Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота
Магістр
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: «Формування прийомів розумових дій у студентів вищих навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації при проведенні позакласної роботи з математики»

Виконала: студентка V курсу, групи МІ-51з
напряму підготовки (спеціальності)
0402 «Фізико-математичні науки»,
8.04020101 «Математика»
Адамів Ю.О.
Керівник к.п.н., проф. Белешко Д.Т.

Рецензент ___________________

Рівне-2016 року

ЗМІСТ

ВСТУП 3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ 8
1.1. Поняття задачі 8
1.2 Структура задач 11
1.3 Класифікація задач 13
1.4. Принцип визначення фігури 19
1.5. Принцип визначення геометричної задачі. 21
1.6. Психологічна сутність процесу розв’язування задач 23
1.7. Структура процесу розв'язування задач 25
РОЗДІЛ 2. ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВИХ ДІЙ У СТУДЕНТІВ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ I-II РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ 30
2.1. АНАЛОГІЯ 30
2.2. КОНСТРУЮВАННЯ КОНТРПРИКЛАДІВ 34
2.3. СКЛАДАННЯ ТВЕРДЖЕНЬ, ОБЕРНЕНИХ ДАНИМ 36
2.4. КОНСТРУЮВАННЯ ТВЕРДЖЕНЬ ПО АНАЛОГІЇ 43
2.5. УЗАГАЛЬНЕННЯ І КОНКРЕТИЗАЦІЯ ТВЕРДЖЕНЬ 47
2.6. ПОРІВНЯННЯ 53
2.7.УЗАГАЛЬНЕННЯ 55
2.8.АБСТРАГУВАННЯ 56
2.9. СИСТЕМАТИЗАЦІЯ 57
РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВИХ ДІЙ У СТУДЕНТІВ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ I-II РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ 59
3.1. Характеристика основних етапів процесу засвоєння 59
3.2. Організація контролю за процесом засвоєння 63
3.3. Порівняльна роль окремих етапів процесу засвоєння в становленні дій 64
3.4. Етапи засвоєння знань 67
3.5 Етапи формування прийомів розумової діяльності 69
3.6 Педагогічний експеримент та статистична обробка його результатів 80
ВИСНОВКИ 84
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 86
Додаток А 91
Додаток Б 93

ВСТУП

Реалізація концепції загальної середньої освіти пропонує не тільки удосконалення програм, підручників, методів та форм навчання, але й прививати кожному студентові стійке бажання і вміння навчатися, самостійно отримувати і застосовувати знання. Від розв'язання цього завдання значно залежить ефективність навчально-виховного процесу, формування всебічно розвинутої і соціально зрілої особистості, готової до активної трудової діяльності. Вирішаючим фактором в формуванні особистості студентів з високим інтелектом є розвиток творчого мислення.

Мислення в шкільному віці домінує як пізнавальна функція. Воно розвивається інтенсивно в процесі цілеспрямованої, різноманітної навчальної діяльності в тісному взаємозв'язку з пам'яттю, просторовими представленнями і зображеннями, мовленням і виявляє перетворюючу дію на розвиток всіх пізнавальних функцій і виховання особистості в цілому. Психологи, педагоги і методисти, які досліджують проблему розвитку мислення студентів, вважають необхідним навчати студентів прийомам розумової діяльності в процесі засвоєння знань. «В шкільному віці,- на думку Л.М. Виготського,- мислення як ніби зміщується в центр свідомості і здобуває "ключове", вирішальне значення для всіх інших функцій і процесів… під впливом мислення закладаються основи особистості і світосприйняття»[12, с.45].

Формування операційних структур мислення завжди було і залишається однією із основних загальноосвітніх та виховних завдань вивчення шкільної математики. «… Досить небагато з тих, хто закінчують школу будуть математиками. Але не знайдеться жодного, якому не потрібно буде розмірковувати, аналізувати, доводити»[37, с.67].

В психолого-педагогічній літературі сформульовано і обгрунтовано положення про те, що в процесі навчання для засвоєння повинні задаватися дві системи знань: 1. про предметну діяльність; 2. про зміст та послідовність здійснення прийомів розумової діяльності, що забезпечують оволодіння науковими знаннями про предметну дійсність. Ці дві системи знань тісно взаємопов'язані. Знання першого роду подаються в підручниках, а знання другого роду, хоч їх в дійсному вигляді немає, передбачаються системою завдань, запитань, послідовністю викладання матеріалу. Вчитель повинен володіти глибокими знаннями, високим рівнем мислення, здійснювати управління їхньою розумовою діяльністю.

Навчання студентів прийомів розумової діяльності передбачено при вивченні різних шкільних дисциплін, і насамперед математики. Прийоми розумової діяльності є необхідними компонентами в структурі математичних здібностей. В затвердженій програмі з математики спеціально передбачається «під час вивчення в арсеналі прийомів і методів мислення студентів включати індукцію і дедукцію, узагальнення і конкретизацію, аналіз та синтез, класифікацію та систематизацію, абстрагування, аналогію»[39,с.8].

На жаль, процес формування прийомів розумової діяльності нерідко випадає з поля зору вчителів, увага приділяється в основному запам’ятовуванні і відтворенні навчального матеріалу. Це пояснюється як невисоким рівнем сформованості прийомів розумової діяльності у вчителів, так і недостатній науковій розробці цих питань в методиці математики, в психолого-педагогічній літературі. Ситуація погіршується ще й тим, що студенти фізико-математичних факультетів педагогічних університетів не вивчають основ формальної логіки, а в курсі методики навчання математики недостатньо розкривається суть прийомів розумової діяльності, особливості їх формування.

Різні аспекти проблеми формування прийомів розумової діяльності в процесі навчання розкриті в дослідженнях радянських психологів Л.С. Виготського, П.Я. Гальперіна, В.В. Давидова, Е.Н. Кабанової-Меллер, В.А. Крутецького, Г.С. Костюка, Н.А. Менчинською, С.Л. Рубинштейна, Н.Ф. Тализіною, І.С. Якиманською і ін., дидактів Л.В. Занкова, Н.М. Скаткіна, І.Я. Лернера, М.Н. Данилова, Ю.С. Бабанського, М.І. Махмутова, Б.П. Есиповою, В.Ф. Паламарчук і ін., методистів Н.Д. Мацько, В.Н. Осинською, З.І. Слепкань, А.А. Столяра, І.Ф. Тесленко і ін. В цих дослідженнях обґрунтовано положення про те, що необхідна переорієнтація вчителів з дидактико-методичного підходу до навчання на більш ширший психолого-педагогічний підхід.

Дослідження С.Ф. Бондар, Б.І. Коротяєва, О.С. Кретинина, Я.А. Пасічник, В.І. Решетнікова і ін. присвячені методиці формування прийомів розумової діяльності (аналіз, синтез, порівняння, абстракція, конкретизація і ін.).

Наші спостереження і експериментальна робота, досвід найкращих вчителів стверджують, що навчання школярів прийомів розумової діяльності недостатньо, важливо “навчити студентів вчитися”. Для якісного оволодіння знаннями і уміннями студентів необхідно оволодіти системою прийомів розумовою діяльністю. Особливо актуальною проблема формування прийомів розумовою діяльністю є для підліткового віку, тобто в цей період проходить реорганізація всіх видів діяльності, в тому числі і розумової. Навчання для підлітків виступає однією форм спільної загально корисної діяльності, виникає потреба в самостійному осмисленні знань, в пошуку і відкритті нового, прагненні відкрити себе, утвердититися в очах однокласників. Зміна характеру і форм діяльності підлітка, вікова зацікавленість розумом, нова система навчання потребує від нього більш високого рівня організації розумової діяльності в різних її видів (навчальна, розумова, трудова, загально-організаційна). Цілеспрямований, диференційований розвиток мислення підлітків в процесі засвоєння математики, розвиває інтерес до предмета, підвищує рівень знань, розширює пізнавальні можливості.

Недостатня увага вчителів до розвитку прийомів розумової діяльності студентів в процесі навчання математики призводить часто до формального запам’ятовування, заучуванні правил, формул, розв’язання, доведення.

Таким чином, **актуальність дослідження** формування прийомів розумової діяльності студентів при навчанні математики витікає з протиріччя між потребами суспільства до рівня математичних знань, і розвиток мислення студентів в процесі навчання і реальної шкільної практики.

Об’єктом дослідження є навчальна діяльність в процесі навчання математики у студентів вищих навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації.

Предмет дослідження – формування прийомів розумової діяльності при засвоєнні математики у студентів вищих навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації.

Мета дослідження – розробка методики цілеспрямованого формування в студентів системи прийомів розумової діяльності на уроках математики в процесі свідомого засвоєння математики, розвитку математичних здібностей.

Гіпотеза – формування системи прийомів розумової діяльності підвищить якість засвоєння математики, рівень інтелектуального розвитку студентів, розширить пізнавальні можливості, самостійність, зміни в мотиваційній сфері не тільки сильних, але і студентів з низькою успішністю.

Для реалізації визначеної цілі та перевірки достовірності висунутої гіпотези розв'язувалися наступні **завдання**:

1. Аналіз стану проблеми формування прийомів мислення студентів в психолого-педагогічній і методичній літературі, а також в шкільній практиці.
2. Визначення системи прийомів розумової діяльності, що використовуються в процесі навчання математики і рівня їх сформованості.
3. Виявлення найважливіших методичних умов ефективної організації процесу навчання студентів прийомів мислення.
4. Розробка і експериментальна перевірка методики цілеспрямованого формування системи виділених прийомів мислення при навчанні математики.

В ході досліджень застосовувалися наступні <u>методи науково-педагогічних досліджень</u>: порівняльно-історичний аналіз, критичний аналіз психолого-педагогічної і методичної літератури, спостереження, бесіди, анкетування, інтерв'ю, аналіз документів і досвіду роботи вчителів, педагогічний експеримент(методи вивчення реального педагогічного процесу); кількісний і якісний аналіз діяльності вчителя та студентів (методи статистичної обробки даних експерименту).

Вибір методів дослідження обумовлений особливостями запропонованих завдань.

Наукова новизна дослідження в тому, що обґрунтоване місце і роль прийомів розумової діяльності студентів при вивченні математики; визначені інтелектуальні уміння в структурі математичних здібностей і розроблені правила-орієнтири прийомів розумової діяльності; виділена система прийомів розумової діяльності студентів.

Теоретична значимість результатів дослідження в тому, що визначені методичні умови ефективного використання системи прийомів розумової діяльності; досліджено вплив сформованої системи прийомів розумової діяльності на рівень математичних знань і мислення.

Практичне значення роботи. Розроблена методика поетапного формування прийомів розумової діяльності, визначені ефективні засоби, які підвищують пізнавальну активність студентів, особливо студентів з низькою успішністю. Розроблені практичні рекомендації вчителям для організації системи роботи по формуванню прийомів розумової активності студентів при навчанні математики.

Апробація. Виступ на студентській науковій конференції у Рівненському державному гуманітарному університеті (IX Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих науковців. 18 травня 2016 року)[1, с.3].

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Поняття задачі

У літературі з психології і педагогіки немає єдиного трактування поняття «задача». Автори по-різному тлумачать це поняття – залежно від підходу до зв'язку між суб'єктом і задачею. У кібернетиці, дидактиці і методиці навчання математики задача трактується як ситуація зовнішньої діяльності, яка пропонується у відриві від суб'єкта діяльності. Тому здебільшого задача тут трактується як будь-яка вимога обчислити, перетворити що-небудь, побудувати або довести щось. У психології задача розглядається як мета, задана в певних умовах, як особлива характеристика діяльності суб'єкта. Задача тут тлумачиться як суб'єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, у якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта.

Щоб правильно розв’язувати різні питання методики геометричних задач, слід виходити з досить обґрунтованих загальних принципових положень. Одне з таких положень полягає в тому, щоб завжди врахувати, що таке геометрична задача і що означає розв’язати геометричну задачу.

Історія розвитку методичних ідей у галузі вивчення математики знає чимало спроб означення поняття задачі [30, с.67].

Вперше поняття «навчальна задача» вводить у педагогічну культуру Д. Б. Ельконін. Він трактував його як задачу, у процесі розв’язання якої основною метою є засвоєння певного зразка дій чи понять. Згодом Д. Б. Ельконін посилює значущість навчальної задачі, вважаючи її основною одиницею навчальної діяльності. Основну відмінність навчальної задачі від усіх інших задач вбачає у тому, що її мета та результат полягають у зміні самого діючого суб’єкта, а не у зміні предметів, з якими він діє.

Відомий російський математик С. О. Шатуновський у вступній статті до книги Адлера «Теорія геометричних побудов» пише: «Задача є виклад вимоги «знайти» за «даними» речами інші, «шукані» речі, що перебувають одна з одною і з даними речами в зазначених співвідношеннях». Роз’яснюючи це означення, С. О. Шатуновський говорить, що в кожній задачі розглядаються два класи речей (конкретних або абстрактних). Розв'язання задачі і полягає в переведенні речей другого класу в перший.

В. М. Брадіс пропонує і своє означення задачі. Він вважає означити задачу так: «Задачею слід називати всяке математичне запитання, для відповіді на яке не досить простого відтворення одного якогось результату, якоїсь теореми або означення з пройденого курсу» [30, с. 37].

Заманливо було б представити сукупність задач як щось, що існує в зовнішньому світі і не залежне від того, хто вирішує задачу. Проте такий підхід є тільки першим наближенням до проблеми. В зв'язку з цим Д. Берлайн справедливо відзначає, що «часто говорять про задачу як про щось, що існує в зовнішньому світі. Вона пред'являється суб'єкту на листі паперу, або він виявляє її десь в природі. Проте те, що складає задачу для одного індивідуума, може не бути задачею для іншого»[44, с.113]. Під задачею правильніше розуміти не просто зовнішню ситуацію, а ситуацію для суб'єкта, ситуацію, яка характеризується «не просто незнанням, а усвідомленням людиною того, що у відомому є щось невідоме, істотно важливе для нього (людини) і у той же час що його не можна відразу з'ясувати». Якщо провести аналіз поняття задачі, як одного з центральних понять сучасної психології, то можна зробити висновок про доцільність визначати задачу широко, а саме розуміти під задачею всяку ситуацію, що вимагає від суб'єкта (людини) деякої дії (дій).

Зупинимося в зв'язку з цим на понятті дії. Згідно прийнятим в психології переконанням для кожної дії існують:

– мета, тобто встановлювана суб'єктом (звичайно – усвідомлюване) вимога до стану деякого об'єкту (або сукупності об'єктів). На виконання цієї вимоги прямує дія;

– предмет, тобто об'єкт (або сукупність об'єктів), що перетворюється в ході дії. Предмет дії може бути матеріальним або ідеальним – залежно від цього дія є практичною або розумовою;

– мотив, тобто потреба, ради задоволення якої повинна бути досягнута мета дії;

– спосіб , за допомогою якого здійснюється дія. Спосіб дії характеризується послідовністю операцій, з яких складається дана дія.

Загальнонаукове поняття задачі можна розглядати як узагальнення описаного психологічного поняття. Задача в найзагальнішому сенсі – це ситуація, що визначає дії деякої розв’язуючої системи. Тут вже задачу вирішує необов'язково людина. Розв’язуючі системи можуть бути біологічними, технічними (наприклад, самоналагоджувальна система з еталонною моделлю), соціальними, нарешті, системами, до складу яких входять люди і автомати (машини). При такому розширенні поняття розв’язуючої системи дію також слід трактувати ширше, ніж прийнято в психології. Це перш за все стосується мети і мотиву дії. Мета розглядається тут як закодована у розв’язуючій системі вимога до стану предмету дії. Мотиву, як його розуміють в психології, в загальному випадку вказати не можна; можна лише говорити про особливості алгоритму функціонування розв’язуючої системи, що визначають спрямованість її дій. Предмет дії, іншими словами, перетворюваний об’єкт або сукупність об'єктів, разом з вимогою про переважний стан цього об'єкту можна розглядати при описі розв'язування задачі як єдине ціле, а саме як деяку систему, яку ми називатимемо задачною системою.

Ввівши поняття задачної і розв’язуючої систем, ми можемо уточнити загальне визначення задачі. Під задачею розумітимемо задачну систему, що розглядається в її відношенні до існуючої або потенційної розв’язуючої системи.

Обговорюване тут загальне поняття задачі ми називаємо кібернетичним. При цьому ми виходимо з того, що розв’язування задачі будь-якою розв’язуючою системою можна розглядати як процес управління, в якому задачна система грає роль керованого об'єкту, а розв’язуюча система – роль керівника.

Щоб здійснити розв’язання задачі, розв’язуюча система повинна волдіти засобами розв’язання (α) – числами, фігурами, поняттями, деяким набором операцій перетворення (складанням, множенням і т. п.), а також способами розв’язання (А) – послідовностями операцій, за допомогою яких розв'язується задача (сюди входять алгоритми, розпорядження, зразки рішень і т. п.). Спрощена модель задачі, якою ми користуватимемося в подальшому викладі, приведена на схемі 1.

схема 1

Задачна система		Розв’язуюча система
Предмет дії (О) Вимоги (Д)	—	Способи розв’язування задач (А) Засоби розв’язування задач (α)

Задача

Відомо, що під час формулювання поняття важливо знайти його ознаки. На думку А. М. Сохора, характерна особливість задач полягає у необхідності здогадки, евристики, на відміну від алгоритмічного характеру прикладів і вправ. І. Я. Лернер ознаками будь-якої задачі визначає такі: 1) наявність мети розв’язку, що диктується вимогою чи запитанням до задачі; 2) необхідність урахування умов і факторів, що являються передумовою застосування способу розв’язування і правильності самого розв’язку; 3) наявність чи необхідність виявлення і побудови способу розв’язування.

Змістом задачі І. Я. Лернер вважає проблему, в основі виникнення якої лежить суперечність між відомим і невідомим. Таке трактування задачі відрізняється від поширеного в педагогічних дослідженнях, де будь-яке завдання, що вимагає для свого виконання яких-небудь дій, розглядається як задача, а будь-яка пізнавальна дія – як розв’язування пізнавальної задачі [42, с.23].

1.2 Структура задач

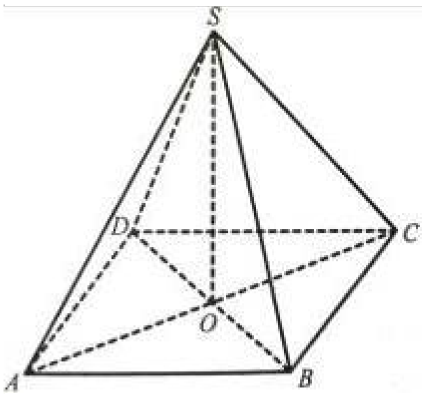
Розуміння задачі визначається не тільки розкриттям її змісту, але і її структурою. Розглянемо основні підходи до виділення структурних елементів. Так, Ю. Н. Кулюткин виділяє в структурі задачі два компоненти: а) умова, тобто наявну сукупність об'єктів, впорядкованих певними відносинами; б) вимога, вказуючи на те, що потрібно шукати в даній умові. Також два компоненти виділяє в задачі А. Ф. Эсаулов: умова і вимога. Умова розуміється як «певні інформаційні системи, з яких слід виходити при спробах розв'язуваннях», а вимога – як те, до чого треба прагнути або що потрібно досягти в процесі перетворення інформаційних систем». Л. М. Фрідман виділяє такі елементи в структурі задачі: умова, вимога і оператор. Під оператором задачі він розуміє «...сукупність тих дій (операцій), які треба провести над умовою задачі, щоб виконати її вимоги». Навряд чи правомірно включати в структуру задачі дії, які треба провести для розв'язування задачі.

Більш узагальнений підхід до розгляду питання про структуру задачі здійснений академіком В. М. Глушковим. Він в задачі розділяє задачну і розв'язуючу системи. До задачної системи відносяться умови і вимоги задач. У розв'язуючу систему входять наукові методи, способи і засоби, які в нашому розумінні є джерелами створення конкретних алгоритмів і евристик для розв'язку задач [42, с. 54].

Доцільно до визначення навчальної задачі підходити з позицій кібернетики, тобто разом з виділенням в задачі задачної системи виділяти і розв'язуючу систему. Такий підхід принципово по-новому визначить як процес розв'язування задач, так і процес навчання студентів їх рішенню. При цьому навчальна задача розглядається у вигляді системи, що включає задачну і розв'язуючу підсистеми, і визначається взаємодіями між ними. Задана підсистема як складова частина задачі існує об'єктивно і задається студентам завданнями і вправами в підручнику (може створюватися вчителем або учнем). Але задачі з'являється для суб'єкта за умови, якщо вона припускає для досягнення вимог ситуацій задачі певних перетворень із сторони розв'язуючого.

Не зупиняючись на значенні і функціях задач, хотілося б сказати про головне. В процесі формування у студентів системи знань, умінь і навиків йде формування системи способів діяльності. Володіння способами діяльності робить знання дієвими, активними.

Нехай, наприклад, учитель хоче закріпити формулу для обчислення об'єму піраміди. Для цього він може накреслити на дошці правильну чотирикутну піраміду і запропонувати студентам. Це можуть бути задачі з однією вимогою і різними умовами. Наприклад: «Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди SABCD



, якщо:

1) $AB = 4\,см$, $OS = 3\,см$;

2) $OM = 3\,см$, $OS = 5\,см$;

3) $OM = 3\,см$, $MS = 5\,см$;

4) $AB = \alpha$, $OS = b$;

5) $OM = \alpha$, $\angle OMS = \alpha$;

6) $OM = \alpha$, $OS = b$;

7) $OA = \alpha$, $\angle OAS = \beta$.»[5, с.64]

1.3 Класифікація задач

Розв'язування математичних задач є найбільш важкою частиною діяльності школярів при вивченні математики, навчання студентів цьому виду діяльності займає одне з головних місць в загальному процесі навчання. Школярів навчають математиці не тільки тому, щоб вони оволоділи певною сумою математичних знань, але й щоб ці знання вони могли ефективно використовувати в своєму подальшому житті для розв'язування різноманітних задач, що виникають в практичній діяльності. Засвоїти ж математичні знання і навчитися їх застосовувати можна, лише вирішуючи задачі, використовуючи при цьому поняття, теореми, залежності в різних ситуаціях.

Найбільш прийнятним нам представляється визначення, дане Л. Л. Гурової: «Задача – об'єкт розумової діяльності, що містить вимогу деякого практичного перетворення або відповіді на теоретичне питання за допомогою пошуку умов, що дозволяють розкрити зв'язки (відносини) між відомими і невідомими її елементами»[13, с.16].

У дослідженнях процесу навчання важливим є діяльнісний підхід. При організації процесу навчання студентів розв'язуванню математичних задач, вчитель в першу чергу стикається з такими питаннями: задачі якої складності запропонувати студентам; чи знайомі школярі з тими діями, які потрібно застосувати при розв’язуванні задач; чи володіють вони відповідними прийомами розумової діяльності і т.д. А це означає, що на озброєнні вчителя повинна бути ясна типологія задач, яка направляла б його при дозволі цих питань, при навчанні задач, що вчаться розв’язуванню. Крім того, «певна типологія задач може мати важливе практичне значення для тієї людини, яка при розв’язуванні задачі могла б організувати свою роботу, спираючись на ці відомості» [42, с. 39].

Дуже часто зустрічається ділення задач на обчислення, на доведення, на побудову, на дослідження і вивчається кожен вид. Перший тип задач характеризується тим, що часто геометричними міркуваннями і за допомогою алгебраїчних й арифметичних співвідношень дані про шуканий елемент доводить до числа. Другий тип задач характеризується тим, що, розв’язуючи їх, часто геометричними міркуваннями послідовно перетворюють умову задачі, наближаючи її до висновку, і встановлюють справедливість цього висновку або, навпаки, вважаючи висновок задачі правильним, наближаючи його в результаті послідовних перетворень до умови і стверджують її. Третій тип задач характеризується тим, що зміст їх не вичерпується переліком даних величин і формулювання того, що треба знайти. Тут істотне значення має вказівка на ті засоби, за допомогою яких задача розв’язуватиметься, на ті інструменти, якими виконуватиметься побудова шуканої фігури, бо від цього може змінюватися спосіб розв’язування задачі. Задачі четвертого типу найбільш споріднені із задачами на доведення, але відрізняються від них насамперед тим, що умови не містять готової відповіді. Розв’язуючи їх, студенти повинні встановити, чи рівні між собою дані фігури або їх окремі елементи, чи паралельні дані прямі лінії. Очевидно, що таке ділення не може бути інструментом в навчанні школярів розв’язуванню задач хоч би тому, що задачі цих видів не відрізняються один від одного рівнем складності, характером діяльності людини по їх розв’язуванню. У задачах на обчислення, побудову, дослідження найчастіше доводиться багато доводити; у задачах на обчислення, доведення і побудову доводиться багато досліджувати і т.д. Не покращує справи і назва цих видів задач іншими словами: задачі на розпізнавання, на конструювання, на пояснення і доведення і ін.

Окрім цього, ділять задачі на правильні, задачі з суперечливими даними, задачі із зайвими даними і розглядають методику навчання студентів розв’язуванню таких задач. Також ділять задачі на теоретичні і практичні, стандартні і нестандартні; задачі з дидактичними функціями, з пізнавальними і розвиваючими функціями і т.д [42, с. 47].

Розглядаючи задачі як об'єкти розумової діяльності студентів, важливо враховувати характер зв'язків між елементами задачі, співвідношення між відтворюючою і творчою діяльністю студентів при рішенні задач, яке багато в чому визначається вказаним зв'язками. Таким чином, ми ділимо математичні задачі на наступні три типи: 1) алгоритмічні задачі; 2) напівалгоритмічні задачі; 3) евристичні задачі.

До алгоритмічних задач ми відносимо такі задачі, які розв'язуються за допомогою безпосереднього застосування визначення, формули, доведеної теореми, для розв’язування яких є алгоритм, і на базі вивчених теоретичних положень і засвоєних практичних прийомів діяльності ці задачі необхідно вирішувати за допомогою алгоритму.

Алгоритм характеризується наступними істотними рисами: детермінірованість, масовість, результативність. Оскільки задача розглядаються нами в системі «задача – людина», а не в системі «задача – машина», то і підхід до алгоритмів тут повинен бути іншим. Людина мислить не такими елементарними операціями, які потрібні при складанні програм для машини. Зайве дроблення матеріалу психологічно і педагогічно недоцільно. Тому в дидактиці і психології говорять про ослаблення поняття алгоритму, замінюючи його поняттям «розпорядження алгоритмічного типа»; операції, що входять в такі розпорядження, можуть бути достатньо складними, але такими, що розуміються без праці виконавцем.

Відразу обмовимося, що підхід до типів задач повинен бути діалектичним. Є задачі, які не можна раз і назавжди віднести до алгоритмічних. Таке віднесення повинне враховувати багато моментів. Наприклад, до алгоритмічних задач ми не відносимо (з учбовою метою) ті задачі, для розв’язування яких можна побудувати алгоритм, але які недоцільно вирішувати за допомогою цього алгоритму, недоцільно знайомити студентів з даним алгоритмом з огляду на те, що і алгоритм складний, і клас учбових задач, що вирішуються з його допомогою, дуже малий. До алгоритмічних задач ми не відносимо, і такі, алгоритм розв’язування яких студенти не можуть застосувати на базі вивчених теоретичних положень і засвоєних практичних прийомів діяльності. Наприклад, задачі знаходження коренів рівняння третього ступеня загального вигляду можна вирішити за допомогою алгоритму, який задається відповідною формулою, але школярі не знають необхідних теоретичних відомостей, не вивчають цієї формули, отже, цю задачу не можна відносити до алгоритмічних в системі «задача – учень», що функціонує в процесі навчання в школі. Звідси ж витікає, що задача може міняти своє положення у вказаній системі залежно від впливу різних чинників [28, с.115].

Роль алгоритмів, а отже алгоритмічних задач в навчанні математиці дуже велика. Розвязування задач по алгоритму швидко і легко приводить до бажаного результату, тоді як незнання алгоритму може привести до численних помилок і великої втрати часу. Роль алгоритмічних задач полягає в тому, щоб навчити студентів важливим алгоритмам, безпосередньому застосуванню визначень, теорем, формул, навчити їх діяти стандартно у відповідних ситуаціях.

Учень, що добре засвоїв необхідні алгоритми розв’язування задач, може оперувати згорнутими знаннями при розв’язуванні інших складних задач. Йому не потрібно буде витрачати великих зусиль на пошук розв’язування часткових проблем, які розв'язуються по алгоритму; розумова діяльність школяра буде направлена на розв’язування інших проблем, тобто потрібна автоматизація деяких дій студентів. Ця автоматизація і досягається самостійним розв'язуванням алгоритмічних задач.

До напівалгоритмічних ми відносимо ті задачі, правила розв'язку яких носять узагальнений характер і не можуть бути повністю зведені до об'єднання елементарних актів; зв'язки між елементами цих задач легко знаходяться студентами. В межах одного і того ж узагальненого правила розвязування задачі відрізняються варіативністю умов. Наприклад, завдання на доведення перпендикулярності двох прямих за допомогою векторів. Узагальнене правило розв'язку таких задач можна описати таким чином: а) вибрати вектори *AB* і *CD,* де точки *A* і *B* належать одній прямій, а точки C і *D* – іншій; б) довести, що скалярний добуток векторів *AB* і *CD* рівний нулю.

Напівалгоритмічні задачі як під задачі містять алгоритмічні задачі. Для задач вказаного вище виду такими під задачами можуть бути: розкладання вектора на два не колінеарні або три не компланарні вектори; обчислення скалярного добутку двох векторів.

Вирішуючи напівалгоритмічні задачі, учень вчиться згортати знання, фіксуючи їх в свідомості крупними блоками. При цьому він вчиться застосовувати засвоєні алгоритми в різних ситуаціях; таким чином відбувається узагальнення вивченого матеріалу, узагальнення правил розвязування задач.

У різних ситуаціях одну і ту ж задачу можна відносити до напівалгоритмічних задач і можна не відносити до них (це визначається учбовою метою, а також іншими умовами). Наприклад, для розв'язування деякої задачі може існувати алгоритм, але він або спотворений, або часто дає нераціональний розв'язок і т.п. Зате якщо до цієї задачі підходити як до напівалгоритмічної, знаючи узагальнене правило її розв'язку, то діяльність студентів по її розв'язку може бути організована ефективніше.

Багато шкільних задач на побудову доцільно розглядати як напівалгоритмічні. В узагальнене правило розв'язування цих задач як орієнтири входять властивості зображень: 1) зображенням прямої є пряма (при відомому обмеженні); 2) зображенням паралельних прямих служать паралельні прямі; 3) відношення довжин паралельних відрізків рівне відношенню довжин їх зображень. Інший орієнтир узагальненого правила розв’язування вказаних задач (при розв’язуванні він використовується першим) такий: побудова фігури-оригіналу і виявлення у неї таких зв'язків, які повністю характеризують положення об'єкту, який потрібно побудувати, і зберігаються при зображенні. Виявлені зв'язки потім застосовуються для побудови потрібного об'єкту.

Зрозуміло, що зі всього класу цих задач можна виділити, наприклад, такі, де потрібно побудувати зображення центру кола, вписаного в трикутник, або якісь інші задачі і створити для їх розв’язку певний алгоритм; але, очевидно, робити це педагогічно і методично недоцільно, оскільки інакше число учбових алгоритмів буде настільки велике, що засвоїти їх учень не в змозі.

До евристичних ми відносимо ті задачі, для розв’язування яких необхідно виявити деякі приховані зв'язки між елементами умови і вимоги або знайти спосіб розв’язку, причому цей спосіб не є очевидною конкретизацією деякого узагальненого правила, відомого учню, або зробити і те і інше. Розв’язуючи такі задачі, учень повинен використовувати евристичні прийоми, методи. На думку Ю. Н. Кулюткина, важливою характеристикою евристичних методів є те, що вони «направлені на розкриття ще невідомих конкретно-змістовних відносин, через які визначається шуканий об'єкт».

При розв’язуванні евристичних задач учень використовує ті прийоми, які сформувалися в його попередній діяльності за розв’язуванням задач і які він усвідомлено переносить на дані задачі. До таких прийомів можна віднести наступні: переформування умови і вимоги, складання допоміжних задач, зіставлення проміжних висновків і вимог, розгляд розташування елементів фігури або всієї фігури в динаміці. Ці прийоми важливі для студента, вони направляють його думку, допомагають знайти розв’язок задачі, розвивають мислення.

Клас евристичних задач великий. Сюди входять задачі, для розв'язування яких потрібно виявити один-два приховані зв'язки між елементами задачі, і задачі, де таких зв'язків більше і де потрібно, мабуть, сконструювати новий спосіб дії.

Алгоритмічні задачі породжують відповідні класи напівалгоритмічних і евристичних задач. Студентів потрібно «провести» через розв'язок задач різних типів з тим, щоб у них накопичувався досвід діяльності на різних рівнях, щоб вони навчилися бачити загальне в способах розв'язку задач, вчилися діяти в нестандартних ситуаціях, опановували евристичними прийомами.

Приведена типологія задач дає ясний напрям діяльності вчителя по організації навчання студентів розв'язувати задачі. Вона допоможе оптимально підійти до питань співвідношення відтворюючих і творчих процесів в самостійних роботах школярів [46, с.27].

1.4. Принцип визначення фігури

Відомо, що уміння розв'язувати задачі є основним показником математичних знань. При вивченні математики, як і всякої іншої науки, ми спостерігаємо глибокий взаємний зв'язок і обумовленість між теорією і практикою: щоб навчитися розв'язувати задачі, тобто застосовувати теорію на практиці, необхідно зрозуміти перш за все суть самої теорії; проте глибоко зрозуміти суть теорії можна лише за умови успішного розв'язання достатньої кількості різноманітних за змістом задач.

Однією з головних причин тих методичних утруднень, які випробовує вчитель при навчанні розв'язувати задачі, і тих великих труднощів, які випробовує при розв'язуванні задач учень, є відсутність аналізу задач з погляду їх визначення і у зв'язку з цим – невміння бачити внутрішню структуру задач, невміння бачити процес утворення задач, а також процес її «розвитку» (від простішої задачі). Нижче поступово роз'яснюємо цю думку.

1. Називатимемо задачу визначеною, якщо за даними її елементам можна знайти всі її шукані елементи (величини), і число розв'язків r, ($r > 0$).

2. Елементи задачі називатимемо незалежними, якщо ніякий

з них не може бути виражений через інші.

3. Два або декілька рівнянь називатимемо незалежними, якщо будь-яке з них не є наслідком іншого (інших).

Згідно вченню про системи рівнянь можемо висловити наступне твердження, яке умовимося називати принципом визначення задачі: необхідною ознакою визначення задачі є наявність в її умові такого числа m даних елементів і такого числа p шуканих елементів, що між всіма $m + p$ елементами існують p незалежних рівнянь. Ця ознака опиниться і достатнім при дотриманні наступних основних додаткових вимог.

1. Хоч би однин розв’язок одержуваної системи p рівнянь (незалежних) з p невідомими повинно належати області допустимих для цих невідомих значень (інакше $r = 0$).

2. Дані m елементів повинні належати області допустимих для них значень. Наприклад, задача «Знайти катети прямокутного трикутника, якщо відома його гіпотенуза $c=6$ см і площа $S=10$ кв. см» невизначена, оскільки повинно бути $c^2 \geq 4S$ і ця умова не дотримується: $62 \square 4 \cdot 10$.

3. Нерідко для забезпечення достатності вказаної ознаки доводиться вимагати, щоб число m даних елементів було мінімальним або щоб ці елементи були незалежні, або щоб існуючі між цими елементами співвідношення (коли елементи залежні) мали місце насправді. Візьмемо задачу: «У трикутнику ABC дві медіани рівні m і n і утворюють з AC кути в 31°15' і 28°45'. Знайти площу трикутника ABC»[4, с.41]. Дані в цій задачі 4 елементи залежні, і задача стає невизначеною при таких числових значеннях елементів m і n, при яких не виконується відповідна залежність між всіма чотирма елементами.

Визначеними є майже всі задачі існуючих збірок. Відмітимо, що в умовах багатьох визначених задач можуть бути відсутніми дані числові значення величин (задачі без числових даних) або їх може бути дуже мало, якщо в цих умовах міститься достатня кількість таких ознак і властивостей шуканих величин, які все ж таки дозволяють знайти ці величини.

Ці ознаки і властивості шуканих величин часто виступають у вигляді різних обмежень, що накладаються на ці величини умовою задач, наприклад, належність шуканих величин певному класу чисел (цілих, раціональних і ін.), наявність між ними (або між ними і даними величинами) яких-небудь нерівностей і інші обмеження, що швидко звужують межі для шуканих величин.

Багато ознак і властивості шуканих величин, що містяться в умові задачі, не можуть бути безпосередньо перекладені мовою рівнянь. У такому разі задача може бути визначеною, коли число одержуваних для визначення невідомих величин рівнянь менше числа цього невідомих [4, с. 92].

1.5. Принцип визначення геометричної задачі.

1. Основними елементами многокутника прийнято називати його сторони і кути. Перші називають лінійними, а другі – кутовими елементами.

2. Всякий вираз *F,* що містить основні елементи фігури, називатимемо просто елементом фігури, якщо цей вираз є якою-небудь однозначною функцією від основних елементів, не рівною тотожно постійній величині.

3. Якщо вираз F є многочленом n-го вимірювання від основних елементів, то в цьому випадку вираз F називатимемо елементом n-го вимірювання.

