприяє індивідуалізації навчання. Таким чином, інформаційні технології, в сукупності з правильно підібраними технологіями навчання, створюють необхідний рівень якості, варіативності, диференціації та індивідуалізації навчання.

При аналізі доцільності використання комп'ютера в навчальному процесі потрібно враховувати деякі дидактичні можливості комп'ютера:

- ✓ розширення можливості для самостійної творчої діяльності учнів, особливо при дослідженні та систематизації навчального матеріалу;
- ✓ прищеплення навичок самоконтролю і самостійного виправлення власних помилок;
- ✓ розвиток пізнавальних здібностей учнів;
- ✓ інтегроване навчання предмету;
- ✓ розвиток мотивації в учнів.

В результаті написання дипломної роботи нами була досягнута мета за допомогою виконання тих завдань, які були намічені, тобто:

- ✓ Систематизувала відомості про розв’язування показникових рівнянь й нерівностей та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи. Розглянула всі основні способи розв’язання показникових рівнянь й нерівностей та їх систем, теореми про рівносильність, та всі типові складності які виникають при розв'язуванні цих рівнянь.

- ✓ З'ясувала місце показникових рівнянь й нерівностей та їх систем в діючій та проекті нової програми з математики, конкретизувала вимоги до уявлень, знань, умінь та навичок учнів.
- ✓ Запропонувала методичні рекомендації щодо викладання теми «Показникова функція» в старших класах загальноосвітньої школи.
- ✓ Сформулювала навчальні цілі, розробила тематичні плани до теми «Показникова функція». «Алгебра і початки аналізу» під редакцією М. І. Шкіля, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук .
- ✓ Підібрала диференційовану систему вправ, показала застосування програми GRAN1 до даної теми, подала приклади розв'язування рівнянь та нерівностей різної складності та приклади самостійного розв`язування вправ.
- ✓ Створила посібник по даній темі.

Проведено педагогічний експеримент, де була випробувана методика проведення уроків по темі «Показникові рівняння і нерівності» на базі 10-их класів. Експеримент показав, що при застосуванні нової методики на уроках були досягнуті більш високі рівні засвоєння теми.

Отже, уроки із використанням цієї методики – досить ефективна форма розвитку математичних здібностей учнів. Учні класу, в якому проводився експеримент, виявили інтерес до матеріалу, поглибили свої знання з розглядуваної теми, перевірили свої здібності і можливості самостійно опрацьовувати додаткову літературу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ананченко К. О. Загальна методика викладання математики в школі / К. О. Ананченко. – Мн., «Універсітецкае», 1997. – 145 с.

2. Андрєєва В. М. Настільна книга педагога / В. М. Андрєєва, В. В. Григораш – Х.: Основа, 2006. – 352 с.

3. Бевз Г. П. Довідник з математики. / Г. П. Бевз. – К.: Радянська школа, 1981. – 262 с.

4. Вавилов В. В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. / В. В. Вавилов. − М.: Наука, 1988. – 608 с.

5. Гайштут О. Г. Розв’язування алгебраїчних задач. / О. Г. Гайштут, Г. М. Литвиненко. – Київ: «Радянська школа», 1991. – 112 с.

6. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. / М. І. Жалдак – К.: Техніка, 1997. – 303 с.

7. Кісілевич О. В. Математика. / О. В. Кісілевич, О. С. Пенцак, Л. В. Барбуляк. – Львів. : Новий Світ – 2006. – 320 с.

8. Колмогоров А. Н. Алгебра і початки аналізу підручник для 10-11 кл. загальноосвітніх закладів / А. Н. Колмогоров – М.: Освіта, 2001. – 384 с.

9. Колягин Ю. М. Методика викладання математики в середній школі / Ю. М. Колягін. – М.: «Просвещение», 1999. – 144 с.

10. Литвиненко Г. М. − Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту / Г. М. Литвиненко, Л. Я. Федченко, В. О. Швець , частина І. – 94 с.

11. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: проф. рівень. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.

12. Наволокова Н. П. Практична педагогіка для вчителя / Н. П. Наволокова, В. М. Андрєєва – Основа, Х.: 2009. – 120 с.

13. Особливості поглибленого вивчення математики в 10 класі / Навчально-методичний посібник / – К.: Освіта, 1992. – 35 с.

14. Пєхота О. М. Освітні технології / О. М. Пєхота, А. З. Кіктенко – Київ, «Видавництво А.С.К.», 2004. – 255 с.

15. Пометун О. І. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід. / О. І. Пометун. Л. В. Пироженко – К., 2002. – 110 с.

16. Соболь Б. В. Посібник для підготовки до єдиного державного іспиту і централізованого тестування з математики. / Б. В. Соболь – Ростов на Дону: Фенікс, 2003. – 352 с.

17. Столяр А. А. Логічні проблеми викладання математики. / А. А. Столяр – К.: Вища школа, 2000. – 55 с.

18. Рязановский А. Р. 500 способів і методів розв'язання задач з математики для школярів і вступаючих до вузів / А. Р. Рязановський – М.: Дрофа, 2001. – 480 с.

19. Селевко Г. І. Учитель проектує комп'ютерний урок / Журнал «Народна освіта». – К., 2005. – № 8 – С.140.

20. Сільвестрова І. А. Навчаємось розв’язувати рівняння і нерівності: Навч. посіб. / І. А. Сільвестрова. – Х.: Основа, 2004. – 272 с.

21. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для. студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. / З. І. Слєпкань – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

22. Слєпкань З.І. Психолого – педагогічні основи навчання математики. / З. І. Слєпкань. – Київ: «Вища школа». – 192 с.

23. Столяр А. А. Педагогики математики / А. А. Столяр. – Минск, Вышейшая школа, 1986. – 414 с.

24. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика. (Метод проектів, комп’ютерні технології, розвивальне навчання). − Х.: Основа, 2007. – 176 с.

25. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика. (Модульне навчання, розвиток критичного мислення). − Х.: Основа, 2007. – 125 с.

26. Ципкін О. Г. Довідник по методам розв'язання задач з математики. / О. Г. Ципкін, О. І. Пінський. – Москва: «Наука», 1989. – 156 с.

27. Черкасов О. Ю. Математика: довідник для старшокласників і вступників у вузи. / О. Ю. Черкасов – М.: АСТ-ПРЕСС, 2001. – 576 с.м ми мммм и

28. Швець В. О. Дидактичні матеріали з математики 8, 9, 10, 11 класи. / О. В. Швець – К.: Освіта, 1997. – 245 с.

29. Швець В. О. Навчальні цілі і методика їх формування / методика викладання математики і фізики. / О. В. Швець. – Респ. наук. метод. зб. – К.: Рад. шк., 1992. – 50 с.

30. Шкіль М. І. − Алгебра і початки аналізу 10-11 клас / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубінчук − К.: Зодіак − ЕКО, 1995. – 318 с.