ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. За останні роки у соціальному житті суспільства відбулися значні зміни, що вимагають перегляду системи освіти. Переорієнтовують її *у* бік демократизації та гуманізації освіти, яка спрямована

на виховання, перш, за все, особистості, функціонально грамотної і методологічно компетентної, яка володіє інформаційними технологіями, здатна адаптуватися до навколишнього середовища, до аналізу і самоаналізу, до свідомого вибору і до відповідальності за нього. Метою зміни системи освіти є, перш за все її орієнтація на учнів, на задоволення їх індивідуальних освітніх потреб.

Важливу роль при реалізації аспектів реформи зобов'язані зіграти задачі. Дійсно, розв'язування математичних задач в сучасних методичних дослідженнях розглядуються як ефективний засіб формування у школярів системи основних математичних знань, умінь і навичок, математичних методів дослідження, як важлива форма, діяльності учнів у процесі вивчення математики, як засіб їх математичного розвитку. Ефективність застосування задач у навчанні школярів математиці, озброєння учнів методами та способами розв'язування задач, навчання їх самостійного пошуку розв'язків задач - одна з важливих проблем шкільної математичної освіти.

Різні аспекти поняття "задача" і взагалі "математична задача" частково досліджувалися в роботах таких авторів: А.К.Артемова, Г.А. Балла, Л.Л.Гуровой, Ю.М. Колягина, Ф.Ф.Нагибина, Д.Пойа, А.А.Столяра, І.Ф.Тесленко, І.М.Фридмана, П.М.Эрдниева, З.І Слєпкань, Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, М.І. Бурда, І.Ф. Тесленко, І.Ф. Шаригін і інших.

Зважаючи на практичну необхідність, недостатню наукову розробленість та соціальну значимість було обрано дану тему роботи.

Мета даної роботи дослідити різні способи розв’язання планіметричних задач.

Об'єктом дослідження є способів розв’язування планіметричних задач.

Предмет дослідження особливості розв’язування планіметричних задач

Гіпотеза дослідження: ігрові завдання з геометрії сприятимуть сприятиме підвищенню вмінь та навиків учнів при розв’язуванні геометричних задач у порівнянні з традиційним підходом навчання.

Для досягнення поставленої мети та перевірки висунутої гіпотези були поставлені такі **завдання дослідження :**

1. Вивчити та аналізувати психолого-педагогічну , математичну та науково-методичну літературу з проблеми дослідження.
2. Розкрити основні способи розв’язання планіметричних задач.
3. Зробити висновки.

Для вирішення поставлених завдань були використані наступні **методи дослідження:**

- вивчення та аналіз психолого-педагогічної , математичної та науково-методичної літератури з проблеми дослідження;

- вивчення та узагальнення досвіду вчителів математики з проблеми дослідження;

- спостереження , бесіди з учителями , аналіз письмових робіт.

Теоретичне значення дослідження визначається тим, що:

- досліджена роль розв’язання задач в процесі навчання математиці;

- виділено основні способи розв’язання геометричних задач.

Практичне значення результатів дослідження полягає в тому, що удосконалені способи розв’язування можуть бути використані при вивчені геометрії в школі, з метою підвищення ефективності при навчань геометрії.

РОЗДІЛ І. ПРЕДМЕТИ, ЗАДАЧІ, ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1.Поняття задачі

Щоб правильно розв'язувати різні питання методики геометричних задач, слід виходити з досить обґрунтованих загальних принципових положень. Одне з таких положень полягає в тому, щоб завжди врахувати, що таке геометрична задача і що означає розв'язати геометричну задачу.

Історія розвитку методичних ідей у галузі вивчення математики знає чимало спроб означення поняття задачі .

Аналізуючи психологічний зміст даного поняття, Г. О. Балл зазначає, що термін «задача» можна використовувати для позначення об'єктів, які відносять до трьох різних категорій: 1) до категорії мети дій суб'єкта, вимоги, поставленої перед суб'єктом; 2) до категорії ситуації, що включає поряд з метою – умови, в яких дана мета повинна бути досягнута; 3) до категорії словесного формулювання цієї ситуації (таке розуміння характерно для С. Л. Рубінштейна та його послідовників). На основі проведеного аналізу Г. О. Балл вважає, що в психологічній літературі найбільш поширено вживання терміна «задача» для позначення об'єктів другої категорії .

Відомий російський математик С. О. Шатуновський у вступній статті до книги Адлера «Теорія геометричних побудов» пише: «Задача є виклад вимоги «знайти» за «даними» речами інші, «шукані» речі, що перебувають одна з одною і з даними речами в зазначених співвідношеннях». Роз'яснюючи це означення, С. О. Шатуновський говорить, що в кожній задачі розглядаються два класи речей (конкретних або абстрактних). Розв'язання задачі і полягає в переведенні речей другого класу в перший.

Професор В. М. Брадіс, аналізуючи означення задачі, запропоноване С. О. Шатуновським зазначає, що воно неповне, бо під нього не підходить багато задач на доведення, і це правильно. Можна додати, що під нього не підходять і деякі інші види задач, наприклад задачі-запитання.

В. М. Брадіс пропонує і своє означення задачі. Він вважає,що задачею слід називати всяке математичне запитання, для відповіді на яке не досить простого відтворення одного якогось результату, якоїсь теореми або означення з пройденого курсу .

Аналіз шкільних геометричних задач показує, що всі вони містять певну інформацію і вказівку на потреби певним способом переробити цю інформацію. Тому основним у понятті задачі можна вважати вимогу переробки даної інформації. Відповідно до цього можна взяти такі означення. Задача — це вимога переробити дану (вхідну) інформацію для знаходження деякої (вихідної) інформації. Розв'язати задачу — це означає виконати потрібну переробку інформації або встановити її неможливість. Основними елементами задачі при такому підході слід вважати: а) вхідну інформацію (те, що дано в задачі), б) вказівку на те, якого характеру повинна бути вихідна інформація (на які запитання повинні бути знайдені відповіді), і в) перелік засобів, якими можна користуватись для переробки інформації і наложених на цю переробку обмежень.

Специфічність геометричних задач полягає в тому, що змістом їх є просторові форми і відношення. Вхідна інформація в геометричних задачах — це інформація про просторові форми і відношення. Така сама, взагалі кажучи, і вихідна інформація. Що ж до прийомів переробки вхідної інформації у вихідну, то вони в багатьох випадках мають геометричний характер, але часто використовуються і загально-математичні прийоми, зокрема аналітичні.

Вперше поняття «навчальна задача» вводить у педагогічну культуру Д. Б. Ельконін. Він трактував його як задачу, у процесі розв’язання якої основною метою є засвоєння певного зразка дій чи понять. Згодом Д. Б. Ельконін посилює значущість навчальної задачі, вважаючи її основною одиницею навчальної діяльності. Основну відмінність навчальної задачі від усіх інших задач вбачає у тому, що її мета та результат полягають у зміні самого діючого суб’єкта, а не у зміні предметів, з якими він діє.

Заманливо було б представити сукупність задач як щось, що існує в зовнішньому світі і не залежне від того, хто вирішує задачу. Проте такий підхід є тільки першим наближенням до проблеми. В зв'язку з цим Д. Берлайн справедливо відзначає, що «часто говорять про задачу як про щось, що існує в зовнішньому світі. Вона пред'являється суб'єкту на листі паперу, або він виявляє її десь в природі. Проте те, що складає задачу для одного індивідуума, може не бути задачею для іншого». Під задачею правильніше розуміти не просто зовнішню ситуацію, а ситуацію для суб'єкта, ситуацію, яка характеризується «не просто незнанням, а усвідомленням людиною того, що у відомому є щось невідоме, істотно важливе для нього (людини) і у той же час що його не можна відразу з'ясувати». Якщо провести аналіз поняття задачі, як одного з центральних понять сучасної психології, то можна зробити висновок про доцільність визначати задачу широко, а саме розуміти під задачею всяку ситуацію, що вимагає від суб'єкта (людини) деякої дії (дій).

Відомо, що під час формулювання поняття важливо знайти його ознаки. На думку А. М. Сохора, характерна особливість задач полягає у необхідності здогадки, евристики, на відміну від алгоритмічного характеру прикладів і вправ. І. Я. Лернер ознаками будь-якої задачі визначає такі: 1) наявність мети розв'язку, що диктується вимогою чи запитанням до задачі; 2) необхідність урахування умов і факторів, що являються передумовою застосування способу розв'язування і правильності самого розв'язку; 3) наявність чи необхідність виявлення і побудови способу розв'язування.

1.2.Структура процесу розв’язування геометричних задач

Очевидно, що. отримавши задачу. перше, що необхідно зробити. Розібратися. яка це задача. які її умови, в чому полягає її вимога, тобто провести її аналіз. Аналіз- перший етап процесу розв’язання задачі.

В ряді випадків цей аналіз необхідно якось оформити, записати. Для цього. використовують різного роду схематичні записи задач, побудова яких складає другій етап процесу розвязування.

Після то як розв'язання здійснено і письмово або усно описано, необхідно переконатися, що це розв'язання вірне, що воно задовольняє всі умови задачі. Для цього проводять перевірку розв'язання, шо складає п'яттий етап процесу розв'язання.

При розв'язанні багатьох задач, крім перевірки, необхідно ще дослідити задачу, а саме встановити. при яких умовах задача має розв'язання і притому скільки різних розв`язань в кожному окремому випадку; при яких умовах задачі взагалі не має розв'язків. Все пе складає шостий етап розв'язання задачі.

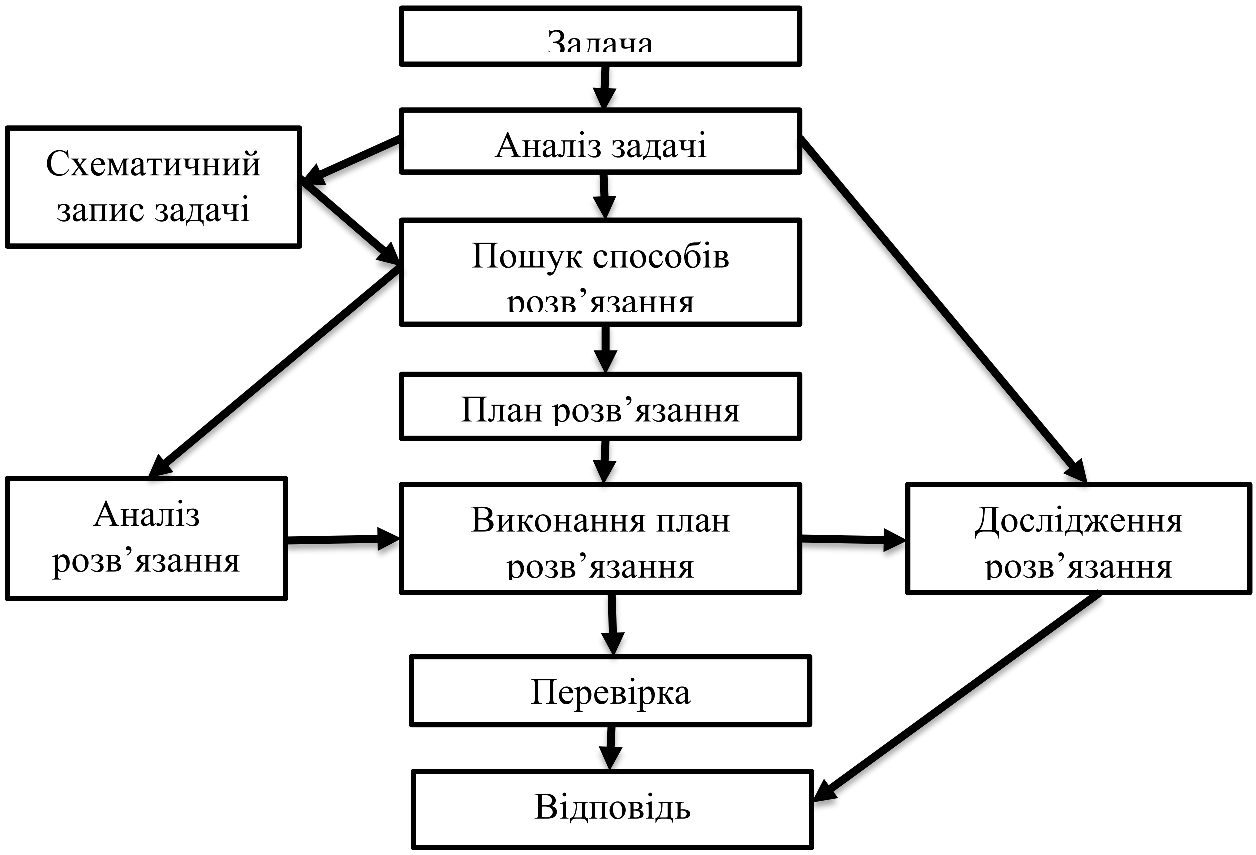
Переконавшись у вірності розв’язання і, якщо необхідно, провівши дослідження задачі, необхідно чітко сформулювати відповідь задачі, -це буде сьомий етап процесу розв’язання задачі.

В учбових і пізнавальник цілях корисно також провести аналіз виконаного розв'язання, зокрема встановити. чи немає. Більш риціональпого способу розв’язання. чи можна задачу узагальнити, які висновки можна зробити із цього розп`язанпя, тощо. Все це складає останній, звичайно не обов’язковий, восьмий етап розв’язання.

Отже, структура процесу розв’язання задачі залежить в першу чергу від характеру задачі і, звичайно від того якими знаннями і вміннями володіє той хто розв’язує задачу.

З вказаних восьми етапів п ять є обов’язкові і вони мають в процесі розв’язання будь-якої задачі. Це аналіз задачі, пошук способу її розв’язання, виконання розв’язання задачі, перевірки і формулювання відповіді.

