Форма № Н-9.02

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та методики викладання математики

Магістерська робота

магістр
(освітньо-кваліфікацій рівень)

на тему:

«Методика вивчення теорем та їх доведень в шкільному курсі математики»

Студентки V курсу групи М-М-51
напрямку підготовки
8.04020101 «Математика*»
Гринюк Аліни Ігорівни

____

Керівник:
доц. Коваль Володимир Васильович

____

Рецензенти: д-р. фіз.-мат. наук,
проф., зав. кафедри
прикладної математики НУВГП
Турбал Юрій Васильович

____

канд. фіз.-мат. наук, проф.
Петрівський Борис Петрович

____

Рівне – 2016 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Математика як наука сформувалася в Стародавній Греції в VII-IIIст. до нашої ери, коли Фалес, Піфагор, Евклід та інші вчені систематизували відомі на той час математичні знання і виклали їх з точним обґрунтуванням. Тоді ж виникло і слово «математика», яке в перекладі з грецької означає «знання», «наука».

Тепер математика потрібна всім. Без математичних обчислень не можна побудувати не тільки космічного корабля, електростанції, підводного човна, а й звичайного будинку. Збільшується не тільки кількість наук, які вже не можуть обходитись без математики, а й обсяг математичних знань, використовуваних цими науками. Ось чому так важливо, щоб наша молодь мала ґрунтовну математичну підготовку.

Коротко мету викладання математики в загальноосвітній середній школі можна визначити так: шкільний курс математики має забезпечити міцне і свідоме оволодіння системою математичних знань, умінь, які потрібні для загального розвитку учнів, для їх практичної діяльності в умовах сучасного виробництва, для вивчення на достатньо високому рівні споріднених шкільних предметів (фізики, креслення, хімії та ін.) і для продовження освіти.

Під час вивчення математики доводяться багато теорем. Та іноді ці доведення теорем для учнів здаються важкими, багато з них запитують: «А навіщо це потрібно?». І це природнє питання, тому що не завжди підручники дають на нього повну відповідь.

У шкільному курсі математики учні ознайомлюються з такими основними методами доведень: синтетичним, аналітичним, аналітико-синтетичним (його інколи називають методом руху з двох кінців), методом доведення від супротивного, повної індукції, математичної індукції, методами геометричних перетворень (центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія та подібність), алгебраїчним методом, окремими випадками якого є векторний і координатний. У сучасному шкільному курсі застосовано також методи математичного аналізу: метод границь, методи диференціального та інтегрального числення.

Актуальність теми. Експериментальні дослідження психологів і методистів, досвід роботи передових учителів свідчать, що коли в учнів сформовано загальні й специфічні розумові дії, які є складовими уміння доводити, то за належної організації вивчення вже в основній школі учні можуть засвоїти основні методи доведень та методичні прийоми, які використовуються при доведенні теорем. Психологічними і дидактичними передумовами, що сприяють свідомому засвоєнню кожного методу, є оволодіння учнями алгоритмами або правилами-орієнтирами (евристичними схемами) методів, які становлять орієнтовну основу діяльності, спрямованої на пошук і виконання доведення. Ефективним є таке ознайомлення учнів зі змістом методу доведення і правилом-орієнтиром його, за якого на прикладі доведення одного-двох тверджень (теорем або задач на доведення) учні під керівництвом учителя колективно виявляють істотні загальні кроки в доведенні та формулюють відповідний алгоритм чи правило-орієнтир і відповідний методичний прийом. [39]

Ступінь розробленості в літературі. Дану тему у своїх підручниках та посібниках розглядали Слєпкань, З. І. ,Семенець С. П., Погорєлов А. В., Панчук В. І., Швець В. О.. Статті пов’язані з цією темою написали Раков С. А., Горох В. П., Бехтер О. П., Ю. А. Скрипченко та ін..

Загальні аспекти доведення математичних тверджень розглядали в своїх роботах В. Брадіс, Є. Ляпін, М. Бескін, М. Метельський, Я. Грудьонов, Л. Фрідман та інші. Окремі питання доведень математичних тверджень розроблялися Г. Бевзом (методика доведень тверджень курсу алгебри), М. Бурдою (методика доведень тверджень курсу геометрії), А. Столяром (логічна організація змісту у процесі доведення), З. Слєпкань (психолого-педагогічні основи навчання учнів доведенням), О. Гришко (формування у молодших школярів умінь доказово міркувати) та іншими.

Мета роботи: дослідити методику вивчення теорем та їх доведень в шкільному курсі математики.

Предмет дослідження: суть методичних прийомів, які використовуються при роботі з теоремами та зміст уроків при їх вивченні у школі.

Об'єкт дослідження: методичні прийоми, які використовуються при роботі з теоремами в шкільному курсі математики.

В основу дослідження покладена гіпотеза про те, що під час вивчення методів доведень теорем, тверджень і задач з використанням різних методичних прийомів починаючи з найлегших і закінчуючи найважчими для сприйняття, та їх комбінаціями з використанням ІКТ учні будуть розуміти доведення як складову частину розв'язування, а також в них розвиватиметься логіка мислення, уява, уявлення, позитивні якості особистості та відбуватиметься усвідомлення аксіоматичної побудови математики.

Основними завданнями роботи є:

- дослідити значення доведення на уроках математики;
- систематизувати відомості про різноманітні методи доведень;
- подати приклади завдань з використанням різних методів доведення і методичних прийомів, які використовуються при роботі з ними;
- подати приклади експериментальних досліджень задач з використанням ІКТ;
- розробити методику вивчення методів доведень теорем з використанням різнотипних методичних прийомів в шкільному курсі математики та відповідний методичний посібник;
- зробити висновки.

Теоретичне значення роботи полягає в тому, що:

- проаналізовано основні підходи до навчання учнів методів доведень та методичних прийомів у підручниках, методичній літературі та програмі з математики;

- з'ясовано послідовність вивчення теоретичних тверджень, їх логічна структура та раціональні методи доведення;
- встановлено психолого-педагогічні передумови, що сприяють розвитку вмінь учнів відповідного віку використовувати методичні прийоми при розв'язуванні задач на доведення;
- визначені методичні прийоми і засоби розвитку вмінь школярів доводити математичні твердження;
- систематизовано матеріал по темі у методичному посібнику;
- розглянуто експериментальне дослідження задач з використанням ІКТ;
- запропоновано види задач, які сприяють розвитку вмінь доводити теореми та встановлена послідовність їх розв'язування.

Практичне значення роботи визначається тим, що розроблений зміст і методика, подані приклади можуть бути використані вчителями шкіл при проведенні уроків математики в школі, на факультативних заняттях,а також студентами ВНЗ під час вивчення різних дисциплін чи написанні авторських робіт.

Робота складається з: вступу, 4 розділів, які включають в себе науково-теоретичні основи дослідження, психолого-педагогічні основи дослідження, методику вивчення доведень в шкільному курсі математики, педагогічний експеримент та статистичну обробку його результатів, висновків та списку використаних джерел.

Апробація розробленої методики здійснювалася при проведенні X Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформаційні технології в професійній діяльності», де я виступала з доповіддю «Роль інформаційно-комунікаційних технологій в доведеннях шкільного курсу математики» та публікації статті на аналогічну тему у електроному виданні. Також вона відображена в навчально-методичному посібнику, у якому мною систематизовано матеріал по даній темі.

РОЗДІЛ І. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. 1. Роль доведень в математиці.

Доведення у математиці — процедура, за допомогою якої встановлюють істинність гіпотези чи будь-якого твердження. Принципи доведення вивчаються спеціальною областю математики — теорією доказів.

У математиці доказом також називається ланцюжок логічних висновків, що показує, що при якомусь наборі аксіом і правил виводу є правильним деяке твердження. Залежно від контексту, може матися на увазі формальний доказ (побудована за спеціальними правилами послідовність тверджень, записана на формальній мові) або текст на природній мові, за яким за бажанням можна відновити формальний доказ.

Доведення у сучасному курсі математики посідають все меншу роль, все більш популярними стають видання «Геометрія у таблицях», «Алгебра у таблицях», в яких подаються зведені у таблиці довідкові матеріали зі шкільного курсу математики, наводяться типові задачі і алгоритми їх розв’язування.

Все це знаходить відображення у зовнішньому незалежному оцінюванні знань з математики – починаючи з 2010 року з нього вилучені задачі з розгорнутою формою відповіді, і одним з мотивів такого вилучення був факт, що більшість учасників тестування до розв’язування цих задач у 2008 і 2009 роках не приступала.

А і справді, навіщо доведення у математиці, навіщо вивчати доведення у навчанні математики?

Складні питання, оскільки вони ведуть у глибини філософії, гносеології, психології педагогіки і ін., і не мають однозначних остаточних відповідей:

1. Що таке математика? (див. Курант Р., Робінс «Что такое математика?» – книга, написана видатними математиками з метою розкриття внутрішнього світу математики через розгляд і дослідження відомих задач математики (математика як вона є)).

2. Що таке доведення у математиці?

3. Яка мета навчання математики?

4. Яке місце доведень у навчанні математики?

Ці питання у свою чергу ведуть до ще більш загальних питань:

1. Що таке наука?

2. Яке місце у науці посідає математика?

3. Яка мета освіти, загальної освіти?

Ці питання вічні і ніколи не буде знайдено однозначних остаточних відповідей на них, проте кожна розвинена особистість, кожне розвинене суспільство задає і буде постійно задавати собі ці питання і шукати на них відповіді, і саме ці відповіді визначатимуть парадигму особистості і парадигму освітньої системи. [17]

На питання: «Яка роль доведень у математиці?» абсолютна більшість відповідей саме така: «Для доведення правильності математичних тверджень або їх спростування». І це правильно, тому що математика – це єдина з наук, в якій доведення (виводимість з системи аксіом) виступає виключним критерієм істинності будь-якого факту. Разом із тим визнання головної ролі доведень як інструменту верифікації фактів у навчанні математики викликає сумнів з багатьох причин: неможливість з різних причин проведення доведень на достатньо високому рівні строгості, трудомісткість побудови курсу математики із строгим дотриманням дедуктивних принципів тощо.

Необхідність доведення є наслідок одного з основних законів логіки (логіка - наука про закони правильного мислення) – закону достатньої підстави. Цей закон містить вимогу,щоб будь-яке висловлене нами твердження було обґрунтоване, тобто щоб воно супроводилося досить переконливими аргументами, що підтверджують істинність нашого твердження, його відповідність фактам, дійсності. Такими аргументами можуть бути як вказівки на можливість перевірки шляхом спостереження і досліду, так і правильно побудоване міркування, що містить систему умовиводів. Доведення тверджень має на меті встановити його достовірність за допомогою логічного висновку з уже доведених або відомих істин. [43]

1. 2. Аксіоми і теореми. Необхідні і достатні умови.

Вивчення теорем і їх доведень в курсах геометрії і алгебри починається із 7 класу і посідає значне місце в навчальному матеріалі. Наприклад, лише в курсі геометрії 7 класу паралельні підручники містять по 18 теорем. Крім того, в них передбачено значну кількість задач на доведення, які в традиційних підручниках геометрії, наприклад у підручнику А. П. Кисельова, відігравали роль теорем. Теореми і їх доведення розвивають логіку мислення учнів, просторові уявлення та уяву, вчать методам доведення, сприяють усвідомленню аксіоматичної побудови математики. Доведення дають змогу учням засвоїти евристичні прийоми розумової діяльності, формують позитивні якості особистості, зокрема обгрунтованість суджень, стислість, чіткість висловлення думки.

У математиці доводиться мати справу з висловленнями (або твердженнями), які доводяться (теореми, задачі на доведення), і такими, що їх домовляються приймати без доведення (аксіоми). Введення аксіом, як і первісних (неозначуваних) понять, пов'язане з дедуктивним характером побудови математики. Справді, доведення будь-якого твердження Т складається з тверджень, істинністъ яких обгрунтовується раніше доведеними істинними твердженнями Т. Оскільки низка раніше доведених тверджень не може бути нескінченною, виникає потреба в аксіомах, що в перекладі з грецької мови означає «повага», «авторитет». На основі аксіом, доведених раніше тверджень і означень доводять нові твердження (теореми, задачі на доведення).

Залежно від логічної структури теореми, як і будь-якого висловлення, розрізняють чотири їх види: прямі, обернені, протилежні, контрапозитивні (іншими словами, протилежні оберненим, або обернені протилежним щодо прямої теореми).

Запишемо пряму теорему у вигляді умовного висловлення.

«Якщо P, то C», (1)

де P — умова теореми, C — висновок. Помінявши в теоремі (1) місцями умову і висновок, дістанемо обернену щодо (1) теорему:

«Якщо C, то P». (2)

Замінюючи в теоремі (1) P і C їхніми запереченнями $\overline{P}$ і $\overline{C}$, дістанемо протилежну щодо (1) теорему:

«Якщо $\overline{P}$, то $\overline{C}$». (3)

Одночасно помінявши місцями в теоремі (1) умову і висновок — P і C — і замінивши їх запереченнями $\overline{P}$ і $\overline{C}$, дістанемо контрапозитивну (протилежно обернену або обернену протилежній) теорему щодо (1):

«Якщо $\overline{C}$, то $\overline{P}$». (4)

Теореми (1) і (4), а також теореми (2) і (3) рівносильні.

Отже, якщо теорему (1) доведено, то немає потреби спеціально доводити теорему (4).

До теорем, в яких є кілька умов або висновків (складені теореми), можна сформулювати декілька обернених теорем. З них не всі можуть виявитися правильними. Розглянемо теорему: «Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло». Обернене твердження: «Якщо навколо многокутника можна описати коло, то він - правильний» не є справедливим твердженням. У цьому легко пересвідчитися за допомогою контр-прикладу. Справді, коло можна описати і навколо прямокутника, і навколо рівнобічної трапеції, які не є правильними многокутниками. Якщо з твердження «А» випливає твердження «В» і з «В» випливає «А» (символічно «А => В» і «В => А»), то твердження «А» і «В» називаються рівносильними і позначаються А <=> В. Наприклад, теореми «Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник - паралелограм» і «Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл» — рівносильні твердження. Це — правильні взаємно обернені теореми. З відношенням слідування і рівносильності безпосередньо пов'язані три види умов, що стосуються умовних тверджень: необхідні, достатні, необхідні і достатні. Умова називається необхідною, якщо без її наявності висновок не може виконуватися. Наприклад, у твердженні «Якщо число закінчується парною цифрою, то воно ділиться на 2» умова «Якщо число закінчується парною цифрою» є необхідною умовою, бо число не може ділитися на 2, якщо воно не закінчується парною цифрою.

Умова називається достатньою, якщо за її наявності висновок обов'язково виконується. Наприклад, у твердженні «Якщо функція зростаюча або спадна на певній множині значень аргументу, то вона має обернену функцію на цій множині» умова зростання або спадання (тобто умова монотонності) є достатньою умовою для існування оберненої функцій до даної. Проте функція може мати обернену і тоді, коли умова монотонності не виконується, але кожного свого значення функція набуває лише для одного значення аргументу.

Умова називається необхідною і достатньою, якщо без її виконання висновок не може виконуватись і в разі її виконання висновок обов'язково виконується. У випадку істинності прямої і оберненої теорем умова кожної з них є необхідною і достатньою. Наприклад, кожна з умов двох взаємно обернених теорем щодо паралелограма, наведених вище, є умовою необхідною і достатньою. Умови необхідні і достатні трапляються не тільки в теоремах, а і в означеннях понять. Наприклад, в означенні паралельних прямих простору є дві суттєві ознаки (лежати в одній площині і не перетинатися). Кожна з них є необхідною і лише разом вони достатні для того, щоб дві прямі простору були паралельні. У шкільному курсі твердження, які містять необхідну і достатню умову, формулюють по-різному. Зокрема: «Для того щоб ..., необхідно і достатньо ...». У стверджувальному реченні вживають словосполучення «тоді і тільки тоді», «ті і тільки ті» та ін. Наприклад: «Для того щоб добуток двох або кількох співмножників, які є цілими раціональними виразами, дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб принаймні один з цих співмножників дорівнював нулю».

РОЗДІЛ II. ПСИХОЛОГО ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

2. 1. Психологічний аналіз способів і рівнів засвоєння змісту навчального матеріалу.

Навчання - цілеспрямована взаємодія вчителя і учнів у процесі якої засвоюються знання, формуються вміння й навички. У педагогічному процесі педагогічні категорії взаємопов'язані та взаємозумовлені. Як у широкому соціальному, так і у широкому педагогічному значенні виховання охоплює навчання та освіту.

Засвоєнню притаманна складна внутрішня структура, яка містить кілька компонентів (ступенів, фаз).

Так, до психологічних компонентів засвоєння, на думку С.Рубінштейна, М. Левітова, належать:

- позитивне ставлення до учнів;
- безпосереднє чуттєве ознайомлення з матеріалом;
- мислення як процес активного опрацювання отриманого матеріалу;
- запам'ятовування і збереження отриманої та опрацьованої інформації [3, с. 59].

В. Крутенький інтерпретував зазначені психологічні компоненти з позиції дидактики і визначив психічні стани, якими ці компоненти виражаються [25, с. 29]. Так позитивне ставлення проявляється в увазі учнів, їхньому інтересі до змісту навчання. Чуттєве ознайомлення з навчальним матеріалом пов'язане з використання наочності та використання в учнів спостережливості. Мислення розглядається в термінах осмислення і розуміння всіх зв'язків і відношень, включення нового матеріалу в систему, яка вже є в досвіді учня. Ефективність запам'ятовування і збереження матеріалу інформації залежить від конкретності установки на умови запам'ятовування (мета, характер використання у практиці тощо) та включення в активну власну діяльність [24, с. 212].

Як зазначив С. Рубінштейн, правильне трактування компонентів засвоєння потребує розуміння того, що всі вони формуються у двобічному процесі навчання, де взаємопов'язані та взаємозумовлені вчитель, учень і навчальний матеріал. С. Рубінштейн наголошував також на взаємозалежності та взаємопроникненні цих психічних процесів у засвоєння.

Розрізняють такі стадії (етапи) процесу засвоєння (за С. Рубіштейном):

- початкове ознайомлення з матеріалом або його сприймання в широкому розумінні;
- осмислення;
- спеціальна робота, пов'язана із закріпленням матеріалу;
- опанування матеріалу - можливість оперувати ним у різних умовах [3, с. 60].

Ця схема є загальною стратегією засвоєння. Доцільно співвіднести її з однією з розроблених у психолого-дидактичній площині конкретною моделлю поетапного управління формуванням розумових дій (П.Гальперін, Н.Тализіна).

Відповідно до цієї моделі розрізняють п'ять етапів у процесі засвоєння.

Ознайомлення. На цьому етапі учням роз'яснюють цілі дії, те, на що треба орієнтуватись при виконанні дії, як довільно її виконувати, а також формують у них необхідну мотивацію.

На етапі матеріальної (матеріалізованої) дії остання виконується у зовнішній, матеріальній та розгорнутій формі. Це допомагає учням засвоювати зміст дії (склад її операцій, правила виконання), а вчителю здійснювати об'єктивний контроль за виконанням кожної операції.

На етапі «зовнішнього мовлення» всі елементи дії подаються у формі усної чи письмової мови. Відбувається подальше узагальнення дії, проте вона ще не стає автоматизованою, «згорнутою».

На етапі «зовнішнього мовлення про себе» дія виконується у формі проговорювання про себе. Далі дія змінюється у напрямку узагальнення і згортання.

На етапі «внутрішнього мовлення» дія максимально згортається і автоматизується.

Внутрішній процес засвоєння знань включає три взаємопов'язані етапи (стадії).

На першій стадії відбувається сприймання, осмислення і запам'ятовування матеріалу, що вивчається, або засвоєння теоретичних знань.

На другій стадії засвоюються навички і вміння практичного застосування знань, що вимагає проведення спеціальних тренувальних вправ.

На третій стадії здійснюється повторення, поглиблення і закріплення знань, удосконалення практичних умінь і навичок.

Тобто, для того, щоб оволодіти новим матеріалом учневі необхідно здійснити повний цикл навчально-пізнавальних дій: сприймання нового матеріалу, його первинне і наступне осмислення, запам'ятовування, виправлення при застосуванні теорії на практиці, повторення з метою поглиблення і засвоєння знань, умінь, навичок.

І етап. Засвоєння теоретичних знань. Засвоєнням знань називається навчально-пізнавальна діяльність учнів, спрямована на свідоме і міцне оволодіння знаннями, способами виконання навчальних дій. Процес засвоєння знань починається зі сприймання матеріалу, що вивчається. Суть даної дії полягає в тому, що учні за допомогою органів чуття сприймають зовнішні властивості, особливості й ознаки предметів і явищ, які вивчаються.

Сприймання - це відображення в свідомості зовнішніх властивостей, якостей і ознак предметів та явищ, що безпосередньо впливають на органи чуття. Результатом сприймання є формування уявлень як нижчої форми знань : у свідомості людини зберігаються лише зовнішні образи сприйнятих предметів і явищ, проте не розкривається їх сутність. Діти можуть запам'ятати розмір, колір, особливості окремих частин. Проте ці уявлення не завжди чіткі і виразні, часто відображаються неістотні, змінні ознаки. В уявленні фіксуються лише зовнішні властивості (образи предметів). А в навчанні необхідно розкрити сутність предметів і явищ.

Цьому передує підготовка учнів до участі в процесі навчання формування активного позитивного ставлення до майбутньої пізнавальної діяльності; мотивізація; опора на попередні знання і досвід; зосередження уваги учнів на об'єкти пізнання. Тому новий матеріал потрібно викладати лаконічно, узагальнюючи й уніфікуючи його. Найважливіше на цьому етапі - перше враження.

Вищим ступенем розуміння є осмислення. В загальному плані осмислення - це така розумова діяльність, в процесі якої людина розкриває сутність предметів і явищ, що підлягають вивченню.

Процес осмислення складається з таких розумових операцій (дій) :

- аналіз сприйнятих, зафіксованих в уявленнях зовнішніх властивостей і ознак предметів та явищ, що підлягають вивченню;
- логічне групування ознак і властивостей предметів та явищ, що вивчаються, і виділення з-поміж них найсуттєвіших, найбільш загальних;
- розумовеве осягнення суті предметів і явищ, що підлягають вивченню, формування теоретичних понять, узагальнюючих висновків, правил;
- перевірка обгрунтованості й достовірності зроблених теоретичних висновків.

В процесі осмислення учитель не «вкладає» знання в голови учнів, не «передає» їх, а лише організовує їхню діяльність, допомагає осмислювати матеріал, самостійно «відкривати» для себе нові теоретичні правила, закони тощо, пізнаючи при цьому суть фактів та явищ, що вивчаються. Результатом осмислення є розуміння матеріалу, що вивчається,утворення відповідних понять. Розуміння – мислительний процес, спрямований на виявлення рис, властивостей і зв'язків предметів, явищ, і подій дійсності. Поняття - це форма наукового знання, в якому розкривається суть пізнаних предметів і явищ, що виражається у вигляді законів, правил, висновків та інших теоретичних узагальнень. Психологи виділяють два види осмислення - первинне і наступне.

Оволодіння новим матеріалом не зводиться лише до його розуміння і формування наукових понять. Виучуваний матеріал потрібно не лише розуміти, а й зберігати в пам'яті, уміти вільно і логічно його відтворювати.

Органічною частиною навчально-пізнавальної діяльності учнів є запам'ятовування матеріалу. Воно базується на глибокому і всебічному розумінні засвоєних знань.

Запам'ятовування часто здійснюється шляхом повторення — відтворення вивченого матеріалу. При цьому воно може бути пасивним, коли учень сприймає те, що і сприймав раніше, чи активним, коли учень самостійно відтворює знання: переказує вголос чи про себе, дає усні відповіді на питання підручника, складає план прочитаного, тези тощо.

Важливою умовою забезпечення знань учнів є запам'ятовування не лише як відтворюючої діяльності, а як діяльності, в якій розкриваються і осмислюються нові деталі виучуваного матеріалу - деталі, які за первинного сприймання не помічалися. Значимим при цьому є наведення власних прикладів і фактів, вироблення умінь передавати матеріал своїми словами, осмислення його світоглядної, моральної, естетичної, екологічної спрямованості.

Суттєвою умовою успішного запам'ятовування є його довільність, що спричиняє мобілізацію вольових зусиль учня з метою міцного засвоєння навчального матеріалу.

Правильна організація процесу запам'ятовування дозволяє домагатися засвоєння теоретичного матеріалу школярами, попереджає його механічне зазубрювання, сприяє глибшому осмисленню знань, розвиває мислення, пам'ять, морально-вольові якості.

2 етап. Організація вправ на застосування знань на практиці та формування умінь і навичок. Важливість даного етапу в процесі оволодіння

новим матеріалом виявляється не тільки в тому, що знання потрібні людині для практичної діяльності та її духовного розвитку, а в тому, що формування практичних умінь і навичок сприяє глибшому осмисленню матеріалу, який вивчається, розвитку кмітливості та творчих здібностей.

У сучасній дидактичній системі вправ перші завдання мають репродуктивний характер. Вони спрямовані на актуалізацію (оживлення) раніше набутих знань, чуттєвого і практичного досвіду, на які повинно опиратися засвоєння нових навичок і умінь. Вони виконуються за допомогою вчителя. Перехід до наступних видів вправ передбачає постійне наростання труднощів і складності завдань, підвищення самостійності учнів у їх виконанні і творчий підхід до їх вирішення.

Усе це необхідно врахувати, організовуючи заняття, на яких виробляються уміння і навички застосування засвоєних знань на практиці.

3 етап. Повторення, узагальнення і систематизація вивченого матеріалу з метою поглиблення знань та удосконалення практичних умінь та навичок.

Вихідною основою стадії повторення, узагальнення і систематизації є положення про те, що пізнання є не прямою, а кривою лінією, яка безмежно наближається до спіралі. Це означає, що оволодіння знаннями не зводиться до одного пізнавального акту, суть знання не розкривається одразу всією своєю багатогранністю, а потребує подальшої розумової і практичної діяльності з метою глибшого його засвоєння.

Засвоєння (запам'ятовування) матеріалу, який вивчається, має концентрований характер, при якому знання переходять в оперативну, короткочасну пам'ять і швидко забуваються. Для того, щоб попередити це забування, необхідно перевести знання в пам'ять довготривалу, тобто здійснити розосереджене запам'ятовування, що також вимагає організації повторення вивченого матеріалу, а саме: кожної теми, окремих розділів навчальної програми, а також повторення наприкінці навчального року.

Під узагальненням розуміють мислене виділення якихось властивостей, що належать певному класу предметів, перехід від одиничного до загального, від менш загального до більш загального знання. На основі узагальнення учні засвоюють поняття, закони, ідеї, теорії, тобто окремі знання, їх системи і структури.

Систематизація — це розумова діяльність, у процесі якої знання про об'єкти, що вивчаються, організуються в певну систему за обраним принципом. Вищою формою систематизації є організація вивченого і засвоєного раніше матеріалу в таку систему, в якій би чітко вирізнялися її окремі компоненти і взаємозв'язки між ними.

Узагальнення і систематизація є складними взаємопов'язаними процесами: ширше узагальнення спричиняє більшу кількість зв'язків та відносин і, відповідно, ширше коло знань, об'єднаних у систему.

Такою є система і суть навчально-пізнавальної діяльності на різних етапах оволодіння матеріалом, що підлягає вивченню. Відсутність одного з етапів, тобто порушення цілісності системи, веде до низького результату навчально-пізнавальної діяльності. Лише здійснення учнями повного циклу навчально-пізнавальних дій забезпечує глибоке і міцне оволодіння програмним матеріалом, їх розумовий і загальний розвиток, формування наукового світогляду, всебічну вихованість.

Процес засвоєння характеризується насамперед міцністю, під якою розуміють незалежність використання засвоєних знань і сформованих умінь від часу, особливостей ситуацій та умов.

Засвоєння завжди має особистісно зумовлений характер, який реалізується через вплив навчання на психічний розвиток особистості, формування психічних новоутворень (нових мотивів, цілей, стратегій засвоєння, оцінювання тощо).

Характер засвоєння залежить від вікових можливостей учнів як щодо використовуваних засобів, так і щодо співвідношення репродуктивних і продуктивних дій. Це зумовлено насамперед різним рівнем розвитку в учнів різних вікових груп такого механізму, як узагальнення.

2. 2. Психолого-педагогічний розвиток творчих можливостей учнів у навчальній діяльності.

Творчою задачею називають таку, яка або вся в цілому є новою, невідомою для суб'єкта, або ж, щонайменше, містить помітну новизну, що і зумовлює значні розумові зусилля, спеціальний пошук, знаходження нового у способах її розв'язання [28. с. 23-24].

На початкових етапах організації навчально-творчої діяльності найефективнішими є методи проблемного навчання як дидактичної системи. Проблемний виклад, який здійснює сам учитель, учить учнів способів міркувань під час розв'язання поставлених проблем. Частково-пошуковий метод або евристична бесіда залучає учнів до самостійного відкриття способу доведення теореми або розв'язання задачі. При цьому важливі характер і форма питань, які вчитель пропонує учням. Вивчення шкільної практики показує, що взагалі 99% питань, які пропонують учням, вимагають лише відтворення матеріалу підручника, хоч і такі питання необхідні, коли здійснюється контроль стану засвоєння вивченого навчального матеріалу. Зрозуміло, що під час евристичної бесіди складніші питання доцільно пропонувати добре встигаючим учням, не позбавляючи при бажанні можливості відповісти будь-якого учня.

Простіші питання слід пропонувати невстигаючим учням, щоб залучати їх до процесу колективного пошуку доведення теореми чи розв'язування складнішої задачі.

На думку І. Я. Лернера, дослідницький метод є основним методом навчання навчально-творчої діяльності. Зокрема, він зазначає: «Коли називаємо його основним, то маємо на увазі неможливість заміни його іншими для засвоєння досвіду творчої діяльності на суспільно-необхідному рівні» [23, с. 103]. Характеризуючи дослідницький метод, автор вказує на те, що цей метод, навіть при його простих варіантах, передбачає готовність учня «до цілісного розв'язання проблемної задачі, тобто до самостійного проходження всіх етапів дослідження».

Один із психологічних принципів розвивального навчання, висунутих З.І. Калмиковою, стверджує необхідність систематично розвивати як алгоритмічні, так і евристичні прийоми розумової діяльності. Переважна кількість способів діяльності, які передбачені програмою з математики, належать до алгоритмічного типу. Але недоцільно йти по шляху пропонування учням тільки готових правил, алгоритмів. Доцільно на зразках розв'язання двох-трьох задач, прикладів або доведень математичних тверджень організовувати колективний пошук правила, алгоритму чи евристичної схеми розв'язання, методу або способу доведення. [15]

У психолого-педагогічній літературі та практиці експериментальних досліджень питань формування творчої особистості розглядаються евристичні методи науково-творчої діяльності.

У 30-40 роки XX ст. були розроблені евристичні методи творчої діяльності: «мозкової атаки», або «мозкового штурму», синетики, морфологічного аналізу, метод фокальних об'єктів. Ці методи ставили за мету уникнути методу проб і помилок, який був неефективний і надзвичайно громіздкий.

Розглянемо основні із цих методів.

1). Колективна «мозкова атака» (або «метод мозкового штурму»), запропонований американським ученим А. Осборном як покращений варіант евристичного діалогу Сократа. Він використовується в умовах групових форм навчання, причому найоптимальнішими вважаються групи від 7 до 13 осіб.

Винахідники та експериментальне навчання в школі свідчать про те, що колективно генерувати ідеї ефективніше, ніж індивідуально. Шкільна практика свідчить про те, що активізація навчально-творчої діяльності часто стримується через побоювання помилитися і піддатися критиці. Заважає також жорсткий стиль керівництва, тиск думок авторитету вчителя або здібних товаришів, відсутність позитивних емоцій. «Мозковий штурм», як колективний метод генерування ідей при розв'язуванні творчих задач, ставить за мету зібрати найбільше різноманітних ідей, щоб усунути негативні моменти традиційного колективного навчання, вводяться принципи та правила цього методу абсолютна заборона критики ідей, запропонованих учасниками «мозкового штурму», схвалення різноманітних реплік, жартів. Керівник дискусії повинен уміло спрямовувати її хід, вдало ставити стимулюючі питання, за потреби здійснювати підказування, використовувати репліки. «Мозковий штурм» може тривати від 15 хвилин до 1 години.

Отже, метод А. Осборна («мозкового штурму») активізує творчу думку під час виконання чотирьох правил — виключається критика, можна висловлювати без побоювання будь-яку думку, заохочується будь-яке нестримне асоціювання чим більш нереальною здається ідея, тим краще, кількість ідей, що висуваються, повинно бути якомога більшою, дозволяється як завгодно комбінувати висловлені ідеї, видозмінювати їх,

Виявлена ефективність від поєднання «мозкового штурму» із синтетичним методом.

