Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

магістра

на тему :

«Методика вивчення комбінаторики та теорій ймовірностей у загальноосвітній школі»

Виконала: студентка 5 курсу, групи М-М-51
спеціальності
0402 «Фізико-математичні науки»
8.04020101 «Математика*»

Вакулюк Ольга Петрівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, проф. Крайчук О.В.

Рецензент: д.т.н., проф. Власюк А.П.

Рецензент: канд. тех. наук, доц. Батишкіна Ю.В.

Рівне-2016 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Програма шкільного курсу передбачає ознайомлення з темою «Елементи теорії множин. Комбінаторика». Зміст його має сприяти розвитку комбінаторного мислення, підвищенню інтересу учнів до математики, допомагає задовольнити пізнавальні інтереси школярів та вибрати в подальшому напрям профілю навчання у старшій школі.

Як зазначається у Концепції 11-річної школи України, гуманістичні цінності освіти зумовлюють зміну авторитарно-дисциплінарної моделі навчання на особистісно-орієнтовану. Особистісний підхід до навчання, зокрема, реалізується за допомогою спеціальних курсів за вибором. Створюється можливість гнучкої варіативності змісту математичної. освіти згідно з інтересами, нахилами, здібностями учнів та їх орієнтації на майбутню професію.[4, 97с.]

Комбінаторика довгий час входила до обов'язкової програми з математики, а пізніше була рекомендована для вивчення на факультативних заняттях. Проте існує багато проблем теорії інформації, складання та декодування шифрів, виробництва, транспортування, розміщення підприємств, вивчення складу різних речовин, тобто проблем усіх галузей людської діяльності, які мають комбінаторний характер. Це зумовлює актуальну потребу сформованості гнучкості, варіативності, критичності, динамічності мислення, здатності висувати гіпотези перебігу подій та її підтвердження, тобто сформованості комбінаторного мислення.

Комбінаторика набула свого другого народження завдяки виникненню ЕОМ. З'явилася можливість розв'язувати значно ширше коло комбінаторних задач методом перебору, що реалізується на ЕОМ. З цим матеріалом тісно пов'язані задачі оптимізації комбінаторного типу, які розвивають мислення учнів, спонукають до творчої діяльності, викликають зацікавленість математикою та інформатикою. Пошук з поверненням, метод гілок і границь, евристичний пошук

— найпростіші методи розв'язування таких задач. [8, 136с.]

Згідно з Державним стандартом базової загальної освіти в Україні, у тому числі й математики, у якому визначені цілі розвитку освітньої галузі, що відповідають об'єктивним вимогам сучасного життя, традиційні змістові лінії доповнено змістовою лінією «Елементи теорії ймовірності. Комбінаторика», визначено необхідний мінімум для продовження освіти навчання з цієї теми та вимоги до його засвоєння. Програмою з математики для загальноосвітніх середніх закладів вивчення комбінаторики віднесено до 11 класу. [10, 32с.]

В основній школі ці питання розглядаються тільки в класах з поглибленим вивченням математики. Проте існує велика кількість шкіл (і в цьому специфіка системи освіти України) з одним класом універсального профілю (переважно це сільські школи), де немає можливості формувати в основній школі окремі класи з поглибленим навчанням математики. Даний курс може бути використаний для проведення індивідуальної чи групової роботи у таких класах.

Включення курсів за вибором в особистісно-орієнтовану систему навчання основної школи допомагає глибше ознайомити учнів з математичними ідеями та методами, спонукає до перших математичних досліджень.

Курс розрахований на 17 год. протягом одного півріччя для учнів 7—8 класів, 10год. в 9 класі та 10 год в 11 класі. Важливою складовою організації навчального процесу є самостійні роботи: індивідуальне вивчення обраної теми, написання рефератів, виступи на семінарах з доповідями.

Комбінаторика з її прикладним застосуваннями зацікавлює учнів, переконує їх у реальності і корисності вивчення цієї теми.

Проблемою методики викладання теми «Комбінаторика. Початки теорії ймовірності» в учнів на уроках математики займалися багато вчених. Найбільш повно та детально розглянули ці поняття: Бродський Я.С., Павлов

О.Л, Вилугіна Л.В., Грищенко В., Слєпкань З.І., Божко В., Ващенко Л, Панішева О., Чашечникова О., Варущик Н., Овчинникова Т., Трунова О.

Об’єктом дослідження *є* процес викладання математики в школі.

Предмет - методика викладання теми «Комбінаторика. Початки теорії ймовірності».

Мета - аналіз літератури, дослідження актуальності вивчення даної теми в школі, значення її в житті учня після закінчення школи, виявлення проблем, які можуть виникнути під час вивчення теми і шляхи їх усунення, розробити методику її викладання.

Гіпотеза дослідження ґрунтується на припущенні, що ефективність засвоєння теми учнями залежить від методики її викладання, а також від організації та змісту навчально-виховного процесу уроків математики.

Для перевірки гіпотези дослідження та реалізації мети поставлено такі **завдання:**

• провести аналіз літератури з даної теми;

• обговорити з вчителями основні проблеми, які виникають в учнів при вивченні теми «Комбінаторика. Початки теорії ймовірності»;

• перевірити ефективність розробленого методичного матеріалу.

Методологічну та теоретичну основу дослідження становлять: теорія наукового пізнання; системний, комплексний і діяльнісний підходи до навчання. Дослідження ґрунтується на основних положеннях наступних документів: Закон України «Про Освіту», Державна національна програма «Освіта (Україна XXI століття)», Державні освітні стандарти, Національна доктрина розвитку України у XXI столітті.

Для перевірки висунутої гіпотези й вирішення поставлених завдань була розроблена програма дослідження, яка включила такі **методи дослідження:**

■ **теоретичні методи:** аналіз, зіставлення, узагальнення даних дослідження на основі вивчення філософської, психологічної, педагогічної, методологічної літератури, навчальних програм, підручників зматематики.

■ **емпіричні методи:** вивчення, узагальнення та впровадження передового педагогічного досвіду вчителів математики; спостереження, бесіди з вчителями та учнями; вивчення результатів діяльності школярів; педагогічний експеримент в констатуючій та формуючій формах; статистичні та математичні методи обробки дослідження, обробка отриманих даних експериментів з допомогою ЕОМ.

Практичне значення буде полягати у експериментальній перевірці методики та в розробці і впровадженні в практику школи рекомендацій щодо вивчення теми: «Комбінаторика. Початки теорії ймовірності» для того, щоб допомогти учню впоратись з великим обсягом зовсім нової для нього інформації, сприяти глибокому засвоєнню початків теорії ймовірностей та комбінаторики, розвинути власні творчі здібності особистості та її індивідуальність, продуктивне мислення і творчу активність, формувати навчальні вміння, навички, зважено діяти у складних ситуаціях.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИКО- МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Роль і місце теми в шкільному курсі математики профільної школи.

Сьогодні в Україні активно ведеться робота з реформування шкільної освіти. У Державному стандарті базової та повної середньої освіти в Україні, зокрема для освітньої галузі «Математика», визначено цілі розвитку освітньої галузі, що відповідають об'єктивним вимогам сучасного життя і потребам особистості. Темами «Елементи теорії множин. Комбінаторика», «Початки теорії ймовірностей та елементи статистики» доповнено традиційні змістові лінії. Це є реальним кроком до створення умов для розвитку одного із спеціальних і соціально важливих типів мислення — комбінаторного, необхідного сучасній людині як у загальнокультурному плані, так і для професійного становлення та нормальної соціалізації особистості в сучасному суспільстві. [4, 84с.]

Актуальність елементів комбінаторики для шкільного курсу математики визначено математиками, методистами, цей розділ увійшов до навчальних програм, підручників. Значно збільшилась увага до комбінаторики на сторінках методичних видань, відбувається становлення методичного досвіду формування комбінаторних уявлень, починаючи з початкової школи Згідно з концепцією математичної освіти 11-річної школи в 5 класі передбачено розв'язування комбінаторних задач . В 1 1 класі за чинною програмою для загальноосвітніх навчальних закладів темі «Комбінаторика» приділяється 10 годин. Учні мають ознайомитися з поняттям множини, поняттями перестановки, розміщення, комбінації, навчитися розрізняти види сполук і розв'язувати нескладні комбінаторні задачі. У класах із поглибленим вивченням математики комбінаторику включено в програми з 8 по 11 клас.

Провідною метою вивчення комбінаторики є формування комбінаторного мислення як важливого компонента мислення сучасної людини. Розвиток комбінаторного мислення відбувається в процесі активної розумової діяльності учнів у напрямі пошуку різних способів перелічування об'єктів дослідження. Основними його характеристиками є: організація цілеспрямованого перебору певним чином обмеженого кола можливостей; універсальність ; (незалежність від конкретного математичного матеріалу; гнучкість — зміна внутрішнього плану дій як у процесі пошуку і розв'язування задачі, так і в процесі самого розв'язування). Комбінаторне мислення спирається на критерії вибіркового пошуку, дає змогу вирішувати складні, невизначені проблемні ситуації; допомагає перебирати різноманітні стратегії та обирати найкращий напрям розв'язування проблеми.

Психологічно обумовлений поділ вивчення комбінаторики .

Психологічно обумовленим є поділ вивчення комбінаторики на три етапи.

I. Побудова та використання різних наочних комбінаторних моделей відповідно до змісту задачі (1—4 класи).

II. Введення основних понять комбінаторики, вивчення правил додавання і множення (5—9 класи).

III. Вивчення основних формул комбінаторики та застосування їх до розв'язування задач різних рівнів складності (11 клас, 8—9 класи з поглибленим вивченням математики).

Тематичне планування для 11 класу

Орієнтовне календарне планування при вивченні теми в 11 класах рівня стандарту.

№ з\п	**Тема навчального заняття**	**К-сть годин**
1.	Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку.	1
2.	Перестановки, розміщення, комбінації.	1

3.	Ймовірність події.	1
4.	Випадкова подія. Відносна частота події.	1
5.	Обчислення імовірності події за допомогою формул комбінаторики.	1
6.	Розв’язування задач.	1
7.	Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана,середнє значення.	1
8.	Графічне подання інформації про вибірку.	1
9.	Розв’язування задач.	1
10.	Контрольна робота .	1

Орієнтовне календарне планування при вивченні теми в 11 класах академічного рівня.

№ з\п	**Тема навчального заняття**	**К-сть годин**
1	Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку.	1
2	Комбінаторні правила суми та добутку (Перестановки, розміщення, комбінації)	1
3	Перестановки, розміщення, комбінації. Самостійна робота.	1
4	Випадкова подія. Відносна частота події.	1
5	Ймовірність події.	1
6	Ймовірність події.	1
7	Використання комбінаторних схем для обчислення ймовірності.	1
8	Розв'язування задач на обчислення ймовірностей. Самостійна робота.	1

9	Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана,середнє значення.	1
10	Графічне подання інформації про вибірку.	1
11	Узагальнення знань, умінь і навичок.	1
12	Контрольна робота.	1

Орієнтовне календарне планування при вивченні теми в 11 класах з поглибленим вивченням математики.

№ з\п	Тема навчального заняття	К-сть годин
1	Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку.	1
2	Перестановки, розміщення, комбінації.	1
3	Перестановки, розміщення, комбінації.	1
4	Випадкова подія та випадковий досвід. Відносна частота події.	1
5	Частота та ймовірність випадкової події.	1
6	Частота та ймовірність випадкової події.	1
7	Частота та ймовірність випадкової події.	1
8	Частота та ймовірність випадкової події.	1
9	Класичне означення ймовірності.	1
10	Класичне означення ймовірності.	1
11	Використання комбінаторних схем для обчислення ймовірності.	1
12	Розв’язування задач на обчислення ймовірностей.	1
13	Операції з випадковими подіями.	1
14	Операції з випадковими подіями.	1
15	Операції з випадковими подіями.	1

16	Операції з випадковими подіями.	1
17	Геометрична ймовірність.	1
18	Геометрична ймовірність.	1
19	Графічне подання інформації про вибірку.	1
20	Поняття про статистику. Генеральна сукупність і вибірка. Вибіркові характеристики.	1
21	Статистичний аналіз даних.	1
22	Статистичний аналіз даних.	1
23	Статистичний аналіз даних.	1
24	Розв’язування типових вправ.	1
25	Контрольна робота.	1

Кількість годин математики у профільних класах

Природничо-математичний напрям

Навчальни предмет	***Кількість годин на тиждень у класах за профілями навчання***											
	Фізико-математичний		**Математичний**		**Фізичний**		**Екологічний**		**Біолого-хімічний**		**Біолого-фізичний**	
	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11
Алгебра	4	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2
Геометрія	3	3	3	3	2	2	3	3	2	2	2	2
Додатковий час для поглибленого вивчення	3	3	5	6	5	3	6,5	5	3,5	4	3,5	2

Суспільно-гуманітарний напрям

Навчальний предмет	***Кількість годин на тиждень у класах за профілями***							
	Історичний		**Правовий**		**Філософський**		**Економічний**	
	10	11	10	11	10	11	10	11
Алгебра	3	3	3	3	3	3	3	3

Геометрія	3	3	3	3	3	3	2	2

Філологічний напрям

Навчальний предмет	***Кількість годин на тиждень***					
	Укр. філологія		**Іноз. філолгія**		**Істор. філологія**	
	10	11	10	11	10	11
Математика	3	3	3	3	3	3

Технологічний напрям

Навчальний предмет	***Кількість годин на тиждень***			
	Технологічний		**Інформаційно-технологічний**	
	10	11	10	11
Алгебра	2	2	4	4
Геометрія	2	2	3	3

Сортивний напрям

Навчальний предмет	***Кількість годин на тиждень***	
	Художньо-етичний	
	10	11

1.2. Пропедевтика вивчення даних тем в учнів основної школи

Методику пропедевтичної діяльності учнів слід будувати з урахуванням психологічних особливостей дітей даного віку і спрямовувати на розвиток їх мислення. Основні методичні орієнтири навчання учнів початкової школи комбінаторної діяльності полягають у такому:

- провідною метою є не навчання учнів розв'язуванню задач певного типу, а формування комбінаторного мислення;
- необхідно постійно варіювати умови здійснення комбінаторних міркувань;
- методика навчання розв'язуванню комбінаторних задач повинна будуватися з урахуванням того, що дітям притаманна своя, поки ще не досконала логіка міркувань, не можна відкидати її, нав'язувати «дорослі» способи розв’язування задач;
- у процесі навчання розглядаються різні можливості здійснення перебору при розв'язуванні комбінаторних задач, в учня є вибір шляхів і засобів розв'язування задачі, він може діяти в даній ситуації згідно зі своїми особливостями;
- у навчанні розв'язуванню комбінаторних задач зберігається етапність, основний напрям роботи — це перехід учнів від здійснення випадкового перебору варіантів до проведення системного, спочатку без застосування засобів його організації, потім за їх допомогою. [10, 27с.]

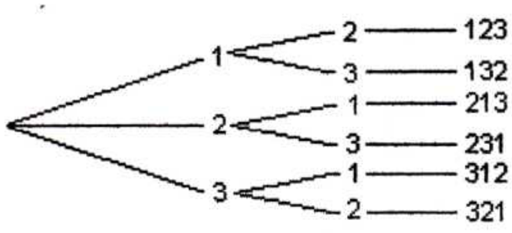
Пропедевтика елементів комбінаторики. З метою пропедевтики вивчення елементів комбінаторики , початків теорії ймовірностей і вступу до статистики відповідний матеріал можна включати в курс математики, починаючи з 5 класу.

Розглянемо конкретні приклади.

Під час вивчення теми «Натуральні числа» (5 клас) можна запропонувати учням для розв'язування деякі комбінаторні задачі на перестановки та розміщення й обчислення їх кількості без використання відповідних термінів і формул. Розв'язуючи такі задачі, потрібно звернути увагу на утворення різних перестановок і розміщень із заданої кількості елементів, навчити підраховувати їх кількість без використання готових формул. У цьому разі зручно застосовувати графи.

Задача 1. Запишіть усі трицифрові числа, які можна утворити за допомогою цифр 1, 2, 3, не повторюючи їх у записі числа. Скільки таких чисел утворилось

Розв'язання. Побудуємо таку схему (граф).



Побудову схеми (графа) слід супроводжувати такими поясненнями:

1) на першому місці ми можемо записати будь-яку із трьох заданих цифр;

2) на другому місці ми можемо записати тільки одну з двох цифр, що залишилися після того, як ми записали першу цифру;

3) на третьому місці записуємо ту цифру, що залишилася після запису перших двох. За допомогою такої схеми (графа) ми записали всі можливі числа і тепер легко підрахувати, що їх 6.

Задача 2. Скільки трицифрових (чотирицифрових) чисел можна записати за допомогою цифр 3, 4, 5 (6), не повторюючи цифри в записі числа? Дати відповідь, не виписуючи всі ці числа.

Розв'язання. На перше місце можна записати будь-яку із заданих цифр, тобто є три (чотири) різні можливості. На друге місце можна записати вже будь-яку з цифр, що залишилися, тобто є дві (три) можливості. Кожна перша цифра може комбінуватися з будь-якою цифрою, що міститься на другому місці. Тому загальна кількість різних способів запису двох цифр 3•2 = 6 (4•3 = 12). Далі зрозуміло, що на третє місце можна записати вже тільки одну цифру (одну з двох цифр), що залишились, тому для трьох цифр кількість способів 3•2•1 = 6 (4•3•2 = 24). Аналогічно для останньої, четвертої цифри, є тільки один спосіб зайняти місце в записі числа і загальна кількість таких чисел становитиме 4•3•2•1 = 24.

Задача3. Як зміниться відповідь до задачі 2, якщо цифру 3 замінити на цифру 0? Відповідь пояснити.

Відповідь. Оскільки число не може починатися з цифри 0, то загальна кількість утворених чисел буде 2•2• 1=4 (3•3•2• 1 = 18).

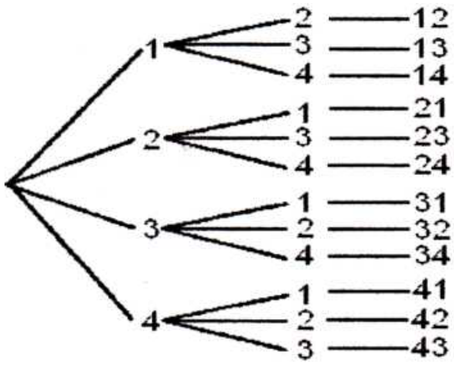
Після розв'язування цих або подібних задач можна зробити деякі узагальнення. Зокрема, ознайомити учнів з комбінаторним правилом множення, яке можна сформулювати так.

Якщо деякий об'єкт А можна вибрати т способами, а після цього інший об'єкт В можна вибрати п способами, то пари А і В можна вибрати т • п способами.

Потім ввести поняття перестановки і формулу для обчислення їх кількості.

Задача4. Скільки двоцифрових чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3, 4, не повторюючи їх у записі числа?

Розв'язання. І спосіб. Знову використаємо граф. Побудову графа супроводжуємо поясненнями, аналогічними поясненням у задачі 1.



ІІ спосіб. Підрахунок кількості таких чисел можна виконати в інший спосіб. На перше місце можна записати будь-яку з чотирьох цифр — усього маємо чотири можливості.

На друге місце — будь-яку з трьох цифр, що залишилися, отже, маємо три можливості.

Будь-яка цифра, що міститься на першому місці, може комбінуватися з будь - якою цифрою на другому місці. Тому загальна кількість різних способів становить 4•3 =12. Якщо учнів вже ознайомили з комбінаторним правилом множення, можна відразу зробити висновок про кількість чисел за сформульованим правилом. [5, 36с.]

***Задача*5.** Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 2, 3, 4, 7, не повторюючи цифри в записі числа? Як зміниться відповідь, якщо замість цифри 7 взяти цифру 0?

Розв'язання. 1) міркуючи як у задачі 4, отримаємо, що загальна кількість чисел 4 • 3 • 2 = 24;

2) якщо одна з цифр 0, то на перше місце можна записати тільки одну з трьох цифр, і тоді загальна кількість чисел 3•3•2 = 18.

Після розв'язання задач 4 і 5 знову можна зробити деякі узагальнення. Потрібно звернути увагу учнів, що, на відміну від задач 1 —3, в задачах 4 і 5 у записі чисел цифр було менше, ніж пропонувалося в умові задачі, але в усіх задачах істотним був порядок запису цифр. Після цього можна ввести поняття розміщення з n по m елементів і записати формулу для обчислення кількості розміщень

$$A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1).$$

Для того щоб в учнів не сформувалася думка, що такі задачі можна розглядати тільки з числами, потрібно розглянути інші задачі.

Задача 6. Вінні-Пух, П'ятачок і Сова збиралися на день народження до Віслючка Іа і почали вирішувати, в якому порядку вони вручатимуть подарунки. Скільки можливих варіантів у них є?

Відповідь. 6.

Задача 7. Мама Коза пішла за молоком, а семеро козенят почали гратися в «потяг». Проте відразу засперечалися, в якому порядку їм «їхати». Тоді вони вирішили перепробувати всі можливі випадки. Цікаво, скільки часу вони витратять, якщо кожний новий «потяг» буде «їздити» хоча б одну хвилину? Відповідь. 84год.

]Потребапропедевтики вивчення початків теорії ймовірностей в основній школі не викликає сумніву. У 5 —6 класах є можливість готувати учнів до ознайомлення з класичним означенням імовірності, теоремами про додавання і множення ймовірностей. На перших етапах навчання достатньо пояснити учням поняття випадкової події як такої, що може відбутися або не відбутися під час деякого випробування, а ймовірність події розглядати саме як можливість, шанс.