4. У такому разі елемент нульового вимірювання називатимемо кутовим елементом. Звідси витікає, що якщо вираз містить тільки кути або тільки відносини двох елементів одного і того ж вимірювання (або те і інше), то воно буде кутовим елементом.

Очевидно кутові елементи (їх величини) не можуть ні в якому ступені характеризувати лінійні розміри фігури і є характеристиками лише форми фігури; за допомогою кутових елементів можна скласти собі уявлення про фігуру з точністю до подібності (до подібної їй фігури).

5. У всій решті випадків вираз F будемо називати метричним елементом, оскільки у всій решті випадків цей вираз в тій чи іншій мірі характеризуватиме лінійні розміри фігури.

Відмітимо, що визначення 2 і 3 ми можемо, очевидно, залишити в силі, якщо замість основних елементів, що фігурують в цих визначеннях, мати на увазі будь-які елементи.

6. Визначення 2 – 4 залишимо в силі для фігур, до складу яких входять дуги, кола, частини круга і інші фігури, що вивчаються в елементарній геометрії. Основними елементами «круглих» фігур будемо називати радіуси і дуги.

7. Якщо чисельне значення виразу F – елементу фігури – задано у вигляді числа або параметра, то елемент називатимемо заданим.

Проілюструємо сказане декількома прикладами (a, b, c, α, β, γ– основні елементи фігури).

1) Метричними елементами трикутника є: висота, медіана і бісектриса, радіус описаного (вписаного) кола, площа.

2) Кутовими елементами трикутника є: кут між висотою і бісектрисою, проведеними із заданої вершини, кут між радіусами описаного і вписаного кола, довільний ступінь відношення будь-яких відрізків – елементів трикутника.

3) Метричними елементами сектора є довжина його дуги, площа, радіус вписаного в нього кола і ін.

Принцип визначеності задачі стосовно геометричних задач сформулюємо, користуючись введеними визначеннями, таким чином: геометрична фігура визначається (фіксується) задачею деякого кінцевого числа m її незалежних елементів.

Отже, якщо серед n різних між собою даних елементів фігури є таке число $m < n$ незалежних елементів, які визначають фігуру, то, виразив через ті, що приймаються за основу m елементів решту $n - m$ елементів, одержимо $n - m$ рівнянь, з яких знайдуться $n - m$ елементів (у функції від вибраних m елементів).

Очевидно також, що між даними $n>m$ елементами існує $n - m$ і не більше незалежних рівнянь (співвідношень) [28, с.122].

1.6. Психологічна сутність процесу розв'язування задач

Процес розв'язування задач із психологічної точки зору являє собою послідовний перехід суб'єкта від однієї проблемної ситуації до іншої шляхом моделювання першої ситуації й прийняття побудованої моделі за об'єкт своєї діяльності. Суб'єкт будує послідовність моделей спочатку складеної або прийнятої задачі. При цьому перехід від проблемної ситуації до її моделі відбувається шляхом децентрації суб'єкта, тобто уявного виходу суб'єкта із ситуації, її активного вивчення ним зі сторони.

У випадку, коли задача стає уявною моделлю, ця децентрація приймає форму уявного роздвоєння суб'єкта: він вивчає свою власну думку, її перетворення, процес її протікання. Інакше кажучи, суб'єкт ніби роздвоюється на дві істоти: одна з них будує й перетворює уявні моделі вихідної задачі, а друга подумки вивчає моделі, які отримуються й співвідносить їх з моделлю кінцевої або проміжної мети діяльності.

Культура поводження при ознайомленні із задачею є, по суті справи, оволодіння деякою стратегією й тактикою пошуку розв'язування задачі.

Дотепер вважається, що єдиний метод формування вміння розв'язувати задачі – це практика в розв'язуванні великої кількості задач. Відомий методист Д. Пойя так і радить: "Якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!" Дотримуючись цієї поради, учителі математики, фізики й інших предметів пропонують студентам величезну кількість задач і витрачають на їх розв'язування не менше половини всього навчального часу, не враховуючи часу домашньої роботи студентів, що складається в основному з розв'язування задач. А результати цієї титанічної роботи більш ніж скромні: багато студентів так і не опановують загальні підходи їхнього розв'язування й, зустрівшись із завданням незнайомого виду, губляться й не знають, як до нього підступитися [23, с.74].

Культура розв’язування задач полягає в тому, що пошук розв’язування відбувається на базі глибокого й всебічного попереднього аналізу задачі, що кожна із численних спроб обґрунтовується і її результати аналізуються, що після знаходження правильного розв’язання виробляється ретроспективний аналіз із метою виявлення загальних методів, пошуку більш раціонального способу розв’язування, якщо це можливо.

Такій культурі можна й потрібно вчити студентів, починаючи з початкових класів.

Головне – це зробити самі задачі, їхню структуру й особливості предметом особливого вивчення й засвоєння.

Для цього необхідно використати особливу систему вправ, де конкретні задачі є лише матеріалом, а метою (вимогою) є послідовно: 1) розчленовування задачі на елементарні умови й вимоги; 2) виявлення зв'язків і залежностей між окремими умовами (даними) і між даними й вимогою; 3) побудова схематичної моделі задачі; 4) перекодування задачі на іншу мову. Неодмінною умовою є те, що у всіх цих вправах сама задача не розв’язується, щоб не відволікати студентів від головного ─ аналізу задачі.

Особливу роль у формуванні культури розв’язування задачі грає заключний, ретроспективний аналіз проведеного розв’язування з метою виявлення й засвоєння загальних методів і прийомів розв’язування задачі.

Зазначені навчальні задачі повинні використовуються протягом всіх років навчання й стати основою для формування навичок і вмінь розв’язування задач. Сам процес формування здатностей і вмінь повинен носити цілеспрямований і керований характер. Необхідно чітко представляти, який компонент загальних умінь розв’язувати задачі формується тепер за допомогою певної системи навчальних і конкретно-практичних задач, яку роль при цьому грає кожне з використовуваних задач.

Потрібно змінити й сам підхід до задач. Замість того, щоб бездумно розв’язувати велику кількість задач, корисніше розв’язувати в кілька разів меншу кількість задач, але при цьому саме розв’язування повинне містити глибоке вивчення їх умови, сутності їхнього розв’язування, виявлення загальних методів і прийомів. Задача й механізми їхнього розв’язування повинні стати об'єктами глибокого й постійного вивчення протягом усіх років навчання. Особлива увага повинна бути також приділена формуванню культури розв’язування, розумного підходу до пошуків і конструювання методів розв’язування, виробленню дисциплінованого мислення в процесі розв’язування, вихованню естетичного погляду на розв’язування, що припускає оцінку цього розв’язання не тільки з погляду його бездоганної логічної правильності, але й краси.

Кожний школяр у процесі навчання повинен набути вміння вчитися самостійно. Воно включає, зокрема, вміння ставити навчальну задачу й розв’язувати її.

Формулювання задачі учнем пов'язане з пошуком загального способу розв’язування цілого класу задач, перебором варіантів розв’язування окремо взятої, конкретної задачі. Розв’язування задачі повинне здійснюватися на базі глибокого й всебічного попереднього аналізу задачі, необхідний і аналіз ходу розв’язання, у тому числі ретроспективний, пошук найбільш раціонального. Учитель, формуючи в школярів таку культуру розв’язування задач, домагається позитивних результатів, не перевантажуючи студентів більшим обсягом завдань. Слід також зазначити, що в процес навчання розв’язуванню задач учитель може додати багато елементів творчості. Один з ефективних творчих прийомів сприйняття самим учителем простого й зрозумілого для нього завдання, як нового й дивного, тобто спроба сприйняття проблеми очима дитини [25, с.204].

1.7. Структура процесу розв'язування задач

Якщо під процесом розв'язування задачі розуміти процес, що починається з моменту умови задачі до моменту повного завершення її розв'язування, то, очевидно, що цей процес складається не лише з викладу вже знайденого розв'язку, а з ряду етапів, одним з яких і являється виклад розв'язування.

Очевидно, що, отримавши задачу, перше, що треба зробити, – це розібратися в тому, що це за задача, які її умови, в чому полягають її вимоги, тобто провести аналіз задачі. Аналіз і складає *перший етап* процесу розв'язування задачі.

Цей аналіз потрібно якось оформити, записати. Для цього використовуються різного роду схематичні записи задач, побудова яких складає *другий етап* процесу розв'язування.

Аналіз задачі і побудова її схематичного запису необхідно головним чином для того, щоб знайти спосіб розв'язування цієї задачі. Пошук цього способу складає *третій етап* процесу розв'язування.

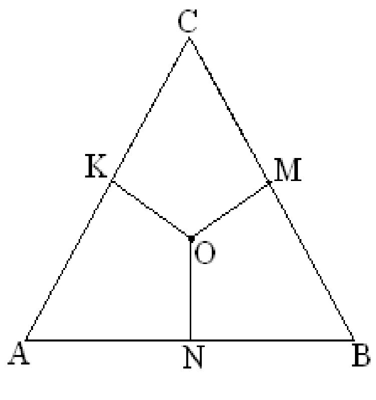
Коли спосіб розв'язування задачі знайдений, його треба виконати, – це буде *четвертий етап* процесу розв'язування – етап виконання розв'язку задачі.

Після того, як розв'язування здійснене і викладене, необхідно переконатися, що це розв'язування правильне, що воно задовольняє усім вимогам задачі. Для цього проводять перевірку розв'язування, що складає *п'ятий етап* процесу розв'язування задачі.

При розв'язуванні багатьох задач, окрім перевірки, необхідно ще провести дослідження задачі, а саме встановити, за яких умов задача має розв’язок і притому скільки різних розв’язків у кожному окремому випадку; за яких умов задача взагалі не має розв'язку і т. д. Усе це складає *шостий етап* процесу розв'язування задачі.

Переконавшись в правильності розв'язування і, якщо потрібно, провести дослідження задачі, необхідно чітко сформулювати відповідь задачі, – це буде *сьомий етап* процесу розв'язування задачі.

1. Нарешті, в учбових і пізнавальних цілях корисно також виробити аналіз виконаного розв'язування, зокрема встановити, чи немає іншого, раціональнішого способу розв'язування, чи не можна задачу узагальнити, які висновки можна зробити з цього розв'язування і т. д. Усе це складає останній *восьмий етап* розв'язування задачі [48, с.54].



Отже, увесь процес розв'язування задачі можна розділити на вісім етапів:

1-й етап – аналіз задачі;

2-й етап – схематичний запис задачі;

3-й етап – пошук способу розв'язування задачі;

4-й етап – виконання розв'язку задачі;

5-й етап – перевірка розв'язування задачі;

6-й етап – дослідження задачі;

7-й етап – формулювання відповіді задачі;

8-й етап – аналіз розв'язування задачі.

Наведена схема дає лише загальне уявлення про процес розв'язування задачі як про складний і багатоплановий процес.

Задача. Знайти радіус вписаного кола в рівносторонній трикутник із стороною *a* [3, с.42].

1. Аналіз задачі. Дана задача є геометричною задачею на обчислення з параметрами (буквеними даними). Тому в першу чергу потрібно встановити можливі області зміни параметрів. Очевидно, що *a* – довжина сторони трикутника – може бути будь-яким додатнім числом, тобто

$$a > 0.$$

2. Схематичний запис задачі. Побудуємо заданий в задачі рівносторонній трикутник.

Відомо, що центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис. А в рівносторонньому трикутнику висота є і бісектрисою, і медіаною. Для того щоб побудувати висоти трикутника, потрібно з вершин трикутника опустити перпендикуляри на протилежні сторони. Утворилася точка *O*, яка є центром кола, вписаного в трикутник. Тоді з точки *O* опускаємо перпендикуляри на сторони. Утворені відрізки *OK*, *OM* і *ON* є радіусами вписаного кола в рівносторонній трикутник.

Виходячи з цього, умову задачі можна записати так.

Дано: 1) *ABC* – трикутник; 2) $AB=BC=CA=\alpha$;

Знайти: *r*.

3 – 5. Пошук і здійснення розв'язку. Дослідження задачі.

По відомій формулі маємо:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c},$$

Оскільки ΔABC рівносторонній трикутник зі стороною a, то

$$h_a=h_b=h_c=h.$$

Тоді $\frac{1}{r}=\frac{1}{h}+\frac{1}{h}+\frac{1}{h}$; $\frac{1}{r}=\frac{3}{h}$ $\Rightarrow$

$$r=\frac{h}{3}. \qquad (1)$$

Залишилося знайти h. Розглянемо трикутник ANB. Так як BN – висота, медіана, бісектриса, то $\angle BNA=90^0$, а

$$AN=\frac{AC}{2}=\frac{a}{2}. \qquad (2)$$

За наслідком з теореми Піфагора знайдемо BN.

$$BN=\sqrt{AB^2-AN^2}. \qquad (3)$$

Підставимо вираз (2) у формулу (3), отримаємо:

$BN=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}$ $\Rightarrow$

$$BN=\frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad (4)$$

Підставивши вираз (4) у формулу (1), отримуємо, що

$$r=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

6. Перевірка. В даному випадку перевірка розв'язування зводиться до того, щоб переконатися, що по знайдених формулах дійсно можна знайти r таке, яке належить області його визначення. Очевидно, що повинна дотримуватися лише одна умова: $r > 0$. Розглядаючи отриману формулу для r і враховуючи вказані при цьому умови задачі, легко переконуємося у виконанні вказаної умови.

7. Відповідь: при $\alpha>0$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

8. Аналіз розв'язування. Переглядаючи уважно проведене розв'язування, помічаємо, що при розв'язуванні подібних задач важливо заздалегідь при аналізі задачі встановити області зміни параметрів.

Отже, при розв’язуванні подібних задач потрібно аналізувати кожен крок розв'язування з точки зору його здійснимості за заздалегідь знайдених або заданих умов і при необхідності ці умови уточнювати, тим самим звужуючи області зміни параметрів.

При фактичному розв'язуванні вказані там етапи зазвичай не відокремлені один від одного, а переплітаються між собою. Так, в процесі аналізу задачі зазвичай здійснюється і пошук розв'язування. При цьому повний план розв'язування встановлюється не до здійснення розв'язку, а в його процесі. Тоді пошук розв'язування обмежується лише знаходженням ідеї розв'язування. Порядок етапів також іноді може мінятися [48, с.86].

РОЗДІЛ 2. ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВИХ ДІЙ У СТУДЕНТІВ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ І-ІІ РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ

2.1. АНАЛОГІЯ

Важливість аналогії у математиці, можна судити по наступному вислову відомого польського математика Стефана Банаха: «Математик - це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями; кращий математик той, хто встановлює аналогії доказів; сильніший математик той, хто помічає аналогії теорій; але можна собі уявити і такого, хто між аналогіями бачить аналогії ».[4, с.25]

Аналогії поділяються на:

1) *просту* аналогію, при якій за подібністю об'єктів в деяких ознаках укладають про подібність їх в інших ознаках;

2) *поширену* аналогію, коли він з подібності явищ роблять висновок про подібність причин.

У свою чергу, проста і поширена аналогія може бути:

а) *суворою* аналогією, коли в ознаки порівнюваних об'єктів знаходяться у взаємній залежності;

б) *несуворою* аналогією, коли ознаки порівнюваних об'єктів не в явній взаємній залежності.

Аналогія є, мабуть, одним з найбільш поширених методів наукового дослідження. Широке застосування аналогій часто призводить дослідника до більш-менш правдоподібного припущення про властивості досліджуваного об'єкта, які можуть бути потім підтверджені або спростовані досвідом або суворішими міркуваннями.

Однак слід пам'ятати, що широке застосування аналогії у процесі навчання математики є одним з ефективних прийомів, здатних пробудити в студентів живий інтерес до предмету, долучити їх до того виду діяльності, який називають дослідницьким. Крім того, широке застосування аналогії дає можливість легко і міцно засвоїти школярам навчальний матеріал, так як часто забезпечує уявне перенесення певної системи знань і умінь від відомого об'єкта до невідомого (що, до речі кажучи, сприяє також і актуалізації знань).

Не менш корисно виховувати у школярів звичку свідомо залучати аналогію у пошуку способів вирішення запропонованого ним важкого завдання. У цьому випадку можна рекомендовати їм наступний загальний план роботи над завданням.

1. Підібрати завдання, аналогічне даному, тобто таке, у якого були б, у порівнянні з даним, подібні умови і подібний висновок; допоміжне завдання має бути простіше від даного або таке, яке відоме.

2. Вирішити допоміжне завдання; потім провести аналогічні міркування при розв'язанні даної задачі.

Щоб школярі могли краще засвоїти цей прийом розв'язання завдань, доцільно час від часу пропонувати їм завдання, при розв'язанні яких метод аналогії виявляється корисним. При цьому спочатку корисно пропонувати студентам не одне, а два (або більше) взаємозалежні за змістом завдання, формулюючи умови кожної з них одночасно.

Підіб'ємо деякі підсумки. Насамперед відзначимо, що індукція, дедукція і аналогія, будучи основними видами умовиводів, є насамперед методами наукового дослідження, а також досить ефективними методами навчання математики.

У процесі мислення (і в процесі навчання) індукція, дедукція і аналогія взаємодіють настільки тісно, що говорити про них роздільно має сенс тільки з міркувань їх детального вивчення.

Єдність індуктивних і дедуктивних умовиводів і умовиводів за аналогією відображено і в багатьох роботах по логіці, пов'язаних з проблемою класифікації умовиводів. З цієї точки зору видається вельми цікавою робота А. И. Уемова, цитатою з якої ми і підведемо остаточний підсумок:

«Незалежно від підстав, виправдувальних перехід від посилок до висновку, всі висновки можна поділити на дві групи.

В одній з них класи предметів, до яких відносяться посилки і висновок, сумісні. Більше того, один з цих класів є підкласом іншого. До цього типу висновків ставляться дедукція і індукція, які можна визначити наступним образом:

а) дедукція - умовивід, висновок якого належить до предметів, що не виходять за рамки того класу речей, про який йшла мова в посилках;

б) індукція- умовивід, висновок якого належить до більшому колу предметів, ніж той, про який йдеться в посилках.

В іншому типі висновків предмети, до яких відносяться посилки і висновок, різні. Саме такий характер висновків по аналогії. Таким чином, можна дати наступне визначення:

в) аналогія - умовивід, в якому висновок відноситься до іншого предмета, ніж той, про який йдеться в посилці ».[47, с.87]

Аналіз діяльності застосування аналогії в різних конкретних ситуаціях дозволив виділити наступні дії:

- встановити аналоги різних заданих об'єктів і відношень;
- знаходити відповідні елементи в заданих аналогічних пропозиціях;
- встановити пропозицію, аналогічне даному;
- складати завдання, аналогічні заданим, тобто завдання, що мають з даного подібну умова або висновок;
- проводити міркування при розв'занні задачі за аналогією з розв'занням подібного завдання.

Формування зазначених умінь можна здійснювати вже в V-VI класах. Наприклад, при вивченні теми «Прямокутний паралелепіпед» в V класі слід звернути увагу студентів на те, що фігурою, схожою з прямокутним параллелепіпедом, є прямокутник. Далі виясняються відповідні елементи цих фігур і відношення між ними: грань прямокутного паралелепіпеда (прямокутник) сіввідносна стороні прямокутника (відрізку), протилежні сторони прямокутника рівні - протилежні грані прямокутного паралелепіпеда дорівнюють (останнє визначається студентами при розгляді моделі прямокутного паралелепіпеда), у прямокутника два виміри: довжина і ширина, а у прямокутного паралелепіпеда три виміри: довжина, ширина і висота. Після цього можна повідомити студентам, що такі фігури будемо вважати аналогічними, і ввести термін «аналогія».

При вивченні куба, застосовуючи вже нову термінологію, студентам можна задати питання:

1. Назвіть фігуру, аналогічну кубу. (Квадрат.)

2. Які елементи квадрата аналогічні граням куба? У чому їх схожість? (Усі грані куба - рівні квадрати, усі сторони квадрата - рівні відрізки.)

3. Скільки вимірів має квадрат? куб? Що у них спільне? (Вимірювання квадрата рівні між собою. Вимірювання куба теж рівні між собою.)

Встановивши, що 1 см - це довжина відрізка, а 1 $см^2$ - це площа квадрата, сторона якого 1 см, можна виконати вправи:

1. Довжина відрізка 3 дм. Чому дорівнює площа квадрата, ана¬логічного цьому відрізку? (9 дм.)

2. Площа квадрата 25 $см^2$. Накресліть відрізок, аналогіч¬ние! цього квадрату. (Довжина відрізка дорівнює 5 см.)

Аналогічно при вивченні теми «Об’єми» корисно установити аналогію між одиницями об’ємів та одиницями площ.

Багатий матеріал для формування прийому аналогії має геометрія. У VII-IX класах це можна робити при вивченні різного матеріалу. Основну увагу слід звернути на вироблення умінь виділяти відповідні елементи в аналогічних задачах і твердженнях, складати завдання, аналогічну даної, переносити міркування при виконанні одних вправ на виконання вправ, аналогічних до них.

Приклади.

1. Прямокутник аналогічний прямокутному паралелепіпеду. Насправді, відношення між сторонами прямокутника і відношення між гранями паралелепіпеда:

Кожна сторона прямокутника паралельна і рівна одній другій сторони і перпендикулярна до інших.

Кожна грань прямокутного паралелепіпеда паралельна і рівна одній другій грані і перпендикулярна до інших.

Домовимося назвати сторону «граничним елементом» прямокутника і грань – «граничним елементом» паралелепіпеда. Отді два попередніх твердження ми зможемо об’єднати в одному твердженні до двох фігур:

Кожен граничний елемент паралельний і рівний одній другій граничного елемента і перпендикулярний до інших граничних елементів.

Таким чином, ми виразили визначення відношення, які виявилися загальними для двох порівняльних систем об'єктів – стрін прямокутника і граней прямокутного паралелепіпеда. Аналогія між цими системати виражається в загальності відношень[38, с.44].

2. Аналогію між відрізком, трикутником і тетраедром ми виявили , порівнюючи ці фігури з різних точок зору. Відрізок належить деякій прямій, трикутник – площині, тетраедр – простору. Прямолінійний відрізок є найпростіша одновимірна обмежена фігура; трикутник є найпростіший многокутник; тетраедр – найпростіший многогранник.

Відрізок має два граничних елементи нульового значення (дві граничні точки); внутрішні точки відрізка утворюють одновимірну множину.

Трикутник має три мулевих і три одновимірних граничних елементи(три вершини, три сторони); внутрішні точки утворюють двовимірну множину.

Тетраедр має чотири мулевих, шість одновимірних і чотири двовимірні граничні елементи(чотири вершини, шість ребер, чотири грані); внутрішні точки утворюють тривимірну множину.

Складемо таблицю з цих чисел. Останні ствпці містять число нуль-, одно-, дво-, і тривимірні елементи; останні рядки відносяться до відрізку, трикутнику, тетраедру:

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Уважно придивившись до цієї таблиці наводить нас на схожість її до частини трикутника Паскаля. Ми визначили закономірність, що пов'язує відрізок, трикутник, тетраедр [36, с.49].

2.2. КОНСТРУЮВАННЯ КОНТРПРИКЛАДІВ

Формуванню критичності мислення школяра сприяють завдання по знаходженню (конструюванню) контрприкладів до помилкових тверджень.

Виховуючи критичність, доказованість в міркуваннях, ми тим самим закладаємо фундамент для свідомого засвоєння школярами учбового матеріалу, для отримання міцних знань. Вчитель не повинен упускати можливості давати студентам завдання самостійного конструювання контрприкладів.

Якщо кожен раз, коли вимовлене неправильне твердження, написана неправильно формула, дано неправильне визначення, студенти конструюватимуть контрприклади, то це навчить критичному відношенню до одержуваної інформації дозволить студентам вчасно уникати помилок, виправити неправильні уявлення.

Майбутнього вчителя математики потрібно знайомити з можливими помилками студентів і вчити конструювати до них контрприклади.

До помилки $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$ можна навести контрприклад $\lg(1+9)=1$, але $\lg 1+\lg 9=\lg 9\neq 1$.

До помилки $(a>b \; i \; c>d) \Rightarrow (a-c>b-d)$ наводимо такий контрприклад: 9 > 8 і 7 > 3, але невірно $9-7>8-3$.

До помилки $(\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}) \Rightarrow (\vec{b}=\vec{c})$ можна навести контрприклад: нехай $\vec{b}=\vec{0}$ і $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$, тоді $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, але $\vec{b}\neq\vec{c}$.

Вправи.

Побудуйте контрприклади до наступних тверджень.

1. Сума двох ірраціональних чисел є число ірраціональне.
2. Два кути є суміжними, якщо одна сторона у них спільна, а дві інші є протилежними променями.
3. З двох кутів, вписаних в одне і те ж коло, більшу величину має той, який опирається на більшу хорду.

Контрприклади до тверджень 1-3.

1. $\sqrt{2}$ і $3-\sqrt{2}$ – ірраціональні числа, але сума їх – раціональне число.
2. Кути *AOB* і *COB* (рис. 4), відмічені дугами, не є суміжними [6, с.15].

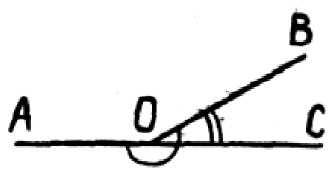


Рис. 4

3. $|KM| > |AC|$, але $\angle KLM < \angle ABC$ (рис. 5).

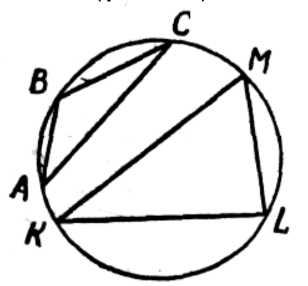


Рис. 5

2.3. СКЛАДАННЯ ТВЕРДЖЕНЬ, ОБЕРНЕНИХ ДАНИМ

Одним із способів отримання нових теорем є конструювання теорем, обернених даним.

Складання і доведення обернених теорем важливе для виявлення основних властивостей об'єкту, що цілком визначають його. Так, наприклад, у паралелограма протилежні сторони попарно конгруентні, і ця властивість – попарна конгруентність протилежних сторін чотирикутника – визначає паралелограм.

Теорему часто формулюють у вигляді твердження, що складається з умови *A* і висновку *B*: $A \Rightarrow B$. Теорема, обернена даній, одержується шляхом заміни умови висновком, а висновку умовою даної теореми і має форму $B \Rightarrow A$.

Розглянемо наступну теорему:

1. Якщо в чотирикутнику *ABCD,* вписаному в коло радіусу *R,* діагоналі взаємно перпендикулярні, то $|AD|^2 + |BC|^2 = 4R^2$.

Цю теорему можна записати так: $(A \wedge B) \Rightarrow C$, де судження *A*, *B* і *C* читаються наступним чином.

A: чотирикутник *ABCD* вписаний в коло радіусу *R;*

B: діагоналі чотирикутника *ABCD* взаємно перпендикулярні;

C: для чотирикутника *ABCD* виконується $|AD|^2 + |BC|^2 = 4R^2$.

Теорема, обернена даній, матиме вигляд $C \Rightarrow (A \wedge B)$ і читатиметься таким чином:

Якщо для чотирикутника $ABCD$ виконується $|AD|^2 + |BC|^2 = 4R^2$, то чотирикутник $ABCD$ можна вписати в коло радіусу R, і діагоналі його взаємно перпендикулярні.

Легко бачити, що ця теорема не вірна.

Теорему 1 можна записати і у вигляді $B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$, оскільки вислови $(A \wedge B) \Rightarrow C$ і $B \Rightarrow (A \wedge C)$ рівносильні; обидва вони приймають значення «хиба» в єдиному випадку, коли A — істинний, B — істинний, C — хибний.

Тоді теорема, обернена даній, запишеться $(A \Rightarrow C) \Rightarrow B$ і вона буде вірна.

Отже, деякі теореми, залежно від того, як їх побудувати, мають декількох обернених; одні з них можуть бути вірні, інші — ні.

Якщо розглядати тільки чотирикутники, вписані в коло радіусу R, то теорему 1 можна записати коротше: $B \Rightarrow C$. Теорема, обернена даній, у такому разі, матиме вигляд: $C \Rightarrow B$.

Теорема, обернена даній, як ми вже відзначали, не завжди може бути вірною, і тому студенти або студенти повинні уміти побудувати контрприклад, що доводить її помилковість.

Для теореми «якщо дві паралельні площини перетинаються третьою площиною, то прямі перетину паралельні», оберненою буде така: «якщо прямі перетину двох площин третьою паралельні, то паралельні і ці площини».

Контрприкладом до оберненої теореми служать дві площини, які перетинаються по прямій, паралельній третій площині, яка їх перетинає. Ця остання площина перетинає їх по паралельних прямих, тоді як площини не паралельні[6, с.17].

Вправи.

Доведіть наступні теореми. Сформулюйте теореми, обернені даним, і доведіть їх.

1. Якщо трикутник рівнобедрений, то сума відстаней від будь-якої точки основи до бічних сторін трикутника постійна.

2. Якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то суми квадратів довжин протилежних сторін його рівні.

3. Якщо чотирикутник – трапеція, то довжина середньої лінії рівна півсумі довжин основ.

4. Якщо чотирикутник – трапеція, то площа його рівна добутку довжини однієї із непаралельних сторін на довжину перпендикуляра, проведеного із середини іншої непаралельної сторони до першої.

5. Якщо в трикутнику *ABC* довжини сторін зв'язані співвідношенням $a^2+b^2=5c^2$, то медіани, проведені до сторін *AC* і *BC,* взаємно перпендикулярні.

6. Якщо кути трикутника конгруентні, то конгруентні і бісектриси цих кутів.

7. Якщо трикутник прямокутний нерівнобедрений, то бісектриса прямого кута є і бісектрисою кута, утвореного медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи.

Покажіть, що теореми, обернені наступним, невірні.

8. Якщо точка лежить на бісектрисі кута, то вона рівновіддалена від його сторін.

9. Якщо в шестикутник *ABCDEF* можна вписати коло, то $|AB| \square |CD| \square |EF| = |BC| \square |DE| \square |AF|$.

Розв'язання.

1. Нехай *M* – довільна точка основи *AC* трикутника *ABC*. Тоді $S_{\Delta ABM}+S_{\Delta CBM}=S_{\Delta ABC}$. Але, так як $|AB|=|BC|$, то звідси слідує, що сума відстаней від точки *M* до бічних сторін трикутника *ABC* постійна і не залежить від положення точки *M.*

Обернена.

1*. Якщо в трикутнику сума відстаней від будь-якої точки основи до бічних сторін постійна, то цей трикутник рівнобедрений.

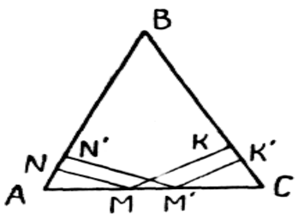


Рис. 6

Нехай M і M' довільні різні точки основи AC (рис. 6) і $|MN| + |MK| = |M'N'| + |M'K'|$ де $[MN]\perp[AB]$, $[MK]\perp[BC]$, $[M'N']\perp[AB]$ і $[M'K']\perp[BC]$.

Тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(|AB|\cdot|MN| + |BC|\cdot|MK|) = \frac{1}{2}(|AB|\cdot|M'N'| + |BC|\cdot|M'K'|).$$

Звідси $|AB|(|MN| - |M'N'|) = |BC|(|M'K'| - |MK|)$ і так як $|MN| - |M'N'| = |M'K'| - |MK| \neq 0$, то $|AB| = |BC|$.

2. Доведення другої теореми очевидне.

Обернена.

2*. Якщо суми квадратів довжин протилежних сторін чотирикутника рівні, то діагоналі його взаємно перпендикулярні.

Доведення.

Нехай $\angle AOB = \alpha$ (рис. 7) і $|AO| = m,\ |CO| = n,\ |BO| = p,\ |DO| = q$.

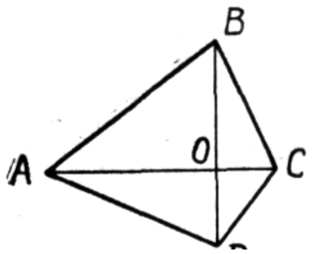


Рис. 7

Тоді по теоремі косинусів

$$|AB|^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\alpha,$$

$$|CD|^2 = n^2 + q^2 - 2nq\cos\alpha,$$

$$|BC|^2 = n^2 + p^2 + 2np\cos\alpha,$$

$$|AD|^2 = m^2 + q^2 + 2mq\cos\alpha.$$

Звідси $|AB|^2 + |CD|^2 - |BC|^2 - |AD|^2 = -2(pm + nq + mq + np)\cos\alpha$. Так як $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$, то $(mp + nq + mq + np)\cos\alpha = 0$.

Отже, $\cos\alpha = 0$, так як $mp + nq + mq + np \neq 0$. Тому $\alpha = 90°$.

Для неопуклого чотирикутника доведення таке ж.

3. Доведення цієї теореми відоме з курсу геометрії восьмирічної школи[6, с.23].

Обернена.

3*. Якщо довжина відрізка, що сполучає середини двох протилежних непаралельних сторін чотирикутника, рівна півсумі довжин двох інших сторін чотирикутника, то цей чотирикутник – трапеція.

Доведення.

Нехай в чотирикутники *ABCD (AB)* $\nparallel$ *(CD),* точка *M* – середина $[AB]$ і N – середина $[CD]$. Тоді $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Так як $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AD}\right|\right) = \left|\overrightarrow{MN}\right|$ і рівність виконується тільки тоді, коли $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, то *ABCD* – трапеція.

4. Нехай *M* – середина бічної сторони *AB* трапеції і $[MK]\perp[CD]$ (рис. 8).

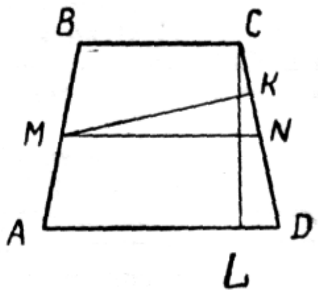


Рис. 8

Проведемо середню лінію трапеції [*MN*] і висоту $[CL]$. Кути *MNC* і *ADC* конгруентні, позначимо їх величину через α. Тоді

$|MN| = \frac{|MK|}{\sin\alpha}$, а $|CL| = |CD|\cdot\sin\alpha$.

Площа трапеції

$$S = |MN|\cdot|CL| = \frac{|MK|}{\sin\alpha}\cdot|CD|\sin\alpha = |MK|\cdot|CD|$$

і теорема доведена.

Обернена.

4*. Якщо площа опуклого чотирикутника рівна добутку довжини однієї з непаралельних сторін на довжину перпендикуляра, проведеного з середини протилежної сторони до першої, то цей чотирикутник – трапеція.

Доведення.

Нехай $S_{ABCD} = |CD| \cdot |MK|$, де M – середина [AB] і $[MK] \perp [CD]$ (рис. 9).

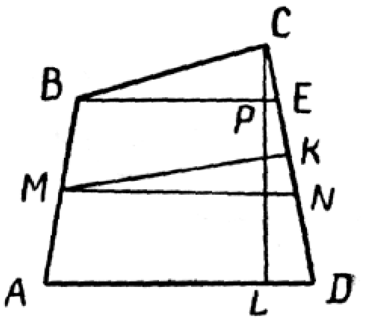


Рис. 9

Проведемо $[MN] \parallel [AD]$ і $[CL] \perp [AD]$. Тоді $S_{ABCD} = |MN| \cdot |CL|$. Проведений $(BE) \parallel (AD)$, $E \in (CD)$ і нехай $P = (BE) \cap (CL)$.

$S_{ABCD} = |MN| \cdot |CL| = |MN| (|PL| \pm |CP|) = |MN| \cdot |PL| \pm |MN| \cdot |CP|$

(знак «+» відповідає випадку, коли відстань від C до (AD) більша, ніж відстань від B до (AD) і знак «—» – в протилежному випадку). Але добуток $|MN| \cdot |PL|$ рівний площі трапеції $ABED$. Отже, $|MN| \cdot |CP| = S_{\Delta BCE}$, звідки $|MN| \cdot |CP| = \frac{1}{2} |BE| \cdot |CP|$. Звідси робимо висновок, що $|CP| = 0$, та $|MN| \neq \frac{1}{2} |BE|$.

Значить, $(BC) \parallel (AD)$ і $ABCD$ – трапеція.

5. Нехай $[AA_1]$ і $[BB_1]$ – медіани трикутника ABC.

$$\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \quad \vec{BB_1} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}).$$

$$\vec{AA_1} \cdot \vec{BB_1} = \frac{1}{4}(-c^2 - ac\cos\angle B - bc\cos\angle A + ab\cos\angle C).$$

Використовуючи теорему косинусів, одержимо

$$\vec{AA_1} \cdot \vec{BB_1} = \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - 5c^2).$$

Отже, $\vec{AA_1} \cdot \vec{BB_1} = 0$, так як $a^2 + b^2 = 5c^2$. Значить $(AA_1) \perp (BB_1)$.

Обернена.

5*. Якщо в трикутнику ABC медіани, проведені до сторін AC і BC, взаємно перпендикулярні, то довжини сторін трикутника зв'язані співвідношенням $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Доведення одержується оберненням доведення теореми 5.

6. Доведення шостої теореми очевидне.

Обернена.

6*. Якщо бісектриси кутів трикутника конгруентні, то конгруентні і дані кути.