Схема Розв'язування задачі



1.3.Принцип визначення геометричних фігури

1. Називатимемо задачу *визначеною,* якщо за даними її елементами (величинами) можна знайти всі її шукані елементи (величини) і число розв’язків r скінченне (r > 0).

2. Задачу називатимемо *неозначеною,* якщо вона має нескінченне число розв'язків (r=∞).

3. Задачу називатимемо *невизначеною,* якщо вона не має жодного розв'язку (r = 0).

4. Елементи задачі називатимемо незалежними, якщо ніякий з них не можна виразити через інші.

5. Два або кілька рівнянь називатимемо незалежними, якщо ніяке з них не випливає з інших.

За вченням про системи рівнянь ми можемо сформулювати таку умову (в загальному випадку — необхідну і достатню) визначеності задачі, яку називатимемо принципом визначеності задачі**:** *задача визначена, якщо в умові її міститься таке число **m** даних елементів і таке число **p** шуканих елементів, що між усіма **m** + **p** елементами існують **p** незалежних рівнянь.*

Ця умова виявиться достатньою, якщо всі дані *m* елементів належать до допустимих для цих елементів значень і якщо принаймні один розв'язок системи *p* рівнянь з *p* невідомими належить до допустимих для цих невідомих значень (інакше *r* = 0).

Введемо для фігур, що вивчаються в курсі геометрії середньої школи деякі поняття і означення.

1. *Елементом фігури* даної назви вважатимемо величину, яка однозначно визначається конкретно заданою фігурою цієї назви.
2. Елемент фігури називатимемо *залежним,* якщо він має стале числове значення для кожної фігури нескінченної множини фігур розглядуваної назви (наприклад, прямий кут у всіх прямокутних трикутниках, сума кутів у всіх трикутниках і т. д.).

У противному разі елемент фігури називатимемо *незалежним.*

3. Кілька елементів називатимемо *незалежними,* якщо кожний з них незалежний і ніякий з них не є функцією від інших.

4. *Основними* елементами фігур називатимемо такі відрізки, дуги й кути:

а) для многокутника — сторона, кут, діагональ, кут між діагоналями, що перетинаються; кут між стороною і діагоналлю, що перетинаються; відрізки, на які поділяються дві діагоналі точкою взаємного перетину;

б) для многогранника — ребро, діагональ, плоский та двогранний кут, кут між діагоналлю і ребром, що перетинаються; кут між діагоналлю і гранню, що перетинаються; кут між ребром і гранню, що перетинаються.

Основними елементами многогранника вважатимемо також основні елементи його граней;

в) для плоских фігур, утворених колами, кругами та їх частинами, —радіуси, діаметри, хорди, дуги, центральні кути;

г) основними елементами тіл обертання називатимемо основні елементи їх осьових перерізів.

Вказані відрізки й дуги (в лінійній мірі) називатимемо *основними лінійними елементами,* а дуги й кути (в радіанній мірі) — *основними кутовими елементами.*

5. Якщо за даною сукупністю незалежних основних елементів фігури можна в загальному випадку побудувати одну і лише одну фігуру з цими основними елементами, то таку сукупність основних елементів називатимемо *базисною.*

6. Вираз $F = F(a_1, a_2, a_3,...,a_m)$, складений з основних елементів a_1, $a_г$, $a_3,...,$ a_m фігури, називатимемо *елементом п-го виміру,* якщо цей вираз являє собою однорідну функцію *n*-го виміру від основних лінійних елементів цієї фігури.

7. Будь-який елемент нульового виміру називатимемо кутовим, а будь-який елемент першого виміру — *лінійним* елементом.

Звідси випливає, що коли вираз F (елемент фігури) містить лише кути або лише відношення двох елементів одного й того самого виміру (або те й інше), то він буде кутовим елементом.

Очевидно, кутові елементи не можуть характеризувати лінійні розміри фігури; кутові елементи є характеристиками лише форми фігури; за допомогою кутових елементів можна скласти собі уявлення про фігуру з точністю до подібності.

8. Всі елементи, крім кутових, умовимося називати *метричними* (лінійний елемент — окремий випадок метричного).

Метричний елемент тією чи іншою мірою характеризує лінійні розміри фігури. Для підведення підсумків використаємо наступну таблицю.

Умови метричної визначеності фігур

Вид фігури	**Число елементів для побудови**	**Деякі варіанти наборів елементів для побудови фігури (різні рівні складності)**
Випуклий чотирикутник	5	будь-які п'ять елементів, з яких хоча б один лінійний(не величина кута)
Трапеція	4	будь-які чотири елементи, з яких хоча б один лінійний
Рівнобедренна трапеція	3	будь-які три елементи, з яких хоча б один лінійний

Паралелограмм *(*a, b — сторони, d — діагональ, α — кут, β — кут між діагоналями,γ — кут між діагоналлю і стороною)	3	1) a, b, α; 2)d_1,d_2,β; 3) a,d,кут; 4) d_1,d_2,α; 5) высота, d,кут; 6) a,d,кут; і т. д.; будь-які три елементи, з яких хоча б один лінійний
Ромб	2	будь-які два елементи, з яких хоча б один не величина кута
Прямокутник	2	будь-які два елементи, з яких хоча б один лінійний
Квадрат	1	один елемент: сторона, периметр, діагональ, сума сторони і діагоналі,R, r**,**та ін.
Довільний трикутник ABC	3	будь-які три елементи, з яких хоча б один лінійний
Рівнобедрений трикутник	2	1)b, h_b; 2) $\boldsymbol{a,b}$; 3)кут A,b; 4) h_a,h_b; 5) $\boldsymbol{m_a,m_b}$***;*** 6) P**, a; і** т. д.; будь-які два елементи, з яких хоча б один лінійний
Рівносторонній трикутник	1	один елемент: сторона, медіана (ін.), пери-метр, радіус вписаного або описаного кола
Прямокутний трикутник (c - гіпотенуза, a,b - катети)	2	1)a,b; 2) a,кут B; 3)b,кут A; 4) $\boldsymbol{m_c}$***, a;*** 5) $\boldsymbol{h_c}$***,*** a і т. д.; два елементи, з яких хоча б один лінійний

Рівнобедрений прямокутний трикутник	1	один лінійний елемент: гіпотенуза, катет, будь-яка медіана, бісектриса, периметр
Довільна трикутна піраміда	6	будь-які шість елементів, з яких хоча б один лінійний

1.4. Стратегії в традиційній методиці навчання розв'язуванню фізичних задач: переваги і недоліки

Пошук розв'язку геометричної задачі має стратегічне значення у роботі над задачею. Г.О.Балл розглядає серед евристичних засобів розв'язку задач стратегії як психічні утворення, що забезпечують інтеграцію основних операцій у складні форми мислення. Навчання пошуку розв'язку геометричної задачі, таким чином, "у знятому вигляді" (квазі-дослідницькому) відтворює методи пошуку розв'язку складних геометричних задач (П.М. Фрідман, А.Ф.Есаулов та ін.).

Розглянемо можливі стратегії у навчанні розв'язуванню НГЗ за ступенем їх складності. Кожна з них була покладена в основу відповідного рівня у традиційному навчанні пошуку розв'язку НГЗ.

Перший рівень у навчанні пошуку розв'язку НГЗ (МРНГЗ) відповідає *орієнташї на випадкові послідовні способи* перетворення вихідної задачної ситуації. У процесі таких перетворень здійснюється наближення до розв'язку задачі у деякому підносно однорідному заданному полі від вихідної задачі (задачної ситуації) до допоміжних і проміжних задач, підзадач, тощо. Стрілками на малюнку зображені визначені під час аналізу вихідної задачі геометричні оператори, які відтак із найпростіших, одноланкових (на одну дію, перетворення), синтезуються потім у логічний ланцюжок загального розв'язку (багатоланковий оператор).

Ефективність навчання пошуку розв'язку геометричної задачі на даному рівні, як це видно з наочної графічної інтерпретації на

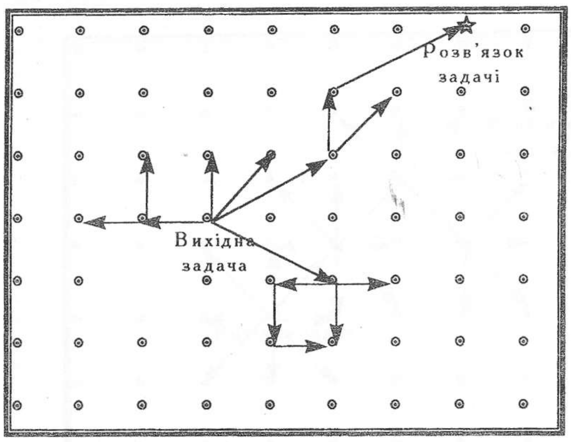


Рис.1.1. Стратегія пошуку розв'явку навчальних геометричних задач виконання випадкових послідовних спроб і помилок

рис.1.1., залежить від складності задачі (кількості ланок оператора розв'язку). Для нескладної НГЗ на 1-2 дії або перетворення, (ланки відповідного оператора) кількість як вірних так і помилкових або неефективних спроб, що не ведуть до розв'язку задачі, відносно невелика. Тому обрана стратегія (вона досить характерна для вивчення геометрії у 7-8 класах середньої школи) буде для цього випадку досить ефективною і результативною.

Для складної задачі, що передбачає використання багато- ланкового фізичного оператора, результативність розв'язку за такої стратегії пошуку падає у статистичній інтерпретації за законом геометричної прогресії.

Можливість посилення даної стратеги МРНГЗ теоретично, як це показано в теорії розв'язування винахідницьких задач, вичерпуються організаційними формами колективної діяльності: брейнстормінгом (або мозковим штурмом), синектикою і т.п., що полягають у збільшенні хаотичних спроб, перебору спроб, варіантів, застосування різних аналогій і вільних асоціацій.

При цьому мова може вестися швидше за все про можливості застосування лише окремих елементів наведених прийомів і методів для НГЗ.

Другий рівень у навчанні пошуку розв'язку НГЗ відповідає стратегії кількісної систематизації розгляду можливих геометричних операторів розв'язку, що наочно можуть бути зображені у деякому однорідному (без вказівок на пріоритетність у напрямах) задачному полі (див.рис.1.2.).

Систематизація перебору можливих геометричних операторів розв'язку задачі дозволяє збільшити кількість можливих спроб, виключити дублювання під час пошуку. Однак у своїй основі дана стратегія зберігає з тією ж ефективністю кількісний перебір варіантів розв'язку "крок за кроком", застосовуваного послідовно (інколи кілька разів) при розгляді задач із складним оператором.

Можливості підсилення даної стратегії також розглянуті у теорії розв'язування дослідницьких задач (ТРДЗ) і в практиці навчання обмежуються лише окремими елементами морфологічного аналізу (варіантів структур розглядуваного об'єкта і їх сполучень), систем допоміжних питань і ін.

Третій рівень у навчанні МРНГЗ розширює можливості раніше розглянутих стратегій попередньою структуризацією задачного поля, визначення у ньому емпіричної системи (певної множини) задач, що охоплює зміст параграфа, теми підручника геометрії, із збереженням підходу виконання випадкових спроб (варіантів"). Обмеження задачного поля емпіричною системою задач дозволяє дещо підвищити результативність розгляду НГЗ, якщо учневі стає відомим тип (клас) пропонованих задач. З цього погляду аналогічні НГЗ, але розташовані відповідно в кінці відомої теми та в кінці підручника (збірника) без вказівки на приналежність до такої теми, будуть розв'язуватися учнем у загальному випадку за різними стратегіями. У такому випадку задача ще потребуватиме своєї класифікації, визначення структурованості задачного поля.

Однак за самостійного розв'язку задач, тип яких ще тільки належить визначити, набута результативність зменшується. інформація про тип пропонованих задач міститься, як правило, у назві розділу підручника, теми розділу збірника задач і т.п. Саме цим, на наш погляд, можна пояснити складність для учнів так званих комбінованих задач, що потребують для розв’язку знання кількох тем, розділів і т.п.

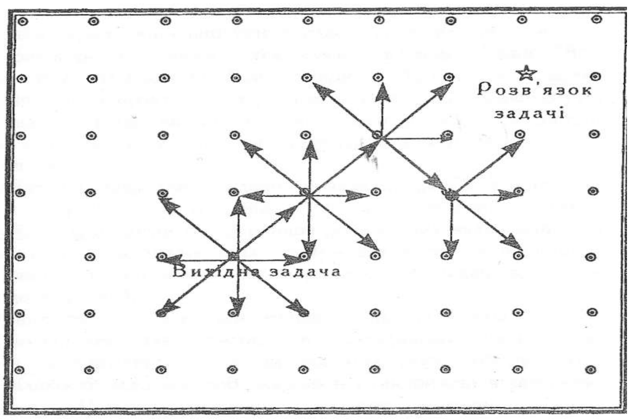


Рис1.2. Стратегія кількісної систематизації варіантів пошуку розв'язку навчальної геометричної задачі

Четвертий рівень у навчанні МРНГЗ передбачає оволодіння стратегією виконання загального напрямки дій з розв'язування задачі у вигляді алгоритму всередені визначеної емпіричної системи задач (див. рис.1.3.)

Остання стратегія найбільш ефективна із раніше розглянутих. Однак, внаслідок емпіричного підходу до структуризації задачного поля, система задач, розглядуваних у навчанні, далека від мінімізації. З'являється реальна можливість присутності всередині системи одночасно декількох напрямків (окремих алгоритмів), пошук і свідоме обрання яких перетворюється у ще одну проблему.