Причому, звертаючись до життєвого досвіду проведення й участі у різноманітних іграх і жеребкуваннях, можна говорити про більш або менш можливі події, неможливі та вірогідні події. Так, після вивчення у 5 класі звичайних дробів можна один урок присвятити темі «Звичайні дроби та підрахунок шансів на успіх», на якому ознайомити учнів з поняттям події та її ймовірності під час розв’язування задач на підрахунок шансів на виграш.

Задача 1. Підкинемо гральний кубик. Ти виграєш, якщо на верхній грані кубика випаде 6 очок. Який у тебе шанс виграти з одного підкидання?

Розв'язання. Під час підкидання кубика на верхній грані може випасти або 1, або 2, або 3, або 4, або 5, або 6 очок. Тобто існує 6 різних можливостей появи певного числа очок. Виграшною є тільки одна з шести. Отже, шанс на виграш становить 1 до 6. Це можна записати так: 1:6 або 1/6. При цьому кажуть, що шанс виграти дорівнює 1/6. [5, 37с.]

Задача 2. На столі лежать два червоних і три жовтих яблука. Миколка

навмання, не дивлячись, бере одне яблуко. Наталка й Іринка загадали; якщо Миколка візьме червоне яблуко, то виграє Наталка, якщо жовте — Іринка. У кого з дівчат більше шансів на виграш? Чому?

Розв'язання. Миколка може взяти будь-яке одне з п'яти яблук, тобто має всього п'ять різних можливостей взяти яблуко. У двох з них взяте яблуко може бути червоним, а в трьох — жовтим. Отже, у Наталки шанс виграти дорівнює 2/5, а у Іринки — 3/5.

В обох задачах ішлося про деяку подію. У кожному випадку відбувалося певне випробування — підкидався гральний кубик, навмання бралося яблуко. Кожне з випробувань мало деяку кількість наслідків, результатів випробування, а подія, яка розглядалася («випало 6 очок», «Миколка взяв червоне яблуко», «Миколка взяв жовте яблуко»), могла відбутися, а могла і не відбутися.

У такому разі кажуть, що подію, яка може відбутися або не відбутися під час деякого випробування, називають випадковою.

Крім того, ставилося завдання оцінити можливість настання тієї чи іншої події. Французький математик Б. Паскаль, який одним із перших почав досліджувати подібні задачі, назвав чисельну оцінку можливості того, що певна подія відбудеться, імовірністю.

Події, як правило, позначають великими латинськими буквами *A, B, C* тощо.

Імовірність події позначають буквами *P* або *p.* Отже, в задачі 1 імовірність події «випало 6 очок» дорівнює 1/6, або $p = 1/6$.

У задачі 2 подія *A* — «Миколка взяв червоне яблуко» і $P(A) = 2/5$, подія В — «Миколка взяв жовте яблуко» і $P(B) = 3/5$.

Можемо зробити висновок, що ймовірність деякої події можна записати дробом, знаменник якого — кількість усіх можливих наслідків деякого випробування (досліду), а чисельник — кількість наслідків, які сприяють здійсненню цієї події.

Якщо *A* — деяка подія, то

$$P(A) = \frac{\text{Кількість наслідків випробування, які сприяють події } A}{\text{Кількість усіх наслідків випробування}}$$

Зрозуміло, що під час проведення того самого випробування одні з подій більш можливі (мають більшу ймовірність), інші — менш можливі (мають меншу ймовірність). Так, у задачі 2 подія «Миколка взяв червоне яблуко» менш можлива, ніж подія «Миколка взяв жовте яблуко». Крім того, існують події, які завжди відбудуться внаслідок випробування, а є такі, що ніколи не відбудуться. Наприклад, під час підкидання грального кубика подія «випало більше ніж 6 очок» жодного разу відбутися не може, а подія «випало число від 1 до 6» завжди відбудеться.

Таку подію, яка обов'язково відбудеться внаслідок проведення деякого випробування, називають ***вірогідною.***

Подію, яка ніколи не відбудеться внаслідок проведення деякого випробування, називають ***неможливою.***

Отже, подія «випало більше ніж 6 очок» є неможливою, подія «випало число від 1 до 6» є вірогідною.

Задача 3. Визначити для кожного випробування, які з наведених подій є випадковими, вірогідними, неможливими:

а) підкидають гральний кубик і фіксують кількість очок, що випали на верхній грані:

подія А — «випало число З»;

подія *В* — «випало число, менше ніж 7»;

подія С — «випало парне число»;

подія І) — «випало число, що ділиться на 7»;

подія *Е* — «випало число, менше ніж 5»;

б) у мішечку 3 жовтих, 4 синіх і 5 зелених кульок. Навмання виймають одну кульку:

подія А — «витягнуто зелену кульку»; подія В — «витягнуто синю кульку»; подія С — «витягнуто білу кульку»; подія 2) — «витягнуто кольорову кульку»; подія *Е* — «витягнуто жовту або синю кульку».

Відповідь: а) події *А, С, Е* **—** випадкові, *В* — вірогідна, D— неможлива; б) події *А, В, Е* — випадкові, D — вірогідна, С — неможлива.

Задача 4. Обчислити ймовірності подій, зазначених у задачі 3.

Розв'язання: а) у цьому випробуванні всього 6 усіх можливих наслідків.

Події *А* — «випало число 3» — сприяє тільки один наслідок випробування, отже, *P(A) = 1/6*;

події *В* — «випало число, менше ніж 7» — сприяють усі 6 наслідків випробування, отже, *P(B) =6/6=1;*

події С — «випало парне число» — сприяють три наслідки: випало або число 2, або число 4, або число 6, отже, *P(C)* = 3/6=1/2;

для події D — «випало число, що ділиться на 7» — немає жодного наслідку, який би сприяв тому, щоб вона відбулася, отже, *P(D)* **-** 0/6 = 0;

події *Е* — «випало число, менше ніж 5» — сприяє чотири наслідки: випало або число 1, або число 2, або число 3, або число 4, отже, *P(E)* **=** 4/6=2/3;

б) у цьому випробуванні є всього 3 + 4 + 5 = 12 усіх можливих наслідків.

Події *А* — «витягнуто зелену кульку» — сприяє 5 наслідків випробування, отже, Р(А) =5/12;

події *B* — «витягнуто синю кульку» — сприяє 4 наслідки, отже, *P(B)*= 4/12=1/3;

для події С — «витягнуто білу кульку» — немає жодного наслідку, який би сприяв тому, щоб вона відбулася, отже, *P(C) =0/12 = 0;*

події О— «витягнуто кольорову кульку» — сприяють усі 12 наслідків випробування, отже, Р(Б) = 12/12= 1;

події *E* — «витягнуто жовту або синю кульку» — сприяють 3 + 4 = 7 наслідків, отже, *P(E) = 7/12.*

Після розв'язування задачі 4 можна зробити такі висновки.

Оскільки вірогідній події сприяють усі наслідки випробування, то її ймовірність дорівнює 1.

Для неможливої події немає жодного наслідку, який би сприяв її появі, отже, ймовірність неможливої події дорівнює 0.

Імовірність будь-якої випадкової події завжди більша за 0 і менша за 1. Наведені приклади не тільки готують учнів до сприйняття класичного означення ймовірності, а й показують одне з можливих застосувань поняття звичайного дробу.

Вивчаючи у 6 класі дії над звичайними дробами можна розглянути задачі на додавання та множення ймовірностей.

Задача 5. У ящику є 3 жовтих, 4 червоних і 5 зелених кульок. Знайти ймовірність того, що навмання витягнута з ящика кулька буде жовтого або червоного кольору.

Перш ніж розв'язувати цю задачу, слід повторити деякі відомості, з якими учнів ознайомлювали у 5 класі. Це може відбуватися, наприклад, так.

Учитель: У чому полягає випробування, про яке йдеться у задачі?

Учень: Навмання витягують кульку з ящика.

Учитель: Скільки всього кульок у ящику?

Учень: 12.

Учитель: Отже, можна витягнути будь-яку з 12 кульок. Тобто є 12 різних наслідків цього випробування. При цьому, наприклад, може відбутися подія «витягнуто жовту кульку». Як оцінити можливість (імовірність) здійснення такої події? Давайте пригадаємо, як ми робили це у 5 класі (бажано, щоб до уроку був підготовлений плакат, який учитель може використати під час бесіди).

A — подія, *P(A)* — ймовірність події *A:*

P(A) = m/n ,

де *n* — кількість усіх наслідків випробування;

m — кількість наслідків випробування, які сприяють події *A*.

Позначимо подію «витягнуто жовту кульку» літерою *Ж*. Скільки наслідків випробування сприяє тому, щоб подія *Ж* відбулася? Учень: 3 наслідки. Учитель: Тоді чому дорівнює *P(Ж)*?

Учень: P(Ж) = 3/12 =1/4.

Аналогічно учні обчислюють імовірність появи червоної, зеленої кульок. *Розв'язання.* Випробування полягає у витягуванні однієї кульки з ящика. Нехай подія *A* — «витягнуто жовту або червону кульку». Оскільки все одно яку кульку, жовту або червону, витягнуто і при цьому кулька не може бути водночас жовтою і червоною, то кількість наслідків випробування, що сприяють появі жовтої або червоної кульки, становить 3 + 4 = 7. Кількість усіх можливих наслідків випробування 12, Тоді *P(A) = 7/12*.

Далі пропонуємо учням записати ймовірність події *A* у такому вигляді:

P(A) = P(Ж або Ч) = 7/12=(3+4)/12 =3/12+4/12=1/4+1/3 = P(Ж) + P(Ч), тобто

P(Ж або *Ч) = P(Ж) + P(Ч).*

Отже, для обчислення ймовірності події «витягнуто жовту або червону кульку» можна обчислити ймовірності подій «витягнуто жовту кульку» і «витягнуто червону кульку», а потім їх додати.

Тут використано одне з основних правил обчислення ймовірностей — правило додавання ймовірностей.

Якщо дві події, які не можуть відбутися одночасно, то ймовірність того, що відбудеться одна з двох подій (все одно яка), дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Після узагальнення слід повернутися до задачі 5 і знайти ймовірність того, що навмання витягнута з ящика кулька буде жовтою або зеленою, червоною або зеленою.

Задача 6. В одній коробці є 4 синіх і 5 червоних олівців, а у другій — 3 синіх і 7 червоних олівців. Навмання з кожної коробки виймають по одному олівцю. Чому дорівнює ймовірність того, що обидва вийняті олівці будуть синіми?

Розв'язання. Випробування полягає в тому, що з кожної коробки виймають по одному олівцю. Нехай подія *А* — «обидва олівці сині». Визначимо кількість усіх можливих наслідків цього випробування і кількість наслідків, що сприяють події *А*. *З* першої коробки один олівець можна вийняти 4 + 5 = 9 різними способами. З другої коробки — 3 + 7 = 10 різними способами. Кожний із 9 способів витягування олівця з першої коробки можна поєднати з кожним із 10 способів витягування олівця з другої коробки, тобто є 9•10 = 90 способів вийняти по одному олівцю з двох коробок. Отже, n = 90. Синій олівець з першої коробки можна вийняти 4 способами, з другої коробки — 3 способами, тобто є 4 •3 = 12 способів вийняти два синіх олівці. Отже, m = 12. Тоді P(A)=12/90=2/15.

Можна розглянути інше розв'язання. Нехай подія С, — «з першої коробки вийнято синій олівець», подія C_2 — «з другої коробки вийнято синій олівець». Причому подія С, не залежить від того, відбудеться чи ні подія C_2, а подія C_2 не залежить від того, відбудеться чи ні подія C_1. У такому випадку кажуть, що ЦІ події незалежні. Обчислимо ймовірності цих подій: $P(C_1) = 4/9$ і $P(C_2) = 3/10$. Далі пропонуємо учням записати ймовірність події *A* у такому вигляді: $P(A) = P(C_1$ і $C_2) = 12/90=(4•3)/(9/10)=4/9•3/10= P(C_1)•P(C_2)$, тобто $P(C_1$ і $C_2) = P(C_1)•P(C_2)$.

Отже, для обчислення ймовірності події «обидва олівці сині» можна обчислити ймовірність подій «з першої коробки вийнято синій олівець» і «з другої коробки вийнято синій олівець», а потім їх перемножити.

Під час розв'язування було використане ще одне правило обчислення ймовірностей — правило множення. Його можна сформулювати так.

Нехай маємо дві події, здійснення кожної з яких не залежить одна від одної. Імовірність того, що дві незалежні події відбудуться одночасно, дорівнює

добутку ймовірностей цих подій.

Після узагальнення слід повернутися до задачі 6 і знайти ймовірність того, що навмання витягнуті по одному олівці будуть червоними. Якщо поставити вимогу знайти ймовірність того, що два олівці будуть різних кольорів, то під час розв'язування можна продемонструвати використання обох правил. Проте це завдання набагато складніше від попередніх.

1. 3. Така нова стара проблема.

Розвиток теорії ймовірностей як науки і розширення сфери її застосування чинить вплив на формування ймовірнісно-статистичної лінії при викладанні багатьох предметів, зокрема математики, в загальноосвітній школі вже протягом понад століття. Так, елементи теорії ймовірностей і статистики викладалися в школах ряду країн вже в XIX ст. [15, 105с.] і на початок XX ст. була складена певна система вивчення цих дисциплін, основним розділом якої була комбінаторика і окремими питаннями розглядались біном Ньютона та елементи теорії ймовірностей, як гарна ілюстрація теорії сполук. З теорії ймовірностей вивчалися поняття: випадкова подія і класична ймовірність, теореми додавання і множення імовірностей, математичне сподівання, біноміальний розподіл, закон великих чисел. На закінчення розглядався розділ про страхування, в якому вводилося поняття статистичної ймовірності. Приблизно за такою ж схемою планувалося викладання теорії ймовірностей і в програмах початку XX століття у розвинутих країнах Західної Європи (за винятком Франції) [18, 68с.].

У невеликому обсязі елементи теорії ймовірностей і статистики викладалися також в російських підручниках алгебри XIX ст., наприклад, у підручниках М. Т. Щеглова і К. Д. Краєвича. Професор Київського політехнічного інституту, один із засновників Київського математичного товариства, В. П. Єрмаков у1878 р. видав перший в Україні підручник з теорії ймовірностей. А у 1884 р. організував випуск першого і єдиного в Росії науково-популярного видання «Журнал элементарной математики», в якому не раз з'являлися статті про теорію ймовірностей, адресовані учням старших класів гімназій, любителям математики, вчителям. У 1896 р. для читачів, не обізнаних з вищою математикою, видається книжка М. М. Філіпова «Елементарна теорія ймовірностей». Професор П. О. Некрасов теж наприкінці XIX ст. рекомендував розв'язувати задачі з області статистики в середній школі. Про це він говорив, зокрема, у 1899 р. на окружному з'їзді викладачів у Москві.

На початку XX ст. в Росії у зв'язку з розпочатим рухом за реформу середньої математичної освіти піднімається питання про внесення до шкільних програм деяких понять теорії ймовірностей. Як відгук на це, директор Урюпінського реального училища П. С. Фролов у 1901 р. складає програму курсу теорії ймовірностей для середньої школи і відповідний їй підручник. У 1907 р. П. О. Некрасов і П. С. Фролов розробляють проект програми з математики для гімназій, в який вносять елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики. Проект викликав жваву полеміку. Розгортаються дебати на I і II Всеросійських з'їздах викладачів математики. Російська Академія наук створює спеціальну комісію, якій доручається висловити своє ставлення до даного проекту. Міністерством народної освіти проект прийнятий не був, однак сьогодні він представляє цінність, як перший історичний документ, що відображає боротьбу поглядів учених і викладачів за включення в програму середньої школи такого розділу, який сприяє формуванню світогляду, збагачує знаннями з області випадкових явищ, розвиває здібності до логічного мислення.

Думка про введення елементів теорії ймовірностей і статистики не згасла, більш того, вона отримала визнання значної частини передових учителів. Тому природно, що 17 травня 1914 р. Міністерство торгівлі і промисловості затверджує створену при Міністерстві програму з теорії ймовірностей для комерційних училищ. У 1915 р. з'являються два підручники елементів теорії ймовірностей, адресовані цим училищам. І можна сказати, що в теоретичному плані в Росії були досягнуті більш відчутні результати, ніж в інших країнах [16]. Україна, хоч і була поділена в цей час між Росією і Австро-Угорщиною, не залишилась осторонь реформа горської о руху. Так, у формуванні планів для російських гімназій активну участь брало Київське фізико-математичне товариство, а в Галичині (де лишались лічені школи з українською мовою викладання) була створена триступенева освіта: нижчий ступінь — I-III класи, середній — IV-V класи, вищий — VI-VIII класи гімназій і у VIII класі вивчалися комбінаторика, елементи теорії ймовірностей, статистика із застосуванням до теорії життєвого страхування. На відміну від Росії, у більшості країн Європи теми з математичної статистики в шкільному курсі математики початку століття не зустрічаються. Деяких понять (наприклад, середнє арифметичне) торкаються лише у зв'язку з детерміністичними змінними. Якщо ж мова йшла про випадкову змінну, то не зверталась увага на її характер, не було співставлення випадкової і детерміністичної змінних (наприклад, при розгляді діаграм). Однак, результатом першого періоду руху за реформу математичної освіти стало те, що в 20—30-х роках викладання елементів теорії ймовірностей впроваджується в школах ряду країн, як то: Франція, Англія, США, Австрія, Голландія, Швеція, Швейцарія, країни Балтії.

Стосовно Росії початку радянського періоду, то деякі питання теорії ймовірностей включалися до проекту програми єдиної трудової школи, який був створений у 1919 р. Поняття статистики дещо ширше вводилися в шкільний курс математики у 1924—1932 рр., коли навчання проводилось за програмами, складеними на засадах комплексної системи. У них передбачалось іноді викладання і понять теорії ймовірностей . Нова програма з математики для шкіл, за якою почати працювати з 1935 р. і яка проіснувала майже два десятиліття, передбачала в курсі алгебри X класу вивчення елементів комбінаторики та формули бінома Ньютона. Елементи теорії ймовірностей і статистики в ній не розглядалися.

З кінця 50-х років у шкільній освіті починається другий період руху за реформу шкільної математики. Більш гостро постає питання не лише про зміст, але й методи викладання математики в школі, щоб паралельно з вивченням змісту більш ефективно розвивати також мислення учнів. Це відображається в тематиці міжнародних нарад з викладання шкільного курсу математики і дослідженнях вчених. Так, на XIX Міжнародній конференції з народної освіти було відмічено, що «математика і притаманний їй стиль мислення повинні розглядатися як суттєвий елемент загальної культури сучасної людини, навіть якщо вона не займається діяльністю в галузі точних наук або техніки». Розглядаючи цілі викладання математики в школі, американський математик-педагог Д. Пойа, наприклад, відмічає, що «... перш за все — і це безсумнівно саме головне — необхідно навчити молодь думати». В цьому аспекті теми з теорії ймовірностей і статистики виявилися, безперечно, в числі необхідних для включення в шкільну математику. Це відображалося не тільки в громадській думці однієї або декількох країн, а і в рекомендаціях і резолюціях міжнародних конференцій, конгресів і симпозіумів (Единбург, 1958; Раймонт, 1959; Будапешт, Стокгольм, 1962; Афіни, 1963; Москва, 1966). У багатьох країнах елементи теорії ймовірностей і математичної статистики або одна з цих тем були включені в обов'язкову програму. З цих пір на різних рівнях складності ці теми викладаються в США, Франції. Англії, Японії, Голландії. Австралії, Австрії, Болгарії, Угорщині, Іспанії, країнах Скандинавії та інших країнах.

В СРСР у цей період питання про включення в шкільний курс математики елементів теорії ймовірностей і ЇЇ застосування ставилось неодноразово. В необхідності цієї справи були переконані як провідні математики, так і окремі працівники освіти, передові вчителі-практики .Після зміни структури шкільної освіти у 1958 році новою програмою передбачалося вивчення комбінаторики та підрахунку ймовірностей в X класі. У 1967 році був зроблений ще один сміливий крок в цьому починанні. Зокрема, в проекті програми з математики, підготовленої В. Г. Болтянським, А. М. Колмогоровим, М. Ю. Макаричевим, О. І. Маркушевичем планувалося в курсі алгебри і початків аналізу X класу розглянути тему «Початки теорії ймовірностей», а на факультативних заняттях в X класі вивчати тему за вибором — «Додаткові питання теорії ймовірностей». Проте в остаточному варіанті програма з математики (за якою почали навчання в 1968—1969 н. р. містила тільки у IX класі елементи комбінаторики. Теми з теорії ймовірностей були віднесені до програми факультативів і програм спеціалізованих класів, а елементи статистики так і залишились осторонь шкільного курсу математики.

Створення спеціалізованих класів і шкіл стало значною подією в модернізації шкільної освіти. З'явилась реальна можливість вкраплювати в зміст шкільної математики сучасні ідеї математичної науки, хоч і не для широкого кола школярів. Цікавим в цьому плані є досвід роботи створеної в 1963 р. Республіканської спеціалізованої школи-інтернату фізико-математичного профілю при Київському університеті (з 1992 р. Український фізико-математичний ліцей). Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики тут викладаються не тільки на факультативах, а і в обов'язковому курсі математики, починаючи з VIII класу [7, 39с.].