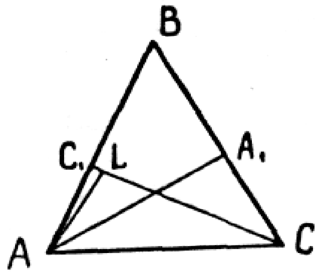


Рис. 10

Доведення.

Нехай бісектриси $[AA_1]$ і $[CC_1]$ конгруентні (рис. 10), і нехай $\angle A > \angle C$. Тоді на $[CC_1]$ знайдеться точка L така, що $\angle LAA_1 = \angle LCA_1$. Тоді точки A, L, A_1 і C належать одному колу, оскільки відрізок LA_1 видно з точок A і C під одним і тим же кутом.

$$\angle ACB < \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle ACB) = \angle LAC < \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle ACB + \angle ABC) = 90^\circ.$$

Отже, $\angle ACB < \angle LAC < 90^\circ$. Оскільки $|AA_1| > |CL|$, то $\angle ACB > \angle LAC$.

З одного боку, $\angle ACB > \angle LAC$, з іншого — $\angle ACB > \angle LAC$. Суперечність. Значить, невірно, що $\angle A > \angle C$. Аналогічно доводиться хибність припущення, що $\angle A < \angle C$. Отже, $\angle A = \angle C$.

7. Нехай в прямокутному трикутнику ABC (рис. 10) $[CH]$ – висота, $[CL]$ – бісектриса і $[CM]$ – медіана.

$\angle ACL = \angle BCL$, $\angle ACM = \angle BCH$ (оскільки $\angle BCH = \angle BAC = \angle ACM$).

Отже, $\angle MCL = \angle LCH$ і CL – бісектриса $\angle MCH$.

Обернена.

7*. Якщо в нерівнобедреному трикутнику бісектриса одного з кутів є бісектрисою кута, утвореного медіаною і висотою, проведеними із вершини того ж кута, то цей кут прямий.

Вказівка.

Опишемо біля даного трикутника ABC коло (рис. 11) і доведемо, що $[CM_1]$ – його діаметр, а M – середина $[CM_1]$, тобто центр кола.

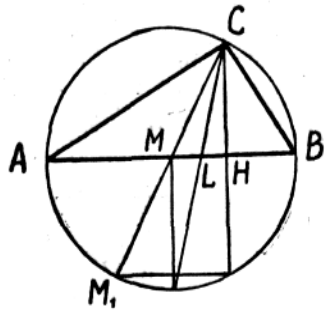


Рис. 11

8*. Якщо точка рівновіддалена від сторін кута, то вона належить бісектрисі цього кута.

Контрприклад. Точка M рівновіддалена від сторін кута BAC (рис. 12), оскільки відстань від M до AC рівна $|MA|$ і відстань від M до AB рівна $|MA|$, але M не належить бісектрисі цього кута[6, с.25].

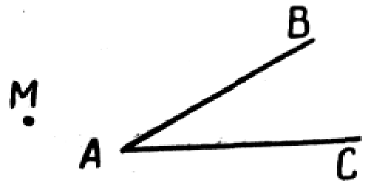


Рис. 12

2.4. КОНСТРУЮВАННЯ ТВЕРДЖЕНЬ ПО АНАЛОГІЇ

Аналогія є найважливішим джерелом гіпотез. Багато важливих теорій були побудовано по аналогії з тими, що є. Без перебільшення можна сказати, що аналогії застосовуються у всіх науках і, звичайно ж, в математиці.

Багато вчених надавали великого значення аналогіям.

І.Кеплер говорив: «...бажано підпорядковувати геометричні міркування аналогії; я особливо люблю ці аналогії, моїх найвірніших вчителів, учасників таємниць природи; переважно ж в геометрії повинно їм слідувати...».

Аналогія – слово грецького походження, і означало воно пропорцію, відповідність, схожість.

Висновок по аналогії – це перенесення інформації з однієї системи на іншу. Одним з видів аналогії є ізоморфізм. Якщо є дві ізоморфні системи, то, встановивши деяке твердження для однієї системи, ми можемо перенести його на ізоморфну систему.

Висновки по аналогії можна представити таким чином.

Нехай *A* і *B* – два об'єкти (дві системи). Відомо, що *A* володіє властивостями $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$. Відомо також, що *B* володіє властивостями $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$, схожими з властивостями $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Звідси робиться висновок, що *B* володіє властивістю b_n , схожою з властивістю a_n . Висновок по аналогії в цьому випадку виглядатиме так: якщо *A* володіє властивістю a_n , то і *B* володіє властивістю b_n .

Це пояснює визначення аналогії, дане А. І. Уємовим: «Аналогія – умовивід, в якому висновок відноситься до іншого предмету, ніж той, про який мовиться в посиланні».[47,с.193]

Приклад.

Зі всіх трикутників, вписаних в дане коло, правильний має найбільшу площу.

Очевидно, що із всіх трикутників *ABC,* вписаних в дане коло, в яких кут *ABC* опирається на дану дугу *AC,* найбільшу площу матиме рівнобедрений (у нього точка *B* найбільш віддалена від *(AC)*).

Нехай тепер в трикутника, вписаного в дане коло і який має найбільшу площу, деякі дві сторони не конгруентні. Тоді рівнобедрений трикутник, побудований на третій стороні і вписаний в дане коло, матиме площу, більшу за площу попереднього трикутника. Одержали суперечність. Значить, найбільшу площу має правильний трикутник.

Аналог для чотирикутника.

З усіх чотирикутників, вписаних в дане коло, найбільшу площу має квадрат.

Доведення.

Нехай $ABCD$ – чотирикутник, вписаний в дане коло.

Тоді $S_{ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\angle AOB$, де $O=[AC]\cap[BD]$. Площа буде найбільшою, коли $|AC|$, $|BD|$ і $\sin\angle AOB$ будуть найбільшими. Значить, [AC] і [BD] діаметри кола і $\angle AOB=90^\circ$, тобто $ABCD$ – квадрат.

5. Аналогія є **правдоподібним умовиводом** і висновки з її використанням можуть виявитися неправильними, тому їх **необхідно завершувати доведенням** [6, с.26].

Вправи.

Доведіть наступні теореми. Сформулюйте і доведіть аналогічні їм твердження.

1. Сума кутів трикутника дорівнює 180^0.

2. Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох даних сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.

1. *Доведення.* Розглянемо довільний трикутник ABC і покажемо, що $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$.

Проведемо через вершину B пряму a, паралельну стороні AC (рис. 13). Кути 1 і 4 є різносторонніми кутами при перетині паралельних прямих a і AC січною AB, а кути 3 і 5 - різносторонніми кутами при перетині тих же паралельних прямих січною BC. Тому $\angle 4=\angle 1$, $\angle 5=\angle 3$ (1)

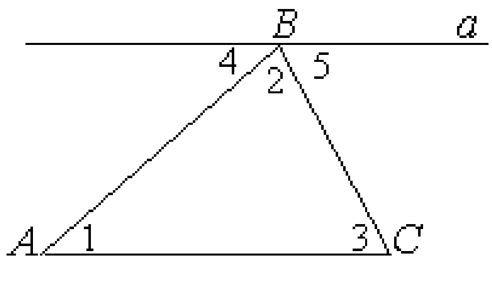


Рис. 13

Очевидно, сума кутів 4, 2 і 5 дорівнює розгорнутому куту з вершиною B, тобто $\angle 4+\angle 2+\angle 5=180^0$.

Звідси, враховуючи рівності (1), одержимо:

$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^0$ або $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$

Теорему доведено.

Аналог для чотирикутника.

1*. Сума кутів чотирикутника дорівнює 360^0 .

Доведення аналогічне доведенню, проведеному для трикутника.

2. *Доведення.* Нехай DE – середня лінія трикутника ABC (рис. 14). Проведемо через точку D пряму, паралельну стороні AB . За теоремою Фалеса вона перетинає відрізок AC в його середині, тобто містить середню лінію DE . Отже, середня лінія DE паралельна стороні AB .

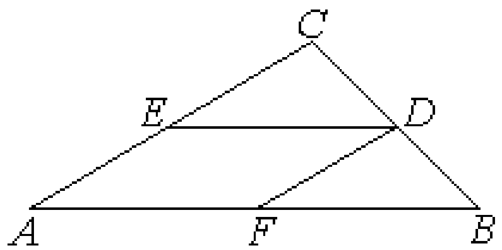


Рис. 14

Проведемо тепер середню лінію DF . Вона паралельна стороні AC . Чотирикутник $AEDF$ – паралелограм. За властивістю паралелограма $ED=AF$, а через те, що за теоремою Фалеса $AF=FB$, то $ED=\frac{1}{2}AB$. Теорему доведено.

Аналог для трапеції.

2*. Середня лінія трапеції, яка сполучає середини бічних сторін, паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

Доведення. Нехай $ABCD$ – дана трапеція (рис. 15). Проведемо через вершину B і середину P бічної сторони CD пряму. Вона перетинає пряму AD у деякій точці E .

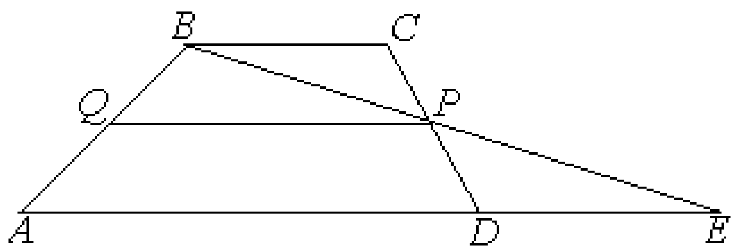


Рис. 15

Трикутники PBC і PED рівні за другою ознакою рівності трикутників. У них $CP=DP$ за побудовою, кути при вершині P рівні, як вертикальні, а кути PCB і PDE рівні як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD і січній CD. З рівності трикутників випливає рівність сторін $PB=PE$, $BC=ED$.

Отже, середня лінія PQ трапеції є середньою лінією трикутника ABE. За властивістю середньої лінії трикутника $PQ \parallel AE$ і відрізок $PQ=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}(AD+BC)$. Теорему доведено[6, с.28].

2.5. УЗАГАЛЬНЕННЯ І КОНКРЕТИЗАЦІЯ ТВЕРДЖЕНЬ

Процес узагальнення наукових фактів, теорій є важливою рушійною силою в розвитку науки. Без нього неможливо було б оглянути велику кількість фактів, на перший погляд, не пов'язаних один з одним. Проведене ж узагальнення дозволяє побачити, що багато з них можна розглядати як окремі випадки деякої загальної теорії.

З іншого боку, людина, яка вирішує деяку практичну задачу, замість того, щоб шукати спеціальне рішення її, риючись в безлічі розрізнених фактів, може легко вирішити цю задачу, конкретизувавши деяке положення загальної теорії. Тому у школярів і студентів важливо сформувати уміння узагальнювати і конкретизувати.

В математиці під узагальненням розуміють перехід від виділення яких-небудь властивостей елементів даної множини до виділення таких же властивостей у елементів іншої множини, що містить першу.

Під конкретизацією (спеціалізацією) розуміють перехід від властивостей елементів даної множини до виділення цих властивостей у елементів множини, що міститься в першій.

Наприклад, справедливе наступне твердження: «Площа чотирикутника із взаємно перпендикулярними діагоналями рівна половині добутку довжин цих діагоналей». Твердження «Площа чотирикутника рівна половині добутку довжин його діагоналей на синус кута між ними» є узагальненням першого твердження, яке, у свою чергу, є конкретизацією цього твердження для чотирикутників із взаємно перпендикулярними діагоналями.

Твердження «сума внутрішніх кутів *n*-кутника рівна $2d(n-2)$» є узагальненням твердження «сума внутрішніх кутів трикутника рівна 2*d*».

З розглянутих прикладів видно, що ми приходимо до узагальнення, знімаючи яке-небудь обмеження: в першому випадку прямий кут між діагоналями замінили довільним; в другому – число сторін порахували довільним.

Приклади.

1. Якщо для точок A_1 і A_2 точка M така, що $\overrightarrow{A_1M}+\overrightarrow{A_2M}=\vec{0}$, то для будь-якої точки O виконується рівність $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right)$.

Доведення.

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2M}$. Додавши почленно ці дві рівність і врахувавши, що $\overrightarrow{A_1M}+\overrightarrow{A_2M}=\vec{0}$, одержимо те, що вимагається.

Узагальнюючи це твердження, замість двох точок A_1 і A_2 розглянемо n точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Одержимо:

1*. Якщо для точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ точка M така, що $\overrightarrow{A_1M}+\overrightarrow{A_2M}+\ldots+\overrightarrow{A_nM}=\vec{0}$, то для будь-якої точки O виконується рівність $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}\right)$.

Доведення 1* аналогічно доведенню 1, тільки замість двох векторних рівностей складаються n рівностей.

Твердження 1* також можна узагальнити. В рівності $\overrightarrow{A_1M}+\overrightarrow{A_2M}+\ldots+\overrightarrow{A_nM}=\vec{0}$ числові множники у векторів $\overrightarrow{A_iM}$ $(i=1, \ldots, n)$ рівні 1. Але їх можна вибрати довільними, наприклад, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Одержимо наступне твердження.

1**. Якщо для точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ точка M така, що $\alpha_1\overrightarrow{A_1M}+\alpha_2\overrightarrow{A_2M}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{A_nM}=\vec{0}$, то для будь-якої точки O виконується рівність

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\left(\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}\right),\text{ якщо } \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\neq 0 .$$

Доведення.

$\alpha_1\overrightarrow{OM}=\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_1\overrightarrow{A_1M}$, $\alpha_2\overrightarrow{OM}=\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\alpha_2\overrightarrow{A_2M}$, …, $\alpha_n\overrightarrow{OM}=\alpha_n\overrightarrow{OA_n}+\alpha_n\overrightarrow{A_nM}$.

Звідси легко одержуємо те, що вимагається.

Твердження 1 і 1* є окремими випадками твердження 1**. Твердження 1* одержується з 1**, якщо покласти $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=1$. Твердження 1 одержується з 1**, якщо покласти $n=2$ і $\alpha_1=\alpha_2=1$.

2. Твердження про точку перетину медіан трикутника можна узагальнити двома способами:

а) розглянути n-мірний афінний простір і об'єкти, аналогічні трикутникам на площині;

б) розглянути в тривимірному просторі систему із n різних точок.

Зробимо узагальнення другим способом. Назвемо центроїдом точок $A_1, A_2, \ldots, A_k$ точку M таку, що виконується рівність $\overrightarrow{A_1M}+\overrightarrow{A_2M}+\ldots+\overrightarrow{A_kM}=\vec{0}$ (легко бачити, що центроїд для даної системи точок – один). Медіаною системи точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ назвемо відрізок, що сполучає одну з точок (вершин) цієї системи з центроїдом інших $n-1$ точок. Тоді узагальнене твердження звучатиме так:

Медіани системи n точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ перетинаються в одній точці M (якщо їх перетином не є відрізок) і діляться нею у відношенні ($n-1$):1, починаючи від вершини, причому для будь-якої точки O виконується рівність

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}\right).$$

Доведення цього твердження аналогічно доведенню подібного твердження для трикутника.

Помітимо, що іноді узагальнити дане твердження легше, заздалегідь довівши його. Проведе доведення може підказати шлях узагальнення. Але доведення загального твердження позбавляє нас від необхідності доводити твердження, що є частковим випадком цього загального твердження. Тому, якщо нам потрібно довести деяке твердження, то можна спробувати узагальнити його і довести вже загальне твердження, одержавши при цьому більшу інформацію [6, с.31].

Вправи.

Доведіть наступні твердження і узагальніть їх.

1. Якщо площі квадрата і правильного трикутника рівні, то периметр трикутника більший периметра квадрата.

2. Якщо в опуклому чотирикутнику *ABCD* *M* – середина [*BC*] *N* – середина [*AD*], $P=[BN]\cap[AM]$ і $Q=[CN]\cap[DM]$, то площа чотирикутника *PMQN* рівна сумі площ трикутників *ABP* і *CDQ*.

3. Якщо в опуклому чотирикутнику *ABCD* через середину діагоналі *BD* проведена пряма, паралельна іншій діагоналі *AC* і вона перетинає одну із сторін *AD* або *AB* в точці *E*, то відрізок *CE* ділить площу чотирикутника *ABCD* пополам.

4. Дано три точки *A, B, C*. $A_1=R_B^{90°}(A)$, $A_2=R_C^{-90°}(A)$. Якщо *M* – середина [A_1A_2], то положення її не залежить від вибору точки *A*.

5. Якщо на сторонах довільного трикутника *ABC* зовні нього побудовані рівнобедрені трикутники *ABC', BCA'* і *ACB'* з кутами при вершинах в 120°, то величини кутів трикутника *A'B'C'* рівні 60°.

6. Якщо *A, B, C* внутрішні кути трикутника, то виконуються рівності:

а) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$,

б) $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3}{2}A\cos\frac{3}{2}B\cos\frac{3}{2}C$.

7. Для будь-яких дійсних чисел a_1, a_2, b_1, b_2 виконується нерівність: $(a_1b_1+a_2b_2)^2\le(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$.

Розв'язання.

1*. (Узагальнення). Якщо площі правильних *n* і $n+1$-кутників рівні, то периметр *n*-кутника більший за периметр $n+1$-кутника.

Виразивши площі правильних *n* і $n+1$-кутників через довжини їх сторін *a* і *b*, ми дійдемо до нерівності $n\cdot tg\frac{\pi}{n}>(n+1)tg\frac{\pi}{n+1}$, яку доведемо, встановивши, що функція $y=x\cdot tg\frac{\pi}{x}$ монотонно убуває при $x\geq 3$.

2*. (Узагальнення). Якщо в опуклому чотирикутнику *ABCD* $M \in [BC]$, $N \in [AD]$ і $|BM| : |BC| = |DN| : |AD|$, то площа чотирикутника *PMQN* рівна сумі площ трикутників *ABP* і *CDQ*, де $P = [BN] \cap [AM]$, $Q = [CN] \cap [DM]$.

Доведення.

Нехай $|BM| : |BC| = |DN| : |AD| = \alpha$. Тоді $S_{\Delta\ ABM} = \alpha\ S_{\Delta\ ABC}$, $S_{\Delta\ CDN} = \alpha\ S_{\Delta\ ADC}$. Звідси

$$S_{\Delta\ ABM} + S_{\Delta\ CDN} = \alpha\ S_{ABCD} \qquad (1)$$

$$S_{\Delta\ ABN} = (1 - \alpha)\, S_{\Delta\ ABD},$$

$$S_{\Delta\ CDM} = (1 - \alpha)\, S_{\Delta\ CDB}.$$

Звідси

$$S_{\Delta\ ABN} + S_{\Delta\ CDM} = (1 - \alpha)\, S_{ABCD} \qquad (2)$$

З (1) і (2) витікає, що

$$S_{\Delta\ ABM} + S_{\Delta\ CDN} + S_{\Delta\ ABN} + S_{\Delta\ CDM} = S_{ABCD}.$$

Звідси легко одержуємо, що $S_{\Delta\ ABP} + S_{\Delta\ CDQ} = S_{PMQN}$.

Теорема 2 є частковим випадком 2*, якщо покласти $\alpha = \frac{1}{2}$.

3*. (Узагальнення). Якщо в опуклому чотирикутнику *ABCD* через точку $K \in [BD]$ ($|BK| : |KD| = \alpha$) проведена пряма, паралельна діагоналі [*AC*] і вона перетинає одну із сторін *AD* або *AB* в точці *E*, то відрізок *CE* ділить площу чотирикутника *ABCD* у відношенні α.

Доведення.

Проведемо (*BM*) || (*AC*), де $M \in (AD)$ (рис. 16).

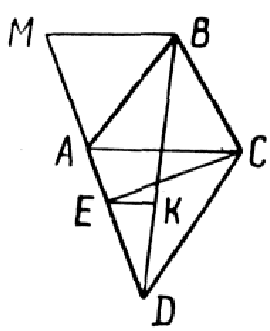


Рис. 16

Тоді $S_{\Delta AMC}=S_{\Delta ABC}$, отже, $S_{\Delta BCD}=S_{\Delta MCD}$. Оскільки $|BK|:|KD|=\alpha$ і (*EK*) || (*MB*), то $|ME|:|ED|=\alpha$. Звідси $S_{\Delta MCE}:S_{\Delta CDE}=\alpha$, отже, $S_{\Delta ABC}:S_{\Delta CDE}=\alpha$.

Твердження 3 одержимо, якщо покладемо $\alpha=1$.

4.Нехай, крім того, $A_{1'}=R_B^{90^\circ}(A')$, $A_{2'}=R_C^{-90^\circ}(A')$.

Тоді $[A_1A_{1'}]=R_B^{90^\circ}([AA'])$, $[A_2A_{2'}]=R_C^{-90^\circ}([AA'])$. Звідси $|A_1A_{1'}|=|A_2A_{2'}|$ і $[A_1A_{1'}]\parallel[A_2A_{2'}]$. Отже, $A_1A_{1'}A_2A_{2'}$ – паралелограм і середини $[A_{1'}A_{2'}]$, співпадають. Значить, положення точки *M* не залежить від вибору точки *A*.

4*. (Узагальнення). Дано три точки *A*, *B*, *C*. $A_{1'}=H_B^k\circ R_B^{\alpha}(A)$, $A_2=H_C^k\circ R_C^{\alpha-180^\circ}(A)$. Якщо *M* – середина [$A_1A_2$], то положення її не залежить від вибору точки *A*.

Доведення аналогічне попередньому доведенню, тільки додаються перетворення гомотетії.

5*. (Узагальнення). Якщо на сторонах довільного трикутника *ABC* зовні нього побудовані рівнобедрені трикутники *BCA', ACB', ABC'* з кутами при вершинах відповідно 2α; 2β; 2γ, то величини кутів трикутника *A'B'C'* відповідно рівні α; β; γ, якщо $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

Доведення.

Композиція $R_C^{2\gamma}\circ R_B^{2\beta}\circ R_A^{2\alpha}$ залишає точку *B* на місці і $2\alpha+2\beta+2\gamma=360^\circ$. Тому дана композиція є тотожним перетворенням площини. Центр повороту, що є композицією поворотів $R_A^{2\alpha}$ і $R_B^{2\beta}$, є точка *C',* в протилежному випадку $R_C^{2\gamma}\circ R_B^{2\beta}\circ R_A^{2\alpha}$ не буде тотожним перетворенням. Але центр повороту $R_B^{2\beta}\circ R_A^{2\alpha}$ знаходиться як точка перетину прямих, що проходять через точки *A'* і *B'* і що утворюють з прямою *A'B'* відповідно кути α і β. Це і доводить, що кути трикутника *A'B'C'* рівні α, β, γ.

6*. (Узагальнення). Якщо *A*, *B, C* – внутрішні кути трикутника, то виконується рівність: $\sin((2n-1)A)+\sin((2n-1)B)+\sin((2n-1)C)=$

$$=(-1)^{n-1}\cdot 4\cos\frac{2n-1}{2}A\cdot\cos\frac{2n-1}{2}B\cdot\cos\frac{2n-1}{2}C,\quad \text{де } n\in N_0$$

Доведення.

$$\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$$

$$=2\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\cos\frac{2n+1}{2}(A-B)+\sin(2n+1)(A+B)=$$

$$=2\sin\frac{2n+1}{2}(A+B)\left[\cos\frac{2n+1}{2}(A-B)+\cos\frac{2n+1}{2}(A+B)\right]=$$

$$=(-1)^n 4\cos\frac{2n+1}{2}A\cos\frac{2n+1}{2}B\cos\frac{2n+1}{2}C.$$

Вправи.

1. (Конкретизація). Складіть твердження, яке є частковим випадком твердження IV, 5*.
2. (Конкретизація). Складіть твердження, яке є спеціальним випадком твердження IV, 6*.

Відповіді.

1. Наприклад. Якщо на двох сторонах довільного трикутника побудовані квадрати, то їх центри і середина третьої сторони є вершинами прямокутного рівнобедреного трикутника.
2. Наприклад. Для того, щоб в трикутнику ABC величина одного з кутів була рівна 60°, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$ [6,с.35].

2.6. ПОРІВНЯННЯ

Порівняння як найпростіший прийом емпіричного мислення відноситься як і до мисленнєвих, так і до навчальних прийомів. При цьому розрізняють такі види порівняння на уроці: порівняння реальних предметів за однією ознакою; порівняння однорідних предметів за декількома ознаками; порівняння різних етапів в розвитку одного явища; порівняння відношень і функціональних зв’язків. Крім цього, в навчальному процесі застосовують послідовне порівняння, яке складається з того, щоб новий об’єкт порівнюють з раніше вивченим, що має з даним об’єктом будь-яку схожість чи відмінність. Завдяки застосування порівняння активізується мисленнєва діяльність студентів на етапі засвоєння знань, полегшується відтворення і систематизація знань.

Прийоми порівняння виражаються за допомогою правила-орієнтира, яке складається з наступної послідовності дій:

- Визначити мету порівняння;
- Виділити різні ознаки порівняльних об’єктів;
- Визначити можливі лінії порівняння у відповідності з поставленою метою і визначеними ознаками;
- Встановити загальні ознаки;
- Встановити відмінності в порівнюваних об’єктах;
- Формувати висновок про спільні і відмінні дані об’єктів у відповідності з поставленою метою.

Наприклад, необхідно порівняти доведення теорем про єдність межі числової послідовності і функції в точці а. Мета порівняння – виявити загальне в схемі доведення для кращого запам’ятовування. Ознаки порівняльних об’єктів: формулювання теореми, спосіб доведення, ідея доведення, використання допоміжних суджень. Можливі лінії порівняння: формулювання теореми, спосіб, схема доведення, допоміжні судження. Загальні ознаки: однакові твердженняв формулюванні про наявність межі, завершенні теорем; один і то й же спосіб доведення – метод від супротивного, одинакові ідеї доведення: припустивши, що меж щонайменше дві, використати його визначення і шляхом логічних міркувань прийшли до протиріччя; використовується одна і така ж нерівність $|a+b| \le |a| + |b|$; однакова схема міркувань. Відмінності в порівнювальних об’єктах: в теоремі про єдність межі послідовності змінна прямує до нескінченності, а в теоремі про межу функції в точці змінна x прямує до a. В процесі доведення теореми про межу функції в точці, на відміну від відповідної теореми про межу послідовності, застосовується дві нерівності $|f(x) - b| < e$ і $|x - a| < \delta$.

Висновок: дані теореми і їх доведення схожі, тому достатньо добре засвоїти одне з них і пояснити, чим відрізняється друга теорема і її доведення від першої. Це зменшує об’єм інформації, яка необхідна для запам’ятовування[31, с.19].

2.7.УЗАГАЛЬНЕННЯ

В навчальному процесі узагальнення виступає в двоякій ролі: як мисленнєвий прийом і як фактор розширення знань. Розрізняють узагальнення від «одиничного до загального»(індуктивні) і «від загального до одиничного»(дедуктивні). Схема емпіричного узагальнення складається з наступного: порівнення предметів, відбір загальних якостей (абстрагування), перелік властивостей (узагальнення).

В навчальному процесі це найрозповсюдженний вид узагальнення. Прийом такого узагальнення виражається наступним правилом-орієнтиром:

- Визначити мету узагальнення;
- Знайти різні ознаки узагальнених об'єктів;
- Вказати загальні ознаки узагальнених об'єктів у відповідності з поставленому метою;
- Формулювати висновок.

Покажемо «роботу» цієї схеми на прикладі вивчення теми «Монотонні послідовності» (IX клас). Розглядаються приклади зростаючих послідовностей. Студенти не знають завчасно, яка ознака у них загальна.

1) Знайти загальне в даних послідовностях і сформулювати його в вигляді їх властивостях. Це – мета узагальнення.
2) Вказати різні ознаки послідовностей: скінченні, нескінченні, їх члени дробові або цілі, співвідношення за величиною сусідніх членів, закон вираження членів послідовності (спробувати знайти одинакові властивості для всіх послідовностей).
3) Визначити властивість, яка загальна для всіх послідовностей (співвідношення по величині сусідніх членів послідовності).
4) Сформулювати загальну властивість на математичній мові.

На практиці студенти часто не можуть обґрунтувати, що саме є істинно загальним. Тому вчитель спеціально повинен підібрати приклади, які допоможуть студентам виділити в даних об'єктах істинно загальним. Таким чином, критерій «істинності» студентам нав'язується і може змінюватися в різних умовах. Це приклад індуктивного «від одиничного до загального», емпіричного узагальнення.

Перехід «від загального до одиничного» застосовуться в узагальненні, коли з його допомогою розв'язується задача розпізнавання одиничних предметів. Систему операцій дедуктивного узагальнення можна представити так:

- Визначити мету узагальнення;
- Згадати і сформулювати загальну ознаку (дати визначення поняття);
- Співставити предмети по цій ознаці(перевірити наявність ознаки в кожному предметі);
- Абстрагувати ті предмети, у яких є дана ознака;
- Сформулювати висновок (узагальнення).

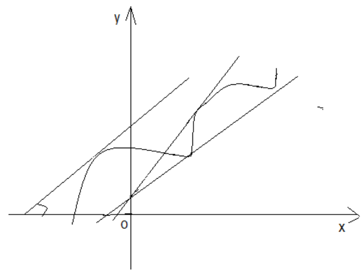
Наприклад, необхідно визначити, чи є запропоновані числові послідовності арифметичних прогресій. Мета поставлена в запитанні задачі. Далі необхідно: пригадати визначення арифметичної прогресії; знайти різницю між наступними та попередніми членами в кожному ряді чисел; вказати ті ряди, в яких різниця постійна; сформулювати висновок про те, що які саме числові послідовності дійсно – арифметичні прогресії [31, с.21].

2.8.АБСТРАГУВАННЯ

В процесі навчання від узагальнення практично невіддільний прийом абстрагування. В емпіричному мисленні йому передує порівняння і елементарний аналіз. Даний прийом виражається за допомогою наступним правилом-орієнтира:

- Визначити мету абстрагування;
- Визначити різні властивості об'єктів;
- Виділити ті властивості, які повинні бути виділені у зв'язку з поставленою метою;
- Знайти відмінності властивостей в інших предметах;
- Сформулювати назву відмінних властивостей на математичній мові.

Так, при вивченні теми «Зростання та спадання функції» (IX клас) на екран проектується мал. Ставиться мету абстрагування. Для отримання нових знань потрібно:



1) порівняти взаємне положення кривої і дотичних, дотичних і осі Ox ;
2) визначити різні властивості порівняльних об'єктів (даний графік зростаючої функції, функція диференційована на проміжку, дотичні розташовані вище і нижче графіка, вони утворюють гострі кути з додатнім напрямом осі Ox , їх кутові коефіцієнти додатні, тому похідна функції додатня на заданому проміжку);
3) виділіть ті властивості, які повинні бути визначені у зв'язку з поставленою метою (найважливішими є зв'язки між зростанням графіка функції і гострим кутом нахилу дотичних до додатного напряму осі Ox ; кутом нахилу дотичної і знаком кутового коефіцієнта - похідної);
4) виділіть ті властивості, від яких необхідно відволіктися у відповідності з поставленою метою;
5) знайти властивості в інших предметах (на дошку проектується декілька графіків різниз зростаючих функцій);

сформулювати відмінності на математичній мові[31, с.23].

2.9. СИСТЕМАТИЗАЦІЯ

Розглянемо структуру систематизації, вказуючи, які складові її утворюють, встановлюючи зв'язки між ними та їх логічну послідовність у загальному вигляді.

Оскільки систематизація виконується за певною істотною ознакою, то перша і найголовніша операція – це знаходження тієї ознаки, яка є основою систематизації. Ця операція має велике значення для орієнтування, бо всі наступні дії виконуються з опорою на неї.

Друга операція – виділення самих груп елементів системи, які називаються класами. Це процес утворення класів деякої системи, або процес групування частин матеріалу за ознакою, виділеною в результаті першої операції.

Третя операція – встановлення внутрігрупових відношень між об’єктами чи елементами матеріалу, який необхідно засвоїти.

Четверта операція – встановлення міжгрупових відношень.

Функція двох останніх операцій полягає в тому, що об’єднати в групи окремі об’єкти або частини матеріалу відповідно до основи систематизації, а всі групи – в єдину структуру, утворення на цій основі розумову модель поняття, яку легко відтворити на наступних етапах навчання і розвитку.

Встановлення психологічних особливостей систематизації завдяки такій моделі зводяться до з’ясування особливостей реалізації кожної операції зокрема.

Однією з особливостей систематизації є те, що в ній беруть участь такі елементарні розумові операції, як аналіз та синтез, порівняння та абстрагування, узагальнення та конкретизація, які у взаємовідношеннях одна з одною визначають основні внутрішні закономірності мислення[31, с.11].

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ РОЗУМОВИХ ДІЙ У СТУДЕНТІВ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ І-ІІ РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ

Знання структури, функцій та основних характеристик дії дозволяє моделювати найбільш раціональні види пізнавальної діяльності та визначати вимоги до них наприкінці навчання. Для того, щоб запрограмовані види пізнавальної діяльності стали надбанням студентів, їх треба провести через ряд якісно своєрідних станів по всіх основних характеристиках. Дія, перш ніж стати розумовим, узагальненим, скороченим і освоєним, проходить через перехідні стани. Основні з них і складають етапи засвоєння дії, кожен з яких характеризується сукупністю змін основних властивостей (параметрів) дії.

Розглянута теорія виділяє в процесі засвоєння принципово нових дій п'ять етапів . В останні роки П.Я. Гальперін вказує на необхідність введення ще одного етапу, де головне завдання полягає у створенні необхідної мотивації у кого навчають. Незалежно від того, становить рішення даного завдання самостійний етап або не складає, наявність мотивів, необхідних для прийняття студентами навчального завдання і виконання адекватної їй діяльності, має бути забезпечено. Якщо цього немає, то формування дій і входять до них знань неможливо. (У практиці навчання добре відомо, що якщо учень не хоче вчитися, то навчити його неможливо). З метою створення позитивної мотивації звичайно використовується створення проблемних ситуацій, вирішення яких можливе за допомогою того дії формування якого запропоновано здійснити.

3.1. Характеристика основних етапів процесу засвоєння

На першому етапі студенти отримують необхідні роз'яснення про мету дії, його об'єкті, системі орієнтирів. Це етап попереднього ознайомлення з дією і умовами його виконання - етап складання схеми орієнтовної основних дій [17, с.21].

Цей етап має велике значення у формуванні дії. Тут розкривається перед студентами зміст орієнтовної схеми дії; відбувається введення в предмет вивчення; студентам показують, як і в якому порядку виконуються всі три види операцій, що входять в дію: орієнтовні, виконавчі, контрольні. Залежно від типу орієнтовної основи перед випробуваним відкриваються або основні елементи, що складають всі приватні явища даної галузі знань, або особливості якогось одного приватного явища.

"Якою б не була за якістю орієнтовна основа дії, - пише П.Я.Гальперин, - і як би вона не була дана - у вигляді подання або зовнішньої схеми - вона все-таки залишається не більше, ніж системою вказівки на те, як виконувати нову дію, і не є самою дією. Самої дії у нашого студента ще немає, він взагалі ще не виконував її, а без виконання дії йому не можна навчитися "[15,с. 449].

Слід особливо підкреслити відмінність між розумінням як робити і можливістю зробити, оскільки в практиці навчання нерідко вважається, що якщо учень зрозумів - значить він навчився, мета досягнута. Фактично засвоєння дії (діяльності) відбувається тільки через виконання цієї дії самим учнем, а не шляхом лише спостереження за діями інших людей. Ось чому дана теорія після першого етапу виділяє ще чотири, де засвоєна дія виконується самим учнем.

На другому етапі - етапі формування дії в матеріальному (або матеріалізованих) студенти вже виконують дію, але у зовнішній, матеріальній (або матеріалізованої) формі з розгортанням всіх назв операцій. У такому вигляді здійснюється і орієнтовна, і виконавча, і контрольна частини дії. Цей етап дає можливість учнем засвоїти зміст дії, а вчителеві здійснювати об'єктивний контроль за виконанням кожної вхідної в дію операції.

Для узагальнення дії в навчальну програму включаються завдання, що відображають типові випадки застосування даної дії. У той же час на цьому етапі не повинно бути великого числа однотипних завдань, так як в цьому випадку дія буде скорочуватися і автоматизуватися. А на цьому етапі ні те, ні інше не повинно мати місця. Іншими словами, на цьому етапі учень засвоює дію як матеріальне (або матеріалізоване), розгорнуте, узагальнене в межах основних типів матеріалу і свідомо виконується у всьому складі операцій [16,с.365].

На цьому етапі повинна відбуватися підготовка до переходу дії на наступний етап, що відрізняється від даного насамперед формою дії. Для цього матеріальна форма дії з самого початку поєднується з мовної: студенти формулюють у промові все, що виконують практично, матеріально.

Після того як всі зміст дії виявляється засвоєним, дію необхідно переводити на наступний, третій, етап - етап формування дії зовнішнього [18,с.112]На цьому етапі, де всі елементи дії представлені у формі зовнішньої мови, дія проходить подальше узагальнення, але залишається ще неавтоматизованим і нескорочені.