2). Сутність методу синектики, запропонованого І. Гордоном, як методу творчої діяльності, полягає в тому, щоб глибоко вивчити проблему та звикнути до неї, тобто зробити незнайоме знайомим, а від звичного відмовитись. Вона грунтується на послідовному застосуванні чотирьох видів аналогій прямої (як розв'язуються схожі задачі), особистої (уявляючи себе на місці об'єкта, що змінюється), символічної (у вигляді короткої, образної назви задач) і фантастичної (з використанням казкових персонажів)

3). Морфологічний аналіз як метод розв'язання творчих задач був запропонований Цвіккі. Суть його в тому, що враховуються параметри будь-якого об'єкта — потужність, швидкість, вид руху, світність, спосіб обігрівання, охолодження, геометричні розміри тощо ці параметри — морфологічні осі — можуть по-різному варіюватися для різних випадків.

Виписані можливі варіанти морф-осей, зведені разом, формують морфологічний ящик. Нова конструкція може виявитися прогресивною, оскільки одержується стикування різних випадкових будь-яких параметрів морф-осей.

4). При використанні методу фокальних об'єктів (автор Цвіккі), який пізніше був розвинений американським дослідником Вайтингом, властивості навмання відібраних слів переносять на ключовий об'єкт, який знаходиться начебто у фокусі цих властивостей.

І все ж ці нові евристичні методики не породили бум винаходів, оскільки вони не ламали основ сліпого перебору, а лише розвивали цей метод (прискорювали перебір), не давали розумних критеріїв для відбору сильних рішень. Необхідно було окремі універсальні принципи об'єднати в єдину теорію, досить загальну, щоб охопити всі принципи, і водночас настільки й інструментальну, щоб вона була доступна для практики.

У творчій діяльності використовуються і деякі прийоми, які сприяють розв'язанню складної, нестандартної задачі або проблеми. Наведемо деякі з них.

1). Питання. Сутність цього прийому полягає в тому, щоб сформулювати якомога більше питань, що відносяться до даної задачі або проблеми, і спробувати знайти відповіді на них. Сократ перший зазначив, що питання є повивальною бабкою, що допомагає народитися новій думці.

2). Відстрочка. Якщо знайти розв'язання задачі не вдається, потрібно відкласти її і зайнятися чимось іншим. Через деякий час варто повернутися до задачі, і спосіб розв'язання може бути знайдений.

3). Фіксація. Важливо завжди і в будь-яких умовах мати при собі засіб для запису думки.

Учням варто розповісти про те, що для творчо працюючих фахівців розв'язати складну проблему інколи допомагає необхідність написати про те, що зроблено. Процес написання такого звіту сприяє систематизації зібраного матеріалу, усвідомленню проблеми.

Завдання на відшукування помилки в наведених неправильних перетвореннях, розв'язуваннях, побудовах, висновках і міркуваннях розвивають критичне ставлення до запропонованого навчального матеріалу, змушують учня переглянути своє ставлення до звичайних для них порушень математичної строгості.

Сьогодні видана велика кількість збірників задач різного призначення (конкурсних, олімпіадних, прикладних тощо), з яких учитель може вибрати не лише окремі нестандартні задачі, а навіть їх системи. Але при цьому важливо чітко визначити мету використання кожної задачі, і тим більше — системи задач.

Прикладна спрямованість сприяє формуванню наукового світогляду, мотивації навчання, інтересу до предмету і показує роль математики в сучасному виробництві, економіці, науці.

Спеціальні дослідження психологів показали, що до 90% причин помилок і неспроможності розв'язати задачу в тому числі й нестандартну, є нерозуміння задачі учнями і, перш за все, нерозуміння умов і вимог задачі, зв'язків між ними Саме тому важливо вчити учнів аналізувати формулювання задачі, виділяти в ньому умови і вимоги, вміти переформулювати їх, встановити можливі зв'язки між ними і в більш складних задачах символічно, користуючись рисунком і введеними позначеннями, коротко записувати умови та вимоги

Отже, особистість стає метою освіти, і математичної зокрема. Функції освіти полягають у тому, щоб засобами розвитку особистості забезпечити саморозвиток суспільства. Саме у концепції 12-річної загальноосвітньої школи України зазначається, що стратегічною метою школи є життєва та соціальна компетентність учнів, що передбачає розвиток і саморозвиток школярів на основі більш повного використання внутрішнього потенціалу особистості. Належний рівень розвитку учнів позитивно впливатиме і на якість навчання та їх інтелектуальний розвиток. Особистісно-орієнтована освіта в якості змісту особистісного розвитку приймає розвиток тих функцій, які особистість виконує в життєдіяльності. Зрозуміло, створювати умови та забезпечувати розвиток названих вище функцій особистості у процесі навчання математики значно важче, ніж розвивати логічне мислення, просторові уявлення та алгоритмічну уяву, інформаційну культуру, ніж формувати уміння розв'язувати задачі, доводити математичні твердження.

Виконання поставленого завдання можливе за умови комплексного підходу до навчання, суттєвими параметрами якого є єдність усіх функцій навчання (освітньої, розвивальної і виховної) та всіх компонентів навчально-виховного процесу (цілей, змісту, методів і прийомів, організаційних форм і засобів навчання), використання традиційних і новітніх досягнень педагогіки, психології і методики навчання математики.

2. 3. Психологічні передумови успішного засвоєння доведень.

Для створення психологічних передумов успішного засвоєння готових доведень важливо не пропускати проміжні ланки доведення. Психологи обґрунтовують це тим, що міркування, пов'язані з поновленням пропущених ланок, відвертають увагу учнів від основної лінії доведення. Відомі педагоги-математики середньої та вищої школи на своїх уроках і лекціях завжди прагнули роз'яснювати учням навіть дрібниці, щоб усунути будь-яку неясність, зосередити увагу на головному.

Перш ніж проводити докладне доведення, потрібно спочатку назвати основні етапи і твердження, на яких воно ґрунтуватиметься. Це дає можливість звернути увагу учнів на структуру доведення в цілому, виявити основну його ідею, назвати метод.

Психологи обґрунтовують це тим, що докладне, розгорнуте доведення забезпечує утворення зв'язків між окремими ланками, а коротка схема з вказівкою на ідею і метод доведення забезпечує розуміння структури основних зв'язків в цілому, сприяє міцності засвоєння матеріалу.

Досвід показує, що учні краще усвідомлюють і запам'ятовують структуру доведення, якщо записують у символічній формі його короткий виклад. Досвідчені вчителі вважають, що учні швидше і свідоміше сприймають доведення, якщо в процесі пояснення вчителя не відриваються для складання конспекту. Для цього вчитель пропонує учням спочатку уважно прослухати доведення за наперед заготовленим на дошці рисунком або за рисунком, який він виконує під час доведення. Після цього вчитель проектує на екран короткий символічний запис умови і вимоги теореми, її доведення, пропонує учням перенести рисунок і записи в зошит, якщо в цьому є потреба. Цю думку підтверджують дослідження психологів, які експериментально довели, що одночасне виконання двох видів діяльності, кожний з яких потребує повного зосередження уваги, неможливе. Має бути часткова автоматизація хоча б одного виду діяльності, щоб обидва виконувалися з достатнім успіхом.

Сказане не виключає, а навіть передбачає спеціальне навчання учнів старших класів складання конспекту шкільної лекції з метою підготовки учнів до такої діяльності у вищому навчальному закладі або під час подальшого навчання за умов самоосвіти.

РОЗДІЛ ІІІ. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ МЕТОДІВ ДОВЕДЕННЯ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.

3. 1. Методика навчання учнів доведенню теорем.

3. 1. 1. Навчання готових доведень.

Навчанням доведень називатимемо навчання готових доведень, пропонованих учителем або підручником, і навчання учнів самостійного пошуку доведень, на відміну від А. А. Столяра, який навчання доведень розуміє як навчання розумових процесів пошуку, відкриттів і побудов доведення, а не навчання відтворення і заучування готових доведень. Наше розуміння загальної методичної проблеми навчання доведень пояснюється тим, що готові доведення мають велике значення у процесі навчання математики. За умови належної організації навчання готових доведень можна формувати в учнів компоненти самостійного пошуку і побудови доведення. Готові доведення мають виступати як моделі, на яких учні навчаються розумових дій і прийомів розумової діяльності, що покладено в основу вміння доводити, методів доведень та їх застосування, вчаться самостійно шукати доведення за аналогією з вивченим.

Проблему навчання доведень доцільно поділити на кілька навчальних завдань, які розв'язують послідовно: 1) вивчення готових доведень, вміння відтворювати їх; 2) самостійна побудова доведення за вивченим зразком; 3) пошук і виклад доведення за вказаним учителем методом (способом); 4) самостійний пошук і виклад доведення учнями.

Для успішного навчання доведень потрібно, щоб учні оволоділи досить повною системою теоретичних знань і умінь (поняття та їх означення, аксіоми, теореми, уміння виконувати основні побудови тощо). Шкільна практика свідчить, що цього недостатньо для глибокого усвідомлення і сприйняття учнями готових доведень і самостійного їх відшукання. Використання елементів логіки (роз'яснення учням правил виведення, логічна організація навчального матеріалу) також не розв'язує проблеми ефективного навчання доведень. З цього приводу заслужена вчителька

України В. М. Осинська зазначає, що в процесі засвоєння програмного матеріалу учні навчалися застосовувати елементи логіки і математичної символіки. Через два роки експериментальної роботи вона переконалася, що це дещо підвищило їхню математичну культуру. Особливо позитивний ефект був виявлений у здібних учнів, а середні й слабкі учні, як і раніше, погано міркували і розв'язували задачі. Навчання елементів логіки не полегшило засвоєння математики школярами з низьким рівнем розвитку.

Підготовка до навчання учнів доведеням здійснюється вже в 5 - 6 класах, де вони ознайомлюються з першими твердженнями і роблять перші кроки у виконанні дедуктивних умовиводів. Цілеспрямоване навчання доведенню починається з перших уроків систематичного курсу планіметрії введенням понять «теорема», «доведення теореми». Учні мають вчитися виконувати аналіз формулювання теореми, тобто відокремлювати умову від висновку. На перших етапах учні стикаються з труднощами, якщо теорему не сформульовано у формі умовного речення, тобто в термінах «якщо ..... то...». Для зменшення цих труднощів доцільно запропонувати їм усні вправи на виділення умови і висновку з відомих уже тверджень, на переформулювання твердження в умовне речення і відокремлення умови та висновку. Для прикладу наведемо такі твердження.

1. Якщо сума цифр ділиться на 3, то і число ділиться на 3.

2. Сума двох протилежних чисел дорівнює нулю.

3. Якщо чисельник дробу збільшити в кілька разів, то і дріб збільшиться в стільки само разів.

4. Зі збільшенням знаменника дробу в кілька разів дріб зменшується в стільки само разів.

Уміння доводити математичні твердження має чотири основні складові: 1) дія підведення об'єкта до поняття; 2) володіння необхідними і достатніми ознаками понять, про які йдеться у висновку; 3) дія вибору ознак понять, які відповідають заданим умовам; 4) дія розгортання умов.

З метою забезпечення свідомого засвоєння учнями готових доведень і навчання їх самостійно шукати доведення потрібно заздалегідь формувати ці складові. Наприклад, щоб навчити учнів дії розгортання умов, можна запропонувати їм такі усні вправи.

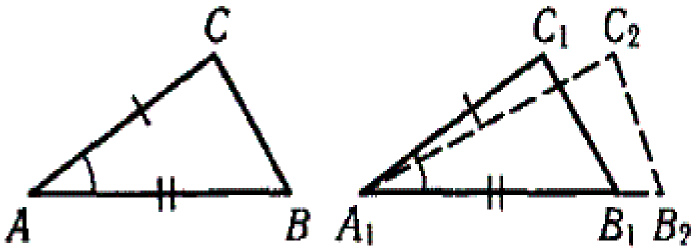
1. Дано два рівні суміжні кути ∠COB і ∠BOD. Що нам тим самим ще дано?

2. З точки M виходять два промені MA і MB. Пряма CD перетинає промені в точках E і F. Кути ∠AEC і ∠BFD, які при цьому утворилися, рівні. Що нам ще дано?

Розгортаючи умови, часто доходять висновку, що потрібно переформулювати висновок теореми або задачі. Прийом переформулювання висновку теореми або задачі сприяє формуванню вміння доводити твердження.

Наприклад, учням пропонують довести твердження: точки A, B і C лежать на одній прямій, якщо бісектриси прилеглих кутів ∠ABD і ∠DBC перпендикулярні. Учні мають міркувати так: оскільки потрібно довести, що точки A, B і C лежать на одній прямій, то досить довести, що маємо розгорнутий кут і що точка B є його вершиною, а точки A і C належать доповняльним півпрямим (сторонам розгорнутого кута).

Під час вивчення готових складніших доведень (наприклад, ознак рівності трикутників) доцільно запропонувати учням готову таблицю, в якій у лівому стовпчику записано твердження, з яких складається доведення, у правому - відповідні обґрунтування. Наведемо приклад такої таблиці (табл. 1) для першої ознаки рівності трикутників (рис. 1).



Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$

$AB = A_1B_1$

$AC = A_1C_1$

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$

Довести: ΔABC і $= \Delta A_1B_1C_1$

Рис.1.

Демонструючи цю таблицю, потрібно спочатку закрити правий стовпчик і поступово відкривати його в міру того, як учні самостійно знаходитимуть потрібні обґрунтування.

Твердження	Обґрунтування
1. Існує $\Delta A_1B_2C_2$, рівний ΔABC, у якого одна вершина збігається з вершиною A_1, вершина B_2 лежить на промені A_1B_1, а C_2 — в одній площині з C_1 відносно прямої A_1B_1	1. За аксіомою про існування трикутника, рівного заданому
2. $A_1B_1 = A_1B_2$	2. Оскільки $A_1B_1 = AB$ за умовою, а $A_1B_2 = AB$ за означенням рівних трикутників
3. Точка B_2 збігається з B_1	3. За аксіомою про відкладання відрізка, рівного заданому
4. $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$	4. Оскільки $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ за умовою, а $\angle B_2A_1C_2 = \angle BAC$ за означенням рівних трикутників
5. Промінь A_1C_2 збігається з променем A_1C_1	5. За аксіомою про відкладання кута, рівного заданому
6. $A_1C_1 = A_1C_2$	6. Оскільки $A_1C_1 = AC$ за умовою, а $A_1C_2 = AC$ за означенням рівних трикутників
7. Отже, $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$	7. Оскільки їх вершини збіглися
8. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$	8. Оскільки $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ за доведенням, а $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$ за аксіомою про існування трикутника, рівного заданому

Таблиця 1. Доведення першої ознаки рівності трикутників

За цим зразком учні самостійно можуть скласти в зошитах аналогічну таблицю після вивчення другої ознаки рівності трикутників.

Такі таблиці доцільно складати учням після самостійного вивчення окремих найпростіших теорем на уроці за підручником.

Під час вивчення готових доведень теорем учні мають усвідомлювати істотні елементи доведення, відсторонюватися від неістотних (розміщення рисунка, позначення літерами) і помічати істотне спільне в доведеннях. Наприклад, істотним спільним у доведенні всіх трьох ознак подібності трикутників є те, що доведення кожної ознаки починається з виконання перетворення гомотетії одного з даних трикутників з коефіцієнтом, що дорівнює відношенню довжини сторони другого трикутника до довжини відповідної сторони першого. Доводиться, що отриманий при гомотетії допоміжний трикутник дорівнює першому, а отже, подібний другому з даних трикутників.

3. 1. 2. Навчання учнів самостійного пошуку доведень.

Навчання учнів уміння самостійно здійснювати пошук доведення значною мірою залежить від володіння основними складовими уміння доводити і методами доведень.

У більшості теорем і задач на доведення процес доведення спрямований на те, щоб показати, що об'єкти, задані в умові теореми (задачі), містять необхідні й достатні або достатні ознаки понять, про які йдеться у висновку. У геометричних доведеннях такими поняттями можуть бути фігури, їхні властивості, відношення між фігурами. Тому учні мають навчитися розгортати умови, тобто діставати з умови ознаки шуканого поняття, оскільки в складніших теоремах ці ознаки подано в умові неявно, вони приховані за змістом інших понять.

При цьому цілеспрямований пошук потрібних ознак має відбуватися якнайкоротшим шляхом. Це можливо лише тоді, коли учень знає, де слід шукати потрібну ознаку. Для полегшення пошуку доцільно надавати учням набір «пошукових областей». Наприклад, якщо в умові теореми або задачі трапляються поняття «прямий кут», «рівні суміжні кути»», «бісектриса розгорнутого кута», то кожне з цих понять містить умову перпендикулярності двох прямих. Після вивчення скалярного добутку двох векторів і означення й ознак перпендикулярності прямої та площини в 10 класі до «пошукових областей» для встановлення перпендикулярності двох прямих (відрізків) додаються ще дві ознаки: 1) дві прямі перпендикулярні, якщо скалярний добуток двох векторів, що лежать на кожній з цих двох прямих, дорівнює нулю; 2) дві прямі перпендикулярні, якщо одна з них перпендикулярна до площини, на якій лежить друга.

У процесі підготовки до пошуку складніших доведень можна скористатися правилами-орієнтирами, що вказують, як встановити найпоширеніші відношення між двома фігурами: рівність, подібність їх, паралельність прямих або відрізків. Наприклад, щоб довести рівність трикутників, досить: 1) підвести їх до однієї з ознак рівності або скористатися означенням рівних трикутників; 2) довести, що один з трикутників можна дістати з другого, виконавши деякий рух (симетрія, поворот, паралельне перенесення).

Для доведення рівності відрізків або кутів досить: 1) довести рівність трикутників або інших фігур, елементами яких є зазначені у вимозі відрізки (кути), а потім зробити висновок про рівність відповідних відрізків (кутів); 2) довести, що один відрізок (кут) можна отримати з другого, виконавши деякий рух.

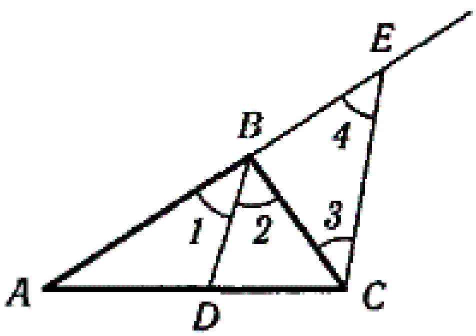
Після вивчення скалярного добутку двох векторів на площині й у просторі учнів ознайомлюють ще з одним способом доведення рівності відрізків і кутів - векторним.

Слід звернути увагу учнів і на те, що у зв'язку з доведенням рівності фігур часто користуються властивостями вимірювання відрізків та кутів і загальними властивостями величин: а) дві фігури рівні між собою, якщо кожна з них рівна третій; б) якщо від двох рівних відрізків (або кутів) відняти рівні відрізки (або кути), то дістанемо рівні відрізки (або кути). Те саме справедливе щодо додавання.

Необхідною умовою правильного вибору потрібної ознаки поняття, до якого підводиться об'єкт, є усвідомлення всіх істотних властивостей і ознак. З цього погляду важливо під час вивчення основних понять та їхніх відношень привести в систему ці властивості й ознаки і показати можливість їх використання.

Володіння методами доведень і вміння вибрати потрібний метод - важлива умова для забезпечення самостійного виконання доведення. В процесі навчання учнів самостійного пошуку доведень найважливішим є аналітичний метод. Навчати учнів володінню аналітичним методом найкраще у вигляді евристичної бесіди, використовуючи зразки доведень. Наведемо модель організації діяльності учнів під час використання аналітичного методу на прикладі задачі на доведення.

Приклад 2. Довести, що бісектриса BD внутрішнього кута трикутника ABC ділить протилежну сторону на відрізки AD і DC, пропорційні його сторонам BA і BC (рис.2).



Дано:ΔABC

BD - бісектриса $\angle ABC$

Довести: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Рис. 2.

Учитель. Звідки можна дістати пропорцію,яку потрібно довести?

Учень. Можна скористатися подібністю трикутників або властивістю відрізків, що відтинаються по сторонах кута трикутника прямою, паралельною протилежній стороні.

Учитель. Чи є на рисунку подібні трикутники?

Учень. Ні, немає.

Учитель. Як розміщені на рисунку перші три відрізки, що входять у пропорцію, яку потрібно довести?

Учень. Три з них розмішені на сторонах кута $\angle BAC$.

Учитель. На яку думку наштовхує нас цей факт?

Учень. Скористатися властивістю відрізків, що відтинаються на сторонах трикутника прямою, паралельною протилежній стороні.

Учитель. Де може лежати четвертий відрізок?

Учень. На продовженні сторони AB.

Учитель. Як його побудувати?

Учень. Продовжити сторону AB і через точку C провести пряму, паралельну BD, до перетину з прямою AB в точці E.

Учитель. Яку пропорцію тепер можна скласти?

Учень. $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$

Учитель. Порівняйте цю пропорцію з тією, яку потрібно довести. Який висновок з цього можна зробити?

Учень. Потрібно довести, що BE = BC.

Учитель. Чим є на рисунку ці відрізки?

Учень. Сторонами ΔCBE.

Учитель. За якої умови дві сторони трикутника рівні?

Учень. Дві сторони трикутника рівні, якщо вони лежать напроти рівних кутів.

Учитель. Рівність яких кутів потрібно довести?

Учень. Потрібно довести, що $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$. [39]

Після цього, виходячи з умови теореми, доводиться рівність зазначених кутів і робиться висновок про рівність відрізків.

Ознайомлювати учнів з аналітичним методом доведення та відповідним правилом-орієнтиром найзручніше на прикладі наведеної задачі, а застосувати його - під час доведення теорем про площі багатокутників.

У міру сформованості в учнів основних складових уміння доводити і набуття першого досвіду виконання доведень слід запропонувати евристичну схему пошуку доведення. Ця схема може мати такий вигляд:

1. Виділити те, що дано в умові, і вказати, що потрібно довести.

2. Ввести всі потрібні позначення. У геометричних теоремах (задачах) попередньо виконати рисунок.

3. Записати умову і висновок теореми (задачі) у символічній формі.

4. Назвати ознаки, потрібні для доведення.

5. Розгорнути умови, тобто з того, що дано, вивести можливі наслідки.

6. Порівняти з умовами та їхніми наслідками кожну з ознак, за якими можна довести те, що потрібно. Вибрати ознаку, зручну для доведення.

7. Якщо безпосередньо вибрати відповідну ознаку не вдається, подумати, які ще потрібні для доведення ознаки можуть бути задані в умові.

8. Постійно пам'ятати, що коли пошук доведення ускладнено, потрібно звертатися до даних і до того, що випливає з них.

Для геометричних доведень цю схему можна доповнити вказівками щодо геометричного рисунка: після виконання третього пункту схеми проаналізувати рисунок, позначити на ньому рівні елементи, прямі кути, паралельні відрізки та інші характерні особливості рисунка і окремих його елементів. Потім, виділивши на рисунку елементи фігур, відношення яких потрібно довести або які потрібно визначити, задати собі запитання: чим ще є або чим ще могли б бути дані елементи? Окремі елементи рисунка (відрізки, кути тощо) доцільно зіставляти з іншими елементами, включати їх до складу інших фігур, розглядати в різноманітних зв'язках з іншими елементами (прийом переосмислювання елементів задачі). Якщо на рисунку немає фігур або елементів, необхідних для використання ознак, за допомогою яких можна довести те, що потрібно, то слід виконати додаткові побудови і зробити всі висновки, що випливають з них.

Таку евристичну схему доцільно разом з іншими матеріалами помістити в математичному кабінеті на стенді «Учись учитися».

Неможливість і єдиність чого-небудь у математиці завжди доводять методом від супротивного. Інколи цим методом доводять обернені твердження.

3. 2. Методика вивчення основних методів доведень.

3 . 2. 1. Суть і методика вивчення аналітичного методу доведення.

Суть аналітичного методу доведення полягає в тому, що вихідним пунктом, для обгрунтування необхідного твердження є саме це твердження, яке шляхом логічних обгрунтуваних кроків зводиться до твердження про яке наперед відомо, що воно істинне.

Щодо навчання учнів самостійного пошуку доведень, то найважливішим є аналітичний метод. Навчання учнів володіння аналітичним методом найкраще проводити на зразках доведень у вигляді евристичної бесіди.

Математика і методики її навчання містять два види аналітичних міркувань. Перший з них разом із синтетичним описав Евклід у своїх «Началах», хоча вони були відомі ще раніше Платону (428 - 348 до н. е.) й Арістотелю (384 - 322 до н. е.). Другий вид увів Папп (ІІІ ст.).

Навчально-теоретична модель аналітичного методу доведення може бути такою:

1. Змістовий аналіз твердження, виділення того, що дано в умові, і того, що вимагається довести у висновку.

2. Змістовий аналіз умови та висновку твердження, встановлення існуючих логічних зв’язків. Обґрунтування того, чи не є умова достатньою для того, щоб зробити висновок. Якщо так, то твердження є доведеним, якщо ні - то перейти до пункту 3.

3. Відшукання раніше доведеного твердження (аксіоми), з якого випливає висновок. Якщо його знайдено, то твердження є доведеним, якщо ні - то перейти до пункту 4.

4. Відшукання поки ще не доведеного твердження, якого достатньо, щоб зробити висновок.

5. Знаходження наступного твердження, яке є достатнім для того, щоб виконувалося попереднє твердження. Якщо знайдене твердження вже

доведене або безпосередньо випливає з умови теореми, то твердження доведене. В іншому випадку - перейти до чергового виконання пункту 5.

6. Контроль виконаних дії у процесі застосування аналітичного методу доведення.

7. Змістовий аналіз та оцінка (самооцінка) засвоєння аналітичного методу доведення тверджень (знако-символьна фіксація). [36]

Правило-орієнтир аналітичного методу доведення може виглядати так.

1. Запитати: з якого раніше відомого твердження випливає висновок доводжуваного твердження? Іншими словами, знайти доведене раніше твердження (або аксіому), якої достатньо, щоб зробити висновок доводжуваного твердження.

2. Якщо такого раніше відомого твердження знайти не вдається, то треба шукати інше, поки ще не доведене твердження, з якого необхідно випливав би висновок доводжуваного.

3. Потім треба шукати наступне твердження, з якого випливало би попереднє, і так далі, поки не буде одержане твердження, яке безпосередньо випливає з умови теореми.

4. Зробити висновок, що дане твердження доведене, оскільки весь ланцюжок достатніх умов для виконання висновку задовольняється в силу умови доводжуваного твердження.

Ознайомити учнів з аналітичним методом доведення і відповідним правилом-орієнтиром найзручніше на прикладі задачі, а застосувати його - під час доведення теорем про площі многокутників.

Суть аналізу Евкліда можна пояснити на прикладі доведення нерівності.

Приклад 3. Довести нерівність $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$. Міркуватимемо так.

1. Припустимо,що задана нерівність правильна.

2. Виведемо з неї наслідки: помножимо обидві частини на $a^2 > 0$ ($a^2 \neq 0$ за умовою). Дістанемо $a^4 + 1 \geq 2a^2$.

3.Перенесемо $2a^2$ в ліву частину останньої нерівності. Дістанемо $a^4 - 2a^2 + 1 \geq 0$.

4. Запишемо ліву частину нерівності у вигляді квадрата двочлена: $(a^2 - 1)^2 \geq 0$.Остання нерівність правильна за будь-якого a.

Приклад 4. Доведіть, що при $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ виконується нерівність .$(a + 2)(b + 6)(c + 3) \geq 48\sqrt{abc}$. [7]

1. Скористаємося співвідношенням між середнім арифметичним і середнім геометричним невід'ємних чисел $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

2. Застосуємо співвідношення і отримаємо: $\frac{a+2}{2} \geq \sqrt{2a}$, $\frac{b+6}{2} \geq \sqrt{6b}$, $\frac{c+3}{2} \geq \sqrt{3c}$.

3. Тоді $\frac{(a+2)(b+6)(c+3)}{2 \cdot 2 \cdot 2} \geq \sqrt{2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot abc}$ або .$(a + 2)(b + 6)(c + 3) \geq 48\sqrt{abc}$.

4. Нерівність виконується при $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

Отже, міркування виконувалися від того, що потрібно довести. При цьому з припущення правильності того, що слід довести (основа), виводились наслідки, які привели до очевидної правильної нерівності (наслідку).

Приклад 5. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

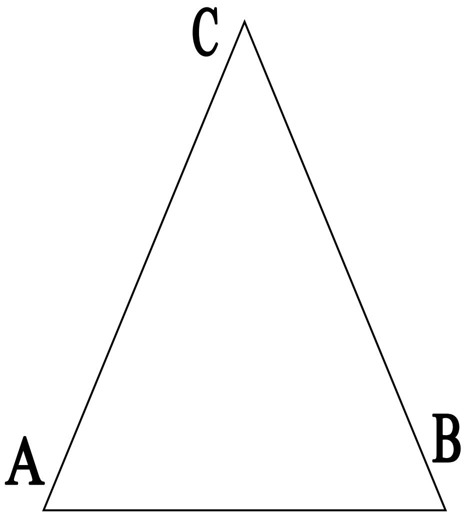


Рис. 3.

Доведення.

Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою AB (рис. 3). Доведемо, що в нього $\angle A = \angle B$. Трикутник CAB дорівнює трикутнику CBA за першою ознакою рівності трикутників. Справді, CA=CB, CB=CA, ∠C=∠C. З рівності трикутників випливає, що ∠A=∠B. Теорему доведено.

Такі аналітичні міркування називають аналізом Евкліда. Проте цей аналіз не можна вважати доведенням, хоча ми й дістали очевидну правильну нерівність, оскільки правильність наслідку ще не гарантує правильності основи. Справді, з хибної основи правильними міркуваннями можна дійти правильного наслідку. Наприклад, $-a = a$, де $a \neq 0$ - хибне твердження. Якщо піднести обидві частини цієї неправильної рівності до квадрата, дістанемо правильну рівність $a^2 = a^2$. Перехід від істинності наслідку до істинності основи можливий тільки тоді, коли основа і наслідок - правильні взаємно обернені судження.

Саме з цієї причини аналіз Евкліда не можна вважати доведенням, і тому його називають інколи «недосконалим аналізом».

На відміну від аналізу Евкліда аналіз Паппа відповідає всім вимогам доведення і тому його називають «досконалим аналізом», або аналітичним методом доведення. Паппа так характеризує аналітичний метод доведення: в аналізі шукане вважається знайденим, і визначаємо, звідки його було б отримано, і далі, що передувало б цьому останньому, доки не дійдемо до чого-небудь відомого - того, що могло б стати вихідним пунктом.

Логічною основою аналітичного методу, як і синтетичного, є аксіома: з правильного твердження завжди випливає правильний наслідок.

Схема міркувань при цьому така:

$B \leftarrow A_n \leftarrow A_2 \leftarrow A_1 \leftarrow A$

Відмінність аналізу Евкліда від аналітичного методу доведення (аналізу Паппа) полягає також у тому, що в аналізі Евкліда з припущення правильності доводжуваного виводять необхідні умови (наслідки), а в аналітичному методі добирають достатні умови для виконання висновку твердження, яке доводять.

3. 2. 2. Методика вивчення синтетичного методу доведення.

Суть синтетичного методу полягає в тому, що відшукуються такі істинні твердження, які можна було шляхом логічних міркувань перетворити в дане твердження. При синтетичному методі не пояснюється чому за вихідне береться те чи інше твердження, тому доведення цим методом здається учням штучно видуманим.

Часто аналіз Евкліда допомагає знайти синтетичний метод доведення. У ньому міркування виконують від умови або від уже відомого твердження до доводжуваного. Якщо умову доводжуваного твердження (або відоме твердження) позначити літерою *A,* а висновок - *B,* то схема синтетичного методу матиме вигляд $\mathrm{A} \leftarrow \mathrm{A}_1 \leftarrow \mathrm{A}_2 \leftarrow \mathrm{A}_n \leftarrow$ B.

Приклад 6. Довести нерівність $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$.

1. Нехай $a \neq 0$. Відомо, $(a^2 - 1)^2 \geq 0$.

2. Запишемо ліву частину цієї нерівності у вигляді тричлена $a^4 - 2a^2 + 1 \geq 0$.

3. Розділимо обидві частини останньої нерівності на $a \neq 0$. Дістанемо $a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} \geq 0$.

4. Перенесемо число -2 у праву частину нерівності. Дістанемо $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$, що й потрібно було довести.

Недоліком синтетичного методу доведення в розглянутому прикладі є неможливість (якщо не проведено аналіз Евкліда) здогадатися, що потрібно починати саме з нерівності $(a^2 - 1)^2 \geq 0$.

Приклад 7. Доведіть, що в рівностороннього трикутника всі кути рівні.

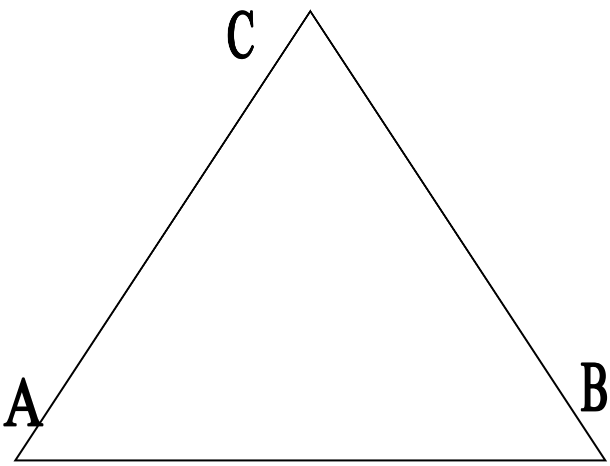


Рис. 4.