У грудні 1977 р. була прийнята постанова ЦК КПРС і Ради Міністрів СРСР «Про подальше удосконалення навчання, виховання учнів загальноосвітніх шкіл і підготовки їх до праці». Комісія під керівництвом А. М. Колмогорова переглянула діючу програму, зробила в ній скорочення і опублікувала в 1978 р. типовий проект програми з математики для восьмирічної і середньої школи. Крім цього, було створено дві комісії, які очолювали І. М. Виноградов і А. М. Тихонов, які опублікували в 1979 р. свої проекти програм з математики, що суттєво відрізнялись від типового проекту і різнились між собою. І хоча в проектах цих комісій були теми «Елементи комбінаторики і теорії ймовірностей» в одному, і «Біном Ньютона і елементи комбінаторики» в другому, а в основному проекті вони були вилучені у зв'язку із скороченням змісту освіти, у 80-х роках загальноосвітні школи продовжують свою роботу за програмами з математики, в яких повністю відсутні і елементи комбінаторики, і елементи теорії ймовірностей, і елементи статистики.

В останнє десятиріччя проблема вивчення елементів теорії ймовірностей і статистики в нашій школі постала з особливою гостротою. В матеріалах VI Міжнародного Конгресу з математичної освіти (1988 р.) відмічається, що «в умовах інформаційного вибуху виникає потреба в умінні передавати величезний обсяг інформації, опрацьовувати його і робити обгрунтовані висновки.

Формування і розвиток ймовірносного мислення і відповідних умінь у підростаючих громадян розглядається як актуальна вимога сучасного розвитку суспільства, і ще в більшій мірі — майбутнього. До цього треба віднестися особливо уважно, тому що СРСР, очевидно, є однією з небагатьох країн, в шкільному курсі якої елементи теорії ймовірностей і математичної статистики відсутні повністю. Введення додаткових розділів у шкільну програму — завдання непросте... Тим паче, не можна затягувати з компетентним обговоренням цього питання» [17, 64с.]. Тому цілком закономірним є те, що в концепції математичної освіти, розробленій у 1989 р. лабораторією навчання математики НДІ СІМО АПН СРСР разом з кафедрою вищої математики ЛДПІ ім. В. І. Ульянова, пропонується традиційне ядро шкільного курсу математики доповнити деякими ймовірносно-статистичними поняттями. На думку авторів, необхідно ознайомити учнів з поняттям ймовірності та частоти, правилами підрахунку скінченних та геометричних ймовірностей, з поняттям незалежних подій і умовною ймовірністю, з деякими статистичними методами обробки даних. Основний напрямок впровадження відповідного змісту в шкільний курс математики — це включення ймовірносних і статистичних ідей в задачний матеріал шляхом розширення традиційного набору формул і арсеналу методів розв'язування. Вже на початкових стадіях навчання повинні регулярно зустрічатися задачі, що вимагають розгляду і підрахунку різних варіантів на основі простих теорем теорії сполук [8, 138с.]. У зв'язку з диференціацією та гуманізацією шкільної освіти почали з'являтися програми для класів різних профілів, створюватися відповідні підручники, їх автори додержуються думки, що елементи стохастики необхідні всім випускникам шкіл, незалежно від обраного ними профілю.

В Україні як самостійній державі ця проблема стоїть не менш гостро. Необхідно створювати свої навчальні програми і підручники, які би відповідали світовому рівню і вимогам сучасного розвитку людського суспільства. Міністерством освіти України, Академією педагогічних наук України, Національною Академією наук України підготовлено проект Державного стандарту загальної середньої освіти в Україні з математики, в якому традиційні змістові лінії доповнюються такими, як «Елементи теорії множин. Комбінаторика» та «Елементи стохастики», формулюється обов'язковий мінімум змісту навчання з цих тем та вимоги до його засвоєння [13, 129с.]. Починають друкуватися українські підручники з математики, в їх числі пробний підручник з алгебри і початків аналізу для 10—11 класів, автори якого М. І. Шкіль, 3. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. В ньому є розділи «Елементи комбінаторики», «Початки теорії ймовірностей», «Вступ до статистики». Перші кроки зроблені, але для того, щоб такі необхідні в сучасному житті ймовірносно-статистичні знання міцно і органічно ввійшли у шкільну освіту, потрібна копітка праця протягом всього навчання математики і, напевно, під час вивчення інших предметів (фізики, хімії, біології тощо).

1.4. Заради чого необхідно викладати теорію ймовірностей?

На перший погляд здається, що точну відповідь на це питання можна дати лише в тому випадку, якщо відомо, в якій формі і на якому рівні здійснюється викладання теорії ймовірностей. Тим паче, деякі загальні твердження на цю тему можливо висловити без яких би там не було уточнюючих припущень. Мається на увазі головні цілі викладання теорії ймовірностей. Саме їх, на мою думку, повинен ставити перед собою кожний, хто викладає будь-який розділ теорії ймовірностей, хоча наголоси, зрозуміло, можуть варіюватися залежно від типу навчального закладу. Отже, я вважаю, що при виборі головних цілей будь-якого курсу теорії ймовірностей належить керуватися такими мотивами:

А) Теорію ймовірностей необхідно викладати тому, що вона відіграє важливу роль у розвитку мислення учнів.

Б) Теорію ймовірностей необхідно викладати тому, що її висновки знаходять застосування у повсякденному житті, науці, техніці тощо.

В) Теорію ймовірностей необхідно викладати тому, що вона має важливе, ні з чим незрівнянне значення для математичної освіти.

Прокоментуємо коротко ці аргументи.

А) Ознайомлення з основними поняттями теорії ймовірностей необхідне для того, щоб ми могли пізнавати оточуючий світ і створювати одну з науково обгрунтованих картин цього світу. Викладання будь-якого розділу математики благодатно позначається на розумовому розвитку учнів, оскільки прищеплює їм навички ясного логічного мислення, що оперує чітко визначеними поняттями. Все сказане про викладання будь-якого розділу математики в повному обсязі стосується і викладання теорії ймовірностей, але навчання «законам випадку» грає дещо більшу роль і виходить за межі звичайного. Слухаючи курс теорії ймовірностей, учень пізнає, як застосовувати прийоми логічного мислення в тих випадках, коли необхідно мати справу з невизначеністю (а такі випадки виникають на практиці).

Вивчення теорії ймовірностей належним чином впливає і на характер учнів, наприклад, розвиває хоробрість, оскільки дає змогу зрозуміти, що при певних обставинах невдачі можна віднести до випадковостей і, отже, зазнавши невдачі, зовсім не варто відмовлятися від боротьби за досягнення поставленої мети. Люди, що знаходяться на низькому рівні розвитку, схильні до надмірної недовірливості: яка би біда не гранилась з ними, вони схильні приписувати її чиємусь злому наміру, навіть якщо подібні твердження позбавлені найменших підстав. Пояснюється це необізнаністю з таким поняттям, як випадковість. Викладання теорії ймовірностей може принести безперечну користь, оскільки дозволяє остаточно порвати з пережитками магічного мислення кам'яного століття. Вивчаючи теорію ймовірностей, люди стають більш доброзичливими і толерантними до оточуючих, і, отже, легше вписуються в життя суспільства.

Б) У повсякденному житті нам постійно доводиться зустрічатися з випадковістю, і теорія ймовірностей вчить нас, як діяти раціонально з урахуванням ризику, пов'язаного з прийняттям окремих рішень. Гарним прикладом застосування теорії ймовірностей у повсякденному житті може слугувати вибір найбільш доцільної форми страхування. При плануванні сімейного бюджету або подорожі за кордон часто доводиться оцінювати витрати, які, у певній мірі, мають випадковий характер. Ці приклади показують, що ознайомлення на тому чи іншому рівні із законами випадку необхідні кожному.

Застосування теорії ймовірностей у науці, техніці, економіці тощо набуває раз у раз зростаючого значення. Саме тому у все більшого числа людей в процесі роботи виникає необхідність у вивченні теорії ймовірностей. Зрозуміло, обсяг курсу теорії ймовірностей залежить від типу навчального закладу. Але не треба забувати и про Інше: сучасна освічена людина, незалежно від професії і роду діяльності, повинна мати принаймні загальне уявлення про те, що таке атомна енергія, радіоактивність, генетика і т. ін. Перелік необхідних знань включає в себе і ознайомлення, нехай навіть суто поверхове, з найпростішими поняттями теорії ймовірностей. Нині, коли прогноз погоди містить повідомлення про ймовірність дощу завтра, кожен повинен знати, що власне це означає.

В) Вивчення теорії ймовірностей сприяє кращому розумінню взаємозв'язків між дійсністю і математикою, математичних моделей дійсності. Якщо в курсі математики теорія ймовірностей обминається повною мовчанкою, то в учнів складається невірне уявлення про істинний характер математики та її застосування. Люди, не знайомі з теорією ймовірностей, поділяють помилкову думку, нібито математичні методи можна застосовувати лише в тих випадках, коли йдеться про прості й точні залежності між величинами, які можна точно виміряти і обчислити. Нерідко можна почути і твердження, наче математичні методи непридатні для вивчення і опису тих або інших явищ, через те що ті «дуже складні». Подібний забобон живе в свідомості людей, які не вивчали ні математику, ні, тим паче, теорію ймовірностей. Саме ті, хто дотримується цих докорінно невірних поглядів, до недавнього часу перешкоджали (принаймні, у деяких країнах) застосуванню математичних методів в економіці, соціології, біології, психології та інших галузях науки. Не можна не згадати й про думку тих, хто вважає, що викладання теорії ймовірностей не виходить за межі програм з математики в учбових закладах середнього або нижчого рівня. Ця думка узгоджується з іншими сучасними тенденціями у викладанні математики, що легко пояснити: її поділяють ті, хто викладає теорію ймовірностей і своєю діяльністю реалізує нові тенденції. Цілком очевидно, що викладання теорії ймовірностей спрощується, якщо учні заздалегідь ознайомлені з теорією множин або теорією булевих алгебр. З іншого боку, вивчення теорії ймовірностей дає чудову нагоду для більш ґрунтовного і глибокого ознайомлення як з теорією множин, так і з теорією булевих алгебр.

1.5. Методичні особливості вивчення теми

В основній масовій школі рекомендується розглянути питання «Розв'язування комбінаторних задач. Правила додавання і множення». Система комбінаторних вправ і задач для 5-7 класів відповідає тим самим умовам, що і в початковій школі, але отримує подальший розвиток: підвищується сюжетна різноманітність задач; множини складаються з більшої кількості елементів; використовуються наочні засоби організації перебору; використовуються комбінаторні правила додавання і множення.

На цьому етапі не ставиться мета введення формул і означень. Шлях до ознайомлення учнів з ідеями комбінаторики відбувається не стільки шляхом розширення теоретичного матеріалу, скільки добором задач таким чином, щоб у них для формування комбінаторних понять і правил використовувався навчальний матеріал поточних тем програми. При цьому задачі, які розв'язують з метою формування комбінаторних знань та вмінь, з одного боку, допомагають засвоєнню певної теми програми, яку вивчають, з іншого боку — ознайомлюють учнів з окремими проявами тих комбінаторних ідей, до систематичного вивчення яких учні дійдуть пізніше.

Включення до арифметичного, геометричного та алгебраїчного матеріалу математики 5—7 класів комбінаторних задач дає змогу активізувати розумову діяльність учнів. Для цих задач особливе значення має не отримання відповіді, а процес її знаходження, процес переробки вхідної інформації на вихідну. На першому місці стоїть пошук розв'язування, його реалізація і пізнавальні висновки з опрацьованої теми. В цілому процес роботи над комбінаторною задачею має явно виражений дослідницький характер, містить елементи творчості.[4, 247с.]

Про поняття «задача» і функції задач у навчанні.

Склад розумових дій і прийомів розумової діяльності під час розв'язування задач

У психолого-педагогічній літературі відсутня єдина думка щодо трактування поняття «задача». Різноманітні сучасні підходи до поняття «задача» можна об’єднати у дві групи залежно від того до яких систем застосовується це поняття. До першої групи можна віднести трактування цього поняття, поширені в роботах із кібернетики, дидактики та методики математики. У них термін «задача» трактується як ситуація зовнішньої діяльності, яка може бути проаналізована й описана у відриві від суб'єкта, що здійснює діяльність. Такий підхід позбавляє поняття «задача» певного психологічного змісту. До другої групи належать трактування поняття «задача», що включають психологічний зміст і зводяться до загальної характеристики задачі як мети, заданої в певних умовах, як особливої характеристики діяльності суб'єкта. Термін «задача» тут розглядається як суб'єктивне, психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, в якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта.

Розв'язування задачі як процес розумової діяльності суб'єкта досліджується психологією. Останнім часом у психології, кібернетиці, логіці досліджуються задачі як такі, а не лише процес їх розв'язування. Зокрема, англійський учений У. Рейтман у книзі «Познание и мышление (моделирование на уровне информационных процессов)», М.: Мир. — 1968 відзначає: «Если мы пытаемся понять, как люди решают задачу какого-либо вида, необходимо иметь хорошие представлення о структуре решаемой задачи». У його монографії з евристичного програмування один із розділів присвячений розгляду задач.

У вітчизняній психології процес розв'язування задач розуміється як складний процес аналітико-синтетичної діяльності: процес спрямованої взаємодії суб'єкта, пізнаючого, і мислячого, з об'єктивним змістом задачі, що розв'язується.

Сьогодні дидактики, психологи, методисти і вчителі-практики спрямовують свої зусилля на пошук шляхів максимальної активізації пізнавальної діяльності учнів і ефективного управління нею. У зв'язку з цим виникає проблема означення функції задач у навчанні, місця, ролі і цільового призначення окремих видів задачі і кожної конкретної задачі. Основні функції задач у навчанні: ***навчальна, виховна, розвивальна і контролююча.***

Навчальна функція задач спрямована на формування у школярів системи математичних знань, навичок і вмінь на різних етапах їх засвоєння.

Виховна функція задач спрямована на формування у школярів наукового світогляду, пізнавального інтересу, навичок пізнавальної праці, екологічного, естетичного, економічного, правового, патріотичного виховання та інших позитивних властивостей і якостей особистості.

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення, зокрема, логічного, просторових уявлень та уяви, на формування розумових дій і прийомів розумової діяльності, розумової активності, пізнавальної самостійності, творчості, алгоритмічної та інформаційної культури, пам’яті, уваги тощо.

Контролююча функція задач спрямована на встановлення рівнів навченості, здібності до самостійної діяльності, рівня математичного розвитку і сформованості пізнавальних інтересів.

Жодна з названих функцій не може виступати ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель повинен виділяти провідну функцію і при належній цільовій установці домагатися її реалізації перш за все. Кожна з основних функцій важлива в загальній системі навчання, але за останні роки особливо підкреслюється роль розвивальної функції задач, якій повинні підпорядковуватися всі інші функції. Не випадково видатні вчені Е. Резерфорд,

Н. Бор, А. Ейнштейн, П, Л. Капиця, Б, М. Кедров та інші зазначали, що задача повинна не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явищ, що вивчаються.

Озброєння учнів методами та способами розв'язання задач, навчання їх самостійному пошуку розв'язань задач — одна з важливих проблем шкільної математичної освіти. Методи та способи розв'язування визначаються як характером самих задач, так і тими знаннями, вміннями, засобами, які є у розпорядженні учнів на даному етапі навчання. У дослідженні психологів, дидактів і методистів за останні роки Переконливо показано, що уміння школярів розв'язувати задачі не знаходиться в пропорційній залежності від кількості розв'язаних задач. Учень може розв'язати велику кількість задач, проте якщо у нього не сформований загальний підхід до задачі, її аналізу, пошуку плану розв'язання, самостійно розв'язувати задачі він не навчиться.

Психологічні та методичні дослідження проблеми навчання розв'язанню задач встановлюють такі причини не сформованості в учнів загальних умінь розв'язувати задачі:

умінь розв'язувати задачі:

1. Не сформованість уміння аналізувати задачу, виділяти умови і вимоги, проникати в її сутність, орієнтуватися в ситуаціях, сформульованих в умові задачі, у зв'язках між даними і шуканими, розуміти задачу.

2. Власної діяльності учнем після розв’язання задачі, необхідного для того, щоб виділити суттєве в структурі розв'язання, виділити інформацію, важливу для розв'язування інших задач.

3. Недостатнє управління розумовою діяльністю учнів з боку вчителя у процесі розв'язування задач.

4. Недостатня увага до з'ясування функцій певних видів задач і кожної конкретної задачі, їх місця в системі навчання.

Коли йдеться про методи чи способи розв'язання задач, то маються на увазі деякі приписи, вказівки про способи дій суб'єкта, який розв'язує задачу, які потрібно виконати, щоб розв'язати задачу. Важливо також дати орієнтири щодо доцільності застосування того чи іншого методу чи способу. Для більшості стандартних задач шкільного курсу можна сформулювати алгоритми їх розв'язання. Кращий ефект у навчанні досягається тоді, коли вчитель не повідомляє учням готовий алгоритм розв'язання, а на прикладі розв'язання однієї-двох задач-моделей організовує їхню діяльність на самостійний чи колективний пошук алгоритму розв'язання і його формулювання.

Для розв'язання нестандартних задач необхідно володіти евристичними прийомами розумової діяльності. Успіх евристичної діяльності школярів значною мірою визначається сформованістю таких загальних розумових дій, як аналіз (аналіз формулювання задачі), синтез (співставлення умов і вимог), аналіз через синтез (уміння переосмислювати елементи задачі в плані різних понять), абстрагування, узагальнення, а також специфічних розумових дій: підведення під поняття, розгортання умов, встановлення суттєвих зв'язків. ЦІ прийоми мислення необхідно формувати вже на перших етапах навчання розв'язуванню задач.[26, 138с.]

Школа не може підготувати учнів до розв'язання всіх задач, з якими-їм доведеться зустрічатися в майбутній практичній діяльності. Разом з тим, розв'язуючи конкретні задачі, важливо навчати школярів загальних прийомів мислення і діяльності, загальних способів підходу до будь-якої задачі, вміння шукати розв'язання в будь-якій новій ситуації.

Не можна не погодитися з тим, що правильна організація постановки й розв'язування задач і вправ значною мірою визначає ефективність навчання математики в сучасних умовах. У роботі відомого психолога П. О. Шеварьова та його учнів описаний особливий тип асоціацій, так званих узагальнених асоціацій, до актуалізації яких зводяться розумові процеси під час розв'язування задач і вправ. Встановлені деякі закономірності формування і актуалізації узагальнених асоціацій. Зокрема, встановлені дві такі важливі закономірності, які потрібно враховувати вчителю під час підготовки системи вправ:

1. Якщо учні розв'язують однотипні задачі, в яких деяка особливість незмінно повторюється, а її усвідомлення не є необхідною умовою одержання правильної відповіді, то рівень усвідомлення учнями цієї закономірності знижується. Під впливом цієї закономірності учні можуть припускатися помилок. Наприклад, коли вчитель пропонує однотипні приклади типу $a + a + a + a + a = 5a$, $b + b + b + c + c = 3b + 2c$, а потім виду $m \cdot m \cdot m \cdot m = 4m$, що мають одну спільну особливість (однакові змінні в першому випадку сумуються, а в іншому — перемножуються), то учні перестають усвідомлювати важливість знаків додавання і множення та, за необхідності перевірити вирази першого і другого виду, допускаються помилок типу: $a \cdot a \cdot a \cdot a = 4a$, $x + x + x = x^3$.

2. Під час розв'язування однотипних прикладів і задач в учнів швидко утворюються узагальнені асоціації. Тому другу, а тим більше третю задачу, (приклад), такого типу, вони розв'язують звичайно шляхом актуалізації асоціації,

яка тільки що виникла. Ця закономірність є окремим випадком загальної психологічної закономірності утворення в свідомості людини зв'язків (асоціацій) між процесами, що повторюються.

Першочергове завдання розвивального навчання — прямим чи не

прямим шляхом формувати в процесі розв'язування задач уміння виконувати дії та прийоми розумової діяльності, що становлять механізм розв'язання

задачі.

Слід погодитися з думкою, яка висловлюється сучасними дидактиками, психологами та методистами про структури процесу розв'язування з наступних чотирьох етапів:

1. аналіз формулювання задачі;
2. пошук плану розв'язання;
3. здійснення знайденого плану, перевірка та доведення того, що одержаний розв'язок задовольняє вимогам задачі, дослідження (з'ясування, того, за яких даних задача має розв'язок, скільки їх);
4. обговорювання (аналіз) виконаного розв'язання з метою оцінки його раціональності, можливості інших способів розв'язання.[23, 57с.]

Особливо важливу роль у розв'язанні задач відіграють аналіз і синтез. Навчання розв'язуванню задач повинно починатися з навчання аналізу формулювання задачі. Справді, немає змісту приступати до розв'язування задачі, якщо учень не усвідомив її сутність, не засвоїв її умови та вимоги. Засвоєння умов і вимог задачі актуалізує дії учня з їх перетворення, виведення наслідків, що сприяє пошуку плану розв'язання. Якщо в задачі кілька даних і кілька вимог, то необхідно розчленовувати їх на елементарні, тобто такі, що далі не можна розчленувати. Під час вивчення змісту задачі співставляються дані й вимоги (синтез) з метою з'ясування, чи досить даних для відповіді на питання задачі, для виконання вимог задачі, чи немає серед даних зайвих. Нарешті, вивчаючи формулювання задачі, важливо, якщо це можливо, встановити тип і вид задачі й тим самим з'ясувати, чи. не належить задача до виду, метод чи спосіб розв'язування якого вже відомий (встановлення і використання аналогій).[25, 81с.]