На цьому етапі мова починає виконувати нову функцію. "На першому та другому етапах, - пише П.Я. Гальперін, - мова служила головним чином системою вказівок на такі явища, які безпосередньо відкривалися в сприйнятті; завданням студента було розібратися не в словах, а в явищах, розібратися в них і оволодіти ними . Тепер же мова стає самостійним носієм усього процесу: і завдання, і дії "[15,с.455]. Мовну дію обов'язково має бути освоєно в розгорнутому вигляді: всі вхідні в нього операції повинні не тільки придбати мовну форму, а й бути засвоєними в ній. Узагальнення дії на цьому етапі набуває нові можливості, які відкриває йому мовна форма дії. Зокрема, за допомогою мови можуть бути представлені нові типові ситуації, які на попередньому етапі не могли мати місця. Так, при формуванні дії підведення під поняття узагальнення на попередньому етапі обмежена двома ситуаціями: коли об'єкт відноситься до даного класу і коли він не відноситься до нього. На третьому етапі дія може бути узагальнено шляхом введення ситуацій з невизначеними умовами. На заключній стадії цього етапу дія починає виконуватися з пропуском в мовній формі окремих операцій. В принципі це може бути початком істинного скорочення дії (операції не виконуються, але маються на увазі), але це може бути і переходом операцій в розумову форму. В останньому випадку ніякого скорочення дії немає, всі операції виконуються, але частина з них придбала нову форму[14,с.327] На зовнішньому етапі дія не повинно доводиться до автоматизації.

Четвертий етап - етап формування дії у зовнішній промови про себе - відрізняється від попереднього тим, що дія виконується беззвучно і без прописування - як промовляння про себе. На перших порах дію за іншим характеристикам (розгорнення, свідомості, узагальненості) не відрізняється від попереднього етапу. Однак, прийнявши розумову форму, дія дуже швидко починає скорочуватися і автоматизуватися, набуваючи вигляду дії за формулою [15,с. 457].

З цього моменту дія переходить на заключний, п'ятий етап - етап формування дії у внутрішній мові.

На цьому етапі дія дуже швидко набуває автоматичне протягом, стає недоступним самоспостереженню. Тепер це вже акт думки, де процес прихований, а свідомості відкривається лише продукт цього процесу; "В сформованій розумовій дії майже всі його елементи мають дійсний зміст, - пише П.Я. Гальперін, - йде зі свідомості, а те, що в ньому залишається, не може бути правильно зрозуміло без зв'язку з іншими" [15,с. 458].

Таким чином, розумова дія, яка так несхоже на його зовнішнє, матеріальне, є продукт поетапного перетворення останнього. "Поетапне формування ідеальних, зокрема розумових, дій пов'язує психічну діяльність із зовнішньою, предметною, матеріальною діяльністю. Воно є ключем не тільки до розуміння психічних явищ, а й до практичного оволодіння ними" [15,с. 466].

Оскільки етапи характеризуються сукупністю показників за всіма чотирма параметрами, то, природно, постає питання про вказівку конкретних значень кожного з них на описаних етапах. Але, як було зазначено, з чотирьох характеристик тільки для однієї форми виділені основні якісні ступені, для інших трьох вони залишаються поки невідомими. Оскільки зміна дії за формою є провідним, тому перехід його з однієї форми в іншу і служить показником переходу на наступний етап.

Що стосується інших характеристик, то слід відзначити кілька моментів. По-перше, в кожній новій формі дію спочатку має бути повністю розгорнутим: перетворення за формою повинні пройти всі складові його елементи. По-друге, на жодному етапі, крім останнього, освоєння дії не повинно доводитися до автоматизації. Це означає, що основні характеристики дії в процесі його формування впливають один на одного: автоматизація дії в одній з початкових форм перешкоджає переходу його в генетично пізніші форми. Форма (матеріальна) обмежує межі його узагальнення.

3.2. Організація контролю за процесом засвоєння

При поетапне формування розумових дій особливу проблему складає організація контролю. Розгляд П.Я. Гальперіним уваги як внутрішнього контролю означає, що зовнішній контроль поступово повинен замінятися контролем внутрішнім, перетворюючись на заключному етапі в акт уваги. "Дія контролю, - пише П.Я. Гальперін, - перетворюється до уваги, яке для безпосереднього спостереження (самоспостереження) представляється якийсь ближче невизначеної нашою активністю, стороною (нашої ж) робочої дії" [15,с. 460] .

При організації контрольної частини дії необхідно знати, який тип контролю повинен бути забезпечений - пооопераційний або по кінцевому продукту, як часто повинен здійснюватися контроль - при виконанні кожного завдання або ж лише деяких з них. Нарешті, зовнішній контроль може проводитися самим учнем або іншою людиною (вчителем або, припустимо, сусідом по парті).

Дослідження дозволяє сформулювати такі вимоги до організації контролю:

1. На перших етапах процесу засвоєння контроль повинен бути пооопераційний.

2. На початку матеріального (матеріалізованого) і зовнішній - за кожним виконуваним завданням.

3. В кінці цих етапів, а також на подальших етапах такий контроль повинен бути епізодичним.

4. Спосіб здійснення контролю (хто контролює) принципового значення для якості засвоєння не має. У той же час новизна способу контролю, а також

умови змагання (при роботі студентів парами, де здійснюється взаємний контроль) сприяють створенню позитивної навчальної мотивації.

3.3. Порівняльна роль окремих етапів процесу засвоєння в становленні дій

У зв'язку з виділенням основних етапів процесу засвоєння постає питання про роль кожного з них у становленні дії, про можливість пропуску етапів при формуванні тих чи інших дій.

При розгляді цього питання слід розрізняти два випадки:

а) можливість пропуску етапів при використанні сформованого дії для засвоєння нових знань;

б) можливість пропуску етапів при формуванні нової дії для засвоєння нових знань.

Було виявлено, що формування нових понять на основі готового дії може відбуватися з пропуском декількох етапів. При цьому кількість пропускаються етапів визначається труднощами завдань: чим складніше завдання, тим наступний етап ближче до вихідної форми дії. Дослідження дають право зробити наступні висновки:

1. Пропуск зовнішнього етапу дії значно ускладнює процес його формування навіть за умови всебічної організації засвоєння дії на інших етапах, причому це має місце при будь вихідній формі дії.

2 Пропуск зовнішнього етапу дії ускладнює процес абстрагування від несуттєвих властивостей, без чого дія не може бути переведено в понятійну форму.

3. При виключенні активної дії руки, а також картки з виписаними на ній суттєвими ознаками поняття, на етапі матеріального (матеріалізованого) дії повноцінне поняття сформувати не вдається.

В даний час динаміка переходів дії з етапу на етап вивчена недостатньо. Дані, накопичені в ході різних експериментальних досліджень, говорять лише про те, що перехід з одного етапу на інший неоднаково легкий. Найбільші труднощі представляє перехід з матеріального етапу на зовнішній. Є підстави думати, що цей перехід повинен здійснюватися поступово, причому як по лінії якісною, якщо можна так сказати, так і по лінії кількісної. Поступовість переходу по першій лінії полягає насамперед у тому, що переклад матеріальної форми дії по зовнішньому нерідко вимагає проміжних перетворень за цим параметром. Так, якщо на другому етапі об'єктом є матеріальні предмети або їх зображення, то перехід до понятійному об'єкту, що задається під зовнішньою формою, нерідко вимагає переходу спочатку до моделей, схем або кресленням і тільки від них вже до словесного об'єкту дії. Аналогічно, перехід від ручних операцій (практичних) до мовним (теоретичним) у ряді випадків легше відбувається через перцептивну форму, тобто через теоретичні операції, що виконуються оком з опорою на матеріальні чи матеріалізовані об'єкти.

Перехідні форми між предметами (або їх зображеннями) і словом як якісно новим об'єктом дії створюють умови для виділення і абстрагування тих сторін в реальних предметах, які є власне об'єктом дії і які повинні бути перенесені в слово.

Спеціального дослідження потребують умови, за яких абстрагування відбувається найбільш швидко. Зокрема, становить певний інтерес порівняння різних способів матеріалізації орієнтовної основи дії та об'єкта дії. Результати одного з наших досліджень [45,с.56] дають право вважати, що пред'явлення ознак, які входять у зміст орієнтовної основи формованого дії, за допомогою реального предмета є неефективним, оскільки вони в цьому випадку злиті з безліччю інших властивостей. Предмет дії, навпаки, в якийсь період навчання повинен обов'язково задаватися через реальні предмети (або їх зображення). Якщо ж студенти весь час будуть мати справу тільки зі схемами, моделями, тобто вже абстрагованими об'єктами, то у них може не сформуватися здатність до абстрагування. Чи обов'язково поєднання абстрагованих об'єктів з реальними, яким повинен бути порядок їх подання на другому етапі - все це вимагає спеціального вивчення.

Що стосується другої (кількісної) лінії, то суть полягає в тому, що далеко не завжди всі структурні елементи дії повинні переводиться на наступний етап одночасно: один з них засвоюється на даному етапі дуже швидко, а інші вимагають затримки; в різних випадках це можуть бути різні елементи. Досліди показали, що час затримки окремих елементів дії на тому чи іншому етапі визначається об'єктивною складністю цього елемента і ступенем новизни його для студента. В першу чергу поступовість потрібно при переході з другого етапу на третій. У тих випадках, коли ми переводили дію з матеріального етапу на зовнішній "стрибок", спостерігалося порівняно велика кількість помилок.

Можна думати, що легкість переходу з етапу на етап залежить від ряду умов. Зокрема, перехід з матеріального етапу на етап зовнішньої, очевидно, по-різному буде відбуватися у людей з різним співвідношенням першої та другої сигнальних систем.

Говорячи про поетапне формування розумових дій, слід вказати ще на дві обставини. По-перше, в залежності від виду дії поетапної обробці піддається або вся дія, або тільки його орієнтовна частина Останнє має місце при формуванні насамперед виробничих і спортивних умінь, навичок письма і т.д.

По-друге, доведення дії до розумової етапу не означає кінця його розвитку. Розглянуті етапи - це етапи становлення нового психічного акту, шлях від зовнішнього до внутрішнього; але формування розумових дій і понять - це не самоціль. (Виникнення психічного в процесі філогенезу було викликано вимогами життя, реальними відносинами суб'єкта зі світом). Розумові дії, поняття, засвоювані суб'єктом у процесі онтогенетичного розвитку, використовуються надалі для вирішення різних завдань, які можуть вимагати від суб'єкта і його дій. Зокрема, в наших дослідженнях неодноразово спостерігалося, що при зіткненні з новою завданням, що вимагає застосування сформованих дій, людина починає виконувати їх на зовнішньому або матеріальному етапі.

Стосовно до розумової діяльності людини в цілому поєднання цих двох протилежних напрямків руху цілком можливо.

Однак стосовно до окремого елементу розумової діяльності ці два процеси не можуть йти одночасно: кожен елемент спочатку повинен бути сформований як розумовий, внутрішній акт.

3.4. Етапи засвоєння знань

Про етапи засвоєння знань у світлі розглянутої теорії не можна говорити окремо від етапів засвоєння діяльності. Знання як образи предметів, явищ, дій і т.п. матеріального світу ніколи не існують у людській голові поза якоюсь діяльністю, поза окремими діями. Дотримуючись принципу діяльності і виділяючи дію як одиницю її аналізу, ми тим самим з самого початку включаємо знання в структуру дії. Займаючи структурний місце об'єкта дії, або входячи у зміст його орієнтовної основи, або складаючи мета дії, знання проходять ті ж самі етапи, що й дії (діяльність) в цілому. Якість знань визначається характером діяльності, яка використовується для їх засвоєння: вона може бути адекватною цим знанням, а може бути і не адекватною ім. Адекватність діяльності визначається насамперед об'єктом, на який спрямована діяльність і змістом її орієнтовної основи. Якщо в орієнтовну основу увійшло специфічне, що становить сутність засвоюваних знань, то всі об'єкти, з якими працює учень в процесі засвоєння даних знань, аналізуватимуться їм і, отже, відображатися з істотною, специфічної для даної галузі сторони. І навпаки, якщо орієнтування в досліджуваних об'єктах йде за зовнішніми властивостями, що не зачіпають їхні суті, відображення цих об'єктів (знання про них) виявляться поверхневими, неспецифічними. Знання ніколи не можна дати в готовому вигляді: вони завжди засвоюються через включення їх в ту чи іншу діяльність. Навіть при механічному заучуванні знання входять до складу діяльності (мнемічною), неадекватною, однак, цим знанням, що не містить в орієнтовній основі їх суттєвих властивостей і відносин, орієнтованої лише на їх тимчасову або просторову послідовність.

Було б неправильним думати, що необхідна для засвоєння знань діяльність завжди готова до початку їх засвоєння. Навпаки, при засвоєнні істинно нових знань необхідні пізнавальні дії не можуть бути готові до роботи студента з цим матеріалом. Марно чекати, поки сформується математичне мислення, щоб почати навчати математиці, так як тільки навчання математиці призводить до розвитку математичного мислення. У цьому і виявляється визначальна роль навчання в розумовому розвитку людини.

Відсутні пізнавальні дії моделюються у зовнішній, матеріальній (або матеріалізованої) формі, в якій представляються і підлягають засвоєнню знання (через зовнішні предмети, моделі, схеми), що включаються з самого початку до складу цієї дії (в якості об'єктів дії, елементів його орієнтовної основи) . З переходом дії на новий етап змінюється і форма представлення знань. Таким чином, засвоєння знань і формування адекватної їм системи розумових дій протікає як єдиний процес.

Так, при формуванні понять як засіб засвоєння ми використовуємо дію підведення під поняття. Застосовуючи його до різних предметів і орієнтуючись при цьому на одну і ту ж систему істотних ознак, учень всі ці предмети відображає зі строго визначеною боку, знімає з них за певним зразком, що задається системою орієнтирів, образ, тобто одночасно засвоює і дію підведення під поняття, і знання про ці предмети.

У зв'язку з цим стає зрозумілим, що засвоєння (засвоєння) знань завжди відносно. По-перше, якість засвоєння знань визначається адекватністю діяльності, з якою вони пов'язані, по-друге, ступенем сформованості основних її властивостей, по-третє, типом орієнтовної основи цієї діяльності і, нарешті, широтою включення цих знань в інші види діяльності.

Останнє положення необхідно розглянути детальніше. Припустимо, мова йде про формування наукових понять.

Як засіб засвоєння візьмемо дію підведення під поняття. Учень, виконуючи цю дію послідовно на всіх етапах, навчається миттєво, в розумі розпізнавати об'єкти, що належать даному класу. Аналізуючи поетапно об'єкти з точки зору істотних властивостей, він поступово формує узагальнений, абстрактний образ об'єктів даного класу - поняття про них. Однак, успішно виконуючи на його основі дія розпізнавання, учень може не вміти виконати інші дії: порівняння, виведення наслідків з факту належності об'єкта даного класу та ін., Так як це інші дії, які його не навчали. Разом з тим, вони також можуть бути використані і як засобу формування понять і виступати як спеціальна мета навчання. Природно, що якість засвоєння понять, що використовуються в різних видах діяльності, має бути визнане як більш висока в порівнянні з першим випадком, де поняття обмежене рамками однієї дії.

У світлі викладеного може бути конкретно розкритий і розвиваючий ефект навчання. Якщо система дій, використовуваних при засвоєнні знань, обмежена, то буде відбуватися накопичення знань без придбання нових пізнавальних можливостей. Так, у нашому прикладі можна всю систему наукових понять того чи іншого навчального предмета сформувати за допомогою дії підведення під поняття. Учень буде орієнтуватися щоразу на істотні властивості предметів, безпомилково розпізнавати їх, але й тільки. Але можна зробити й інше: при засвоєнні двох-трьох понять сформувати всю систему можливих пізнавальних дій. У цьому випадку знань учень набуває мало, але пізнавальні можливості його будуть істотно вище, ніж у першому випадку.

Таким чином, при програмуванні засвоєння знань необхідно використовувати не тільки наявні пізнавальні дії студентів, а й постійно формувати нові. Тільки в цьому випадку навчання буде джерелом розвитку, буде дійсно вести його за собою. "..."[16, с.365].

3.5 Етапи формування прийомів розумової діяльності

В якості основних прийомів будемо розглядати методику формування прийому порівняння та прийому визначення понять. К.Д. Ушинський вважав, що в дидактиці порівняння повинно бути основним прийомом, назвав його основою будь-якого мислення. Порівняння широко використовується при введенні нових понять, вивченні їх властивостей, формулюванні і застосуванні нових прийомів навчальної діяльності, при узагальненні навчального матеріалу. Не менш важливу роль в навчанні відіграє визначення математичних понять, вивчення яких пронизує весь шкільний курс математики.

Перший етап – діагностика сформованості прийомів розумової діяльності

Методи діагностики, які застосовуються в навчанні математики, які засновані на загальних методах, що розроблені дидактами (наприклад, аналіз усних відповідей і письмових робіт студентів, спостереження за їх повсякденною діяльністю і ін.), а також на особливостях навчальної діяльності студентів з засвоєння математики (наприклад, підрахунок кількості розв'язаних студентами за один і той самий час задач і ін.). Розглянемо приклади використання деяких прийомів методів діагностики, зв'язаних з математикою.

Анкетування

Одним із показників сформованості прийомів навчальної діяльності в студентів є усвідомлення цих прийомів, вміння розповідати про свої дії іншим студентам. Цей показник можна використати в анкеті. Наведемо приклади запитань для *анкети, що діагностує усвідомлення студентами прийому порівняння.*

1) Що означає порівняти об'єкти чи явища?
2) Які дії ви виконаєте для того, щоб порівняти об'єкти чи явища?
3) Які прийоми розумової діяльності входять, на вашу думку, в склад порівняння?
4) Як виконуються прийоми розумової діяльності, що входять в склад порівняння?
5) Як ви визначите, що знайдена властивість об'єкта чи явища: а) необхідна; б) достатня; в) необхідна і достатня; г) істинна; д) неістинна; е) загальна з іншими об'єктами спостереження; ж) відмінна від інших об'єктів спостереження?
6) Як правильно обрати ознаку для порівняння?

Використання математичних задач та вправ

Математичні задачі можуть бути цілями діагностики сформованості прийомів навчальної діяльності студентів, якщо аналізувати хід їх розв'язання. Вдало розташовані по зростанні складності задачі і вправи дозволяють визначити рівень сформованості прийомів їх розв'язання в студентів, а також прийом порівняння як самих задач, так і прийомів їх розв'язання.

На практиці етап діагностики не завжди має місце, так як у випадку вивчення нового матеріалу зв'язаного з формуванням зовсім нових для студентів прийомів навчальної діяльності [21, с. 29].

Другий етап – визначення мети навчальної діяльності і сприймання їх студентами

На цьому етапі використовуються методи мотивації навчальної діяльності, викликати зацікавленість до оволодіння прийомами цієї діяльності.

Назвемо деякі з них.

Словесні методи

На початку навчального року, семестру, перед вивченням розділу, курсу чи перед уроком і етапами уроку вчитель під час усної бесіди чи колективного обговорення задач навчальної діяльності формулює поруч з іншими ціль: оволодіти необхідними прийомами діяльності для вирішення поставлених навчальних задач.

Наочні методи

Цілі навчальної діяльності можна представити наочно, наприклад за допомогою таблиць та схем, які демонструються за допомогою ТЗН. Перед студентами ставиться мета оволодінням не тільки змістом навчального матеріалу, але і прийомами його розуміння і застосування. Наприклад, на стенді «Навчайся розуміти математику» можна розмістити таку загальну табличку:

Етапи навчального процесу	**Прийоми навчальної діяльності для засвоєння математичних понять**
Засвоєння нових знань	Спостереження, порівняння, аналіз, абстрагування, синтез, узагальнення, формулювання визначень понять
Осмислення та перетворення нових знань	Конкретизація, конструювання контрприкладів, підведення до поняття, запам'ятовування визначень
Закріплення і застосування вивченого	Класифікація, систематизація, спеціалізація, узагальнення, встановлення співвідношень між поняттями, використання понять в теоремах та задачах

Ця таблиця може бути використана (повністю чи частково) в шкільному курсі математики неодноразово (при вивченні різноманітних понять).

Систематичне звертання до неї показує загальність мети, методів і прийомі вивчення понять, виділяє так звані логічні опори.

Проблемно-пошукові методи

Як відомо, мета навчальної діяльності найкраще реалізовується в процесі створення і розширення проблемної ситуації. Допомагаючи сформулювати мету навчальної діяльності, проблемна ситуація показує, що старі способи діяльності недостатні для її досягнення, і, відповідно, для розв’язання задач необхідні не тільки нові теоретичні знання, але і нові прийоми діяльності для розв’язання цих задач.

Іншими прийомами мотивації і стимулювання навчальної діяльності для навчання математики є: використання історичного і цікавого матеріалу, розв’язання задач з професійним змістом, пояснення практичного значення матеріалу, підбиття підсумків і заохочення досягнень в навчальній діяльності [21, с. 32].

Третій етап – інструктаж, застосування прийому навчальної діяльності

З позиції діяльнісного підходу до навчання недоцільно давати прийом навчальної діяльності в готовому вигляді, а організувати самостійне здобуття студентами. Тоді інструктаж складається з трьох етапів, які можуть реалізовуватися як на одному, так і декількох уроках.

1.Розв’язання навчальної задачі «по теорії» - на основі вивченої теорії, по аналогії з відомими раніше прийомами, на основі узагальнення та застосування відомого прийому інтуїтивно і т.д.

2.Усвідомлення студентами того, що для розв’язання задач необхідно відповідати на запитання вчителя: «Визначіть і перерахуйте по порядку, які дії ви виконаєте для розв’язання даної задачі».

3.Демонстрація зразків застосування такого прийому – розв’язання навчальних завдань, які супроводжуються усними вказівками і порадами.

Розглянемо методику введення нового прийому навчальної діяльності.

Прийом порівняння. Вже в початкових класах студентам необхідно порівняти об’єкти для виділення в них деяких властивостей. Спочатку достатньо поставити завдання: знайдіть, чим схожі ці об'єкти і чим відрізняються один від одного; пізніше це називають спільними та відмінними властивостями об'єкта.

Наприклад, для формування поняття «трикутник» вчитель використовує предмети чи моделі в формі трикутника, прямокутника, кола, різних кольорів, зроблених з паперу, дерева, скла, дроту і т.д. Перші порівняння можуть бути по фактурі матеріалу, по кольору, по твердості, по масі, по розмірах, по формі. Далі вчитель визначає істотні та неістотні властивості і навчатиме розрізняти їх. Таким чином здійснюється підхід до другого етапу інструктажу – усвідомлення дій прийому порівняння [21, с. 33].

Четвертий етап – практичні вправи для застосування введеного прийому навчальної діяльності

Ці вправи можна розділити на три групи.

1. Вправи направлені на *засвоєння різних складових дії* (більш складніших) основного прийому(так звані підготовчі вправи для розв'язання основних задач).

Вправи для *виділення загальних та істотних властивостей понять.*

1. Перерахуйте відомі вам властивості паралелограма. Які властивості з усіх чотирикутників належать лише паралелограму?

2. Перерахуйте не менше 12 властивостей квадрату.

3. Вкажіть властивості, які належать всім (тільки деяким) прямокутникам.

4. Знайдіть спільні властивості трапеції та ромба, трикутника і паралелограма, прямокутника і кола.

5. Знайдіть властивості, які є спільними для всіх випуклих многокутників.

6. Перерахуйте основні властивості прямокутника і ромба. Порівняйте отриманий список властивостей з основними властивостями квадрата.

7. Вкажіть властивості, які спільні для прямокутника і ромба. Порівняйте знайдені властивості з основними властивостями: а) квадрата, б)паралелограма.

8. Перерахуйте істинні ознаки понять: ромб, прямокутний трикутник, піраміда, паралелепіпед.

9. Які з перерахованих нижче властивостей трапеції є істинними, а які – ні: а) дві сторони трапеції паралельні; б) два кути при більшій основі гострі; в) сума

кутів трапеції, які прилягають до однієї бокової сторони, дорівнює $180°$; г) основи трапеції горизонтальні; д) два кути при меншій основі тупі?

Вправи <u>для *розрізнення родових та видових ознак і зв'язків між ними*</u>.

1. Для кожної фігури, які ви знаєте, вкажіть: а) родове поняття, б) видове поняття.

2. В наведених нижче визначеннях виділіть назву об'єкта, родове поняття, видові ознаки і характер зв'язку між цими ознаками: а) кут суміжний з будь-яким кутом многокутника, називається зовнішнім кутом цього многокутника; б) прямим кутом називається кут, що дорівнює $90°$;в) гострим кутом називається кут, що менший $90°$; г) трикутником називається прямокутник, якщо один з його кутів прямий; д) п'ятикутник – це многокутник з 5 сторонами; е) дві різні прямі, що лежать в одній площині і не перетинаються називаються паралельними; ж) відрізок, що з'єднує середини двох сторін трикутника називається середньою лінією; з) два однойменних многокутники називаються подібними, якщо кути одного відповідно дорівнюють рівним кутам другого, а сторони, що сполучають рівні кути, пропорційні; і) якщо точка О є серединою відрізка AB, то і точки A і B називаються симетричними точками відносно точки O.

3. Вкажіть найближче родове поняття для понять: а) квадрат; б) вертикальні кути; в) хорда.

4. Для даних понять вкажіть родове поняття: шестикутник, рівносторонній трикутник.

5. Назвіть декілька видових понять для кожного з даних: геометрична фігура, многокутник.

6. Для кожного з даних понять підібрати видову відмінність і доповнити визначення: а) квадрат – це чотирикутник,…; б) квадрат – це прямокутник,…

7. Для кожного з даних понять підберіть родове поняття і доповніть визначення: а) прямокутник – це…, у якого протилежні кути прямі; б) прямокутник – це …, у якого чотири сторони і кути прямі; в) трикутник – це …з найменшим числом сторін [21, с. 35].

П'ятий етап – оперативний контроль і корекція процесу формування прийомів навчальної діяльності

Контроль здійснюється за допомогою методів і прийомів діагностики, методів взаємного контролю і самоконтролю. Хорошою вправою на цьому етапі є вправа виду «знайди помилку». Наприклад, для контролю засвоєння прийому порівняння:

Чи правильно проведено порівняння об'єктів, а якщо неправильно, то де помилка: а) порівнявши трикутники ABC і MKL, встановили, що ΔABC прямокутний, а ΔMKL рівнобедрений; б) порівнявши два прямокутники, встановили, що один із них має площу 48 $м^2$, а периметр другого дорівнює 60 м; в) порівнявши два кола, встановили, що радіус одного з них дорівнює 6 м, а радіус другого 8 м; г) порівнявши два многочлени і визначили, що степінь першого з них дорівнює 3, а другого є сума трьох одночленів; порівняли трикутник і многочлен і визначили, що площа трикутника дорівнює 10 $м^2$, а значення многочлена при $x=2$ дорівнює 10?

Для контролю засвоєння прийому визначення понять:

Знайдіть і виправте помилки в наступних визначеннях: а) діаметр кола називається найбільша хорда, яка проходить через центр; б) паралелограмом називається многокутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні; в) чотирикутник, у якого дві протилежні сторони рівні і паралельні називаються паралелограмом; г) чотирикутник, в якого протилежні сторони рівні називається паралелограмом; д) ромбом називається рівносторонній неправильний чотирикутник; е) прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються, скільки би їх не продовжували; ж) два рівні кути називаються вертикальними, якщо сторони одного є продовженням сторін іншого; з) медіаною трикутника називається відрізок, що ділить його сторону пополам; і) кут, утворений двома хордами називається вписаним; л) рівнобедренний трикутник – це коли дві сторони рівні; м) квадратом називається чотирикутник, у якого всі сторони рівні [21, с. 39].

Шостий етап – застосування засвоєних прийомів навчальної діяльності

На цьому етапі виділяють два основних види діяльності вчителя.

І. *Теоретичне узагальнення*, що допомагає студентам усвідомити ситуацію застосування засвоєних прийомів. З цією метою учитель використовує: а) підбиття підсумків (уроку, теми, розв'язування проблемної ситуації і т.д.), що показують, як з допомогою сформульованих прийомів навчальної діяльності розв'язуються поставлені на початку роботи задачі; б) встановлення логічних зв'язків у вивченому матеріалі (між поняттями, властивостями, темами, предметами, прийомами навчальної діяльності) із застосуванням з цією метою узагальнюючих таблиць і схем, ТЗН, конспектів, усних бесід та лекцій.

Наприклад, при формуванні прийомів роботи з математичними поняттями для цієї мети використовується класифікація та систематизація, встановлені відношення між поняттями, що допомагає студентам усвідомити зв'язки між прийомами навчальної діяльності.

ІІ. *Організація ситуацій для практичного застосування* засвоєних прийомів навчальної діяльності. З цією метою вчитель використовує: а) самостійну роботу студентів по підручнику; б) самостійне розв'язання задач студентами; в) практичні та лабораторні роботи; г) уроки узагальнення і повторення і т.д. Особливістю навчальної діяльності студентів в цих ситуаціях є те, що для розв'язання кожної з навчальних задач вони пригадають засвоєний прийом і використають систему їх дій. Якщо прийом ще не засвоєний, можна використати пам'яткою, допомогою друга і вчителя.

Для наших прикладів – прийомів порівняння і визначення понять можна запропонувати наступні види вправ:

Вправа на порівняння:

1. Де розташовується: а) точка перетину висот трикутника; б) центр описаного кола; в) центр кола, вписаний в гострокутній трикутник? в прямокутний трикутник? в тупокутній трикутник?

Вправи на класифікацію понять:

1) Перевірте правильність наступних класифікацій: а) трикутники діляться на гострокутні, прямокутні, тупокутні, рівносторонні і рівнобедрені; б) прямокутники можуть будуть рівносторонніми і нерівносторонніми; в) трикутники поділяються на рівносторонні, рівнобедрені та різносторонні; г)

паралелограми поділяються на прямокутники, ромби, квадрати; д) геометричні фігури поділяються на многокутники та кола. Проілюструйте круговими схемами.

2) Якого виду буде трикутник, в якому: а) один з його кутів більше суми двох інших; б) один з кутів дорівнює сумі двох інших; в) сума двох будь-яких кутів більша 90° ;г) сума будь-яких двох кутів менша 120° д) кожен з кутів менший суми двох інших.

Вправи на узагальнення та спеціалізацію:

1) Чи правильно узагальнені поняття: а) ромб, паралелограм, чотирикутник, многокутник; б) відрізок, пряма; в) рівнокутній трикутник, рівносторонній трикутник; г) паралельні прямі, перпендикулярні прямі; д) півколо, круг?

2) Чи правильно виконана спеціалізація понять: а) рівносторонній чотирикутник, ромб; б) трапеція, паралелограм; в) рівнобедрений трикутник, прямокутній трикутник? [21, с. 40].

Сьомий етап – узагальнення і застосування засвоєних прийомів навчальної діяльності

На основі узагальнення прийомів навчальної діяльності здійснюється навчання для їх застосування. Воно починається ще на етапі застосування прийомів навчальної діяльності не тільки в стандартних, але і в нових, нестандартних ситуаціях. На цьому етапі, як і на попередньому, використовується пояснювально-ілюстративні, проблемні, частково-пошукові методи, методи практичної та самостійної роботи, репродуктивного та варіативного використання і застосування засвоєних прийомів[21, с. 43].

Восьмий етап – закріплення узагальнених прийомів навчальної діяльності

Організовуючи діяльність студентів для самостійного застосування прийомів в повсякденній навчальній діяльності, учитель акцентує увагу студентів на ситуаціях, в яких це можна здійснити. З цією метою використовуються:

1) узагальнені уроки;

2) самостійна навчальна діяльність студентів для вивчення матеріалу: вивчення незнайомого тексту підручника, самостійне формулювання визначень

понять і теорем, самостійне доведення і пошуки різних способів доведення теорем, підготовка доповідей, рефератів і творів з математики;

3) самостійна навчальна діяльність для розв’язання математичних задач: самостійні і контрольні роботи, пошуки різноманітних (найбільш раціональних) способів розв’язання задач, розв’язання нестандартних задач, захист оригінальних розв’язків, складання задач для студентів;

4) практичні та лабораторні роботи дослідницького характеру;

5) домашня робота студентів для засвоєння теорії і прийомів розв’язання навчальних задач;

6) самостійне застосування засвоєних прийомів навчальної діяльності з інших предметів природничо-математичного циклу.

Ці і інші ситуації створюють не тільки умови для закріплення узагальнених прийомів навчальної діяльності і способів їх застосування, але і передумови для знаходження на їх основі нових прийомів. Чим більше студенти самостійно застосовують засвоєні прийоми, тим більше закріплюються в їх свідомості не тільки основні істинні дії, що входять в склад прийому, але і варіації цих дій. Відповідно з накопиченням досвіду вони можуть змінювати і знаходити ці істинні дії, тобто знаходити нові прийоми на основі засвоєних.

Результатом цього етапу стане виховання в студентів звички діяти самостійно і раціонально в різноманітних навчальних ситуаціях[21, с. 44].

Дев’ятий етап – знаходження нових прийомів навчальної діяльності

Елементи навчання знаходження нових прийомів знаходяться на наступних етапах і дозволять намалювати деякі шляхи самостійного знаходження студентами прийомів навчальної діяльності.

1. *Узагальнення частинних випадків* розв’язання навчальних задач. Цей шлях використовувався ще на етапах введення і узагальнення прийомів. При цьому слід звертати увагу студентів на варіативність дій в складі прийому: в залежності від умови задачі можна так змінити відомий прийом варіюванням складових дії, що отримаємо новий прийом для розв’язання даної конкретної задачі.

Так, перебудовуючи прийом формулювання визначення поняття, ми ми отримали прийом підведення під поняття, прийом засвоєння визначення і прийом контролю засвоєних визначень; прийом доведення рівносильності різноманітних визначень поняття отриманий деякою перебудовою прийому доведення необхідної та достатньої умови.

2. *Перебудова і застосування відомого прийому* – другий шлях знаходження нових прийомів.

3. *Конкретизація і спеціалізація загальних прийомів*. Наприклад, в загальному прийомі порівняння можна задати по-різному умову для порівняння, необхідне для вивчення властивостей математичних понять. Це може бути довжина відрізка, величина кута і т.д. Порівнюючи конкретні об'єкти по вибраній умові і перераховуючи дії, які для цього потрібно зробити, ми отримаємо спеціальні прийоми порівняння відрізків, кутів і т.д.

Інший приклад – спеціалізація загального прийому аналізу для вивчення різноманітних математичних об'єктів. Наведемо приклади деяких спеціальних прийомів аналізу.

Загальний аналіз доведення теореми чи розв'язання задачі:

1) скласти запитання: що достатньо знати, щоб довести теорему? Сформулювати це запитання.

2) перевірити, чи є необхідна властивість в умові теореми (задачі);

3) якщо «так» - теорема доведена (задача розв'язана), якщо «ні» - поставити наступне запитання: що достатньо знати, щоб довести цю теорему? Сформулюйте відповідь.

4) продовжувати цей процес (суть якого – виділити частини і визначити властивості) до того часу, доки не отримаємо відому в умові властивість, з якого випливає доведена теорема (відповідь на запитання задачі);

5) на основі пунктів 1-4 скласти план доведення теореми(доведення задачі).

Розкладання умови теореми (задач) на частини:

1) якщо можна, розділити умову на простіші;

2) вияснити план доведення кожної з частин;

3) скласти план доведення в цілому.

Визначення виду теореми:

1) якщо можливо, то визначить вид теореми (задачі);

2) якщо існує, використати метод доведення для даного виду теорему;

3) при складанні плану використати відомий метод (прийом).

4. *Аналогія* – ще один шлях знаходження нових прийомів. Аналогія допомагає виділити властивостями нових понять в порівнянні з відомими і, таким чином, сформулювати як визначення нового поняття, так і прийоми застосування їх.

5. Новий прийом можна знайти як *обернений до відомого*, цьому сприяє розуміння структури обернених задач в математиці, таких загальних прийомів розумової діяльності, як аналіз і синтез, узагальнення і конкретизація, дедукція та індукція.

6. Новий прийом можна знайти самостійно, спираючись на *аналіз змісту* вивченого теоретичного матеріалу [21, с. 44].

3.6 Педагогічний експеримент та статистична обробка його результатів

В ході дослідження було розроблено методичне забезпечення математичного гуртка «Ерудит-математик» для студентів I-II рівнів акредитації. Для аналізу ефективності використання даного факультативу було застосовано метод експертних оцінок.

В групу експертів були запрошені ряд компетентних фахівців:

1) Кандидат педагогічних наук, професор – Белешко Дмитро Тимофійович;

2) Кандидат педагогічних наук, професор – Крайчук Олександр Васильович;

3) Старший викладач кафедри математики та методики її викладання – Клекоць Ганна Яківна;

4) Кандидат педагогічних наук, доцент – Кирилецька Галина Миколаївна;

5) Кандидат педагогічних наук, доцент – Коваль Володимир Васильович.

Оскільки завершальним етапом аналізу є обробка результатів експертного коригування, що проводиться з метою узгодження думок експертів, то серед аналітико-статистичних методів обробки результатів експертних оцінок обрано ранг кореляції.

Результат опитування експертів являє собою сукупність оцінок. Оцінки виставляються по десятибальній системі. Показником узгодженості думки групи експертів є середнє арифметичне величини оцінки певного питання - $M_к$

$M_к = \frac{1}{m} \sum C_k$, де

m - кількість експертів, що приймали участь в оцінці;

$C_к$ - оціночний показник k -того фактора в i -того експерта.

Оціночні фактори:

1- програма гуртка;
2- відповідність задач поставленим практичним завданням;
3- доступність матеріалу та якість його оформлення;
4- логічність та послідовність викладу матеріалу;
5- наявність методів розв'язання завдань;
6- ефективність формування прийомів розумової діяльності на основі запропонованих завдань.