1. Нехай ∠A=∠B (рис. 4)

2. ΔABC – рівнобедрений (за теоремою у рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні) з основою AB.

3. Оскільки AB=BC (ΔABC – рівносторонній), то ΔABC – рівнобедрений з основою AC.

4. За теоремою (див. п. 2) ∠A=∠C.

5. Таким чином всі кути трикутника рівні ∠A=∠B=∠C. Теорему доведено.

Приклад 8. Довести, що $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$, коли $a + b = 1$

Доведення.

Виберемо як опорні такі два істинні твердження:

$(a + b)^2 = b^2 + 2ab + b^2 = 1$;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 > 0$.

Рівність $a^2 + 2ab + b^2 = 1$ і нерівність $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ можна почленно додати, зберігаючи знак нерівності (Якщо $a < b$ і $c < d$ то $a+c<b+d$ тобто нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати, зберігаючи знак нерівності.) . Одержимо $2a^2 + 2b^2 > 1$. Розділивши обидві частини нерівності на 2 (теорема якщо $a < b$ і с — додатне число, то $ac < bc$, якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$, тобто при множенні обох частин нерівності на додатне (від'ємне) число знак нерівності зберігається (змінюється на протилежний)) матимемо: $a^2+b^2>\frac{1}{2}$.

Далі міркуємо аналогічно: $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b \geq \frac{1}{4}$, $(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^2 > 0$. Додамо почленно останні нерівності: $2a^4 + 2b^4 > \frac{1}{4}$; $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$, що й потрібно було довести.

У геометричних доведеннях синтетичним методом важко здогадатися про додаткову побудову, яку часто в процесі доведення слід виконати.

Правило-орієнтир пошуку доведення синтетичним методом за допомогою аналізу Евкліда можна задати так.

1. Припустити, що висновок (вимога) теореми (задачі на доведення) правильний.

2. Вивести з цього припущення всі можливі наслідки.

3. Переконатися, що отриманий висновок-наслідок є або очевидною, або встановленою раніше істиною.

4. Взявши отриманий істинний висновок за вихідний, проаналізувати твердження у зворотному напрямі та перейти до висновку про правильність твердження, яке доводять.

Синтетичний метод разом з аналізом Евкліда особливо зручно використовувати для доведення нерівностей.

Деякі вчителі й автори методичних посібників часто доводять твердження аналітичним методом, а після цього виконують міркування у зворотному напрямі, тобто доводять твердження синтетичним методом, хоча в цьому немає потреби. У такому разі таке доведення безпідставно називають аналітико-синтетичним методом.

3. 2. 3. Методика вивчення та суть аналітико-синтетичного методу.

Аналіз і синтез обумовлюють одне одного і утворюють єдиний аналітико-синтетичний метод. В процесі навчання математики під аналізом розуміють прийом мислення при якому від наслідку приходять до причини, яка породила цей наслідок, а під синтезом – прийом мислення, при якому від причини переходять до наслідку , який породжується цією причиною. Без аналізу немає синтезу, а без синтезу немає аналізу.

Цей метод полягає в тому, що пошук доведення починають аналітичним методом, але міркування не доводять до кінця, а, спиняючись на певному кроці, починають міркувати у зворотному напрямі, тобто з розгортання умови. Отже, завершують доведення синтетичним методом.

Наведемо приклад розв'язування задачі на доведення цим методом.

Приклад 9**.** Довести, що у чотирикутника, описаного навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні (рис. 5).

Доведення. Щоб довести, що *AB + CD = BC + AD,* досить довести, що *AM+ + BM + CK + IЖ = DL + AL + BN+CN,* де *M, N, K, L* - точки дотиків кола і чотирикутника.

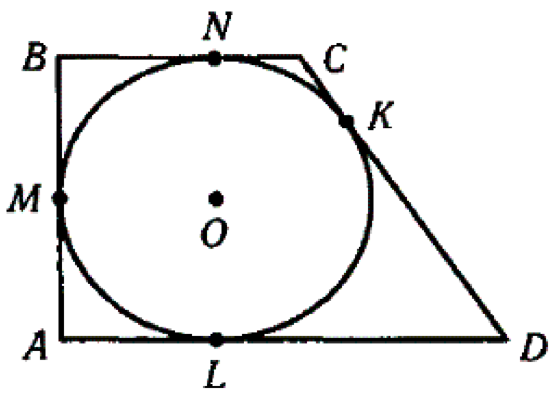


Рис. 5

Розгорнемо умову теореми. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки до кола, *AM = AL, BM* = BN, *CK = CN, DK = DL.* Додавши ці рівності почленно, дістанемо *AM + BM + + CK + DK = AL + BN +CN + DL,* що й потрібно було довести.

Приклад 10. Доведіть, що коли в паралелограма всі кути рівні, то він прямокутник.

Доведення. Кути паралелограма, прилеглі до однієї сторони, є внутрішні односторонні, тому їх сума дорівнює 180°. За умовою ці кути рівні, тобто кожний з них прямий. А прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі. Теорему доведено.

У цих доведенях міркування здійснювалися послідовно: то від висновку теореми, то від умови. Рух з протилежних боків у загальному випадку виконують доти, доки міркування не дійдуть спільного твердження або суперечливих висновків. Цей метод особливо зручний, якщо перетворення лише умови чи лише висновку теореми (задачі) не приводить до мети.

Слід наголосити, що враховуючи вікові особливості учнів в одних класах переважають одні методи, в інших – інші. Так в 5-6 класах вивчення математики проводять переважно конкретно-індуктивним методом. Починаючи з 7 класу переважає абстрактно-дедуктивний метод.

3. 2. 4. Суть та методика вивчення методу доведення від супротивного.

Цей метод уводять уже в 7 класі на початку навчання курсу планіметрії. Його логічною основою є закон виключення третього: з двох супротивних тверджень одне завжди правильне, друге — неправильне, а третього бути не може. Завдяки цьому закону замість доведення певного твердження під час використання методу доведення від супротивного доводять, що супротивне йому твердження - неправильне, і на цій підставі роблять висновок, що правильне доводжуване твердження. При цьому стосовно супротивного твердження здійснюють аналіз Евкліда, з нього виводять наслідки.

Тому замість безпосереднього доведення даного твердження можна показати, що супротивне йому твердження неправильне. З цього випливатиме справедливість даного. При цьому стосовно супротивного твердження проводять аналіз Евкліда, з нього виводять наслідки. Деякі автори метод від супротивного ще називають непрямим, зведенням до абсурду. Доводячи методом від супротивного твердження: «Якщо Р, то Q» (1) ми спочатку замінюємо його новим твердженням, оберненим протилежному: «Якщо Q, то Р» (2) і доводимо це нове твердження. А тому, що ці два твердження завжди рівносильні, то з цього доведення випливає також справедливість даного твердження (1). Іноді з припущення виводять наслідок, який суперечить цьому самому припущенню або деякому вже обґрунтованому твердженню чи аксіомі. Це також свідчить про те, що припущення (твердження, супротивне доводжуваному) неправильне, а, отже, правильне доводжуване твердження.

Іноді, щоб показати абсурдність припущення, розбивають його на кілька випадків і розглядають кожний з них окремо. Такі доведення називають ще непрямими або роздільними.

Доводячи методом від супротивного, треба спростувати твердження, супротивне даному, а не протилежне, як неправильно пояснюється в багатьох підручниках і посібниках, бо для протилежних тверджень закон виключеного третього неправильний.

Нехай, наприклад, маємо твердження «P>Q». Супротивним і протилежним йому будуть відповідно твердження «P не більше Q» і «P<Q». Якщо ми хочемо довести методом від супротивного це твердження, то ми повинні показати, що твердження «P не більше Q» неправильне. Якщо ж ми покажемо, що неправильне твердження «P<Q», то з цього ще не випливатиме справедливість доводжуваного, бо може бути, «P=Q».

Після розгляду конкретних двох прикладів доведень методів від супротивного учні колективно складають його правило – орієнтир.

1. Припустити супротивне тому, що треба довести.

2. Користуючись припущенням, відомими аксіомами і раніше доведеними твердженнями шляхом міркувань дійти висновку, який суперечить одній з наведених умов:

- умові твердження, що доводиться;
- відомій аксіомі;
- раніше доведеному твердженню;
- припущенню.

3. Зробити висновок, що припущення - неправильне, а правильне те, що треба довести.

Досвід показує, що правило-орієнтир методу доведення від супротивного доцільно оформити у вигляді таблиці та вивішувати її кожного разу в подальшому вивченні курсу під час використання цього методу.

Слід рекомендувати учням письмово оформлювати доведення методом від супротивного у вигляді трьох кроків відповідно до правила-орієнтира; усні доведення також будувати за цією схемою. Після введення методу доцільно дати зразок такого оформлення.

Приклад 11. Довести, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

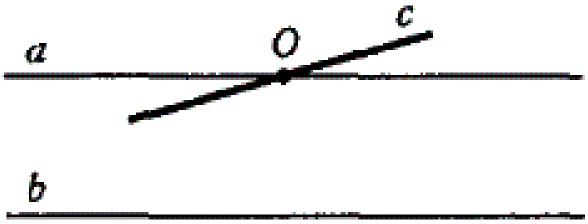


Рис. 6.

Дано:a, b, c — прямі;

c перетинає a в точці O.

Довести: с перетинає b.

Доведення.

1. Припустимо, що с і b не перетинаються, тобто що с$||b$.

2.Тоді дістанемо,що через точку О перетину прямих a і c проходять дві різні прямі a і c, які паралельні прямі b. Проте це суперечить аксіомі про властивість паралельних прямих.

3. Висновок: припущення неправильне, а правильне те, що пряма с перетне пряму b.

Приклад 12. Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму і до того ж тільки одну.

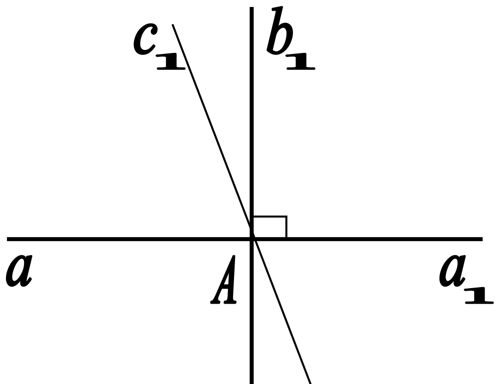


Рис. 7.

Доведення.

Нехай a – дана пряма і А – точка на ній. Позначимо через a_1 – одну з пів прямих прямої a з початковою точкою А (рис. 7). Відкладемо від пів прямої a_1 кут (a_1 b_1), що дорівнює 90°. Тоді пряма, яка містить промінь b_1, буде перпендикулярна до прямої a.

Припустимо, що крім побудованої прямої існує інша пряма, яка теж проходить через точку А і перпендикулярна до прямої a. Позначимо через c_1 півпряму цієї прямої, що лежить в одній півплощині з променем b_1.

Кути (a_1 b_1) і (a_1 c_1), кожен з яких дорівнює 90°, відкладемо в одній півплощині від прямої a_1. Але від прямої a_1 у даній півплощині можна відкласти тільки один кут, що дорівнює 90°. Тому не може бути іншої прямої, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a. Отримали суперечність. Теорему доведено.

Приклад 13. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$ причому в деякому околі точки a (крім, можливо, самої точки a) справедлива нерівність $f(x) \leq \varphi(x),$ то $A \leq B$.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто що $A > B$. Вибиремо $\varepsilon > 0$ так, щоб 2 $\varepsilon -$ околи точок A і B: $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ і $(B - \varepsilon; B + \varepsilon)$ не перетиналися, тобто $A - \varepsilon > B + \varepsilon$.

Оскільки $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то знайдеться δ_1-окіл точки a, у якому $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Також існує δ_2-окіл точки a, у якому $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$, тобто $B - \varepsilon < \varphi(x) < B + \varepsilon$.

З чисел δ_1 і δ_2 вибиремо найменше і позначемо його δ. Тоді в δ – околі точки a маємо $\varphi(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x)$, і тому $f(x) > \varphi(x)$,але це не суперечить умові. Отже, $A \leq B$. Теорему доведено. [29]

Приклад 15. Довести, що для будь-якого дійсного числа x виконується нерівність $(\mathrm{x} - 1)(\mathrm{x} - 3)(\mathrm{x} - 4)(\mathrm{x} - 6) + 9 > 0$.

Доведення.

Припустимо протилежне, тобто, що існує принаймні одне дійсне значення x, для якого

$(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 9 < 0$. Тоді, перетворюючи діву частину, матимемо:

$$x^2 - 7\mathrm{x} + 6)(x^2 - 7\mathrm{x} + 12) + 9 < 0;$$

$$(x^2 - 7\mathrm{x} + 6)((x^2 - 7\mathrm{x} + 6) + 6) + 9 < 0;$$

$$(x^2 - 7\mathrm{x} + 6)^2 + 6(x^2 - 7\mathrm{x} + 6) + 9 < 0;$$

$$((x^2 - 7\mathrm{x} + 6) + 3)^2 < 0.$$

Але квадрат числа не може бути від'ємним числом.

Отже, одержали суперечність, що вказує на хибність припущення та правильність вихідної нерівності

3. 2. 5. Методика вивчення та суть методу повної індукції та методу математичної індукції.

Якщо, доводячи теорему, розчленовують її на скінченне число тверджень і доводять кожне з цих тверджень окремо, то такий метод доведення називають методом повної індукції.

Логічною основою цього методу є така аксіома логіки: якщо якусь властивість мають всі елементи множини А і всі елементи множини В і якщо множина М є сума множин А і В, то цю саму властивість має і кожен елемент множини М.

Приклад 16. Доведіть, що кожне натуральне число n, яке задовольняє нерівність $1 < n \leq 14$, або просте, його можна подати у вигляді добутку не більше як трьох простих множників.

Розв´язування

Розглянемо натуральні числа від 2 до 14. Серед цих чисел 2, 3, 5, 7, 1 і 13 – прості, а числа 4, 6, 9, 10, 14, - можна подати у вигляді добутку множників.

Метод повної індукції приводить до цілком надійних висновків. А як же дізнатися чи справедливі ці твердження взагалі? Дати відповідь на це запитання вдається шляхом застосування особливого методу міркування, який називається методом математичної індукції.

Метод математичної індукції. Логічною основою цього методу є принцип математичної індукції, взятий в шкільному курсі за аксіому: якщо твердження *A(n),*яке залежить від натурального числа *n,* виконується для $n=1$ і з припущення, що воно виконується для натурального числа $n = k$, випливає, що воно виконується і для $n = k + 1$, то це твердження виконується для будь-якого натурального числа *n.*

Правило-орієнтир доведення методом математичної індукції містить три кроки.

1. Перевірити правильність твердження для $n = 1$.

2. Припустити, що твердження правильне за $n=k$; довести, використовуючи це припущення, що твердження правильне за $n = k + 1$, тобто для наступного значення *n.*

3. Зробити висновок, що на підставі принципу математичної індукції твердження правильне для будь-якого натурального n.

Відомо, що будь-яке доведення - це дедуктивне міркування. Метод математичної індукції не є винятком, хоча історично в його назві є термін «индукція». Справді, на першому кроці в цьому методі виконують індуктивне міркування, але завдяки посиланню на загальне, раніше відоме твердження - принцип математичної індукції (аксіому) в третьому кроці, в цілому міркування, які здійснюють у методі математичної індукції, дедуктивні.

Приклад 17. Довести, що $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^{n}$, де $n \in N, n > 1$.

Доведення

1. Перевіримо правильність нерівності, якщо n = 2. У лівій частині маємо $2! \cdot 4! = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 48$, а в правій $((2+1)!)^2 = (3!)^2 = 6^2 = $ $= 36$. Оскільки 48 > 36, то для $n = 2$ нерівність правильна.

2. Припустимо, що дана нерівність правильна, якщо $n = к$, тобто $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2k)! > ((k+1)!)^{k}$.

3. Доведемо, що вихідна нерівність правильна і для $n = к + 1$, тобто $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2k)! \cdot (2(k+1))! > ((k+2)!)^{k+1}$.

Справді, $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2k)!\,(2(k+1))! > ((k+1)!)^{k} \cdot (2(k+1))!$, оскільки за припущенням $2! \cdot 4! \cdot \ldots (2k)! > ((k+1)!)^{k}$.

Але $\big(2(к+1)\big)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot \big(2(k+$ $+1)\big) = (k+1)!\,(k+2)(k+3) \cdot \ldots \cdot (2(k+1))$.

Тоді $\big((k+1)!\big)^{k} \cdot \big(2(k+1)\big)! = \big((k+1)!\big)^{k+1} \cdot (к+2)(к+3) \cdot \ldots \cdot$ $\cdot \big(2(k+1)\big) > \big((k+1)!\big)^{k+1} \cdot (k+2)(k+2) \cdot \ldots \cdot (k+2) = \big((k+1)!\big)^{k+1}$ $\cdot (k+2)^{k+1} = ((k+2)!)^{k+1}$.

Отже, $2! \cdot 4! \cdot .. \cdot (2k)! \cdot (2(k+1)! > ((k+2)!)^{k+1}$.

За методом математичної індукції нерівність: $2! \cdot 4! \cdot ... \cdot (2n)! > ((n+$ $+1)!)^{n}$ правильна для всіх $n \in N$, $n > 1$.

3. 3. Методика вивчення та суть методів геометричних перетворень як методів доведення.

3. 3. 1. Місце методів геометричних перетворень у вивченні математики.

Основна мета вивчення геометричних перетворень - ознайомити учнів з різними видами рухів (осьова і центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення) та подібністю і гомотетією, їх властивостями, ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворень, ознак подібності трикутників до розв'язування задач. [40, с. 291]

Учні повинні розуміти суть кожного із зазначених у програмі видів геометричних перетворень, знати їх властивості, ознаки подібності трикутників і вміти застосовувати їх до розв'язання найпростіших задач. [32, с. 14]

У міру вивчення геометрії учні впевнюються, що не завжди можна дістати відповідь на поставлене запитання внаслідок безпосереднього аналізу заданої фігури або конфігурації. Часто доводиться виконувати деякі перетворення фігури. Це дає змогу зблизити окремі елементи, дістати відрізки або кути, які відповідають даним умови (наприклад, різницю двох сторін, периметр трикутника тощо).

Такі перетворення фігур не випадкові. Це окремі випадки застосування геометричних перетворень.

За новою програмою з математики весь курс геометрії розгортається на основі ідей геометричних перетворень.

Геометричні перетворення використовуються і для доведення теорем, і для розв'язування різноманітних задач. При цьому основною формою роботи є розв'язування задач на побудову.

Вивчивши центральну та осьову симетрії вже можна скласти правило – орієнтир методу руху, яке в подальшому вивченні навчального матеріалу повністю підтвердить себе як правило – орієнтир методу геометричних перетворень.

1. Провести синтетичний аналіз доведення теореми (задачі).

2. Визначити, які об’єкти чи частини об’єктів, що розглядаються в доведенні, могли утворитися методом геометричних перетворень.

3. Застосувати основні властивості геометричних перетворень.

4. Зробити висновок.

Цікаво, що давньогрецький математик Фалес Мілецький (бл. 645 – 527 рр до н. е) для доведення геометричних теорем застосовував рухи. Наприклад, щоб довести рівність вертикальних кутів, він повертав площину креслення на 180° навколо деякої точки. Застосовував Фалес і ще один рух – паралельне перенесення. Саме за допомогою такого руху він довів теорему, яка сьогодні називається Теоремою Фалеса.

Фундаментальну роль рухів (і взагаді геометричних перетворень) у розумінні сучасної геометрії, відкрив німецький математик XIX ст. Фелікс Клейн й описав це у своїй статті «Геометрія групи перетворень».

Якщо ідеї Фалеса близькі до сучасного розуміння в дусі Клейна, то Евклід в своїх «Началах» дотримується іншої точки зору щодо методів доведення теорем і розв’язування задач. Підхід Евкліда ґрунтувався на рівності трикутників: для встановлення якогось геометричного факту слід розглянути одну пару трикутників і довести, що вони рівні, потім іншу пару трикутників, якщо потрібно то й третю, доки не буде отримано результат. Однак ті самі результати можна отримати і за допомогою геометричних перетворень. [2, с. 78]

3. 3. 2. Методика вивчення та суть методу центральної та осьової симетрії.

Центральна симетрія в житті людини відіграла важливу роль. Це пов'язано з появою сучасних уявлень про будову атомів і молекул. Адже, щоб показати розподіл електронів в атомі, користуються моделлю електронної хмарки, густину якої допомагає з'ясувати аналіз симетрії молекул.

Об'єкти, які мають центр симетрії, часто мають й інші види симетрії. Об'єкти, симетрія яких вичерпується наявністю тільки центральної симетрії трапляються досить рідко. Такими є, наприклад, косокутний паралелепіпед і кристал мідного купоросу. [2, с. 66]

Серед того, що нас оточує скрізь можемо помітити симетрію відносно площини. Це не тільки будинки, деталі машин і люди. Це щей кристали, будова молекул, атомів. Так, кристал гіпсу має тільки одну площину симетрії, а кристал кам'яної солі – дев'ять, тобто стільки, скільки й куб. [2, с. 69]

Суть методу центральної симетрії - дану в умові задачі фігуру (або її елементи) замінюємо фігурою, симетричною даній відносно деякої точки або прямої.

Симетрією відносно точки O (центральною симетрією) простору називається перетворення простору, яке точку O відображає на себе, а будь-яку іншу точку M відображає на таку точку M_1 так, що точка O є серединою відрізка MM_1.

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то вона називається центрально-симетричною, а точка O – центром симетрії. Наприклад, паралелограм є центрально-симетричною фігурою. Центром симетрії його є точка перетину діагоналей. [33, с. 129]

Даний метод можна застосовувати до тих завдань, в умові яких в тій чи іншій формі вказана точка, яка є центром симетрії шуканої або допоміжної фігури.

Приклад 18. Доведіть, що образом даної прямої l при симетрії відносно точки О, яка не належить прямій l, є пряма, паралельна даній.

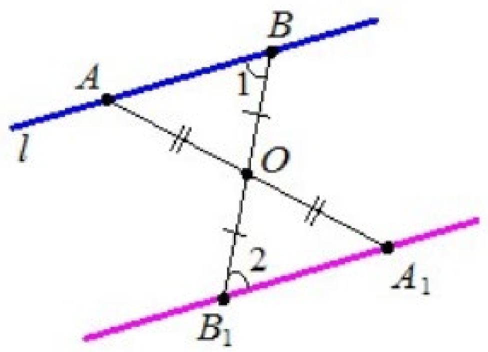


Рис. 8.

Доведення. Оскільки центральна симетрія — це рух, то образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знати дві будь-які її точки. Оберемо на прямій l довільні точки А і В. Нехай точки A_1 і B_1 — їх образи при центральній симетрії відносно точки О. Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої l. Оскільки $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, $\angle AOB$ і $\angle A_1OB_1$ рівні як вертикальні, то трикутники АОВ і A_1OB_1 рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 2$. Отже, $l \parallel A_1B_1$.

Приклад 19. Центральна симетрія – рух.

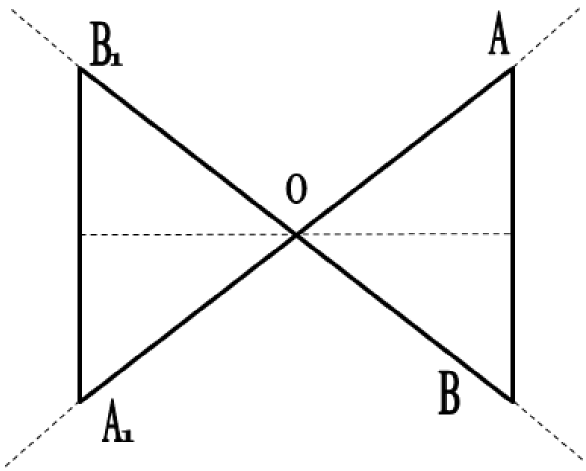


Рис. 9.

Доведення.

Нехай довільні точки А і В однієї фігури мають за образи (центральної симетрії відносно точки О) точки A_1 і B_1 іншої (рис. 9). ΔAOB і A_1OB_1 рівні за першою ознакою. Тоді $AB = A_1B_1$. Теорему доведено.

Метод осьової симетрії. Симетрією простору щодо даної прямої l (осьовою симетрією) називається перетворення, яке кожну точку прямої l відображає на себе, а будь-яку іншу точку М простору відображає на таку точку M_1, що пряма l служить серединним перпендикуляром до відрізка MM_1. Пряма l називається віссю симетрії. Наприклад, прямі, що проходять через точку перетину діагоналей прямокутника паралельно його сторонам, є осями симетрії прямокутника.

Важко вказати загальні ознаки завдань, що вирішуються методом осьової симетрії. У більш складних завданнях метод осьової симетрії може бути застосований, якщо в умовах утримується сума або різниця частин деякої ламаної лінії. Можна обмежиться зазначенням, що метод осьової симетрії застосуємо для задач, в умові яких зазначена пряма, яка є віссю симетрії частини елементів фігури. Таку пряму легко встановити за властивостями фігур. Застосування осьової симетрії доцільно для завдань, які легко вирішуються, якщо частина даних розташована по один бік деякої прямої, а решта - по другий.

Для методу осьової симетрії це правило може бути таким.

1. Припустити, що задачу розв'язано. Обрати певну симетрію відносно даної прямої або прямої, яку легко побудувати. Замінити один з даних елементів симетричним відносно обраної осі симетрії.

2. Розв'язати задачу стосовно побудованого симетричного елемента та інших даних. Цим самим задача зведеться до відомої чи до простішої.

3. Від допоміжної задачі перейти до шуканої, застосувавши обернене перетворення симетрії.

Приклад 20. Доведіть, що пряма, яка проходить через центр кола, є його віссю симетрії.

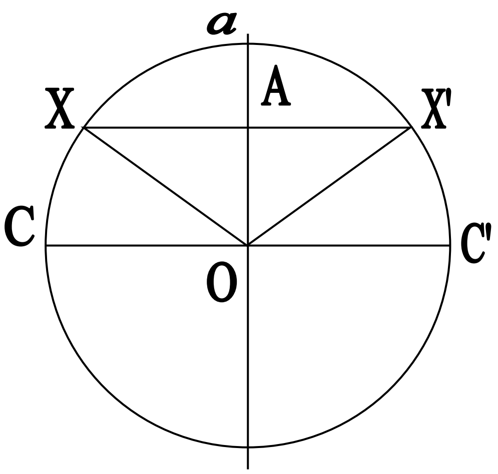


Рис. 10.

Доведення. Нехай O – центр кола й a – пряма, що проходить через точку O (рис. 10). Очевидно, перетворення симетрії відносно прямої a переводить точку C кола в точку C′, а точку O лишає на місці. Візьмемо довільну точку X при симетрії відносно прямої a.

Трикутник OAX і OAX′ рівні за першою ознакою. Уних кути при вершині A прямі, сторона OA спільна, а сторони AX і AX′ рівні за означенням симетрії. З рівності трикутників випливає рівність сторін OX і OX′, тобто точка X′ лежить на колі. А це означає, що коло при симетрії відносно прямої *a* переходить у себе, тобто пряма *a* є йогог віссю симетрії.

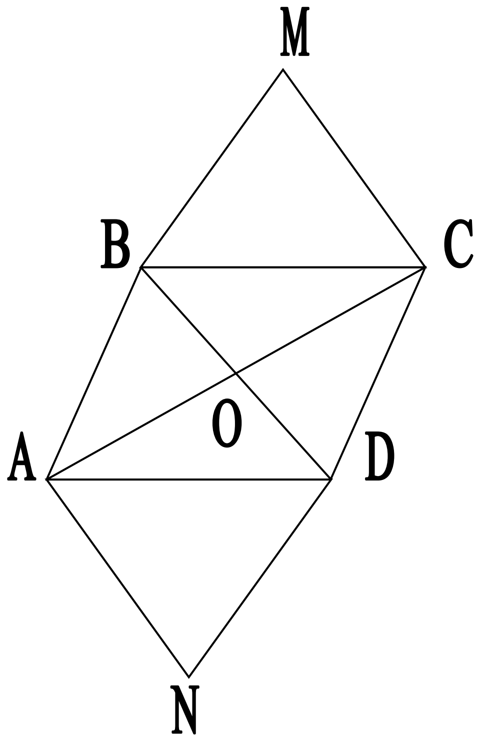


Рис. 11.

Приклад 21. На сторонах BC і AD паралелограма ABCD побудовано поза ним рівносторонні трикутники BMC і AND. Доведіть, що точки M, O і N, де O – точка перетину діагоналей паралелограма, лежать на одній прямі. [26, с. 232]

Доведення.

Розглянемо симетрію відносно точки O (рис. 11). З цього очевидно, що фігура OBMC перетворюється у фігуру ODNA.

Отже, точки M, N і O – лежать на одній прямі.

3. 3. 3. Методика вивчення та суть повороту та паралельного перенесення як методів доведення. Цей метод корисно застосовувати тоді, коли в умові задачі дано трикутник з відомим кутом між рівними сторонами (рівносторонній, рівнобедрений прямокутний трикутник) або дано фігуру, в якій можна виділити зазначений трикутник.

Правила-орієнтири методів паралельного перенесення і повороту подібні.

1. Припустити, що задачу розв'язано. Один з даних елементів перенести паралельно собі в певному напрямку на задану відстань (або повернути навколо даної точки на певний кут). Результатом такого перетворення буде допоміжна фігура, яку можна побудувати за даними задачі.

2. Побудувати допоміжну фігуру й оберненим паралельним перенесенням (поворотом) виконати побудову шуканої фігури.

Застосування цього правила-орієнтира доцільно проілюструвати розв'язуванням таких задач.

Приклад 22. На сторонах AB і BC трикутника ABC зовні побудовані квадрати $ABMN$ і $BCLK$. Довести, що центри квадратів і середини відрізків AC і MK є вершинами нового квадрата.

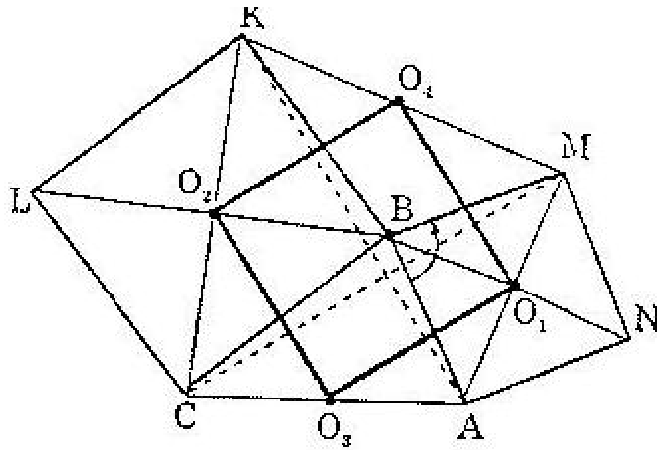


Рис. 12.

Доведення. Нехай O_1 і O_2 - центри квадратів $ABMN$ і $BCLK$ відповідно, O_3 і O_4 - середини відрізків AC і MK. У трикутнику CMK відрізок O_2O_4 є середньою лінією, тому $O_2O_4 \parallel CM$ і $O_2O_4 = \frac{1}{2}CM$.

Аналогічно, відрізок O_2O_3 є середньою лінією трикутника ACK, тому $O_2O_3 \parallel AK$ і $O_2O_3 = \frac{1}{2}AK$.

Оскільки $BA = BM$ і $\angle ABM = 90°$, то поворотом навколо точки B на $90°$ точка A відображається на точку M. Аналогічно $BC = BK$ і $\angle CBK = 90°$, тому поворотом точки B на $90°$ точка K відображається на точку C.

Отже, поворотом навколо точки B на $90°$ відрізок AK відображається на відрізок MC, тому $AK = MC$ і $AK \perp MC$. Враховуючи нерівності: $O_2O_4 \parallel CM$ і $O_2O_4 = \frac{1}{2}CM$ і $O_2O_3 \parallel AK$ і $O_2O_3 = \frac{1}{2}AK$, маємо $O_2O_3 = O_2O_4$ і $O_2O_3 \perp O_2O_4$.

Відрізок O_1O_4 є середньою лінією трикутника АКМ, тому O_1O_4 А∥ К і $O_1O_4 = \frac{1}{2}$ АК. Враховуючи $O_2O_3 \parallel AK$ і $O_2O_3 = \frac{1}{2}AK$, звідси маємо O_1O_4 O∥$_2$O$_3$ і $O_1O_4 = O_2O_3$.

Відрізок O_1O_3 є середньою лінією трикутника АКС, тому O_1O_3 М$\parallel$С і $O_1O_3 = \frac{1}{2}$МС. Враховуючи $O_2\,O_4 \parallel$СМ і $O_2\,O_4 = \frac{1}{2}$СМ, маємо $O_1O_3 \parallel O_4\,O_2$ і $O_1O_3 = O_4\,O_2$.