У шкільній практиці деякі вчителі не приділяють належної уваги обговорюванню проведеного розв'язання і тим самим позбавляють учнів можливості добути з виконаного розв'язування позитивний досвід, який можна буде переносити в нові умови розв'язування задач.

Під час обговорювання виконаного виділяються основні ідеї розв'язання, істотні його етапи, з’ясовуються недоліки й інші можливі способи раціонального розв'язання. На цьому етапі, крім аналізу і синтезу, використовують дії узагальнення і пов'язані з нею дії абстрагування від конкретних умов задачі, від несуттєвих моментів її розв'язання та виділення суттєвих етапів, які можна перенести на розв'язування інших задач. Корисно також дати учням орієнтири щодо використання окремих ідей і етапів розв'язку в інших задачах.

1.6. Аналіз практики викладання теми в школі

Школа відіграє в процесі становлення особистості позитивну роль тільки тоді, коли весь процес, навчання і виховання спрямований на розвиток творчого потенціалу учня, його творчого мислення, формування творчої особистості.

Аналіз досліджень з даної проблеми свідчить, що неможливо переоцінити ту роль, яку відіграє в цьому навчання математики. При цьому математичні знання є не тільки продуктом пізнавальної діяльності, а й змістовою складовою цієї діяльності (М. П. Барболін), у ході якої й відбувається становлення творчої особистості учня; навчальний матеріал можна розглядати як потужний засіб розвитку творчого мислення.

Загальними цілями вивчення елементів теорії ймовірностей та комбінаторики є навчити учнів орієнтуватися в умовах, що мають ймовірнісний характер, та вміти застосовувати отримані знання для оцінювання реальності появи різноманітних подій навколишнього світу. Вивчення даної теми є ефективним лише за умови, що вчитель спирається на існуючу базу математичних знань учнів, їх життєвий досвід, сформованість абстрактного мислення, здатність до узагальнень.

Аналіз досвіду викладання цієї теми в загальноосвітній школі свідчить про те, що не менш важливою є доцільна організація навчальної діяльності учнів, спрямованої при вивченні початків теорії ймовірностей на розвиток в учнів компонентів творчого мислення, формування умінь будувати математичні моделі реальних процесів. У ході роботи з учнями підтверджено ефективність використання такої схеми: усвідомлення проблеми, формулювання математичною мовою → аналіз проблеми, інтуїтивне передбачення гіпотези → пошук шляхів розв'язування, відбір або пошук необхідної інформації → розв'язування проблеми одним чи кількома способами, обгрунтований вибір з них найбільш раціонального і зручного в конкретних умовах → узагальнення і систематизація набутого в процесі розв'язування досвіду; розповсюдження знайденого алгоритму (способу, методу) на розв’язування задач певного типу.

Деякі зауваження щодо вивчення теми.

На підготовчому етапі до розв'язування задач корисно пропонувати учням наводити приклади подій вірогідних, неможливих, випадкових; протилежних подій; виявляти, в чому полягає подія, що протилежна даній і т.ін. та обґрунтовувати свої відповіді.

Для свідомої роботи розв'язування задач доцільно привчити учнів після аналізу умови та вимоги задачі встановлювати, про яку саме подію йдеться; робити висновок, чи є ця подія вірогідною, неможливою чи випадковою, що суттєво може раціоналізувати подальший процес розв’язування. Якщо в тексті задачі йдеться про декілька подій, виявляти, чи є вони сумісними (несумісними), залежними (незалежними); чи утворюють вони повну групу подій.

На другому етапі встановлюється взаємозв'язок «задача-формула», що також вимагає обґрунтування, і будується відповідна математична модель. Не зайвою є перевірка реальності отриманих результатів.

Звичайно, формулювання текстів задач можуть бути «більш прозорими» і «менш прозорими». В «більш прозорих» формулюваннях текстів задач нерідко вже визначено, якими саме є розглядувані події (наприклад, табл. 1).

Таблиця 1

«Більш прозоре» формулювання	«Менш прозоре» формулювання
Події А і В є протилежними. Ймовірність події А дорівнює 0,34. Знайти ймовірність події В	Ймовірність виграти в лотерею дорівнює 0,34. Знайти ймовірність не виграти

«Більш прозорі» формулювання вже надають «підказку» щодо подальшого розв'язування, тому доцільно використовувати їх у класах нематематичного профілю на етапі первинного закріплення знань. Ефективнішим для підтримки зацікавленості учнів у вивченні теми, формування свідомих знань, розвитку логічного мислення учнів є використання «менш прозорих» формулювань текстів задач, задач з практичним змістом, кожна з яких є певною «розповіддю» про подію.

На мій погляд, з метою підвищення ефективності навчання учнів, з метою розвитку в них компонентів творчого мислення, доцільно пропонувати їм порівнювати розв'язування задач зі схожими, на перший погляд, умовами. Наведу приклади.

Задача1. Від школи у спартакіаді беруть участь команди футболістів, баскетболістів, дзюдоїстів. Ймовірність посісти 1-ше місце для команди футболістів 0,3; Для команди баскетболістів — 0,6; дзюдоїстів — 0,1. Знайти ймовірність того, що:

а) 1-ше місце посядуть команда футболістів і команда баскетболістів;

б) 1 -ше місце посяде тільки одна з команд — або футболістів, або баскетболістів.

Задача 2. На 1-ше місце у змаганнях з футболу претендують три команди — команди шкіл *A, B, C*. Ймовірність посісти 1-ше місце для команди футболістів школи *A* — 0,3; для команди футболістів школи *B* — 0,6; для команди футболістів школи С — 0,1. За умовами змагань відразу дві команди не можуть посісти 1-ше місце. Знайти ймовірність того, що:

а) 1 -ше місце посядуть і команда футболістів школи *А*, і команда футболістів школи *В;*

б) 1 -ше місце посяде одна з футбольних команд — або школи *А,* або школи *В*.

Розв'язання задачі 1

Подія А — 1-ше місце посяде команда футболістів. *Р(А)* =0,3.

Подія В — 1-ше місце посяде команда баскетболістів. *Р(В)*= 0,6.

Подія С — 1-ше місце посяде команда дзюдоїстів. *Р(С)*= 0,1.

Події *А, В, С є* незалежними; поява однієї з них не виключає можливості появи іншої і не залежить від появи іншої.

а) Можна застосувати формулу добутку незалежних подій:

Р(К)= Р(А) • Р(В) = 0,3 • 0,6.

б) Встановлюємо відповідність: «або» знак → «+», «і» → знак « • ».

За умовою 1-ше місце може посісти тільки одна з команд — або команда футболістів (тоді команда баскетболістів не посяде 1-го місця), або команда баскетболістів (тоді команда футболістів не посяде 1-го місця). Переформулюємо: 1-ше місце посяде команда футболістів ***і*** команда баскетболістів не посяде 1-го місця [0,3 • (1 - 0,6)], або [+] 1-ше місце посяде команда баскетболістів і команда футболістів не посяде 1-го місця [(1- 0,3) • 0,6]. Тобто: *Р(М)* = 0,3 • (1- 0,6) + (1-0,3) • 0,6 = 0,3•0,4+ 0,7•0,6.

Розв'язання задачі 2

Подія А — 1 -ше місце посяде команда школи *А*. *Р(А)*= 0,3.

Подія В — 1 -ше місце посяде команда школи *В*. *Р(В)*=0,6.

Подія С— 1-ше місце посяде команда школи С. *Р(С)*=0,1.

Події *А, В, С є* несумісними (тому що за умовами змагань 1-ше місце може посісти тільки одна з команд); з цих трьох подій одна обов'язково відбудеться. Події *А, В* і С утворюють повну групу подій.

а) Події *А* і *В* є несумісними, тому подія *К,* яка полягає в одночасній появі

цих двох подій, є неможливою. *P(K)*=0.

б) Події *А і В є* несумісними, тому можна застосувати формулу ймовірності суми двох несумісних подій:*P(M)=P(A)+P(B)*= 0,3 + 0,6= 0,9. Або, знаючи, що події *А, В* і С утворюють повну групу подій, можна скористатися формулою: *P(A)*+ *P(B)* +*P(C)* = 1, звідки *P(A)*+*P(B)* = 1 -*P(C)* = 1 - 0,1 = 0,9. Отже, учні більш свідомо застосовуватимуть теоретичні знання до розв'язування задач.

РОЗДІЛ 2 .
МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ «КОМБІНАТОРИКА. ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

2.1 Методика навчання комбінаторики. Мета вивчення теми. Методика формування основних понять, доведення теорем. Розв'язування комбінаторних задач з урахуванням вікових особливостей учнів

У загальноосвітній школі вивчають сполуки без повторень. Програмою з математики для 5 - 1 1 класів загальноосвітніх навчальних закладів елементи комбінаторики передбачено вивчати упродовж 10 год в 11 класі.

Мета вивчення теми

Метою вивчення теми є ввести поняття множини та її елементів, ознайомити учнів з видами множини й операціями над ними; навчити виконувати зазначені операції; ввести означення впорядкованої множини, перестановки, розміщення та комбінації; довести формули для обчислення кількості кожного виду сполук; навчити розрізняти види сполук і розв'язувати комбінаторні задачі.

Після вивчення теми учні мають дістати уявлення про множину та її елементи, порожню множину, способи задання множин, підмножину даної множини; знати означення операцій над множинами, доповнення множини, впорядкованої множини, перестановки, розміщення і комбінації та формули для обчислення їх кількості; уміти задавати множини, утворювати підмножини даної множини, знаходити результати операцій над множинами, доповнення множини, розрізняти види сполук і знаходити їх кількість за відповідними формулами, розв'язувати нескладні комбінаторні задачі.[1, 51с.]

Методика формування основних понять У методиці навчання математики та в навчально-методичній літературі існують різні підходи до вивчення різних видів сполук залежно від їх трактування, послідовності запровадження і доведення формул.

У підручнику А. П. Кисельова спочатку вводиться означення сполук.

Означення 1. Різні групи, складені з будь-яких предметів, що відрізняються одна від одної або порядком цих предметів, або самими предметами, називають взагалі сполуками.

Після цього вводиться, спочатку описово на прикладі, а потім на рівні означення поняття розміщень як сполук, що відрізняються одна від одної або предметами *ab* і *ac,* або порядком предметів, наприклад *ab* і *ba,* якщо кількість предметів у них та сама.

Означення в загальному вигляді формулюють так.

Означення 2. Розміщеннями з *n* елементів по *m* називають такі сполуки, з яких кожна містить *m* елементів, узятих із даних *n* елементів, і відрізняються одна від одної або елементами, або порядком елементів.

Поняття перестановок запроваджується через поняття розміщення як окремий випадок розміщення, коли розміщення з *n* елементів узято по ***n.*** Отже, різняться вони тільки порядком елементів.

Такі розміщення називають перестановками. Спеціально означення не формулюють.

Поняття комбінації також розглядається за допомогою поняття розміщень.

Означення 3. Якщо з усіх розміщень, що можна скласти з *n* елементів по *m,* вибрати тільки ті, які відрізняються одне від одного принаймні одним елементом, то матимемо сполуки, що називають комбінаціями.

Далі наводять приклади комбінацій для чотирьох елементів *a, b, c, d,* взятих по три елементи. Спеціально визначення комбінацій також не формулюють.

Поняттю комбінацій передує вивчення поняття підмножини. Розглядається приклад множини *A = {x;y;z},* утворюються всі підмножини множини *A* з одного, двох, трьох елементів. Потім вводиться таке поняття (означення) кількості комбінацій.

Означення 4. Кількість підмножин, що складаються з *m* елементів, які містяться в множині А з п елементів, називають кількістю комбінацій з *n* по *m* і позначають C_n^m.

Для введення поняття розміщення спочатку розв'язують таку задачу: скількома способами можна скласти денний розклад занять з п'яти різних уроків, якщо в класі вивчають десять різних предметів?

Означення формулюють так.

Означення 5. Будь-яку впорядковану підмножину з *n* елементів заданої множини *M,* яка містить *m* елементів, де $m>n$**,** називають розміщенням з *m* елементів по *n.*

Одразу потрібно роз'яснити характеристичні ознаки розміщень: 1) предмети і місце різні; 2) $0 < n < m;$ 3) усі я місць зайняті; 4) порядок елементів важливий.

Перш ніж вводити поняття комбінації також слід розв'язати таку задачу: скількома способами можна призначити чотирьох вартових з тридцяти солдат?

Очевидно, що в цій задачі будь-які групи вартових можуть відрізнятися лише складом солдат у них. Порядок у групі неістотний. Тут маємо справу з різними підмножинами з чотирьох елементів заданої множини, яка складається з 30 елементів.

Далі формулюють означення.

Означення 6. Будь-яку підмножину з *n* елементів заданої множини *M*, яка містить *m* елементів, називають комбінацією з *m* елементів по *n***,** а кількість їх позначають $C_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$.

Характеристичні ознаки комбінацій такі: 1) предмети різні; 2) $0 < n < m;$ 3) порядок вибору елементів не має значення.

Доведення основних формул.

Підхід до доведення формул комбінаторики певною мірою залежить від послідовності вивчення окремих видів сполук і попереднього ознайомлення учнів з методами доведень, зокрема з методом математичної індукції. На цей час учні мають уміти застосовувати метод математичної індукції, який розглядався під час вивчення теми «Похідна». За умов роботи за підручником Шкіль М.І., Слєпкань З.І. метод математичної індукції вводять раніше (під час вивчення похідної функції $y = x^n$).

У цьому підручнику формула кількості перестановок запроваджується в такий спосіб: спочатку за допомогою індуктивних міркувань на конкретних прикладах обчислення P_1 ,P_2 ,P_3 і P_4 учнів підводять до висновку, що

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n = n!$$

Після цього формулу доводять методом математичної індукції.

За підручником перестановки вивчають після розміщень, отже, формулу

P_m отримують з формули $\boldsymbol{A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}}$ методом безпосередньої

підстановки в ліву частину $к = m$ з урахуванням того, що за означенням 0!=1 і перестановка безповторень з m елементів — це те саме, що й розміщення з n елементів по m елементів.

Формулу кількості розміщень вивчають після перестановок, і на прикладі вже розв'язаної задачі про складання розкладу на день з десяти предметів по п'ять предметів $\boldsymbol{A_{10}^1}$= 10, отримують у результаті індуктивних міркувань:

$$\mathbf{A_{10}^1} = 10,\ \mathbf{A_{10}^2} = 10 \cdot 9\ ,\ \mathbf{A_{10}^4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \mathbf{7},\ \mathbf{A_{10}^5} = 10 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6,$$

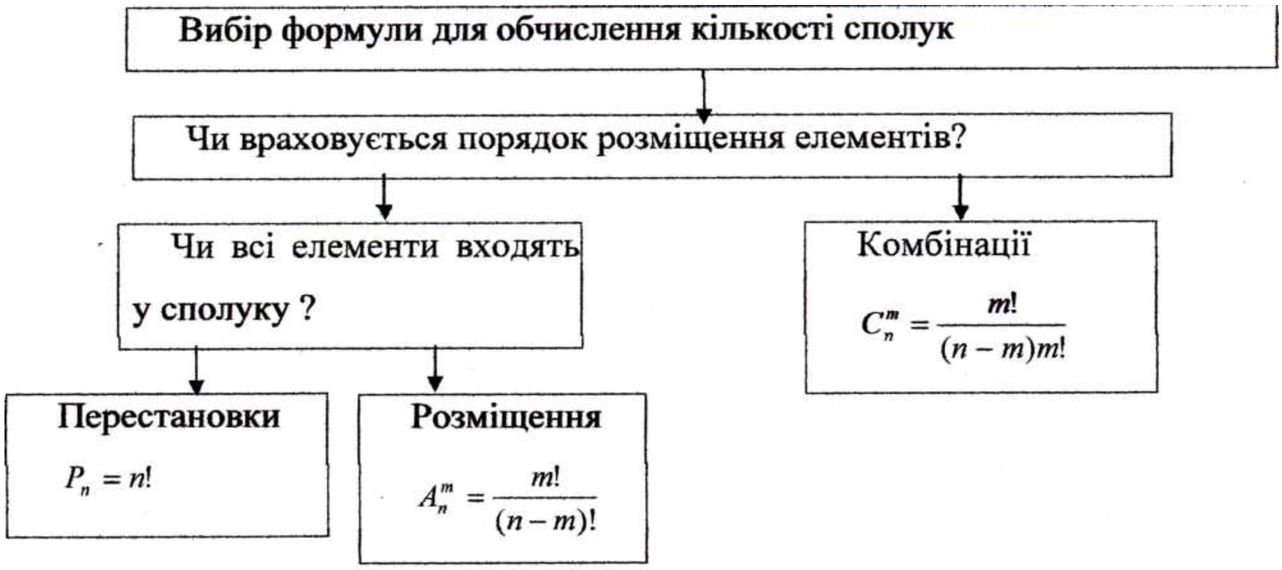
$$\mathbf{A_n^m} = \mathbf{10} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1)) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Далі правильність формули доводять методом математичної індукції.

Розв'язування комбінаторних задач

Традиційно розв'язування простіших комбінаторних задач зводиться до визначення виду сполуки, про яку йдеться в задачі, і застосування відповідної формули для обчислення кількості цих сполук. Тут основна трудність, що виникає в учнів, — саме визначення виду сполуки.

Тому перед розв'язуванням задач на обчислення кількості різних видів сполук доцільно запропонувати учням таку систему запитань, що сприятиме правильному визначенню виду сполуки, про яку йдеться в умові задачі.



При цьому враховують характеристичні властивості кожного виду. **Задача 1.**Скільки різних п’ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що жодна цифра в записі числа не повторюється?

Розв’язання. Для числа істотним є порядок запису цифр. При цьому всі задані цифри входять до запису числа. Отже, маємо справу з перестановками з п'яти елементів. їх кількість P_5 =5! = 120.

Задача 2. Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3,4, 5 за умови, що жодна цифра в записі числа не повторюється?

Розв'язання. Тут також істотним є порядок запису цифр, але при цьому не всі цифри, а тільки які-небудь три з п'яти входять до запису числа. Отже, маємо справу з розміщеннями з п'яти елементів по три елементи. їх кількість A =5•4•3 = 60.[15]

Задача 3. З п'яти учнів трьох необхідно відправити на чергування до їдальні. Скількома способами можна вибрати трьох чергових?

Розв’язання. У виборі учнів для чергування порядок вибору є неістотним, адже однаково в якому порядку вчитель викличе чергових: «Петренко, Сидоренко й Іваненко» або «Сидоренко, Петренко й Іваненко». Це та сама трійка чергових. При цьому в кожному виборі задіяні три з п'ятьох учнів.

Отже, маємо справу з комбінаціями трьох елементів із п'яти. їх кількість

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \bullet 2!} = 10$$

Проте такий підхід має істотний недолік. Учні, прочитавши умову задачі, намагаються «впізнати» сполуку, записати «потрібну» формулу і вже автоматично виконують обчислення. При цьому вони не прагнуть до кінця зрозуміти сюжет, про який Ідеться у задачі, спробувати його змоделювати.

Щоб уникнути цього, на початку слід розв'язати кілька задач на застосування комбінаторних правил додавання та множення:

якщо для деякого об'єкта *А* існує *m* способів вибору, а для іншого об'єкта *В* - *n* способів, то вибрати *А* або *В* можна $m + n$ способами;

якщо деякий об'єкт *А* можна вибрати *m* способами, а після цього інший об'єкт *В* можна вибрати *n* способами, то пари *А* і *В* можна вибрати *mn* способами.

Задача 4. Ідучи на тренування, спортсмен одягає або майку, або футболку. Скільки він має варіантів вибору майки чи футболки, якщо його мама випрала три майки і чотири футболки?

Розв'язання. За правилом додавання 3 + 4 = 7. Проілюструвати це можна так. Припустимо, що у шафі на одній поличці лежать три майки, а на другій - чотири футболки. Довільно з будь-якої полички беремо тільки одну річ. З першої , полички взяти одну річ можна трьома різними способами, а з другої - чотирма способами, тоді взяти одну будь-яку річ можна 3 + 4 = 7 різними способами.[1, 95с.]

Задача 5. Цех із виготовлення капелюхів розпочав випуск трьох нових моделей, для яких було закуплено фетр чотирьох кольорів. Скільки видів різних капелюхів може виготовити цех?

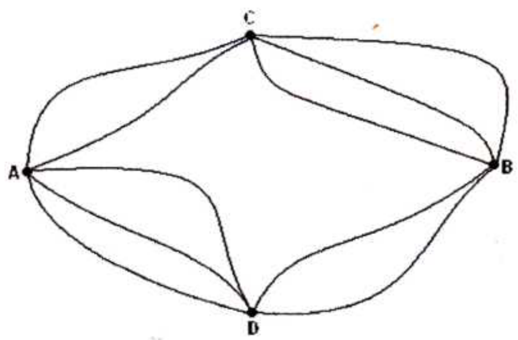
Розв'язання. Для кожної з трьох моделей можна використати кожний з чотирьох кольорів. За правилом множення кількість різних видів капелюхів становитиме 3•4 = 12.

Для ілюстрації можна скласти таку таблицю:

Модель	Колір			
	1	**2**	**3**	4
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**
2	**(2,1)**	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	**(3,1)**	(3,2)	(3,3)	(3,4)

Задача 6. Прямого сполучення із селищами *A* і *B* немає. Турист може потрапити з А до В або через селище *C*, або через селище О. З *A* до *C* ведуть два різні шляхи, а з *A* до *E*)— три. З С до *B* можна потрапити трьома різними дорогами, а з *D* до *B* — двома. Скільки турист має різних варіантів вибору шляху від *A* до *B*?