Як бачимо, можливості для удосконалення існуючих традиційних стратегій МРНГЗ практично вичерпані. Необхідна інноваційна стратегія, що змогла б надати розвитку і доповнити попередні.

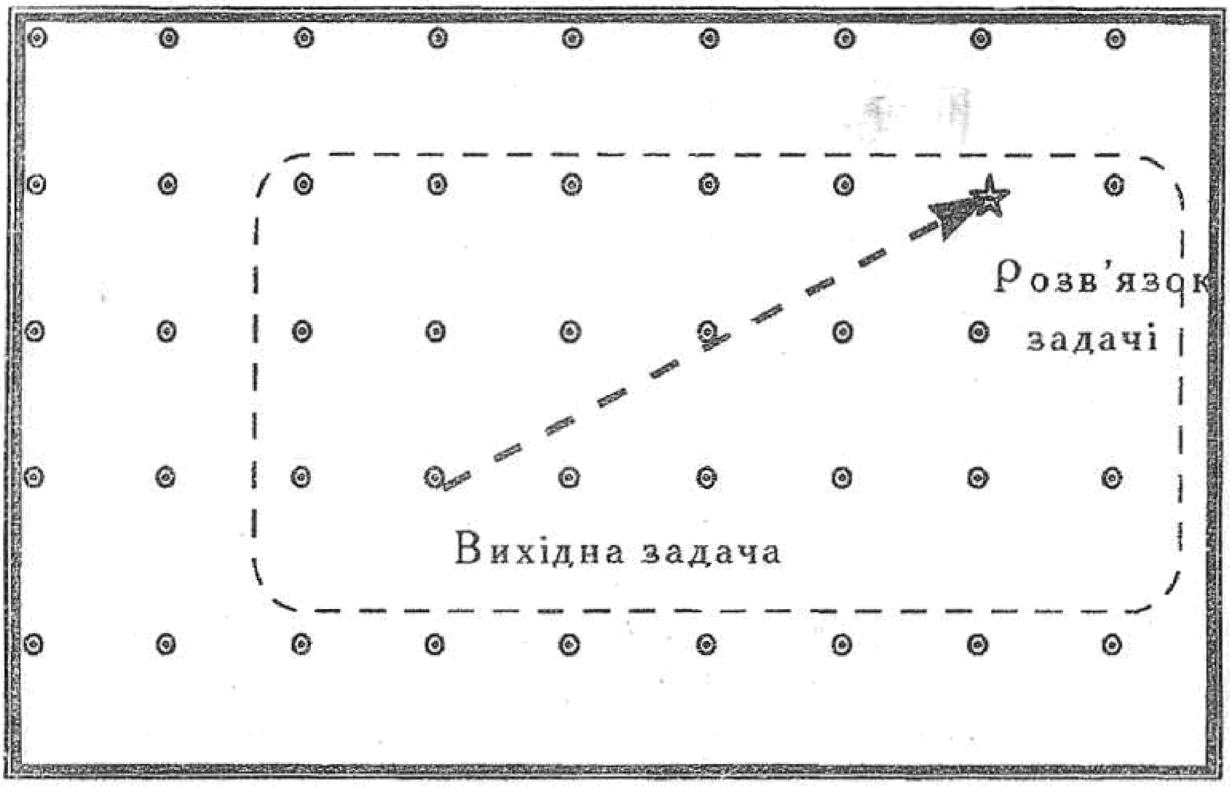


Рис.1.3. Стратегія пошуку розв'язку навчальної геометричної задачі за алгоритмом у емпіричній системі задач.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Алгебраїчний метод розв'язування планіметричних задач

Якщо безпосереднє обчислення на підставі даних задачі не приводить до потрібного результату, то можливим є використання такого способу. Позначимо якоюсь буквою, наприклад х, невідомий відрізок або кут, а потім спробуємо скласти рівняння, коренем якого буде шукана величина. При цьому зручно користуватися таким орієнтиром. Якщо умовою геометричної задачі на обчислення взагалі не задано відрізки або задані відрізки та кути не об'єднуються в зручний для розв'язування трикутник, то для розв'язування такої задачі звичайно вводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих).

Дамо кілька рекомендацій, корисних при розв'язуванні геометричних задач алгебраїчним методом.

1. Невідомі найчастіше вводяться для розв'язування тих задач на обчислення, умовою яких взагалі не задано жодного відрізка або задані відрізки та кути не об'єднуються у зручний для розв'язування трикутник.

2. Не треба боятися кількості невідомих. При їх виборі корисно враховувати правило: невідомі (самі по собі чи разом із заданими відрізками або кутами) мусять повністю визначати розглядувану в задачі геометричну фігуру.

3. Для одержання рівняння величину якого-небудь елемента розглядуваної конфігурації звичайно виражають двічі різними способами через введені невідомі.

4. Не слід щоразу прагнути повністю розв'язати одержані рівняння чи системи. Подивіться, що саме треба знайти і шукайте саме це. Одержавши якийсь проміжний результат, погляньте, чи не можна, маючи цей результат, вже відповісти на питання задачі.

2.1.1. Введення допоміжного відрізка при розв'язуванні геометричних задач

Задача 1. Площа рівнобічної трапеції (рис.2.1.), описаної навколо кола, дорівнює 32см^2, гострі кути при більшій основі трапеції дорівнюють 30^0. Знайти сторони трапеції.

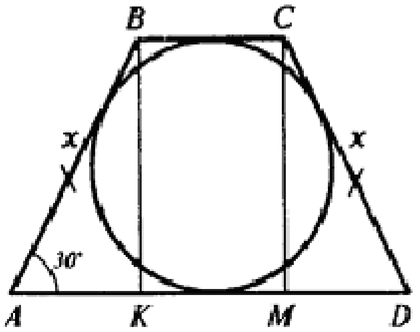


Рис.2.1.

Розв'язання. Оскільки умовою задачі не задано жодного відрізка, то для розв'язування цієї задачі виберемо допоміжний відрізок. Якщо ABCD – задана рівнобічна трапеція, то позначимо AB=CD=x.

Щоб скласти рівняння для визначення x, виразимо задану площу через невідомий відрізок. Проведемо BK $\perp$ AD, тоді $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BK.$ (2.1.)

Але чотирикутник ABCD описано навколо кола, тому дістаємо рівність AD+BC=AB+CD=2x. (2.2.)

3. З Δ ABK: $BK = \frac{1}{2}AB = \frac{x}{2}.$

Підставляючи знайдені значення у формулу (2.1), дістаємо рівняння: $32 = \frac{2x}{2} \cdot \frac{x}{2}.$

Звідси x^2=64, тоді x=8 (очевидно, що x=-8 не задовольняє умову задачі, оскільки x – довжина сторони трапеції). Отже, AB=CD=x=8 (см).

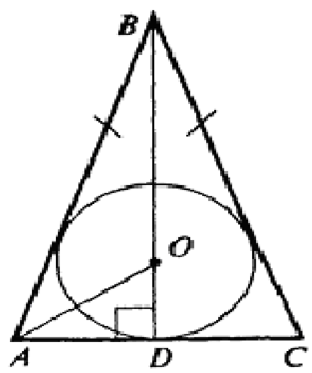
Щоб знайти сторони BC та AD, ще раз скористаємось невідомим відрізком. Нехай BC=y. Проведемо CM $\perp$ AD. Тоді KM=BC=y і AK=MD.

З Δ ABK: AK=AB$\cdot\cos 30^0 = 4\sqrt{3}.$ Тоді AD=2AK+KM=$8\sqrt{3}$+y. Підставляючи ці значення у рівність (2.9.), дістаємо рівняння: $8\sqrt{3} + y + y = 8 + 8.$ Звідси $y = 8 - 4\sqrt{3}$.

Отже, BC=$(8-4\sqrt{3})$ (см). Тоді AD=$8\sqrt{3}$+y=$(8+4\sqrt{3})$ (см).

Відповідь. AB=CD=8 см, BC=$(8-4\sqrt{3})$ см, AB=$(8+4\sqrt{3})$ см.

2.1.2. Введення допоміжного кута при розв'язуванні геометричних задач



Задача 2. У рівнобедреному трикутнику радіуси вписаного та описаного кіл відповідно дорівнюють 12см та 25см. Обчислити периметр трикутника.

Розв'язання. Нехай у Δ ABC (рис.2.2.) AB=BC, $R_{опис.}$=25 см, $r_{впис.}$=12 см. Позначимо через x кути A і C: $\angle$A=$\angle$C=x (0°<x<90°). Тоді $\angle$ABC=180°-2x.

Рис.2.2.

З формули $R_{опис.} = \dfrac{AC}{2\sin\beta}$ маємо AC=2$R\sin$ (180°-2x)=50$\sin$2x.

Центр вписаного в трикутник кола лежить у точці перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника. Проведемо бісектрису BD (вона ж є висотою та медіаною в рівнобедреному трикутнику ABC) та бісектрису AO. Тоді O – центр вписаного у трикутник ABC кола, а OD – радіус цього кола (оскільки AC – дотична до вписаного кола, а OD$\perp$AC як частина висоти BD).

Враховуючи, що D – середина AC (BD – медіана), дістаємо: $AD = \dfrac{1}{2}AC = 25\sin 2x$. Окрім того, $\angle$OAD=$\dfrac{1}{2}\angle$A=$\dfrac{x}{2}$ (AO – бісектриса). Для складання рівняння визначимо заданий радіус вписаного кола (OD) з прямокутного трикутника AOD через x: $OD = AD \cdot tg\angle OAD = 25\sin 2x tg\dfrac{x}{2}$. Дістаємо тригонометричне рівняння: $12 = 25\sin 2x tg\dfrac{x}{2}$. Застосовуючи формули $tg\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ і $\sin 2x = 2\sin x\cos x,$ маємо: $6 = 25\cos x(1-\cos x).$ Нехай $\cos x = t$, тоді $25t^2 - 25t + 6 = 0$. Звідси $t_1 = \dfrac{2}{5}$, $t_2 = \dfrac{3}{5}$. Виконуючи обернену заміну, дістаємо, що $\cos x = \dfrac{2}{5}$ або $\cos x = \dfrac{3}{5}$. Зазначимо, що обидва значення задовольняють умову 0°<x<90°, тому задача має два розв'язки. А саме:

1) якщо $\cos x = \dfrac{2}{5}$, де 0°<x<90°, то $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Тоді, ще раз скориставшись формулою для радіуса описаного кола $R=\dfrac{AB}{2\sin C}$, дістаємо: $AB=2R\sin x=2\cdot 25\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{5}=10\sqrt{21}$. Оскільки $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{5}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{4\sqrt{21}}{25}$, то $AC=50\sin 2x=8\sqrt{21}$. Отже, $P_{\Delta ABC}$=AB+BC+AC=2AB+AC=$28\sqrt{21}$ (см);

2) якщо $\cos x=\dfrac{3}{5}$, де 0°<x<90°, то $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\dfrac{4}{5}$. Тоді $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{25}$ і тому $BC=AB=2R\sin x=40$ (см), $AC=50\sin 2x=48$ (см). Отже, в цьому випадку $P_{\Delta ABC}$=40+40+48=128 (см).

Таким чином, умову задачі задовольняють два трикутники (причому обидва вони – гострокутні) з різними сторонами і різними периметрами, тому відповідь до цієї задачі не можна записати однозначно.

Відповідь. Периметр заданого трикутника може дорівнювати 128 см або $28\sqrt{21}$ см.

Для розв'язування деяких геометричних задач на обчислення зручно одночасно вводити і невідомий відрізок, і невідомий кут.

2.1.3. Спосіб площ

В даному пункті зібрані деякі задачі, пов’язані з поняттям площі многокутника. Ми не будемо визначати, що називається площею многокутника, а опишемо це поняття, перерахувавши ті його властивості, які нам треба.

Нагадаємо, що:

А-2.1. Площа многокутника – додатне число.

А-2.2. Площі конгруентних многокутників рівні.

А-2.3. Якщо многокутник розрізаний на кілька частин, то його площа дорівнює сумі площ цих частин.

А-2.4. Площа трикутника дорівнює пів добутку довжини його основи на довжину його висоти. (Одиницю масштабу ми вважаємо заданою; можна показати, що ця твірна не залежить від того, яку саме сторону і відповідну їй висоту ми візьмемо).

Розрізаємо і складаємо.

Із наведених чотирьох властивостей-аксіом можна вивести всі теореми проплощі многокутників, які Ви вивчали в школі. Так як будь-який многокутник можна розбити на трикутники, то ми зможемо тепер знайти площу будь-якого многокутник.

Наприклад:

Площа паралелограма дорівнює добутку довжини його основи на довжину висоти.

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми основ на висоту.

Ми зараз доведемо ще одну формулу для обчислення площі трапеції.

Задача 1. Площа трапеції дорівнює добутку однієї із бічних сторін на довжину перпендикуляра, опущеного на неї із середини другої бічної сторони.

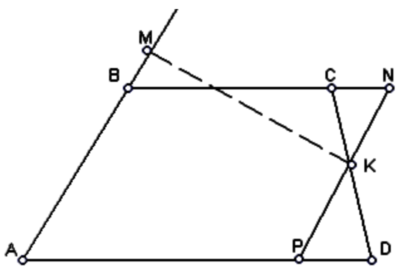


Рис 2.3.

<u>Розв’язання:</u> Нехай ABCD – дана трапеція $((AD)\parallel(BC))$, K – середина сторони (CD) і (KM) – перпендикуляр, опущений із точки K на пряму (AB). (рис.2.3.). Проведемо через точку K пряму, паралельну прямій (AB). Нехай M і P – точки її перетину з прямими (BC) і (AD). Паралелограм ABNP рівновеликий даній трапеції, так як п’ятикутник ABCKP є для них спільним, а трикутник CNK рівний трикутнику DPK, і тобто трапеція і паралелограм складені з однакових частин. Оскільки площа паралелограма дорівнює добутку його основи AB на висоту KM, твердження доведено.