Із співвідношень $O_2\,O_4 \parallel$СМ і $O_2\,O_4 = \frac{1}{2}$СМ, $O_2\,O_3 \parallel$АК і $O_2\,O_3 = \frac{1}{2}$ АК, $O_2\,O_3 = O_2\,O_4$ і $O_2\,O_3 \perp O_2\,O_4$, $O_1O_4 \parallel O_2O_3$ і $O_1O_4 = O_2O_3$, $O_1O_3 \parallel O_4\,O_2$ і $O_1O_3 = O_4\,O_2$ випливає, що чотирикутник $O_1O_2\,O_3O_4$ - квадрат.

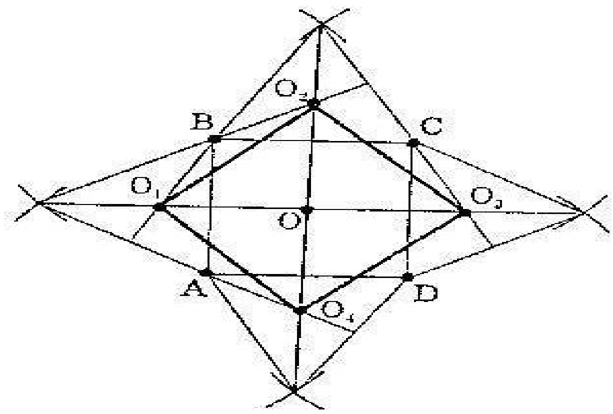


Рис. 13.

Приклад 23. Зовні квадрата на його сторонах побудовані рівносторонні трикутники. Довести, що чотирикутник із вершинами в центрах побудованих трикутників є квадратом.

Доведення.

Центри O_1, O_2, O_3, O_4 побудованих рівносторонніх трикутників лежать на осях симетрії даного квадрата *ABCD*, які проходять через середини протилежних сторін квадрата, бо ці центри лежать на медіанах (і висотах) побудованих трикутників.

Отже, діагоналі одержаного чотирикутника взаємно перпендикулярні. Крім того, діагоналі чотирикутника рівні, у точці *O* ділиться пополам. Тому поворотом навколо центра *O* квадрата *ABCD* на 90° чотирикутник відображається на себе. Отже, $O_1O_2O_3O_4$ - квадрат.

Приклад 24. У колі (O, R) AB і DC - два взаємно перпендикулярні діаметри. На дузі AD відмічена точка M. Пряма, яка проходить через центр O перпендикулярно до прямої OM, перетинає дугу DB у точці P. Довести рівність трикутників AMD і DPB.

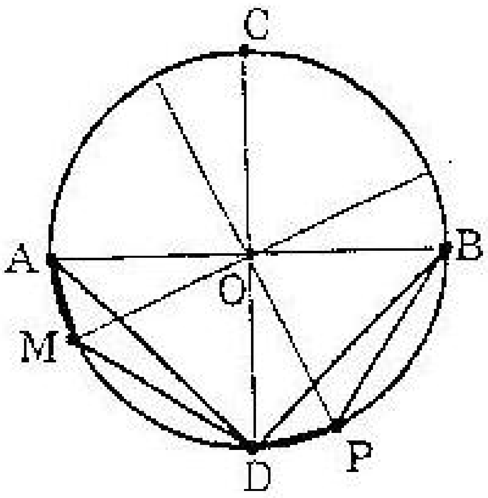


Рис. 14.

Доведення. Оскільки OA = OP = OD = OM = OB = R, $\measuredangle AOD = \measuredangle MOP = \measuredangle DOB = 90°$, то поворотом навколо точки O на кут 90° точка A відображається на точку D, точка D - на точку B, точка M - на точку P, аналогічно відрізок AM відображається на відрізок DP, відрізок MD - на відрізок PB, відрізок AD - на відрізок DB.

За властивостями повороту навколо точки відповідні відрізки рівні між собою: AM = DP, MD = PB, AD = DB, а тому $\Delta AMD = \Delta DPB$.

Під час розв'язування деяких задач часто виникають труднощі тільки через те, що елементи даної фігури віддалені один від одного, і тому важко ввести в малюнок дані умови. Зближення елементів фігур зручно здійснювати паралельним перенесенням.

Приклад 25. AB і CD – паралельні прямі. Точки A і D лежать по один бік від січної BC. Доведіть, що промені BAі CD однаково напрямлені.

Рис. 15.

Доведення

Застосуємо до променя CD паралельне перенесення, при якому точка C переходить у точку B (рис. 15). Тоді пряма CD суміститься з прямою BA. Точка D, переміщуючись вздовж прямої, паралельної CB, залиша ється в тій самій півплощині відносно прямої BC. Тому промінь CD суміститься з променем BA, отже, ці промені однаково напрямлені.

3. 3. 4. Методика вивчення та суть методів гомотетії та подібності.

Найчастіше цей метод використовується у задачах на побудову, тому що розглядається не задана в умові задачі фігура, а їй подібна. Умова задачі дає змогу побудувати фігуру подібну шуканій або дає можливість «помножити» певним способом побудовану фігуру і, якщо потрібно, помістити її у потрібне положення.

Перетворення, які змінюють тільки розміри фігур, але не форму, називають перетворенням подібності. При перетворенні подібності з коефіцієнтом k $(k > 0)$ відстані між двома довільними точками фігури змінюються в k разів. Тобто якщо А і В прообрази такого перетворення, а відповідно A_1 і B_1 - їхні образи, то $|A_1B_1| = k|AB|$.

Гомотетією з центром О і коефіцієнтом $k \neq 0$ називається перетворенням, при якому образом довільної точки М є така точка M_1 , що $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, де k - коефіцієнто гомотетії. [2]

Методом подібності розв'язують такі задачі на побудову, в яких дані містять умови, що визначають нескінченну множину подібних фігур. Труднощі для учнів полягають у тому, щоб розділити умову задачі на дві частини. Одну з них використовують для побудови допоміжної фігури, подібної до шуканої, а друга, що визначає розміри фігури, дає можливість за допомогою перетворення подібності допоміжної фігури побудувати шукану. Умови, що визначають розміри фігури, можуть бути двох видів. Це довжина будь-якого елемента фігури або розміщення фігури відносно інших даних фігур. Доцільно розглянути задачі, які передбачають умови кожного з цих двох видів. Правило-орієнтир методу подібності можна сформулювати так.

1. Відокремити в умові задачі дві частини і, відкинувши ту, що визначає розміри фігури, побудувати фігуру, подібну до шуканої.

2. Ввести відкинуту умову і, застосовуючи перетворення подібності допоміжної фігури, побудувати шукану фігуру.

Приклад 26. Довести, що в довільній трапеції точка перетину продовжень бічних сторін ,точка перетину діагоналей і середини основ лежать на одній прямій.

Доведення. Нехай ABCD - довільна трапеція, а M, P, N, L вказані в умові чотири точки. Розглянемо гомотетію $H_M^{k_1}$, де $k_1 = \frac{AD}{BC}$. Маємо: $H_M^{k_1}(B) = A$, $H_M^{k_1}(C) = D$, тоді $H_M^{k_1}(BC) = AD$, $H_M^{k_1}(N) = L$ (як середини гомотетичних відрізків).

Звідси випливає, що точки M, N, L належать прямій.

Розглянемо тепер гомотетію $H_P^{k_2}$, де $k_2 = -\frac{AD}{BC}$.

Отримуємо $H_P^{k_2}(B) = D$, $H_P^{k_2}(C) = A$, тоді $H_P^{k_2}(BC) = DA$, а $H_P^{k_2}(N) = L$. Це означає, що точки P, N, L належать прямій. Із розглянутих гомотетій випливає, що точки M, P, N, L належать одній прямій. [40]

Приклад 27. Довести, що для довільного трикутника ABC, точка N перетину висот, точка M перетину медіан і точка O – центр описаного кола лежать на одній прямій і що M лежить між O та N, поділяючи відрізок ON у відношенні $k = \frac{1}{2}$.

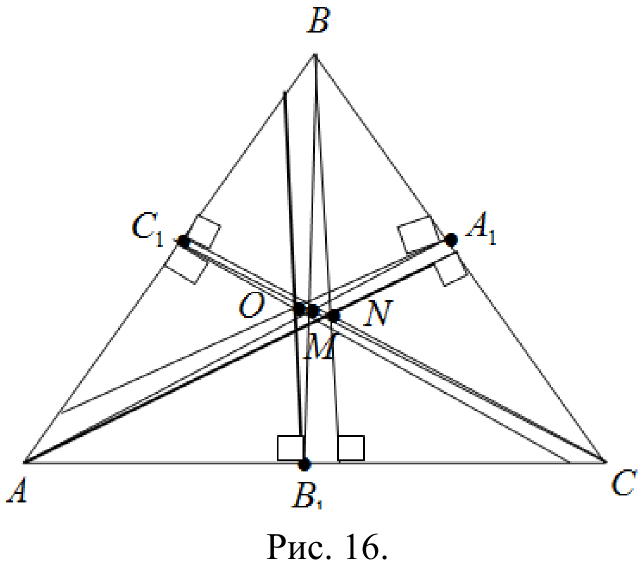


Рис. 16.

Доведення

Розглянемо гомотетію $H_M^{\frac{1}{2}}$. Тоді $H_M^{\frac{1}{2}}(A) = A_1$, $H_M^{\frac{1}{2}}(B) = B_1$, $H_M^{\frac{1}{2}}(C) = C_1$, де $A_1B_1C_1$ – відповідно середини сторін трикутника.

Прямі, що містять висоти трикутника переходять у серединні перпендикуляри до сторін. Так, зокрема, пряма CN→ C_1O, тому, що $H_M^{\frac{1}{2}}(N) = O$. Оскільки гомотетичні точки і центр гомотетії колінеарні, то N, O, M – точки однієї прямої, причому M належить відрізку ON і OM:ON=1:2. [40]

Приклад 28. Доведіть, що середина основ трапеції і точка перетину її діагоналей лежать на одній прямій. [26]

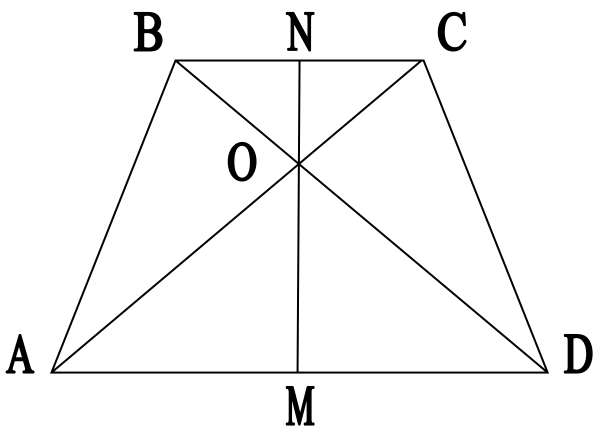


Рис. 17.

Доведення

Нехай M і N– відповідно середини основ BC і AD трапеції ABCD. При гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k = -\frac{AD}{BC}$ трикутник COB перетвориться у трикутник AOD. Звідси випливає, що точка N при цій гомотетії перейде у точку M. Отже, точки M, O, N – лежать на одній прямій.

Приклад 29. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці S. Доведіть, що $AS \cdot BS = SC \cdot DS$.

Доведення

Проведемо пряму BD (рис. 18). Точки A й C лежать в одній півплощині відносно прямої BD, тобто у півплощині, де лежить точка S. Отже, вписані кути DCB і DAB рівні. Так само доводимо рівність вписаних кутів ABC й ADC. З рівності кутів випливає, що трикутники ASD і ADS подібні (за теоремою два трикутники подібні, якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого). З подібності трикутників випливає пропорція $\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{SC}$. Отже, $AS \cdot BS = SC \cdot DS$.

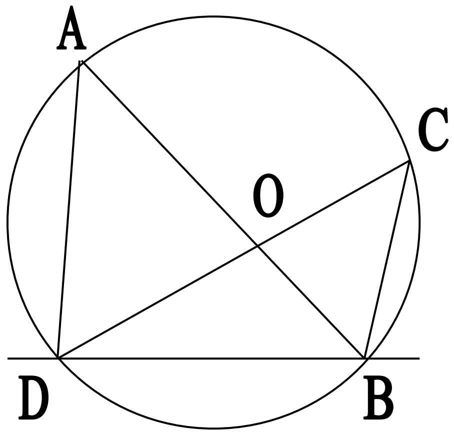


Рис. 18.

3. 4. Методика вивчення векторного методу та методу координат.

3. 4. 1. Суть та методика вивчення координатного методу.

Метод координат в курсі геометрії розпочинається у 8 класі, а перед цим була проведена пропедевтична робота в курсі математики 6 класу. Перевага методу координат перед синтетичним методом, за якого безпосередньо розглядаються фігури і кожна задача потребує особливого підходу, в його алгоритмічності. Справді, за допомогою методів координат будь – яка задача зводиться до алгебраїчної, а алгебраїчні задачі легше алгоритмізуються. Метод координат є основним методом дослідження властивостей геометричних фігур в аналітичній геометрії. Цей метод спрощує розв’язання багатьох геометричних задач, доведення теорем, дає можливість спростити виклад теоретичного матеріалу, що стосується векторів, тригонометричних функцій.

У класах з поглибленим вивченням математики, на заняттях математичного гуртка в звичайних класах доцільно ознайомити учнів з методом координат і його застосуванням до розв’язування геометричних задач (доведення теорем). У зв’язку з цим варто на прикладах розв’язання принаймні двох задач виділити правило – орієнтир методу координат:

1. Виділити умови і вимоги задачі (теореми). Обрати систему координат, відносно якої перевести вимоги на мову координат і скласти рівності зі змінними.

2. Використовуючи умови задачі (теореми), перетворити рівності зі змінними і прийти до результату на мові координат.

3. Здобутий результат перевести на мову геометрії.

Координати дозволяють визначати за допомогою чисел положення будь-якої точки простору або площини. Це дає можливість «шифрувати» різного роду фігури, записуючи їх за допомогою чисел. Співвідношення між координатами найчастіше визначає не одну точку, а деякілька або безліч (сукупність) точок. Наприклад, якщо відзначити всі точки, у яких абсциса дорівнює ординаті, тобто точки, координати яких задовольняють рівняння x = y, то вийде пряма лінія - бісектриси першого і третього координатних кутів.

Іноді, замість «безліч точок», говорять «геометричне місце точок». Наприклад, геометричне місце точок, координати яких задовольняють співвідношення x = y — це, як було сказано вище, бісектриси першого і третього координатного кута (рис. 19).

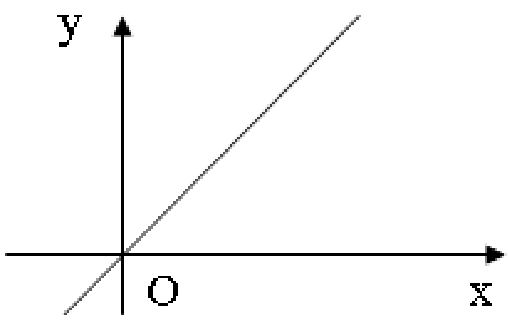


Рис.19.

Встановлення зв'язків між алгеброю, з одного боку, і геометрією - з іншого, було по суті революцією в математиці. Воно відновило математику як єдину науку, в якій немає «китайської стіни» між окремими її частинами.

Суть методу координат як методу доведення та розв'язання завдань полягає в тому, що, задаючи фігури рівняннями і висловлюючи в координатах різні геометричні співвідношення, ми можемо вирішувати геометричну задачу засобами алгебри. Зворотно, користуючись координатами, можна тлумачити алгебраїчні та аналітичні співвідношення і факти геометрично і таким чином застосовувати геометрію до вирішення алгебраїчних задач.

Метод координат - це універсальний метод. Він забезпечує тісний зв'язок між алгеброю і геометрією, які, з'єднуючись, дають «багаті плоди», які вони не могли б дати, залишаючись розділеними.

Щоб вирішувати завдання як алгебраїчні, так і геометричні методом координат, необхідне виконання 3 етапів:

1) переклад завдання на координатну (аналітичну) мову;

2) перетворення аналітичного вираження;

3) зворотний переклад, тобто переклад з координатної мови на мову, в термінах якої сформульовано задачу.

Для розробки методики формування вміння застосовувати координатний метод важливо виявити вимоги, які пред'являє логічна структура вирішення завдань мисленого характеру. Координатний метод передбачає наявність в учнів умінь і навичок, що сприяють застосуванню цього методу на практиці. Проаналізуємо вирішення декількох завдань. У процесі цього аналізу виділимо вміння, які є компонентами уміння використовувати координатний метод при вирішенні завдань. Знання компонентів цього вміння дозволить здійснити його поелементне формування.

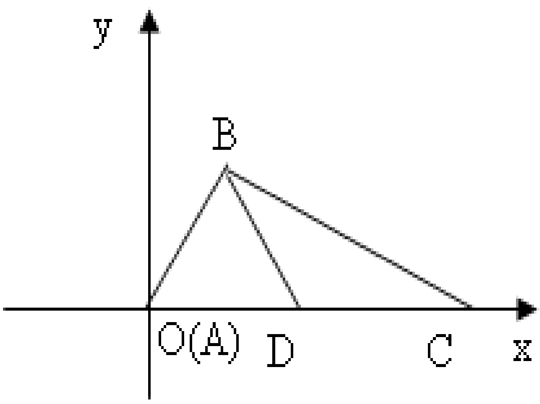


Рис. 20.

Приклад 30. *У* трикутнику ABC: AC = b, AB = c, BC = a, BD - медіана. Доведіть, що $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{2}$.

Доведення. Виберемо систему координат так, щоб точка A служила початком координат, а вісь Ox була прямою AC (рис. 20).

У вибраній системі координат точки A, C і D мають наступні координати: A(0,0), C$(b,0)$, D$(\frac{b}{2},0)$. Позначимо координати точки B через x і y. Тоді використовуючи формулу для знаходження відстаней між двома точками, заданими своїми координатами, отримуємо: $x^2+y^2=c^2$, $(x-b)^2+y^2=a^2$ (1). За тією ж формулою $BD^2=(x-\frac{b}{2})^2+$ $+y^2$ (2). Використовуючи формули (1) знаходимо x та y. Вони рівні: $x=\frac{c^2-a^2+b^2}{2b}$; $y=\sqrt{c^2-\frac{(c^2-a^2+b^2)^2}{4b^2}}$. Далі, підставляючи x та y формулу (2), знаходимо $BD^2=(\frac{c^2-a^2+b^2}{2b})^2+c^2-$ $-\frac{(c^2-a^2+b^2)^2}{4b^2}$. $BD^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$.

Приклад 31. Доведіть, що рівняння площини, яка симетрична даній відносно початку координат, відрізняється від неї тільки знаком вільного члена.

Доведення. Нехай рівняння площини-прообразу має вигляд $ax+by+cz+d=0$. Довільна точка цієї площини M(x,y,z) переходить у точку M$_1(x_1,y_1,z_1)$, де $\begin{cases} x_1=-x, \\ y_1=-y, \\ z_1=-z. \end{cases}$

Звідси маємо: $x_1=-x,\ y_1=-y,\ z_1=-z$. Підставимо ці координати точки M у рівняння площини-прообразу і отимаємо рівняння для x_1,y_1,z_1: $-ax_1-by_1-cz_1+d \leftrightarrow ax_1+by_1+cz_1-\ d=0$.

Або у звичному позначенні змінних маємо рівняння площини-образу: $ax+by+cz-d=0$, що і потрібно було довести.

Приклад 32. Які б не були точки A, B, C, справджується векторна рівність $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Доведення. Нехай A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3) – дані точки. Координати вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: $x_2-x_1,\ y_2-y_1$; координати вектора $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$: x_3-x_2, y_3-y_2. Отже, координати вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$: $x_3-x_1,\ y_3-y_1$. А це і є координати вектора $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. За теоремою (рівні вектори мають рівні координати, і навпаки, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні) вектори $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ рівні. Теорему доведено.

3. 4. 2. Методика вивчення та суть векторного методу.

За чинною програмою і проектом нової програми з математики вектори передбачено вивчати в два етапи: спочатку вивчаються вектори на площині, а потім - у просторі. У підручнику О. В. Погорєлова у 8 класі крім основних понять, що стосуються векторів, вивчаються всі операції над векторами (додавання, віднімання, множення вектора на число і скалярний добуток двох векторів, розкладання векторів по координатних осях). Дещо інше місце вектори посідають у підручнику Л. С. Атанасяна та ін. Тут вектори починають вивчатися у 9 класі, що звужує можливості їх застосування в геометрії і фізиці.

Базова програма вимагає в 8-9 класах мати уявлення про вектор, рівні вектори, вміти виконувати операції над векторами, передбачені програмою, і використовувати вектори до розв'язування нескладних стандартних задач (обчислення довжин відрізків і міри кутів, додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів).

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом – орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах доведення двох тверджень, перше з яких учні вміють доводити і без застосування векторів. Внаслідок виділення суттєвого спільного в обох доведеннях учні колективно під керівництвом учителя можуть прийти до правила – орієнтира векторного методу доведення тверджень.

1. Виділити в формулюванні теореми (задачі) умову і вимоги, виконати рисунок. Сформулювати вимоги мовою векторів і, враховуючи їх, позначити вектори на рисунку.

2. Враховуючи умови і вимоги, скласти допоміжні векторні рівності. Для цього виразити, якщо це потрібно, вектори у вигляді суми чи різниці

інших векторів, або у вигляді добутку вектора на число. Перетворити одержані рівності й прийти до потрібної.

3. Перекласти одержану рівність на мову геометрії.

Приклад 33. Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

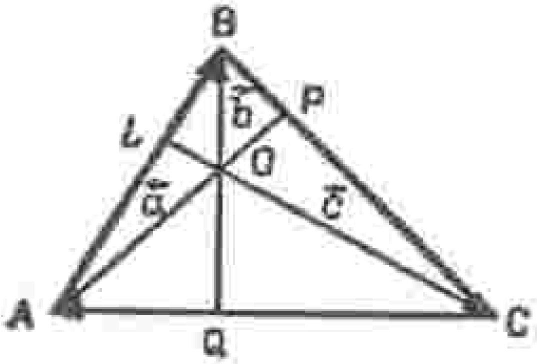


Рис. 21.

Дано: ΔABC,

AP⊥BC,

BQ⊥AC

O - точка перетину AP і BQ лежить CL.

Довести:CL⊥AB (рис. 11)

Доведення.

Введемо вектори $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, і $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Треба довести, що $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}\ , \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$.

За умовою $\vec{a}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = 0$, $\vec{b}(\vec{a} - \vec{c}) = 0$, тоді ми можемо зробивши перетворення скласти наступні вирази

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}; \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$

$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 0,$

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}, \vec{c} \cdot \overrightarrow{BA} = 0,$

так як $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AB}$ - протилежні вектори, тому $\vec{c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, а це означає, що CL ⊥AB, тобто відрізок CL - висота ΔABC.

Найважчим для учнів є позначення векторів на рисунку. Досвід раціонального позначення векторів набувається на практиці, однак певні орієнтири в цьому дає аналіз формулювання теореми (задачі). Для формування навичок використання правила-орієнтира варто запропонувати учням розв'язати векторним методом відомі з планіметрії твердження про властивість середньої лінії трикутника, про суму квадратів діагоналей паралелограма, про властивість діагоналей ромба, прямокутника.

Слід звернути увагу школярів на те, що векторний метод доведення теорем не універсальний, його зручно застосовувати для доведення паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, подільності відрізка в даному відношенні, для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів.

Розглядаючи теоретичні властивості використання векторного методу для розв’язання задач, просто необхідно звернути увагу на розв’язування задач даним методом в стереометрії. Перед вивченням даної теми треба обов’язково з учнями повторити матеріал, що стосується векторів на площині, зокрема пригадати: означення вектора, його модуля; рівних векторів, координат вектора, властивість рівних векторів, заданих координатами; правила знаходження вектора-суми, різниці двох векторів; добутку вектора на число, формулювання векторної рівності, означення скалярного добутку і його властивості через модулі і кут між ними.

Враховуючи, що окремі означення і твердження про вектори переходять без зміни або з невеликими змінами в простір, доцільно запропонувати учням заздалегідь заготовлену таблицю 2, в якій порівнюються означення і теореми про вектори на площині і в просторі .

Щодо розв’язування стереометричних задач на доведення векторним методом,то слід сказати,що правило-орієнтир доведення задач в стереометрії те ж саме, що і в планіметрії. Треба запропонувати учням пригадати це правило-орієнтир і алгоритм розв'язування.

Приклад 34. Довести, що коли дві пари мимобіжних ребер тетраедра взаємно перпендикулярні, той ребра третьої пари також взаємно перпендикулярні.

Доведення: Застосуємо для точок A, B, C, S векторну рівність для чотирьох точок (рис. 22).

Оскільки AS⊥BC, то $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Через те, що SC⊥AB, маємо $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Звідси $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$, а це означає, що CA⊥SB.

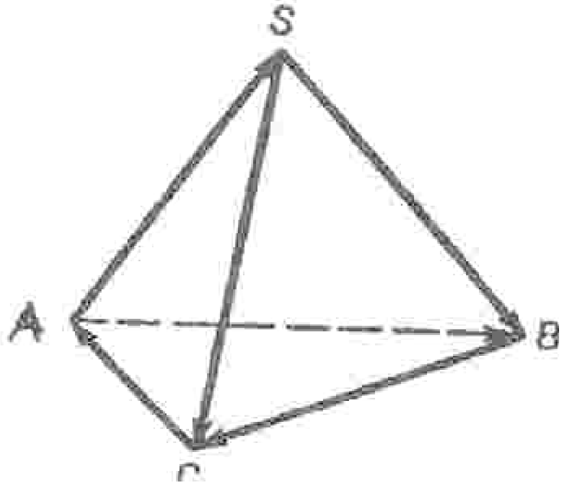


Рис. 22.

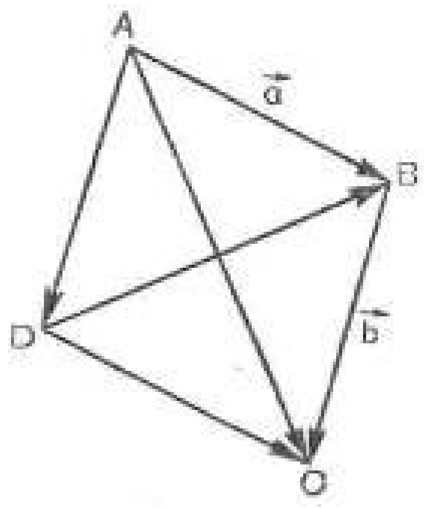
У старшій школі завжди є доцільним пропонувати учням поряд з стереометричними задачами, які розв'язуються саме векторним методом, планіметричні задачі, які можна розв'язати векторним методом.

Багато теорем в шкільному курсі геометрії в 70-х роках минулого століття доводились саме методом векторів, але зараз векторним методом доводяться теореми які поглиблюють властивості векторів на площині та в просторі, а також тільки деякі теореми, а саме прикладом таких є, теорема косинусів.

Доведення цих теорем ми розглядаємо в програмі шкільного курсу, але є дуже доцільним надати учням деякі теореми шкільного курсу, які були доведені раніше, довести методом векторів. Таким чином у учнів буде формуватися поняття про те, що теореми можуть доводитися різноманітними методами, а також буде формуватися погляд на геометрію з точки зору теорії векторів. Саме це дасть можливість учням краще розуміти тему векторів та застосування векторів в різних прикладних предметах таких як фізика, інформатика та ін.

Приклад 35. Довести, що діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом (рис. 23).

Доведення. Виразимо сторони ромба через вектори наступним чином $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, із означення ромба $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

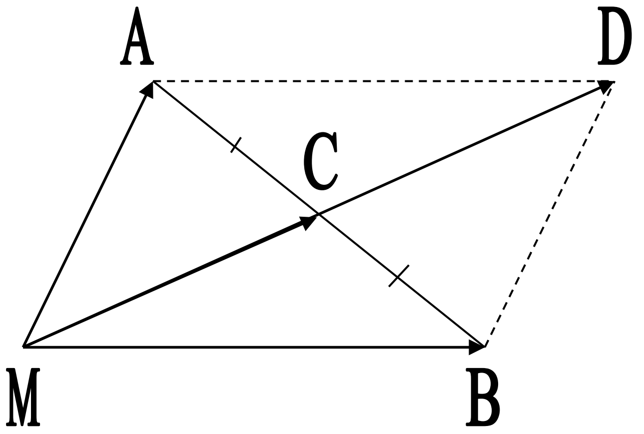


За означенням суми та різниці векторів ми маємо, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Розглянемо $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$ (за властивістю скалярного добутку). Так як сторони ромба рівні то і a=b, тоді $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$, AC⊥DB.

Рис. 23.

Приклад 36. Точка C – середина відрізка AB. Доведіть, що для довільної точки простору M виконується $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.



Доведення

Побудуємо на векторах $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$ паралелограм MADB (рис. 24). Тоді $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

За властивістю паралелограма його діагоналі при перетині діляться навпіл.

Рис. 24.

Тоді точка C збігається з точкою перетину діагоналей паралелограма, а $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MC}$. А $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

Отже, для довільної точки простору M виконується $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.

3. 5. Прийоми, які використовуються при роботі з теоремами та задачами на доведення.

Складання плану доведення теорем або задач

В підручниках доведення подаються в стислій формі без деталізації деяких кроків. Розбиття доведень на окремі твердження – корисний спосіб роз’яснення учням суті доведення. Також досить ефективним є складання плану доведення теореми (спочатку колективно, а потім можна індивідуально). Адже, правильно складений план доведення теореми майже гарантує правильне її доведення. Але складання плану може виявитися складним і тривалим процесом. Тому вкрай необхідно пропонувати учневі ненав'язливі питання, поради, які допомагають йому краще і швидше скласти план доведення, «відкрити» його ідею.

Складання плану доведення можна проводити за наступними пунктами.

1) Чи відома розв’язана будь-яка інша аналогічна задача? Якщо така задача відома, то складання плану доведення не буде скрутним.

2) Подумайте, чи відома вам теорема, аксіома чи твердження, до яких можна звести доводжуване. Якщо так, то шлях складання плану доведення очевидний: звести дану теорему до доведеної раніше.

3) Варто скористатися порадою: «Спробуйте сформулювати умови теореми інакше». Іншими словами, спробуйте перефразувати теорему, не змінюючи її математичного змісту.

При переформулюванні теореми користуються або визначеннями даних в ній математичних понять (замінюють терміни їх визначеннями), або їх ознаками (точніше сказати, достатніми умовами). Треба відзначити, що здатність учня переформулювати теорему є показником розуміння математичного змісту завдання.

4) Складаючи план доведення, завжди слід задавати собі запитання: «Чи всі дані теореми використані?». Виявлення невикористаних даних теореми полегшує складання плану її доведення.

5) Нерідко трапляється так, що, важко скласти план доведення. Тоді може допомогти ще одна порада: «Спробуйте довести лише частину теореми», тобто спробуйте спочатку задовольнити лише частини умов, щоб далі шукати спосіб довести решту.

6) Нерідко у складанні плану виконання завдання допомагає відповідь на запитання: «Для якого окремого випадку можливо досить швидко довести теорему?».

Приклад 37. Доведіть теорему Піфагора – у прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи (рис. 25).

Доведення теореми можна провести складаючи такий план :

1. Розглянути прямокутний трикутник з катетами a і b, гіпотенузою c і висотою, проведеною до гіпотенузи h_c.
2. Для цього трикутника записати метричні співвідношення для катетів.
3. Виконати почленно додавання обох частин здобутих рівностей.
4. Перетворити праву частину здобутої рівності, використавши аксіому вимірювання відрізків.
5. Перекласти шукану нерівність з математичної мови на звичайну.

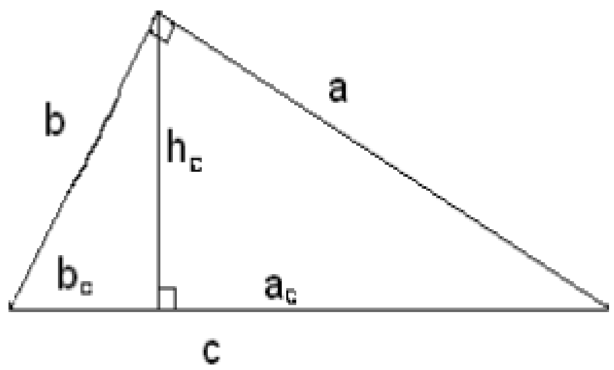


Рис. 25.

Доведення за складеним планом буде звучати наступним чином: згідно з метричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику з катетами a і b та гіпотенузою c будемо мати $a^2=c\cdot a_c$, $b^2=c\cdot b_c$. Додаючи ці рівності почленно, отримаємо $a^2+b^2=c\cdot a_c+c\cdot b_c=c(a_c+b_c)=c^2$. Отже, у прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи. Теорему доведено.