Розв 'язання. Доцільно зробити графічну ілюстрацію:



Якщо йти з *A* до *B* через С, то шлях можна обрати 2•3 = 6 способами. Якщо йти з *A* до *B* через *D,* то для вибору шляху є 3•2 = 6 способів. Тоді різних варіантів вибору шляху 6 + 6=12.

Зауваження. Якщо зробити графічну ілюстрацію, то можна, не використовуючи жодного правила, визначити кількість варіантів вибору шляху просто проводячи олівцем по лініях.

Розв'язуючи складніші комбінаторні задачі, бажано, за можливості, розглянути різні способи їх розв’язування. Зрозуміло, що за браком часу це не завжди вдається зробити. Тому потрібно, готуючись до уроку, не обмежуватися тільки одним способом розв’язування задачі для того, щоб на уроці організувати роботу з пошуку раціональнішого способу розв’язування. При цьому як домашнє завдання можна запропонувати учням відшукати інші способи розв’язування розглянутих на уроці задач.[5, 38с.]

Задача 7. У шаховому гуртку п'ять хлопців і три дівчини. Для зустрічі з гросмейстером прийшло три запрошення. Скількома способами можна розподілити запрошення так, щоб на зустріч потрапила хоча б одна дівчина?

Розв’язання. ***I спосіб.*** Вимога «хоча б одна дівчина» означає, що їх може бути одна, дві або три. Тоді запитання переформулюємо так: «Скількома способами можна вибрати трьох осіб з п'яти хлопців і трьох дівчат, щоб серед них було або одна дівчина, або дві дівчини, або три дівчини?»

Одну дівчину з трьох можна вибрати трьома способами і залишається вибрати ще двох хлопців з п'яти. Це можна зробити C_5^2способами. Отже, всього маємо $3C_5^2$ способів. Дві дівчини з трьох можна вибрати C_3^2 способами і одного хлопця — п’ятьма способами. Усього $5C_3^2$способів. Три дівчини можна вибрати тільки одним способом. Тоді загальна кількість способів становитиме $3C_5^2+5C_3^2+1=46$.

II спосіб. Троє осіб з усіх членів гуртка можна вибрати C_8^3способами.

Тільки троє хлопців можна вибрати C_5^3 способами. В усіх інших варіантах будуть присутні дівчата. Отже, таких способів

$$C_8^3 - C_5^3 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} - \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 56-10 = 46.$$

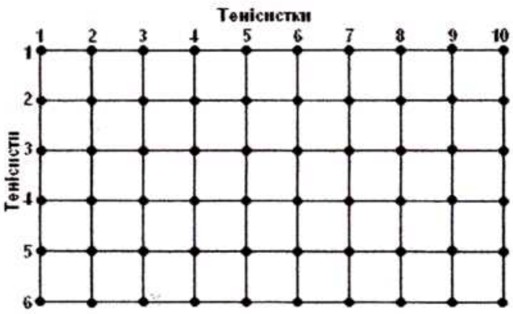
Зауваження. Під час розв’язування другим способом фактично було використано поняття доповнення множини, що є аналогом поняття протилежної події. У разі розв’язування задачі на обчислення ймовірностей ця задача може бути сформульована так: «У шаховому гуртку п'ять хлопців і три дівчини. Для зустрічі з гросмейстером прийшло три запрошення. Чому дорівнює ймовірність того, що на зустріч потрапить хоча б одна дівчинка?»[1, 59с.]

Задача 8. З десяти тенісисток і шести тенісистів складають чотири змішані пари. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. <u>*I спосіб*</u>. Чотири змішані пари — це вісім осіб: чотири тенісистки і чотири тенісисти. Чотири тенісистки з десяти можна вибрати C_{10}^4способами. Чотири тенісисти із шести можна вибрати C_6^4способами. Тоді вісім осіб для утворення чотирьох пар можна вибрати $C_{10}^4 \bullet C_6^4$ способами. Полічимо, скількома способами можна з восьми осіб утворити чотири змішані пари: одного чотири способи; другого тенісиста можна поставити у пару вже з будь-якою з трьох тенісисток, усього три способи; третього — з двох тенісисток, усього два способи; для четвертого залишається тільки один спосіб стати у пару. Отже, всього 4•3•2•1 = 4! способів утворення чотирьох пар з восьми осіб. Усіх способів утворити чотири змішані пари

$$C_{10}^4 \bullet C_6^4 \bullet 4! = \frac{10!\bullet 6!\bullet 4!}{4!\bullet 6!\bullet 4!\bullet 2!} = 756000.$$

<u>***II спосіб.***</u> Усіх змішаних пар з десяти тенісисток і шести тенісистів можна утворити 10•6 = 60. Проілюструємо це такою схемою-сіткою (вузли сітки — це пари):



Отже, щоб вибрати чотири пари, потрібно, наприклад, взяти будь-які чотири стовпчики, а потім із кожного стовпчика взяти по одній парі з різних рядків.

Чотири стовпчики з десяти можна вибрати C_{10}^4 способами. Після цього першу пару можна вибрати з будь-яких шести рядків, усього шість способів; другу — з п'яти рядків, усього п'ять способів; третю — з чотирьох рядків і четверту — з трьох рядків. Усього чотири пари можна вибрати C_{10}^4 •6 •5 • 4

3 способами: C_{10}^{4}•6•5•4•3 $=\frac{10!}{4!•2!}$•6•5•4 = 75600.

Такий самий результат отримаємо, якщо в наведених міркуваннях стовпчики замінити на рядки, а рядки — на стовпчики. Загальна кількість

способів вибору становитиме:

$$C_{10}^{4} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{10!}{4! \cdot 2!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 75600.$$

Програма з математики для загальноосвітніх шкіл не передбачає вивчення сполук з повтореннями елементів, проте за допомогою комбінаторних правил додавання і множення можна розв'язати нескладні комбінаторні задачі на знаходження кількості сполук, в яких можливі повторення елементів.

Задача 9. Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2 ,3 ,4 ,5, якщо цифри можуть повторюватися в записі числа?

Розв'язання. На перше місце можна записати будь-яку з п'яти цифр — всього п'ять варіантів. Оскільки цифри можуть повторюватися, то на друге місце можна також записати будь-яку з п'яти цифр — знову п'ять варіантів. Отже, на перші два місця дві будь-які цифри можна записати $5 \cdot 5 = 5^2$ способами. На третє місце також можна записати будь-яку з п'яти цифр. Тоді всіх можливих трицифрових чисел буде $5^2 \cdot 5 = 5^3 = 125$.[16]

Задача 10. Скільки різних натуральних чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри у записі чисел можуть повторюватися і цифр у записі має бути не більше ніж 5?

Розв'язання. Числа можуть бути одно-, два-, три-, чотири- або п'ятицифрові. Одноцифрових чисел можна записати п'ять. Двоцифрових —$5 \cdot 5 = 5^2$, трицифрових —5^3, чотирицифрових —5^4 і п'ятицифрових — 5^5. Усього різних чисел $5 + 5^2+5^3+5^4+5^5$. Це сума п'яти перших членів геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = 5$, а знаменник $q = 5$. За формулою суми *n*

перших членів геометричної прогресії $S = \frac{b_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{5(5^5-1)}{5-1} = 3905$. Отже,

всіх чисел 3905.

2.2 Методика навчання початків теорії ймовірності. Мета вивчення теми. Методика формування основних понять, вивчення теорем. Особливості розв’язування задач

Мета вивчення теми

Метою вивчення теми є введення основних понять теорії ймовірностей, поняття про теорію ймовірностей як науку, доведення теорем додавання та множення ймовірностей, теореми про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій, введення поняття про класичну ймовірність і закону великих чисел; навчання учнів обчислюванню ймовірностей випадкових подій. При цьому учні мають:

- отримати уявлення про випробування та випадкові події; повну- групу подій; попарно несумісні, рівноможливі (рівноймовірні), елементарні події; схему Бернуллі;
- знати означення вірогідної та неможливої подій; класичне означення ймовірності; теорему додавання ймовірностей несумісних подій; означення протилежної події; теорему множення незалежних подій; теорему про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій; означення взаємно незалежних випробувань; статистичне означення ймовірності; закон великих чисел;
- уміти обчислювати за класичним означенням ймовірність події; використовувати теореми додавання та множення для обчислення ймовірностей подій; знаходити у найпростіших випадках імовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій.

В 11 класі основною метою вивчення теми «Початая теорії ймовірностей» є сформувати в учнів уявлення про основні поняття теорії ймовірностей і виробити вміння застосовувати їх до розв’язування простих задач.

Після вивчення теми учні мають:

— отримати уявлення про стохастичний експеримент, елементарну подію та простір елементарних подій; випадкову подію як деяку підмножину множини елементарних подій та розуміти зміст висловлення «подія відбулася»;

еквівалентність подій, неможливу подію, несумісні події; дискретний і неперервний розподіли статистичних імовірностей на просторі елементарних подій; центр розподілу та величину розсіювання статистичних імовірностей; умовні статистичні ймовірності; можливість передбачення усередненого результату великої серії випробувань; математичне сподівання та дисперсію;

- знати означення суми, добутку, різниці двох подій, протилежної

події; основні властивості статистичних імовірностей; правила обчислення статистичної ймовірності суми і добутку кількох подій; формулу повної ймовірності;

- уміти давати геометричну інтерпретацію операцій над подіями (за аналогією з операціями над множинами); обчислювати статистичні ймовірності випадкових подій; застосовувати правила обчислення суми і добутку ймовірностей кількох подій та формулу повної ймовірності до розв'язування простих задач.

Для гуманітарних класів тему «Елементи теорії ймовірностей» включено до додаткової частини програми, за якою передбачено розглянути предмет теорії ймовірностей; основні поняття; подію та її статистичну ймовірність; статистичну ймовірність суми і добутку подій.

У сучасній літературі є різні погляди на зміст і структуру навчального матеріалу теми «Початки теорії ймовірностей». Найбільше суперечок виникає стосовно того, як означати ймовірність події. Слід зауважити, що в різних посібниках, підручниках, методичних рекомендаціях для вчителів і учнів сьогодні чітко виявляються два підходи до означення ймовірності події: класичний і статистичний.

У свій час А. М. Колмогоров, даючи рекомендації вчителям щодо викладання факультативу з теорії ймовірностей, зазначав, що є розумним почати безпосередньо з комбінаторних підрахунків кількості випадків, які сприяють тій чи іншій події. Такі задачі можуть бути цікавими за змістом. Вони є гарною психологічною підготовкою до самого введення поняття ймовірності. Далі він зауважував, що досить часто замість «класичного» означення ймовірності доводиться використовувати «статистичне». Проте на перших кроках ознайомлення з теорією ймовірностей розумно поставитися з довірою до «класичного» означення. З погляду чистої математики тут немає ніякої «нестрогості».

Поділяючи думку А. М. Колмогорова і використовуючи досвід вивчення початків теорії ймовірностей на факультативних заняттях, вважаємо за доцільне дотримуватися класичного підходу до введення поняття ймовірності. Адже вивчення числових множин і дій над різними числами починається і продовжується до 8 класу лише над точними значеннями чисел і тільки у 8 класі запроваджуються наближені значення чисел і величин. У курсі геометрії також спочатку вивчають абстрактні ідеальні фігури. Аналогічно поняття статистичної та геометричної ймовірностей сприймаються легше, якщо учні вже ознайомлені з класичним означенням імовірності та навчаються обчислювати її під час розв'язування різних задач, зокрема прикладних.

Методика формування основних понять

Перші два уроки в 11 класі доцільно присвятити формуванню основних понять теорії ймовірностей: стохастичний експеримент (дослід, випробування), подія (явище), випадкова подія, масові випадкові події, сумісні події, однаково можливі події, вірогідні, неможливі події, елементарні події, класичне означення ймовірності.

На наступних уроках розглядають статистичне означення ймовірності і закон великих чисел, геометричне означення ймовірності, поняття про умовну ймовірність, доводять теореми додавання і множення ймовірностей, означають незалежні події та незалежні випробування, вводять схему Бернуллі.

До первісних понять теорії ймовірностей належать поняття «стохастичний експеримент» і «подія». На першому уроці на конкретних прикладах потрібно ввести поняття випадкової події та масових випадкових подій і переконати учнів, що для масових випадкових подій існують закономірності, які вивчає теорія ймовірностей. Слід звернути увагу учнів на те, що характерною особливістю математики, яку вони вивчали до цього часу, була визначеність даних І здебільшого однозначність результатів, отриманих під час розв'язування задач. Наприклад, числове значення об'єму куба V цілком визначається довжиною ребра. Проте у житті, науці, техніці доводиться мати справу з подіями реального світу, які залежать від невідомих або таких обставин, що не піддаються обліку. Наприклад, не можна передбачити, скільки зернин достигне в колосі, що проросте з висіяної зернини, скільки грибів виросте на тій ділянці лісу, де вони росли в минулому році, скільки випускників загальноосвітніх шкіл України складуть вступні іспити до вищих навчальних закладів.

Такі події отримали назву випадкових, а теорія ймовірностей їх вивчає.

Теорію ймовірностей цікавлять лише масові випадкові події, тобто однорідні події, які відбуваються за певних умов і можуть бути відтворені необмежену кількість разів.

Практика вивчення теорії ймовірностей на факультативних заняттях доводить, що надзвичайно важливо навести учням конкретні приклади, які підтверджують існування закономірностей масових випадкових подій. У підручнику Шкіля М.І. "Алгебра і початки аналізу" наведено таблиці наслідків 10 000 підкидань монети, розподіл шроту на дошці Гальтона. Досвід показує, що найпереконливішим для учнів є дослід із записками, який описано у підручнику і який доцільно провести у класі.

Учні самі дійдуть висновку, що існування закономірностей масових подій і вміння передбачати результати дослідів, у яких наявні елементи випадковості, є надзвичайно важливими для науки і практики.

Узагальнюючи розглянуті приклади, доцільно ввести поняття стохастичного експерименту, яке використовується в теорії ймовірностей.

Експеримент (дослід, випробування) називають *стохастичним,* якщо за виконання певної сукупності умов його можна повторювати необмежену кількість разів і результати якого наперед не можна передбачити.

Події — це лише можливі результати стохастичного експерименту. Подію називають *випадковою,* якщо за виконання певної сукупності умов (у результаті стохастичного експерименту) вона може відбутися або не відбутися.

На наступному уроці, ілюструючи конкретними прикладами, доцільно ввести поняття повної групи подій, попарно несумісних і сумісних, однаково можливих, вірогідної та неможливої подій.

Центральним поняттям є поняття ймовірності події як числової характеристики (міри) можливості появи випадкової події.

Спочатку доцільно ввести класичне означення ймовірності, тобто ймовірності для елементарних подій. Вони утворюють повну групу несумісних однаково можливих (рівноможливих) подій.

На прикладі конкретного досліду (в підручнику наведено приклад з калькуляторами, але на уроці можна навести інший приклад, використати гральний кубик або монетку) вводиться класичне означення ймовірності. Так, А. М. Колмогоров на прикладі підкидання двох гральних кубиків і фіксацій суми очок на верхніх гранях описує поняття рівноможливих випадків і поняття ймовірності: ймовірністю називають відношення сприятливих випадків до загальної кількості рівноможливих. При цьому він зауважує, що математика не дає відповіді на запитання, які випадки можна вважати рівноможливими. У разі кидання кубиків фізично істотні умови падіння кубика будь-якою з шести граней доверху здаються однаковими. Крім того, природно вважати, що різні комбінації верхніх граней двох кубиків також однаково правдоподібні. Досвід підтверджує ці припущення. Математична теорія ймовірностей займається тільки обчисленням ймовірностей різних подій за певних припущень у задачах, що нас цікавлять, припущенням є те, які випадки потрібно вважати рівно-можливими.

Отже, слід звернути увагу, що коли в дослідах визначають ймовірність події за класичним означенням, то умови вважають ідеальними — гральний кубик має бути ідеальної форми (центр ваги збігається з геометричним центром), монета виготовлена з однакового за щільністю металу тощо.

Доцільно у зв'язку з вивченням класичного означення ймовірності роз'яснити учням широко вживані в практиці та побуті поняття «практично неможливої» і «практично вірогідної» подій, тобто подій, імовірність яких близька відповідно до 0 і до 1. Адже зробити висновок про те, відбудеться подія чи ні, можна лише з урахуванням умов, за яких подія відбувається чи ні. Справді, якщо ймовірність запізнення потягу дорівнює 0,01, то цю подію (запізнення потягу) можна вважати практично неможливою. Проте якщо ймовірність того, що під час стрибка парашутиста парашут не розкриється, дорівнює 0,01, то цю подію вважати практично неможливою не можна.

Перш ніж вводити статистичне означення ймовірності, доцільно звернути увагу учнів на те, що класичне означення ймовірності має обмежене застосування, причому за теоретично ідеальних умов. Для випробувань (дослідів), що фактично відбуваються на практиці, не має змоги розрізнити однаково можливі події. У таких випадках використовують статистичне означення ймовірності. Попередньо потрібно розглянути поняття статистичної частоти події як відношення , де n - загальна кількість випробувань; m - кількість появ події, що нас цікавить. Наприклад, n - загальна кількість пострілів, які виконує стрілець; m - кількість влучень у ціль.

Після наведення інших прикладів доцільно ввести статистичне означення ймовірності події.

Означення 1. Імовірністю події називають невідоме число p, навколо якого зосереджується значення статистичної частоти здійснення події A зі зростанням кількості випробувань.

Позначивши статистичну частоту символом $P_N\{A\}$, ($P_N\{A\} = \frac{m_N}{N}$),

природно записати наближену рівність $P_N\{A\} \approx P(A)$, де $P(A)$ -ймовірність події A.

Ця наближена рівність відображує важливу закономірність масових випадкових подій. Вона багаторазово перевірялася експериментально і підтверджувалася практичною діяльністю.

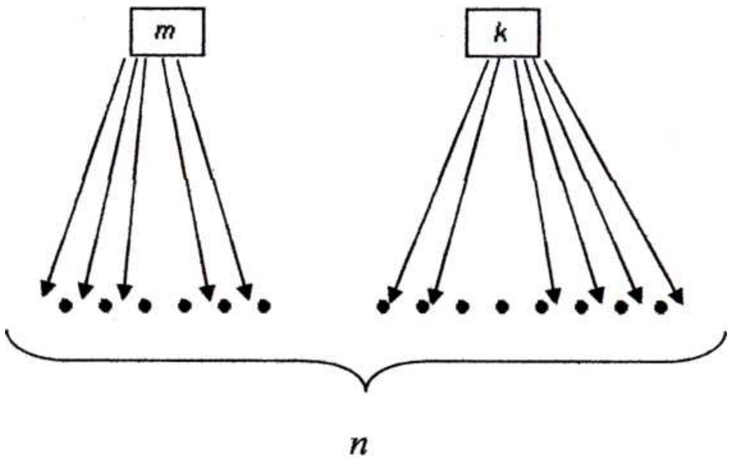
Методика вивчення теорем

Чинною програмою і підручником Шкіля М.І. передбачено вивчення таких тверджень (теорем):

1) теорема додавання ймовірностей несумісних подій,і два наслідки з неї;
2) теорема множення ймовірностей і наслідок з неї;
3) теорема множення ймовірностей для незалежних подій;
4) теорема про ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій;
5) теорема про ймовірність здійснення принаймні однієї з не залежних

подій;

6) формула Бернуллі (розглядається без доведення).



Теореми додавання та множення ймовірностей вводяться для класичного означення ймовірності події. Перш ніж вивчати кожну з цих теорем, розглядають відповідно поняття суми і добутку двох подій. Цей матеріал не зумовлює труднощів в учнів, якщо попередньо під час вивчення елементів теорії множин їх ознайомлювали з поняттями об'єднання І перерізу двох множин. Поняття суми і добутку двох подій аналогічне цим поняттям.

Теорему додавання ймовірностей суми двох несумісних подій учні сприймають без особливих труднощів, якщо проілюструвати її доведення таким рисунком.

У цьому випадку *n* — кількість усіх елементарних подій деякого випробування; *m* — кількість подій, які сприяють події *А; к* — кількість подій,

які сприяють події *В*. Тоді $P(A) = \frac{m}{n}, P(B) = \frac{k}{n}$.Оскільки події *А* + *В* сприяє *т* + *к* подій, $P(A) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n}$, тобто *Р(А+ В) = Р(А)+Р(В).*

Слід наголосити, що теорема поширюється на суму будь-якої скінченної кількості попарно несумісних подій.

Під час вивчення теореми множення можливі два методичних підходи.

1. Теорему множення формулюють тільки для незалежних подій і доводять з використанням геометричної ілюстрації. Цей підхід було здійснено в першому виданні підручника.

2. Його реалізовано в останньому виданні підручника Шкіля М.І. Такий

підхід виправдано тим, що в практиці незалежні події трапляються значно рідше, ніж ті, для обчислення ймовірності яких крім сукупності умов, що відповідають випробуванню, слід розглядати ще й інші додаткові умови. Наприклад, така задача.[1]

Задача. У коробці є 4 червоних і 5 синіх олівців. Навмання один за одним витягують два олівці. Знайти ймовірність того, що другий олівець буде синім.

Розв 'язання. Нехай подія *A* — «перший олівець червоний», подія *B* — «другий олівець синій». Зрозуміло, що коли подія *A* відбулася, то $P(B) = \frac{5}{8}$, а якщо ні, то $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ тобто ймовірність події *B* можна обчислити за умови,

відбулася чи ні подія *A*.