<u>*Зауваження.*</u> Останній абзац розв’зання можна (більш формально) записати і так:

$$S_{ABNP} = S_{ABCKP} + S_{CNK} ,$$

$S_{FDCD} = S_{ABCKP} + S_{KPD}$ (по побудові),

ΔKPD =ΔCNK (за стороною і двома прилеглими кутами), тому $S_{\Delta KPD} = S_{\Delta KNC}$, звідси слідує, $S_{ABCD} = S_{ABNP}$.

2.2.Координатний метод розв'язування планіметричних задач

Контрольні питання:

1. Прямокутна система координат. Основні метричні формули.
2. Рівняння прямої.
3. Рівняння кола.
4. Загальна схема розв′язку задач координатним методом.
5. Загальна схема розв′язку задач на знаходження геометричних місць.
6. Вектори на координатній площині. Основні формули.
7. До методики навчання учнів розв′язувати задачі методом координат.

Геометричні задачі, які розв′язуються з використанням методу координат, можна умовно розділити на дві групи, а саме:

1) задачі, умова яких вже сформульована на координатній мові;
2) задачі, в умові яких немає вказівок на зв′язок їх з координатним методом.

Розв′язування задач першої групи, як правило, зводиться до використання відомих формул і теорем. В якості прикладу розглянемо наступну задачу:

Задача 1.

Обчислити координати центра М кола, описаного навколо трикутника АВС, якщо його вершини мають координати А(2; 1); В(-1; 4); С(3;-1).

Розв′язання: Позначимо_координати точки М- М(x;y). Так як точка М являється центром описаного кола, то:

АМ=ВМ і АМ=СМ. Знайдемо довжини відрізків: АМ, ВМ, СМ.

АМ= $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$; ВМ=$\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$;

СМ=$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$. Складемо систему рівнянь, прирівнюючи АМ=ВМ і АМ=СМ. Маємо:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2} \\ \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^4} \end{cases} \qquad (2.3.)$$

Піднесемо обидві частини рівнянь системи (2.3.) до квадрату і спростимо. Після перетворення система (2.3.) має вигляд:

$\begin{cases} y-x=2 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$ (2.4) Розв′язавши систему (2.3.), маємо: x=-6/5; y=4/5;

Відповідь: M(-6/5; 4/5).

Розв′язок задач другої групи проходить за однією загальною схемою. Запишемо її.

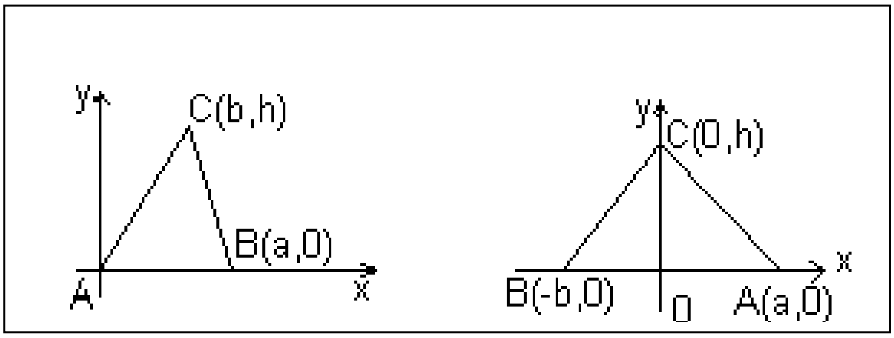
Загальна схема розв′язування задач координатним методом.

1. Виходячи з аналізу умови задачі, визначаємо доцільність розв′язування її координатним методом.
2. Вибираємо прямокутну систему координат на площині так, щоб подальші алгебраїчні перетворення були по можливості більш простими.
3. Знаходимо координати даних і шуканих елементів, використовуючи умову задачі і відомі теореми і формули.
4. Складаємо алгебраїчні вирази (рівняння, нерівності, системи рівнянь і т. п.), які випливають з умови задачі. Перетворюємо їх до отримання результату.
5. Отриманий результат перекладаємо з координатної мови на мову геометричну.
6. Записуємо відповідь. Перевіряємо чи нема більш раціонального способу розв′язування.

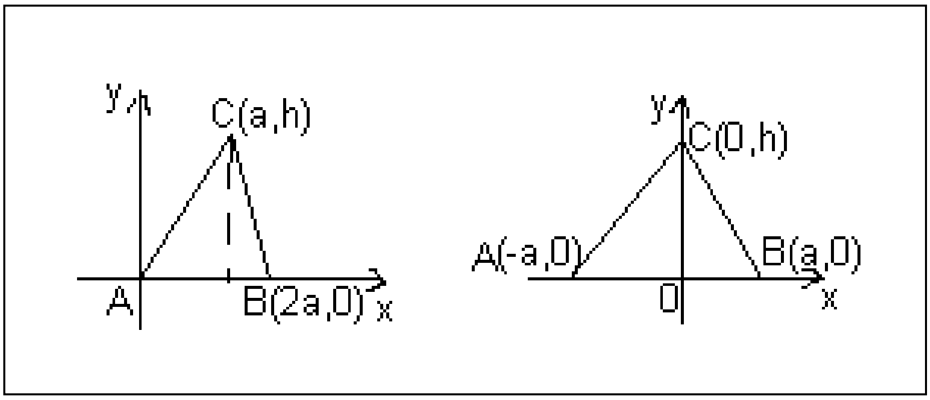
Орієнтовною основою дій для вибору зручної системи координат і перекладу формулювання задачі із геометричної мови на координатний може служити наступна таблиця.

Таблиця 2.1.

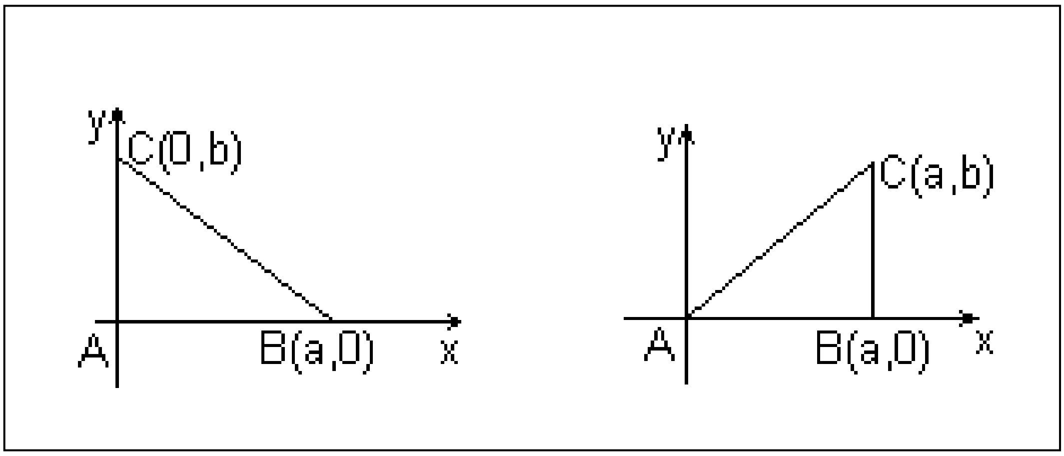
Умовні системи координат.



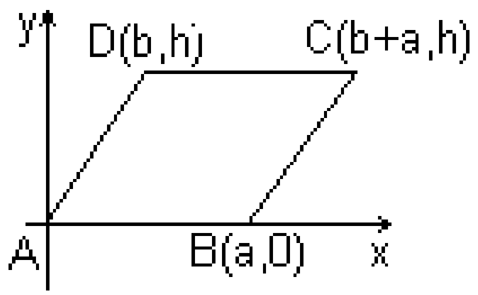
Довільний трикутник.



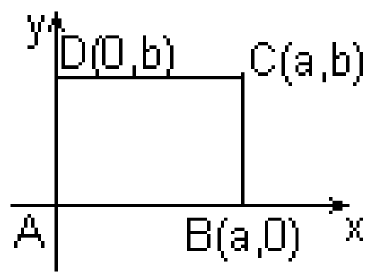
Рівнобедрений трикутник.



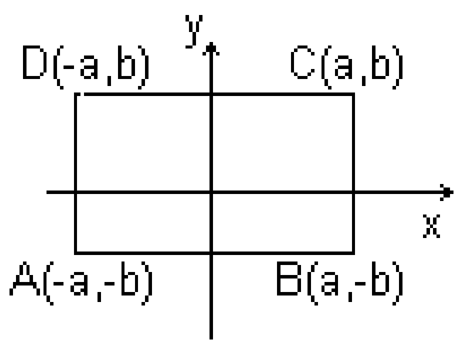
Прямокутний трикутник



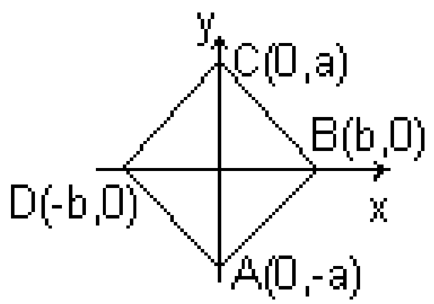
Паралелограм



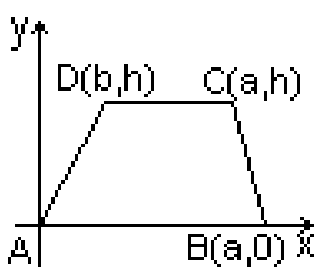
Прямокутник

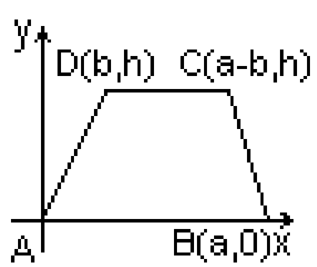


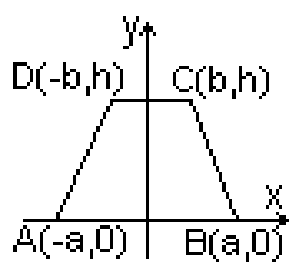
Прямокутник



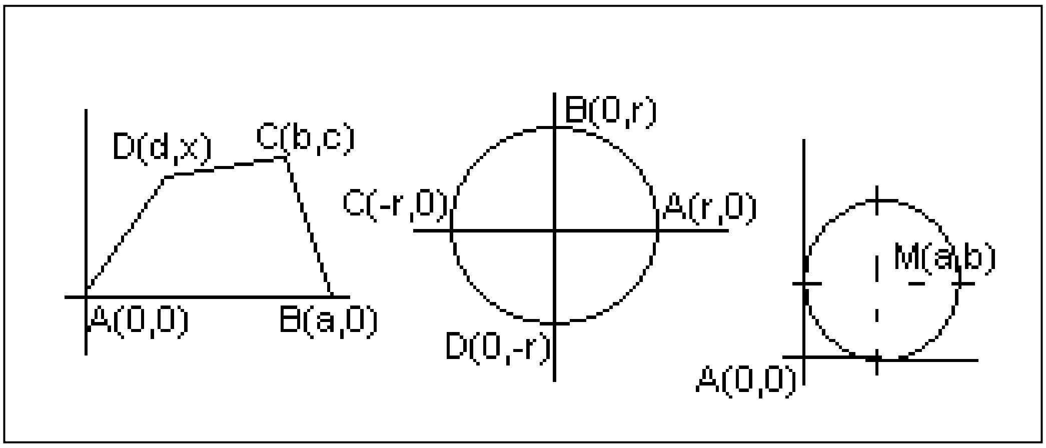
Ромб







Довільна рівнобічна трапеція

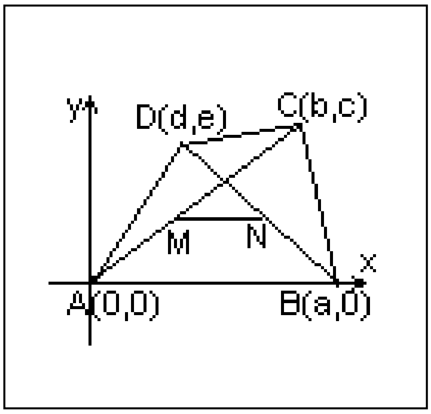


Довільний чотирикутник Коло

<u>Задача 2.</u>

В довільному чотирикутнику сума квадратів сторін рівна сумі квадратів діагоналей, доданій до квадрату відстані між серединами діагоналей помноженій на чотири.(Теорема Ейлера) .

<u>Розв′язання.</u> Запишемо умову, яку нам необхідно довести:



$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + DB^2 + 4MA^2 \quad (2.5.)$$

Скориставшись таблицею зручних систем координат, для випадку довільного чотирикутника маємо наступні координати необхідних для доведення точок:

A(0;0), B(a;0), C(в;c), D(d;e), M(в/2;c/2),

Рис. 2.4) .

Для визначення координат точок M і N скористалися формулами ділення відрізка пополам. Обчислимо квадрати довжин відрізків, які входять в рівність (2.5.). Маємо, що

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=a^2+(в-a)^2+c^2+(d-в)^2+(e-c)^2+d^2+e^2 \qquad (2.6.)$$

$$AC^2+BD^2+4MN^2=в^2+c^2+(d-a)^2+e^2+4(((d+a-в)/2)^2+((e-c)/2)^2) \qquad (2.7.)$$

Після алгебраїчних перетворень рівностей (2.6.) і (2.7.) переконаємось, що отримуємо рівні вирази, що і доводить нашу теорему.

Метод координат зручно також використовувати при розв′язуванні задч на знаходження геометричних місць, а саме, на складання рівнянь ліній, заданих геометричними умовами. При розв′язуванні таких задач зручно користуватись загальною схемою.