Приклад 38.Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

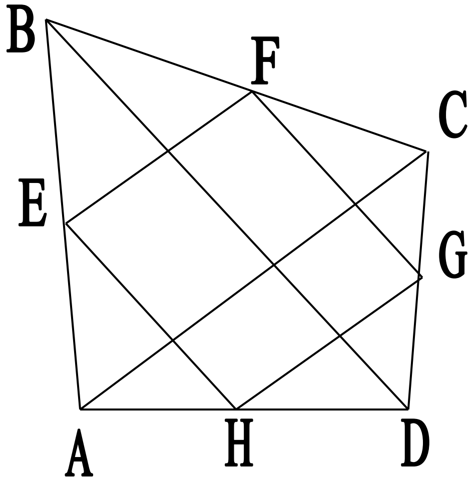


Рис. 26.

План доведення задачі може виглядати наступним чином.

1. Розглянемо даний чотирикутник ABCD і середини його сторін E, F, G, H (рис. 26).
2. Доведемо, $EF \parallel AC$.
3. Доведемо, що $GH \parallel AC$.
4. Доведемо, що протилежні сторони EF і GH чотирикутника EFGH паралельні.
5. Доведемо аналогічно паралельність другої пари протилежних сторін.
6. Зробимо висновки.

Доведення

1. Нехай даний чотирикутник ABCD і середини його сторін E, F, G, H.
2. EF - середня лінія трикутника ABC, тому $EF \parallel AC$.
3. GH - середня лінія трикутника ADC, тому $GH \parallel AC$.
4. Отже, $GH \parallel EF$.
5. EH - середня лінія трикутника ABD, тому $EH \parallel BD$. FG - середня лінія трикутника BDC, тому $FG \parallel BD$. Отже, $EH \parallel FG$.

6. З пунктів 4 і 5 випливає, що чотирикутника EFGH – паралелограм, що і потрібно було довести.

Відтворення доведення теореми чи задачі за складеним планом

Суть даного прийому полягає в тому, що учням дається готовий план доведення нової теореми і пропонується самим здійснити доведення за допомогою цього плану. План вказує лише загальний контур доведення теореми. При реалізації плану потрібно враховувати всі деталі та розглядати їх ретельно і терпляче, доводити правильність кожного кроку посиланнями на відповідні, відомі раніше математичні факти, пропозиції. Переваги:

1) план розбиває доведення теореми на ряд простих, елементарних завдань, які учні можуть вирішити;

2) в учнів з’являється впевненість у тому, що вони зможуть довести нову теорему;

3) план дозволяє охопити все доведення у цілому, в учнів виникає відчуття повного розуміння.

Оскільки схеми доведення всіх трьох ознак паралелограми майже однакові (відмінність тільки в застосуванні різних ознак рівності трикутників та використанні або означення паралелограма, або вже доведеної ознаки паралелограма за двома протилежними сторонами), то роботу з доведення ознак можна організувати так: ознаку паралелограма за двома протилежними сторонами доводить учитель за участі учнів, складає план доведення, а потім пропонує учням самостійно довести наступні ознаки за складеним планом.

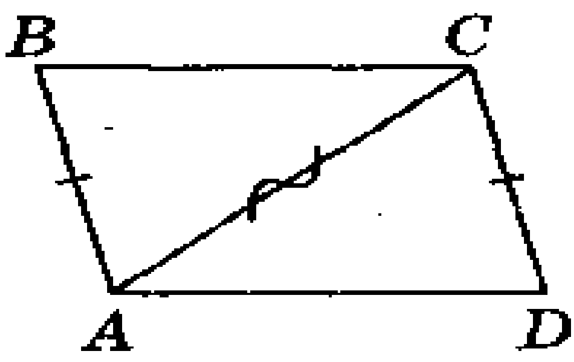


Рис. 27.

Приклад 39. (Ознака, яку доводить вчитель за участі учнів). Доведіть ознаку паралелограма - якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Доведення.

Нехай у чотирикутнику ABCD (рис. 15) AB||CD, AB = CD. У даному чотирикутнику проведемо діагональ AC. Оскільки AB || CD, а AC — січна, то ∠BAC = ∠DCA як внутрішні різносторонні при паралельних прямих і січній. AC — спільна сторона трикутників BAC і DCA, AB = CD за умовою. Отже, ΔBAC = ΔDCA за двома сторонами і кутом між ними. Звідси ∠BCA = ∠DAC. Оскільки ці кути внутрішні різносторонні при прямих BC і AD і січній AC, то BC||AD. Отже, AB ||CD, BC ||AD. Таким чином, у чотирикутнику ABCD протилежні сторони паралельні, отже, він паралелограм за означенням, що й треба було довести.

План доведення теореми буде виглядати так**:**

1) спочатку доводиться рівність трикутників (здобутих у результаті проведення однієї або двох діагоналей паралелограма);

2) із рівності трикутників випливає рівність відповідних елементів цих трикутників (які у свою чергу є елементами паралелограма);

3) на основі доведеної рівності певних елементів паралелограма із використанням означення (а потім доведеного попереднього твердження) доводиться той факт, що даний чотирикутник — паралелограм.

Наступні ознаки доводять учні, за допомогою плану.

Приклад 40. Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

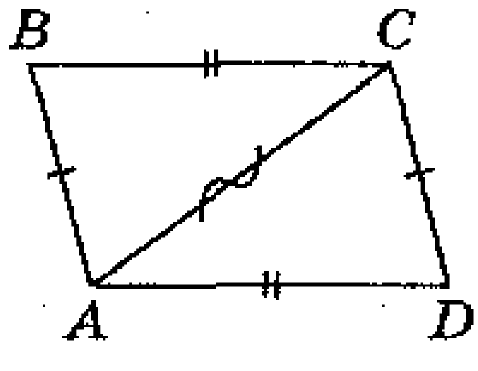


Рис. 28.

Доведення.

1) Нехай у чотирикутнику ABCD (рис. 28) AB = CD, BC = AD. У даному чотирикутнику проведемо діагональ AC. У трикутниках ABC і CDA: AB=CD, BC = AD — за умовою, AC — спільна сторона.

2) Отже, $\Delta ABC = \Delta CDA$ за трьома сторонами. Звідси $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$ як відповідні кути рівних трикутників.

3) Оскільки кути BAC і DCA — внутрішні різносторонні при прямих AB і CD і січній AC, а кути BCA і DAC — внутрішні різносторонні при прямих BC і AD і січній AC, то відповідно AB||CD, BC||AD. Отже, чотирикутник ABCD — паралелограм за означенням, що й треба було довести.

Приклад 41. Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

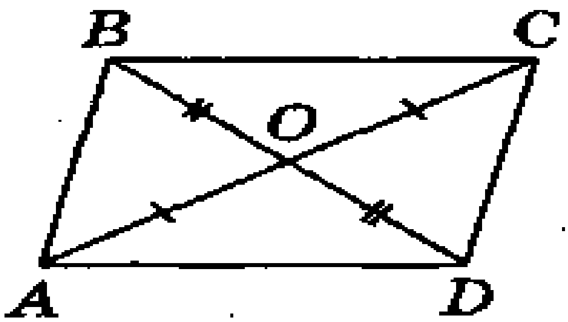


Рис. 29.

Доведення.

1)Нехай ABCD — даний чотирикутник, діагоналі якого перетинаються в точці O (рис. 29). У трикутниках BOC і DOA: BO = DO, OC = OA — за умовою; $\angle BOC = \angle DOA$ як вертикальні.

2)Отже, $\Delta BOC = \Delta DOA$ за двома сторонами і кутом між ними. Звідси $\angle BCO = \angle DAO$, причому ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих BC і AD і січній AC. Отже, BC||AD. Аналогічно доводимо рівність трикутників BOA і DOC і паралельність прямих AB і CD.

3)Оскільки протилежні сторони чотирикутника паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм за означенням, що й треба було довести.

Ліквідація пропусків в доведенні

Для пояснення доведення теорем також використовують прийом ліквідації пропусків у доведенні, який полягає в створенні пропусків у доведенні, які потрібно заповнити використовуючи вивчений раніше матеріал і зробити кінцевий висновок. Суттєвою його перевагою є те, що в учнів розвивається мислення і впевненість у власних силах, бажання доводити подібні теореми.

Приклад 42. Доведіть, що діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом і є бісектрисами його кутів (рис. 30).

Доведення

Розглянемо ΔACB. За означенням ромба AC=_____, тоді ΔACB _____________.

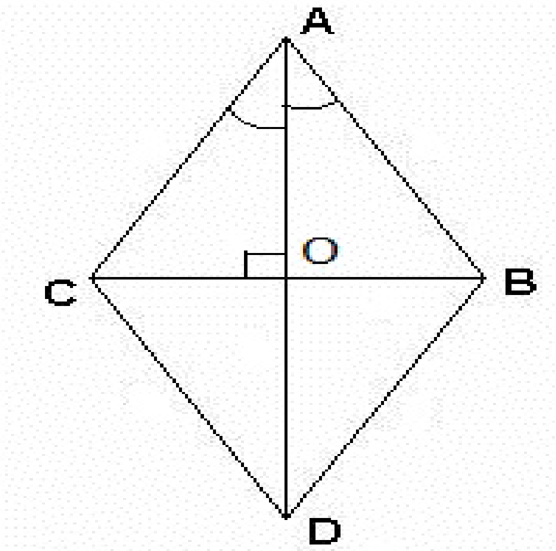


Рис. 30.

За властивістю _______________ CO=____, тоді AO - ___________ΔACB. У рівнобедреному трикутнику медіана, ______ до його ________, є бісектрисою і ___________.

Отже, AO – бісектриса ∠____, яка перпендикулярна до основи ____, тобто ___- бісектриса ∠____ і AD ⊥ ___.

Аналогічно доводиться, що AD – _________∠D, CB - _____________ ∠___ і ∠ ___.

Теорему ___________.

Доведення з заповненими пропусками буде виглядати наступним чином: розглянемо ΔACB; за означенням ромба AC=AB, тоді ΔACB рівнобедрений. За властивістю паралелограма CO=OB, тоді AO – медіана ΔACB. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до його основи, є бісектрисою і висотою.

Отже, AO – бісектриса ∠A і перпендикулярна до основи CB, тобто AD-бісектриса ∠A і AD ⊥ CB. Аналогічно доводиться, що AD – бісектриса ∠D, CB - бісектриса ∠C і ∠ B.

Теорему доведено.

Приклад 43. Доведіть, що в правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площини AD_1C і DBB_1 перпендикулярні (рис. 31).

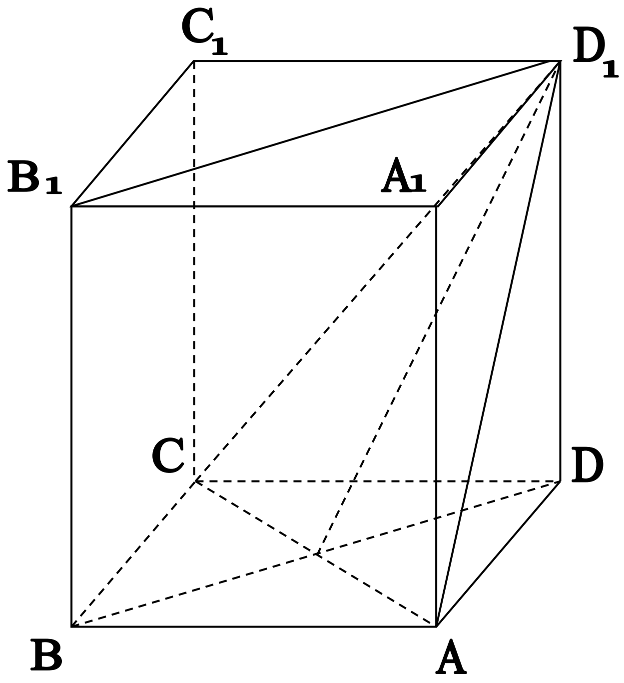


Рис. 31.

Доведення з попусками

1) AC ⊥ DB як діагоналі квадрата AB__.
2) BB_1 ⊥ (A__) як ребро правильної призми. Тоді BB_1 ⊥ __.
3) AC ⊥ DB І BB_1 ⊥ __, тоді (за теоремою про __________________) AC ⊥ (___B_1).
4) AC ϵ (AD_1 __) і AC ⊥ (DB__),тоді (за ознакою) (_____) ⊥ (DB___).
5) Отже, в правильні чотирикутній призмі _______$A_1B_1C_1D_1$ площини AD_1C і DBB_1 __________________.

Доведення з заповненими пропусками матиме вигляд:

1) AC ⊥ DB як діагоналі квадрата ABCD.
2) BB_1 ⊥ (ABC) як ребро правильної призми. Тоді BB_1 ⊥ AC.
3) AC ⊥ DB І BB_1 ⊥ AC, тоді (за теоремою про два перпендикуляри) AC ⊥ (DBB_1).
4) AC ϵ (AD_1C) і AC ⊥ (DBB_1),тоді (за ознакою) (AD_1C) ⊥ (DBB_1).
5) Отже, в правильні чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площини AD_1C і DBB_1 перпендикулярні

Відшукання помилок в доведенні

Один з прийомів, який привчає дітей миттєво реагувати на помилки. Учнів заздалегідь попереджають про те, що пояснюючи матеріал, учитель навмисно припускається помилок. Також домовляються про умовний знак, яким користуватимуться учні аби звернути увагу на знайдену помилку.

Приклад 44. Доведіть, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним (рис. 32).

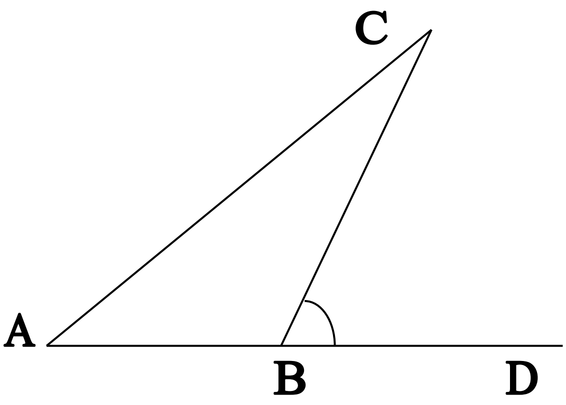


Рис. 32.

Доведення.

Доведення можна провести поетапно, виправляючи очевидні помилки і пояснюючи кожну з них, та виділяючи їх будь-яким символом для кращого запам’ятовування та профілактики подальшого здійснення.

Текст доведення з помилками буде виглядати наступним чином:

1) Доведення побудоване на теоремі про різницю кутів трикутника (сума кутів трикутника дорівнює $\underline{360^\circ}$).

2) Сума кутів $\Delta AB\underline{E}$ дорівнює 180° — $\angle ACB+\angle ABC+\angle \underline{DB}C=\underline{190}^\circ$.

3) Зовнішній кут трикутника суміжний (суміжними називаються кути, які не мають спільної вершини і одної спільної сторони) з $\angle ABC$, отже, $\angle CBD+\angle AB\underline{D}=180^\circ$. $\Leftrightarrow$ $\angle ABC=180^\circ\underline{+}\angle CBD$.

4) З рівності $\angle ACB+\angle ABC+\angle BAC=180^\circ$ обчислимо $\angle ABC$: $\angle ABC =180\underline{^\circ + \angle} BAC\underline{+}\angle ACB$.

5) Ми отримали дві рівності для обчислення $\angle A\underline{C}C$, ліві частини яких рівні, отже, рівні і праві: $180^\circ - \angle CBD=180^\circ - \angle BAC-\angle ACB$.

6) Перетворимо останню рівність і дістанемо: $\angle CB\underline{B}=\angle BAC+\angle ACB$.

7) Отже, зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, суміжного з ним.

Доведення без помилок

1) Доведення побудоване на теоремі про суму кутів трикутника (сума кутів трикутника дорівнює 180°).

2) Сума кутів ΔABC дорівнює 180°: ∠ACB+∠ABC+∠BAC=180°.

3) Зовнішній кут трикутника суміжний (суміжними називаються кути, які мають спільну вершини і одну спільну сторону, а дві інші утворюють пряму лінію; суміжні кути доповнюють один одного до 180°) з ∠ABC , отже, ∠CBD+∠ABC=180°. ⇔ ∠ABC=180° − ∠CBD.

4) З рівності ∠ACB+∠ABC+∠BAC=180° обчислимо ∠ABC: ∠ABC =180° − ∠BAC−∠ACB.

5) Ми отримали дві рівності для обчислення ∠ABC, ліві частини яких рівні, отже, рівні і праві: 180° − ∠CBD=180° − ∠BAC−∠ACB.

6) Перетворимо останню рівність і дістанемо: ∠CBD=∠BAC+∠ACB.

7) Отже, зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним.

Приклад 45. Дано точки A(-3; 2) і B(4, 1). Доведіть, що відрізок AB перетинає вісь y, але не перетинає вісь x.

Текст доведення з помилками буде виглядати наступним чином.

Вісь y розбиває площину <u>xx</u> на <u>три</u> півплощини. В одній півплощині <u>ординати</u> точок додатні, а в другій - від’ємні. Оскільки абсциси точок A і B <u>однакових</u> знаків, то точки A і B <u>не лежать</u> у різних півплощинах. А це означає, що відрізок AB перетинає вісь <u>x</u>.

Вісь x <u>не розбиває</u> площину xy на дві півплощини. В одній з них ординати точок додатні, а в другій <u>додатні</u>. Точки A і B мають ординати одного знака (від‘ємні), отже, вони лежать в <u>трьох півплощинах</u>. Відрізок AB <u>перетинає</u> вісь x.

Отже, відрізок AB перетинає вісь y, але не перетинає вісь <u>y</u>.

Доведення без помилок буде виглядати наступним чином.

Вісь y розбиває площину xy на дві півплощини. В одній півплощині абсциси точок додатні, а в другій - від'ємні. Оскільки абсциси точок А і В протилежних знаків, то точки А і В лежать у різних півплощинах. А це означає, що відрізок АВ перетинає вісь y.

Вісь x теж розбиває площину xy на дві півплощини. В одній з них ординати точок додатні, а в другій відємні. Точки А і В мають ординати одного знака (додатні), отже, вони лежать в одній півплощині. Відрізок АВ не перетинає вісь x.

Отже, відрізок АВ перетинає вісь y, але не перетинає вісь x.

Аргументація основних кроків (етапів) доведення

Доведення — це виведення одного знання з іншого, істинність якого раніше встановлена і перевірена практикою.

Доведення є мисленний процес, спрямований на підтвердження якогось положення через інші безсумнівні, раніше обґрунтовані доведення.

Для кращого розуміння поняття «аргументація» можна ввести визначення тези та аргументу.

Теза – це положення, що обґрунтовується.

Аргумент (логічна основа, підстава, довід, доказ) - положення, з допомогою якого обґрунтовується теза. Роль аргументів можуть відігравати аксіоми, теореми, властивості, логічні операції тощо.

Аргументація — це сукупність умовиводів, необхідних для логічного виведення тези. Аргумент є невід'ємною частиною доведення. Основними типами аргументів у процесі доведення є: судження про достовірно відомі факти; наукове визначення понять; загальноприйняті в науці узагальнення, раніше доведені закони науки, властивості, аксіоми чи теореми.

За способом аргументації доведення поділяються на прямі і непрямі.

Прямим називається доведення, у якому теза обґрунтовується аргументом без використання суперечних тез і припущень.

Непрямим називається доведення, у якому істинність тези обґрунтовується із застосуванням суперечного тезі припущення (антитези).

Прямі і непрямі доведення у разі підтвердження чи спростування тези здійснюються за допомогою різних прийомів.

Аргументація має бути послідовною, логічно стрункою.

Правила щодо аргументації:

- аргументи, що наводяться для доведення, повинні бути істинними і не суперечити одне одному;
- аргументи мають бути достатньою основою для доведення;
- аргументи повинні бути судженнями, істинність яких доведена;

Помилки в аргументації:

- стрибок у доведенні;
- порушення правил умовиводу;
- порушення правил силогізму.

Перший вид помилок полягає у нездатності вивести тезу з наведеної основи, у невмінні розкрити внутрішній логічний зв’язок положення з висунутими доведеннями. Другий вид помилок виникає в результаті «перескакування» через проміжні ланки в ланцюгу умовиводів, висловлювання тези безпосередньо слідом за основою, без виявлення того, як теза логічно випливає із цієї основи. Третій вид помилок полягає у порушенні правил умовиводу — правил силогізму, умовно-категоричного умовиводу, правил наукової індукції. [38]

Коментування (аргументування) вирішення завдань полягає в наступному: усі учні самостійно вирішують одну і ту ж задачу, а один з них послідовно пояснює (коментує) рішення. Деякі вчителі перетворюють коментування до запису під диктовку: один учень відтворює голосом все, що він записує в зошит (без будь-яких пояснень), а всі інші поспішно записують сказане ним. Ясно, що таке застосування коментування не приносить належної користі.

Коментування позначає пояснення, тлумачення чого-небудь. Саме так і слід розуміти коментування при вирішенні математичних завдань. Учень-коментатор пояснює, на якій підставі він виконує те чи інше перетворення, проводить те чи інше міркування, побудову. При цьому кожен крок у вирішенні завдання повинен бути виправданий посиланням на відомі математичні пропозиції.

Приклад 46. Доведіть теорему Фалеса – якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.

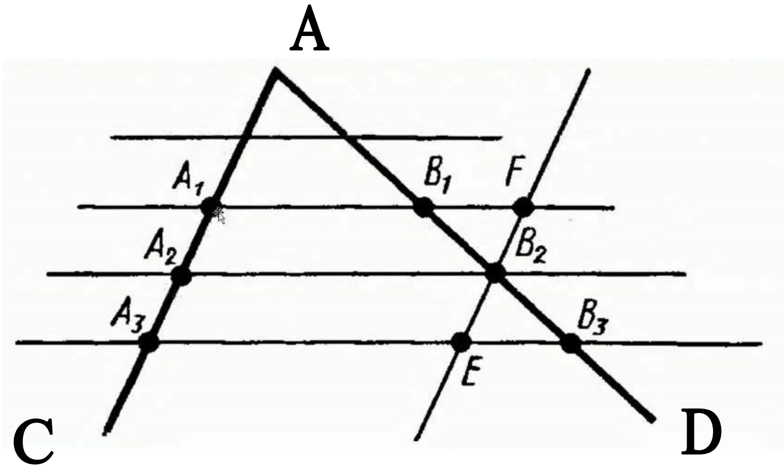


Рис. 33.

Доведення. Відповідно до даного прийому основні кроки доведення і їх аргументацію можна подати у вигляді таблиці, яку потрібно заповнити учням. Таблиця доведення може виглядати так:

Основні кроки (етапи) доведення	Аргументація
1.Проведемо через точку B_3 пряму $EF \parallel AC$.	Аргумент 1- ?
2.$A_1A_2=FB_2$, $A_2A_3=B_2E$.	
3. $FB_2= B_2E$.	Аргумент 2 - ?
4. $\angle B_1B_2F=\angle EB_2B_3$.	Аргумент 3 - ?
5. $\angle B_1F B_2=\angle B_2EB_3$.	Аргумент 4 - ?
6.$\Delta B_1B_2F=\Delta EB_2B_3$.	Аргумент 5 - ?
7. $B_1B_2= B_2B_3$.	Аргумент 6 - ?

В колонку «Аргументація» учні повинні вписати такі аргументи (теореми, властивості, аксіоми і т. д.), які б доводили кроки записані в лівій колонці таблиці.

Заповнена таблиця доведення теореми Фалеса матиме вигляд:

Основні кроки (етапи) доведення	Аргументація
1.Проведемо через точку B_3 пряму $EF \parallel AC$.	Через будь-яку точку можна провести пряму паралельну до даної.
2.$A_1A_2=FB_2$, $A_2A_3=B_2E$.	Паралельні прямі перетинаються паралельними прямими, тому можна використати властивість паралелограма.
3. $FB_2= B_2E$.	$A_1A_2= A_2A_3$.
4. $\angle B_1B_2F=\angle EB_2B_3$.	Рівні як вертикальні.
5. $\angle B_1F\ B_2=\angle B_2EB_3$.	Рівні як внутрішні різносторонні при паралельних прямих A_1B_1 та A_2B_2 і січній EF.
6.$\Delta\ B_1B_2F=\Delta\ EB_2B_3$.	За другою ознакою рівності трикутників (якщо сторона й прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні).
7. $B_1B_2= B_2B_3$.	$\Delta\ B_1B_2F=\Delta\ EB_2B_3$

Приклад 47. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі (рис. 34).

Доведення. Таблиця, яку слід подати для кращого засвоєння доведення теореми з використанням даного методу може виглядати так:

Основні кроки (етапи) доведення	Аргументація
1.Проведемо через B і P пряму, яка перетне AD у точці E.	Аргумент1 - ?
2. .Δ PBC=Δ PED.	Аргумент 2 - ?
3. PB=PE, BC=ED.	Аргумент 3 - ?
4. PQ∥AE.	Аргумент 4 - ?
5. PQ= $\frac{1}{2}$ (AD+BC)	Аргумент 5 - ?

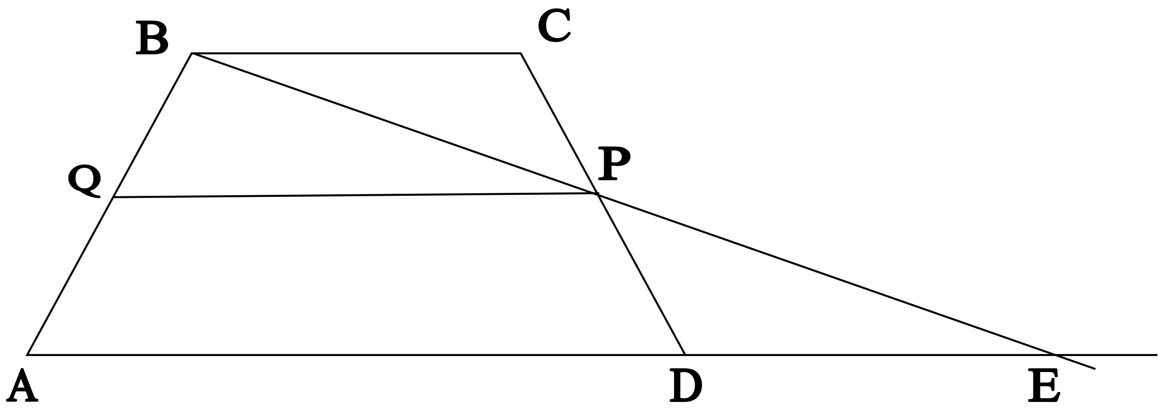


Рис. 34.

Заповнена таблиця доведення

Основні кроки (етапи) доведення	Аргументація
1.Проведемо через B і P пряму, яка перетне AD у точці E.	Нехай ABCD – дана трапеція. Через дві точки (вершину B і середину P бічної сторони CD) можна провести пряму. Вона перетинає AD у деякуй точці E.
2. Δ PBC=Δ PED.	Трикутники рівні за другою ознакою рівності трикутників. У них CP=DP за побудовою, кути при вершині P рівні як вертикальні, а кути PCB і PDE

	рівні як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD і січній CD.
3. PB=PE, BC=ED.	З рівності трикутників Δ PBC=Δ PED випливає рівність сторін.
4. PQ∥AE.	Середня лінія трапеції PQ є середньою лінією трикутника ABE. За властивістю середньої лінії трикутника PQ∥AE.
5. PQ = $\frac{1}{2}$ (AD+BC)	Відрізок PQ= $\frac{1}{2}$ AE$\frac{1}{2}$ (AD+BC).

Відтворення основних кроків (етапів) доведення за готовою аргументацією

Доведення — це ряд умовиводів, що мають однакову логічну будову незалежно від конкретного змісту об’єкта дослідження, а аргументація – це творчий процес, тому учні з високим рівнем знань повинні легко справитись з таким завданням як відтворення основних кроків доведення теореми за готовою аргументацією.

Щоб довести теорему дітям прийдеться шукати логічні зв’язки між запропонованими аргументами та поступово висвітлювати етапи доведення.

Приклад 48. Доведіть теорему (властивість бісектриси трикутника) – бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам (рис 35).

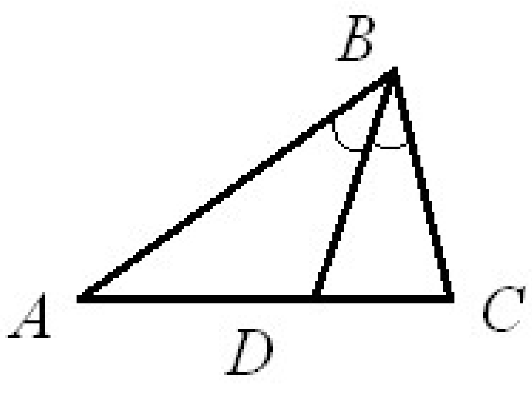


Рис. 35.

Доведення

Для зручності доведення і систематизації його кроків доцільно подати аргументи етапів цього доведення у вигляді таблиці з двох колонок під назвами «Етапи (кроки) доведення» та «Аргументація», з яких перша буде пустою, а друга – заповнена.

Відповідна таблиця буде мати вигляд:

Етапи (кроки) доведення	Аргументація
1. Крок 1 - ?	1.Через точку можна провести пряму паралельну даній, яка буде перетинати AB у точці E.
2. Крок 2 - ?	2.Рівні як різносторонні при паралельних прямих BD і CE та січній BC.
3. Крок 3 - ?	3. Рівні як відповідні при паралельних прямих BD і CE та січній AE.
4. Крок 4 - ?	4. BD — бісектриса.
5. Крок 5 - ?	5. ∠4=∠1.
6. Крок 6 - ?	6. Теоремою про пропорційні відрізки (паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають від його сторін пропорційні відрізки).
7. Крок 7 - ?	7. BE = BC.

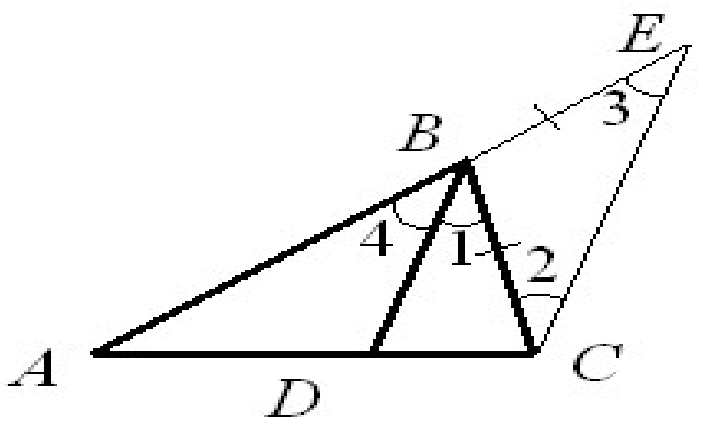


Рис. 36.

Заповнена таблиця доведення теореми про властивість бісектриси трикутника виглядатиме таким чином:

Етапи (кроки) доведення	Аргументація
1. Через точку С проведемо пряму СЕ, паралельну прямій BD. Нехай проведена пряма перетинає пряму АВ у точці Е (рис. 36).	1.Через точку можна провести пряму паралельну даній, яка буде перетинати АВ у точці Е.
2. $\angle 1=\angle 2$.	2.Рівні як різносторонні при паралельних прямих BD і СЕ та січній ВС.
3. $\angle 3=\angle 4$.	3. Рівні як відповідні при паралельних прямих BD і СЕ та січній АЕ.
4. $\angle 4=\angle 1$.	4. BD — бісектриса.
5. $\angle 3=\angle 2$. ΔCBE – рівнобедрений (ВС=ВЕ).	5. $\angle 4=\angle 1$.
6.$\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BE}$.	6. Теоремою про пропорційні відрізки (паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають від його сторін пропорційні відрізки).
7. $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$.	7. ВЕ = ВС.

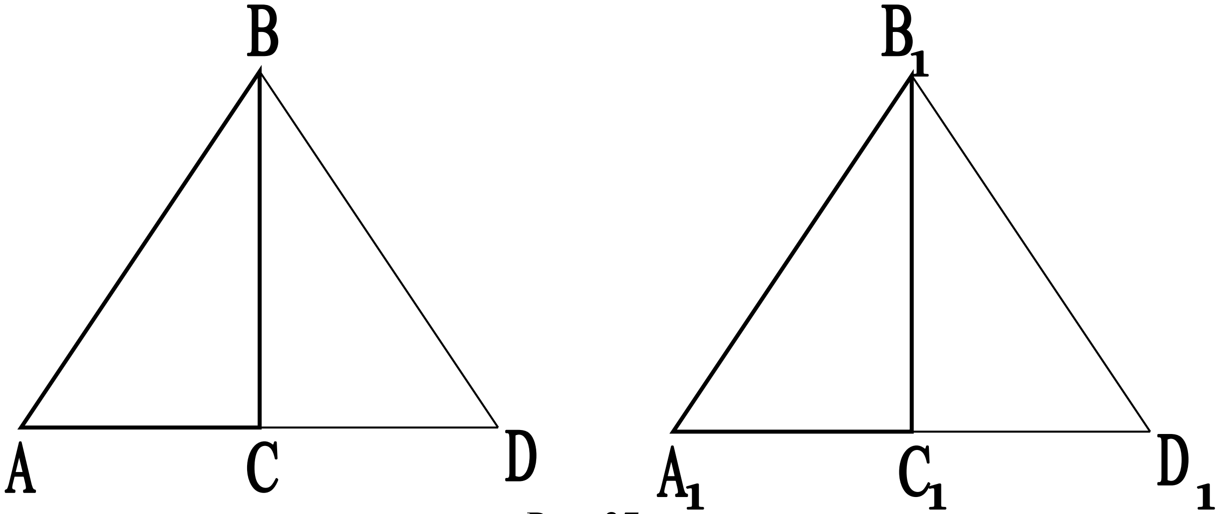


Рис. 37.