Підсумкова таблиця даних експертного опитування

Оціночний фактор	Експерти					$M_к$
	1	2	3	4	5	
1	9	6	8	7	9	7.8
2	4	5	6	7	5	5.4
3	10	6	10	8	7	8.2
4	9	8	6	8	7	7.6
5	7	8	5	9	6	7.0
6	6	10	7	8	9	8.0

Сума рангів $S_к$ кожного фактора обчислюється наступним чином:

1. Проводиться ранжування за спаданням оцінок за допомогою чисел натурального ряду, які є рангами оцінок кожного експерта (r).

2. Якщо експерт оцінює декілька факторів однаковою оцінкою, то їм присвоюється «зв’язані ранги» (p).
3. Суми кожного із стовпчиків повинні бути рівними і дорівнювати контрольному числу, яке обчислюється за формулою:

$S_к = \frac{(1+k)k}{2}$, де

k - кількість розглядуваних факторів.

4. Далі підраховується сума кожного із рядочків $S_к$.

Ранжування експертних оцінок

Оціночний фактор		Експерти					$S_к$
		1	2	3	4	5	
1	б	9	6	8	7	9	39
	r	6	4	5	5	4	24
	p	5	2.5	3	2	5	17.5
2	б	4	5	6	7	5	27
	r	1.8	1	1.7	1	4.5	10
	p	2	2.5	4	5	6	19.5
3	б	10	6	10	8	7	41
	r	2.5	4	5	5.3	4	19
	p	4.5	5	6	3.5	2	21
4	б	9	8	6	8	7	38
	r	4	4	1	2	2	13
	p	5	1	2	2.5	4	14.5
5	б	7	8	5	9	6	35
	r	3	4	6	3	2.5	18.5
	p	5.5	4	5	4	4	22.5
6	б	6	10	7	8	9	40
	r	3	6	5	5.5	3	22.5
	p	2	5	2	5	4	16
$S_к$		21	21	21	21	21	

Показником ступеня узгодженості думок експертів є коефіцієнт варіації оцінок кожного фактора - $V_к$. Цей коефіцієнт обчислюється наступним чином:

а) обчислюється дисперсія оцінок $D_к$:

$D_к = \frac{1}{m-1} \sum (C_{ik} - M_k)^2$, де

m - кількість експертів, що приймали участь в оцінці.

$C_{ік}$ - оціночний показник k -того фактора в i -того експерта.

$M_к$ - середнє арифметичне величини оцінок фактора.

б) обчислюємо середнє квадратичне відхилення оцінок - $\sigma_к$:

$\sigma_к = \sqrt{D_k}$.

в) знаходимо коефіцієнт варіації $V_к$:

$V_к = \frac{\sigma_k}{m}$.

Показник ступеня узгодженості думок експертів

Оціночний фактор	$(C_{ik} - M_k)^2$					$\sum (C_{ik} - M_k)^2$	$D_к$	$\sigma_к$	$V_к$
	1	2	3	4	5				
1	1.2	1.8	0.2	0.8	1.2	5.2	1.3	1.1	0.22
2	1.4	0.4	0.6	1.6	0.4	4.4	1.1	1.04	0.20
3	1.8	2.2	1.8	0.2	1.2	7.2	1.8	1.34	0.27
4	1.4	0.4	1.6	0.4	0.6	4.4	1.1	1.04	0.20
5	0	1	2	2	1	6	1.5	1.22	0.24
6	2	2	1	0	1	6	1.5	1.22	0.24

Таким чином, на основі аналізу вище наведених таблиць, можна стверджувати, що методика проведення факультативних занять «Ерудит-математик» є в значній мірі ефективною, позитивно впливає не лише на рівень сформованості математичних знань, умінь та навичок, але й створює позитивний настрій.

Підтвердження цього висновку є узагальнені результати експертних досліджень на значній кількості студентів.

ВИСНОВКИ

В процесі навчання необхідно виділяти дві самостійні та взаємопов'язані задачі: опанування студентами змістом того чи іншого предмета і цілеспрямоване формування в них прийомів розумової діяльності.

Загальні розумові дії (операції) як механізми, необхідні для успішного протікання розумових дій, найбільш повно відображені у працях С.Л. Рубінштейна та психологів його школи. Такими діями вважають: аналіз, синтез, аналіз через синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, аналогія, класифікація.

Формування таких прийомів дає можливість студентові самостійно організовувати свою продуктивну навчальну діяльність, оцінювати її результати (що є необхідною умовою для саморегуляції навчальної діяльності), коригувати її у процесі виконання.

Для написання магістерської роботи ми ознайомилися з різними способами формування прийомів розумових дій запропонованих такими вченими як: Л.С. Виготського, Е.Н. Кабанової-Меллер, Ю.С. Бабанського, В.Н.

Осинською, З.І. Слепкань, А.А. Столяра, І.Ф. Тесленко С.Ф. Бондар, Б.І. Коротяєва, О.С. Кретинина, Я.А. Пасічник, В.І. Решетнікова; розробили комплекс факультативних занять гуртка «Ерудит - математик» для студентів, провели анкетування викладачів та вчителів математики на тему: «Як формувати прийоми розумової діяльності і як покращити їх застосування під час навчання математики?» та за допомогою методу експертних оцінок здійснили оцінку ефективності використання запропонованих завдань.

У процесі навчання математики вчитель може використовувати в поєднанні стихійний, непрямий і прямий шляхи формування прийомів розумової діяльності. Залежно від індивідуальних особливостей і ступеня підготовленості студентів, складності і обсягу матеріалу, що вивчається, в одних випадках учителеві необхідно добирати спеціальну систему вправ для вивчення і закріплення нового матеріалу, за допомогою якої і формуються прийоми діяльності, в інших випадках доцільно знайомити студентів відразу із структурним складом прийому, його сутністю, правилом-орієнтиром. Такий підхід породжує деякі перехідні варіанти. Одним з таких варіантів є методика формування прийомів розумової діяльності, розроблена О.Н.Кабановою-Меллер, за якою в центрі уваги на уроці перебувають певні прийоми розумової діяльності, але структура цих прийомів студентам жорстко не задається. Тому вони часто ставляться в умови самостійного виділення послідовності дій, яка задаєприйом, або знаходження загального орієнтиру. Доцільно, щоб студенти підводилися до розуміння прийомів і оволодіння ними у процесі засвоєння нових знань.

Хотілося б підкреслити, що формування розумової діяльності – не самоціль. Мета вчителя – виховати творчу особистість, яка готова свої пізнавальні можливості застосовувати під час життєвих ситуацій.

Всі компоненти діяльності повинні формулюватися з ухуванням рівня розвитку студента. Тільки в цьому випадку освіта розв’яже головне завдання, що стоїть перед нею – озброєння студентів засобами пізнання для систематичного вивчення відмінностей у різного роду наук.

Отже, прийоми розумових дій є важливим компонентом у формуванні компетентності студента при вивченні математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамів Ю.О., Белешко Д. Т. Формування прийомів розумових дій у студентів вищих навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації при проведенні позакласної роботи з математики. // Наука, освіта, суспільство очима молодих : Матеріали IX Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих науковців. Частина 2. Природничо-математичний, суспільно-гуманітарний та економічний напрям. – Рівне: РВВ РДГУ. – 2016. – С.3-4.

2. Апостопола Г.В. Планіметрія в опорних схемах/ Передм. В. Ясінського. / Г.В. Апостопола– К.: Поліграфсервіс, 2001. – 124 с.

3. Атанасян Л.С. Геометрія: Підручник для 7-11 класів загальноосвітніх закладів / Л.С. Атанасян. – М.: Просвещение, 1987. – 183 с.

4. Барыбин, К. С.. Сборник задач по геометрии: (планиметрия); пособие для учителей / К. С. Барыбин.- М.: Учпедгиз, 1958. – 184 с.

5. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навчальний посібник./ Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367с.

6. Белешко Д.Т. Методика заключного етапу розв'язування геометричних задач в основній школі. Методичний посібник для студентів факультету математики та інформатики / Д.Т. Белешко, Н.П. Климук. – Рівне: Рівненський державний гуманітарний університет, 2011. – с.41

7. Бродський Я. С. Факультативні заняття за програмою відкритого математичного коледжу. / Я. С. Бродський, О. Л. Павлов. // Математика в школах України. — 2003. — №29,30,31,34.

8. Бродський Я. С. Східноукраїнська заочна математична школа запрошує. / Я. Бродський, С. Великодний, О. Глюза, О. Павлов. //Математика. — 2005. — № 40.

9. Бродський Я. С. Події, ймовірності, частоти. / Я. С. Бродський. — Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 120с.

10. Василенко О. О. Сьома грань. / О. О. Василенко. // Освіта.— 2002.— № 38.

11.ВірченкоН.О. Математика в афоризмах, цитатах і висловлюваннях./ Н.О. Вірченко. – К., Вища школа, 1974. –210с.

12. Выготский Л.С. Собр. соч.: В 6т. /Л.С. Выготский.– М.,1982-1984. – Т. 4.

13. Габович И. Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач: Кн. для учащихся. / И.Г. Габович. — М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996.—192 с.

14. Гальперин П.Я. Типы ориентировки и типы формирования действий и понятий // Доклады АПН РСФСР. / П.Я. Гальперин . - 1958. №2.- 452 с.

15. Гальперин П.Я. Развитие исследований по формированию умственных действий //Психологическая наука в СССР. / П.Я. Гальперин . - М., 1959. Т.I.- 523 с.

16. Гальперин П.Я Основные результаты исследований по проблеме "Формирование умственных действий и понятий". / П.Я. Гальперин . - М., 1965.-436 с.

17. Гальперин П.Я. О психологических основах программированного обучения // Новые исследования в педагогических науках. / П.Я. Гальперин . - М., 1965. Вып. IV.-115с.

18. Гальперин П.Я Введение в психологию. / П.Я. Гальперин . - М., 1976.- 216с.

19. Гончарова И.В. Первоначальньїе сведения о функции: факультативний курс с использованием программного обеспечения: учеб. пос. для учащихся. / [сост.: И.В.Гончарова, Ю.Г.Тьтко].- Донецк:«Цифрова типографія», 2008.- 60 с. -1 злектрон. опт. Диск (CD-ROM).
20. Гончарова І. В. Місце електронного підручника «Евристики в розв ’рванні задач» на евристичному факультативі / І. В. Гончарова. // Особисто орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи: матеріали III Всеукраїнської наук-пщкт. конф., 8-9 квітня 2008 р, м. Полтава. - Полтава: АСМІ, 2008. - С. 164
21. Єпишева О.Б., Крупич В.Й. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учеб. деятельности: Кн. для учителя. / О.Б. Єпишева, В.Й. Крупич. – М.:Просвещение, 1990. – с.127
22.Кабанова – Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. / Е.Н. Кабанова – Меллер. – М.: Просвещение, 1968. – 288 с.
23. Касьяненко М.Д. Підвищення ефективності навчання математики / М.Д. Касьяненко. – К., 1999. – 180 с.
24. Клочко В.І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі: дис. ... доктора пед. наук: 13.00.02 /В.І. Клочко. - Вінниця, 1998. - 396 с.
25. Колягин Ю.М. и др. Методики преподавания в средней школе. Общая методика. / Ю.М. Колягин – М.: Просвещение, 1980. – 386 с.
26.Кушнір І.А. Методи розв’язування задач з геометрії: Книга для вчителя. / І.А. Кушнір. – Абрис, 1994. – 464с.
27. Медулич В. В. Аналогія- джерело ідей./ В. В. Медулич.//Математика. – 2007. - №15. – с.6
28. Методика викладання математики: Практикум. / за ред. Бевза Г. П. – К.: Вища школа, 1981. –263 с.
29. Мовчан С.М. Математична індукція.[Електронний ресурс] / С.М. Мовчан. // інтернет-журн. – 2010 – Вип. 4. – Режим доступу: ito.vspu.net/Naukova.../data/.../zan_11_mat_ind.doc
30. Нагібін Ф.Ф. Геометричні задачі у восьмирічній школі/ Ф.Ф. Нагібін, О.Ф. Семенович. – К.: Рад. Школа, 1967. – 328 с.

31. Осинская Н.В. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах. / Н.В. Осинская. – Рад. Школа, 1980. – 143с.
32. Осинская Н.В. Формирование умственной культури учащихся в процес се обучение математике. / В.Н. Осинская. – К.: Рад.шк., 1989. – 192 с.
33. Панішева О.В. Прийоми запам’ятовування матеріалу на уроках математики. / О. В. Панішева.// Математика в школах України. – 2007.- №1(157) – с.7
34. Панішева О. В. Тиждень математики в школі./ О. В. Панішева. — Х.: Вид. група «Основа», 2007.
35. Пасічник І.Я. Мислительна діяльність студентів на уроках математики: (Методичні рекомендації). / І.Я. Пасічник, Я.А.Пасічник.– Львів, 1992. – 146 с.
36.Підручна М. В., Янченко Г. М. Позакласна робота з математики у неповній середній школі (І частина). / М. В. Підручна, Г. М. Янченко.— Тернопіль: Підручники і посібники, 1997- с.63
37. Погорелов А.В. Элементарная геометрия: Изд.3-е, доп. / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1977. – 279 с.
38. Пойа Д. Как решать задачу: Пособие для учителей / Пер. с англ. В. Звонарёвой и Д. Белла; Под. ред. Ю. Гайдука. / Д. Пойа. – Изд. 2-е. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
39. Программа средней общеобразовательной школы: Математика. – М.: Просвещение, 1988. – 46 с.
40. Саранцев Г.И. Упражнение в обучении математике / Г.И. Саранцев. – 2-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 2005. – 255 с.
41. Сліпенко А. К. Лінійні рівняння і системи лінійних рівнянь. / А. К. Сліпенко — Донецьк: ДонНУ, 2007 – 120с.
42. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів мат. Спец. Пед. Навч. Закладів / З.І. Слепкань. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000.– 512с.
43. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучение математике. / З.И. Слепкань. – К.: Рад.шк., 1983. – 192 с.
44. Староста В.І. Навчання школярів складати й розв’язувати завдання : теорія і практика: Монографія / В.І. Староста. – Ужгород: УжНУ – Гранда, 2006. – 327с.

45. Талызина Н.Ф. Зависимость формирования геометрических понятий от исходной формы действия // Доклады АПН РСФСР. / Н.Ф. Талызина, В.В. Николаева. - 1961. №6.-с.56
46. Тесленко И.Ф. Методика преподавания геометрии: метод. Пособие / Тесленко И.Ф., Чашечников С.М., Чашечникова Л.И. – К.: Рад. шк., 1962. – 124 с.
47. Уемов А.И. Аналогия в практике научного исследования. / А.И. Уемов– М.: «Наука», 1970. – 267 с.
48. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. – 2-е изд., – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
49. Черкасов Р.С. Методика преподавание математики в средней школе / Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
50. Эрдниев П.М. Сравнение и обобщение при обучении математике / П.М. Эрдниев. – М.: Учпедгиз, 1960. – 150 с.
51. Шарыгин И.Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордон. — М.: ООО “Издательство Астрель”: ООО “Издательство АСТ”, 2001. — 400 с.

Додаток А

Анкета
для викладачів та вчителів математики

«Як формувати прийоми розумової діяльності і як покращити їх застосування під час навчання математики»
Правильну відповідь позначити: «+»

1. З якими проблемами ви стикаєтеся під час формування прийомів розумових дій?
А. поняття аналізу і синтезу сприймаються студентами простіше, ніж абстрагування
Б. студенти не розуміють сенсу формування прийомів розумових дій
В. прийоми узагальнення і систематизації ототожнюються
Д. власний варіант____

2. Як ви формуєте прийоми розумових дій під час уроків?
А. застосовую індукцію та дедукцію
Б. пропоную завдання, щоб скласти твердження обернених до даних
В. студенти на уроках конструюють контрприклади
Г. навчаю конструювати твердження по аналогії
Д. здійснюю узагальнення, порівняння, систематизацію
Е. власний варіант____

3. Якому прийому розумових дій ви надаєте перевагу?
А. індукція та дедукція

Б. аналогія
В. складання тверджень обернених до даних
Г. конструювання контр прикладів
Д. систематизація
Е. узагальнення
Є. порівняння
Ж. власний варіант____

4. Які прийоми розумових дій найпростіші для розуміння студентами?
А. індукція та дедукція
Б. аналогія
В. складання тверджень обернених до даних
Г. конструювання контр прикладів
Д. систематизація
Е. узагальнення
Є. порівняння
Ж.власний варіант____

5. У чому ви вважаєте особливість у формуванні прийомів розумових дій новітніми методами?
А. удосконалення інтелектуальної компетентності студентів
Б. реалізація нестандартних методик формування особистості
В. застосування інтерактивних технологій для кращого засвоєння
Д. власний варіант____

6. У чому полягає важкість сформувати в студентів прийомів розумових дій?
А. невідповідність програми до нахилів і здібностей студентів
Б. у програмі курсу непередбачено тем для формування прийомів розумових дій
В. прийоми розумових дій є нелегкими для сприйняття студентами
Д. власний варіант____

7. Які форми роботи ви застосовуєте під час навчання математики для формування прийомів розумових дій?
А. індивідуальні форми
Б. колективні форми
В. групові форми
Д. власний варіант____

8. Які інноваційні методи ви вибирете для покращення формування прийомів розумових дій для студентів?
А. тренінг
Б. диспут
В. перфоменс
Г. «круглий стіл»
Д. КВН
Е. власний варіант____

9. Які ваші пропозиції щодо покращення формування прийомів розумових дій?
А. ввести в шкільну програму уроки на яких би формувалися в основному прийоми розумових дій
Б. організувати гуртки для формування прийомів розумових дій
В. під час кожного уроку виділяти 5 хвилин на формування прийомів розумових дій
Д. власний варіант____

Стаж роботи в навчальному закладі на посаді вчителя або викладача математики:

1. 1-5 років
2. 5-10 років
3. 10-20 років
4. 20-30 років

Додаток Б

«ЕРУДИТ-МАТЕМАТИК»

На сьогодні до числа найбільш актуальних питань освіти є покращення якості освіти, зокрема науково-технічної, є необхідною умовою формування інноваційного суспільства та підвищення конкурентоспроможності економіки. В умовах становлення і розвитку високотехнологічного інформаційного суспільства в Україні виникає необхідність підвищення якості та пріоритетності позашкільної науково-технічної освіти.

Отримання якісної математичної освіти є однією з найважливіших гарантій реалізації громадянами їх інтелектуального потенціалу, вирішальним фактором утвердження соціальної справедливості та політичної стабільності.

Математика – це потужний фактор інтелектуального розвитку дитини. Саме точні науки сприяють формуванню пізнавальних та творчих здібностей дитини. Одним із засобів зацікавлення студентів математикою є добре продумана позакласна робота. Вона є однією з форм організації пізнавальної діяльності студентів різного віку, але разом з тим вимагає конкретних знань, ерудованості, широкої обізнаності з математичних дисциплін.

Створення програми математичного гуртка «Ерудит–математик» обумовлено необхідністю розвитку зацікавленості математикою дітей. Програма орієнтована на студентів І-ІІ рівня акредитації. Тематика гурткових занять спирається на деякі прийоми розумових дій, але дає змогу ширше висвітлювати ці питання використовуючи цікаві математичні задачі і вправи творчого характеру. Такі завдання направлені на формування в студентів навичок самостійної роботи.

На гурткових заняттях як методичний прийом застосовуються індивідуально-класні математичні ігри. Такі ігри розширюють можливості предмета у вихованні особистості студента. Тут виробляється вміння напружувати свої сили у важкій справі і прагнення будь-що довести її до кінця. На таких іграх математична задача стає об'єктом справжнього змагання. Але тут цінно не стільки змагання само по собі, скільки зароджується з ньому захоплення студентів предметом.

Метою програми є формування компетентностей особистості в процесі математичної позашкільної освіти, а саме формування в студентів уявлень про математику як форму опису та метод пізнання дійсності, розуміння ролі математики в сучасному житті.

Завдання навчальної програми: прищеплювати студентам інтерес до математики; поглиблювати і розширювати знання студентів з математики; розвивати математичний кругозір, логічне й абстрактне мислення.

Основні завдання полягають у формуванні таких компетентностей:

- пізнавальної: озброєння студентів певним обсягом математичних знань і вмінь, необхідних для сприйняття та усвідомлення навколишньої дійсності, підвищення загальної математичної культури; зацікавлення дітей вивченням історії математики, формування розумових операцій (аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення, класифікації); інтелектуальний розвиток гуртківців, розвиток їхнього логічного мислення; опанування гуртківцями системи математичних знань та вмінь, що є базою для реалізації зазначених цілей: підвищення рівня знань з базової дисципліни «математика»;

- практичної: формування умінь і навичок складання математичної моделі задачі, застосовування математичних властивостей під час розв'язування задач, узагальнення і систематизування прийомів розв’язування математичних задач, розвивати мову, спостережливість, розумову активність, вміння висловлювати і обґрунтовувати свої судження; розвивати слухову і зорову увагу, пам'ять, логічне мислення; розвивати конструктивні і творчі здібності, фантазію, творчу уяву;
- творчої: гармонійний розвиток особистості, розвиток творчої активності, логічного мислення та математичного мовлення, просторової уяви;
- соціальної: формування життєвої самостійності, освіченої особистості, підготовленої до життя та активної трудової діяльності, розвиток загальнолюдських позитивних якостей, виховувати інтерес до придбання нових знань; розвивати самостійність, уміння планувати свою роботу; виховувати дружні стосунки між дітьми, звичку займатися спільно.

Гурток «Ерудит–математик» спрямований на формування в студентів навичок самостійної пізнавальної і дослідницької діяльності, розв’язування задач різними способами, знайомство з історією математики розвиває в студентів цікавість, уважність, спостережливість, логічне мислення, знайомить з поняттям алгоритму. Всі ці риси потрібні для всебічного розвитку особистості, становлення світогляду, критичного мислення, світосприйняття дитини.

Проведення занять відбувається у формі живого, безпосереднього спілкування студентів та викладача, з урахуванням індивідуального підходу до гуртківців. Підчас занять використовуються комп’ютерні технології.

Заняття у даному гуртку розширює математичний кругозір та закладає певні навички дослідницької діяльності, що дозволяє розв’язувати задачі підвищеної складності.

Робота гуртка передбачає наступну організаційну роботу: запис бажаючих відвідувати математичний гурток; складання плану роботи гуртка на навчальний рік; загальні збори членів гуртка; підсумки роботи гуртка за рік; огляд наочних матеріалів; заключне слово керівника.

Тема заняття	Дата
Заняття 1. Вступне заняття	
Заняття 2. Аналогія – джерело ідей	
Заняття 3. Метод математичної індукції	
Заняття 4-5. Розв’язування задач: аналіз і синтез	
Заняття 6. Евристична діяльність школярів	
Заняття 7. Прийоми запам’ятовування матеріалу	

План роботи гуртка
«Ерудит - математик»

Староста:
Керівник гуртка:

<u>Заняття 1. Вступне заняття</u>

Активізація позакласної роботи з математики покликана пробуджувати й підтримувати в студентів не тільки інтерес до вивчення одного з найцікавіших шкільних предметів, а й прагнення вивчати математику додатково, під керівництвом учителя або самостійно.

Позакласна робота сприяє розвитку математичної культури студентів, розвитку їхнього мислення, математичних здібностей. Важливий виховний момент позакласної роботи полягає в тому, що для участі в масових позакласних заходах можна залучати не тільки студентів, які добре знають і люблять математику, а й тих, хто має низький рівень навчальних досягнень, на уроках пасивний та байдужий, але наділений артистичними або організаторськими здібностями, вміє добре малювати тощо. Іноді участь у позакласній роботі стає для таких студентів першим кроком до зацікавленості нею.

Однією із форм позакласної роботи з предмета є тиждень математики. Проведення предметних тижнів підвищує інтелектуальний рівень студентів, формує в них практичні навички застосування знань, які вони здобули на уроках. Підготовка студентів до проведення тижня математики дає їм можливість самостійно збирати матеріал, проявляти ініціативу, виховує наполегливість та відповідальність.

Жінки - математики

<u>Марія Аньєзі</u>

Марія Гаетана Аньєзі народилася 16 травня 1718 року в Мілані, розташованому в Північній Італії на Паданській рівнині між Альпами й Адріатикою (область Ломбардія). Освіту здобула під керівництвом батька, професора Болонського університету: вже в ранньому дитинстві вільно володіла латинською і грецькою мовами, пізніше опанувала ще й французьку, єврейську, німецьку та іспанську; математику почала вивчати двадцятирічною. 1748 року її одноголосно обирають членом Болонської академії наук, 1750 року призначають професором Болонського університету, де вона, маючи яскраві здібності й ерудицію, ставши першою у світі жінкою-професором математики, понад два роки очолює кафедру, хоч лекцій і не читає. Марія Аньєзі написала «Курс аналізу для використання італійським юнацтвом» (1748), в якому « глибоко висвітлила основи вищої математики» (Дірк Стройк): теорію алгебраїчних рівнянь, плоску аналітичну геометрію, диференціальне та інтегральне числення, теорію диференціальних рівнянь. Вона у цій праці, зокрема, довела, що будь-яке кубічне рівняння має три корені; розкрила численні застосування математики, а також подала новий аналіз, щойно сформульований у працях Ісаака Ньютона й Готфріда Лейбніца. 1775 року книгу перекладено французькою мовою, а 1801 — англійською.

По смерті батька Аньєзі від науки відійшла й життя закінчила 4 серпня (або 9 січня) 1799 року в монастирі. На її честь плоску криву, що задається рівнянням

$$y(x^2+a^2)=a^3$$

назвали **«локон Аньєзі»**. В Італії її ім’ям названо вулиці, школу, премії навчальних закладів, а біля власного будинку в Болоньї споруджено пам’ятник.

<u>Софі Жермен</u>

Софі Жермен народилася 1 квітня 1776 року в Парижі в родині ювеліра.

Тринадцятирічною в батьківській бібліотеці натрапила вона на двотомну «Історію математики» Жана Монтеклю (1758), де й прочитала про Архімеда, який навіть у хвилину смерті «креслив кола на еллінському піску».

Прочитане викликало таке прагнення до математичних занять, що злякало домашніх: вгамувати дочку не вдалося навіть найсуворішими покараннями — забирали одяг, позбавляли світла, тепла і навіть їжі. Доходити до всього їй доводилося самотужки, адже жінок до Політехнічної школи не брали: діставала конспекти лекцій, в оригіналі читала Леонарда Ейлера та Ісаака Ньютона, осиливши для цього латинь; під чоловічим ім'ям (М. Леблан) листувалась із «королем математики» Карлом Фрідріхом Гауссом, вражена його фундаментальними «Арифметичними дослідженнями» (1801); її адресатами були також Жан Фур'є і Жозеф Луї Лагранж, який «гаряче цікавився вищою арифметикою», а також Андрієн Марі Лежандр.

Жермен цікавилася акустикою і теорією чисел, окремі формули якої названі тепер її ім'ям, як і вираз середньої кривизни в теорії поверхонь. За свідченням Лагранжа (1828), їй вдалося довести частинний випадок Великої теореми Ферма: «Якщо можливе розв'язання рівняння

$$x'' + y'' + z'' = \mathbf{O}$$

у цілих числах, то при всіх показниках, менших за 100, одне з невідомих за необхідності ділиться на показник». За дослідження згинання пластинок у теорії пружності їй, першій з жінок, присуджено премію Паризької академії наук (1816), а саму роботу використано під час будівництва Ейфелевої вежі (1889). Відомі також її «Міркування про стан наук і літератури в різні культурні епохи» (1833).

Задача Жермен. Довести, що число n^4+4 для натуральних $n \geq 2$ — складене.

Розв'язання. Вираз n^4+4 подамо у вигляді:

$$n^4+4 = n^4+4n^2+4-4n^4 = (n^2+2)^2-(2n)^2 = (n^2-2n+2)(n^2+2n+2).$$

Отже, вираз подається у вигляді двох добутків, жоден з яких не дорівнює 1 при натуральному $n \geq 2$.

Саме втручання Жермен врятувало Гаусса, коли 1807 року французи окупували Геттінген, а той, зворушений, відгукнувся листом: «Смак до абстрактних наук узагалі й понад усього до таємниць чисел зустрічається вкрай рідко: однак не дивуєшся цьому; чарівлива привабливість цієї піднесеної науки відкривається тільки тим, хто має сміливість зануритися в неї. Але коли особа тієї статі, яка, відповідно до наших звичок і упереджень, має зустріти набагато більші труднощі, ніж чоловіки, щоб ознайомитись з тими тернистими дослідженнями, все ж таки досягає успіху в подоланні перешкод і осягає найбільш приховані їхні частини, тоді, без сумніву, ця особа наділена найшляхетнішою сміливістю, гідними подиву талантами й найвищою геніальністю. Справді, ніщо не може довести мені таким утішним і менш сумнівним способом, що принади цієї науки, яка збагатила моє життя радощами, не є химеристими, як і прихильність, якої Ви її удостоїли» (30.04.1807).

Софі Жермен померла в Парижі 17 (27) червня 1831 року.

<u>КОВАЛЕВСЬКА СОФІЯ ВАСИЛІВНА</u>

(За книгою С. Я. Штрайх «Сім’я Ковалевських)

Софія Василівна Ковалевська народилася 15 січня 1850 року в Москві, де її батько обіймав посаду начальника арсеналу.

У 1858 році відставний артилерійський генерал Василь Васильович Корвін-Круковський, батько маленької Софи, разом із родиною переїхав до свого маєтку Палібіно, поблизу кордону з Литвою.

Батьки приділяли мало уваги вихованню дітей. Розпочавши сільське життя, Василь Васильович почав придивлятися до дітей і з подивом дізнався, що нагляд за ними не достатній і виховані вони погано. Але всі заходи стосовно виховання обмежив лише тим, що замість няньки–кріпачки , яка доглядала дітей, та вихователькиі–француженки запросив нову гувернантку–англійку . Після цього він вирішив, що свій батьківський обов’язок виконав.

Мати Софії, Єлизавета Федорівна, також не була підготовлена до ролі матері–вихователька.

Корвін-Круковський, артилерист за спеціальністю, здобув гарну освіту, знав і любив математику. У його будинку можна було зустріти науковців, літераторів, мистецтвознавців.

Значну роль у вихованні Софії Василівни відіграв брат її батька, Петро Васильович; він часто приїжджав до Палібіна й гостював там тижнями.

Захоплюючись читанням, він читав постійно, але безсистемно. Його цікавили наукові відкриття в галузі природознавства, описи мандрівок, історичні статті. Усім прочитаним ділився зі своєю молодшою племінницею. Тож захопив читанням і Софію. Саме дядько зацікавив дівчину математикою. Він часто розповідав про квадратуру круга та інші мудрі речі, які уявлялись Софії таємничими й привабливими.

До цього впливу дядька додалась одна щаслива випадковість. Коли ремонтували палібінський будинок, не вистачило шпалер для однієї з дитячих кімнат. Щоб не посилати до Петербурга за шпалерами (багато мороки), вирішили обклеїти в Софіїній кімнаті стіни папером, що валявся на горищі. Взяли літографовані записки лекцій з вищої математики В. В. Остроградського, якого в молодості слухав Василь Васильович. Софія годинами простоювала біля цих шпалер і розбирала виведені на папері креслення. Вона знаходила в них речі, подібні до тих, про які їй розповідав дядько Петро Васильович, і прохала в нього пояснення. Дядько не знав того, що цікавило Софію. Домашній учитель Малевич, який викладав дівчині загальноосвітні предмети, був теж не достатньо обізнаний у цих питаннях, але запропонував своїй учениці книги з різних галузей вищої математики. Дівчині доводилося дошукуватись змісту креслень власними міркуваннями. Вона настільки захопилася математикою, що почала ігнорувати інші предмети.

Василь Васильович вирішив було заборонити доньці вивчати математику, але коли його давній друг, професор фізики морської академії М. М. Тиртов, поспілкувавшись із Софією, заявив, що дівчина має виняткові математичні здібності, Софії не тільки було дозволено вивчати улюблений предмет, а навіть, коли узимку родина жила в столиці, дівчина брала уроки математики у відомого викладача О.М. Страннолюбського. Уже під час першого заняття той був надзвичайно здивований, коли Софія миттєво засвоїла складні математичні поняття.

Справа в тому, що Софія згадувала ті незвичайні креслення, які вона годинами розбирала на шпалерах своєї дитячої кімнати.

Так від добродушної поблажливості до захоплення Софії Василівни «чоловічою наукою» родина Корвін-Круковських перейшла до визнання її виняткового обдарування і права на заняття вищою математикою. Але, щоб донька родовитого дворянина й багатого поміщика навчалася в університеті, щоб відвідувала аудиторії і лабораторії разом зі студентами, — це не вкладалося в голові Корвін-Круковського. Тож, щоб вирватися з батьківського дому, покласти кінець батьківському деспотизму й дістати можливість серйозно займатися наукою, Софії доводилося пускатися на хитрощі.

Для здійснення заповітної мрії за таких обставин і вихід був тільки один — заміжжя. Софія Василівна виходить заміж за Володимира Онопрійовича Ковалевського.

У той час двері університету для жінки були зачинені. Довелося задовольнятися відвідуванням і лекцій і практичних занять у Медико-хірургічній академії. Але все це не мало характеру систематичних занять; щоразу під час відвідування необхідно було залишатися непоміченою, не можна було підійти поближче, щоб краще роздивитися цікавий дослід професора. Колись навіть розроблявся проект перевдягти Ковалевську в чоловіче вбрання.

Крім того, Софія продовжувала брати уроки математики, як і в попередні свої зимові перебування в столиці, в О. М. Страннолюбського, який був прихильником жіночої освіти. Ці заняття остаточно виявили математичні здібності С. В. Ковалевської.

Втративши будь-яку надію здобути серйозну математичну освіту в Росії, Ковалевська вирішує поїхати за кордон, до Гейдельберзького університету, найдавнішого в Німеччині. Але й тут, як і в Росії, жінці нелегко було потрапити в стіни університету. Німецькі професори заявили, що «жінки нашого часу, незалежно від раси й національності, не годяться для видатних наукових робіт». Після довгого клопотання все ж таки вдалося домогтися, щоб, як виняток, Софію Василівну допустили до слухання лекцій двох-трьох професорів математики та фізики.

Наукові заняття в Гейдельберзі проходили успішно, тож треба було переходити до Берлінського університету для занять під керівництвом відомого у той час Вейєрштрасса. Але й тут берлінські математика професори не хотіли допустити Софію Василівну до свого університету як студентку. Хоча Ковалевська й не стала студенткою Берлінського університету, її мрія навчатися у Вейєрштрасса все-таки здійснилася, вона навідалася до нього додому і попрохала давати їй приватні уроки.

Під час першого знайомства професор упереджено поставився до незвичайної відвідувачки. Недовго поговоривши, запропонував їй розв'язати кілька задач. Завдання підібрав складні, розраховуючи, що Ковалевська з ними не впорається і дасть йому спокій. Коли ж молода жінка блискуче розв'язала задачі, Вейєрштрасс погодився керувати заняттями з Ковалевською, по закінченню яких запропонував своїй учениці попрацювати над кількома темами. За два роки свого перебування в Берліні Софія Василівна виконала три роботи.

На вимогу Вейєрштарасса вона подала свої праці до Геттінгенського університету. Праці виявилися настільки цінними, що, всупереч установленим правилам, було вирішено звільнити її від іспиту публічної дисертації і відразу присвоїти ступінь доктора філософії.

Одну із праць було надруковано в математичному журналі Крелля, а такої пошани удостоювались на той час не багато математиків.

Ковалевські повертаються до Росії. Але тут Софія Василівна не могла скористатися своїм дипломом, який давав право чоловікові бути помічником професора в будь-якому вищому навчальному закладі, а жінці дозволялося викладати лише початкову арифметику.

На деякий час родинні справи (народження доньки) відволікли Софію

Василівну від занять математикою, проте під кінець 1879 року вона виступила з доповіддю на Шостому з'їзді дослідників природи в Петербурзі. Доповідь схвалив відомий російський математик Чебишов.

У 1884 році Софію Ковалевську запрошено з доповідями до Стокгольмського університету. Нарешті її знання стали потрібними. Професорські справи Ковалевської покращали, через півроку її було обрано штатним професором Стокгольмського університету. Вона читала лекції і проводжувана наукову роботу. Її праці друкувалися у французьких і німецьких виданнях.

У 1888 році Паризька академія наук призначила втретє конкурс на здобуття Борденівської премії у розмірі три тисячі франків за кращу роботу на тему про рух твердого тіла навколо нерухомої точки.

Два попередні конкурси пройшли невдало, тож математичний світ цікавив результат третього.

Було представлено 15 робіт. Одну з робіт комісія визнала «чудовою працею, яка містить відкриття нового випадку». Авторові праці комісія не тільки присудила повну премію, але й збільшила її з трьох до п'яти тисяч франків. Коли відкрили конверт, то з'ясувалося, що автор премійованої роботи — Софія Ковалевська. Деякі члени комісії виявили своє невдоволення тим, що переможцем стала жінка.

Відомий російський учений М. Є. Жуковський, оцінюючи роботу, заявив, що дослідження про рух твердого тіла складають, головним чином, їй славу як науковця», а також зазначив, що «Ковалевська здобула результати, надзвичайно цінні для науки».