2.3.Векторний метод розв’язування планіметричних задач

Контрольні питання:

1. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами.
2. Лінійна залежність векторів. Умови колінеарності і компланарності векторів.
3. Скалярний добуток векторів. Основні формули.
4. Вектори на координатній площині. Основні формули.
5. Афінні задачі. Основні типи афінних задач. Переклад умови задачі з геометричної мови на векторну.
6. Метричні задачі. Загальна схема обчислення: а) довжини відрізка;б) величини кута.
7. До методики навчання учнів розв′язувати задачі з допомогою векторного методу.

Геометричні задачі, які розв′язуються з допомогою векторів, можна умовно розділити на дві групи.

До першої групи відносяться задачі, в яких умова вже сформульована на мові векторів, у формулюванні яких нема вказівок на зв′язок їх з векторним методом. Як правило, такі задачі можна розв′язувати різними способами,- векторний спосіб являється одним із них. Ці задачі даються учнямважче, ніж задачі першої групи, тому ми приділимо їм основну увагу.

В свою чергу задачі першої і другої групи діляться на два види:

1) афінні задачі;
2) метричні задачі.

Успіх в розв′язуванні задач з допомогою векторної алгебри базується на наступних вміннях:

1) вмінні перекладати текст задачі з геометричної мови на векторний і навпаки;
2) вмінні виконувати дії над векторами;

3) вмінні представляти вектор у вигляді суми(різниці) векторів, у вигляді добутку вектора на число;

4) вмінні виконувати перетворення векторних рівностей;

5) вмінні переходити від співвідношень між векторами до довжин і навпаки;

6) вмінні застосовувати основні векторні рівності (формули) до даної задачі.

Зауваження до п.6: основні векторні рівності (формули) ми називаємо базисними задачами.

При розв′язуванні задач, які зводяться до обгрунтування колінеарності векторів, а саме:

1) паралельності прямих (відрізків);

2) належності трьох точок одній прямій;

3) доведення того, що даний чотирикутник являється паралелограмом;

4) три даних прямі (відрізка) перетинаються в одній точці, зручно притримуватись наступної схеми:

1. Аналіз змісту задачі, який включає:

а) виділення умови і вимог задачі;

б) виконання малюнка до задачі;

в) записі умови і вимог через загальноприйняті позначення.

2. Визначення можливості розв′язування задачі з допомогою апарату векторної алгебри, який включає вияснення питання, що означає розв′язати задачу на мові векторів. При цьому зручно скористатись таблицями перекладу з геометричної мови на векторну.

3. Доведення колінеарності векторів включає:

а) вибір двох колінеарних векторів (по можливості таких, що виходять з однієї точки);

б) розклад шуканих векторів по вибраним базисним векторам;

в) перетворення отриманих векторних рівностей до встановлення колінеарності (неколінеарності) векторів.

Для ілюстрації застосування схеми розглянемо задачу:

Приклад 1. На стороні AD і діагоналі AC паралелограма взяті відповідно точки M і N так, що AM=1/5AD, AN=1/6AC. Доведіть, що точки B, M і N лежать на одній прямій.

1 Аналіз змісту задачі

Дано

На геометоричній мові	На мові векторів
ABCD-паралелограм	AB=DC; AB і AD не колінеарні
AM=1/5AD, AN=1/6AC	$\overrightarrow{AM}$=1/5D, $\overrightarrow{AN}$=1/6$\overrightarrow{AC}$

2 Визначення можливості розв′язування задачі на мові векторів

Доведення B, M, N-лежать на одній прямій. $\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BN}$

Як бачимо, в п.2 ми вияснили можливість розв′язування задачі з допомогою векторів: приналежність трьох точок прямій пердбачає на мові векторів доведення колінеарності векторів $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BN}$.

3 Доведення $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$

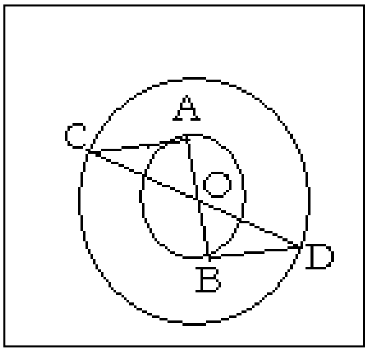
2.4.Методи геометричних перетворень

2.4.1. Центральна симетрія

Підготовчі задачі

1. Доведіть, що будь-які два рівних і паралельних відрізка (або розміщені на одній прямій) симетричні відносно деякої точки О.
2. Доведіть, що будь-які два рівних кола симетричні відносно середини відрізка, який з´єднує центри цих кіл.
3. Доведіть, що два рівних кола, які дотикаються зовні, симетричні відносно точки дотику.
4. Доведіть, що дві паралельні прямі симетричні відносно будь-якої точки, яка рівновіддалена від цих прямих.

Приклад 1. Нехай АВ і СД –діаметрально протилежні точки двох концентричних кіл. Доведіть, що АС=ВД.

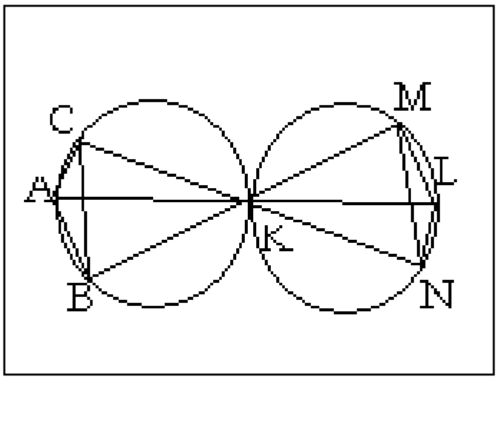


$\begin{matrix} Z_0(A)=B \\ Z_0(B)=D \end{matrix} \Rightarrow Z_0(AC)=BD \Rightarrow$ АС=ВД. Разом з тим доведено, що АС паралельне ВД.

Рис.2.8.

Приклад 2.

Два рівних кола w і w_1 дотикаються в точці К. Три прямі, які проходять через точку К, перетинають ці кола ще раз в точках А, В, С і L, M, N. Доведіть, що трикутник АВС рівний трикутнику LMN.



Розв´язання.

$Z_k(A)=Z_k((KA)\cap w)=Z_k(KA)\cap Z_k(w)=KL\cap w_1=L.$

Аналогічно: $Z_k(B)=M,\ Z_k(C)=N$, а тому

$$Z_k(\triangleleft ABC)=\triangleleft LMN \Rightarrow \triangleleft ABC=\triangleleft LMN$$

<u>Приклад 3.Чотирикутник АВСД-паралелограм. O_1 </u>і O_2-центри кіл вписаних в трикутник АВС і АДС.Доведіть, що відрізки АС, ВД і O_1O_2 перетинаютьсяв одній точці.

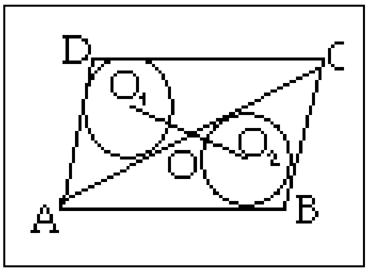


Рис.2.10.

<u>Розв´язання.</u>

Розглянемо симетрію з центром в точці О.

$$Z_0(ABC)=CDA$$
$$Z_0(w\in ABC)=w_1\in CDA \Rightarrow Z_0(O_1)=O_2 \Rightarrow AC\cap BD\cap O_1O_2=O$$

<u>Приклад 4. </u>Побудувати трикутник, якщо дані дві його сторони і медіана, проведена до третьої сторони.

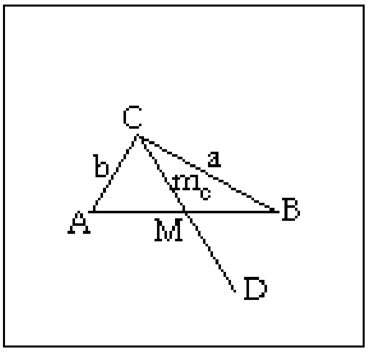


Рис.2.11

Розв´язок

1. Аналіз. Припустимо, що шуканий трикутник побудований. $AC=b, CB=a, CM=m_c$

Побудуємо трикутник AMD, симетричний BMC відносно точки M.

$$\begin{matrix} Z_M(MC)=MD \\ Z_M(BC)=DA \end{matrix} \Rightarrow$$ Звідки слідує, що всі сторони $\triangleleft$ ABC відомі.

2. <u>Побудова.</u>

1. Будємо трикутник ADC по трьом сторонам ($CD=2m_c$)
2. Ділимо DC пополам.
3. Будуємо $Z_M(A)=B$

Трикутник ABC побудовано

3.Доведення AC=b за побудовою $Z_M(AD)=CB=a$ (за побудовою)

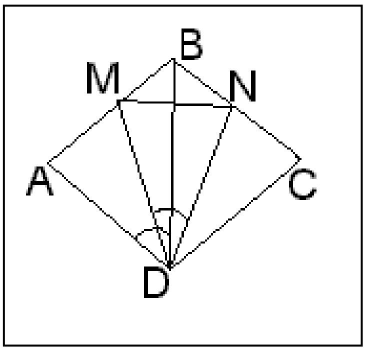
MD=MC=m_c за побудовою

4.Дослідження. Задача має єдиний розв´язок, якщо можливо побудувати трикутник по сторонам а, в і подвоєній медіані m_c. .

2.4.2. Поворот

Підготовчі задачі

1. На площині дана пряма а, центр повороту О і кут повороту α. Визначити положення прямої а після повороту.
2. Даний відрізок АВ повернути на кут α навколо даного центра О і в новому його положенні відшукати точку C_1, яка б відповідала точці С на відрізку АВ.
3. Дане коло повернути навколо центра повороту O_1 на кут α.
4. Дано відрізок АВ і кінці повернутого на кут α відрізка A_1B_1.Знайти центр повороту.



Приклад 5. На сторонах АВ і ВС ромба АВСД, у якого кут ВАД=60^0 взяті відповідно точки М і N так, що АМ=ВN. Доведіть, що трикутник МДN правильний.

Розв´язання Розглянемо рисунок. Легко бачити, що ДА=ДВ=ДС і ‹АДС=‹ВДС=60^0.

Рис.2.12.

А тому

$$\begin{matrix} R^{-60^0}(A)=B \\ R^{-60^0}(B)=C \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} R_D^{-60^0}(AB)=(BC) \\ M\in AB, N\in BC \\ AM=BN \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_D^{-60^0}(M)=N\rightarrow\begin{cases} DM=DN \\ \angle MDN=60^0 \end{cases}\rightarrow$$ ΔMDN-рівносторонній.

Приклад 6. В правильному шестикутнику ABCDEF , точка M –середина діагоналі AC, N-середина сторони DE. Доведіть, що трикутник MNF правильний.

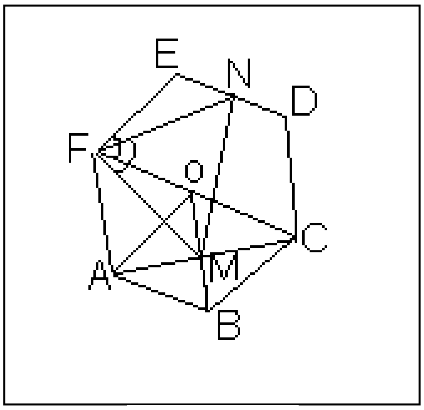


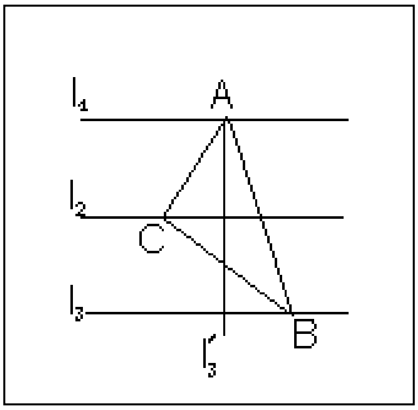
Рис.2.13.

Розв´язання. Розглянемо малюнок.Нехай O-центр даного шестикутника, тоді АВСД-ромб і тому M-середина OB. Розглянемо поворот R^{-60} знайдемо образ точки N. Маємо:

$$R_F^{-60^0}(E)=O, R_F^{-60^0}(D)=B\Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_F^{-60^0}(ED)=(OB)\Rightarrow R_F^{-60^0}(N)=M$$
$$\begin{cases} FN=FM \\ \angle MDN=60^0 \end{cases}\Rightarrow \Delta MNF$$

правильний .

Приклад 7. Побудувати рвнобедрений трикутник вершини якого належать трьом даним паралельним прямим l_1 і l_2 ,l_3 причому l_2 лежить між l_1 і l_3 , і її належить т.С.



Розв´язання. Дано $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, С-вершина прямого кута.

1. Аналіз. Припустимо, що трикутник ABC побудований.

Розглянемо поворот $R_C^{90^0}$ і знайдемо образ точки A.

Рис.2.14.

Тоді A=$R_C^{90^0}(B)$.Побудуємо образ прямої l_3 при повороті $R_C^{90^0}$.

$R_C^{90^0}(l_3)=l_3'$.Так як точка $B\in l_3$, то точка A належить $l_3' \to A=l_1\cap l_3'$.

Маючи точку A, знаходимо $B=R_C^{-90^0}(A)$

2. Побудова.

1.Вибираємо довільну точку С прямої l_2.

2.Будуємо $l_3' = R_C^{90^0}(l_3), l_3' \cap l_1 = A$

3.Будуємо $B = R_C^{90^0}(A)$.

Шуканий трикутник АВС побудований.