Приклад 49. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = C_1 = 90°$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 37).

Доведення подамо у вигляді таблиці, в якій потрібно заповнити ліву колонку, користуючись записами з правої колонки і вона може виглядати наступним чином:

Етапи (кроки) доведення	Аргументація
1. Крок 1 - ?	1.На продовжені сторони AC можна відкласти відрізок CD.
2. Крок 2 - ?	2.Рівні за першою ознакою рівності трикутників. У них кути при вершині C прямі, а отже, і рівні, сторона BC спільна, а сторони AC і CD рівні за побудовою.
3. Крок 3 - ?	3. Випливає з $\Delta ABC = \Delta DBC$.
4. Крок 4 - ?	4. На продовжені сторони A_1C_1 можна відкласти відрізок C_1D_1.
5. Крок 5 - ?	5. Рівні за першою ознакою рівності трикутників. У них кути при вершині C_1 прямі, а отже, і рівні, сторона B_1C_1 спільна, а сторони A_1C_1 і C_1D_1 рівні за побудовою.
6. Крок 6 - ?	6. Рівні за третьою ознакою рівності трикутників. У них $AB = A_1B_1$ за умовою, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$, бо $AC = A_1C_1$.
7. Крок 7 - ?	7. Випливає з $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$.
	8.За першою ознакою рівності трикутників. У них $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ за умовою, а $\angle A = \angle A_1$.

Відповідно заповнена таблиця доведення буде виглядати так:

Етапи (кроки) доведення	Аргументація
1. AC=CD.	1.На продовжені сторони AC можна відкласти відрізок CD.
2. $\Delta ABC=\Delta DBC$.	2.Рівні за першою ознакою рівності трикутників. У них кути при вершині C прямі, а отже, і рівні, сторона BC спільна, а сторони AC і CD рівні за побудовою.
3. AB=DB.	3. Випливає з $\Delta ABC=\Delta DBC$.
4. $C_1D_1=A_1C_1$.	4. На продовжені сторони A_1C_1 можна відкласти відрізок C_1D_1.
5. $\Delta A_1B_1C_1=\Delta D_1B_1C_1$.	5. Рівні за першою ознакою рівності трикутників. У них кути при вершині C_1 прямі, а отже, і рівні, сторона B_1C_1 спільна, а сторони A_1C_1 і C_1D_1 рівні за побудовою.
6. $\Delta ABD= \Delta A_1B_1D_1$.	6. Рівні за третьою ознакою рівності трикутників. У них $AB=A_1B_1$ за умовою, $BD=B_1D_1$, $AD=A_1D_1$, бо $AC=A_1C_1$.
7. $\angle A=\angle A_1$.	7. Випливає з $\Delta ABD= \Delta A_1B_1D_1$.
8. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.	8.За першою ознакою рівності трикутників. У них $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ за умовою, а $\angle A=\angle A_1$.

3. 6. Математичні софізми.

З античних часів математику вважають наукою точною, що не терпить помилок, вимагає ясності понять та тверджень, нічого не сприймає без доведень, проголошує красу та велич логічних міркувань. За словами Ж.Фабра «математика - дивовижна вчителька в мистецтві спрямовувати думки, наводити порядок там, де вони не впорядковані, викорчовувати безглуздя, фільтрувати брудне і наводити ясність». Помилки в міркуваннях, найчастіше виникають через порушення законів формальної логіки, основи якої заклав визначний давньогрецький філософ Арістотель (праці «Категорії», «Про тлумачення», «Перша аналітика», «Друга аналітика», «Топіка»). Помилки, пов'язані з порушенням законів логіки та законів математики бувають двох типів: паралогізми і софізми. **Паралогізми** (з грецької - неправильне) - це хибне міркування, логічна помилка, допущена не навмисне, а через втрату послідовності в міркуваннях чи порушення одного з законів логіки. Паралогізми в математиці неприпустимі, бо де є місце помилці, там вже немає місця математиці. Зовсім інша ситуація з софізмами. **Софізми** (з грецької -хитрий викрутас, вигадка, хитрий умовивід) - це міркування навмисне побудовані так, що вони містять логічну помилку і, звичайно, приводять до хибних висновків. Засновником школи софістів був давньогрецький філософ Протогор із Адбери (бл. 480 - бл.410 до р. х.). Введення софізмів сприяло вдосконавленню ораторського мистецтва, підвищенню логічної культури мислення. Щоправда, пізніше в деяких філософів-софістів мистецтво софістики перетворилося на суперечку заради суперечки. Різні приклади софізмів наводить у своїх діалогах Платон (427 - 347 до р. х.). Евклід (1V ст. До р. х.) створив дивовижний збірник «Псевдарій», який на жаль не дійшов до нас. Це був перший збірник саме математичних софізмів та парадоксів. На сьогодні софізми, і зокрема математичні, навчають мислити, доводити й спростовувати, чітко висловлювати свої думки; вони здивовують та захоплюють, дають поштовх для творчості, пошуку нового, відкриттів. Найчастіше софізми та паралогізми виникають, коли міркування порушують закони логіки: закон тотожності, закон суперечності, закон виключного третього, закон достатньої підстави. [19]

Закон тотожності вимагає, щоб одна і та сама думка, яка наводиться в даному умовиводі, при повторенні мала однаковий зміст. При порушенні цього закону виникають помилки трьох видів: еквівокація, логомахія і амфіболія.

Суть помилки еквівокації (з латинської - такі, що звучать однаково) в тому, що в міркуваннях використовують багатозначне ім'я предмета, то в одному, то в іншому значенні, вважаючи це ім'я однозначним. Наприклад: «Кожен метал є елементом. Латунь - метал. Отже, латунь є елементом». Неправильний висновок зумовлений помилкою еквівокації. У першому реченні слово «метал» використано у значенні хімічного елемента, в другому йдеться про сплав металів - речовину, яка має фізичні властивості металу: ковкість, електропроводність, металевий блиск тощо. У математиці помилка еквівокації майже неможлива і завжди очевидна, оскільки вимога відсутності омонімії не допускає двозначності понять,використаних у математичних міркуваннях.

Іноді під час дискусії один з її учасників використовує деяке багатозначне ім'я в іншому значенні ніж його опонент. Суперечка може бути нескінченною. Такий диспут називається логомахією (з грецької - словесна суперечка). Логомахією називається також диспут,який не дає нічого суттєво важливого.

Амфіболія (з грецької - двозначність) виникає, коли використовують речення, яке можна тлумачити по-різному. Наприклад, відома фраза «Страчувати не можна помилувати» допускає два протележні тулмачення.

Закон суперечності (латинська назва - Lex contradictionis) полягає в тому, що не можуть бути одночасно істиними два протележні висловлювання про один і той самий об'єкт, взятий в один і той самий час і в одному й тому самому розумінні. Закон суперечності пов'язаний з так званими контрарними (з латинської - протилежний) протилежностями. Це вид протилежностей, коли зіставляється загальностведжувальне і загально-заперечувальне висловлювання: «Всі ромби - опуклі чотирикутники», «Жоден ромб не є опуклим чотирикутником». Цікаво, що обидві контрарні протилежності можуть бути хибними: «Всі прості числа непарні», «Всі прості числа парні», тобто існує третя можливість – «Існує єдине парне просте число». Оперуючи з контрарними протилежностями, потрібно дотримуватися правил: 1) з істинності одного з контрарних висловлювань випливає хибність іншого; 2) з хибності одного з контрарних висловлювань не можна встановити істинність контрарного щодо нього висловлювання (воно може бути як істинним, так і хибним). У цьому фундаментальне значення закону суперечності для людського мислення - з хибності випливає і істина , і хибність.

Закон виключеного третього (латинська назва - Lex exclusi tertii sive medii inter duo contradictoria) стверджує, що з двох суперечливих висловлювань, де розглядається один і той самий об'єкт в один і той самий час, одне обов'язково істинне. Цей закон поширюється на так звані контрадикторні (з латинської - суперечливий) протилежності. Це вид протилежностей, коли зіставляються: загально стверджувальне і частинно заперечувальне висловлювання («Всі парні числа складені», «Деякі парні числа не є складеними») або загально заперечувальне і частинно стверджувальне («Навколо будь-якого неправильного багатокутника не можна описати коло», «Навколо деяких неправильних багатокутників можна описати коло»). Одне з контрадикторних висловлювань обов'язково істинне, інше - неодмінно хибне, третього бути не може. Цей закон відіграє в математиці дуже важливу роль. Він лежить в основі опосередкованих доведень.

Закон достатньої підстави вимагає, щоб кожна істинна думка була обгрунтована іншими думками, істинність яких доведено. За законом достатньої підстави наші висловлювання повинні бути внутрішньо пов'язаними, випливати одне з одного (наступне з попереднього), обгрунтовувати одне одного.

Отже, помилки йдуть від порушень законів логіки, або інших математичних законів. Паралогізми чекають на неуважних або недостатньо натренованих у складному мистецтві міркувань. Софізми - навмисне розставлені логічні пастки. Але бувають й інші, тривожніші, справді катастрофічні ситуації в пізнавальній діяльності людини. Іноді правильні формально-логічні міркування приводять до результатів, які не узгоджуються з загальноприйнятою думкою, здаються безглуздими. Це парадокси (з грецької - несподіваний, дивовижний). Давньогрецький філософ Діодор Кронос, не розв'язавши однієї з найдавніших логічних загадок - парадоксу Евбуліда, помер від розпачу, а інший філософ Філет Косський, зазнавши такої самої невдачі, кінчив життя самогубством. Ще складнішими були парадокси (апорії) Зенона Елейського. Парадокси виникали і виникають в усіх галузях людської діяльності. Вивчення парадоксів, спроби їх розгадати й знешкодити мають не тільки теоритичний інтерес. [19]

Якщо в логіці й математиці можливі парадокси, то де гарантія, що в складну програму ЕОМ, яка керує, наприклад деякими життєво важливими процесами, не прослизне один з них? Тоді такий парадокс може обернутися трагічними подіями в реальності.

Що ж до софізмів, то вони безпечні, захоплюючі, виконують навчальну та розважальну функції.

Приклад 50. Доведіть, що будь-яке коло має два центри (рис. 38).

Доведення

Нехай прямі BD та AD перетинаються в точці D. Побудуємо $CB \perp BD$, $CA \perp AD$ і коло, яке проходить через точки A, B, C й перетинає BD та AD відповідно в точках K і M. Тоді $\angle KBC = \angle MAC = 90°$. Звідси випливає, що ці кути спираються на діаметри KC і MC одного і того самого кола. Середини відрізків KC і CM - точки O_1 і O_2 є двома різними центрами одного і того самого кола.

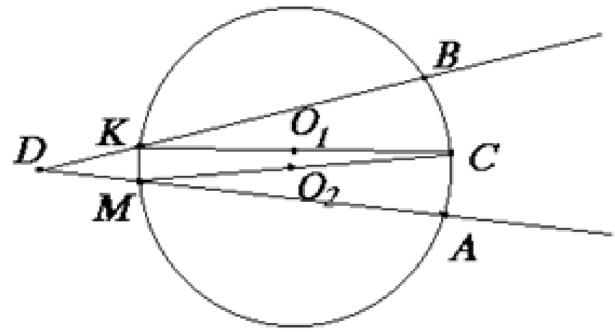


Рис. 38.

Приклад 51. Доведіть, що частина відрізка прямої дорівнює всьому відрізку (рис. 39).

Доведення

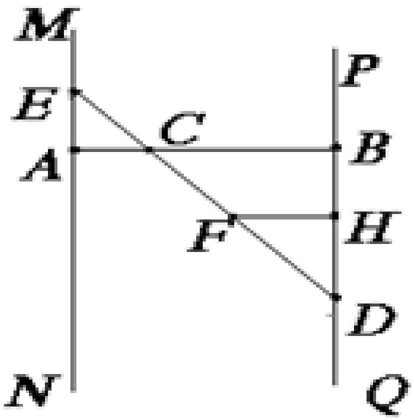


Рис. 39.

Частина відрізка прямої дорівнює всьому відрізку.

Перетнемо довільно взяту пряму в точках A і B прямими MN і PQ, перпендикулярними цій прямій. Проведемо пряму ED, яка перетинає пряму MN у точці E, AB в C і PQ в D. Трикутник CBE подібний трикутнику AEC, звідки

BD : AE= CB : AC; BD : AE = (AB - AC) : AC. (1)

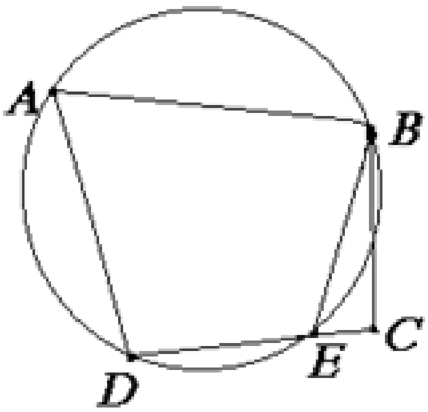
Побудуємо пряму FH || AB, тоді з подібності трикутників CBD та FHD маємо: BD : HD = BC : FH або BD : HD = (AB - CA) : FH. (2)

Із співвідношень (1) і (2) знаходимо BD:

BD = AE (AB - AC) / AC = HD (AB - AC) / FH, або

AF * FH * AB - AE * FH * AC = AC * HD * AB - AC2 * HD. (3) Додамо до обох частин рівності (3) різницю AE * FH * AC - DH * AB * AC, зведемо подібні члени і винесемо за дужки спільний множник AB (AE * FH - AC * HD), звідки AB = AC.

Приклад 52. Зовнішній кут трикутника дорівнює внутрішньому, не суміжному з ним (рис. 40).



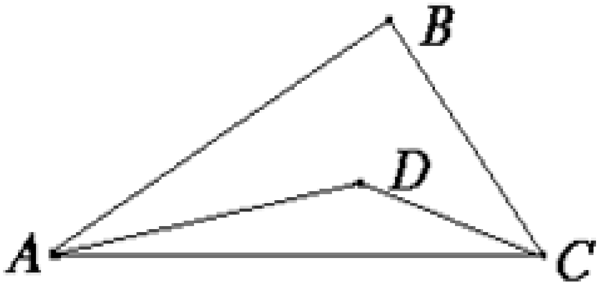
Доведення

Нехай у чотирикутнику ABCD. $\angle A + \angle C$ = 180°. Оскільки будь-які три точки, які не лежать на одній прямій повністю визначають положення кола, то можна стверджувати, що через точки A, B і C проходить єдине коло. Точку перетину його із стороною DC позначимо через E.

Рис. 40.

Побудувавши відрізок BE, маємо чотирикутник ABED, вписаний в коло, причому ∠A + ∠E = ∠B + ∠D = 180°. Оскільки ∠A + ∠C = 180° і ∠A + ∠BED = 180°, то ∠BED = ∠C.

Приклад 53. Опукла обвідна ламана коротша за опуклу ламану, яку вона охоплює (рис. 41).



Доведення

Відрізки AB і BC обвідной візьмемо довільно, а відрізки AD і DC - пропорційні до відрізків і обвідної: AD= k AB, DC = k BC , де k - будь-який додатній дріб.

Рис. 41.

З останніх рівностей маємо:

-AD = k (-AB) і -DC = k (-BC),

-AD + (-DC) = k (-AB + (-BC)),

(-AD + (-DC)) : (-AB + (-BC)) = k , але k = AD : AB, тому

((-AD)+ (-DC)) : (-AB) + (-BC))=AD : AB.(1)

В останній пропорцій попередній член у правій частині менший за наступний (AD < AB), а тому й попередній її член в лівій частині теж має бути меншим за свій наступний: ((-AD) + (-DC)) < ((-AB) + (-BC)) (2) звідки AB + BC < AD + DC.

Приклад 54. Квадрат будь-якої сторони у будь-якому трикутнику дорівнює сумі квадратів двох інших сторін цього трикутника (рис. 42).

Доведення

Візьмемо довільний трикутник ABC і побудуємо ще прямокутний трикутник BCD. Тоді $AC^2 = AD^2 + CD^2$ (1) і $BC^2 = CD^2 + BD^2$, $CD^2 = BC^2 - BD^2$ (2). Підставимо значення з рівності (2) в рівність (1): $AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2$ (3), або $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ (4).

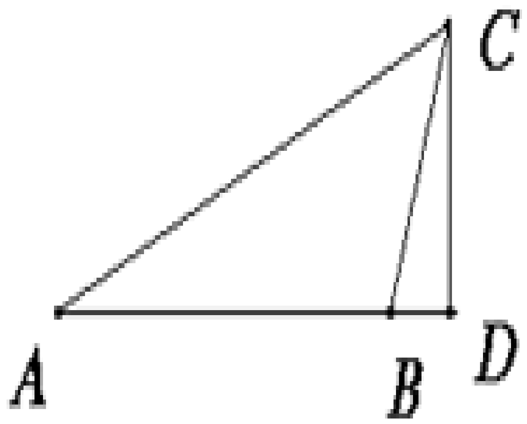


Рис. 42.

Але AD = AD + BD, тому $AD^2 - BD^2 = AB^2$. Підставивши в рівність (4) замість різниці $AD^2 - BD^2$ значення AB^2, яке їй дорівнює, матимемо, $AC^2 - BC^2 = AB^2$ або $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Числені геометричні софізми засновано на принципі прихованого перерозподілу площ прямолінійних плоских фігур.

Приклад 55. Розріжте зображену фігуру по діагоналі (рис. 43) і зсуньте нижню частину прямокутника вздовж розрізу вниз і вліво на відстань між сусідніми лініями. А тепер порахуйте лінії. Виявляється одна з них зникла!

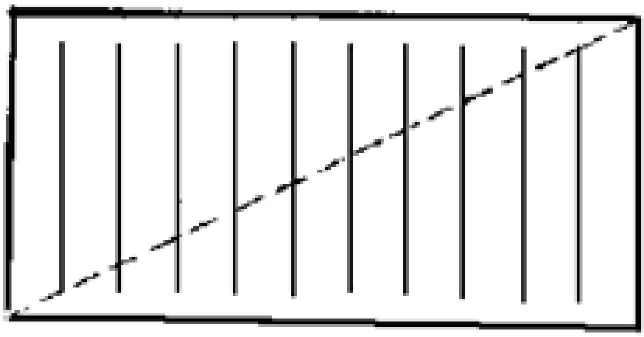


Рис. 43.

Відповіді і розв'язання.

Приклад 50. Неправильна побудова. Точка С не належить колу.

Приклад 51. У ланцюгу правильних висловлень допущено одну помилку зумовлену замаскованим виконанням неможливої дії - ділення на 0. Із пропорції AE * AC = DH * FH (для сторін подібних трикутників ACE і HFD випливає, що AE * FH - AC * HD = 0).

Приклад 52. Оскільки в чотирикутнику ABCD за умовою $\angle A + \angle C = =180^0$ і вершини A, B і D лежать на колі, то і четверта вершина C лежить на тому ж колі. Отже точки E і C мають збігатися трикутник BCE не може існувати. Він вироджується в сторону чотирикутника ABCD.

Приклад 53. Помилка поширення властивості певного виду на весь рід допущена при переході від рівності (1) до рівності (2). Подане твердження справджується тільки на множині цілих додатних чисел і не є істинним на числових множинах, які містять від'ємні числа, а саме цей випадок маємо при переході від (1) до (2).

Приклад 54. Допущено логічну помилку «не випливає», яка полягає в порушенні закону достатньої підстави - в процесі доведення тези висуваються аргументи, самі по собі правильні, але такі, що з них не випливає висловлювання, істинність якого потрібно довести. З рівності AD = AB + BD випливає, що AB= = AD - BD, але зовсім не випливає, що $AB^2 = AD^2 - BD^2$. Мало б бути: $AB^2 = AD^2 - 2AD*BD + BD^2$.

Приклад 55. Отримані 9 ліній стали трохи довшими, вони ніби увібрали в себе ту лінію, що зникла.

3. 7. Роль ІКТ в доведеннях.

3. 7. 1. Теорема про чотири кольори та комп'ютеризація математики.

Може здатися дивним, але довгий час комп'ютери практично не використовувались як інструмент дослідницької діяльності в галузі так званої чистої математики. «Папір і ручка – ось і все, що мені потрібно для розв'язування складних задач, доведення нових теорем», – приблизно таку фразу можна було почути з уст математика-теоретика. (Звичайно, не йдеться про оформлення математичних текстів – тут комп'ютер з принтером – річ просто незамінна). Зараз ситуація інша: з розвитком відповідного програмного забезпечення все частіше складні, довгі й громіздкі операції з алгебраїчними виразами та логічними формулами, що супроводжують суто математичні доведення, доручають виконувати комп'ютерам. І ось уже в математичному лексиконі звичним стало словосполучення «комп'ютеризоване доведення» або «машинне доведення» (computer-aided proof).

Коли мова заходить про такі доведення, мимоволі спадає на пам'ять історія зі знаменитою теоремою (задачею) про чотири кольори. Ця теорема була сформульована ще в середині XIX століття. Вона полягала в тому, що чотирьох кольорів досить, аби розфарбувати географічну мапу з довільною кількістю країн так, щоб будь-які дві сусідні країни були позначені різними кольорами? Зовнішня простота даного твердження виявилася оманливою і остаточного його обґрунтування довелося чекати понад 120 років. Навіть більш слабкий результат про те, що для розфарбування будь-якої плоскої мапи досить п'яти кольорів, було встановлено лише у 1890 році.

У книзі К. Рід «Гільберт» розповідається забавна історія про спробу видатного німецького математика Германа Мінковського (1864–1909) довести теорему про чотири кольори під час власної лекції з топології в Геттінгенському університеті.

Він говорив: «Ця теорема досі не була доведена лишень тому, що нею займалися тільки математики третього сорту, – заявив Мінковський з рідкісною для нього зарозумілістю. – Я впевнений у тому, що мені вдасться її довести». Після чого почав доводити відразу теорему. Минула година, а доведення не було закінчене. Довелося його відкласти до наступного заняття. Так тривало кілька тижнів. Нарешті, одного дощового ранку Мінковський увійшов до лекційної зали, супроводжуваний гуркотами грому. Він повернувся до аудиторії і з серйозним виразом на круглому доброму обличчі оголосив: «Небеса розгнівані моєю зухвалістю. Моє доведення теореми про чотири кольори також неправильне».

Не можна однозначно стверджувати, що зазначена теорема сама по собі була дуже важливою. Однак численні спроби впоратися з нею не минули даром. Особливо позитивні наслідки вони мали для розвитку такого розділу математики, як теорія графів. Нарешті, у 1976 році питання про достатність чотирьох кольорів дістало остаточну позитивну відповідь. Найбільш трудомістка частина відповідних обґрунтувань була пророблена комп'ютером. Його було використано для перевірки 1432 частинних випадків. Машина з честю виконала покладене на неї завдання «усього» за 1000 годин. Реакція на повідомлення про те, що проблема чотирьох кольорів перестала існувати після «брутального» втручання комп'ютера, була різною – від захоплення до скепсису. Багатьох не полишало відчуття, що таке обґрунтування не є доведенням у повному розумінні цього слова.

І сьогодні з уст багатьох визнаних математичних авторитетів можна почути заяви щодо несприйняття комп'ютеризованих доведень. Наприклад, Ж. П. Серр вважає, що на такі доведення цілком покладатися не можна. Особливо коли вони претендують на вичерпне розв'язання серйозної математичної задачі. Самому Серру вже довелося виправляти неточність одного претензійного результату з теорії груп, одержаного за допомогою комп'ютера. Помилка сталася тому, що частину відповідних комп'ютерних маніпуляцій було виконано в Японії, частину – в Німеччині, а про необхідність виконання ще однієї частини просто забули. Треба було бути спеціалістом такого рівня як Серр, щоб інтуїтивно відчути помилку і «вручну» доповнити пред'явлений авторами комп'ютеризованого доведення список підгруп деяких дискретних груп.

Згадаймо, як свого часу поява кишенькових калькуляторів призвела до втрати значною частиною учнів навичок усної лічби. Наслідки ж непродуманої політики в галузі комп'ютеризації математики можуть бути значно серйознішими. Наприклад, уже зараз існує програмне забезпечення, яке дозволяє повністю комп'ютеризувати розв'язання практично всіх типових прикладів і задач зі шкільних та університетських задачників з математики. Правдоподібно, що невдовзі відповідні електронні суперрозв'язники стануть загальнодоступними. Їхній «дружній» інтерфейс потурбується про те, щоб той, хто розв'язує задачу, витратив мінімум інтелектуальних зусиль для досягнення бажаного результату. При цьому результатом буде не просто остаточна відповідь, а належним чином оформлене розв'язання задачі чи прикладу з усіма проміжними викладками. Мрія двійочника! Така комп'ютеризація справді може відучити думати, перетворивши учня чи студента у придаток машини, функції якого зводяться до натискання потрібних клавіш.

Про ці небезпечні тенденції з тривогою пише у своїй книзі «Что такоє математика?» академік Арнольд: «На недавньому засіданні Виконавчого комітету Міжнародного математичного союзу в Парижі колеги довго мене намагалися переконати, нібито художники повинні змиритися з неминучою перемогою фотографії над живописом, а чинити опір цим процесам, як це намагаюсь робити я, мовляв, безглуздо.

В математиці їхній проект полягає в тому, щоб за кілька років повністю заборонити в усьому світі будь-яке некомп'ютеризоване математичне судження. Усі математичні публікації минулого пропонується зібрати (заплативши багато мільйонів доларів) у єдине комп'ютерне видання. Створення кожного наступного математичного тексту стане доступним найбезмозкішим «вузьким спеціалістам», які будуть комп'ютерним шляхом компілювати «нові досягнення», «з'єднуючи окремі рядки або сторінки старих публікацій...».

То чи потрібна комп'ютеризація математики? Відповідь однозначна: так, потрібна, хоча й дещо інша, ніж та, про яку йшлося кількома рядками вище.

Сучасний учень чи студент уже не уявляє свого життя без комп'ютера. Тому саме комп'ютерні технології можуть і повинні попрацювати на популяризацію математики та збільшення числа її прихильників. При відповідному застосуванні цих технологій багатовікові надбання математичної думки стануть набагато доступнішими і зрозумілішими. Уже не за горами той час, коли широкого розповсюдження набудуть інтерактивні комп'ютерні підручники нового покоління. Їх завдання – за рахунок ефективного використання пакетів символьних обчислень та мультимедійних засобів візуалізації зробити процес вивчення математики не лише більш цікавим й продуктивним, але й максимально спрямованим на розвиток інтуїції та творчих здібностей особи, а заразом і підвищення рівня її математичної культури.

Комп'ютеризація, безперечно, відкриває нові можливості не лише для математичної освіти, але й для математичної творчості. І машинні доведення, про які йшлося вище, – це далеко не все, для чого можуть знадобитися математикам комп'ютерні технології в їх науковому пошуку. Комп'ютер, наприклад, зарекомендував себе як потужний каталізатор математичних відкриттів. Яким чином?

Справа в тім, що експеримент в математиці відіграє не меншу роль, ніж у інших природничих науках. Це лише на перший погляд здається нібито математичні результати одержуються виключно внаслідок дедуктивних міркувань. Таке враження часто виникає через традиції написання математичних праць, продиктовані вимогами строгості: спочатку формулюються твердження (теореми, леми), а потім іде ланцюжок умовиводів, який обґрунтовує їх правильність. А те, як автор додумався до цих тверджень, зазвичай залишається за кадром. Звичайно, не існує універсальних рецептів, які б гарантували успіх у науковому пошуку, але не зайвим буде прислухатись до того, що з цього приводу казав великий Карл Гаусс. Він стверджував, що його власний шлях пізнання математичної істини завжди пролягав через систематичне експериментування. Історія багатьох математичних відкриттів свідчить, що їм передували своєрідні «досліди» – детальний розгляд характерних частинних випадків. Виявлені в результаті такого розгляду закономірності часто і лягали в основу математичних відкриттів. Так от, саме комп’ютер виявився надзвичайно ефективним інструментом, як для аналізу частинних випадків, так і для виявлення закономірностей.

Яскравим прикладом на підтвердження цих слів є відкриття химерного (дивного) атрактора (strange attractor). Зараз про цей об’єкт багато написано і в наукових, і в популярних виданнях. Американський учений Е. Лоренц, займаючись ще в 1960-х роках математичним моделюванням гідродинамічних процесів, вивів систему трьох диференціальних рівнянь відносно трьох невідомих функцій $x(t), y(t), z(t)$ однієї змінної t (яка трактується як час). Ця система залежала від трьох параметрів. Аналітично розв’язати її було неможливо. Тому Лоренц, надаючи різних значень цим параметрам, розв’язував її чисельно на ЕОМ. Знайшовши таким чином наближений розв’язок на певному досить великому відрізку часу I, можна побудувати в тривимірному просторі геометричне місце точок – криву, задану рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t),$ t належить I. Така крива називається траєкторією. Система диференціальних рівнянь, про яку йдеться, має безліч траєкторій, оскільки в кожній точці простору починається (при t=0) деяка траєкторія. Лоренц виявив, що при певних значеннях параметрів траєкторії досліджуваної системи мають дуже своєрідний вигляд, який раніше йому ніколи не доводилось бачити. Їх поведінку інакше як хаотичною й не можна було назвати. Подальший математичний аналіз цього випадку показав, що траєкторії з часом притягується до дуже химерної, «дірявої» наче губка множини. Якщо ж взяти дві близькі точки на цій множині, то траєкторії, що з них стартують в початковий момент, з часом швидко розбігаються одна від одної, тобто система дуже чутливо реагує на зміну початкових значень. Множини з описаними вище властивостями стали називати химерними атракторами (від англ. attract – притягувати). Передбачити поведінку систем з химерними атракторами на великих проміжках часу, через хаотичну поведінку траєкторій, дуже важко. Однак і тут можна виявити (не без допомоги комп’ютера) певні цікаві закономірності. Їх вивчення привело до створення нового наукового напрямку – теорії хаосу.

Дуже корисним виявився комп’ютер і при дослідженні ще одного типу складних «мереживних» утворень – фракталів. Ці множини мають певні властивості самомодібності – їх можна розщепити на частини так, що кожна частина стає подібною (в деякому узагальненому сенсі) цілій множині. Мабуть, найбільш вивченими є фрактали, що одержуються шляхом нескінченного числа ітерацій (послідовних застосувань) поліноміальних відображень комплексної площини в себе, таких, наприклад, як $z > z^2 + c$, де с – деяке комплексне число. В частинних випадках утворюються дуже красиві фігури, схожі то на сніжинки, то на візерунки, які мороз малює на вікнах. Ці фігури приховують в собі глибокі математичні структури, чимало з яких було виявлено спочатку внаслідок комп’ютерних експериментів, а вже потім строго математично досліджено.

3 . 7. 2. Методика застосування пакету GRAN-2D.

Найбільш придатними для підтримки вивчення курсу математики в середніх навчальних закладах є комплект програм *Gran* (*Gran1*, *Gran-2D*, *Gran-3D*) і *DERIVE*. Названі програмні засоби прості у використанні, оснащені досить зручним інтерфейсом. Від користувача не вимагається значний обсяг спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, цілком доступних для учнів середніх класів.

При цьому вчителю не нав'язується ніяка методика подання навчального матеріалу, закріплення і контролю знань, конкретний зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання, співвідношення між самостійною роботою учнів і роботою разом із вчителем, між індивідуальними і колективними формами роботи та ін. Усе це вчитель повинен визначити сам з врахуванням своїх власних позицій і уподобань, специфіки умов, в яких перебігає навчальний процес, індивідуальних особливостей окремих учнів і класного колективу.

Інтерфейс програми GRAN-2D

Програма *GRAN-2D* призначена для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині. Після активізації ППЗ *GRAN-2D* на екрані з'явиться головне вікно програми. Зверху під заголовком головного вікна знаходиться *головне меню* – перелік послуг, до яких можна звернутися в процесі роботи

Для активізації деяких послуг можна скористатись "кнопками" швидкого виклику послуг на *панелі інструментів*, що розміщена під *головним меню* програми. «Кнопки» оснащено системою оперативної підказки, тому під час знаходження вказівника мишки над певною «кнопкою» на екрані з'являються короткі відомості про призначення даної «кнопки».

Під панеллю інструментів розміщено *підказку* – поле, де з'являються короткі інструкції про те, яку дію необхідно виконати на поточному етапі роботи. У цьому полі з'являтимуться підказки при створенні об'єктів, при обчисленні відстаней та кутів, при створенні та встановленні макроконструкцій тощо.

Поле зображення - область головного вікна програми, де зображаються створені об'єкти та осі координат.

Якщо підвести вказівник мишки до зображення будь-якого об'єкта у *полі зображення* та двічі натиснути ліву клавішу мишки, то вказівник *переліку об'єктів* буде встановлено у положення, що відповідає даному об'єкту, та з'явиться вікно *Конструювання об'єкта*, у якому можна змінити деякі характеристики об'єкта.