У царській Росії науку не шанували. Тож, визнана у математичному світі, С. Ковалевська не змогла застосувати свої знання на батьківщині. Один із родичів Ковалевської, відомий військовий діяч, перейнявся питанням запросити її до Академії наук, на що від імені президента Академії, близького родича царя, великого князя Костянтина Костянтиновича одержав таку відповідь: «Його імператорська величність августійший президент імператорської Академії наук побажав повідомити вам, що Софія Василівна Ковалевська, наукові роботи якої широко відомі за кордоном, користується не меншою популярністю і серед наших математиків...» Далі висновок такий: «Оскільки на кафедри наших університетів зовсім немає доступу жінкам, якими б здібними й знаючими вони не були, то для пані Ковалевської у нашій вітчизні немає місця, почесного, з високою оплатою, яке вона займає в Стокгольмі. Місце викладача математики вищих жіночих курсів набагато нижче від університетської кафедри; в інших наших навчальних закладах, де жінки можуть працювати викладачами, викладання математики обмежується лише елементарними частинами».

Так жінка-математик, науковець світового рівня, у царській Росії не знайшла застосування своїх знань.

Математики-академіки, не маючи можливості запропонувати їй штатне місце в Академії, обрали Ковалевську членом-кореспондентом.

Проте коли через півроку Софія Василівна приїхала до Петербурга, щоб як член-кореспондент Академії бути присутньою на засіданні математичного відді- леня, їй повідомили, що це «не в звичаях Академії».

Було б помилкою створити собі образ С. В. Ковалевської як людини, яка переймалась тільки розв’язанням математичних проблем. Всебічно обдарова-на, вона проявила себе й на літературній ниві. У співавторстві зі шведською письменницею Леффер написала драму «Боротьба за щастя», яку було поставлено на сцені шведського театру, а також кілька разів і в Росії. «Спогади дитинства» Ковалевської майстерно зображують картини життя багатої поміщицької родини в період підготовки й проведення селянської реформи. Роман Ковалевської «Нігілістка» за життя автора російською мовою не було надруковано, вперше видано в 1906 році й перевидано в СРСР у 1920 році. Багаторазово роман видавався за кордоном під назвою «Віра Воронова».

О. В. Ковалевська померла 10 лютого 1891 року в Стокгольмі.

<u>Еммі Нетер</u>

Еммі Амалі Нетер народилася 23 березня 1882 року в німецькому містечку Ерланген (тепер входить до агломерації Нюрнберг землі Баварія), де професор Макс Нетер, відомий працями з теорії алгебраїчних функцій, обіймав університетську кафедру. Саме там батьків приятель Пауль Гордан, «король інваріантів» і майстер алгебраїчної викладки, стане її першим науковим керівником, перед яким і витримає вона докторський іспит «Про повні системи інваріантів тернарних біквадратних форм» (1907). Вплив Гордана на цю роботу її юності був настільки великим, що в кінці дисертації, яку сама ж згодом назве «джунглями формул», Еммі наведе в символічному записі перелік повної системи інваріантів для заданої тернарної квартики з понад трьохсот форм, а портрет учителя цідтоді завжди висітиме над її робочим столом.

Час змін настав: батько, курс якого донька, що мала вже шість публікацій, вела під час його нездужання, вийшов на пенсію; мати померла, а брат Фріц, недавній геттінгенський студент-математик, опинився на фронті. Тож 1916 року Еммі Нетер переїжджає до Геттінгена. Вона вже володіє солідним запасом знань, що так потрібні Давиду Гільберту й Феліксу Клейну для досліджень у теорії відносності. Проте отримати для неї «реабілітацію» виявилось нелегко.

На голосуванні переважали докази: «Як почуватимуться, повернувшись, наші вояки, коли їм доведеться вчитися, сидячи біля жіночих ніг?» і «Якщо допустити, щоб жінка стала приват-доцентом, то згодом вона може стати й професором, а то й членом університетського сенату. Та чи дозволено жінці входити до сенату?»— не зарадило й рішуче Гільбертове: «Але ж сенат — не лазня!» І все ж він знайшов вихід: Нетер почала читати лекції, що оголошувались під ім’ям професора Гільберта.

Тільки в 1919 році, вже після падіння монархії, Еммі Нетер нарешті стає першою в історії університету жінкою приват-доцентом. Хоча це була найнижча сходинка, навіть не посада. А так — привілей, але ж як окрилював! Тож 1922 року вона вже позаштатний екстраординарний професор (тобто асистент), хоч і це не передбачало ні обов’язків, ні утримання. Жартували, що «екстраординарний професор не знає нічого ординарного, а ординарний професор не знає нічого екстраординарного».

Зусиллями Ріхарда Куранта та у зв’язку з інфляцією і зниженням платоспроможності студентів, Нетер почали щомісячно видавати 200—400 марок «викладацької стипендії на прожиття», що потребувало кожного року міністерського затвердження. У Геттінгені вона так і не домоглася штатної посади з гарантованою оплатою. Не була вона і членом жодної з академій її не обрали навіть до геттінгенського королівського наукового товариства. «Традиції, забобони, зовнішні міркування пересилили її наукові заслуги і наукову велич, які на той час вже не заперечувались ніким» (Герман Вейль). Проте якраз у Геттінгені Нетер заклала основи зовсім нової алгебри, яку тепер називають загальною, або абстрактною (тобто теорію кілець, полів, ідеалів).

Разом з тим «грації не стояли напевно біля її колиски (Вейль), голос вона мала «гучний і неприємний, а одяг мішкуватий», викладала ж «кваплячись і збиваючись». Тож на заняття звичайно приходило від п'яти до десяти слухачів, та й ті за її власними спостереженнями «були чужоземцями». Знати б їй тоді майбутнє Бартела Вандер-Вардена з Голландії, Еміля Мартіна з Австрії, Павла Александрова з Росії! Хоч на перших порах саме Александров охрестив її незграбну зовнішність чоловічим означеним артиклем — «дер Нетер», а коли німецькі літери на дошці заміняли їй цілі поняття, вже Вандер-Вардену здавалося, «що її зворушливі спроби словами прояснити ці поняття мають протилежний ефект». Усього один раз у визначений час знайшла вона близько сотні студентів і здивувалась: «Ви, певно, помилились аудиторією?» Коли ж у відповідь зашуміло традиційне човгання ніг, яке замість аплодисментів починає й закінчує університетські години, пройшла вперед і впевнено відпрацювала, отримавши записку: «Гості зрозуміли Вас так же добре, як і будь-хто з Ваших постійних слухачів».

Еммі Нетер «ніколи не вірила в зло, їй навіть у голову не могло прийти, що зло може щось відігравати серед людей» (Вейль). «Її ж власна душевна доброта без найменшого хизування й нещирості, її життєрадісність і доступність, її здатність не помічати несуттєвого, створювали навколо неї атмосферу тепла, спокою і легкої радості. Зворушливою була її любов до студентів, які заміняли їй відсутність власної сім'ї. Жіночість її психіки виявлялась у м'якому й тонкому ліризмі взаємин, що зв'язували її з людьми» (Александров).

Вандер-Варден як ніхто інший сприяв поширенню її ідей («Сучасна алгебра», 1930—1931). Справжнім тріумфом став для Нетер Міжнародний математичний конгрес у Цюріху (Швейцарія, 1932).

Та з приходом нової влади Еммі Нетер у 1933 році мусить емігрувати. Притулок для неї знайшовся у жіночому коледжі містечка Брін Мор, що в штаті Пенсільванія (США). Професор Нетер саме знаходилась у розквіті свого таланту, її математична інтуїція й техніка якраз досягли найвищого рівня і цілковитої гармонії, коли 14 квітня 1935 року, після операції, настала смерть.

Про цікаві факти

із життя великих математиків

Ейнштейна одного разу запитали про те, як, на його думку, з'являються відкриття, які змінюють світ. «Дуже просто, — відповів учений. — Усім відомо, що це неможливо, але трапляється один неук, який цього не знає. Ось він і робить відкриття».

Відомий математик Пойа, навчаючи теорії імовірності, розповів студентам історію про лікаря, який не розумівся на цій теорії. Оглянувши хворого лікар насуплено повідомив: «У вас дуже серйозне захворювання. Із десяти хворих дев'ять помирають». Хворий був прикро вражений. «Але вам пощастило, — продовжував лікар, — дев'ять пацієнтів на це захворювання в мене вже померли. Радійте: ви — це той десятий, який обов'язково одужає!»

Дві кішки Ньютона рано-вранці будили свого господаря. Для того щоб обидві кішки — велика й маленька — могли вискакувати надвір, не потривоживши господаря, вчений пропиляв у дверях два отвори за розмірами тварин. Коли наступного дня він розповів про це сусіду, той практично зазначив, що достатньо було одного отвору. «Справді! — вигукнув Ньютон. — Мені ця думка не прийшла в голову».

Відомому математику Остроградському спала на думку якась незвичайно заманлива математична ідея в той момент, коли він простував петербурзькою вулицею. Негайно він почав вкривати формулами те, що вважав чорною дошкою, призначеною для запису обчислень. Зненацька дошка почала віддалятися від нього. Виявилося, що це не класна дошка, а карета. Здивований математик, наздоганяючи карету, почав гукати кучеру: «Зачекай! Куди поспішаєш? Я зараз». Подібна надзвичайна неуважність часто супроводжує виняткову зосередженість розуму.

Подібне розповідають про видатного фізика й математика Ампера. Одного разу Ампер із сином зупинився в Авіньйоні перепочити й підкріпитися. Неуважний Ампер ніяк не міг порахувати, скільки треба заплатити господарю. Нарешті, з допомогою останнього, йому це вдалося. «Так, добродію, — відзначив добросердний авіньйонець, — ви трішки розумніший за нашого священика... Уже стільки років минуло відтоді, як він мене навчав цифр, а я, як бачите, до сих пір дещо пам’ятаю». Відомий фізик і математик нічим не зміг заперечити.[10, с. 5]

<u>Висловлювання про математику</u>

У вивчення природи математика вносить найбільший вклад, оскільки вона розкриває впорядкований зв’язок ідей, згідно з якими побудовано Всесвіт.

Прокл Діадох

Я глибоко шаную математику, бо ті, хто знайомий з нею, вбачають у ній засіб для розуміння всього існуючого.

Бхаскара-другий

...Жодної науки не можна пізнати без математики.

Р. Бекон

Математичне знання... додає енергії розумові, позбавляє його упередженості, легковірства й забобонів.

Дж. Арбатнот

У цілому світі все здійснюється по-математичному.

Г. Лейбніц

...Немає науки, не зв’язаної з математикою: будь-яка наука, якщо вона має бути грунтовно розроблена, потребує застосування вищої математики.

Л. Ейлер

Яка наука може бути благородніша... корисніша для людства, ніж математика?

Б. Франклін

Вся математика — це, власне, одне велике рівняння для інших наук.

Новаліс

Люди, що засвоїли великі принципи математики, мають на один орган чуття більше, ніж прості смертні.

Ч.Дарвін

Математика — наука велика, пречудовий витвір однієї з найблагородніших здібностей людського розуму.

Д. І. Писарев

Неук у математиці — стає якоюсь мірою чужинцем у нашому часі.

Е. Ділман

Серед рівних розумом — за однакових інших умов — переважає той, хто знає геометрію.

Б. Паскаль

Число висвітлює глибину світобудови.

Г. Лейбніц

Алгебра — це поезія.

Новаліс

Тільки з алгеброю починається справжнє математичне вчення.

М. І. Лобачевський

Геометрія становить найдосконаліший приклад логічної кмітливості.

Г. Булль

Ми з насолодою пізнаємо математику.. Вона захоплює нас, неначе квітка лотоса.

Аристотель

З усіх мов світу найкраща — це мова штучна, вельми стисла мова, мова математики...

М. І. Лобачевський

Математика подібна до мистецтва — і не тому, що являє собою «мистецтво обчислювати» або «мистецтво доводити», а тому, що математика, як і мистецтво, — це особливий спосіб пізнання.

<u>Заняття 2. Аналогія - джерело ідей.</u>

На уроках ми вчимо дітей розв'язувати задачі в такій послідовності: ознайомлюємо їх з певним видом задач, навчаємо розпізнавати їх і застосовувати відповідний метод. Це спрацьовує, якщо учень зустрічає відомий вид задачі й володіє способом розв'язування таких задач. Але як йому діяти, коли перед ним задача невідомого йому виду? Ми не даємо дітям порад, як діяти в подібних випадках. Більшість дітей в таких ситуаціях безпорадна. Найбільш здібні студенти пробують застосувати якісь власні прийоми пошуку ідеї розв'язання, що сформувалися в них стихійно при розв'язуванні задач. На мою думку, таким дітям варто давати уроки пошуку ідей, прийоми генерування гіпотез. Один з таких прийомів полягає в складанні аналогічної, але простішої задачі. Розв'язавши цю задачу, треба спробувати перенести метод її розв'язання на дану задачу. Я хочу запропонувати матеріал для заняття, на якому можна продемонструвати, як з допомогою аналогії можна генерувати ідеї – від методів розв'язування до виявлення нових властивостей. Цей матеріал найбільш підходить для студентів 10 – 11-х класів. Це може бути заняття школи олімпійського резерву, факультативу або курсу за вибором. Отже, тема «Аналогія - джерело ідей».

Спочатку студентам пропонується задача 1.

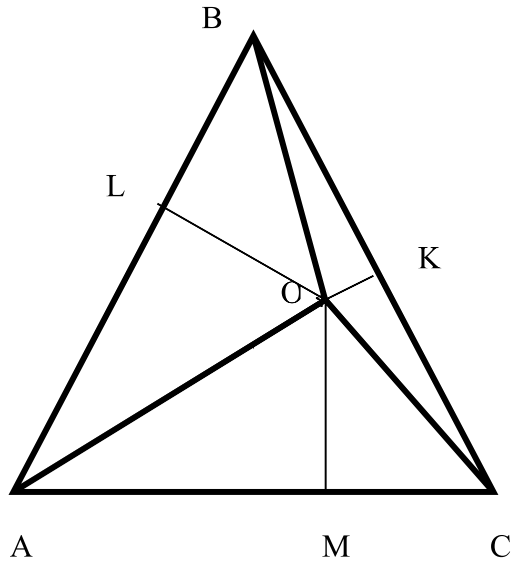
Задача 1. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки правильного тетраедра (в тому числі й внутрішньої) до його граней не залежить від розміщення точки і дорівнює його висоті.

Після того, як діти визнають, що задача дуже складна, учитель їм пропонує: «Попробуйте скласти простішу задачу, але подібну до цієї».

Після цього студенти проводять аналогію між правильним тетраедром і правильним трикутником, гранями тетраедра і сторонами трикутника і з допомогою вчителя складають задачу 2:

Задача 2. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки рівностороннього трикутника (в тому числі й внутрішньої) до його сторін не залежить від розміщення точки і дорівнює його висоті.

Розв'яжемо цю задачу методом площ. Він полягає в тому, що площу певної фігури виражаємо різними способами і на цій основі складаємо рівняння.



Нехай ABC – даний рівносторонній трикутник, точка O – довільна його точка, OK, OL і OM – відстані від точки O до сторін трикутника.

Сполучимо точку O з вершинами трикутника. Тоді його можна розглядати як сукупність трикутників зі спільною вершиною O, бічні сторони яких – відрізки, проведені від точки O до вершин трикутника, основи трикутників – сторони даного трикутника, а висоти – відстані від точки O до сторін трикутника. Позначивши сторони даного трикутника через a , дістанемо

$$S=\frac{1}{2}\ a\ OK+\frac{1}{2}\ a\ OL+\frac{1}{2}\ a\ OM=\frac{1}{2}\ a\ (OK+OL+OM).$$

З іншого боку площа даного трикутника дорівнює $\frac{1}{2}ah$. Таким чином, маємо рівність

$$\frac{1}{2}\ a\ (OK+OL+OM)=\frac{1}{2}ah\ .$$

Поділимо ліву й праву частини рівності на $\frac{1}{2}\ a$ і одержимо

$$OK+OL+OM=h\ ,$$

що й треба було довести.

Ключова ідея метода розв'язання задачі 2 полягає в тому, що точку O сполучили з вершинами трикутника. Застосуємо цю ідею до задачі 1, тобто, сполучимо точку O правильного тетраедра з його вершинами. Утворилися чотири піраміди зі спільною вершиною в точці O, бічними ребрами –

проведеними відрізками і рівними основами, які є гранями даного тетраедра. Відстані від точки O до граней тетраедра є висотами утворених пірамід. Об'єм тетраедра дорівнює сумі об'ємів утворених пірамід. Позначивши висоту тетраедра через H, площу грані даного тетраедра через S, а відстані через h_1, h_2, h_3, h_4, складемо рівність

$$\frac{1}{3}S\ h_1+\frac{1}{3}S\ h_2+\frac{1}{3}S\ h_3+\frac{1}{3}S\ h_4=\frac{1}{3}S\ H.$$

Поділивши ліву й праву частини цієї рівності на $\frac{1}{3}S$, одержимо те, що треба було довести.

Аналогія – це інструмент для генерування гіпотез.

Далі доцільно задати дітям запитання: які ще фігури мають подібну властивість, а саме, сума відстаней від довільної внутрішньої точки до меж фігури є сталою величиною; до того ж цікаво знайти цю суму.

Цю проблему варто розділити на дві частини: окремо розглянути многокутники і окремо многогранники. До речі, варто розглянути не лише правильні многокутники, але й прямокутники, паралелограми, ромби.

Легко довести, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки квадрата до його сторін дорівнює півпериметру квадрата. Обґрунтувати це можна й без метода площ. Така сама ситуація з прямокутником. Далі можна запропонувати студентам самостійно розв'язати такі задачі.

Задача 3. Довести, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки ромба до його сторін в два рази більша від висоти ромба. Така сама сума в паралелограма дорівнює сумі його висот, проведених з однієї вершини.

Задача 4. Знайти суму таких відстаней в правильному п'ятикутнику. (Відповідь: 5r, де r – радіус вписаного кола). Розв'язати аналогічну задачу для правильного n-кутника.

Задача 5. Знайти суму відстаней від внутрішньої точки прямокутного паралелепіпеда до його граней.

Задача 6. Довести, що в правильному многограннику сума відстаней від довільної внутрішньої точки до його граней є величина стала й не залежить від розміщення точки.

Далі можна запропонувати студентам знайти ще випадки, коли суми відстаней не залежать від розміщення точки. Варто розглянути якісь спеціальні ситуації, наприклад, така задача:

Задача 7. Довести, що сума відстаней від довільної точки середньої лінії рівнобічної трапеції до бічних сторін дорівнює $\frac{Ph}{2c}$, де P – периметр трапеції, h – її висота, а c – бічна сторона.

<u>Заняття 3. Метод математичної індукції</u>

Математична індукція — це спосіб доведення нескінченної кількості занумерованих натуральними числами тверджень T(n) за два ходи:

1) *база індукції: доводимо T(1);*
2) *крок індукції: доводимо, що для довільного k з істинності твердження*
T(к) випливає істинність T(k+1).

1. Відомо, що $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geq 1$. Знайдіть a_n.

Розв'язання

$a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 15$, $a_5 = 31$.

Помічаємо, що $a_1 = 2^1 – 1$, $a_2 = 2^2 – 1$, $a_3 = 2^3 – 1$, $a_4 = 2^4 – 1$, $a_5 = 2^5 – 1$.

Виникає гіпотеза $a_k = 2^k – 1$.

Перевіримо крок індукції: $a_{k+1} – 2a_k + 1 = 2(2^k – 1) + 1 = 2^{k+1} – 1$.

Отже, на основі принципу математичної індукції для кожного натурального n $a_n = 2^n – 1$.

2. Доведіть, що при кожному натуральному n стверджується рівність
$1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1) = n^2$.

Розв'язання

Якщо $n = 1$, то$1 = 1^2$.

Припустимо, що при $n = k$, рівність $1 + 3 + 5 + ... + (2k – 1) = k^2$ правильна.

Якщо $n = k + 1$, то $1+3+...+(2k–1)+2(k+1)–1=k^2+2(k+1)–1=(k+1)^2$.

Індуктивний перехід правильний, а тому рівність доведено.

3. Доведіть, що для кожного натурального n вираз $5^{2n+1}\cdot 2^{n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ ділиться на 19.

Розв'язання

Якщо $n = 1$, то $5^3 – 2^2 + 3^3 – 2^3$ ділиться на 19.

Нехай при $n = k$ $5^{2k+1} – 2^{k+1} + 3^{k+2} – 2^{2k+1}$ ділиться на 19.

Доведемо, що при $n = k+1$ твердження також правильне, тобто, що
$5^{2k+3} – 2^{k+2} + 3^{k+3} – 2^{2k+3}$ ділиться на 19.

$$5^{2k+3}\cdot 2^{k+3} + 3^{k+3} – 2^{2k+3} = 50\cdot 5^{2k+1}\cdot 2^{k+1} + 12\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1} =$$
$$= 12(5^{2k+1}\cdot 2^{k+1} + 3^{k+2}\cdot 2^{k+1}) + 38\cdot 5^{2k+1}\cdot 2^{k+1}.$$

Перший доданок суми ділиться на 19 за припущенням, другий доданок, очевидно, ділиться на 19, тому вся сума ділиться на 19. Отже, твердження задачі справедливе для всіх натуральних *n*.

4. Доведіть, що для всіх натуральних *n* виконується нерівність $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Розв'язання

База індукції: при $n = 1$ маємо правильну нерівність $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Припустимо тепер, що нерівність справедлива при $n = k$, тобто $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

Доведемо тепер, що нерівність справедлива при $n = k + 1$, тобто, що $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$.

З урахуванням припущення індукції для цього досить довести нерівність $\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}$.

Оскільки $k > 1$, то достатньо довести, що $\sqrt{2k+1}\cdot\sqrt{2k+3} < 2k+2$. Піднесемо цю нерівність до квадрата (ліва і права частини додатні): $(2k+1)(2k+3) < 4k^2 + 8k + 4$.

Ця нерівність еквівалентна нерівності $3 < 4$. На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що твердження задачі справедливе для всіх натуральних *n*.

5. Доведіть для кожного натурального *n* нерівність $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$.

Розв'язання

Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що нерівність справедлива при $n = 1$. Припустимо тепер, що ця нерівність справедлива при $n = k$, і доведемо її справедливість при $n = k + 1$.

За припущенням індукції, маємо: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$.

Доведемо, що $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 1 - \frac{1}{k+1}$ або $\frac{1}{(k+1)^2} \le \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, що рівносильне $\frac{1}{(k+1)^2} \le \frac{1}{k(k+1)}$. Остання нерівність є очевидною, тому можна зробити висновок, що твердження задачі справджується для всіх натуральних *n*.

Є різні варіанти індукції. Іноді як крок треба перевірити, що твердження *T(n)* справедливе, якщо справедливі всі попередні.

6. Відомо, що $x + \frac{1}{x}$ ціле число. Доведіть, що при будь-якому натуральному *n* число $x^n + \frac{1}{x^n}$ теж ціле.

Розв'язання

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ ціле.

Припустимо, що при всіх $n \le к$ $x^k+\frac{1}{x^k}$ ціле. Доведемо, що $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ також ціле.

$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$ — різниця чисел цілих, за припущенням індукції. Отже, $x^n+\frac{1}{x^n}$ ціле при всіх натуральних n.

7. Знайдіть цілу частину числа $\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$ (2004 знаки кореня).

Розв'язання

Розглянемо цю задачу для випадку n радикалів. Позначимо задане число через a_n. Нехай $n = 2k+1$.

База індукції: $1 < a_{2k+1} < 2$. Тоді при $n = 2k+3$ маємо: $a_{2k+3}=\sqrt{2-\sqrt{2-a_{2k+1}}}$.

Звідки $\sqrt{2-\sqrt{2-1}}<a_{2k+3}<\sqrt{2-\sqrt{2-2}}$ або $1 < a_{2k+1} < 2$. Таким чином, $[a_{2k+3}] = 1$, а тому для непарних n маємо: $[a_n] = 1$.

Нехай тепер $n = 2k$.

База індукції: $a_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 0,8$.

Крок індукції: припустимо, що $0 < a_{2k} < 1$. Тоді $a_{2k+2}=\sqrt{2-\sqrt{2-a_k}}$, звідки $\sqrt{2-\sqrt{2-0}}<a_{2k+3}<\sqrt{2-\sqrt{2-1}}$, $0 < a_{2k+2} < 1$. Отже, $[a_{2k+2}] = 0$.

Згідно з припущенням математичної індукції, $[a_n]=\begin{cases}1, & якщо\ n=2k+1,\\ 0, & якщо\ n=2k.\end{cases}$

Тому $[a_{2004}] = 0$.

Задачі для самостійного розв'язування

8. Доведіть, що при всіх натуральних n:

а) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

в) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$;

г) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

д) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},\ n\ge 2$.

9. Доведіть, що при всіх натуральних n:

а) $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ ділиться на 9;

б) $4^n + 6n - 1$ ділиться на 9;

в) $3^{2n+2} + 8n - 9$ ділиться на 16;

г) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на 133;

д)2^n ділиться на 3^{n+1}.

10. Обчисліть суми: а) $1^3 + 2^3 + ... +(2n)^3$; б) $1^3 + 3^3 + ... + (2n - 1)^3$.

11. Доведіть нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ для всіх натуральних *n.*

12. Доведіть, що для всіх $n \geq 2$ виконується нерівність $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$.

13. Доведіть, що кожне натуральне число дорівнює сумі кількох (можливо, одного) різних чисел Фібоначчі.

14. Доведіть, що для довільного натурального $n > 3$ число $n!$ можна розкласти на множники, відношення яких буде не менше від $\frac{2}{3}$ і не більше за $\frac{3}{2}$.

15. Доведіть, що для довільних додатних чисел $x_1, x_2, ... , x_n$ справедлива нерівність $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ (нерівність Коші).

Вказівка. Застосуйте таку схему індукції: спочатку переходами від $n = 2^k$ до $n = 2^{k+1}$ доведіть нерівність для всіх *n,* що є степенями двійки. Після цього доведіть, що якщо нерівність справедлива для *n* чисел, то вона справедлива і для $n - 1$ чисел (зворотна індукція).

<u>Заняття 4-5. Розв'язання задач: аналіз і синтез</u>

Аналіз і синтез - методи наукового дослідження - головні елементи будь-якого методу пошуку розв'язання задач. Наведемо основні значення цих термінів.

А н а л і з - (гр. Analysis - розподіл) - метод наукового дослідження, що складається в розчленуванні цілого на основні елементи; розбір, розгляд чогось.

С и н т е з - (гр. Synthesis - об'єднання) - метод дослідження будь-якого явища в його об'єднанні та взаємному зв'язку частин, узагальнення, зведення в єдине ціле даних, здобутих за допомогою аналізу.

На пошук шляху розв'яння в першу чергу спрямований аналіз. Після його завершення нерідко потрібна и заново провести синтетичне міркування, щоб обгрунтувати знайдене розв'язання.

Зупинимося на важливому аспекті аналізу - всесторонньому аналізі першого розв'язання, який корисний в кожній геометричній задачі. Усвідомлючи кожен крок міркувань і кожне твердження, він вказує тільки шлях до раціонального розв'язання, а й до аналогії та узагальненню. Багато задач взаємопов'язані, і, аналізуючи розв'язання, майже завжди можна знайти напрямок, в якому вдається їх розвинути і узагальнити.

Французький математик, фізик і філософ Блез Паскаль писав: «Кожна вирішена мною задача ставала зразком, який служив згодом для розв'язання інших задач ».

У більшості випадків застосуваня аналізу здійснюється не в «чистому вигляді», а в поєднанні з синтезом. Не менш важливо, що подібний аналіз, формуючи інтуїцію і геометричне міркування, дозволяє показати, як можна самому здогадатися і розв'язати задачу.

1. Пряма, паралельна основам прямокутної трапеції, ділить її на дві трапеції, в кожну з яких можна вписати коло. Знайти основу вихідної трапеції, якщо її бокові сторони дорівнюють c і d, причому

c <d.

Розв'язання

Нехай в трапеції ABCD $\angle A=\angle D=90°$, AD=c, BC=d, MN∥AB, $M\in AD$, $N\in BC$.

Введемо позначення AB = a, DC = b для шуканих величин і проведемо висоту трапеції BH.

З ΔBCH : $CH=\sqrt{CB^2-BH^2}$, але

CH = CD-DH = CD-AB = b-a.

Звідси

$$b-a=\sqrt{d^2-c^2}\ . \qquad (1)$$

Отримане рівняння, зв'язує дані і шукані величини, тому будемо шукати ще одне рівняння зв'язку, щоб визначити невідомі величини a і b з системи рівнянь. Для цієї мети використаємо найбільш характерні властивості даної конфігурації виглядають природньо.

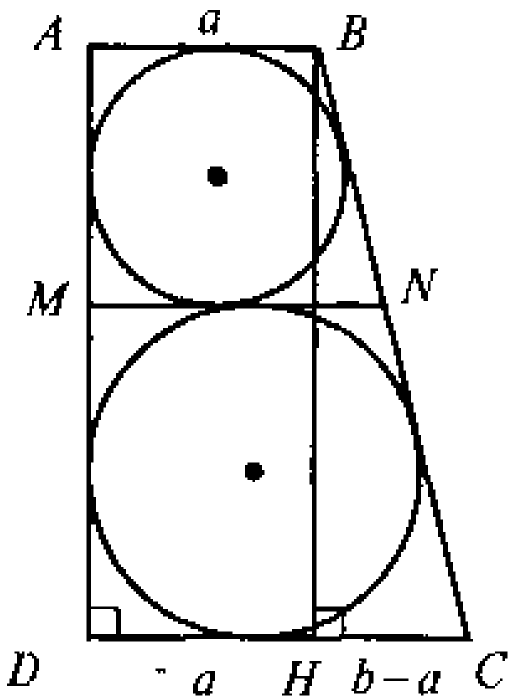
По-перше, врахуємо, що трапеції ABNM і DCNM - описані, тому

AB + NM = AM + BN,

CD + NM = DM + CN.

Склавши ці рівності, отримаємо:

AB + CD + 2NM = AD + BC. (*)



По-друге, трапеції подібні. Значить, $NM^2 = AB \cdot CD$, $NM^2 = a \cdot b$, $NM = \sqrt{a \cdot b}$ або $2NM = 2\sqrt{a \cdot b}$. Маємо:

$b + a + 2\sqrt{a \cdot b} = c + d$,

$(\sqrt{b} + \sqrt{a})^2 = c + d$,

$\sqrt{b} + \sqrt{a} = \sqrt{c + d}$. (2)

Після ділення рівняння (1) на - рівняння (2) отримаємо нове рівняння

$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{d - c}$. (3)

Далі з системи рівнянь (2) і (3) способом складання визначаються $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$, а потім основу вихідної трапеції a і b:

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{d + c} - \sqrt{d - c}}{2},$$

$$\sqrt{b} = \frac{\sqrt{d + c} + \sqrt{d - c}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{d - \sqrt{d^2 - c^2}}{2}$, $\frac{d + \sqrt{d^2 - c^2}}{2}$.

Аналіз

Аналізуючи отримані вирази, помічаємо, що a + b = d (!). Як отримати це співвідношення? Його використання в системі разом з рівнянням (1) спростить її.

Згадаймо, що для радіуса r вписаної в прямокутну трапецію круга вірно співвідносячи $r=\frac{a\cdot b}{a+b}$, де a і b- основи трапеції.

Для наших трапецій отримаємо:

$$AM=\frac{2a\cdot MN}{a+MN}\ ,\quad DM=\frac{2b\cdot MN}{b+MN}\ .$$

Сума лівих частин рівностей очевидно дорівнює з

(AM + DM = AD),

а правих - 2MN, так як

$$2MN\left(\frac{a}{a+MN}+\frac{b}{b+MN}\right)=2MN\cdot\frac{2ab+MN(a+b)}{ab+MN^2+MN(a+b)}$$

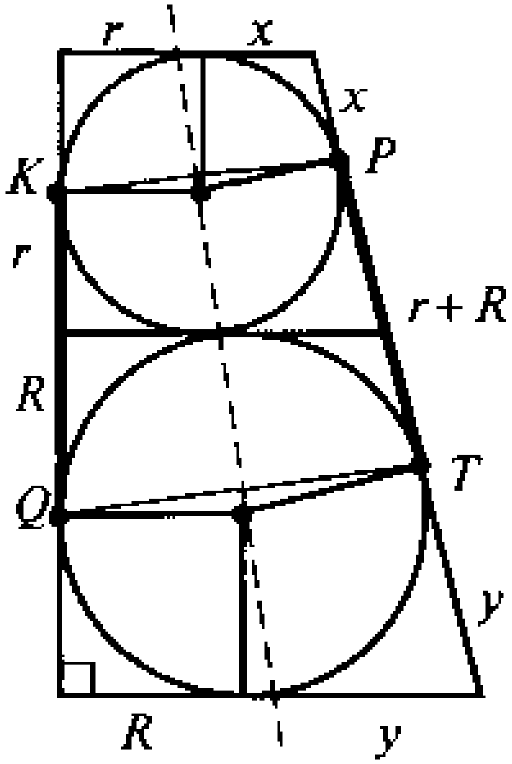
(Чисельник і знаменник дробу рівні, тому що $MN^2=a\cdot b$). Отже, 2MN=c і рівність (*) набуде вигляду: a + b + c = c + d. Звідси a + b=d, і співвідношення доведено.

Продовжимо аналіз. Чи не можна без допоміжного співвідношення вивести рівність a + b = d?. Звернемо увагу на те, що в попереднє розв'язання значну роль відіграє рівність (*), яке випливає з властивості описаного чотирикутника. Тоді згадаємо, що при доведенні вказаної властивості розглядаються пари рівних відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки. Вивчимо в нашій задачі відрізки, які проведені до кіл з вершини трапецій.

a + b = x + r + y + R = (x + y) + (r + R)

(Позначення запропоновані на рисунку);

d = (x + y) + PT.



Отже, залишається переконатися, що PT =r + R.

Дійсно, в силу симетрії щодо лінії центрів PT = KQ = r + R (KPTQ - рівнобедренна трапеція).

Таким чином, необхідне співвідношення отримано в результаті всестороннього аналізу без застосування складних властивостей даної конфігурації фігур (зокрема, подібності).

Очевидно, що загальною схеми подобних аналізів розв'язання не існує. Інші розв'язання і другі схеми аналізу можливі і в цьому завданні. Так, можна розглянути гомотетія з центром в точці перетину лінії центрів кіл і прямій MN, що переводить центри кіл один в одного. З властивостей вказаної гомотетії слід, що MN = r + R або 2MN = c.

Цю рівність можна довести, також використовуючи метод площ і формули

$S_{ABNM} = AB \cdot MN$, $S_{CDNM} = CD \cdot MN$,правильні для площ наших трапецій.

Зробіть модель або намалюйте великий точний малюнок і продовжіть самостійно аналіз цієї повчальної конфігурації. Зверніть увагу на додаткові побудови.

Синтез

Використовуючи дані аналізу, запишемо розв’язання скорочено:

З ΔBCH :

$\sqrt{CB^2 - BH^2} = CH = CD - DH = CD - AB = b - a$.

Звідси

$b - a = \sqrt{d^2 - c^2}$. (1)

$a + b = (x + y)(r + R)$;

$d = (x + y) + PT$.

Так як PT = r + R (в силу симетрії щодо лінії центрів PT = KQ = r + R), то

a + b = d. (2)

Вирішивши систему рівнянь (1) і (2), отримаємо відповідь.

Узагальнення

Результати аналізу дозволяють сформулювати інші завдання.

Пряма, паралельна підставах даної прямокутної трапеції, ділить її на дві трапеції, в кожну з яких можна вписати коло.

Довести, що її велика бічна сторона дорівнює сумі підстав.

1. Довести, що її менша бічна сторона дорівнює подвоєному загального основи трапецій.

2. Знайти косинус кута при основі рівнобедреного трикутника, якщо точка

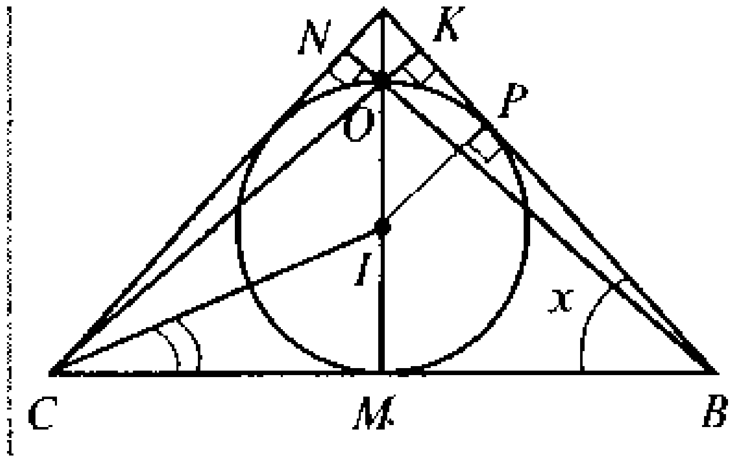
перетину його висот лежить на вписаному в трикутник колі.

Розв’язання

Нехай AB = AC, I - інцентр, O - Ортоцентр. За умовою задачі $O \in O_{kp}$ (I, OI). Звідси випливає, що $\angle A < 90°$.

Введемо допоміжний кут: $\angle B = x$.

A



Тоді $\angle BCK = 90° - \angle B = 90° - x$, тому що $CK \perp AB$.