3.Доведення. $\begin{matrix} C = R_C^{-90^0}(C) \\ B = R_C^{-90^0}(A) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} CB = R_C^{-90^0}(CA) \\ CB = CA, \angle ACB = 90^0 \end{matrix}$

4. Дослідження. Задача завжди має розв'язок тому, що при повороті $R_C^{90^0}$ пряма l_3' завжди пертинає пряму l_1 . Якщо взяти поворот $R_C^{-90^0}$,то отримаємо трикутник, який симетричний і рівний отриманому трикутнику. Як бачимо, задачамає єдиний розв'язок.

2.4.3. Паралельне перенесення

Підготовчі задачі.

1. Побудуйте трапецію знаючи чотири відрізки, які рівні сторонам трапеції.
2. Доведіть, що із всіх трапецій з даною основою і висотою, найменший периметр має рівнобічна трапеція.
3. Побудуйте трапецію знаючи чотири відрізки, які рівні основам і діагоналям трапеції.
4. Побудувати трикутник по трьом його медіанам.

Приклад 9. Побудувати чотирикутник за трьома сторонами і двома кутами, прилеглими до невідомої сторони.

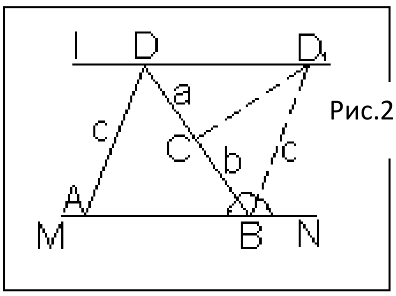


Рис.2.15.

Розв'язання.

1. Аналіз. Нехай наш чотирикутник

побудований і задовільняє даній умові задачі: CD=a, CB=b, AD=c; ‹DAB=‹A; ‹CBA=‹B.

Зробимо паралельний перенос відрізка АД в точку В. Тоді $‹D_1BN$=‹ДАВ=‹А. Так як ‹СВА=‹В, то кут СВ$Д_1$=180^0-(‹А+‹В).

Розглянемо трикутник CBD_1 : CB=b; BD_1=c;‹CBD_1=180^0-(‹A+‹B).

Так як відомі дві сторони і кут між ними, то трикутник CBD_1- можна побудувати.

2. Побудова.

1. Будуємо MN.
2. Будуємо ‹CBD_1=180^0-(‹A+‹B).
3. Будуємо трикутник СВ$Д_1$(за двома сторонами і кутом між ними).
4. Для побудови тоочки Д будуємо пряму l ,паралельну MN і яка проходить через точку D.
5. Знаходимо точку D(радіусом рівним с центром в т. С проводимо дугу до перетину з прямою l ,яка проходить через точку $Д_1$, паралельну MN).
6. Знаходимо точку A(можна двома способами: 1) провести пряму, паралельну D_1B і яка проходить через D; 2) радіусом рівним с з центром в точці Д описує дугу до перетину з прямою MN)/

3. Доведення.Чотирикутник ABCD задовільняє умові задачі за побудовою.

4. Дослідження. Задача має:

а) два розв'язки, якщо дуга,проведена із т. С радіусом рівним а, перетне пряму l в двох точках;

б) єдиний розв'язок, якщо дуга дотикається прямої l;

в) не має розв'язку, якщо дуга не перетинає пряму l.

2.4.4. Гомотетія

Підготовчі задачі.

1. Побудувати точку M′, гомотетичну даній точці M, якщо відомо центр гомотетії M_0 і коефіцієнт к. Розглянути розв′язки при різних коефіцієнтах.

2. Побудувати точку B′, гомотетичну даній точці B, якщо відомо центр гомотетії M_0 і пара гомотетичних точок. $\left(H_{M_0}(A) = A'\right)$.

3. По даному коефіцієнту побудувати зовнішній центр гомотетії, яка дану точку A в дану точку A′.

4. Якщо через вершини трикутника ABC провести прямі, паралельні його сторонам, то отриманий трикутник $A_1B_1C_1$ буде образом даного трикутника ABC при гомотетії з центром в точці M(точці перетину його медіан). Коефіцієнт к=-2.

Приклад 10. Довести, що в довільній трапеції середини основ, точка перетину бокових сторін і перетину діагоналей, лежить на одній прямій.

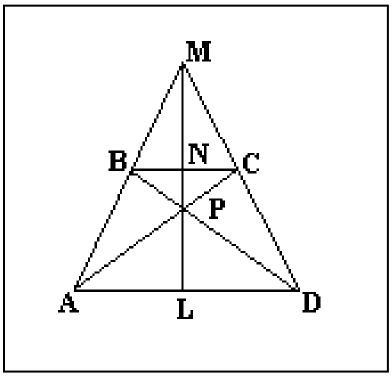


Рис.2.16.

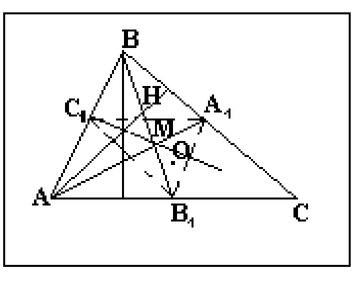
Розв′язання. Нехай ABCD- довільна трапеція.

M,N,P,L-вказані точки. Із того, що CB паралельне АД, слідує існування гомотетії з центром в точці M і коефіцієнтом $к_1$=|BC|:|AD|. Тоді $H_M^{k_1}(BC) = (AD)$, причому:

$H_M^{k_1}(B) = A; H_M^{k_1}(C) = D; H_M^{k_1}(N) = L$ (як середини гомотетичних відрізків). Точки$\{M,N,L\}$ належать одній прямій.

Аналогічно з того, що BC паралельна DA слідує існування гомотетії з центром в точці P і коефіцієнтом $к_2 = |PB| : |PD|$. Тоді, $H_P^{k_2}(BC) = (DA)$, причому $H_P^{k_2}(B) = D; H_P^{k_2}(C) = A; H_P^{k_2}(N) = L$ (як середини гомотетичних відрізків). Точки M,N,P належать одній прямій. Із вище сказаного слідує, що M,N,P,L лежать на одній прямій.

Приклад 11. Чудові точки трикутника. У будь-якому трикутнику точка перетину медіан і точка перетину висот лежать на одній прямій з центром описаного кола (теорема про пряму Ейлера).



Розв′язання.

Розглянемо рис.2.17.

A_1,B_1,C_1-основи медіан трикутника, M-точка перетину медіан , H-точка перетину висот, O-центр описаного кола. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Вони подібні з коефіцієнтом подібності 1/2. Крім того, вони і гомотетичні з центром гомотетії в точці M і коефіцієнтом к=-1/2(медіани діляться в точці перетину у відношенні 2:1, взятому від вершини)

Рис.2.17.

Гомотетія з центром в точці M і коефіцієнтом к=-1/2 перетворить висоти трикутника ABC у висоти трикутника $A_1B_1C_1$(перпендикулярності при гомотетії зберігаються).

Але так як точка перетину висот серединного трикутника являється центром описаного кола, то мамо: точка перетинувисот трикутника ABC при гомотетії з центром в т.M і коефіцієнтом к=-1/2 співпадає з точкою O, яка являється центром описаного кола.

Так як точки H і O гомотетичні з центром в т. M, то вони належать одній прямій (прямій Ейлера) . Крім того, HM=2MO.

2.5. Методи доведення

2.5.1. Синтетичний метод доведення

Часто аналіз Евкліда допомагає знайти синтетичний метод доведення. У синтетичному методі доведення міркування проводяться від умови або від уже відомого твердження до доводжуваного. Якщо умову доводжуваного твердження (або відоме твердження) позначити буквою А, а висновок буквою В, то схема аналітичного методу матиме вигляд А => А1 => А2 => ... => Аn => В. Недоліком синтетичного методу доведення в розглянутому прикладі є неможливість (коли не проведено аналізу Евкліда) здогадатися, з чого треба починати доведення. У геометричних доведеннях синтетичним методом важко здогадатися про додаткову побудову, яку часто в процесі доведення треба виконати. Правило-орієнтир пошуку доведення синтетичним методом за допомогою аналізу Евкліда можна задати так.

1. Припустити, що висновок (вимога) теореми (задачі на доведення) правильний.

2. Вивести з цього припущення всі можливі наслідки.

3. Переконатися, що одержаний висновок-наслідок є або очевидною, або встановленою раніше істиною.

4. Взявши одержаний істинний висновок за вихідне твердження, провести міркування у зворотному напрямку і перейти, якщо це можливо, до висновку про правильність доводжуваного твердження.

Синтетичний метод разом з аналізом Евкліда особливо зручно використовувати в разі доведення нерівностей. Аналіз Паппа, на відміну від аналізу Евкліда, відповідає всім вимогам доведення, і тому його називають «досконалим аналізом», або аналітичним методом доведення. Папп так характеризує аналітичний метод доведення: в аналізі шукане вважається знайденим, і визначаємо, звідки воно одержалося би, і далі, що передувало б цьому останньому, поки не дійдемо до чого-небудь відомого - того, що могло б стати вихідним пунктом (В. П. Шереметевский. Очерки по истории математики.- М., 1940). Логічною основою аналітичного методу, як і синтетичного, є аксіома: з правильного твердження завжди випливає правильний наслідок. Схема міркувань буде при цьому такою: B <= An <= … <= A2 <= A1 <= A.

Відмінність аналізу Евкліда від аналітичного методу доведення (аналізу Паппа) полягає також у тому, що в аналізі Евкліда з припущення правильності доводжуваного виводяться необхідні умови (наслідки), а в аналітичному методі доби¬раються достатні умови для виконання висновку доводжуваного твердження.

У шкільній практиці вчителі і деякі автори методичних посібників часто доводять твердження аналітичним методом, а після цього виконують обернений шлях міркувань, тобто доводять твердження синтетичним методом, хоч у ньому немає потреби. При цьому таке доведення безпідставно називають аналітико-синтетичним методом.

2.5.2. Метод доведення від супротивного

Для супротивних тверджень справджується закон виключеного третього: з двох супротивних тверджень одне завжди правильне, друге – ні, а третього бути не може. Тому замість безпосереднього доведення даного твердження можна показати, що супротивне йому твердження неправильне. З цього випливатиме справедливість даного.

Цей спосіб доведення складається з таких етапів:

1. Припускають протилежне тому, що стверджується теоремою.
2. На основі припущення, спираючись на аксіоми і вже доведені теореми, роблять висновки.
3. Знаходять, у чому цей висновок суперечить умові, якійсь аксіомі або доведеній раніше теоремі.

4. Роблять висновок, що зроблене припущення неправильне, а тому правильне твердження теореми.

Особливо часто використовують цей спосіб доведення, коли треба довести єдиність якого-небудь об'єкта. (Припускають протилежне, тобто що таких об'єктів хоча б два.)

Приклад. Довести, що в трикутнику може бути тільки один тупий кут.

Доведення:

1) Припустимо, що в трикутнику є два тупих кути.
2) Тоді сума кутів трикутника більша за $180°$, тому що міра тупого кута більша за $90°$.

3) Зроблений висновок суперечить теоремі про суму кутів трикутника.
4) Отже, наше припущення неправильне, а правильне те, що треба було довести.

РОЗДІЛ ІІІ. Організація і результати експерименту

3.1 Організація педагогічного експерименту

Експеримент – це науково поставлений дослід у галузі навчальної чи виховної роботи, вивчення обстежуваного педагогічного явища в спеціально створених і контрольних умовах.

Суть експерименту полягає в тому, що він ставить досліджуване явище в певні умови, створює планомірно організаційні ситуації, виявляє факти, на основі яких встановлюється залежність між експериментальними діями та їх об’єктивними результатами.

Зміст експерименту:

На основі опитування і результатів контрольної роботи були складені ігрові завдання для закріплення пройденого матеріалу з геометрії.

Одним з основних завдань, поставлених перед вищою школою є всебічний розвиток творчого мислення учнів. Розв’язати це важливе завдання при викладанні математики означає насамперед зацікавити учнів в матеріалом, з чим повинні допомогти ігрові завдання з геометрії.

Досягнення цілей ігрові завдання з геометрії ***завдань***:

- сформувати цілісну систему про методи розв’язування планіметричних задач;
- забезпечити оволодіння кращими здобутками науковців в цій галузі, виробити вміння застосовувати їх на практиці, здійснювати пошукову діяльність, розвивати творчий потенціал;
- розкрити внутрішні закономірності та специфічні ознаки, притаманні даній темі вивчення.

При вивчені геометрії в школи слід застосовувати ігрові завдання рекомендується проводити за 15-10хв до кінця уроку

Діагностика знань і вмінь учнів здійснюється у двох формах:

- Поточний контроль знань за модульно – рейтинговою системою.
- Підсумковий контроль у вигляді контрольної роботи.

Оцінюванню підлягають такі форми обов’язкової навчальної діяльності у контексті ігрових завдань: потрібно оцінювати учнів по місцях хто швидше справиться той і переміг.

Для експерименту вибрали 7 клас.

В експериментальній групах запроваджувалася методика більш детального вивчення обраної тематики на основі ігрових завдань.

Варто виділити два основні етапи методичних особливостей впровадженої методики:

- дослідження рівня знань учнів з предмету. Проведення бесіди, консультації з викладачами та методистами. Це приносить велику користь в роботі, а саме вчительські поради та настанови методистів.

- впровадження методики на заняттях, перевірка якості роботи – контрольна робота.

У ході першого етапу експерименту були намічені і досягнуті наступні завдання: проаналізовано й узагальнено стан досліджуваної проблеми в теорії та практиці навчання, розроблена методика проведення занять з геометрії.

На другому етапі дослідження здійснювалася експериментальна перевірка розробленого змісту практичних занять й методики їх проведення. При цьому були намічені і досягнуті наступні завдання: вивчити вплив запропонованого змісту і методики математичних заходів на засвоєння знань в процесі навчання.