При зміні розмірів головного вікна програми відповідно змінюється розмір *поля зображення*.

Перелік об'єктів – поле, що містить перелік назв усіх об'єктів, що були створені або завантажені у процесі роботи з програмою. На початку роботи з програмою вказане поле не містить жодної назви. Об'єкт, на назві якого знаходиться вказівник, вважається поточним.

Зліва від назви об'єктів за допомогою мишки можна поставити або зняти відмітку («галочку»). При цьому у *полі зображення* виводитимуться зображення лише тих об'єктів, перед назвою яких у переліку об'єктів стоїть відмітка. Зауважимо, що якщо звернутися до послуги *Зображення\Зображати сховані об'єкти*, то у *полі зображення* будуть виводитися зображення всіх об'єктів, незалежно до того, «відмічені» вони чи ні.

Якщо вказівник мишки знаходиться біля назви деякого об'єкта з переліку, то, двічі натиснувши ліву клавішу мишки, можна змінити деякі параметри цього об'єкта у вікні *Конструювання об'єкта*, що з'явиться .

Поле характеристик поточного об'єкта – частина головного вікна, де виводяться деякі параметри поточного об'єкта (довжина, радіус (кола), рівняння (прямої) тощо), а також відомості про об'єкти, з якими він зв'язаний

Якщо підвести вказівник мишки до зображення будь-якого об'єкта у *полі зображення* та здійснити подвійне натиснення лівої клавіші мишки, то вказівник *переліку об'єктів* буде встановлено у положення, що відповідає даному об'єкту. При цьому у *полі характеристик* з'являться відомості про цей об'єкт.

Перелік динамічних виразів – таблиця, що містить перелік назв заданих динамічних виразів та їх обчислені значення. Вираз, на назві якого знаходиться вказівник, вважається поточним.

Поле інформування – поле (внизу екрану), де виводяться координати точки, що відповідає поточному положенню вказівника мишки у *полі зображення*, а якщо вказівник мишки знаходиться над зображенням деякого об’єкта, то поряд з координатами виводиться назва цього об'єкта.

У *полі інформування* виводиться також коротка інформація про елементи інтерфейсу ППЗ *GRAN-2D*, над якими знаходиться вказівник мишки у наявний момент часу. [21]

Система координат

Для встановлення або вилучення зображення координатних осей або координатної сітки (у *полі зображення*) слід звернутися до послуги *Налагодження* та у вікні *Налагодження*, що з’явиться, за допомогою мишки встановити або зняти відмітку біля написів *Зображати координатні осі* та *Зображати координатну сітку*, після чого «натиснути» кнопку *Застосувати*.

Для переміщення початку системи координат відносно центра *поля зображення* необхідно натиснути клавішу *Ctrl* і ліву клавішу мишки, та утримуючи їх у натисненому стані, встановити вказівник мишки у нове положення. При цьому початок системи координат переміщуватиметься відповідно до положення вказівника мишки.

Для збільшення або зменшення масштабу об’єктів у *полі зображення* призначено послуги *Зображення\Розмір\Збільшити* та *Зображення\Розмір\Зменшити*. При зверненні до послуги *Зображення\Розмір\Оптимальний* буде встановлено масштаб, при якому зображення всіх створених об’єктів поміститься у *полі зображення*. Для встановлення масштабу «1 поділка ≈1 см» потрібно звернутися до послуги *Зображення\Розмір\Відповідно до вимірювальних одиниць*.

Щоб вказати бажаний тип координат, слід звернутися до послуги *Налагодження* і у вікні *Налагодження*, що з’явиться, за допомогою мишки встановити перемикач *Система координат* у одне з положень – *Декартові* або *Полярні,* після чого «натиснути» кнопку *Застосувати*. За замовчуванням встановлено тип координат *Декартові*.

При переміщенні у *полі зображення* вказівника мишки у *полі інформування* автоматично виводяться координати точки, що відповідає поточному положенню вказівника мишки відносно центра координат.

Іноді виникає необхідність фіксування шляху, який проходить деяка точка при переміщенні об'єктів, від яких залежить її положення, - наприклад, при розв'язуванні задач на встановлення геометричного місця точок.

Якщо звернутися до послуги *Зображення\ГМТ* та за відповідним запитом програми (що з'явиться у *полі підказки*) вказати на зображення деякої точки, то надалі при всіх переміщеннях вказаної точки на зображенні буде залишатися її слід. Щоб відмовитися від виведення зображення сліду вибраної точки, слід звернутися до послуги *Зображення\Припинити зображення ГМТ*. [20]

Геометричні об'єкти

ППЗ *GRAN*-2*D* дозволяє оперувати у площині моделями геометричних об'єктів шести базових типів: *Точка*, *Лінія*, *Ламана*, *Коло, Інтерполяційний поліном, Графік функції*. При цьому типи *Точка* та *Лінія* діляться на підтипи.

При створенні об'єктів усіх типів (крім типів *Вільна точка* та *Графік функції*) необхідно вказувати *опорні* об'єкти – тобто об'єкти, які визначають результуючий об'єкт.

Результуючий об'єкт буде автоматично розміщуватись відповідно до положення опорних об'єктів. Наприклад, при створенні об'єкта типу *Середня точка* необхідно вказати два опорні об'єкти типу *Точка*. Надалі при зміні положення будь-якої з опорних точок утворена точка типу *Середня точка* завжди залишатиметься точно посередині між вибраними опорними точками.

Об'єкти можна створювати двома способами: або шляхом введення їх характеристик у вікні *Конструювання об'єкта*, або з екрану, за допомогою мишки.

Для створення об’єктів шляхом введення їх характеристик призначено послуги пункту меню *Об’єкт\Створити*. При активізації будь-якої з послуг вказаного пункту меню з’являється вікно *Конструювання об’єкта* з вкладинкою, що відповідає типу обраного об’єкта. У вказаному вікні слід ввести параметри об’єкта, що створюється, та «натиснути» кнопку *Застосувати*. Після цього відповідний об’єкт буде створено, і його зображення з’явиться у *полі зображення*.

Опорні об’єкти задаються шляхом вказування назв заздалегідь створених об’єктів у відповідних полях вікна *Конструювання об’єкта*.

Об’єкти усіх типів (крім типу *Графік функції*) можна створювати графічно, вказуючи на опорні об’єкти у *полі зображення* за допомогою вказівника мишки.

Якщо для створення якогось об’єкта необхідно вказувати опорні об’єкти типу *Точка*, то можна вказувати як на зображення раніше створених об’єктів-точок, так і на вільне місце *поля зображення* – при цьому автоматично буде створено відповідний опорний об’єкт типу *Точка* з координатами, що відповідають поточному положенню вказівника мишки у *полі зображення.*

Під час створення об’єктів «з екрану» у *полі підказки* з’являються короткі інструкції про те, які дії необхідно виконати для створення об’єкта обраного типу.

При створенні об’єктів їм автоматично надається назва, що може складатися з двох частин: символьної та цифрової. Символьна частина відповідає назві базового типу об’єкта, а цифрова – його номеру в порядку створення (наприклад, *<точка1>*, *<ламана5>*, *<лінія44>*, *<коло15>* тощо).

Якщо у вікні *Налагодження* відмічено пункт *Мітити точки латинськими літерами,* то об’єктам, що належать до базового типу *Точка*, при створенні буде автоматично надаватися назва, що складається з однієї великої літери латинського алфавіту (*A, B, C, ..., Z*). Якщо всі латинські літери буде вичерпано (наприклад, якщо створено більше 26 об’єктів типу

Точка), то надалі новоутворені об’єкти будуть отримувати назву, подану за правилами, описаними в попередньому абзаці.

Для зміни параметрів деякого раніше створеного об’єкта необхідно встановити вказівник *переліку об’єктів* у положення, що відповідає назві потрібного об’єкта, та звернутися до послуги *Об’єкт\Змінити.* В результаті з’явиться вікно *Конструювання об’єкта* з параметрами поточного об’єкта, які можна змінити так само, як при створенні цього об’єкта.

Подвійне натиснення лівої клавіші мишки у випадку, коли вказівник мишки знаходиться на зображенні деякого об’єкта у *полі зображення* або на назві деякого об’єкта у переліці, також призведе до появи вікна *Конструювання об’єкта,* у якому можна змінити параметри цього об’єкта.

Для вилучення деякого об’єкту (або об’єктів) потрібно перш за все виділитити цей об’єкт (об’єкти) у *полі зображення*. Після цього слід звернутися до послуги *Об’єкт\Вилучити* (або натиснути клавішу *Del*).

Перетворення об’єктів

За допомогою ППЗ *GRAN*-2*D* можна здійснювати геометричні перетворення деяких об’єктів, а саме паралельне перенесення, поворот (відносно деякої точки) та деформацію об’єктів типу *Точка*, *Лінія*, *Ламана, Коло* та *Інтерполяційний поліном*. Для цього призначено послуги пункту головного меню *Об’єкт\Перетворення*.

Параметри перетворення можна задавати як через введення координат вектора перенесення чи кута повороту у відповідні поля, так і графічно «з екрану», користуючись мишкою.

У першому випадку для виконання деякого перетворення слід звернутися до послуги меню *Об’єкт\Перетворення\Параметри,* а в другому – до підпунктів меню *Об’єкт\Перетворення\З екрану – Паралельне перенесення* або *Поворот,* в залежності від того, який тип перетворення об’єктів необхідно здійснити.

При зверненні до послуги *Об’єкт\Перетворення\Параметри* з′являється вікно *Перетворення об’єктів* з вкладинками *Паралельне* *перенесення*, *Поворот* та *Деформація* .

Для виконання необхідного перетворення перш за все слід перейти на вкладинку з назвою потрібної операції, після чого у полі під написом *Застосувати операцію до об'єкта* потрібно вказати назву заздалегідь створеного об'єкта, перетворення якого необхідно здійснити.

Якщо встановити відмітку біля напису *Створити результуючий об'єкт*, то після виконання операції вихідний об'єкт залишиться без змін, а буде створено новий об'єкт – результат виконання операції стосовно вихідного об'єкта. Задавши всі параметри перетворення, слід натиснути кнопку *Виконати.*

Для задання «з екрану» параметрів перетворення об'єктів призначено послуги *Об'єкт\Перетворення\З екрану\Паралельне перенесення* та *Об'єкт\Перетворення\З екрану\Поворот*.

Для переміщення деякого об'єкта у нове положення необхідно підвести вказівник мишки до зображення цього об'єкта, натиснути ліву клавішу мишки та тримаючи її у натисненому стані, переміщувати вказівник у потрібному напрямі. При цьому «зафіксований» об'єкт буде переміщуватись разом із вказівником. Перемістивши таким чином об'єкт у потрібне положення, слід звільнити ліву клавішу мишки.

Макроконструкції

Макроконструкція – це сукупність об'єктів базових типів, що призначена для спрощення задання комбінацій об'єктів, які часто використовуються.

Макроконструкція складається з вихідних, проміжних та результуючих об'єктів. При створенні окремої макроконструкції необхідно вказати у *полі зображення* (за допомогою вказівника мишки) вихідні та результуючі об'єкти, а проміжні об'єкти (які необхідні для отримання результуючих об'єктів з вихідних) будуть вибрані з наявних на зображенні за програмою автоматично.

Для створення макроконструкції призначено послугу

Макроконструкція\Створити. Звернувшись до цієї послуги, слід послідовно вказати у *полі зображення* вихідні об'єкти. Після вказування останнього вихідного об'єкта необхідно знову звернутися до означеної послуги, після чого потрібно вказати результуючі об'єкти.

Вказавши останній результуючий об'єкт, потрібно знову активізувати послугу *Макроконструкція\Створити*, що (у разі коректного задання вихідних і результуючих об'єктів) призведе до появи вікна *Назва конструкції*, де у відповідне поле необхідно ввести назву створюваної макроконструкції.

Ввівши назву, слід «натиснути» кнопку *Продовжити*, після чого з'явиться стандартний запит збереження файлів системи *Windows*, у якому необхідно вказати ім'я файлу для збереження конструкції. Після «натиснення» кнопки *Зберегти* створення макроконструкції буде завершено.

У разі некоректного задання конструкції з'явиться повідомлення про помилку. Тобто якщо при створенні конструкції було вказано недостатньо вихідних об'єктів для однозначного створення результуючих об'єктів, то з'явиться повідомлення «*Не вистачає вихідних об'єктів»*.

У випадку, коли при створенні конструкції були вказані вихідні об'єкти, що ніяк не впливають на побудову результуючих об'єктів, з'явиться повідомлення «*Знайдено вихідні об'єкти, що не використовуються у конструкції. Продовжити роботу, нехтуючи зайвими об'єктами?*».

Якщо «натиснути» кнопку *Так*, то макроконструкцію буде створено без врахування зайвих вихідних об'єктів. «Натиснення» кнопки *Ні* призведе до скасування створення макроконструкції.

Для встановлення запам'ятованої раніше макроконструкції призначено послугу *Макроконструкція\Встановити*. При зверненні до вказаної послуги з'являється вікно *Встановлення макроконструкції* з переліком назв макроконструкцій, створених раніше. Причому у переліку з'являться назви лише тих макроконструкцій, що збережені у папці *Макроконструкція* у директорії програми. Щоб вилучити встановлену макроконструкцію з *поля* *зображення* та *переліку об'єктів*, потрібно просто вилучити об'єкти, що її складають. [12]

Обчислювальні можливості програми GRAN-2D

ППЗ *GRAN-2D* дозволяє обчислювати відстані між точками та величини кутів. Після вказування, які відстані або кути потрібно вимірювати, ці відстані або кути будуть переобчислюватись автоматично кожного разу при переміщенні об'єктів. [20]

Для обчислення відстані між двома точками слід звернутися до послуги *Обчислення\Відстань*, після чого за відповідними запитами програми (що з'являться у *полі підказки*) необхідно послідовно вказати на зображення двох точок. Відразу після вказування точок результати обчислення відстані виводяться у *полі зображення* між цими точками.

При зверненні до послуги *Обчислення\Кут* після вказування трьох точок буде автоматично обчислюватись кут між прямими, що проходять відповідно через першу і другу та другу і третю точки.Результати обчислень виводяться у *полі зображення* біля позначення кута (у вигляді дуги, що сполучає сторони кута).

Для обчислення значення виразу чи значення функції в точці слід звернутися до послуги *Обчислення\Значення виразу*. На вкладинці *Значення в точці* вікна *Обчислення*, слід вказати тип залежності за допомогою перемикача *Тип залежності*. Потім у верхнє поле необхідно ввести вираз, що визначає функцію, та у полях біля написів *x=, y=, z=* вказати координати точки. Після введення даних для виконання обчислення необхідно «натиснути» кнопку *Обчислити*, після чого результат буде виведено у поле *Результат обчислень*.

ППЗ *GRAN-2D* дозволяє вводити вирази, що можуть містити посилання на наявні об'єкти та обчислюються автоматично при зміні цих об'єктів. Так, наприклад, ввівши вираз, що обчислює площу деякого многокутника, надалі можна змінювати положення будь-якої з його вершин – при цьому автоматично буде обчислено нове значення площі. Такі вирази надалі будемо називати *динамічними.*

Назви динамічних виразів та їх значення виводяться у *переліку динамічних виразів*. У першому стовпчику переліку подаються назви динамічних виразів (задані при введенні цих виразів). У другому стовпчику виводяться значення динамічних виразів. У всіх інших стовпчиках виводяться зафіксовані значення динамічних виразів (якщо значення виразів фіксувалися).

Вираз, на назві якого знаходиться вказівник (прямокутник темного кольору), вважається *поточним*.

Для створення динамічного виразу слід звернутися до послуги *Обчислення\Динамічний вираз\Створити*, що призведе до появи вікна *Задання динамічного виразу*. У поле *Назва* потрібно ввести умовну назву виразу, а у поле *Вираз* – вираз, поданий за правилами введення виразів, після чого слід «натиснути» кнопку *Виконати*.

Поряд з відомими функціями (*sin*, *ln* тощо) при заданні динамічних виразів можна використовувати спеціальні функції:

Len(*точка1*,*точка2*) - обчислює відстань між точками.

Angle(*точка1*,*точка2,точка3*) - обчислює кут між відрізками, що мають спільну вершину *точка2*.

Area(*точка1*,*точка2,точка3,…*) - обчислює площу многокутника.

Щоб змінити назву або вираз, що описує поточний динамічний вираз, необхідно звернутися до послуги *Обчислення\Динамічний вираз\Змінити*. У вікні *Задання динамічного виразу*, що з’явиться, слід ввести нову назву або вираз, та «натиснути» кнопку *Виконати*.

Для вилучення поточного динамічного виразу слід звернутися до послуги *Обчислення\Динамічний вираз\Вилучити*.

Іноді виникає необхідність “запам’ятати” поточне значення динамічного виразу. При зверненні до послуги *Обчислення\Динамічний вираз\Зафіксувати поточне значення* у таблицю з переліком динамічних виразів справа від останнього стовпчика буде додано новий стовпчик, що міститиме поточні значення усіх динамічних виразів.

Для вилучення останнього зафіксованого значення слід звернутися до послуги *Обчислення\Динамічний вираз\Вилучити останнє зафіксоване значення*.

За допомогою ППЗ *GRAN-2D* можна обчислювати об’єми та площі поверхонь тіл, утворених обертанням навколо осі *Ох* або *Оу* у прямокутній декартовій системі координат деякої замкненої або об’єктів типу *Інтерполяційний поліном* та *Графік функції*.

Для обчислення площі поверхні та об’єму деякого тіла обертання слід побудувати у *полі зображення* об’єкт типу *Ламана, Інтерполяційний поліном* або *Графік функції*, після чого звернутися до послуги *Обчислення\Площа поверхні та об’єм тіла обертання.* У вікні *Тіло обертання,* що з’явиться, слід встановити (за допомогою мишки) перемикач *Твірна* у положення, що відповідає назві потрібної твірної. Далі за допомогою перемикача *Вісь обертання* необхідно обрати вісь обертання *Ох* або *Оу*. У *полі характеристик* відразу ж з’являться обчислені значення площі та об’єму.

Приклад 56. Доведіть, що кут, який опирається на діаметр кола, прямий.

Розв’язання. Активуємо ППЗ *GRAN-2D* і на екрані з’явиться головне вікно програми. Побудуємо вільну точку A з будь-якими координатами скориставшишь операціями *Об’єкт/Створити/Точка* або скористатися відповідним значком на панелі інструментів. Тоді створюємо коло з центром в точці A за допомогою операції *Об’єкт/Створити/Коло.* Наступний крок – створення діаметра. Для цього створимо точку J на колі (використаємо *Об’єкт/Створити/Точка*) та проведемо через ці точки пряму (*Об’єкт/Створити/Пряма, що проходить через дві задані точки*). Зафіксуємо отриманий діаметр, а саме, скористаємось *Об’єкт/Створити/Створення точки(точок)перетину об’єктів.*Отримали точку K, отже, JK – діаметр кола. Тепер вибиремо і зафіксуємо на колі вільну точку I (використаємо *Об'єкт/Створити/Точка*). Проведемо прямі IK та JI за допомогою *Об'єкт/Створити/Пряма, що проходить через дві задані точки.* Утворився кут JIK, який опирається на діамант кола. Далі потрібно виміряти його градусну міру. Для цього вибиремо *Обчислення/Кут*. На рисунку побачимо, що кут дорівнює 90° (рис. 44). Потім можна змінювати положення точки I на колі – при цьому автоматично буде обчислено нове значення кута і вона завжди буде 90°, що і потрібно було довести.

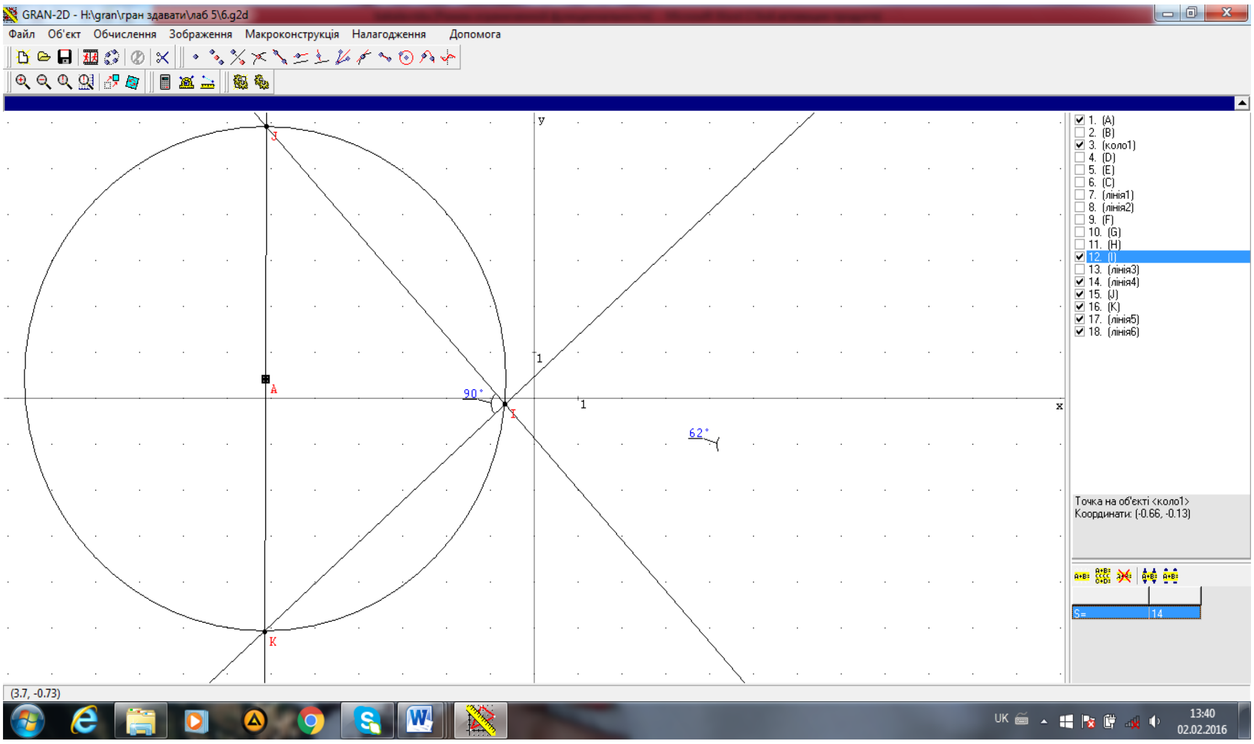


Рис. 44.

Приклад 57. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні.

Розв'язання. Активуємо ППЗ *GRAN-2D* і на екрані з'явиться головне вікно програми. Побудуємо вільні точки A і B з будь-якими координатами скориставшишь операціями *Об'єкт/Створити/Точка*. Далі з'єднуємо ці точки за допомогою прямої, що проходить через дві точки. Її створення аналогічне створенню точки, лише обирати потрібно пункт *Прямої, що проходить через дві точки* замість пункту *Точка*. Наступний крок – створення середньої точки - *Об'єкт/Створити/Середня точка* або скористатися відповідним значком на панелі інструментів. Утворилась точка C. Після цього побудуємо перпендикуляр до прямої AB і точці C (скористаємось *Об'єкт/Створити/Пряма перпендикулярна до заданої прямої*). На перпендикулярі зафіксуємо точку D аналогічно як створювали точки A і B. Сполучимо отриману точку прямими з точками A і B (операція *Об'єкт/Створити/Пряма, що проходить через дві точки*) і отримаємо рівнобедрений трикутник ABD.

Для того, щоб довести твердження нам потрібно побудувати бісектриси кутів DBA і DAB. Скористаємось *Об'єкт/Створити/Бісектриса кута.* Зафіксуємо точки перетину бісектрис з протилежними сторонами, отже, скористаємось *Об'єкт/Створити/Створення точки(точок)перетину об'єктів* і отримаємо відповідно точки E і F. Виміряємо довжини AF і BE за допомогою *Обчислення/Відстань.* Бачимо, що отримані результати – рівні (рис. 44). Потім можна змінювати положення точок A, B, D (вершин трикутника) – при цьому автоматично буде обчислено нове значення довжин бісектрис і вони завжди будуть рівні, що і потрібно було довести.

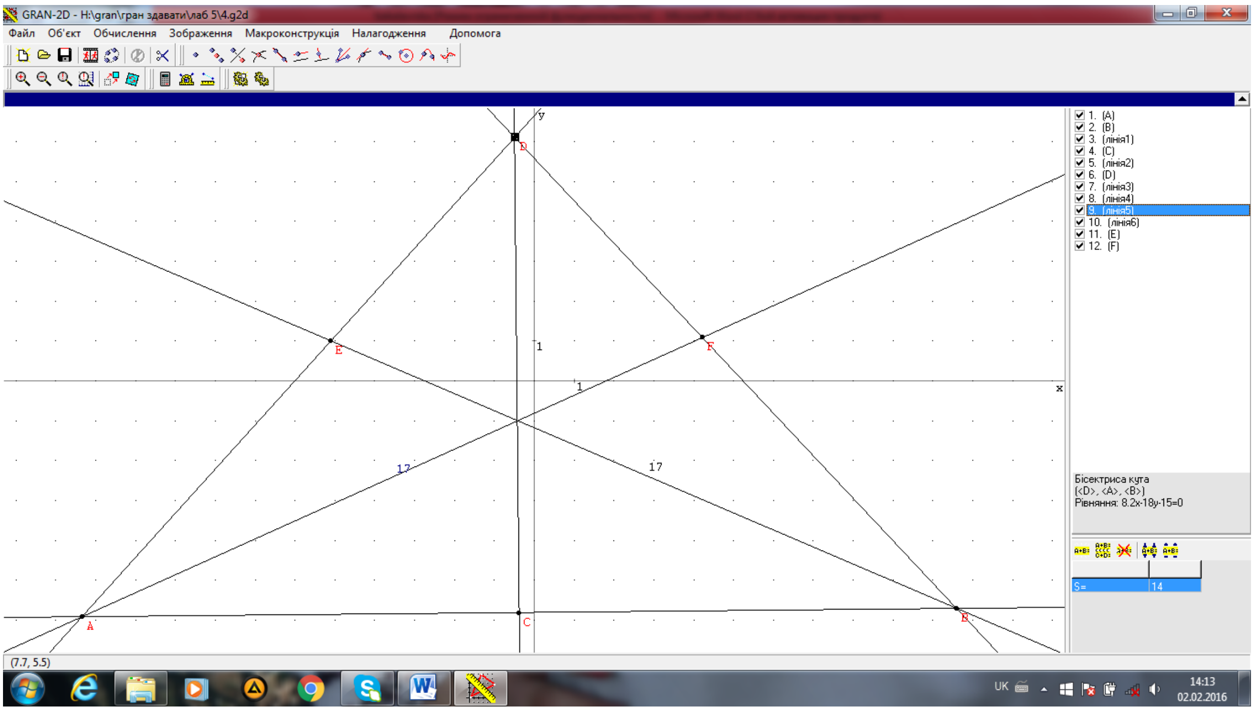


Рис. 45.

Приклад 58. Доведіть, що радіус описаного навколо трикутника кола рівний $R = \frac{abc}{4S}$, а радіус вписаного кола $r = \frac{2S}{a+b+c}$, де *a,b,c* – довжини сторітрикутника, а S - його площа.

Розв’язання. Перевіримо експериментально дані формули за допомогою ППЗ *GRAN-2D.* Активуємо даний продукт і на екрані з’явиться головне вікно програми. Побудуємо вільні точки A, B, C з будь-якими координатами (але не на одній прямі, щоб вони могли бути вершинами трикутника) скориставшишь операціями *Об’єкт/Створити/Точка*. Далі попарно з’єднуємо ці точки за допомогою *Прямої, що проходить через дві точки*. Отримали трикутник ABC.

Як відомо центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину перпендикулярів до сторін трикутника, проведених через середини цих сторін. Користуючись даною теоремою знайдемо центр кола, описаного навколо трикутника. Визначимо середини сторін AB і BC (*Об’єкт/Створити/Середня точка* або скористатися відповідним значком на панелі інструментів). Отримали відповідні точки D та E. Через точку D проводимо перпендикуляр до AB, а через точку E – перпендикуляр до BC. Користуємось при цьому операцією *Об’єкт/Створити/Пряма перпендикулярна до заданої прямої.* Зафіксуємо точку перетину перпендикулярів F (*Об’єкт/Створити/Створення точки(точок)перетину об’єктів*), яка і буде центром кола, описаного навколо трикутника. Тепер можемо побудувати коло з центром в точці F і, яке проходить через вершину, наприклад, B. Для цього скористаємось *Об’єкт/Створити/Створення кола.* З’єднаємо центр кола з верниною за допомогою *Ламаної* (*Об’єкт/Створити/Ламана)* і отримаємо радіус. Виміряємо його за допомогою *Обчислення/Відстань.*

Створимо динамічний вираз - *Обчислення/Динамічний вираз/Створити*, у який запишемо формулу знаходження радіусу кола, описаного навколо трикутника - (LEN(A,C)*LEN(C,B)*LEN(A,B))/(4*AREA(A,B,C)). У нижньому правому вуглі програми зявиться відповідь на динамічний вираз. Бачимо, що вона співпадає з тією, що ми отримали, коли просто виміряли відстань радіуса (рис. 46). Для додаткової впевненості можна змінювати положення точок, тоді автоматично будуть обчислюватися вістані і вони будуть рівні між собою, що і доводить першу половину задачі.

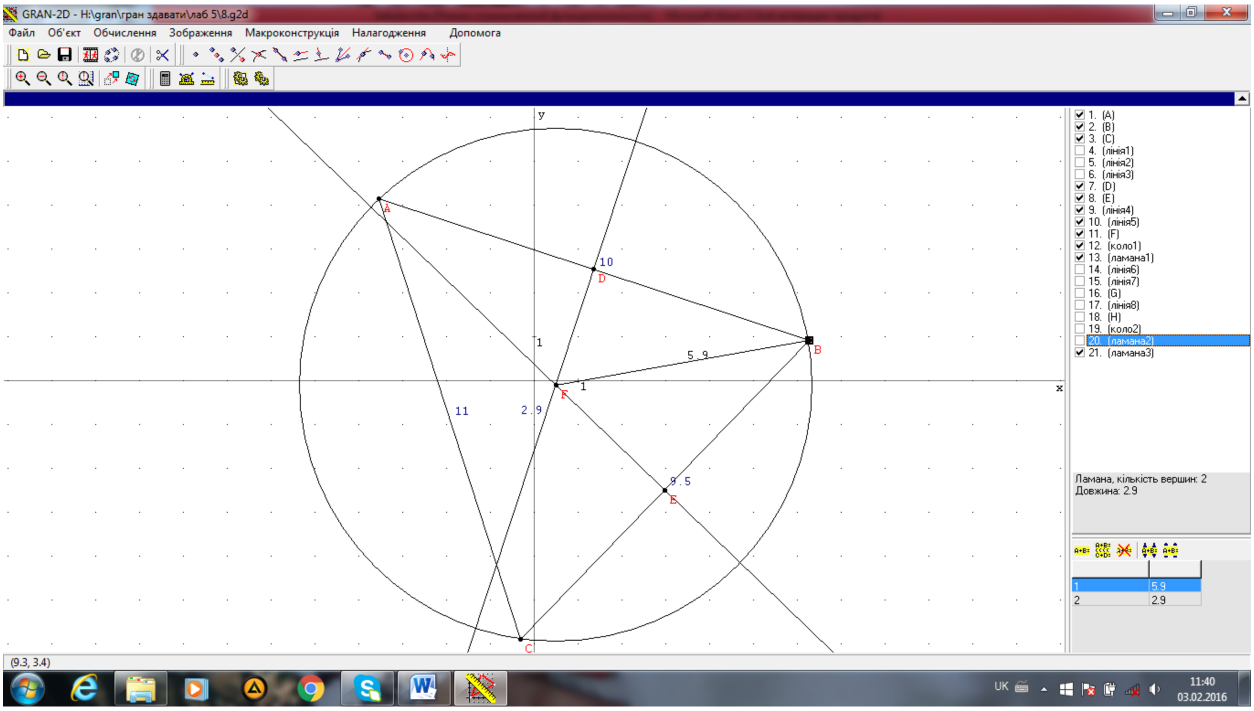


Рис. 46.

Також відомо, що центр кола, вписаного у трикутник, є точко перетину його бісектрис. Тому створюємо бісектриси кутів ACB і CAB. Скористаємось *Об'єкт/Створити/Бісектриса кута.* Зафіксуємо точки перетину бісектрис, отже, скористаємось *Об'єкт/Створити/Створення точки(точок)перетину об'єктів* – це буде точка G. Через точку G проводимо перпендикуляр до AC і зафіксовуємо точку перетину з стороною AC. Отримали точку H. Тепер через точку H і точку G будуємо коло, вписане в трикутник. З'єднуємо H і G за допомогою ламаної і обчислюємо її довжину (операції використовуємо аналогічно, як описані вище). Також з'єднуємо точки A, B, C за допомогою ламаної для того, щоб можна було обчислити площу трикутника ABC, яка фігурує у формулі.