Таку ймовірність називають умовною і позначають $P_A(B)$ — умовна ймовірність події *B,* якщо відбулася подія *A*. Аналогічно $P_B(A)$ — умовна ймовірність події *A* за умови, що відбулася подія *B*. Визначити умовну ймовірність можна за формулою

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Аналогічно

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Після введення поняття умовної ймовірності доцільно розв'язати задачу на обчислення ймовірності деякої події *B* за умови, що відбулася подія *A,* використовуючи спочатку класичне означення ймовірності, а потім — формулу (1). Отримані однакові відповіді означають, що формулу (1) можна прийняти за означення умовної ймовірності або довести за класичним означенням ймовірності.

З формули (1) безпосередньо випливає теорема.

Теорема 1. Імовірність одночасної появи двох подій (імовірність добутку двох сумісних подій) дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, яка обчислена за припущення, що перша подія вже відбулася.

Тобто

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \qquad (2)$$

Ця теорема поширюється і на випадок одночасної появи кількох, подій

$$P(A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_n) = P(A_1)PA_1(A_2)\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A_1A_2}}(A_3)\bullet \ldots \bullet \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A_1A_2\bullet\ldots\bullet A_{n-1}}}(\boldsymbol{A}_n).$$

Після введення означення незалежних подій формулюють теорему про ймовірність добутку двох незалежних подій, яку легко дістати із загальної теореми множення ймовірностей двох подій. Оскільки для незалежних подій

$P_A\,(B) = P\,(B)$, то

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (3)$$

Рівність (3) інколи приймають за означення двох незалежних подій.

Означення 2. Дві події називають незалежними, якщо ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх імовірностей.

Після введення означень попарно незалежних подій і незалежних у сукупності подій теорема множення ймовірностей двох незалежних подій поширюється на ймовірність одночасної появи кількох подій, незалежних у сукупності.

Теорема множення ймовірностей подій дає можливість сформулювати важливу для практики розв'язування задач теорему про ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій. Перш ніж формулювати теорему, потрібно нагадати учням, що означає «поява хоча б однієї з двох сумісних подій» (відбудеться або перша подія, або друга, або обидві відбудуться одночасно. Інакше кажучи, якщо A і B деякі події, то їх сума $A + B$ визначає появу хоча б однієї з них).

Теорема 2. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх одночасної появи (їх добутку):

$$P(A + B) = P(A) + P(B)-P(AB).$$

Теорему про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій учні легко отримають із загальної теореми множення ймовірностей незалежних у сукупності подій і другого наслідку з теореми про ймовірність суми двох несумісних подій $(P(A) = 1-P(A))$.

Вивчення всіх теорем і наслідків з них потрібно проілюструвати розв’язуванням задач на їх застосування.

Навчальний матеріал щодо незалежних випробувань і схеми Бернуллі доцільно розглядати після введення відносної події *А*. Важливо підкреслити, що у різних незалежних випробуваннях подія *А* може мати або різні ймовірності, або одну й ту саму ймовірність. Останнє відбувається, якщо незалежні повторні випробування проводяться за однієї й тієї самої сукупності умов. Формулу Бернуллі розглядають тільки для таких незалежних випробувань, в яких подія *А* має одну й ту саму ймовірність. Формулу Бернуллі дають учням без доведення.

Особливості розв’язування задач.

Зрозуміло, що вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв’язуванням відповідних задач.

Під час і після вивчення основних понять теорії ймовірностей доцільно запропонувати учням такі задачі.

Задача 1. Яке з наведених випробувань буде стохастичним експериментом, а яке — ні? Відповідь пояснити.

а) охолодження води за нормального тиску до 0° С і фіксація її стану;

б) витягування однієї карти з повної колоди і фіксація зображення на ній;

в) розкручування колеса «Поле чудес» і фіксація сектора, на якому зупиняється стрілка;

г) змішування сульфату натрію і хлориду барію та фіксація наявності осаду;

д) поява кульки з лототрону лото «Забава» і фіксація зображеного на ній номера;

Теорема 2. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх одночасної появи (їх добутку):

$$P(A + B) = P(A) + P(B)-P(AB).$$

Теорему про ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій учні легко отримають із загальної теореми множення ймовірностей незалежних у сукупності подій і другого наслідку з теореми про ймовірність суми двох несумісних подій $(P(A) = 1-P(A))$.

Вивчення всіх теорем і наслідків з них потрібно проілюструвати розв'язуванням задач на їх застосування.

Навчальний матеріал щодо незалежних випробувань і схеми Бернуллі доцільно розглядати після введення відносної події *A*. Важливо підкреслити, що у різних незалежних випробуваннях подія *A* може мати або різні ймовірності, або одну й ту саму ймовірність. Останнє відбувається, якщо незалежні повторні випробування проводяться за однієї й тієї самої сукупності умов. Формулу Бернуллі розглядають тільки для таких незалежних випробувань, в яких подія *A* має одну й ту саму ймовірність. Формулу Бернуллі дають учням без доведення.

Особливості розв'язування задач.

Зрозуміло, що вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв'язуванням відповідних задач.

Під час і після вивчення основних понять теорії ймовірностей доцільно запропонувати учням такі задачі.

Задача 1. Яке з наведених випробувань буде стохастичним експериментом, а яке — ні? Відповідь пояснити.

а) охолодження води за нормального тиску до 0° С і фіксація її стану;

б) витягування однієї карти з повної колоди і фіксація зображення на ній;

в) розкручування колеса «Поле чудес» і фіксація сектора, на якому зупиня- ється стрілка;

г) змішування сульфату натрію і хлориду барію та фіксація наявності осаду;

д) поява кульки з лототрону лото «Забава» і фіксація зображеного на ній номера;

є) змочування зрізу картоплі розчином йоду і фіксація зміни кольору поверхні картоплі.

Відповіді: а) ні; з фізики відомо, що під час охолодження води за нор-мального тиску до 0° С вона перетворюється на лід; б) так; наперед не можна передбачити, яку саме карту витягаєш з колоди; в) так; г) ні; з хімії відомо, що при змішуванні сульфату натрію і хлориду барію завжди випадає осад; д) так; є) ні.

Задача 2. Гральний кубик підкидають один раз. Зазначити всі наслідки випробування, якщо нас цікавить:

а) число, що випало на верхній грані кубика;

б) парність числа, що випало на верхній грані кубика;

в) складеність числа, що випало на верхній грані кубика;

г) кратність числа, що випало на верхній грані кубика;

д) поява на верхній грані кубика числа, не більшого за 4; є) поява на верхній грані кубика числа, не меншого за 1.

Відповіді. Наслідки випробування запишемо у вигляді множини:

а) {1, 2, 3, 4, 5, 6}; б) {парне, непарне}; в) {1, {2, 3, 5>, {4, 6» або {1, просте, складене}; г) {{3, 6), {1,2, 4, 5}} або {ділиться на 3, не ділиться на 3}; д) {{1,2,3,4}, {5,6}} або {рівне або менше за 4, більше за 4}; є) {1,2,3,4, 5, 6}.

Задача 3. На 10 жетонах вибито числа від 1 до 10. Навмання виймають один жетон. В яких відповідях зазначені всі можливі наслідки випробування?

а) {1,2,3,4,5,6,7, 8,9,10};

б) {парне; непарне};

в) {просте; 4,6,8,9,10};

г) {парне; 1,3,5};

д) {кратне 3; не ділиться на 3};

є) {не більше за 3; не менше за 4}.

Відповіді: а) так; б) так; в) ні, не враховано наслідок «витягнуто число 1»; г) ні; не враховано наслідки «витягнуто число 7» і «витягнуто число 9»; д) так; є) так.

Задача 4. Указати кількість наслідків такого експерименту:

а) з мішечка для гри в лото виймають одну бочечку з номером;

б) навмання витягують одну кісточку доміно з повного набору;

в) з нового відривного календаря на 2004 рік навмання виривають листок;

г) картки з написаними на них буквами П, О, Д, І, Я перемішують, навмання розкладають у ряд і фіксують слово, що утворилося;

д) з 30 учнів класу навмання обирають чотирьох для чергування в їдальні;

е) з 10 карток, на яких записано цифри, навмання одна за одною виймають три картки і фіксують отримане число;

є) картки з написаними на них буквами Е, Л, Е, М, Е, Н, Т перемішують, навмання розкладають у ряд і фіксують слово, що утворилося.

Відповіді: а)90; б)28; в)365; г) P_5= 5! = 120; д) $C_{30}^4 = \frac{30!}{4!\bullet 26!}$= 27405;

е)A_{10}^3 =10•9•8 = 720; є)$\frac{7!}{3!}$ = 4 •5 •6 •7 = 840.

Зауваження. Під час розв'язування завдань г) — є) виникає потреба повторити основні комбінаторні сполуки і формули для обчислення їх кількості. Розв'язуючи завдання с), можна зробити такі пояснення: сім букв можна у певному порядку розкласти в ряд 7! способами, але при цьому однакових варіантів розміщення букв буде стільки, скільки разів три букви Е можна поміняти місцями, тобто 3! Варіантів.

Задача 5. Які з подій є випадковими, вірогідними, неможливими:

а) випадання на верхній грані грального кубика числа більшого за 6;

б) випадання на верхній грані грального кубика числа не більшого за 6;

в) випадання на верхніх гранях двох гральних кубиків у сумі 13 очок;

г) навмання вирваний листок із нового календаря містить число, не більше за 31;

д) влучення або промах при одному пострілі;

е) виграш за одним білетом лотереї;

є) витягування з коробки кольорової кулі, якщо в ній є 3 синіх і 5 червоних куль;

ж) витягування з коробки жовтої кулі, якщо в ній є 3 синіх і 5 червоних куль?

Відповіді. Події, описані в пунктах а), в), ж) — неможливі; б), г), д), е) —

вірогідні; є) випадкова.

Під час розв'язування задач на обчислення ймовірності події за класичним означенням буде доцільним спочатку запропонувати задачі на визначення загальної кількості наслідків деякого випробування та кількості наслідків цього випробування, які сприяють появі події, що розглядається.

Задача 6. Зазначити загальну кількість елементарних подій випробування та кількість елементарних подій, які сприяють тому, щоб деяка подія відбулася:

а) випробування — вибір довільного натурального двоцифрового числа; подія *А* — «навмання взяте натуральне двоцифрове число ділиться на 5»;

б) випробування — підкидання грального кубика; подія *В* — «поява на верх ній грані грального кубика не менше ніж 5 очок»;

в) випробування — вибір довільної букви з розрізної абетки; подія С — «навмання взятою буквою означається один голосний звук»;

г) випробування — витягування довільної карти з гральної колоди; подія D —«навмання витягнута карта містить зображення людини»;

д) випробування — підкидання монети двічі; подія *Е* — «хоча б один раз випало зображення герба»;

є) випробування — перемішування карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5 і розкладання їх у ряд; подія *А* — «утворилося парне число»; подія *В* — «утворилося число, кратне 5»; подія *С* — «утворилося число, кратне 3»; подія D — «утворилося число, кратне 9»;

ж) випробування — з карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5 навмання вибирають три і розкладають у ряд; подія *А* — «утворилося непарне число»; подія *В* — «утворилося число, кратне 5»; подія С — «утворилося число, кратне 3»; подія В — «утворилося число, кратне 9».

з) у класі навчаються 17 дівчат і 13 юнаків; випробування — на чергування у їдальні навмання вибирають чотирьох учнів; подія *А* — чергуватимуть тільки юнаки; подія *В* — чергуватимуть тільки дівчата; подія С — чергуватимуть два юнаки та дві дівчини; подія D — чергуватимуть не більше ніж дві дівчини.

В і д п о в і д і: а) 90 і 1 В; б) 6 і 2; в) 33 і 6 (це букви *а, о, у, и, і*, *є*); г) можливі такі випадки: 36 і 12, або 52 і 12, або 54 і 14 (це залежить від того, яку колоду використовують і чи має вона джокер); д) 4 і 3; є) усього P5 = 5! = 120 елементарних подій. Події *A* сприяє поява числа, яке закінчується парною цифрою. Таких чисел можна утворити $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$. Отже, події *A* сприяє 48 елементарних подій. Події*B* сприяє поява числа, яке закінчується цифрою **5.**Таких чисел можна утворити $P_4 = 4! = 24$. Отже, події *B* сприяє 24 елементарні події. Події C сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 3. Очевидно, що 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, тобто будь-яке утворене число буде кратне 3. Отже, події C сприяють усі елементарні події цього випробування. Події *D* сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 9. Очевидно, що жодне утворене число не буде кратне 9. Отже, для події D кількість елементарних подій, що їй сприяють, дорівнює 0; є) усього $\boldsymbol{A_5^3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ елементарних подій. Події *A* сприяє поява числа, яке закінчується непарною цифрою. Таких чисел можна утворити $3 \cdot \boldsymbol{A_5^3} = 3 \cdot 4 \cdot \mathbf{3} = 36$. Отже, події *A* сприяє 36 елементарних подій. Події *B* сприяє поява числа, яке закінчується цифрою 5. Таких чисел можна утворити $\boldsymbol{A_4^2} = 4 \cdot 3 = 12$. Отже, події *B* сприяє 12 елементарних подій. Події C сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 3 .Із заданих цифр виберемо такі всі трійки, сума яких ділить на 3: 1, 2, 3, або 1, 3, 5, або 2, 3, 4, або 3, 4, 5. З кожної такої трійки цифр можна утворити P_3-$3! = 6$ чисел; усього чисел, які діляться на 3, буде $4 \cdot P_3 = 4 \cdot 6 = 24$. Отже, події C сприяє 24 елементарні події. Події D сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 9. Для утворення таких чисел можна використати трійки цифр 1, 3, 5 або 2, 3, 4. Отже, для події О кількість елементарних подій, що їй сприяють, дорівнює $2 \cdot P_3 = 2 \cdot 6 = 12$; ж) усього $\mathbf{C_{30}^4 = \frac{30!}{4! \cdot 26!}} = 27405$ елементарних подій. Оскільки юнаків — 13 і чотирьох із них можна вибрати $\mathbf{C_{17}^4}$ способами, то події *A* сприяє $C_{13}^4 = \frac{13!}{4! \cdot 9!} = 715$ елементарних подій. Оскільки дівчат — 17 і чотирьох із них можна вибрати C_{17}^4 способами, то події *B* сприяє $C_{17}^4 = \frac{17!}{4! \cdot 3!} = 2380$ елементарних подій. Двох юнаків із 13 можна вибрати $\mathbf{C_{13}^2}$ способами, двох дівчат із 17 — $\mathbf{C_{17}^2}$ способами. Використовуючи комбінаторне правило множення, отримаємо $\mathbf{C_{13}^2 \cdot C_{17}^2}$ варіантів вибору двох юнаків і двох дівчат для чергування. Отже,події C сприяє $\mathbf{C_{13}^2 \cdot C_{17}^2} = \mathbf{\frac{13!}{2! \cdot 11!} \cdot \frac{17!}{2! \cdot 15!}} = 10608$ елементарних подій. Для того щоб відбулася подія D, у групі чергових може не бути дівчат зовсім, або бути одна дівчина, або бути дві дівчини. Тобто події D сприяє $C_{13}^4 + 17 \bullet C_{13}^3 + C_{13}^2 \bullet C_{17}^2$ =715+17• $\frac{13!}{3! \bullet 10!}$ +10608 = 16185 елементарних подій.

Результати розв’язування задачі 6 можна використати для обчислення ймовірностей зазначених у ній подій за класичним означенням. Потім розв'язати запропоновані далі задачі (зокрема, задачі 7 — 10 можна розв’язувати усно). Під час розв’язування задач на обчислення ймовірності події за класичним означенням можна надати учням таке правило-орієнтир:

1) визначити, про яке випробування йдеться у задачі;

2) чітко сформулювати подію, ймовірність якої потрібно обчислити і позначити її *(А);*

3) обчислити загальну кількість рівноможливих наслідків (я) цього випробування;

4) обчислити кількість наслідків (ти), які сприяють розглядуваній події;

5) обчислити ймовірність події за формулою $P(A) = \frac{m}{n}$.[15, 128с.]

6) **Задача 7.** На донорський пункт прийшли 12 осіб, із яких 5 мають першу групу крові, 3 — другу, а інші — третю. Яка ймовірність того, що перша людина, яка здала кров, має третю групу крові?

7) Відповідь. 1/3.

8) **Задача 8.** Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилено на 27 кубиків. Визначити ймовірність того, що вийнятий навмання кубик має дві пофарбовані грані.

9) Відповідь. 1/3.

10) **Задача 9.** З цифр 0, 1, 2, 3, 4 складають трицифрові числа, цифри яких не повторюються. Яка ймовірність того, що навмання взяте число:

11) а) дорівнює 241;

12) б) буде кратним 5;

13) в) буде парним;

14) г) буде непарним?

15) *Розв’язання.* Оскільки першою цифрою числа не може бути цифра 0, то всього трицифрових чисел можна утворити 4 • 4 • 3 = 48. Тому всіх елементарних подій буде 48. Тоді

16) а) появі числа 241 сприяє тільки одна елементарна подія. Отже, р = 1/48;

17) б) із утворених чисел кратними 5 будуть ті, що закінчуються цифрою 0. Таких чисел 12, тому події «число кратне 5» сприяє 12 елементарних подій. Отже,р=12/48=1/4;

18) в) із утворених чисел парними будуть ті, що закінчуються цифрами 0, 2 або 4. Чисел, які закінчуються цифрою 0, є 12; цифрою 2 або 4 — по 9. Тоді події «число парне» сприяє 12 + 9 + 9 = 30 елементарних подій. Отже, *p* — 30/48=5/8;

19) г) оскільки всі утворені числа є парними або непарними, то непарних чисел буде 48 - 30 = 18, тому події «число непарне» сприяє 18 елементарних подій. Отже ,р=18/48=3/8.

Задача 10. У класі 16 юнаків і 14 дівчат. Для прибирання актової зали до святкового вечора потрібно відправити шість учнів. Учнів вибирають навмання за номером у журнальному списку. Чому дорівнює ймовірність того, що залу будуть прибирати:

а) тільки юнаки;

б) тільки дівчата;

в) дві дівчини й чотири юнаки;

г) три дівчини і три юнаки?

Розв'язання. Усього шість учнів із 30 можна вибрати C_{36}^{6}способами, тому всього є C_{30}^{6} елементарних подій. Розмірковуючи далі, матимемо:

а) шість юнаків із 16 можна вибрати $\boldsymbol{C_{16}^{6}}$способами. Тому події *A*

«прибиратимуть тільки юнаки» сприяє $\boldsymbol{C_{16}^{6}}$елементарних подій; $P(A)=\frac{C_{16}^{6}}{C_{30}^{6}}$;

б) шість дівчат із 14 можна вибрати $\boldsymbol{C_{14}^{6}}$ способами. Тому події *B* «прибиратимуть тільки дівчата» сприяє $\boldsymbol{C_{14}^{6}}$ елементарних подій; $P(B)=\frac{C_{14}^{6}}{C_{30}^{6}}$;

в) дві дівчини із 14 можна вибрати $\boldsymbol{C_{14}^{2}}$ способами, чотирьох хлопців із 16 можна вибрати $\boldsymbol{C_{16}^{6}}$ способами. Використовуючи комбінаторне правило множення, отримаємо, що всього варіантів утворити групу з двох дівчат і чотирьох юнаків $\boldsymbol{C_{14}^{2}\bullet C_{16}^{6}}$. Тому події *C* «прибиратимуть дві дівчини й чотири юнаки» сприяють

$C_{14}^{2}\bullet C_{16}^{6}$. елементарних подій; $P(C)\ =\frac{C_{14}^{2}\bullet C_{16}^{6}}{C_{30}^{6}}$;

г) міркуючи аналогічно розв'язуванню завдання в), визначимо, що події Б «прибиратимуть три дівчини і три юнаки» сприяють елементарних подій; $P(D)\ =\frac{C_{14}^{3}\bullet C_{16}^{3}}{C_{30}^{6}}$;

Після введення статистичної частоти, статистичного та геометричного означень імовірності доцільно запропонувати учням розв'язати такі задачі.[12, 135с.]

Задача 11. У результаті 20 підкидань грального кубика отримали таку послідовність випадань чисел: 6, 4, 3, 3, 2, 6, 5, 1, 1, 3, 2, 2, 4, 5, 3, 6, 6, 1, 4, 4. Знайти абсолютну і статистичну частоту появи:

а) кожного числа;

б) парного числа;

в) непарного числа;

г) числа не більшого за 3; більшого за 3;

д) числа не більшого за 6; є) числа, кратного 7.

Розв 'язання. Для зручності складемо таку таблицю (її називають частотною таблицею):

Число	1	2	3	4	5	6
Кількість випадань	3	3	4	4	2	4

Тоді матимемо:

а) $P_N\{1\}=\frac{3}{20}$; $P_N\{2\}=\frac{3}{20}$; $P_N\{3\}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$; $P_N\{4\}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$; $P_N\{5\}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$; $P_N\{6\}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$;

б) для знаходження статистичної частоти появи парного числа можна додати абсолютні частоти випадання чисел 2, 4 і 6. Тоді P_N {або 2, або 4, або 6}

$=\frac{3+4+4}{20}=\frac{11}{20}$.

З іншого боку очевидно, що статистичну частоту появи парного числа можна обчислити, додавши статистичні частоти появи відповідно чисел 2, 4 і 6.