Під час проведення занять учні виявляли інтерес до матеріалу, намагалися самостійно розв’язувати вправи.

3.2. Метод експертних оцінок.

Було розроблено розроблені ігрові завдання. Для аналізу ефективності використання даного методу було застосовано метод експертних оцінок. Було створено групу експертів.

Оскільки завершальним етапом аналізу є обробка результатів експертного опитування, що проводиться з метою узгодження думок експертів, то серед математико – статистичних методів обробки результатів експертних оцінок було обрано ранг кореляції.

Результат опитування експертів являє собою сукупність оцінок. Оцінки C_{ik} виставляються по десятибальній системі. Показником узагальнення думки групи експертів є середнє арифметичне величини оцінки певного питання – M_k.

$$M_k = \frac{1}{m} \sum C_{ik}$$, де

m – кількість експертів, що приймали участь в оцінці;

C_{ik} – оціночний показник k - того фактора в i - того експерта.

Оціночні фактори:

1 – легкість сприймання матеріалу студентами;

2 – відповідність планіметричних задач поставленим практичним завданням;

3 – доступність теоретичного матеріалу та якість його оформлення;

4 – логічність та послідовність викладу матеріалу;

5 – наявність методів розв’язання планіметричних задач;

6 – ефективність формування умінь розв’язувати планіметричні задачі різними методами.

Підсумкова таблиця даних експертного опитування

Оціночний фактор	Експерти					M_k
	1	2	3	4	5	
1	9	6	8	7	9	7.8
2	4	5	6	7	5	5.4
3	10	6	10	8	7	8.2
4	9	8	6	8	7	7.6
5	7	8	5	9	6	7.0
6	6	10	7	8	9	8.0

Сума рангів S_k кожного фактора обчислюється наступним чином:

1. Проводиться ранжування за спаданням оцінок за допомогою чисел натурального ряду, які є рангами оцінок кожного експерта. (r)

2. Якщо експерт оцінює декілька факторів однаковою оцінкою, то їм присвоюються «зв’язані ранги». (p)

3. Суми кожного із стовпчиків повинні бути рівними і дорівнювати контрольному числу, яке обчислюється за наступною формулою:

$$S_m = \frac{(1+k)k}{2}$$, де

k – кількість розглядуваних факторів.

4.Далі підраховується сума кожного із рядочків S_k.

Ранжування експертних оцінок

Оціночний фактор		Експерти					S_k
		1	2	3	4	5	
1	б	9	6	8	7	9	39
	r	6	4	5	5	4	24
	p	5	2.5	3	2	5	17.5
2	б	4	5	6	7	5	27
	r	1.8	1	1.7	1	4.5	10
	p	2	2.5	4	5	6	19.5
3	б	10	6	10	8	7	41
	r	2.5	4	5	5.3	4	19
	p	4.5	5	6	3.5	2	21
4	б	9	8	6	8	7	38
	r	4	4	1	2	2	13
	p	5	1	2	2.5	4	14.5
5	б	7	8	5	9	6	35
	r	3	4	6	3	2.5	18.5
	p	5.5	4	5	4	4	22.5
6	б	6	10	7	8	9	40
	r	3	6	5	5.5	3	22.5
	p	2	5	2	5	4	16
S_m		21	21	21	21	21	

Показником ступеня узгодженості думок експертів є коефіцієнт варіації оцінок кожного фактора – V_k. Цей коефіцієнт обчислюється наступним чином:

а) обчислюється дисперсія оцінок D_k:

$$D_k = \frac{1}{m-1}\sum\left(C_{ik} - M_k\right)^2$$, де

m – кількість експертів, що приймали участь в оцінці.

C_{ik} – оціночний показник k - того фактора в i - того експерта.

M_k – середнє арифметичне величини оцінки фактора.

б) обчислюємо середнє квадратичне відхилення оцінок – σ_k:

$$\sigma_k = \sqrt{D_k}\ .$$

в) знаходимо коефіцієнт варіації V_k:

$$V_k = \frac{\sigma_k}{m}\ .$$

Показник ступеня узгодженості думок експертів

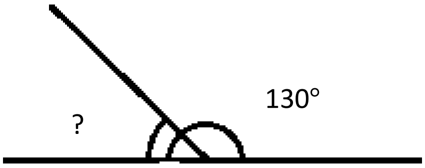
Оціночний фактор	$(C_{ik} - M_k)^2$					$\sum(C_{ik} - M_k)^2$	D_k	σ_k	V_k
	1	2	3	4	5				
1	1.2	1.8	0.2	0.8	1.2	5.2	1.3	1.1	0.22
2	1.4	0.4	0.6	1.6	0.4	4.4	1.1	1.04	0.20
3	1.8	2.2	1.8	0.2	1.2	7.2	1.8	1.34	0.27
4	1.4	0.4	1.6	0.4	0.6	4.4	1.1	1.04	0.20
5	0	1	2	2	1	6	1.5	1.22	0.24
6	2	2	1	0	1	6	1.5	1.22	0.24

Таким чином, на основі аналізу вище наведених таблиць, можна стверджувати, що ведення ігрових завдань з геометрії є в значній мірі ефективною, позитивно впливає не лише на рівень сформованості знань, умінь та навичок, але й формування позитивної мотивації.

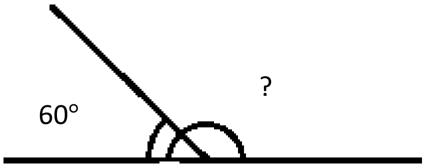
3.3 Ігрові завдання

Суміжні кути

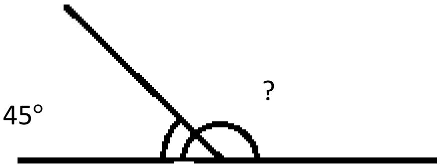
Визначте невідомий кут, та підставте відповідні букви знайшовши ключове слово



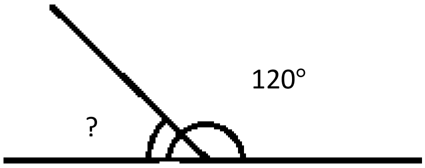
С



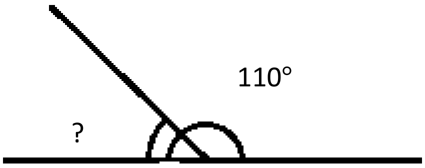
Н



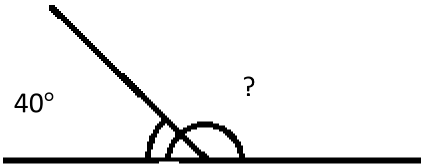
И



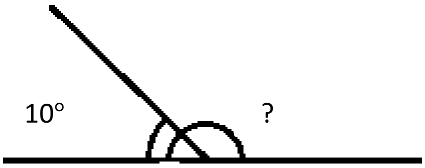
У



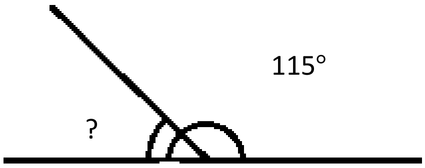
М



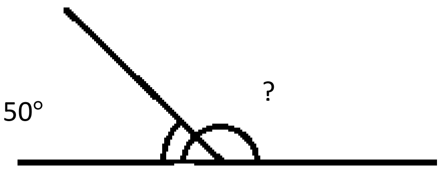
Й



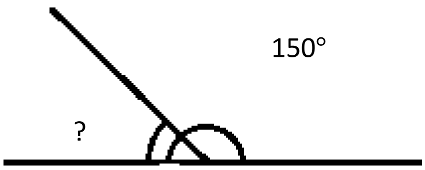
К



І



Ж

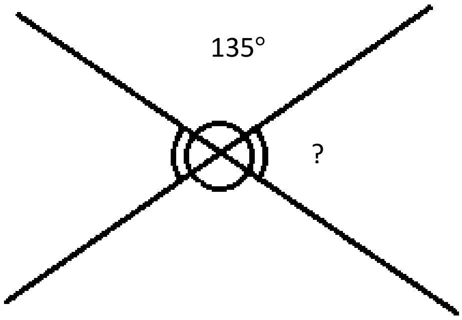


А

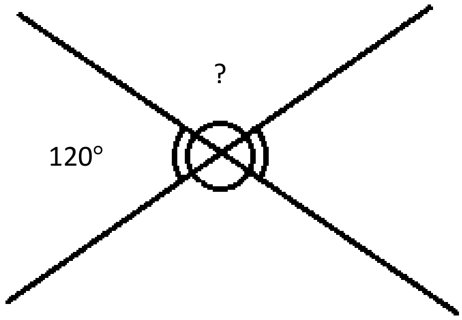
___	___	___	___	___	___	___	___
50°	**60°**	**70°**	**65°**	**130°**	**120°**	**135°**	**140°**

Вертикальні кути

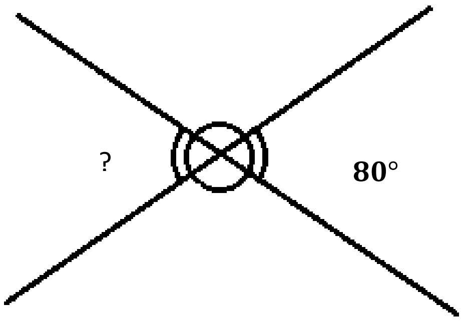
Визначте невідомий кут, та підставте відповідні букви знайшовши ключове слово



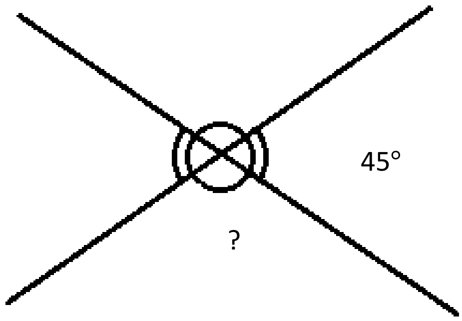
К



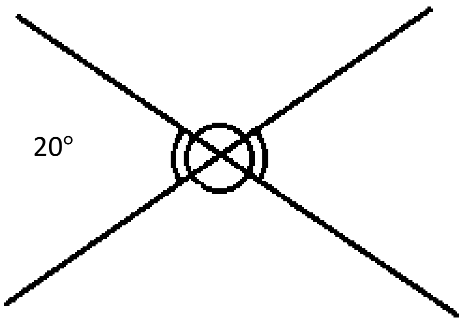
А



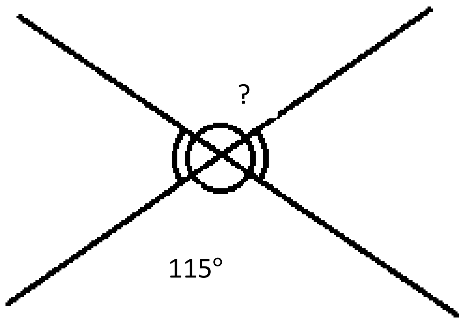
У



Р



М

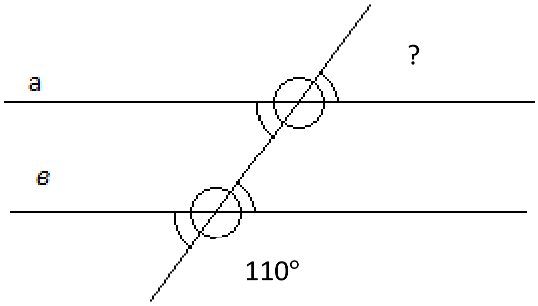


Т

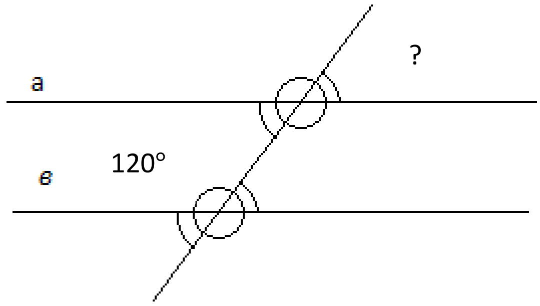
____	____	____
45°	**80°**	**115°**

Січна

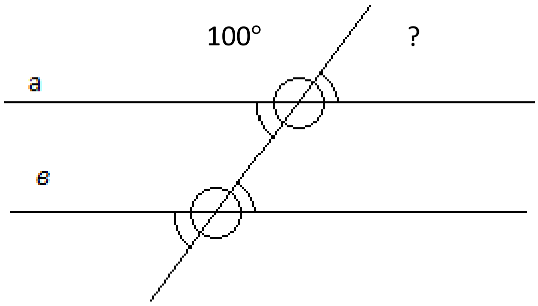
Визначте невідомий кут, та підставте відповідні букви знайшовши ключове слово якщо *а* ІІ *в*