Останні крок – це створення динамічного виразу (*Обчислення/Динамічний вираз/Створити*), у який вписуємо формулу знаходження радіуса вписаного в трикутник кола - (2*AREA(A,B,C))/(LEN(A,C)+LEN(A,B)+LEN(C,B)). Отримуємо значення і порівнюємо з уже відомим (рис. 47). Вони одинакові. Для достовірності спробуємо змінити положення деяких точок і порівняємо результати обчислень. Можна зробити висновок, що формула, як і попередня, доведена.

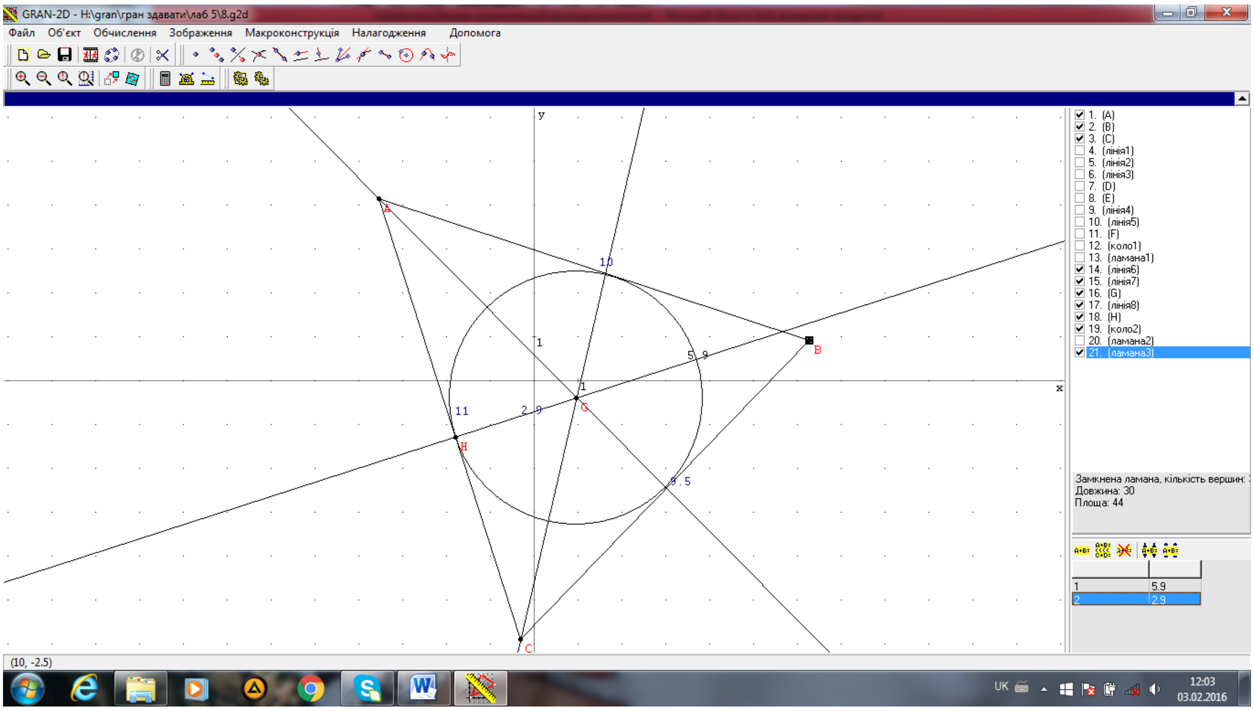


Рис. 47.

Приклад 59. Через точку D, взяту всередині трикутника, проведено три прямі, відповідно паралельні його сторонам. Ці прямі утворюють з сторонами трикутника три трикутники. Довести, що сума площ цих трикутників не менша за третину площі даного трикутника.

Розв’язання. Активуємо продукт *GRAN-2D* і на екрані з’явиться головне вікно програми. Побудуємо вільні точки A, B, C з будь-якими координатами (але не на одній прямі, щоб вони могли бути вершинами трикутника) скориставшишь операціями *Об’єкт/Створити/Точка*. Далі попарно з’єднуємо ці точки за допомогою *Прямої, що проходить через дві точки*. Отримали трикутник ABC. Будуємо аналогічно вільну точку D всередину трикутника.

Через точку D будуємо прямі паралельні сторонам трикутника AB, BC, CA за допомогою *Об'єкт/Створити/Пряма паралельна заданій прямі.* Далі зафіксовуємо точки перетину новоутворених прямих з сторонами трикутника. Це відповідно – F, E, I, J, H, G (використовуємо *Об'єкт/Створити/Створення точки(точок)перетину об'єктів*). Будуємо такі замкнені ламані (*Об'єкт/Створити/Ламана*): ABC, FED, GDH, DIJ.

Створюємо перший динамічний вираз (*Обчислення/Динамічний вираз/Створити*) – тобто формула для знаходження третини площі даного трикутника ABC - AREA(A,B,C)/3.

Створюємо аналогічно другий динамічний вираз – формула для знаходження суми площ трикутників FED, GDH, DIJ - AREA(F,D,E)+AREA(I,J,D)+AREA(G,D,H).

Порівнюємо результат. Змінюємо положення точок і знаву порівнюємо результат. Очевидно, що сума площ трикутників FED, GDH, DIJ не менша за третину площі даного трикутника ABC (рис. 48).

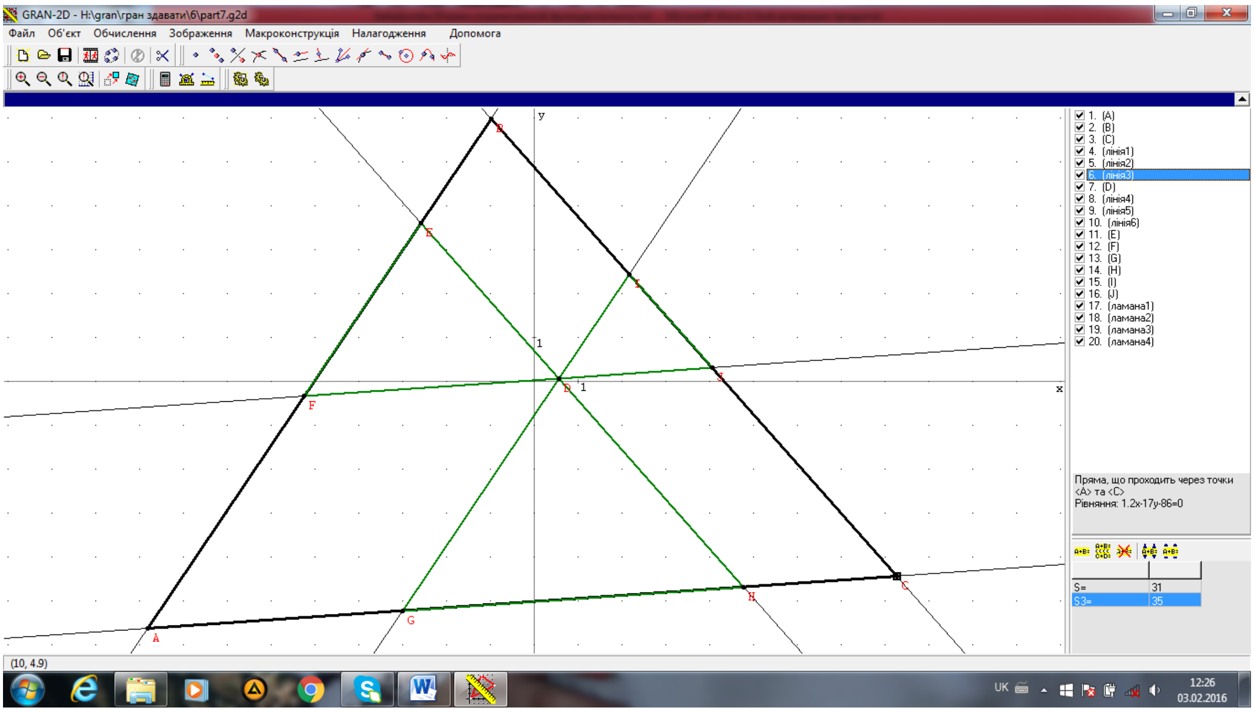


Рис. 48.

Приклад 60. У квадрат вписано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до сторін квадрата постійна.

Розв'язання. Активуємо продукт *GRAN-2D* і на екрані з'явиться головне вікно програми. Побудуємо:

1. Вільні точки А та В з будь-якими координатами скориставшишь операціями *Об'єкт/Створити/Точка*.

2. Пряму через ці дві точки за допомогою операції *Об'єкт/Створити/Пряма, що проходить через дві точки*.

3. Перпендикуляри до прямої АВ, який проходить через точку А і через точку В (*Об'єкт/Створити/Пряма перпендикулярна до заданої прямої.*).

4. Коло з центром в точці В, що проходить через точку А. Для цього скористаємось *Об'єкт/Створити/Створення кола.*

5. Точку перетину об'єктів – перпендикуляра, що проходить через точку В і кола (використовуємо *Об'єкт/Створити/Створення точки(точок)перетину об'єктів*). Отримали точку С.

6. Перпендикуляр до прямої ВС, що проходить через точку С (аналогічно пункту 3).

7. Точку перетину перпендикуляр до прямої ВС, що проходить через точку С та перпендикуляри до прямої АВ, який проходить через точку А (аналогічно пункту 5). Отримали точку D і квадрат ABCD.

8. Середню точку між В і D, використовуючи операції *Об'єкт/Створити/Середня точка.*Отримали точку Е, яка є центром кола, вписаного в квадрат.

9. Перпендикуляр до прямої ВС, що проходить через точку Е (аналогічно пункту 3).

10. Точку перетину об'єктів - перпендикуляра до прямої ВС, що проходить через точку Е і прямої ВС (аналогічно пункту 5). Отримали точку F.

11. Коло з центром в точці E, що проходить через точку F (аналогічно пункту 4).

12. Вільну точку G на колі (аналогічно пункту 1).

13. Прямі, що проходять через точку G, перпендикулярно до прямої AB і AD (аналогічно пункту 3).

14. Точки перетину прямих, що проходять через точку G, перпендикулярно до прямої AB і AD і сторін квадрата DA, AB, BC, CD (аналогічно пункту 5). Отримали відповідно точки – J, H, K, I.

15. Ламані – ABCD, GJ, GH, GK, GI. Скористаємось операціями - *Об'єкт/Створити/Ламана.*

Створюємо динамічний вираз, що буде знаходити суму квадратів відстаней від довільної точки кола до сторін квадрата - LEN(G,H)^2+LEN(G,I)^2+LEN(G,J)^2+LEN(G,K)^2. Отримуємо значення (рис. 49). Терер змінюємо положення точки G на колі і слідкуємо за значенням виразу. Помітно, що воно не змінюється, що і потрібно було довести.

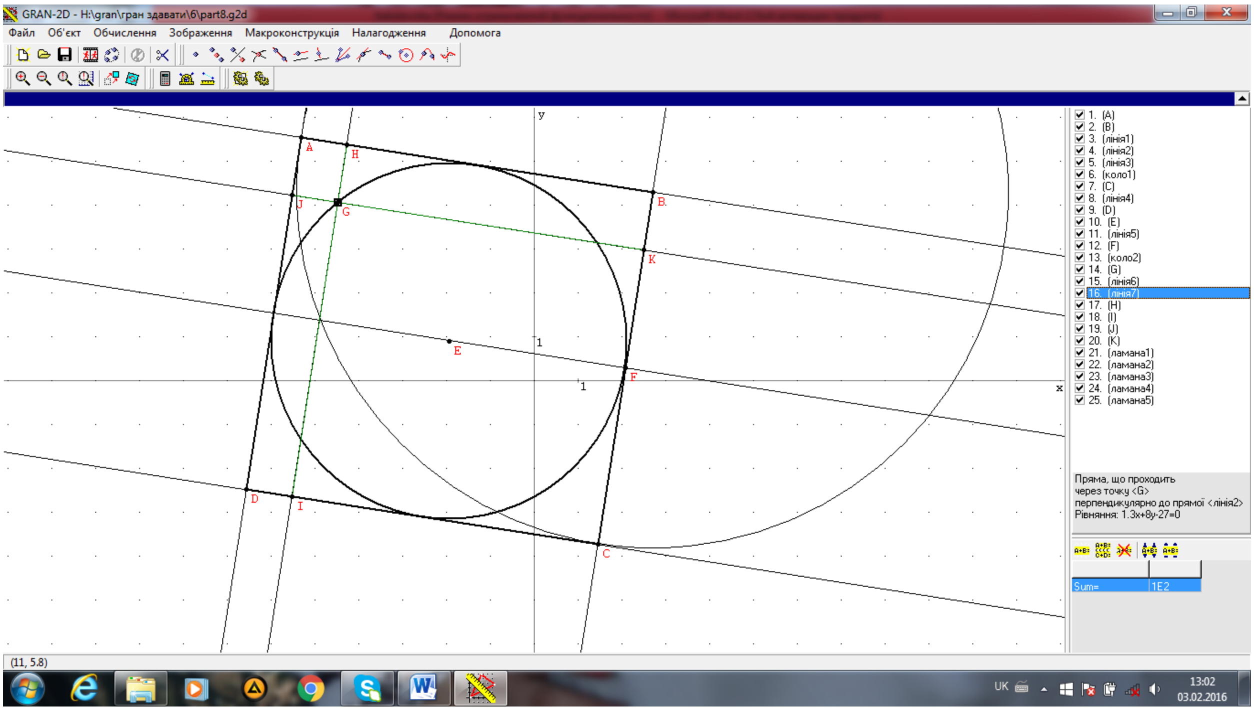


Рис. 49.

РОЗДІЛ IV. ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ТА СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ.

Ефективність будь-якої методики повинна обгрунтовуватися даними від її практичного застосування. Тому під час проходження виробничої практики було проведено педагогічний експеримент. У експерименті брали участь учні 10-А класу ЗОШ №13 м. Рівне. Їх розділили на дві групи. Контрольна група А (20 учнів) вивчала тему, а точніше доведення теорем даної теми, за традиційною методикою; а експериментальна група Б (20 учнів) – за розробленою методикою. Для учнів експериментальної групи були проведені уроки та факультативи, на яких теореми доводились із використанням поданої в роботі методики, а саме, різних прийомів, які використовуються при роботі з теоремами (або задачами на доведення). Для контрольної групи такі уроки та факультативи не проводились. Матеріал, який розглядався попередньо був обговорений з учителями математики та методистами з метою доцільного використання часу випускників і донесення до них корисних і необхідних порад щодо доведень на майбутнє.

Мета експерименту: на основі аналізу проведених уроків, факультативів та раніше набутих знань встановити рівень засвоєння готових доведень та самостійного пошуку доведень учнями, перевірити ефективність даної методики, а особливо використання різноманітних прийомів, які використовуються при доведеннях та ІКТ, які застосовуються для експериментального дослідження теорем.

Варто виділити три основні етапи методичних особливостей педагогічного експерименту:

- проаналізувати стан досліджуваної проблеми в підручниках та навчальних посібниках;
- дослідження рівня знань учнів з предмету (проведення бесіди, консультації з вчителями, аналіз оцінок учнів за перший семестр); розробити методику проведення уроків та факультативів;

- впровадження методики в навчальний план учнів, перевірка якості набутих знань за допомогою тестування.

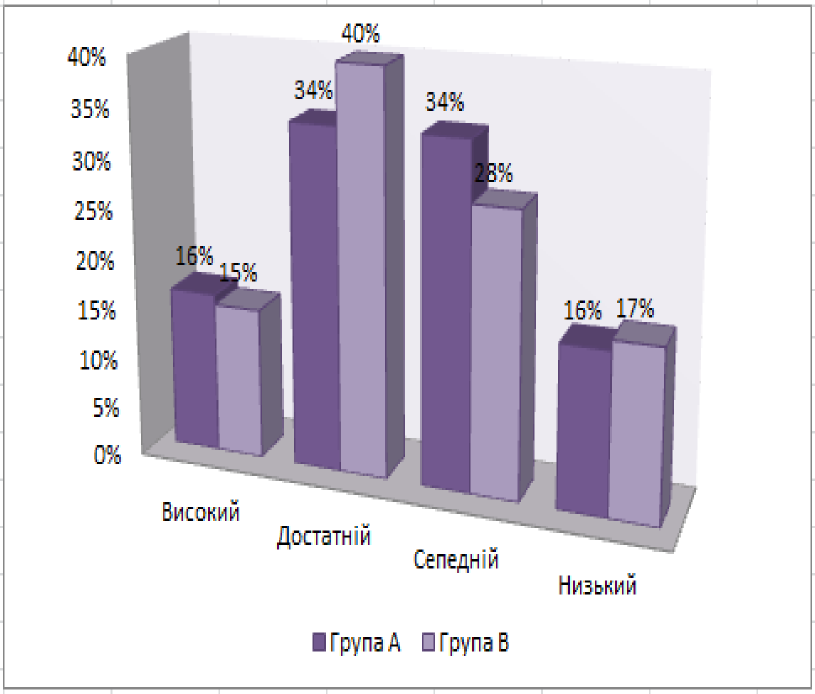
Уроки та факультативи організовувались так: розпочинались з актуалізації опорних знань та мотивації навчальної діяльності учнів, потім на основі повтореного учні за допомогою вчителя, який застосовував один з прийомів, які використовуються при роботі з теоремами (ліквідація пропусків в доведенні, відшукання помилок в доведенні, доведення за складеним планом, складання плану доведення та інші) обговорювали і запам'ятовували готові доведення. На наступних заняттях учні відтворювали уже відомі доведення і пробували самостійно вивести аналогічні доведення, інколи їм доводилося пропонувати свої міркування чи методи щодо доведення теорем. Після цього вчитель ознайомлював учнів з інтерфейсом ППЗ *GRAN-2D* і разом з ними розлядав експериментальне дослідження прикладу на ПК.

Під час першого етапу експерименту були досягнуті наступні результати: проаналізовано і узагальнено стан досліджуваної проблеми в теорії та практиці навчання математики.

У ході другого етапу експерименту було досліджено рівень знань учнів з предмету, проведено бесіди з вчителями і методистами (поради і настанови яких принесли велику користь в роботі); розроблена методика проведення уроків та факультативів.

Для перевірки рівнія знянь теорем та методів їх доведень було проведено контрольне тестування. Результати рівня знань учнів подані в лінійній гістограмі:

	Група А	Група В
Високий	16%	15%
Достатній	34%	40%
Сепедній	34%	28%
Низький	16%	17%



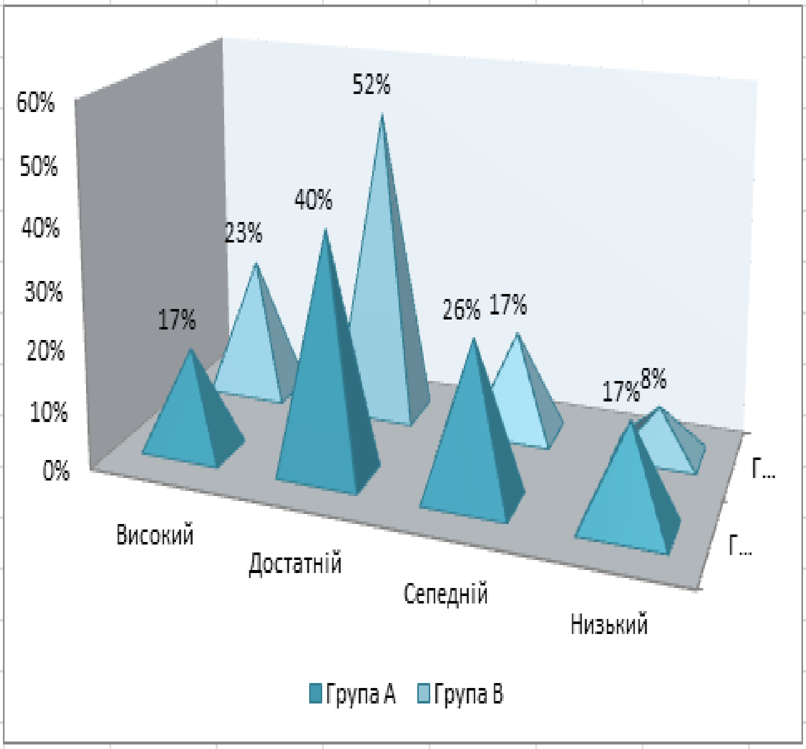
На третьому етапі були досягнуті наступні результати: проведені розроблені факультативи в експериментальній групі Б, вивчений вплив даної методики на рівень засвоєння знань учнями та розвиток їх творчих можливостей, перевірений стан якості знань за допомогою повторного тестування.

Слід зазначити, що під час проведення експерименту учні виявляли інтерес до матеріалу, особливо до теорем, доведення яких було подано в таблицях; відвідували додаткові заняття, старанно виконували домашнє завдання та опрацьовували матеріал підручника, пропонували свої ідеї доведення теорем. Деякі учні виявили свої особисті можливості щодо доведення теорем чи їх правильного запису за допомогою певних методів доведення.

Результати експерименту

Рівень знань учнів, які приймали участь в експерименті висвітлений у наступній лінійній гістограмі:

	Група А	Група В
Високий	17%	23%
Достатній	40%	52%
Сепедній	26%	17%
Низький	17%	8%



Якщо порівняти між собою рівні знань учнів до і після проведення експерименту, то з впевненістю можна сказати, що уроки і додаткові заняття в експериментальній групі пішли на користь учням. Слід зазначити, що дуже детальний розгляд теорем і задач на доведення за допомогою ІКТ розвинув логічне мислення учнів та заставий запам’ятати матеріал, оскільки він декілька раз повторювався при побудовах. Аналізуючи результати експерименту, можна побачити зміни :

- учнів, що знають матеріал на високому рівні стало більше на 8% від початкового показника;
- учнів, що знають матеріал на достатньому рівні стало більше на 12% від початкового показника;
- учнів, що знають матеріал на середньому рівні стало менше на 11% від початкового показника;
- учнів, що знають матеріал на низькому рівні стало менше на 9% від початкового показника.

Одержані статистичні дані свідчать про те, що учні одержали міцніші знання на достатньому і високому рівні в порівнянні із знаннями, які в них були до проведення факультативів. Також відповідні заняття сприяли не лише засвоєнню готових доведень, але й розвитку творчої діяльності учнів, їх уяви і мислення.

У сучасній математиці доведення відіграють важливу роль, тому не варто просто вчити дітей заучувати готові доведення, а потрібно сприяти тому, щоб вони самостійно їх знаходили і вміли обґрунтовувати свої думки.

Отже, здійснений педагогічний експеримент показав, що незважаючи на розвиток методики навчання математики все ж таки є недоліки у системі математичної освіти та шкільній програмі з математики. Під час вивчення доведень в учнів розвивається логіка мислення, уява, уявлення, позитивні якості особистості. Ось чому варто правильно навчати дітей доводити теореми за допомогою різних методів доведення в різних класах.

ВИСНОВКИ

Наше розуміння загальної методичної проблеми навчання доведень теорем пояснюється тим, що готові доведення посідають значне місце у процесі навчання математики. За умови належної організації навчання готових доведень можна формувати в учнів компоненти самостійного пошуку і побудови доведення. Готові доведення мають виступити як моделі, на яких учні навчаються розумових дій і прийомів розумової діяльності, що лежать в основі уміння доводити за допомогою різних прийомів, методів доведень і їх застосування, вчаться самостійно шукати доведення за аналогією з вивченим.

В шкільному курсі математики доведенням і методам доведень відведена не остання роль, тому що вони можуть бути представлені в завданнях державної підсумкової атестації з математики та в завданнях вступних іспитів до ВНЗ. Слід зазначити, що все ж вивчення готових доведень домінує над навчанням учнів самостійному пошуку доведень.

Під час виконання роботи досягнуті наступні результати:

- досліджено значення доведення на уроках математики;
- систематизовано відомості про різноманітні методи доведень;
- розглянуто приклади завдань з використанням різних методів доведення, прийомів, що використовуються при роботі з ними та ППЗ *GRAN-2D*;
- розроблено методику вивчення методів доведень в шкільному курсі математики з використанням прийомів, які застосовуються при їх розгляді та методичний посібник по темі;
- доведено важливість та корисність використання ІКТ при експериментальному дослідженні задач на доведення;
- проведено педагогічний експеримент та статистичну обробку його результатів.

Багато методистів, педагогів і психологів присвячували свої роботи проблемам вивчення доведень в школі, розкривали суть, алгоритми і правила-орієнтири кожного з методів доведень, але найкращого і найефективнішого з них не було знайдено. Ними були наведені лише рекомендації щодо вивчення кожного методу з урахуванням науково-теоретичних, психолого-педагогічних та вікових особливостей учнів; названо основні етапи засвоєння матеріалу та методи розвитку творчих здібностей учнів.

В ході дослідження була підтверджена гіпотеза про те, що під час вивчення методів доведень теорем, тверджень і задач з використанням різнотипних методичних прийомів, починаючи з найлегших і закінчуючи найважчими для сприйняття, та їх комбінаціями з використанням ІКТ, учні будуть розуміти доведення як складову частину розв'язування, а також в них розвиватиметься логіка мислення, уява, уявлення, позитивні якості особистості та відбуватиметься усвідомлення аксіоматичної побудови математики.

Розроблений зміст, методика, методичний посібник та подані приклади можуть бути використані вчителями шкіл при проведенні уроків математики в школі, на факультативних заняттях, а також студентами ВНЗ під час вивчення різних дисциплін чи написанні авторських робіт.

Проведений педагогічний експеримент дозволяє зробити висновок, що застосування розробленої методики – це досить ефективна форма розвитку рівня засвоєння знань учнями, а особливо підвищення творчих математичних здібностей обдарованих учнів.

Отже, починаючи уже з 5-6 класів учням подають базовий матеріал для майбутній математичних доведень, і збільшують його паралельно з розв'язанням відповідних завдань, враховуючи індивідуальні та вікові особливості кожного. Тому можна впевнено сказати, що методика вивчення теорем та їх доведень в шкільному курсі математики – це одна з сходинок всебічного розвитку учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрєєв А. І. Нетрадиційні доведення нерівностей: навч.- метод. посіб. / А. І. Андрєєв, М. М. Пихтар — Чернігів: Вид-во Чернігівського державного педагогічного університету, 1999. — 82 с.

2. Апостолова Г. В. Геометрія : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. ака-дем. рівень, профіл. рівень / Г. В. Апостолова; упорядкув. завдань: Ліпчевського Л.В. [та ін.]. — К.: Генеза, 2011. — 304 с.

3. Бабанський Ю. К. Педагогика / Бабанський Ю. К. — М.: Просвещение, 1983 .— 340 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Навчальний посібник. / Бевз Г. П. — Київ: Вища школа, 1989. — 367 с.

5. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 8 кл. середніх загальноосвітніх закладів. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2008. — 256 с.

6. Бурда М. І. Геометрія. Підручник 7 клас. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова — К.: Освіта, 2008. — 208 с.

7. Бурда М. І. та ін.. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з алгебри. 9 клас. — Харків: Гімназія, 2007. — 224 с.

8. Бурменська Г. В. Обдаровані діти. / Бурменска Г.В. — М., 1991. — 150 с.

9. Груденов Я. И. Изучение опредилений, аксіом, теорем: Пособие для учителей. / — М.: просвещение,1981. — 208 с.

10. Державна національна програма «Освіта / Україна XXI століття» Затверджено постановою Кабінету Міністрів України від 03.11.93 №896 // Освіта — 1993. — №44-46.

11. [Електоронний ресурс]. Доведення. Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F.

12. [Електронний ресурс]. Математика + ІКТ. Режим доступу: http://kramarenko12.blogspot.com/p/gran-2d.html.

13. [Електоронний ресурс]. Методи доведення теорем у шкільному курсі геометрії. Режим доступу: http://zw.ciit.zp.ua/index.php.

14. [Електронний ресурс]. Про програмний засіб Gran. Режим доступу: доступу - http://www.ktoi.npu.edu.ua/index.php/uk/pro-prohramnyi-zasib.

15. [Електронний ресурс]. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Режим доступу: http://www.uk.xlibx.com/4psihologiya/42635-45-psihologo-pedagogichni-metodichni-osnovi-rozvivalnogo-navchannya-matematiki-ternopil-pidruchniki-posibniki-2004-u.php.

16. [Електронний ресурс]. Розвиток математики в Україні. Режим доступу: http://www.mon.gov.ua/images/education/average/new_pr/math.doc.

17. [Електоронний ресурс]. Роль доведень у навчанні математики та їх підтримка засобами комп'ютерного моделювання у пакетах динамічної геометрії. Режим доступу: http://www.ii.npu.edu.ua/2009-11-27-11-40-37/103--19/906-2009-11-27-12-10-09576.

18. Єрмолаєва М. В. «Психологічна практика в системі освіти». / М. В. Єрмолаєва, А. Є. Захарова, Л. І. Калінін, С. І. Наумова — М.: Видавництво «Інститут практичної психології», Воронеж: НВО «МОДЕК», 1998. — 148 с.

19. Конфорович А. Г. Математичні софізми і парадокси. / А. Г. Конфорович — К: Радянська школа ,1983. — 208 с.

20. Корольський В. В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навчальний посібник / В. В Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк; за ред. М. І. Жалдака. — Кривий Ріг: Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009. – 316 с.

21. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером. Посібник для вчителів і студентів / За ред. М. І. Жалдака. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.

22. Лакатос И. А. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. / И. А. Лакатос — М.: Наука, 1967. — 390 с.

23. Лернер Й. Я. Поисковье задачи в обучении как средство развития творческих способностей /В кн. Научное творчество. / Й. Я. Лернер, С. В. Микулинський, М. Г. Ярошевський —М., Наука, 1969. — 413с.

24. Лозова В. І. Педагогіка: Навч. - метод. посібник. / В. І. Лозова. П. Г. Москаленко, Г. В. Троцько — К., 1993. — 270 с.

25. Мартиненко С. М. Загальна педагогіка: Навч. посіб. / С. М. Мартиненко, Л. Л. Хоружа — К.: МАУП, 2002. — 254 с.

26. Мерзляк А. Г. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 9-й кл. / А. Г. Мерзляк, М. І. Бурда. — К.: Центр навч. – метод. л-ри, 2014. — 256 с.

27. Мерзляк А. Г. Алгебра: Підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір — Х.: , 2009. — 320 с.

28. Моляко В. А. Психология решения школьникамй творческих задач // Педагогика. / Моляко В. А. — М., 1997. — 231 с.

29. Нелін Є. П. Алгебра. 11клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Х.: Гімназія, 2011. — 448 с.

30. Панчук В. І. Навчальна програма дисципліни «Методика викладання математики та інформатики» (для спеціалістів). / Панчук В. І. — К.: ДП «Вид. дім «Персонал»», 2009. — 16 с.

31. Пидкасистий П. І. Педагогіка. Навчальний посібник для студентів педагогічних вузів і педагогічних коледжів. / Пидкасистий П. І. — М.: Педагогічне товариство Росії, 1998. — 260 с.

32. Погорєлов А. В. Геометрія: учеб. пособие для 7-11 кл. сред. шк. / Погорєло А. В. — М.: Просвещение, 1986. —345 с.

33. Погорєлов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підр. Для 7-9 кл. серед. шк. — 4-те вид. — К.: Освіта, 2001. — 223 с.

34. Присяжнюк М. М. Перетворення подібності площини. Посібник для студентів спеціальності «математика». / М. М. Присяжнюк — Рівне, 2008. — 52 с.

35. Саранцев Г. І. Навчання математичним доказам у школі: Книга для вчителя. / Г. І. Саранцев — М.: «Просвіта», 2000. — 173 с.

36. Семенець С. П. Методика навчання математики (підготовлено на основі концепції розвивачьної освіти): навчальний посібник / Семенець С. П. — Житомир: Вид-во ЖДУ їм. І. Франка, 2009. - 536 с.

37. Середа В. Ю. Вчись мислити логічно. / В. Ю. Середа — К.: Рад.шк., 1969. — 90 с.

38. Сластенко Є. Ф. Логіка: Навчальний посібник. / Є. Ф. Сластенко, С. М. Ягодзінський — К.: НАУ, 2005. — 192 с.

39. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підруч. для студ-тів вищих пед. навч. закладів - 2-ге вид. доп. і перероб. / Слєпкань З. І. — К. : Вища школа, 2006. - 582 с.

40. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальносте пед. навч. закладів/ Слєпкань З. І. - К.: Зодіак-ЕКО, 2000 р. — 385 с.

41. Слєпкань З. І. Психолого-педагогические основі обучения математике. Методическое пособие. / Слєпкань З. І. — Київ: Рад. шк., 1983. — 192 с.

42. Тихомирова Л. Ф. Розвиток інтелектуальних здібностей школяра. / Тихомирова Л. В. — Ярославль. «Академія розвитку», 1996. — 87 с.

43. Хмара Т. М. Шляхами математики: Хрестоматія для учнів 5-9 кл. / Хмара Т. М. — К.: Пед. преса, 1999. — 196 с.

44. Чиркова Т. І. Облік індивідуально - психологічних особливостей дітей. / Чиркова Т. І. — М., 1986. — 309 с.

45. Швець В. О. Дидактичні матеріали з математики. 8, 9, 10, 11 класи. / Швець В. О. — К.: Освіта, 1997. — 245 с.