З прямокутних трикутників ΔMCO і ΔMCI : $\angle MCO = \angle BCK$ і

$MC = MO \cdot ctg(90° - x) = MO \cdot tgx$. (1)

$\angle MCI = \frac{x}{2}$ ($\angle B = \angle C$, CI – бісектриса кута C);

$MC = MI \cdot ctg\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot MO \cdot ctg\frac{x}{2}$. (2)

З (1) і (2) маємо:

$MO \cdot tgx = \frac{1}{2} \cdot MO \cdot ctg\frac{x}{2}$ чи

$2 \cdot tgx = ctg\frac{x}{2}$.

Розв’яжемо це тригонометричне рівняння відносно $\cos x$:

$\frac{2 \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$, $\frac{2}{\cos x} = \frac{1}{1 - \cos x}$, $2 = 3\cos x\ (\sin x \neq 0)$, $\cos x = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

аналіз

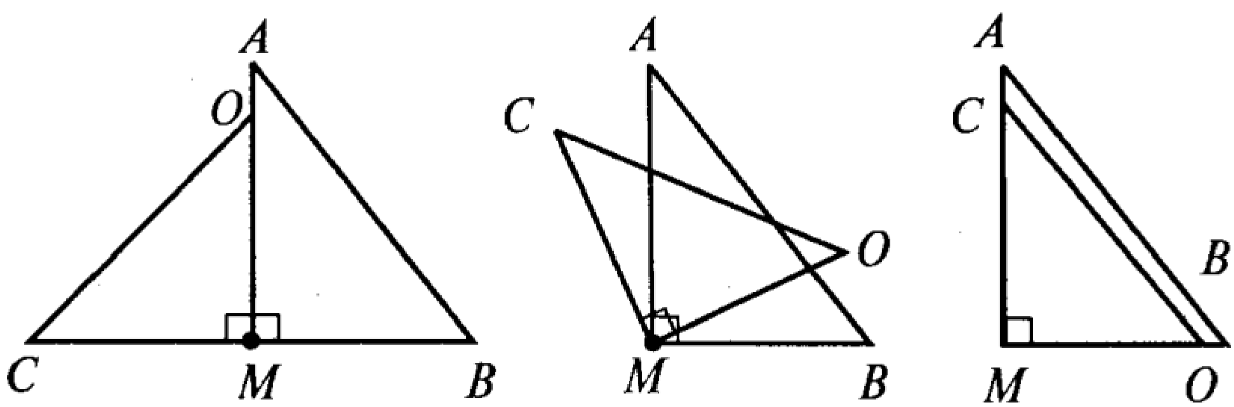
Знаходячи розв’язання без застосування тригонометрії, перейдемо в одержанному тригонометричному рівнянні до відношень довжин відрізків і вивчимо пропорцію.

$2\,tgx = ctg\frac{x}{2}$ рівносильно

$\frac{2\,AM}{MB} = \frac{CM}{MI}$ або $\frac{AM}{MB} = \frac{CM}{MO}$.

(*)

З пропорції (*) слідує, що $\Delta BAM \sim \Delta OCM$. Подібність цих прямокутних трикутників не очевидно, але вони подібні, так як $\angle OCM = \angle BAM$. Сторони вказаних кутів лежать на взаємно перпендикулярних прямих: $MC \perp MA$, $CO \perp AB$. При цьому відрізок CO не перетинається з прямою AB, що і робить рівність кутів менш наочною. На серії малюнків внизу зображений поворот трикутника OCM навколо точки M на 90 ° за годинниковою стрілкою. В результаті того перетворення промінь MC перейде в промінь MA, промінь MO - в промінь MB, а прямо зі і AB стануть паралельними.



Подібність трикутників можна довести і використовуючи властивість транзитивності.

$\Delta BAM \sim \Delta OCM$, так як кожен з них подібний трикутнику AOK ($\angle COM = \angle AOK$ як вертикальні, а кути $\angle AOK$ і $\angle ABM$ доповнюють кут $\angle OAK$ до прямого).

Чи можна застосувати подібність трикутників в розв'язанні?

З цією метою продовжимо аналіз. Пропорція (*) містить «не зручний» відрізок AM.

$\Delta BAM \sim \Delta AIP$, тобто $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{IP}$.

Так як $IP = \frac{1}{2} MO$, то

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2(AB - BP)}{MO},$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2(AB - MB)}{MO}.$$

Звідси $2MB(AB - MB) = AM \cdot MO$ або з урахуванням пропорції (*),

$2MB(AB-MB)=MB\cdot CM$.

Розділивши на MB, отримаємо:

$2AB-2MB=CM$, $2AB=3MB$.

(CM = MB) або $\frac{MB}{AB}=\frac{2}{3}=\cos B$.

Розв'язання знайдено. Бачимо, що не обов'язково застосовувати формули тригонометрії навіть тоді, коли потрібно знайти косинус кута. Аналізуючи хід розв'язання, звернемо увагу на те, що в двох парах подібних трикутників, які розглядалися, трикутник BAM був спільним.

Отже,

$\Delta BAM \sim \Delta OCM$ і $\Delta BAM \sim \Delta AIP$.

Отже, за властивостю транзитивності $\Delta BAM \sim \Delta AIP$. Значить, $\frac{CM}{MO}=\frac{AP}{IP}$ (зверніть увагу, що береться співвідношення катетів, хоча шуканим є и відношення катета до гіпотенузи). Маємо:

$\frac{CM}{MO}=\frac{2(AB-BP)}{MO}$,

$BM=2(AB-MB)$, $2AB=3MB$,

тобто розглядається пропорція, яка не містить явно відрізки шуканого відшення MB і AB.

синтез

$\Delta OCM \sim \Delta AIP$ (кожен з цих трикутників подібний трикутнику АОК).

Значить, $\frac{CM}{MO}=\frac{AP}{IP}$ або $\frac{MB}{MO}=\frac{2AP}{MO}$,

так як $MB=CM$ і $MO=2IP$.

Звідси MB = 2 AP або MB = 2 (AB-MB), 3MB = 2AB, тобто $MB:AB=\cos B=2:3$.

Узагальнення

Вивчені властивості конфігурації дозволяють сформулювати інші задачі і питання.

Довести, що половина його основа є середнім пропорційним між діаметром кола і висотою, проведеної до основи.

Довести, що радіус вписаного кола становить третю частину довжини відрізка, який з'єднує ортоцентр з вершиною основи даного трикутника.

• Яка роль додаткових побудов в розв'язуванні даного завдання?

• Чи можна, не проводячи обчислень, порівняти шуканий кут В з кутом 45 °?

• Чи має розв'язання задача, обернена до даної?

Заняття 6. Еврестична дільність школярів.

Пріоритетним завданням базової математичної освіти є розвиток мислення студентів до рівня, який би допоміг їм стати компетентними фахівцями у відповідній галузі, оволодіти вміннями використовувати отримані знання для здобуття вищої освіти, для самостійного збагачення, узагальнення й систематизації знань, для вирішення проблем у реальному житті. Важливою умовою вирішення цього завдання є формування в студентів евристичних умінь.

Посилити розробку та впровадження евристичних прийомів навчання математики, індивідуалізувати процес навчання допомагає, за словами В.І.Клочко [24, с.6], використання інформаційних технологій.

Можливості використання НІТ при вивченні математики досліджували багато вчених, зокрема, Н.В.Кульчицька, О.І.Скафа й ін.

При дослідженні методичних і дидактичних проблем застосування комп'ютерів як засобу навчання в загальноосвітній школі основні зусилля вчених були зосереджені на розкритті перспектив використання інформаційних технологій в навчанні (А.П.Єршов, М.І.Жалдак, В.М.Монахов й ін.), обґрунтуванні можливостей використання комп'ютерів для інтенсифікації навчального процесу (Б.С.Гершунський, Ю.І.Машбиць, Т.А.Сергеєва й ін.), проведенні різносторонньої класифікації програмно-педагогічних засобів (Ю.І.Машбиць, І.В.Роберт, Н.Г.Салміна й ін.), вивченні питань формування основ інформаційної культури школярів і вчителів математики й інформатики

(М.І.Жалдак, Е.І.Кузнєцов, В.М.Монахов, А.В.Пеньков й ін.). Інтенсивно проводились дослідження з питань запровадження засобів НІТ у навчальному процесі (М.І.Жалдак, Ю.С.Рамський, Н.В.Морзе й ін.) та методики їх використання в процесі навчання математики (З.І.Слєпкань, М.І.Бурда, М.І.Шкіль, В.О.Швець, І.Ф.Тесленко й ін.).

Але слід зауважити, що на сьогодні недостатньо досліджене питання щодо використання комп'ютеру як засобу формування евристичних умінь студентів на факультативних заняттях з математики.

Програми GRAN1, GRAN-2D виступають засобами візуалізації задачі та її розв'язання, роблять діалог студента й вчителя більш доступним й евристичним. Використання цих програм у більшості випадків дає можливість зробити розв'язування задачі легшим завдяки простому розгляданню рисунків. За допомогою цих засобів студенти можуть самостійно висувати гіпотези, робити припущення відносно закономірностей, що спостерігаються, мати можливість експериментально перевіряти їх.Розглянемо використання програми GRAN1 на факультативі «Початкові відомості про функцію» під час ознайомлення студентів 9 класу зі способами «розвитку задачі» (тема заняття «Застосування способів «розвитку задачі» у процесі їх розв'язування»): перетворення задачі; конструювання задачі, що аналогічна даній, але більш складна; узагальнення задачі; конкретизація задачі й конструювання задачі, оберненої даній.

1. При яких значення параметра а коло, що задане рівнянням $x^2 + y^2 = 1$, буде вписано в чотирикутник, що задано рівнянням $|x| + |y| = a$ (рис. 3).

У даному випадку ця програма виступає засобом дослідження моделі й

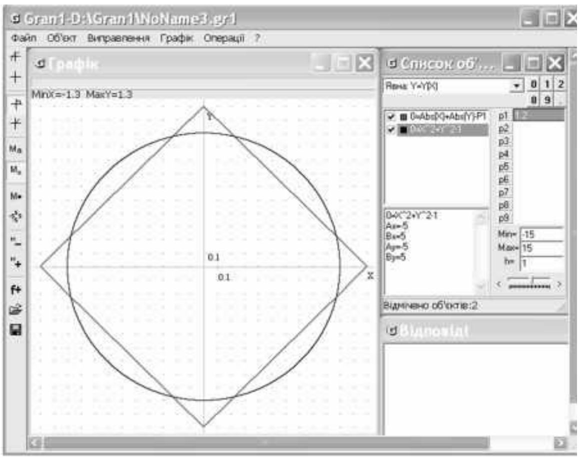


Рис.3

сприяє формуванню навчально-пізнавальної евристичної діяльності студентів на факультативних заняттях. При цьому працюють такі евристики:«модифікуй задачу, перетворюй з появою нових властивостей», «переформулюй задачу», «досліджуй на моделі», «виводь наслідки», «експериментуй на моделі».

О.І.Скафа виділяє найважливіші функції програми GRAN1, що пов’язані з дослідницькою діяльністю: підтримка знаходження циклів «осяяння» шляхом діалогу з студентами, прискорення висунення гіпотез й їх перевірка з опорою на наочні образи (графіки), підготовка умов для нового розуміння задачі. Студенти в такий спосіб усвідомлюють потребу доводити, бачать, з якою метою й навіщо їм це потрібно робити. У зв’язку з цим в них формуються відповідні евристичні вміння: спостереження явищ; аналіз фактів, сприйняття їх через призму математичних відношень; виділення об'єктів, важливих для пошуку розв’язання задачі; облік і співвідношення всіх даних задачі між собою й з вимогою задачі, з'ясування їх узгодженості й суперечності; висунення різних припущень з обґрунтуванням їх можливості (гіпотези); передбачення результатів; формулювання узагальненого принципу, що пояснює суть задачі; з'ясування узагальненого принципу дії; переформулювання ідей в різних варіантах; побудова варіантів плану дії, розв’язання; переклад узагальнених схем дії в конкретні операції; пошук асоціацій у зв'язку з об'єктом задачі;

відшукання нових функцій одного й того ж об'єкту; співвідношення кроків пошуку розв’язання між собою й з питанням задачі; комбінування одних відомих прийомів і способів розв’язання з іншими; формулювання й доведення висновків; прагнення до вичерпання всіх можливих висновків відповідно до питання задачі; перевірка відповідності розв’язання вимогам задачі; перевірка правильності виконаних дій; перевірка повноти й достатності доказів; зіставлення результатів з еталонними, нормативними.

Розглянемо застосування ППЗ GRAN- 2D на занятті «Те ж саме, але інакше» евристичного факультативу «Евристики в розв’язуванні задач» для студентів 8-9 класів під час ознайомлення з евристикою «переформулювання задачі».

Відстань між двома домівками 12 км. Чоловік вийшов зі свого дому о 9 год. 25 хв. і прибув до іншого о 13 год. 15 хв. Наступного дня він відправився в зворотний шлях об 11 год. і прийшов додому о 14 год. 40 хв. На якій відстані від його дому знаходиться пункт, котрий чоловік проходив в одну й ту ж годину як на прямому, так і на зворотному шляху. Звичайний спосіб розв' язання таких задач - складання рівняння або системи рівнянь - в даному випадку важко застосувати, бо не видно, як скласти рівняння; питання задачі дуже незвичайне. Простіше цю задачу розв'язати, замінюючи її графічною моделлю. Для цього пропонується застосувати програмний продукт GRAN- 2D. У системі координат, де на осі абсцис відкладаємо в якомусь довільному масштабі відстань, а на осі ординат - час в

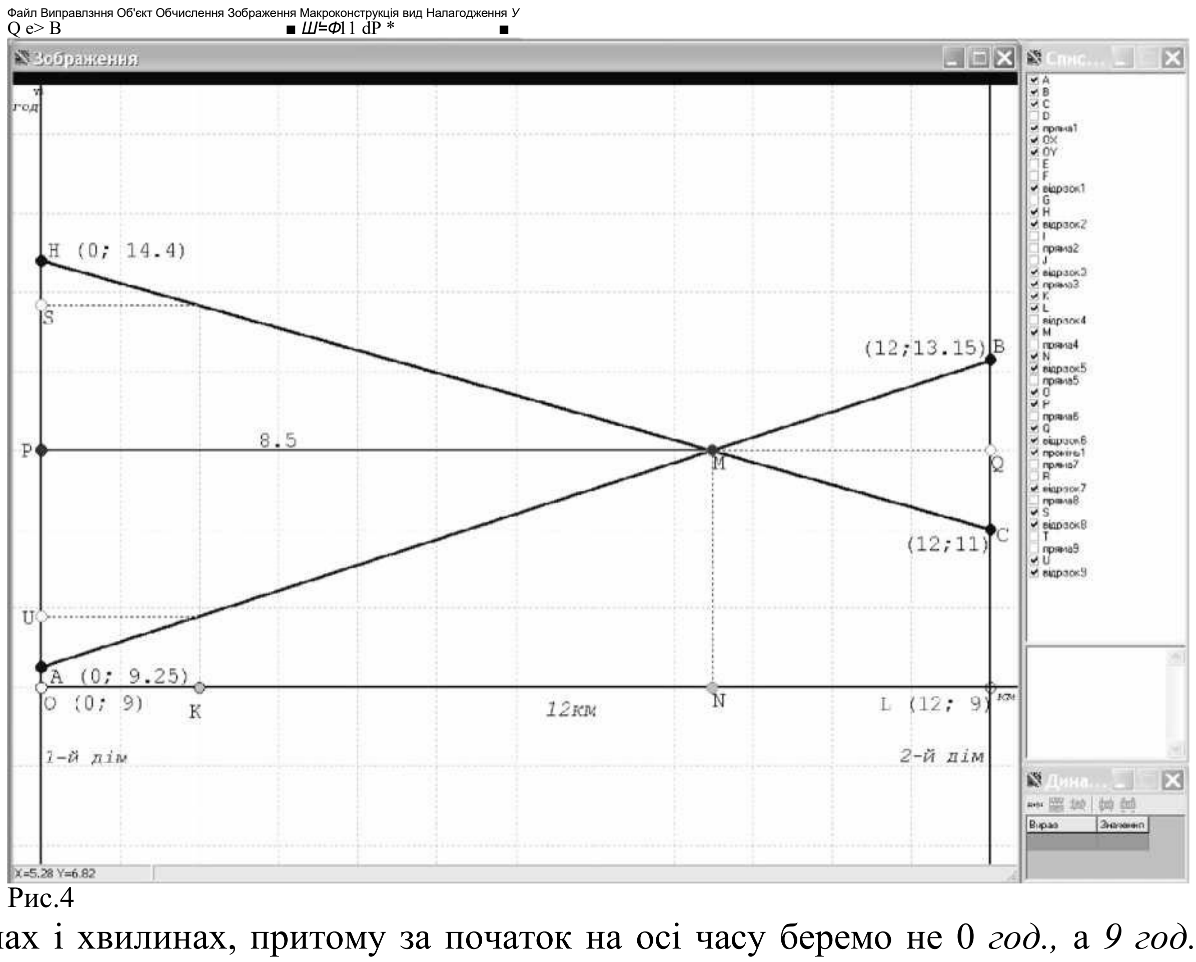


Рис.4

годинах і хвилинах, притому за початок на осі часу беремо не 0 *год.,* а *9 год.* ранку, будуємо графіки руху чоловіка туди й назад (прямі АВ і *CH)* (рис. 4).

Якщо візьмемо який-небудь пункт на шляху чоловіка, наприклад, пункт К, то цей пункт він проходив на прямому й зворотному шляху в різний час: на прямому шляху в *U год,* на зворотному - в *S год.* Але є один пункт *N,* який він проходив в один і той ж час як на прямому, так і на зворотному шляху: цей пункт відповідає точці перетину графіків його руху - точці *M*. Це і є пункт, який шукали.

Узагалі застосування програмних засобів GRAN1, GRAN-2D, DG в умовах навчання має більше можливостей, ніж на уроках математики. Їх можна пропонувати студентам з метою підвищення пізнавальної самостійності як завдання - проекти. Можливі такі творчі завдання: дослідити який математичний об'єкт, запропонований учителем; запропонувати власні задачі, які розв'язуватимуться за допомогою однієї з перелічених програм (вони можуть увійти до збірника задач, створених студентами); провести дослід (або експеримент); створити власний (нікому ще невідомий) математичний об'єкт, придумати йому назву; створити математичний рисунок за допомогою цих програмних продуктів; придумати дидактичну гру; зашифрувати якісь об' єкти; спланувати цілі щодо оволодіння цими засобами; розробити й провести фрагмент заняття математичного гуртка, змагання для молодших школярів тощо.

Перед представленням учителем культурно-історичного аналогу студенти за допомогою цих програмних засобів можуть конструю-вати власні освітні продукти. Так, при вивченні факультативної теми «Геометричні особливості заданої конфігурації» (9 клас, тема «Теореми Чеви та Менелая») студентами за допомогою, наприклад, програми DG може бути «відкрита» теорема Чеви.

Учитель: «Побудуйте в довільному трикутнику бісектриси його кутів. Введіть додаткові позначення (основи бісектрис трикутника). Визначте довжини відрізків, на які поділяють сторони трикутника його бісектриси. Зафіксуйте на малюнку рівнобедрений трикутник (рис. 5)».

Далі студентам пропонується, змінюючи вид трикутника (рис. 6), знайти певну закономірність з шістьма довжинами порахованих відрізків або «відрити власну властивість» цієї динамічної побудови.

Залежно від загального рівня розвитку евристичної діяльності студентів вчитель може підвести до їх «власного відкриття», запропонувавши експериментальне дослідження щонайменше з десяти дослідів. При виконанні

цієї практичної роботи студентам пропонується заповнити табл. 1 та після закінчення експерименту узагальнити, міркуючи індуктивно, отримані результати.

Таблиця 1

№	AD	DB	B H	HC	C F	FA	Порахувати $AD * BH * CF$	Порахувати $DB * HC * FA$	$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CF}{FA}=$
1.	2,5	1,8	1,8	2,5	3,0	3,0	13,5	13,5	1
2.	5,3	3,3	2,2	1,5	1,8	4,2	20,988	20,79	1,0095238
10.		8,0	6,0	2,6	2,3	3,7	75,9	76,96	0,9862266

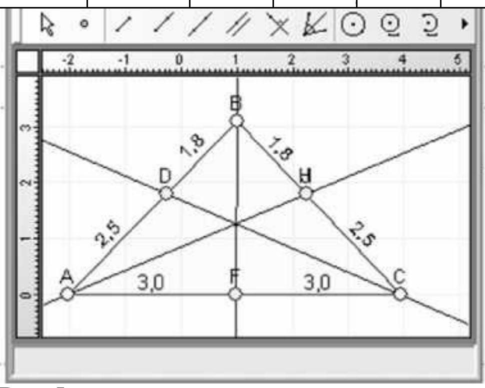


Рис.5

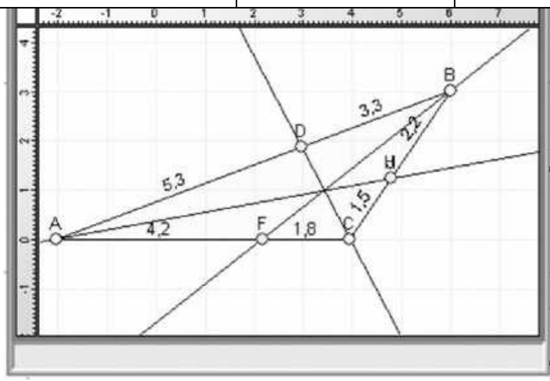


Рис.6

Далі студентівські версії порівнюються між собою, доопрацьовуються; порівнюються з культурно-історичним аналогом - теоремою Чеви: «Прямі, що проходять через вершини трикутника ABC і перетинають його сторони AB, *BC, CA* (або їх продовження) відповідно в точках *D, H, F,* перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CF}{FA}=$ 1». В ході індивідуальної й колективної рефлексії здійснюється усвідомлення того, що відбулося.

Заняття 7. Прийоми запам'ятовування матеріалу на уроках математики

Сучасний світ настільки перенасичений інформацією, що знати і пам'ятати все людина просто не може. У школі студентам доводиться запам'ятовувати велику кількість формул, фактів, дат, незнання яких приводить до того, що студента починають вважати невдахою, ледарем, переводять у розряд невстигаючих. Часто доводиться чути таке виправдання від цих студентів: у мене погана пам'ять. Але ж той самий учень з подробицями переказує, наприклад, і зміст фільму, який подивився вчора, і запам'ятовує ще багато різної інформації. Отже, з. пам'яттю в нього все гаразд. Він лише не знає, як нею правильно користуватися. Вчитель має підказати, як потрібно запам'ятовувати, допомогти студентам розкрити його потенціал.

Познайомити з деякими прийомами запам'ятовування і їх використанням саме на уроках математики — мета нашого заняття.

Усі прийоми запам'ятовування матеріалу можна розділити на два основні напрями: мнемотехніка (методи, в основі яких лежить вербально-логічне мислення) та ейдетика (методи, що базуються на конкретно-образному мисленні). Вперше таке ділення запропонував радянський психолог А. Р. Лурія. Зараз у педагогіці є багато шанувальників як першого, так і другого напряму.

Кожен з цих напрямів має бути присутній на уроках математики, бо він веде до запам'ятовування і формул, методів, прийомів, властивостей тощо. А в математиці без цього просто не можна досягти успіху. Неможливо примусити мислити порожню голову, і жодні довідники, комп'ютери, органайзери не допоможуть.

Наведемо приклади різноманітних прийомів, що полегшують запам'ятовування математичного матеріалу.

Почнемо з методів Є. В. Антощука, засновника української школи ейдетики. Основний прийом, який пропонує використовувати ейдетика — використання уяви студентів, створення яскравих, емоційно забарвлених образів. Сприймається і запам'ятовується лише та інформація, що засвоюється легко, із задоволенням. За правилами школи ейдетики, для запам'ятовування чисел ми повинні оживити їх. Наприклад, одиниця — це казковий герой Буратіно, двійка — гусак, трійка — двогорбий верблюд тощо. А потім, коли потрібно запам'ятати, наприклад, число 23, уявляємо величезного гусака, який везе не собі маленького верблюдика. Для нас це нетипово, майже екзотично. Чим незвичайніший і комічніший образ, тим краще він запам'ятовується. Користуючись цією методикою, можна запам'ятати досить великі ряди чисел, наприклад значення числа n до 40 знака після коми. Для цього доведеться придумати власний сценарій, діючі особи в якому — цифри, що ожили, їх образи.

Та цифри запам'ятовувати в математиці доводиться не так уже й часто. Інша річ — формули. Та й їх ейдетика пропонує робити живими. Адже формули складаються переважно із букв, цифр, спеціальних символів. їх лише потрібно перетворити у предмети. Наприклад, формула $S = Vt$ може бути сценарієм такої історії: «удав (S), довгий, як рейка (=), попросив галку (V) дзьобом зробити дупло у телеграфному стовпі *(t)»*.

А ось такий образ можна придумати для запам'ятовування основної тригонометричної тотожності: «У родині Синичкиних свято. До них у відпустку приїздить дочка з чоловіком, родина Косичкиних. Ось двоє Синичкиних ($\sin^2 x$) радісно біжать назустріч Косичкиним ($\cos^2$ x), вони обіймаються (+). Утворюють одну велику родину: 1».

Створювати образи цифр, фігур допомагають і математичні казки, які часто використовують учителі у своїй практиці.

Уява допоможе уникнути деяких помилок, яких часто припускаються студенти. Наприклад, розкриваючи дужки і користуючись розподільним законом множення, уявляємо множник за дужками хорошим офіціантом, який обслуговує всіх без винятку клієнтів у обмеженому дужками залі. Найчастіше цей прийом учителі, можливо навіть не усвідомлюючи, використовують для запобігання помилок у розв'язанні лінійних рівнянь. Найпоширеніша помилка — діти забувають змінювати знаки тих доданків, що переносяться за знак рівності, або міняють знаки усім доданкам у лівій та правій частині рівняння. І ось тут на допомогу приходять образи. Один із них такий. Знак рівності — це вхідні двері. Знаки чисел — це одяг. Виходячи на вулицю, необхідно обов'язково змінити халат на парадгіий одяг, в якому можна ходити вулицею, .і навпаки, прийшовши додому, знімаємо робочий одяг і одягаємо домашній. Той, хто залишався вдома, одяг не змінював. А взагалі доводилося чути багато різних історій щодо цього. Це була й таможня, де усім доданкам ставили штампи у паспорт, і шлагбаум, який не відкриється, доки не зміниш знак, і музей, де потрібно 1 взувати тапці, і багато інших цікавих образів, створених фантазією творчих учителів. Звичайно, не потрібно дітям на- І в'язувати свій образ. Кожен може його уявити сам, придумати зовсім іншу історію. Та на початку роботи образ, який придумав учитель, служить як зразок, наштовхує дитину на створення її власних картинок.

Ще один прийом із арсеналу ейдетики — метод Цицерона (метод локуса). Ніхто з філософів не говорив з конспектом у руках. Як їм це вдавалося? Локус означає місце. Готуючись до публічного виступу, Цицерон використовував для запам'ятовування власний дім, розміщуючи тези на стінах житла. Звичайно, не буквально, а у своїй уяві. Цей метод можна використовувати для запам'ятовування плану доведення теорем. Наприклад, перший пункт доведення пишемо фарбою на стіні (подумки, звичайно). Уявляємо, як потроху тече ще не застигла фарба, навіть відчуваємо її запах. Потім повертаємось до вікна і ножицями вирізаємо на шторі другий пункт доведення. Потім третій шкрябаємо цвяхом на склі, чуємо противний звук. Потім на стелі сиплеться штукатурка. На цій осипаній штукатурці пальцем дописуємо закінчення доведення. Потім досить лише припам'ятати свою кімнату, місце написання, а що було написано, пригадується немов само собою. І на це не знадобилось великих зусиль. Цікаво, що, незалежно від нашого бажання, інформація образно пов'язується з місцем її виникнення. Так, в одному з американських університетів провели експеримент. Після прослуховування лекції студентів розділили на дві групи, одну з яких екзаменували в «рідній» аудиторії, другу — у сусідній. Студенти першої групи показали значно кращий результат.

Не слід відкидати із арсеналу запам’ятовування запропонований В. Ф. Шаталовим метод опорних сигналів, образних гачків. Цей метод в ейдетиці називають методом піктограм. Ці «вузлики на пам’ять», що іноді можуть бути зрозумілі лише тому, хто їх написав, допоможуть написати дуже коротку шпаргалку. Цією шпаргалкою вчитель дозволить користуватися. А якщо й ні, то й це не страшно. Досить її існування. Складаючи її, учень співвідносив математичний факт умовному символу, проводив певну роботу з перетворення інформації і вже запам’ятав те, що писав.

Є вчителі, які свідомо не пускають на уроки якісь там казки й вірші, у викладанні перш за все дотримуються принципу науковості. Та уявіть себе, наприклад, у спілкуванні з іноземцем, мову якого ви не розумієте. Не дуже комфортно себе відчуваєте? Майже в такій ситуації опиняються деякі наші студенти, коли вони не розуміють, про що йде мова, а все це потрібно запам’ятати і розказати. Допоможіть їм. Створення образів не буде суперечити науковості викладання. Ця методика лише зробить запам’ятовування матеріалу більш комфортним, дозволить гризти граніт науки, не ламаючи зубів.

Крім прийомів ейдетики, на уроках математики доцільно використовувати й інші прийоми запам’ятовування: мнемотехніку та інші вербально-логічні системи, що допомагають переключити увагу на більш зрозумілу дію, перетворити інформацію в таку форму, що придатна для подальшого відтворення.

Зупинимось на декількох із них.‘ Часто запам’ятати матеріал допомагає виявлена закономірність. Усім відома закономірність отримання добутків у табличці множення на 9. Якщо починати з множення на 2, то в добутку цифра десятків у сумі з цифрою одиниць дає 9. Множимо цифру 6, зменшуємо її на 1 і дописуємо таку цифру, щоб у сумі з 5 дала 9, тобто 4. Саме ця закономірність допомагає використати пальці для відтворення таблички. Для цього потрібно покласти перед собою обидві руки і занумерувати пальці зліва на право. Загнути той палець, номер якого співпадає з числом, яке ми множимо на 9. Кількість пальців до загнутого зліва — це кількість десятків, після — кількість одиниць. Наприклад, множимо на 9 число 3. Загинаємо третій палець. Ліворуч від нього залишилось два пальці (два десятки), а праворуч — 7 (7 одиниць). Залишається лише назвати число: 27. Прийомом виявлення закономірності доцільно користуватись і для запам’ятовування таблички значень деяких тригонометричних функцій. Запишіть числа 0, 1, 2, 3, 4 і по черзі видобувайте з них корені й діліть на два. Це й будуть значення синуса для 0, ЗО, 45, 60 і 90 градусів. Потім запишіть ці числа у зворотному порядку — дістанете значення для косинусів.

Закономірність допоможе запам’ятати і значення числа едо 15 знаків після коми:

Число *е*, як відомо,
Таєну свою має.
І двічі Льва Толстого
Воно викликає.
А коли надумав
Похвастатись знанням,
Трикутник прямокутний
Тобі підкаже шлях:
Коли він рівнобічний,
Кути його відомі.
Ти допиши їх звично
До того ж Льва Толстого.

О. Панішева

(е=2,718281828459045.., 1828 - рік народження Льва Толстого, 45°—90° — 45° — величини кутів рівнобічного прямокутного трикутника.)

Не останню роль відіграє і рима в запам’ятовуванні деяких математичних фактів. У 5 класі відпрацьовуються навички читання та запису числових виразів та виразів зі змінною. Відомо, щоб правильно прочитати вираз, потрібно правильно розставити порядок дій у ньому й починати читання з останньої дії. Тут допомагає таке правило-орієнтир:

Щоб нам вираз прочитати,

Треба дії перерахувати.

Ти останню дію називай,

Лише потім вираз цей читай.

Запам'ятати формулу для площі круга та об'єму кулі дітям допоможуть такі віршики:

А я знаю площу круга,

І тому я дуже радий,

Научу свого я друга:

Площа ця - πR^2 [пі ер в квадраті].

Щоб студенти правильно називали координатні вісі, запропонуйте запам'ятати такі рядки:

Граємо ми в наші ігри,

Грає з нами й песик Рікс.

Ордината — то є ігрек,

А абсциса — то є ікс.

Навіть у 8 класі деякі студенти залюбки вивчають вірш замість формули коренів квадратного тричлена, хоча таких студентів, звичайно, вже значно менше, ніж у 5 класі.:

Щоб кількість коренів знайти,

Дискримінант обчислюй ти.

Треба тільки трішки постаратись:

b квадрат мінус 4ас.

Далі швидко відповідь знаходимо: $-b \pm \sqrt{D}$ під коренем,

Ділиш на 2а — і ти вже вільний,

Бо рівняння корені отримав.

Дотепні аналогії теж допоможуть швидше запам'ятати матеріал. Наприклад, вивчаючи правило знаків під час множення, доцільно розповісти таку коротеньку історію. Математичні знаки «+» і «—» прийшли до нас із країн Сходу. Арабські вчені, виводячи правила дій з додатними і від'ємними числами, користувалися такими цікавими аналогіями. «Друг мого друга — мій друг» (плюс помножити на плюс — дістанемо плюс), «Ворог мого ворога —

мій друг» (під час множення мінуса на мінус дістаємо плюс), «Друг мого ворога — мій ворог», «Ворог мого друга — мій ворог» (коли множимо плюс на мінус і навпаки, дістаємо мінус). Цікаво? А саме те, що цікаве, швидше запам'ятовується. Потрібно відмітити також, що розповідати різноманітні «цікавинки» вчитель не має права буденним голосом. Тоді жодні методи і прийоми не працюватимуть. Голос учителя, жести, увесь його вигляд повинні бути такими, щоб стимулювати студента до вивчення і запам'ятовування матеріалу.

Безпосередньо програма не вимагає знання неметричних мір. Та якщо учень зустріне в літературі якусь невідому йому одиницю довжини, обов'язково захоче з'ясувати, то чому ж вона дорівнює. І він побіжить до вчителя. Але чи зможете ви відразу відповісти на запитання: чому дорівнює фунт або миля? Без довідника важкувато. Гортаючи художню літературу, не завжди будеш відшукувати довідник. Зовсім неважко буде засвоїти числові значення цих мір у метричній системі за допомогою коду, в якому кожній цифрі поставлена у відповідність приголосна буква. Ця буква береться із назви самої цифри.

0 — нуЛь
1 — одиН
2 — дВа
3 — тРи
4 — Чотири
5 — П'ять
6 — Шість
7 — Сім
8 — вісіМ
9 — Дев'ять

Запишемо значення морської милі — 1852 м — і складемо якусь фразу для її запам'ятовування, наприклад «НеМо По Воді проплив морську милю».

Російський фунт — 0,410 — «Чай Не Летом, а зимой русские фунтами пьют».

Пуд - 16, 38 кг — «НаШ РоМан пуд підіймав» тощо. Запропонуйте дітям скласти такі фрази для інших мір. Найчастіше в них це виходить навіть краще, ніж у вчителя.

Перелічені вище прийоми здатні зробити запам'ятовування математичних фактів не таким уже й важким і допомогти нашим студентам у навчанні. Бо з допомогою цих прийомів і методів ми створюємо ситуацію успіху для дитини, збільшуємо її самооцінку. Ейдетика та мнемотехніка пропонують загальні прийоми, що можна використовувати у будь-якій галузі. Адаптувати їх до уроку математики — завдання вчителя. Впевнена, що в досвіді кожного вчителя є ще багато аналогічних прикладів, що полегшують запам'ятовування матеріалу різних тем математики. Головне — виробити у школярів навички запам'ятовування. Вони знадобляться їм не лише в математиці, а значно спростять запам'ятовування будь- якої інформації. Навчіть дітей уявляти, бачити закономірності, знаходити аналогії. Діти побачать свої можливості і, не виключено, навіть зможуть перейти із розряду невстигаючих у розряд тих, ким пишається вчитель.

Заняття 8. Факультативні заняття

Загальновизнаним є те, що годі й думати про якісне навчання, якщо студенти не забезпечені відповідними навчальними засобами. Майже для кожної теми зазначеної програми підготовлено навчальні посібники, які перелічені в списку літератури до програми, передбачають та враховують специфіку навчання, а тому мають чітку й перевірену часом структуру. Більшість з них містять методичні вказівки до теоретичного матеріалу, приклади розв'язання задач, тест для самоконтролю, призначенням якого є надання допомоги студентам в активному повторенні необхідного матеріалу, задачі для самостійної роботи із вказівками до їх розв'язування. Контрольне завдання складається з контрольного тесту, основних та додаткових задач. Є стислі вказівки до виконання контрольного завдання.

Пропонуються методичні рекомендації до вивчення декількох тем, які можна використати під час організації самостійної роботи студентів. Для кожної теми вони містять формулювання мети її вивчення, зміст теми, рекомендації до її розгляду. Головною частиною цих матеріалів є контрольне завдання із зазначеною вище структурою. Його складові забезпечують організацію самостійної роботи на обраних студентами рівнях. Вимоги до виконання контрольного завдання, термін його виконання, критерії оцінювання рекомендуємо сформувати вчителеві залежно від конкретних умов, в яких працює навчальний заклад, рівня підготовки студентів тощо.

Проектування факультативів, спецкурсів з орієнтованістю на виконання контрольного завдання дозволить забезпечити діяльність студентів, спрямовану на досягнення бажаних результатів. Можливість вибору рівня та обсягу роботи сприятиме вихованню відповідальності студентів за свої успіхи.