Тоді P_N {або 2, або 4, або 6} = $P_N\{2\}$+ $P_N\{4\}$+ $P_N\{6\}$= $\frac{3}{20}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{11}{20}$.

в) якщо парні числа випадали 11 разів, то непарні 20-11 = 9 разів. Отже,

$$P_N \{\text{або 1, або 3, або 5}\} = \frac{9}{20};$$

г) $P_N\{a < 3\} = \frac{10}{20}=\frac{1}{2}$;$P_N \{a > 3\} =\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ де а - число, що випало;

д) число, не більше за 6, випадає в кожному випробуванні. Отже,

$$P_N\{a \le 6\} = \frac{20}{20}=\mathbf{1};$$

є) число, кратне 7, жодного разу не може випасти. Абсолютна частота такої події дорівнює 0. Отже, $P_N\{a \vdots\ \mathbf{7}\} = \frac{0}{20} = 0$.[15]

Задача 12. Відомості про кількість учнів у 30 класах школи такі:

8	0	6	2	8	1
6	2	2	8	6	0
2	0	8	8	0	1
2	6	6	8	0	2
1	1	0	8	6	0

Знайти статистичну частоту, що у навмання вибраному класі навчається:

а)30 учнів; б) менше за 30 учнів;

в) більше за 30 учнів; г) не менше за 30 учнів;

д) не більше за 32 учні; є) не менше за 26 учнів; є) більше за 32 учні.

Розв 'язання. Складемо таблицю:

Кількість учнів у класі	26	28	30	31	32
Кількість класів	6	7	7	4	6

Нехай *n* — кількість учнів у класі. Тоді матимемо:

а) P_N {n=30}= $\frac{7}{30}$; б) P_N {n<30}= $\frac{13}{30}$;

в) P_N {n>30}= $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$; г) P_N {n≥30}= $\frac{17}{30}$;

д) P_N {n≤30}= $\frac{30}{30} = \mathbf{1}$; *е)* P_N {n≥26}= $\frac{30}{30} = \mathbf{1}$;

є) P_N {n≥32}= $\frac{0}{30}$ = 0.

Задача 13. Із двох дійсних чисел, сума квадратів яких не більша за 100, навмання вибирають два числа. Яка ймовірність того, що сума квадратів цих чисел буде не меншою за 49?

Розв 'язання. Нехай х та *у* — задані числа, що задовольняють нерівність $x^2 + y^2 \leq 100$. Подія *А* полягає у тому, що взяті навмання два числа задовольнятимуть нерівність $x^2 + y^2 \geq 49$, тобто події *А* сприятимуть усі пари чисел, які є розв'язками системи:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 100} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 \geq 49} \end{cases}$$

Зобразимо ці розв'язки у системі координат (рис. 15.5).

Отже, події *А* сприяють усі точки заштрихованого на рисунку кільця. Для обчислення ймовірності події *А* потрібно знайти відношення площі кільця до площі більшого круга: $P(A) = \frac{100\pi - 49\pi}{100\pi}$= 0,51.

На особливу увагу заслуговують задачі, в процесі розв’язування яких використовуються і теорема додавання, і теорема множення. Перш ніж безпосередньо розв'язувати такі задачі, з учнями потрібно відпрацювати вміння подавати подію, ймовірність якої обчислюють і яка не є елементарною, у вигляді суми або добутку (суми і добутку) інших подій, або визначати подію, протилежну заданій. Також слід навчити учнів розрізняти сумісні, несумісні та незалежні події. Ці уміння набуваються в процесі розв'язування таких задач.

Задача 14. З коробки, в якій є олівці червоного, чорного і синього кольорів, навмання виймають один олівець. Події A_1, A_2 і A_3 відповідно означають появу червоного, чорного і синього олівців. Що означає подія:

а) $A_1 + A_2$; б) $A_1 + A_3$ в) $A_2 + A_3$?

Відповідь: а) вийнято червоний або чорний олівець; б) вийнято червоний або синій олівець; в) вийнято чорний або синій олівець.

Задача 15. Стрілець виконує два постріли по мішені. Події відповідно означають влучення під час першого і другого пострілів. Записати формулою подію, яка полягає в тому, що:

а) у мішень влучено два рази; б) у мішень влучено.

Розв'язання: а) подія «у мішень влучено два рази» означає, що одночасно відбулися подія A_1 іподія A_2, тобто виконується добуток подій $A_1 \cdot A_2$;

б) подія «у мішень влучено» означає, що відбулася подія A_1, або подія A_2, або обидві ці події. Тобто справджується сума подій $A_1 + A_2$.

Задача 16. Які пари подій несумісні:

а) навмання вибране натуральне число від 1 до 100 включно ділиться на 10; ділиться на 11;

б) виграш у лотерею за першим білетом; за другим білетом;

в) виграш; програш у шаховій партії;

г) навмання вибране натуральне число від 1 до 25 включно є парним; кратним 3?

Відповідь. Несумісні події не можуть відбутися одночасно. Отже, події а) і в) несумісні; події б) і г) сумісні.

Задача 17. Подія A означає появу шести очок на верхній грані грального кубика. Що означає подія A ?

Відповідь. A — це подія, протилежна події A. Подію A можна описати по-різному: не випало 6 очок; випало 1, 2, 3, 4, 5 очок.

Задача 18. Подія *A* полягає в тому, що хоча б одна з наявних 15 електричних лампочок нестандартна. Що означає подія *A?*

В і д п о в і д ь. Усі лампочки — стандартні.

Задача 19. Які пари подій протилежні:

а) контрольна з математики написана на 11 балів; контрольна з математики написана на 8 балів;

б) хоча б одна куля під час двох пострілів влучила у ціль; жодна з двох куль під час двох пострілів не влучила у ціль?

В і д п о в і д ь. Події у пункті б.

Задача 20. Із учнів 11 класу, які складають екзамен з математики, навмання вибирають одного. Нехай подія *A* полягає в тому, що вибраному учню вже виповнилося 17 років, подія *B* — вибраний учень відмінно навчається, С — вибраний учень є дівчиною. Описати подію:

а)ABC; б)ABC; в)ABC; г)ABC.

В і д п о в і д ь: а) вибрано 17-річну дівчину, яка відмінно навчається; б) вибрано дівчину, яка відмінно навчається і якій ще немає 17 років; в) вибрано 17-річного юнака, який відмінно навчається; г) вибрано дівчину, яка не є відмінницею і якій ще немає 17 років.

Задача 21. Із 20 деталей є п'ять бракованих. Навмання одну за одною беруть дві деталі. Яка ймовірність того, що обидві деталі будуть бракованими?

Розв 'язання. Нехай подія *A* — «перша витягнута деталь бракована», подія *B* «друга витягнута деталь бракована». Тоді подія С — «обидві витягнуті деталі браковані» — є добутком подій *A і B,* $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Імовірність події *B* умовна. Якщо подія *A* відбулася, то $P_A(B) = \frac{4}{19}$.Отже,

$$P(C) = P(AB) = P(A) \bullet P_A(B) = \frac{1}{4} \bullet \frac{4}{19} = \frac{1}{19}.$$

Зауваження. Цю задачу можна спочатку запропонувати учням розв'язати за допомогою класичного означення імовірності. Міркування будуть такими: витягування двох деталей одна за одною можна розглядати як одночасне витягування двох деталей (наприклад, одну деталь правою, а другу лівою руками).

Дві деталі з 20 можна вибрати C_{20}^2=190 способами. Дві браковані деталі з 5 можна вибрати C_5^2=10 способами, тобто події С — «обидві витягнуті деталі браковані» — з усіх 190 наслідків випробування сприяє 10.

Отже, Р(С) = $\frac{10}{190} = \frac{1}{19}$.

Задача 22. Нехай $P(AB) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$. Знайти $P(A + B)$.

Розв 'язання. $P\{A) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.Оскільки $P(AB) \neq \mathbf{0}$ то події *А* і *В* сумісні, і Р(А + В) = Р(А) + Р(В)-Р(АВ)=$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

Задача 23. Консервний завод відправляє продукцію у скляних банках до магазинів міста спочатку залізницею, а потім — автотранспортом. Імовірність того, що банки розіб'ються під час перевезення залізницею, дорівнює 0,002, автотранспортом — у 5 разів більша. Якими можуть бути втрати під час перевезення, якщо завод відвантажив продукції на 60 000 грн?

Розв'язання. Нехай подія *А* — «банка розбилася під час перевезення залізницею», *Р(А)* = 0,002; подія *В* — «банка розбилася під час перевезення автотранспортом» , $P(B) = 5 \cdot 0{,}002 = 0{,}01$. Втрати будуть, якщо відбувається подія С — «хоча 6 одна з банок розбилася». Обчислимо ймовірність події С. Для цього розглянемо подію С — «жодна з банок не розбилася», $C = AB$. Тоді

$P(C) = 1 - P(C) = 1 - P(AB) = 1 - P(A) \cdot P(B) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B))$ $= 1 - 0{,}998 \cdot 0{,}99 = 0{,}01198$.

Отже, ймовірність втрат дорівнює 0,01198, а самі втрати можуть становити 60 000-0,01198=718,8 грн.

Задача 24. У біатлоніста є шість патронів. На вогневому рубежі він має влучити у чотири круги. Яка імовірність того, що завдання буде виконано, якщо ймовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,7?

Розв 'язання. Нехай подія А — «влучення у круг». Умову задачі можна перефразувати так: «Знайти ймовірність того, що в шести незалежних випробуваннях подія А відбудеться 4 рази, якщо в кожному випробуванні її ймовірність р = 0,7». Тоді за формулою Бернуллі

$$P_{4,6} = C_6^4 \cdot (0{,}7)^4 \cdot (1-0{,}7)^2 = 0{,}324135.$$

Задача 25. Виконують п'ять незалежних пострілів у ціль. Імовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 2/3. Яка ймовірність того, що буде не менше ніж три влучення?

Розв'язання. Подія «Буде не менше ніж три влучення» означає, що буде 3,4

або всі 5 влучень:

$$\boldsymbol{P_5(m \geq 3) = C_5^3(2/3)^3 \bullet (1/3)^2 + C_5^4(2/3)^4 \bullet 1/3 + (2/3)^5 = \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{192}{243} = \frac{64}{81}}.$$

Задача 26.

Імовірність того, що подія *А* відбудеться хоча б один раз під час проведення п'яти незалежних випробувань, дорівнює 0,99757. Яка ймовірність події *А* для одного випробування?

Розв'язання. Нехай р — ймовірність події *А* для одного випробування. Тоді $P_5(m> 1) = 1 – P_5 (m= 0) = 1-(1 –p)^5= 0,99757$, звідси р = 0,7.

2.3. Про вивчення початків теорії ймовірностей в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики.

На вивчення початків теорії ймовірностей у звичайних класах загальноосвітньої школи відводиться 8 годин. Зрозуміло, що за цей час ґрунтовно оволодіти знаннями й особливо уміннями з цієї теми практично неможливо.

У ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики програма передбачає 25-30 годин. Це практично втричі більше, ніж у звичайних класах. Постає питання: який зміст вкласти в цей відведений час?

У підборі змісту навчального матеріалу необхідно врахувати такі фактори:

- загальноосвітню значимість;
- світоглядний потенціал запропонованих тем;
- прикладну спрямованість навчального процесу.

Тому важливо правильно оцінити, які знання і способи діяльності потрібні сучасній людині у повсякденному житті і діяльності, що з них буде потрібне для вивчення інших предметів, для продовження освіти, для формування різних сторін інтелекту учня. Необхідно потурбуватися також про те, щоб запропонований зміст забезпечував можливість органічного поєднання початків теорії ймовірностей з традиційним, сприяв розвитку міжпредметних зв'язків. З одного боку, зміст має бути поглибленим, щоб процес навчання можна було проводити на високому рівні, швидким темпом, при провідній ролі теоретичних знань. З іншого — недоцільно перенавантажувати програму.

Я не згодна з існуючою думкою Я. Бродського, О. Павлова про те, що «Початки теорії ймовірностей» недоцільно розпочинати вивчати вії класі, оскільки учні 11 класу не мають відповідних мотивів до вивчення цього матеріалу, адже він не входить до програми вступних іспитів. Але не треба забувати, що мета закладів нового типу включає не тільки підготовку до вступу у вищі навчальні заклади, а насамперед забезпечує широку загальноосвітню підготовку учнів, розкриває їхні творчі здібності.

Передбачений програмою обсяг матеріалу з «Початків теорії ймовірностей» є недостатнім. Якщо зміст програми не доповнити, то початки теорії ймовірностей так і будуть існувати як стороння частина, яка в кращому випадку є своєрідним продовженням комбінаторики. До цього питання необхідно поставитися дуже ретельно. Можливих варіантів доповнення може бути велика кількість, але вони дійсно мають бути доступні учням, потрібними в повсякденному житті, пов'язаними з майбутньою професійною діяльністю.

Ще А. Реньї зазначав, що теорія ймовірностей знаходить застосування у повсякденному житті, науці, техніці. Треба пам'ятати: ця наука не досягла б такого розвитку і не так широко використовувалась сьогодні, якби займалась тільки випадковими подіями. Тому природним є перехід від вивчення випадкових подій до вивчення випадкових величин. На нашу думку, ця тема не має обмежуватися поняттям про дискретні і неперервні розподіли статистичних ймовірностей. Доцільно вивчати основні закони розподілів і їх числові характеристики .

Вивчення деяких дискретних розподілів жодною мірою не перевантажить програму, оскільки біномний розподіл тісно пов'язаний зі схемою Бернуллі, розподіл Пуассона — з теоремою Пуассона, геометричний — з нескінченно спадною геометричною прогресією, гіпергеометричний — з задачею на без повторну вибірку.

Визначення числових характеристик кожного з цих розподілів може бути використане в індивідуальній роботі з учнями, що сприятиме розвитку їхнього математичного мислення, інтуїції. З'являється можливість збагачення змісту навчального матеріалу задачами дослідницького характеру.

2.4. Експериментальна комбінаторика для молодших школярів.

В чудовій маленькій книжці «Госпожа удача» У. Уівер пише: «Теорія ймовірностей і математична статистика — дві важливі галузі, нерозривно пов'язані з нашим повсякденним життям. Світ промисловості, фінансів, страхові компанії сьогодні є боржниками ймовірнісних законів. Сама фізика має суттєво ймовірнісну природу. Такою ж, по суті своїй, є й біологія. Між тим, не дивлячись на цю важливість та універсальний характер теорії ймовірностей і математичної статистики, цей предмет ще не став загальноприйнятим в освіті. Сьогодні ймовірність вивчають у середніх школах більшості країн, і питання про те, коли вона ввійде складовою частиною в шкільні програми всіх країн, є не більше, ніж питанням часу».

З цим важко не погодитись, адже навіть на рівні середніх школярів вивчення ймовірності вносить багато свіжих та плідних ідей. Не маючи ймовірнісних понять, діти мають деформовану уяву про математику, вважаючи, що між «істинним» та «хибним» більше нічого немає! Але ж пізніше вони обов'язково виявляють існування цілої області математики, яка базується на понятті «Може бути!». Саме тут математика торкається повсякденного життя набагато тісніше, ніж цьому традиційно вчать у школі, і саме тому більшість фахівців у галузі шкільної математики вважають необхідним введення до шкільного курсу елементів теорії ймовірностей та математичної статистики. Звичайно, це питання досить складне і не може бути вирішене одностайно та миттєво, адже ймовірність — розділ вищої математики і доступність її для школярів — питання сумнівне. Тут слід звернутися до світового досвіду, і неможливе стане ймовірним! Все, що необхідно зробити — це майстерно пов'язати теорію ймовірності зі світом дитини... Насправді, зробити це неважко, адже навкруги нас легко знайти безліч ситуацій, які можуть послужити поштовхом до глибоких міркувань, досліджень, висновків. Мета вчителя — використати ці ситуації для навчання, і, зрозумівши необхідність та можливість вивчення ймовірності, продумати кожен крок цього шляху.

У багатьох країнах світу знайомство з теорією ймовірностей починають з вивчення комбінаторики. Комбінаторика — важливий інструмент для підготовки до формування ймовірнісного мислення учня. Раніше її розглядали як ще один гальмуючий фактор у вивченні ймовірностей, але останній досвід, набутий в різних країнах світу, показав, що комбінаторику можна ввести навіть до початкового етапу навчання. Вона не потребує ніяких попередніх знань і може бути легко пов'язана з цікавими заняттями.

Перше знайомство з комбінаторикою буває для учнів досить складним та неприродним, якщо воно починається з введення одночасно багатьох далеко не елементарних понять і визначень, базується на теорії множин, розуміння якої традиційно складне навіть для старшокласників.

Але це знайомство може відбуватися набагато раніше, ніж у 10 — 11 класі і більш природнішим шляхом. Важливо максимально поєднати принципи доступності та науковості у вивченні такого напрочуд цікавого та розвиваючого розділу математики, як комбінаторика.

Узагальнюючи досвід навчання з предмета в багатьох країнах світу, я пропоную розбити вивчення комбінаторики на етапи.

I етап: експеримент — дослідження та узагальнення отриманих результатів. Побудова та визначення різних комбінаторних моделей відповідно до змісту задачі.

II етап: розв'язання найпростіших задач дедуктивним методом. Вивчення принципів додавання та множення. Означення основних понять комбінаторики.

III етап: вивчення основних формул комбінаторики та застосування їх до розв'язання задач різних рівнів складності.

Слід зазначити, що третій етап такої схеми є традиційним для вивчення у факультативних курсах та в старших класах спеціалізованих профільних шкіл. Він забезпечений досить багатим дидактичним, методичним та теоретичним матеріалом. На жаль, про перший та другий етапи вивчення комбінаторики такого сказати не можна, тому я б хотіла докладніше спинитися саме на них.

Почнемо з першого, експериментально-дослідницького, етапу.

В зв'язку з можливістю експерименту комбінаторика займає, безумовно, привілейоване становище в математичній освіті. Але для того, щоб дати поштовх дитині до певних ідей, потрібні специфічні засоби. По-перше, необхідно добрати цікаві задачі експериментального характеру; по-друге, ввести елемент змагання. Перші заняття повинні бути живими і збуджувати природну цікавість дитини, не відриваючи її від дійсності.

Комбінаторна задача на першому етапі, як правило, полягає в тому, щоб з'ясувати:

1) існують чи не існують деякі множини з заданими властивостями;

2) об'єднати їх у відповідні класи та перерахувати.

Учні завжди можуть почати таке дослідження з експериментів, а, проводячи самостійні численні досліди, дитина поступово приходить до відкриття багатьох понять, причому попередніх знань це не потребує. Для експериментів можна використовувати об'єкти з життя: самих учнів, 'їхні прилади, спеціально підготовлені технічні засоби.

Вивчення комбінаторних задач доцільно розпочинати з введення загального поняття комбінаторної моделі. На цьому етапі, звичайно, слід уникати означень та формулювань; дітям досить зрозуміти, що модель — це «переклад» задачі з літературної мови на мову комбінаторних понять.

Метою вчителя є ознайомити учнів з тим, що комбінаторні моделі розрізняються за такими типами :

1. Розміщення без повторень (зокрема перестановки).

2. Розміщення з повтореннями.

3. Комбінації (сполучення) без повторень.

4. Комбінації з повтореннями.

Моделі можна наповнити життям, конкретизувавши їх. Для цього можна використати фішки, жетони, бусинки, букви алфавіту, цифри, різнокольорові малюнки, точки, тощо.

Розглянемо експеримент 1.

Задача: побудувати якомога більше послідовностей (наборів) трьох точок, використовуючи три кольори: червоний, жовтий, синій. Додаткова умова: в кожній послідовності повинно бути використано

1) всі три кольори;
2) не всі три кольори;
3) лише один колір;
4) не більше двох кольорів;
5) всі три кольори, але починаючи з червоного;
6) не обов'язково всі кольори, але другий жовтий; і т.д.

Проводити цей експеримент пропонується у вигляді командної гри. Для нанесення точок можна використовувати спеціальні невеликі дошки, або аркуші паперу. Виграє та команда, яка побудує найбільшу кількість послідовностей, задовільняючих умові (а краще — всі), швидше за інших. Результат бажано записувати на дошці і зберігати до кінця гри.

Мета проведення експерименту:

1. Організувати систематичний пошук елементів певної моделі.
2. Спробувати знайти всі елементи моделі.
3. Навчитися групувати елементи загальної моделі за певними характеристиками.
4. Перше знайомство з поняттям «відношення порядку».
5. Спробувати визначити тип кожної моделі.
6. Проаналізувати результат експерименту, порівнюючи кількість побудованих послідовностей для кожної моделі та спробувати зробити висновки.

Наступним кроком у навчанні може стати експеримент 2.

Задача: скласти всі можливі послідовності з жетонів трьох кольорів за таких умов:

Використано три жетони	Порядок кольорів враховуємо	Кольори можуть повторюватись
Використано два жетони	Порядок кольорів не враховуємо	Кольори не можуть повторюватись

Ця загальна схема дає можливість сформулювати вісім задач різних типів.

Мета проведення експерименту:

1. Навчитися чітко визначати тип моделі за умовою задачі.

2. Навчитися визначати всю множину розв'язків задачі.

3. Порівняти результати (кількість послідовностей) для кожної моделі та зробити висновки. Якій моделі відповідає найбільша кількість послідовностей? Чому?

На цьому етапі вже можна ввести поняття комбінації елементів, замінюючи ним поняття «послідовність» або «набір» та «кількість комбінацій». Дуже швидко перерахування кількості можливих комбінацій стане задачею більш важливою, ніж ефективна побудова самих комбінацій.