ІМОВІРНОСТІ І ЧАСТОТИ

Мета вивчення теми — продовжити формування в студентів понять імовірності випадкової події, рівно- можливості, стійкості відносних частот, умінь обчислювати ймовірності подій на класичній (зокрема із застосуванням комбінаторних міркувань), статистичній, геометричній основах.

Зміст. Імовірнісні моделі випадкового досліду. Ймовірність і частота. Стійкість відносних частот. Рівно- можливість наслідків досліду. Таблиці випадкових чисел. Комбінаторне правило множення. Геометричні ймовірності та координати.

Методичні рекомендації. **У роботі розглядалась тема «Події, імовірності, частоти», в якій продовжувалось знайомство з імовірністю, комбінаторикою і статистикою, розпочате на уроках математики в п’ятому—шостому класах, можливе і в позауроч- ний час. Тема присвячена поглибленню набутих знань у всіх визначених напрямках.**

По-перше, повернемось до обговорення поняття ймовірності. Як і в попередній темі, розглянемо три підходи до його визначення: класичний, статистичний, геометричний. Що стосується класичного підходу, то значну увагу приділимо питанню рівно- можливості наслідків досліду, а саме: в якому разі можна говорити про рівноможливість наслідків, як *I* перевірити її, що дає припущення про рівноможливість. З іншого боку, необхідно переконати студентів у тому, що класичне означення ймовірності можна застосувати далеко не завжди й у багатьох випадках доведеться звертатися до статистичного підходу, який дає змогу оцінювати ймовірності подій за результатами великої кількості дослідів. Що стосується цього підходу, то значну увагу слід приділити формуванню поняття статистичної стійкості дослідів. Тільки за умови, що досліди задовольняють умову статистичної стійкості, результати дослідів можна використати для оцінювання ймовірностей. Розширення геометричного підходу до обчислення ймовірностей варто провести за рахунок використання методу координат. Поки що можна обмежитись одномірною системою координат, тобто координатною прямою.

По-друге, певну увагу приділимо статистиці. Хоча систематичного викладення матеріалу, пов'язаного зі статистикою, тема й не передбачає, однак у ній розглядаються такі питання, як проведення експериментів, вимоги, яких слід дотримуватись під час проведення експериментів, деякі статистичні характеристики, наприклад відносна частота події. Про-довжимо розгляд імітаційних експериментів за допомогою таблиць випадкових чисел.

По-третє, продовжимо застосування методу перебору розв'язання комбінаторних задач, необхідних для обчислення ймовірності. Відповідні вміння вдосконалюються за рахунок більш докладного розгляду випадків, коли вибір проходить з поверненням або без повернення, із сукупності різних чи однакових елементів, коли порядок вибору елементів впливає чи не впливає на результат вибору. Крім того, можна розпочати використання комбінаторного правила множення. Передбачено знайомство студентів з трикутником Паскаля та його застосуванням під час розв'язування комбінаторних задач.

Контрольний тест

1. Стрілець зробив 80 пострілів, відносна частота влучання в мішень дорівнює 0,8. Скільков промахів він припустився?

А. 64. Б. 16. В. 10. Г. 70.

2. За результатами якої серії дослідів можна оцінити ймовірність виготовлення бракованої деталі?

А. Перевірено 200 деталей, виготовлених на одному верстаті протягом однієї робочої зміни.

Б. Перевірено 100 деталей, виготовлених на 20 верстатах протягом робочої зміни.

В. Перевірено 150 деталей, виготовлених на одному верстаті протягом місяця.

Г. Перевірено 8 деталей, виготовлених на одному верстаті протягом однієї робочої зміни.

3. Укажіть, хто зробив обґрунтований висновок.

Серед ДВОХ куплених лотерейних білетів ОДИН І виявився виграшним, тому Сергій зробив висновок про те, що ймовірність виграшу в цій лотереї дорівнює 0,5.

10 Підкинувши 4 рази монету й побачивши, що герб випав 3 рази,' Анатолій зробив висновок, що ймовірність випадання герба за одного підкидання монети дорівнює 0,75.

11 Довідавшись, що в останніх 20 тиражах лотереї «5 з 36» усі п’ять номерів угадувалися 6 разів, Євген зробив висновок, шо ймовірність угадати 5 номерів з 36 дорівнює 0,3.

12 Підкинувши 100 разів кнопку і підрахувавши, що вістрям угору вона упала 45 разів, Володимир сказав, що ймовірність того, що кнопка упаде вістрям угору, приблизно дорівнює 0,45.

А. Усі. Б. Жодний. В. Сергій. Г. Володимир.

4. Відомо, що після 200 підкидань монети відносна частота випадання герба дорівнювала 0,5. В яких межах могла знаходитися відносна частота тієї самої події після перших 100 підкидань?

А. [0,25; 0,75]. Б. [0,25; 1]. В. [0; 1]. Г. [0; 0,75].

5. Тільки одна з чотирьох подруг А, Б, В, Г скористалася генератором випадковості під час складання таблиці випадкових чисел з основою 2. Хто це?

2. 0000011111 1111000001 1110001100.

Б. 0010001100 01001010010011-101101.

3. 0110010110 1100110010 1110001100.

Г. 1100101100 0001111100 1010101010.

6. Наслідки якого випадкового експерименту не можна вважати рівноможливими?

А. Підкидання правильного тетраедра — номер грані, на яку впав тетраедр.

Б. Купівля лотерейного білета — білет виграшний і невиграшний.

В. Витягування карти з ретельно перетасованої колоди карт — масть карти.

Г. Витягування барильця лото з ретельно перемішаного вмісту мішка — число, написане на барильці.

7. З колоди в 36 карт навмання береться одна карта. Якою є ймовірність того, що це не буде картинка (шістка, сімка, вісімка, дев’ятка, десятка)?

1 А. 36 Б. 9. В. 9 Г. 36.

8. З набору доміно, на камінцях якого позначені числа очок від 0 до 3, навмання вибрали один камінець. Якою є ймовірність того, що сума очок на ньому дорівнює 5?

А.14. Б. 5. В. 10. Г. 28.

9. Сергій та Андрій з повного набору доміно (28 камінців) один за одним беруть два камінці. При цьому Сергій перший камінець повертає в набір, а другий бере з усього набору після ретельного пере- і мішування. Андрій перший не повертає в набір, і другий він бере з камінців, що залишилися. У кого більше шансів взяти два камінці, що не є дублями?

А. В Андрія. Б. У Сергія. В. Шанси однакові. Г. Порівняти неможливо.

10.3 літер слова «гіпербола» утворюють слова — послідовність з чотирьох літер. Що має більшу ймовірність: навмання обране слово з усіх утворених містить чи не містить однакові лвтери?

А. Шанси однакові. Б. Дорівняти неможливо.

В. Містить. Г. Не містить.

11.3 літер слова «миття» утворюють чотирилітерні й п'ятилітерні слова. Якою є ймовірність того, що навмання вибране з них слово буде складатися 3 різних літер?

12. На залізниці 10 станцій. На кожному квитку друкуються назви станцій відправлення і прибуття. Скільки різних квитків можна надрукувати, якщо кожен квиток можна використовувати в будь-якому напрямку, тобто байдуже, з якої з двох позначених у квитку станцій ви відправляєтесь?

А. 50. Б. 100. В. 90. Г. 45.

13.3 10 курсантів щоночі формується наряд, що складається з трьох осіб у складі начальника варти, розвідного та вартового.. Курсанти можуть виконувати кожен із зазначених обов'язків. Скільки ночей підряд командир може виділяти наряд, що не збігається з попередніми?

А. 720. Б. 120. В. 360. Г. 240.

14. Скількома способами два однакові подарунки можна розподілити поміж трьох дітей?

А. 9. Б. 8. В. 6. Г. 3.

15. Четверо студентів, серед яких два призери торішньої олімпіади, відібрані для участі в командній олімпіаді з математики. Скількома способами їх можна розподілити на дві рівні групи, у кожній з яких був би один призер торішньої олімпіади, якщо ці групи будуть брати участь у змаганні між собою?

А. І.Б.2. В.З.Г.4.

16. Скільки слів, що складаються з літери на позначення одного голосного і трьох різних приголосних, можна утворити з літер слова «функція»?

А. 432. Б. 324. В. 288. Г. 144.

17. В азбуці Морзе, що використовувалася раніш для телеграфних повідомлень, два знаки — крапка й тире. Кожен символ (літера чи цифра) кодується послідовністю крапок і тире, але не більш ніж п'ятьма знаками поспіль. Яку максимальну кількість символів можна закодувати за допомогою азбуки Морзе?

А. 32. Б. 25. В. 20. Г. 10.

18. Зустрілися чотири юнаки та три дівчини і стали по одному разу грати один, з одним у настільний теніс. Скільки всього було проведено зустрічей?

А. 18. Б. 9. В. 42. Г. 21.

19.Чому дорівнює сума коефіцієнтів у виразі $(x +y)^7$, записаному в стандартному вигляді?

А. 49. Б. 256. В. 64. Г. 128.

20.З колоди в 36 карт навмання береться одна карта. Якими є шанси на користь того, що це не буде картинка (шістка, сімка, вісімка, дев'ятка, десятка)?

А. 5:4. Б. 4: 5. В. 4:9. Г. 5: 9.

21.З колоди витягли 4 карти. Які з наведених подій є парами протилежних подій?

1) «Витягли принаймні одну карту бубнової масті»;

2) «витягли більш ніж одну карту бубнової масті»;

3) «усі витягнуті карти бубнової масті»;

4) «серед витягнутих немає карт бубнової масті».

А. 1)і 2). Б. 1) і 4). В. 1) і 3). Г. 2) і 4).

22. Сашко і Вова домовилися: якщо в результаті витягування камінця доміно сума очок буде кратною 5, то виграє Сашко, а якщо кратною 6, то виграє Вова. У кого з хлопчиків більше шансів виграти?

А. У Сашка. Б. У Вови. В. Шанси однакові.

Г. Порівняти неможливо.

Після буревію на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами телефонної лінії обірвався дріт. Ремонтна

23. бригада, що обслуговує цю ділянку, знаходиться на 50-му кілометрі. Якими є шанси на користь того, що їй потрібно їхати в напрямку 70-го кілометра?

А. 1 : 3. Б. 2 : 3. В. 2 : 1. Г. 1:2.

24. У 8-му класі було організовано три гуртки: фізики, хімії та біології. Кожен учень має записатися в гурток, і при тому тільки в один.

Гурток вибирається учнем навмання. Якою є 'ймовірність того, що Костя та Анатолій опиняться в гуртку фізики?

А. $\frac{1}{3}$. Б. $\frac{1}{4}$. В. $\frac{1}{9}$. Г. $\frac{1}{16}$.

25.3 відрізка [—3; 1] координатної прямої навмання вибирається число. Якою є ймовірність того, що воно не додатне?

А. $\frac{1}{2}$. Б. $\frac{3}{4}$. В. $\frac{1}{4}$. Г. $\frac{1}{3}$.

Основне завдання

1. Правильну монету підкинули двічі.

1) Побудуйте простір елементарних подій цього досліду з рівноможливими наслідками.

2) Якими є шанси на користь настання події «герб щипав принаймні один раз»?

3) За допомогою таблиці випадкових чисел проведіть цей дослід 100 разів. Скільки разів відбулася подія «герб випав принаймні один раз»?

4) Чи узгоджуються результати Вашого експерименту з підрахованими шансами на користь настання події «герб випав принаймні один раз»?

2. Підкинуто правильний гральний кубик.

1) Побудуйте простір елементарних подій цього досліду з рівноможливими наслідками.

2) Якими є шанси на користь настання події «кількість очок, що випали, кратна З»?

3) За допомогою таблиці випадкових чисел проведіть цей дослід 300 разів. Скільки разів відбулася подія «кількість очок, що випали, кратна З»?

4) Чи узгоджуються результати Вашого експерименту з Підрахованими шансами на користь настання події «кількість очок, що випали, кратна З»?

3. У скриньці п’ять пронумерованих куль: три білі та дві чорні. Навмання виймають три з них.

Побудуйте простір елементарних подій цього досліду.

1) Який склад куль за кольором витягти найімовірніше?

2) За допомогою таблиці випадкових чисел проведіть цей дослід 100 разів. Скільки разів відбулася подія «буде витягнуто дві білі та одну чорну кулі»?

3) Чи узгоджуються результати Вашого експерименту з підрахованою ймовірністю події «буде витягнуто дві білі та одну чорну кулі»?

4. Підкидаються два правильні гральні кубики.

1) Який результат імовірніший: сума очок, що випали у результаті підкидання двох гральних кубиків, дорівнює 6 чи дорівнює 7?

2) За допомогою таблиці випадкових чисел проведіть цей дослід 100 разів. Скільки разів відбулася подія «сума очок, що випали, дорівнює 7»?

3) Чи узгоджуються результати Вашого експерименту з підрахованою ймовірністю події «сума очок, що випали, дорівнює 7»?

5. Виберіть зі спортивного репортажу уривок з 50 слів. Підрахуйте, скільки слів складається з однієї літери, двох літер, трьох літер, чотирьох літер і т. д. Слова якої довжини зустрічаються найчастіше? Чи підтверджується цей висновок під час аналізу іншого спортивного репортажу?

6. Виходячи з кафе, відвідувач знайшов у себе в кишені чотири монети вартістю 5, 10, 25 і 50 копійок. Скількома способами він може дати «на чай» гардеробнику цими монетами?

7. Скількома способами можна відібрати декілька книг (не менш ніж одну) з п’яти однакових підручників алгебри та чотирьох однакових підручників геометрії?

8. Відрізок довжиною 8 см поділено точками на вісім рівних частин. Точки поділу позначено числами 1, 2, ..., 7. На цьому відрізку

навмання вибрано точку. Якою є ймовірність того, що сума її відстаней від точок 2 і 5 не менша від 4 см?

Додаткове завдання .

1. Деяка фірма випускає шоколадки. У кожну шоколадку вкладається фотографія одного з двох відомих спортсменів. Фотографій кожного спортсмена однакова кількість. Тому, хто збере повний комплект фотографій, наступна шоколадка видається безкоштовно.

1) Побудуйте простір елементарних подій досліду, який полягає в тому, що хтось збере повний ком-
плект фотографій чи купить не більше трьох шоколадок.

2) Уведіть елементарні ймовірності наслідків цього досліду.

3) Якими є шанси на користь настання події «буде куплено дві шоколадки»?

4) За допомогою таблиці випадкових чисел проведіть цей дослід 200 разів. Скільки разів відбулася подія «буде куплено дві шоколадки»?

5) Чи узгоджуються результати Вашого експерименту з підрахованими шансами на користь настання події «буде куплено дві шоколадки»?

2. У тесті з історії учню названо три дати: 1825,1812 і 1861 — і сказано, що це дати трьох історичних подій: початок вітчизняної війни, скасування кріпосного права і повстання декабристів. Запропоновано вказати дату кожної з цих трьох подій. Учень не знає, коли відбулися ці події, і називає дати навмання.

1) Побудуйте простір елементарних подій досліду, який полягає в тому, що учень навмання вибрав із запропонованих дату кожної з цих історичних подій.

2) Уведіть елементарні ймовірності наслідків цього досліду.

3) Якими є шанси на користь настання події «учень не вгадав жодної дати»?

4) За допомогою таблиці випадкових чисел проведіть цей дослід 300

разів. Скільки разів відбулася подія «учень не вгадав жодної дати»?

5) Чи узгоджуються результати Вашого експерименту з підрахованими шансами на користь настання події «учень не вгадав жодної дати»?

3. Троє друзів живуть разом. Вони вирішили, що вранці, коли потрібно піти до магазину по хліб, будуть тягти жереб: на одному із трьох папірців буде стояти буква «х»і хто витягне папірець з цією буквою, той і має йти до магазину.

1) Побудуйте простір елементарних подій досліду, який полягає в тому, що троє друзів у певному порядку тягнуть жереб.

2) Уведіть елементарні ймовірності наслідків цього досліду.

Якою є ймовірність того, що папірець з буквою «х» витягне той, хто буде тягти жереб першим?

3) Якою є ймовірність того, що папірець з буквою «х» витягне той. хто буде тягти жереб другим? третім?

4) За допомогою таблиці випадкових чисел проведіть цей дослід 100 разів. Скільки разів відбулася

І подія «папірець з буквою «х» витягнув той, хто тягнув жереб першим»?

5) Чи узгоджуються результати вашого експерименту з підрахованою ймовірністю події «папірець з буквою *«х»* витягнув той, хто тягнув жереб першим»?

I

4. На відрізку прямої *АВ* навмання вибирається І точка *М.* Якою є ймовірність того, що вона потра- јпить поміж точками *С* і *D* на цьому відрізку?

5. Скількома способами можуть два продавці книг розподілити між собою 29 екземплярів однієї книги, 19 екземплярів другої і 9 екземплярів третьої, якщо жоден продавець не може одержати всі книги?

Вказівки до виконання основного завдання

1. 1) Наприклад, одним із наслідків досліду можна вважати ЦГ, який означає, що в результаті першого підкидання випаде цифра, а в результаті другого — • герб.

2) Визначте, яка подія є протилежною до події «герб випав принаймні один раз».

3) Результатом одного досліду є, наприклад, пара чисел 0 і 1 (0 — цифра, 1 — герб).

4) Порівняйте ймовірність і відносну частоту події «герб випав принаймні один раз».

2. 1) Наслідками досліду можна вважати кількості очок, що випали.

2) Визначте, яка подія є протилежною до події «кількість очок, що випали, кратна З».

3) Результатом одного досліду є число з набору від 1 до 6.

4) Порівняйте ймовірність і відносну частоту події «кількість очок, що випали, кратна З».

3. 1) Позначте кулі за допомогою чисел.

2) Укажіть усі можливі склади куль (за кольором) серед витягнутих і обчисліть їх імовірності.

3) Результатом досліду є трійка чисел з набору тих чисел, якими Ви позначили к|лі.

4) Порівняйте ймовірність і відносну частоту вказаної події.

4. 1) Побудуйте простір елементарних подій для підкидання двох гральних кубиків. Його зручно подати у вигляді таблиці 6x 6.

2) Результатом досліду є пара натуральних чисел із сукупності від 1 до 6.

3) Порівняйте ймовірність і відносну частоту вказаної події.

5. Запропонуйте зручну таблицю для реєстрації результатів досліду.

6. Скористайтесь тим, що «чайові” можуть бути довільним набором з наявних чотирьох монет..

7. Зверніть увагу на те, що всі підручники алгебри однакові й усі підручники геометрії однакові.

8. Виберіть зручно координатну пряму.

Вказівки до виконання додаткового завдання

1. 1) Результатом досліду є сукупність двох або трьох елементів.

2) Окремо визначте ймовірності наслідків досліду, які складаються з двох і з трьох елементів. Не забувайте, що сума всіх елементарних імовірностей дорівнює 1.

3) Обчисліть імовірність указаної події і протилежної до неї.

4) Результатом досліду є пара або трійка чисел із сукупності чисел 1 і 2 (цими числами позначено фотографії).

5) Порівняйте ймовірність і відносну частоту вказаної події.

2. 1) Результатами досліду є всілякі перестановки з трьох дат.

2) Скористайтесь тим, що наслідки досліду рівно- можливі.

3) Обчисліть імовірність вказаної події і протилежної до неї.

4) Результатом дбсліду є трійка різних чисел із сукупності 1, 2, 3 (цими числами позначено дати).

5) Порівняйте ймовірність і відносну частоту вказаної події.

3. 1) Результатами досліду є всілякі перестановки з Чисел 1, 2, 3 (цими числами позначено папірці).

Скористайтесь тим, що наслідки досліду рівноможливі.

3. 4) Врахуйте, скільки разів папірець з буквою «х» буде стояти на першому, другому, третьому місцях у результаті досліду.

5) Результатом досліду є трійка різних чисел із сукупності 1, 2, 3.

6) Порівняйте ймовірність і відносну частоту вказаної події.

4. Скористайтесь геометричною імовірністю.

5. Врахуйте те, що є ЗО способів розподілу першої книги поміж двох продавців (включаючи й той спосіб, коли один з продавців не отримає жодного екземпляру цієї книги). Так само підрахуйте кількість способів розподілу другої і третьої книг. Не забудьте, що жоден продавець не може одержати всі книги.

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Мета вивчення теми — поглибити й розширити знання і вміння студентів стосовно лінійних рівнянь та їх систем.

Зміст. Лінійні рівняння та їх системи. Геометричний зміст лінійних рівнянь з двома невідомими. Метод Гаусса. Застосування лінійних рівнянь та їх систем. Лінійні діофантові рівняння.

Методичні рекомендації. Лінійні рівняння і системи лінійних рівнянь належать до числа найпростіших, проте вони є важливим математичним засобом під час моделювання багатьох реальних об’єктів і явищ, про що свідчить велика кількість задач, що зводяться до лінійних рівнянь та їх систем. Крім того, теорія систем лінійних рівнянь у сучасній математиці набула подальшого розвитку в рамках нових математичних теорій.

Поглиблене вивчення лінійних рівнянь та їхніх систем дозволить підготуватися до сприйняття більш складних математичних понять, набути навичок математичного моделювання, удосконалити вміння розв’язувати важкі задачі.

Контрольний тест

1. Яке з наведених перетворень не є рівносильним перетворенням для системи лінійних рівнянь?

А. Множення довільного рівняння на —2.

Б. Одночасне додавання до першого рівняння другого, а до другого — першого.

В. Ділення обох частин рівняння на число, відмінне від нуля.

Г. Усі перераховані перетворення дають рівносильну систему.

2. Розв’язком рівняння 3х $-y + z = 7$ є трійка чисел... А. (3; —1; 1); Б. (2; —1; 0); В. (0; 7; 0); Г. (1; —2; 3).

3. Система трьох лінійних рівнянь із двома невідомими не може мати...

А. жодного розв’язку; Б. рівно один розв’язок;

В. рівно два розв’язки; Г. безліч розв’язків.

4. Яке з наведених перетворень не є рівносильним перетворенням для системи лінійних рівнянь?

А. Множення рівняння на довільне число.

Б. Додавання до рівняння іншого.

В. Перестановка рівнянь.

Г. Усі зазначені перетворення дають рівносильну систему.

5. Система двох лінійних рівнянь із трьома невідомими...

А. завжди має розв’язок;

Б. може не мати розв’язків;

В. завжди має безліч розв’язків;

Г. може мати рівно три розв’язки.

6. Дві системи лінійних рівнянь рівносильні, якщо...

А. існують спільні розв’язки цих систем;

Б. кожен розв’язок першої системи є розв’язком другої системи;

В. кожен розв’язок другої системи є розв’язком першої системи;

Г. справджується умова, відмінна від наведених вище.

7. Система однорідних лінійних рівнянь...

А. завжди має розв’язок;

Б. може не мати розв’язку;

В. завжди має єдиний розв’язок;

Г. завжди має безліч розв’язків.

8. До системи двох лінійних рівнянь із двома невідомими, що має єдиний розв’язок, дописали ще одне лінійне рівняння з тими самими невідомими. У результаті дістали систему,...

А. що не має розв’язку;

Б. що має єдиний розв’язок;

В. що має більш ніж один розв’язок;

Г. кількість розв’язків якої залежить від дописаного рівняння.

9. Нехай система лінійних рівнянь має єдиний розв’язок і від неї відкинули одне рівняння. У результаті дістали систему, що...

А. має безліч розв’язків;

Б. не має розв’язку;

В. усі розв’язки першої системи є розв’язками другої;

Г. усі розв’язки другої системи є розв’язками першої.

10. Для неоднорідного лінійного рівняння розв’язком є...

А. сума двох його розв’язків;

Б. різниця двох його розв'язків;

В. напівсума двох його розв'язків;

Г. добуток розв'язку на число.

11. Якщо маємо два розв'язки системи лінійних рівнянь, то розв'язком...

А. буде й подвоєний перший розв'язок мінус другий розв'язок;

Б. буде й половина першого розв'язку мінус половина другого;

В. буде й різниця цих розв'язків;

Г. не буде жодна з усіх попередніх відповідей.

12. Якщо пряма з рівнянням $ax + Ьy = c$ паралельна осі у, то...

А. $a = 0$. Б. $b = 0$. В. $c = 0$. Г. відповідь відрізняється від наведених.

13. Пряма координатної площини з рівнянням $ax + by = c$ проходить через початок координат при...

А. я = 0. Б. $Ь$ = 0. В. с=0. Г. значеннях коефіцієнтів, відмінних від наведених.

14. Пряма координатної площини з рівнянням $y = кx + b$...

А. не може перетинати обидві координатні осі;

Б. може бути паралельною осі у;

В. може бути паралельною осі х;

Г. не може поділяти перший координатний кут навпіл.

15. Пряма проходить через точки (2; 0) і (1; 2). Виберіть з наведених точок ще одну, через яку проходить пряма.

А. (-1; 2). Б. (0; -4). В. (-19; 42). Г. (-25; 52).

16. Для прямих, заданих рівняннями у=2х, $y = 2x + 3$, $x = 2y + 3$, кількість точок, через які проходять принаймні дві з даних прямих, дорівнює...

А. І.Б.2. В. 3. Г.0.

17. * Яке серед зазначених діофантових рівнянь не має розв'яків?

А. 17с — 13у =11. Б. 5х +8у =-10. В. $6x$ +3у =4.

Г. Усі зазначені рівняння мають розв'язки.

19.* Завжди має розв'язок лінійне діофантове рівняння...

А. однорідне; Б. із трьома невідомими;

В. якщо всі коефіцієнти — прості числа;

Г. якщо всі коефіцієнти при невідомих діляться на вільний член.

20.* Може не мати розв’язків лінійне діофантове рівняння з двома невідомими, якщо...

А. усі коефіцієнти при невідомих дорівнюють 1;

Б. серед коефіцієнтів при невідомих є 1;

В. усі коефіцієнти при невідомих — парні числа;

Г. усі коефіцієнти — різні прості числа.

Основне завдання

1. (Із давньоіндійського рукопису) П’ята частина бджолиного рою сидить на квітці кадамба, одна третина на квітках силиндха. Потроєна різниця двох останніх чисел бджіл попрямувала до квітів кутаю. І залишилася ще одна бджілка, що літає назад і впе- ред, притягнута ароматом жасмину і пандануса. Скільки було усього бджіл?

2. Турист, рухаючись до полустанку і пройшовши за першу годину 3 км, розрахував, що спізниться на потяг на 40 хв, якщо буде рухатися з тією самою швидкістю. Тому шлях, що залишився, він пройшов зі швидкістю 4 км/год і прибув на полустанок за 45 хв до відходу потяга. Який шлях мав пройти турист?

3. (Задача Адама Різе) Троє торгують коня за 12 флоринів, але жоден з них окремо не має такої суми. Перший говорить двом іншим: «Дайте мені кожний по половині своїх грошей, і я куплю коня». Другий говорить першому і третьому: «Дайте мені по одній третині ваших грошей, і я придбаю коня». Нарешті третій говорить першим двом: «Дайте мені тільки по чверті ваших грошей — і кінь буде моїм». Скільки грошей було в кожного?

4. Знайти три числа, що задовольняють наступні умови: перше з них, поділене на друге, дає в частці 4 і в остачі 12; друге, поділене на третє, дає в частці 5 і в остачі 5; нарешті, перше, поділене на третє, дає в частці 21 і в остачі 12.

5. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точки:

а) Д(2;3) і Я(-1;3); б) $A(3;1)$ і $B(2;2)$.

6. Визначте функцію виду $y = ax^2 + Ьx$ +с, графік якої проходить через точки Я(0;1), Д(1;2), С(2;2).

7. Розв ’яжіть систему з параметром *а.*

8. На основі *АВ* рівнобедреного трикутника *АВС* позначено точку *Е.* У трикутники *АСЕ* й *ЕСВ* вписано кола, що дотикаються до відрізка *СЕ* в точках *К* і *Н* відповідно. Знайдіть довжину відрізка *КН,* якщо *АЕ = а, ЕВ = Ь.*

9. Якими можуть бути чотири числа, сума будь- яких трьох з яких дорівнює 1?

10. Знайдіть двозначне число, що у три рази більше від суми його цифр.

11. Йдучи уздовж трамвайного шляху, я помітив, що кожні 12 хвилин мене наздоганяє трамвай, а кожні 4 хвилини я сам зустрічаю трамвай. І я, і трамвай рухаємося рівномірно. Через скільки хвилин один поза одним залишають трамваї свої кінцеві пункти?

<u>Година цікавої математики</u>

Вчитель. Математика — це чарівна наука, яка допомагає вам розвивати вміння логічно мислити, швидко та правильно обчислювати, бути уважним та відповідальним. Сьогодні ми відправляємося у дивовижну математичну подорож до Мудрої Сови. Для того щоб побувати в гостях у Мудрої Сови, необхідно пройти крізь математичний лабіринт, «царство» кмітливості, взяти участь у турнірі математичних «важкоатлетів». Отже, кожна команда зі своїм капітаном вирушає в дорогу.

Перший етап. Математичний лабіринт

Кожна команда дає відповідь на заштрихований запис, який потім коментує.

Відновіть числа у запису та назвіть, скільки макулатури зібрали студенти.

О х2 =□

□ + 120 = ▲

▲ - 180 = ♦

♦ -170 = 0

О кг макулатури зібрали студенти.

Другий етап. Царство кмітливості

Кожній команді пропонується відірвати три пелюстки «ромашки», на зворотному боці яких вміщено задачі.

1. Чотири хлопчики каталися на санчатах. Сашко проїхав більше, ніж Роман. Роман проїхав менше, ніж Олег, але більше, ніж Вадим. Хто з хлопчиків проїхав більше від усіх?

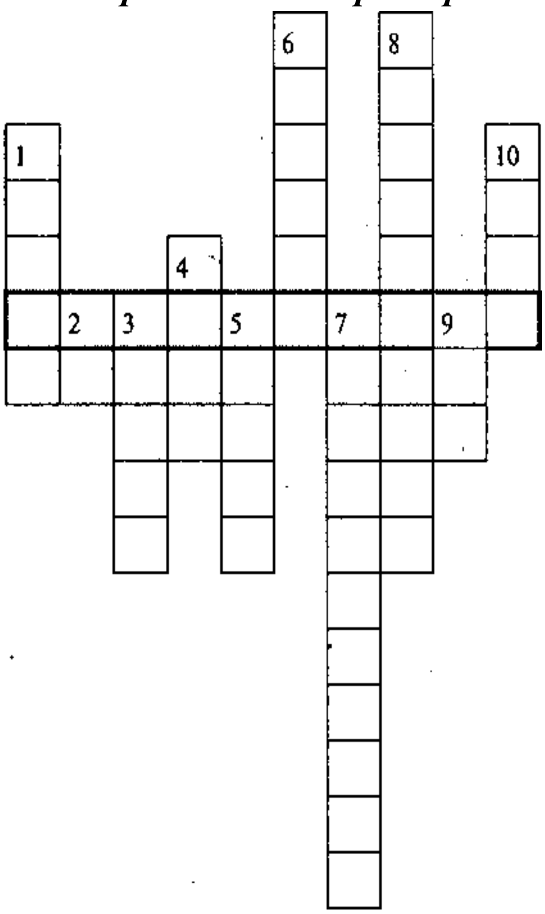
2. Тетяна, Марійка та Олеся одягнені в сукні різного кольору: білого, синього та рожевого. Тетяна була не в білому. Марійка — не в білому і не в рожевому. В якій сукні була Олеся?

3. Два хлопчики підійшли до річки. Біля берега стояв човен, який може перевезти тільки одного хлопчика, але переправились обидва. Як таке може статися?

4. У кімнаті знаходиться годинник з боєм. Годинник відбиває цілі години та одним ударом — кожні півгодини. Скільки ударів за добу зробить годинник?

Через зазначений час команди по черзі коментують розв'язування задач.

Третій етап. Кросворд «Чарівне слово»



Кожна команда одержує кросворд і заповнює його протягом 5 хв.

По вертикалі

6) Геометрична фігура.

7) Одиниця вимірювання площі.

8) 1000 кг.

9) Одиниця вимірювання довжини.

10) Знак арифметичної дії.

11) Сторона прямокутника.

12) Інструмент для вимірювання кутів.

13) Число, що визначає положення точки на координатному промені.

14) Третій степінь числа.

15) Результат додавання.

Прочитайте слово по горизонталі.

Четвертий етап. Конкурс «Знайко»

Запитання для першої команди

6. Яку частину години складають 15 хв?
7. Як називається трикутник, у якого всі сторони рівні?
8. Назвіть найбільше трицифрове число, яке ділиться на 2.
9. Сота частина числа називається...
10. Чому дорівнює площа квадрата, периметр якого дорівнює 20 см?
11. Натуральне число, що має більш ніж два дільники, називається...
12. Формула шляху.
13. Чому дорівнює сума двох суміжних кутів?
14. Рівність, що містить невідоме, називається...
15. Як знайти невідоме зменшуване?

Запитання для другої команди

9. Чому дорівнює 1% від 1 км?
10. Площа квадрата дорівнює 49 см^2. Чому дорівнює його периметр?
11. Знайдіть третину години.
12. Інструмент для побудови кола.
13. Як називається трикутник, дві сторони якого рівні?
14. Назвіть найменше натуральне число.
15. Як знайти невідомий дільник?
16. Як називається дріб, чисельник якого дорівнює знаменнику?
17. Назвіть число, яке ні додатне, ні від'ємне,
18. Значення змінної за якої рівняння перетворюється в правильну рівність, називається...

П'ятий етап. Конкурс «Математичні важкоатлети»

На дошці плакат з конвертами. На кожному конверті написано масу: 10 кг, 20 кг, 50 кг або 200 кг.

У конвертах знаходяться умови 10 задач різного рівня складності.

Студенти обох команд розв'язують задачі та їх розв'язання здають на перевірку. У цьому конкурсі визначається, хто з студентів «узяв» найбільшу вагу та команда переможниця.

Шостий етап. Задачі Мудрої Сови

5) Скількома способами можна розставити на полиці п'ять різних книг?

6) Уздовж огорожі ростуть 8 кущів малини. -Кількість ягід на сусідніх кущах відрізняється на одну. Чи може на всіх кущах разом бути 225 ягід?

7) У скільки разів шлях східцями від першого поверху до десятого довший, ніж від першого поверху до другого?

8) Складіть із 10 сірників три квадрати.

9) Складіть із 19 сірників шість квадратів.

10) У п'ятому класі навчаються троє товаришів: Мишко, Дмитро та Сашко. Один із них відвідує футбольну секцію, другий — басейн, а третій — секцію боксу. У футболіста немає брата чи сестри, він наймолодший із друзів. Мишко старший від боксера та товаришує із сестрою Дмитра. Яким видом спорту займається кожен із друзів?

Сьомий етап. Підбиття підсумків. Призи

від Мудрої Сови

«Щасливий випадок»

Беруть участь дві команди по 6 студентів. Кожна команда обирає назву та «главу сім'ї».

Запитання для команди «Квадрат»

4) Як називається число, до якого підносимо дане?

5) Перший місяць весни.

6) Як називається відрізок, що з'єднує центр кола з будь-якою його точкою.

7) Як називається твердження, що приймається без доведення?

8) Як називається відрізок, що з'єднує середини бічних сторін трапеції?

9) Хто був автором першого підручника з математики?

10) Чому дорівнює сума суміжних кутів?

11) Спростіть вираз | - $\cos^2$ a - $\sin^2$ a|.

12) Назвіть проміжки монотонності функції у = x^2.

13) Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?

14) Скільки прямих, перпендикулярних даній, можна провести через задану точку?

Другий гейм. «Ти — мені, я — тобі»

Команди заздалегідь готують по три запитання одна

одній.

Третій гейм. «Темна конячка»

Запитання від «темної конячки»

4. Як записати 100 за допомогою п’яти трійок?

5. Одне яйце вариться п’ять хвилин. Скільки треба хвилин, щоб зварити шість яєць?

6. Лікар призначив хворому три уколи через кожні півгодини. Перший укол роблять о 8.00. О котрій зроблять останній укол?

7. Що виражає рівність $\boldsymbol{a + b = b+a}$?

Четвертий гейм. «Заморочки з бочки»

6) Що більше: —45 або —51?

7) Визначте вид трикутника, якщо один його кут дорівнює 55°, інший — 70°.

8) Чи може бути правильною нерівність 100х< х? За яких умов?

9) Поділіть 25 навпіл.

10) Кавун важить 2 кг та ще половину. Скільки важить кавун?

11) Рівняння, що мають рівні множини коренів, називаються...

П’ятий гейм. «Марафон»

Запитання для команди «Плюс»

6) Сота частина метра.

7) Формула площі квадрата.

8) Чому дорівнює середня лінія трикутника?

9) Чиє простим число 61 ?

10) Вищий бал у школах України?

11) Як називається числовий множник одночлена стандартного вигляду?

12) Чи ділиться число 123 456 789 на 3?

13) Перша координата точки на площині.

14) Рівність зі змінною називається...

15) Найбільше ціле від'ємне число — це...

Запитання для команди «Квадрат»

1. Знайдіть 25 % від 280 м.
2. Формула периметра паралелограма.
3. Друга координата точки координатної площини.
4. Чи є число 117 простим?
5. Значення змінної, при якій рівняння перетворюється на правильну рівність, називається...
6. Найменше просте число.
7. Чому дорівнює середня лінія трапеції?
8. За яких умов є правильною рівність $|a| = -a$?
9. Обчисліть: 4^3.
10. Найгірша оцінка у школі.

Підбиття підсумків

Нагородження команд.