Іншим типом експерименту є гра з фішками двох кольорів.

Експеримент 3.

Задача: побудувати послідовність (комбінацію) з чотирьох фішок, якщо маємо:

1) дві сині та дві червоні;

2) три сині та дві червоні;

3) три червоні та дві сині; і таке інше.

Організація експерименту.

Діти будують послідовності по черзі. В кінці кожного варіанту гри доцільно підрахувати всі побудовані комбінації, проаналізувати тип отриманої моделі. (Від того, як оформити гру, суттєво залежить можливість включення в неї різного роду стимулів. У такій грі прагнення до виграшу породжує прагнення до систематизації).

Можна також будувати послідовності жетонів або фішок за допомогою жеребкування: діти

навмання витягають набір жетонів з ящика, потім вони повинні вирішити, чи складають ці жетони нову послідовність.

Мета експерименту.

1. Створити характерну модель комбінацій з повторенням.

2. Систематизувати пошук нових комбінацій.

3. Спробувати зробити узагальнюючий висновок про кількість комбінацій в кожному випадку.

Провівши ці та аналогічні експерименти, учні зможуть:

- зрозуміти деякий набір правил та визначити, чи відповідає йому задана комбінація;

- розрізняти, чи є комбінація новою, чи повторює стару;

- виявити всі комбінації, які відповідають правилу (умові задачі);

- намагатися зрозуміти, чому на цій стадії неможливо знайти нову комбінацію.

Найбільш складною та цікавою для учнів на дослідницькому етапі є так звана «відкрита ситуація»:

Експеримент 4.

Задача: з набору різнокольорових жетонів (наприклад, один синій, два жовтих, три білих) вибрати пару. Скількома способами це можна зробити?

Зауваження. В залежності від обраних правил, відповіддю може бути будь-яке з чисел: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 15, 22, 26.

Організувати проведення експерименту можна в такий спосіб: одна команда формулює нову задачу, друга — шукає її розв'язок. Можна також створювати умову задачі за відомим результатом, попередньо проаналізувавши ситуації (в якому випадку буде більше комбінацій? а коли менше? якому типу відповідає кожна задача?). Базуючись на загальній моделі, можна скласти велику кількість цікавих завдань, залучивши фантазію учнів та вчителя.

Мета експерименту.

1. Активізувати та узагальнити набуті раніше знання учнів.

2. Закріпити вміння встановлювати тип комбінаторної задачі та розв'язувати її.

3. Змінити акцент у розв'язуванні комбінаторних задач в бік пошуку кількості комбінацій.

4. Зробити узагальнюючі висновки про структуру кількості комбінацій для різних типів задач (моделей).

Аналогічні експерименти можна проводити, використовуючи букви алфавіту, цифри, олівці, навіть самих учнів, розділяючи їх на групи за певними ознаками.

Проведений таким чином перший етап дасть учням, крім набутих базових знань та значного розширення математичного світогляду, відчуття «приємного знайомства» з комбінаторикою, як частиною суттєво нового розділу математики.

РОЗДІЛ 3
АНАЛІЗ І РЕЗУЛЬТАТИ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

3.1. Аналіз та результати педагогічного експерименту

Педагогічний експеримент був проведений серед учнів дев'ятих класів НВК «РОЛІ» м. Рівного було вибрано дві групи: експериментальну та контрольну. Оскільки уроки математики проводяться по підгрупах, то до експериментальної групи ввійшла I підгрупа, , а в контрольній групі була II підгрупа, учні якої мали приблизно однакові оцінки з математики, як і учні з експериментальної групи. Таким чином, для учнів експериментальної групи було проведено заняття за методикою, запропонованою в даній магістерській роботі. Перед тим, як приступити до проведення занять, було визначено середню успішність учнів з математики у двох групах. Для порівняння результатів ми використовували закон розподілу ймовірностей Стюдента, оскільки в даному випадку маємо досить малу вибірку, адже кількість учнів у підгрупах становить 15 та 16 учнів.

Теорія малої вибірки дає можливість оцінити істотність відмінності між двома вибірковими середніми. Ймовірність значень різниць між двома вибірковими середніми, за абсолютною величиною не менших від фактичної різниці, яка відома з досвіду, визначається за формулою

$P[|\tilde{x}' - \tilde{x}''| > \delta_{\Phi}] = 2[1 - S(t_{\Phi})]$.

Де $\tilde{\boldsymbol{x}}'$ **і** $\tilde{\boldsymbol{x}}''$ - вибіркові середні;

$\boldsymbol{\delta}_{\Phi} = \tilde{\boldsymbol{x}}' - \tilde{\boldsymbol{x}}''$- фактична різниця між двома вибірковими середніми;

$$\boldsymbol{t}_{\Phi} = \frac{\boldsymbol{\delta}_{\Phi}}{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{MB}}} = \frac{\boldsymbol{\delta}_{\Phi}}{\sqrt{\dfrac{[\sum(\boldsymbol{x}' - \tilde{\boldsymbol{x}}')^2 + \sum(\boldsymbol{x}'' - \widetilde{\boldsymbol{x}''})^2](\boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_2})}{(\boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_2} + \boldsymbol{2})\boldsymbol{n_1}\boldsymbol{n_2}}}}$$

Коли за таблицею (додаток) визначається ймовірність, яка дорівнює

$2[1 - S(t_{\Phi})]$, замість n слід брати $n_1 + n_2 - 2$. Якщо ймовірність дістанемо велику, то слід чекати різниць, які перевищують фактичну. А це означає, що фактична різниця, будучи меншою за ті, яких слід чекати з більшою ймовірністю, не дає підстав вважати, що відмінності між середніми істотні. Коли дістанемо малу ймовірність, відмінність між середніми не випадкова, а істотна.

Оцінимо розходження між середніми успішностями навчання у двох підгрупах на початку проведення занять та на закінчення теми.

I. На початок навчального року.

Експериментальна група.

Учні	**Успішність у балах** (x')	$(x')^2$
1	10	100
2	11	121
3	8	64
4	10	100
5	9	81
6	8	64
7	11	121
8	10	100
9	8	64
10	10	100
11	7	49
12	5	25
13	9	81
14	7	49
15	10	100
Всього	133	1219

Контрольна група.

Учні	**Успішність у балах** (x)	$(x'')^2$
1	10	100
2	11	121
3	8	64
4	7	49
5	8	64
6	10	100
7	9	81
8	12	144

9	6	36
10	8	64
11	9	81
12	7	49
13	8	64
14	9	81
15	11	121
16	9	81
Всього	142	1300

Дано:

n_1=15; n_1=15;

$\sum x' = 133;$ $\sum x'' = 142;$

$\sum (x')^2 = 1219;$ $\sum (x'')^2 = 1300;$

1) $\sum (\boldsymbol{x}' - \tilde{\boldsymbol{x}}')^{\mathbf{2}} = \sum (\boldsymbol{x}')^{\mathbf{2}} - \frac{(\sum (x'))^2}{n_1} = 1219 - \frac{133^2}{15} = 39{,}73.$

2) $\sum (\boldsymbol{x}'' - \tilde{\boldsymbol{x}}'')^{\mathbf{2}} = \sum (\boldsymbol{x}'')^{\mathbf{2}} - \frac{(\sum (x''))^2}{n_2} = 1300 - \frac{142^2}{16} = 39{,}75.$

3) $\boldsymbol{\delta_{Ф} = \widetilde{x}' - \widetilde{x}'' = 39,75 - 39,73 = 0,02}.$

4) $\boldsymbol{t_{Ф}} = \frac{\mathbf{0{,}02}}{\sqrt{\frac{\mathbf{(39{,}73+39{,}75)(15+16)}}{\mathbf{(15+16-2)\cdot 15\cdot 16}}}} = \mathbf{0{,}03}.$

5) З таблиці (додаток 3) для я, $\boldsymbol{n_1 + n_2}$=15+16-2=29 знаходимо S(0,03)= 0,518

6) Знаходимо ймовірність

$$P[|\tilde{x}' - \tilde{x}''| > 0{,}03 = 2[1 - S(0{,}03)] = 2(1 - 0{,}518) = 0{,}964.$$

Оскільки ймовірність досить велика, то слід вважати, що середній бал успішності двох груп на початок проведення уроків за запропонованою методикою майже однаковий.

Після того як половина занять була проведена, учні експериментальної та контрольної груп написали самостійну роботу (завдання однакові), за результатами якої знову оцінили розходження між середніми успішностями обох груп.

Експериментальна група.

Учні	**Успішність у балах** (x')	$(x')^2$
1	10	100
2	11	121
3	9	81
4	12	144
5	9	81
6	8	64
7	10	100
8	11	121
9	9	81
10	10	100
11	8	64
12	7	49
13	9	81
14	10	100
15	10	100
Всього	143	1387

Контрольна група.

Учні	**Успішність у балах** (x'')	$(x'')^2$
1	9	81
2	11	121
3	8	64
4	7	49
5	8	64
6	10	100
7	9	81
8	10	100
9	6	36
10	9	81
11	8	64
12	9	81
13	8	64
14	8	64

15	10	100
16	9	81
Всього	139	1231

Дано:

n_1=15; n_1=15;

$\sum x' = 143;$ $\sum x'' = 139;$

$\sum (x')^2 = 1387;$ $\sum (x'')^2 = 1231;$

1) $\sum(\boldsymbol{x}' - \widetilde{\boldsymbol{x}}')^2 = \sum(\boldsymbol{x}')^2 - \frac{(\sum(x'))^2}{n_1} = 1387 - \frac{143^2}{15} = 23{,}73.$

2) $\sum(\boldsymbol{x}'' - \widetilde{\boldsymbol{x}}'')^2 = \sum(\boldsymbol{x}'')^2 - \frac{(\sum(x''))^2}{n_2} = 1300 - \frac{142^2}{16} = 23{,}44.$

3) $\boldsymbol{\delta_{\Phi} = \widetilde{x'} - \widetilde{x}'' = 23,73 - 23,44 = 0,3}$.

4) $\boldsymbol{t}_{\Phi} = \frac{\mathbf{0{,}02}}{\sqrt{\frac{\mathbf{(23{,}73+23{,}44)(15+16)}}{\mathbf{(15+16-2)\cdot 15\cdot 16}}}} = \mathbf{0{,}6}.$

5) З таблиці (додаток 3) для , $\boldsymbol{n_1 + n_2 - 2}$=15+16-2=29 знаходимо S(0,6)= 0,724.

6) Знаходимо ймовірність

$P[|\tilde{x}' - \tilde{x}''| > 0{,}6 = 2[1 - S(0{,}6)] = 2(1 - 0{,}724) = 0{,}552.$

Отримали ймовірність досить велику, але вже меншу, ніж при першому порівнянні. Це означає що різниця в успішностях двох груп трохи збільшилася, а саме, в експериментальної групи. Тому порівнявши отримані результати із результатами, отриманими на початок проведення занять, вирішили продовжити експеримент. По завершенні теми обом підгрупам була дана однакова контрольна робота, на основі підсумкових оцінок якої знову було проведено обробку результатів успішності контрольної та експериментальної груп.

Експериментальна група.

Учні	Успішність у балах (x')	$(x')^2$
1	10	100
2	11	121
3	9	81
4	10	100
5	9	81
6	8	64
7	10	100
8	11	121
9	8	64
10	10	100
11	8	64
12	5	25
13	9	81
14	10	100
15	10	100
Всього	138	1302

Контрольна група.

Учні	Успішність у балах (x'')	$(x'')^2$
1	9	81
2	11	121
3	8	64
4	7	49
5	8	64
6	10	100
7	9	81
8	10	100
9	5	25
10	9	81
11	8	64
12	7	49
13	8	64

14	9	81
15	10	100
16	9	81
Всього	137	1205

Дано:

n_1=15; n_1=15;

$\sum x^{'} = 138$; $\sum x^{''} = 137$;

$\sum (x^{'})^2 = 1302$; $\sum (x^{''})^2 = 1205$;

1) $\sum(\boldsymbol{x}' - \widetilde{\boldsymbol{x}}')^{\mathbf{2}} = \sum(\boldsymbol{x}')^{\mathbf{2}} - \frac{(\sum(x^{'}))^2}{n_1} = 1302 - \frac{138^2}{15} = 32{,}4.$

2) $\sum(\boldsymbol{x}'' - \widetilde{\boldsymbol{x}}'')^{\mathbf{2}} = \sum(\boldsymbol{x}'')^{\mathbf{2}} - \frac{(\sum(x''))^2}{n_2} = 1205 - \frac{138^2}{16} = 31{,}94.$

3) $\boldsymbol{\delta_{\Phi}} = \widetilde{\boldsymbol{x}}' - \widetilde{\boldsymbol{x}}'' = \mathbf{32{,}4 - 31{,}94 = 0{,}46}.$

4) $\boldsymbol{t}_{\Phi} = \frac{\mathbf{0{,}46}}{\sqrt{\frac{\mathbf{(32{,}4+31{,}94)(15+16)}}{\mathbf{(15+16-2)\cdot 15\cdot 16}}}} = \mathbf{0{,}86}.$

5) З таблиці (додаток 3) для , $\boldsymbol{n_1 + n_2 - 2}$=15+16-2=29 знаходимо S(0,86)= 0,785.

6) Знаходимо ймовірність

$$P[|\tilde{x}' - \tilde{x}''| > 0{,}86 = 2[1 - S(0{,}86)] = 2(1 - 0{,}785) = 0{,}4.$$

Оскільки ймовірність досить мала, то слід вважати, що середній бал успішності двох груп наприкінці експерименту істотно відрізняється.

Отже, можна стверджувати, що запропонована методика викладання теми «Комбінаторика. Початки теорії ймовірностей» є ефективною. Учні експериментальної групи написали контрольну роботу краще, а це свідчить про те, що засвоїли вони матеріал глибше, навчились аналізувати задачі та шукати розв’язок шляхом логічних міркувань, а не за шаблоном, що дуже важливо для цієї теми.

ВИСНОВКИ

Необхідність вивчення елементів комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики у шкільному курсі математики була усвідомлена у вітчизняній освіті ще понад 100 років тому. У більшості розвинених країн ця необхідність реалізована вже давно. Наприклад, французькі школи з 1956 р. почали включати в програми з математики елементи статистики. Теорію ймовірностей і статистику в школах Японії вивчають з 1958 р.

"Чим викликана необхідність поповнення змісту шкільної математичної освіти ймовірнісно-статистичною змістовою лінією?

Ця лінія насамперед має загальнокультурну, загальноосвітню значущість. Вона відіграє важливу роль у розвитку мислення учнів. Зокрема, вона покликана розвинути такі спеціальні типи мислення, як імовірнісно-статистичний і комбінаторний, які необхідні сучасній людині як для соціального, так і для професійного становлення. Вивчення будь-якого розділу математики сприяє розумовому розвитку учнів, прищеплює їм навички логічного мислення. Вивчаючи ймовірність і статистику, учень пізнає, як застосовувати прийоми логічного мислення до тих випадків, коли доводиться мати справу з невизначеністю. Нова змістова лінія покликана сформувати розуміння детермінованості і випадковості, допомогти усвідомити, що багато законів природи і суспільства мають ймовірнісний характер, що багато реальних явищ і процесів описуються ймовірнісними моделями. Вивчення ймовірності, за словами А. Реньї , «сприятливо позначається і на характері учнів, наприклад розвиває сміливість, оскільки дає змогу зрозуміти, що при певних обставинах невдачі можна просто віднести до випадковості і, отже, потерпівши невдачу, аж ніяк не слід відмовлятися від боротьби за досягнення наміченої мети». Змістова лінія, що розглядається, допомагає навчитися правильно сприймати інформацію, яка лавиною обрушується на людину.

Що стосується комбінаторики, то, за словами відомого голландського математика і педагога Г. Фройденталя , вона є скелетом елементарної теорії ймовірностей. Грубі помилки у простих задачах комбінаторики зустрічаються навіть у студентів. Чому це відбувається? Адже власне математика, яка потрібна для розв'язання таких комбінаторних задач, є досить простою. Річ у тім, що своєчасно учні не набули відповідних умінь. У математиці є такі поняття, такі вміння, які формуються протягом тривалого терміну навчання (поняття множини, числа, вміння розв'язувати рівняння, нерівності, текстові задачі тощо). До таких самих умінь належать і вміння розв'язувати комбінаторні задачі. Ці вміння слід формувати поступово, повільно нарощуючи складність задач, використовуючи методи, які відповідають віку дитини. При цьому не слід обмежуватися виділенням якоїсь кількості годин у старших класах, а досягти неперервності у вивченні комбінаторики!

При вивченні традиційної математики мислення учнів утискується в тісні межі системи з двома наслідками «так» і «ні», чи «істина» і «хибність», чи «можливо» і «неможливо». Ця система не може відобразити різноманіття навколишнього світу. Але людину цікавить уся розмаїтість світу, усе, що знаходиться між двома відзначеними крайностями. Тому розширюється жорстка математична модель до надзвичайно гнучкої, яка значно збільшує можливості застосування математичних методів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авраменко М. І. Уроки алгебри і поч. аналізу в 10 і 11 кл. Посібник для вчителя / М. І. Авраменко - К.: Рад. школа, 1989. - 318с.
2. Асеев Г. Г. Теорія ймовірностей та мат. статика. : Навч. посібник. М-во к- ри і мистецтв України / Г.Г. Асеев - Х.: ХДАК, 2006, - 89с.
3. Барко В. І. Як визначити творчі здібності дитини / В. І. Барко, А. М. Тютюнников - К.: Україна, 1991. - 78с.
4. Барковський В.В. Теорія ймов. та мат. статика / В. В. Барковський -К.: Центр навч. л-ри, 2009. - 422с.
5. Бартенев Ф. А. Нестандартные задачи по алгебре. Пособие для учителей / Ф. А. Бартенев - М.: Просвещение // Квант, 1982. - №2. - с. 36-38.
6. Бевз Г.П. Виховання учнів математикою / Г.П. Бевз -Х.: Основа, 2004 -93с.
7. Бродський Я. Статистика, ймовірність, комбінаторика: 7-9кл. /Я. Бродський, О. Павлов. - К.:Шк. світ, 2007. - 128с.
8. Бузанкина Н. Е. Система развивающих задач в процессе обучения / Проблемы методов обучения в школе / Н. Е Бузанкина,Ю. К. Бабанского, К. Д. Зверева. - М.: Педагогика, 1980. -с. 136-142.
9. Бучір М.К. Посібник з теорії ймов. та мат. статики.: Навч. посібник для студ./ М.К. Бучір - Т.: Підручникиі посібники, 1998.-176с.
10. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. - М.: Просвещение, 1976 - 48с.
11. Гайштут А. Г. Математика в логических рассуждениях / А. Г. Гайштут - К.: Радянська школа, 1985. - 192с.
12. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн.. для учителя / Я.И. Груденов - М.: Просвещение, 1990 - 223с.
13. Груденов Я. И. Совершенствование работы учителя математики: Кн.для учителя / Я. И. Груденов - М.: Просвещение, 1990. - 223с.
14. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов - 8-е изд., стер. / В. Е. Гмурман - М.: Высш. шк., 2002. – 220с.
15. Груденов Я. И. Совершенствование работы учителя математики: Кн.для

учителя / Я. И. Груденов - М.: Просвещение, 2000. - 223с.

16. Єжов І. І. Елементи комбінаторики / І. І. Єжов , А. В. Скороход, М. Й. Ядренко - К.: Вища школа, 1972. - 243с.

17. Ивлев Б. М. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 кл. / Б.М. Ивлев - М.: Просвещение, 2006. - 190с.

18. Кибзун А.И. Теория вероятности и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами / А. И. Кибзун, И.Р. Горяинова - К.: Освіта, 2009. - 170с.

19. Крайчук О. В. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики: Навчальний посібник / О.В. Крайчук, Г.К. Мошковська, О.П. Соколовська. – Рівне: ТОВ фірма ’’ Прінт Хауз ’’, 2004. - 128с.

20. Кремер Н. Ш. Теорія вероятностей и математическая статистика / Н. Ш. Кремер - М.: ЮНИТ-ДАНА, 2010. - 159с.

21. Пасічник І. Д. Мислительна діяльність учнів на уроках математики/І. Д. Пасічник, Я. А. Пасічник - Львів, 1992.- 146с.

22. Реньи А. В.Трилогия о математике / А. В. Реньи - М.: Мир, 1980. - 129с.

23. Рейтман У.«Познание и мышление (моделирование на уровне информационных процессов)»-М.: Мир. - 2006. - 243с.

24. Рябчинська В. Д. Дидакт. матеріали з алгебри і поч.. аналізу для 10-11 кл.: Посібник для вчителя / В. Д. Рябчинська - К.: Освіта, 2007.- 159с.

25. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання матем. / З. І. Слєпкань - Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. - 240с.

26. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. - 2-ге вид., допов. і переобл. /З. І. Слєпкань - К.: Вища шк., 2008. - 206с.

27. Федченко Л. Я. Методика организации обобщения й систематизации знаний и умений при обучении учащихся математике / Л. Я. Федченко - К.: НПУ им. М. П. Драгоманова, 1998. - 200 с.

28. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман, Е. Н. Турецкий - М.: Просвещение, 1989. - 48 с.

29. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. Психологии / Л. М. Фридман - М.: Просвещение, 1983. -160 с.

30. Шкіль М.І. Алгебра та початки аналізу: Підручник для 11 кл. з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара - К.: Освіта, 2001. - 146с.