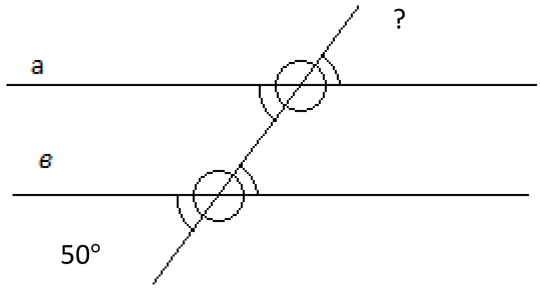
С



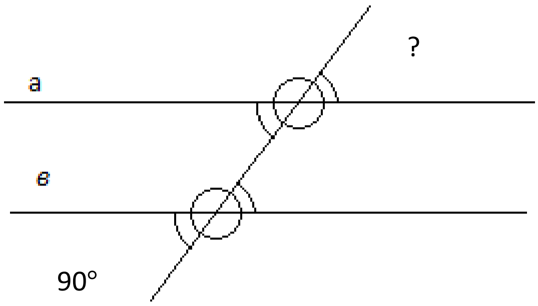
Ч



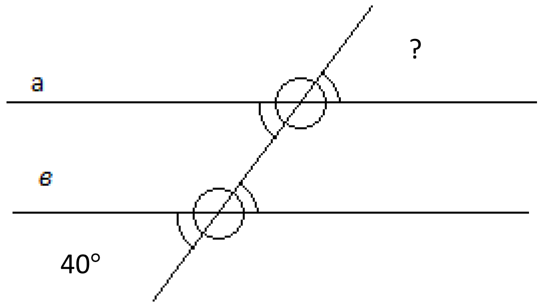
А



І



К



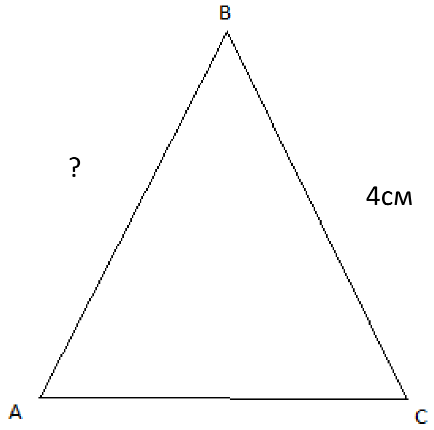
Н

____ ____ ____ ____ ____

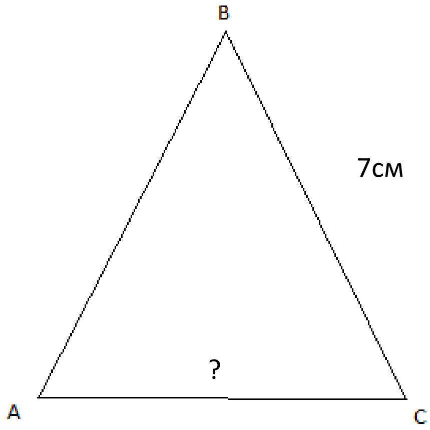
70° **50°** **60°** **40°** **80°**

Рівнобедрений трикутник

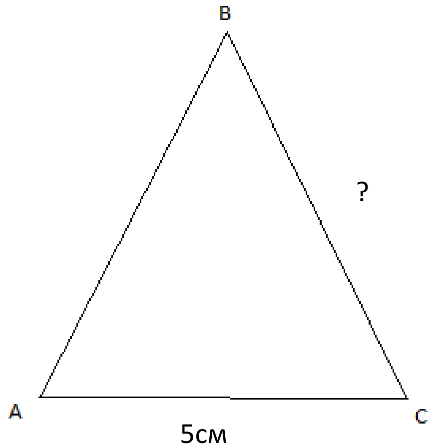
Визначте невідомий сторону, та підставте відповідні букви знайшовши ключове слово якщо AB=BC і периметр дорівнює 15 см



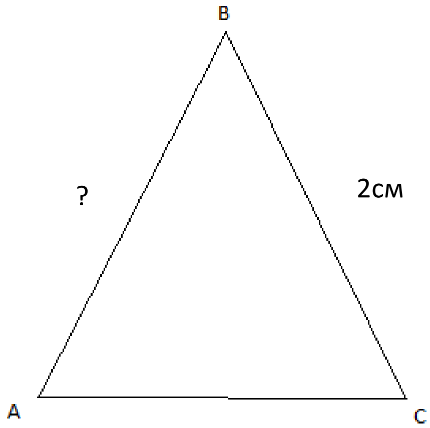
С



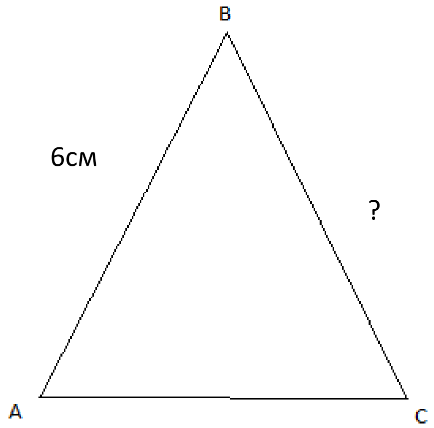
М



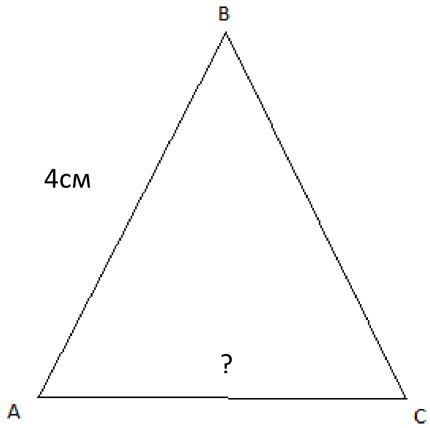
Л



З



О

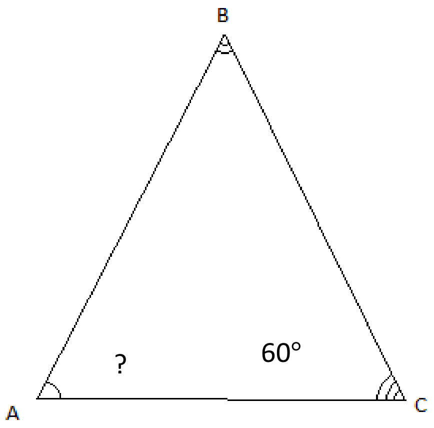


в

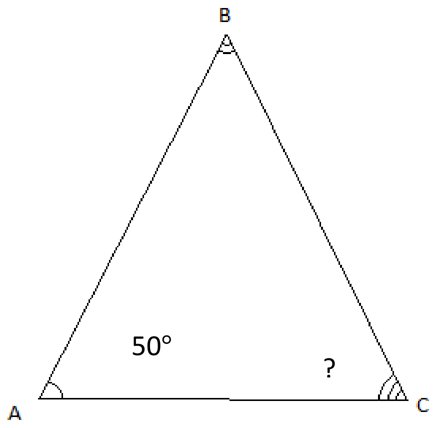
___	___	___	___	___
4см	**5см**	**6см**	**7см**	**6см**

Сума кутів

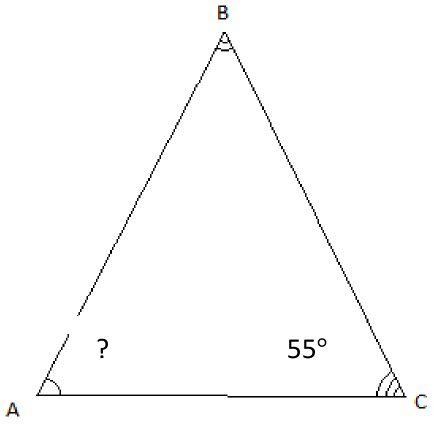
Визначте невідомий кут, та підставте відповідні букви знайшовши ключове слово якщо кут B=60°



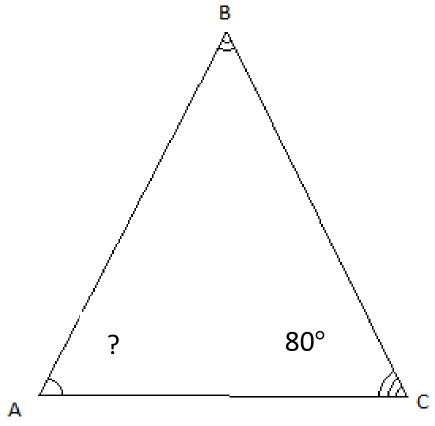
М



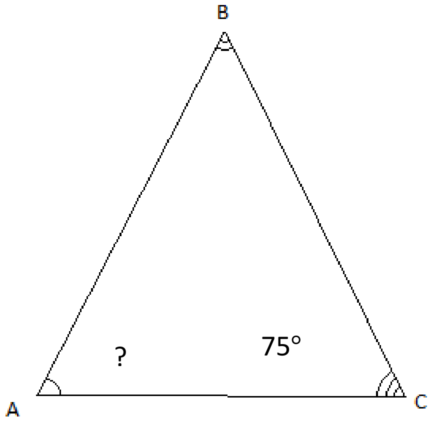
А



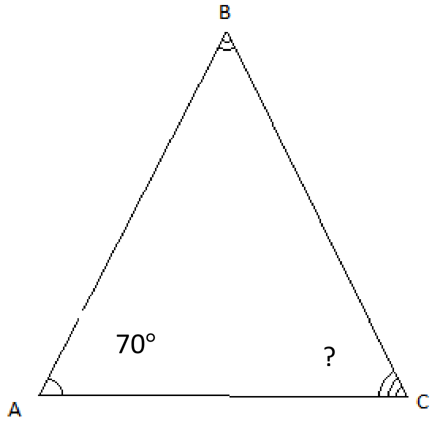
К



О



У



С

____	____	____	____
50°	**45°**	**60°**	**70°**

Коло, круг

Знайдіть радіус кола та підставте відповідні значення радіусів щоб знайти ключове слово якщо відомо

- **Діаметр кола 14см** **У**
- **Діаметр кола 26см** **Р**
- **Діаметр кола 22см** **К**
- **Діаметр кола 8см** **Ї**
- **Довжина кола 6πсм** **Н**
- **Довжина кола 16πсм** **А**
- **Довжина кола 4πсм** **Л**
- **Довжина кола 20πсм** **І**
- **Площа кола 64πсм^2** **Т**
- **Площа кола 4πсм^2** **М**
- **Площа кола 25πсм^2** **Д**
- **Площа кола 36πсм^2** **С**

___	___	___	___	___	___
13см	**8см**	**5см**	**10см**	**7см**	**6см**

Висновок

Розв’язування задач є важливим етапом при вивчені планіметрії, самостійне розважування задач розвиває логіку, уяву. Також планіметрія є грантом для стереометрії**.**

В даній роботі ми узагальнено методи розв’язування планіметричних задач:

- Алгебраїчний метод найбільш часто використовуваний метод для розв’язування задач з планіметрії якій, використовує відому залежності та перетворює геометричну задачу в розв’язання рівняння або систем рівняння.
- метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел. Числа, за допомогою яких визначається положення точки, називають її координатами;
- векторний метод розв’язання геометричних задач пов'язаний з використанням властивостей векторів.
- Метод геометричних перетворень пов'язаний з використанням властивостей переміщення.

Навели приклади їх застосування. Та провели педагогічний експеримент з застосуванням ігрових завдань з геометрії якій показав доцільність цього методу.

Список літератури

1. Пойа Д. Как решать задачу: Пособие для учителей / Пер. с англ. В.Звонарёвой и Д.Белла; Под ред. Ю.Гайдука. — Изд. 2-е. — М.: Учпедгиз, 1961. — 207 с.
2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. Підручник для студентів мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З.І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 363с.
3. Фридман Д. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – 2-е изд., – М.: Просвещение, 1984 – 175 с.
4. Белешко Д.Т. Гнедко Н.М. Геометрія: Навчальний Посібник. –Рівне. РІСКСУ, 2006.-75с.
5. Белешко Д.Т.Гапон С.Л. Методи розвязування геометричних задач,-69с
6. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. «Как научиться решать задачи». Москва, «Просвещение» 1984.200с.
7. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии.- М: Наука, 1986. 290с
8. Понарин А.Я., Элементарная геометрия. – М МЦНМО, 2004. 312с.
9. . Бевз Г.П. Геометрія в загальноосвітній школі.//Математика в школах України, 2003.№1,2. С.4.
10. Брадіс В.М. Методика викладання математики в середній школі. — К.: Рад. шк., 1954. —484 с.
11. Белешко Д.Т. Практикум по решению геометрических задач / Д.Т.Белешко. – Рівне: РОІВВ, 1986. – 89 с.
12. Біляніна О.Я. Геометрія 10 клас. Академічний рівень / О.Я.Біляніна, Г.І.Білянін, В.О Швець. – К.: Генеза, 2010. – 253с.
13. Брадіс В.М. Методика викладання математики в середній школі / В.М.Брадіс. – К.: Радянська школа, 1953.
14. Бугаев А.И. Методика преподавания математики в средней школе: Теоретические основы / А.И. Бугаев. – М.: Просвещение, 1981. – 288 с.

15. Бурда М.І. Геометрія. 8-9 класи / М.І. Бурда, Л.М. Савченко. – К.: Освіта, 1996. – 240 с.
16. Бродський Я. Готуємо майбутніх математиків / Я. Бродський, О. Павлов, А. Сліпенко, З. Хаметова // Рідна школа. – 2000. – Травень. – С. 59-62.
17.. Великий тлумачний словник сучасної української мови / [уклад. І. Голов]. – Ірпінь: ВТФ "Перун", 2002. – 1440 с.
18. Вульфов Б.З. Организатор внеклассной и внешкольной воспитательной работы. / Б. З. Вульфов, Л.М. Поташник – М.: Просвещение, 1983. – 207 с.
19. Глейзер Г.И. История математики в школе / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1981. – 239 с.
20. Гончаров С.М. Основи педагогічної праці [Посібник для початкуючого викладача технічного ВНЗ] / С.М. Гончаров. – К.: 1994. – 256 с.
21. Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения/Э.Г.Готман. – М.: Просвещение, 1989. – 264с.
22.. Галицкий М.Л. Курс геометрии 8-го класса в задачах. / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман , Л.И. Звавич. – Львов , 1991. — 96 с .
23. Декарт Р. Міркування про метод / Рене Декарт. – М.: АН СРСР, 1953.
24. Дорофеева А.В. Страницы истории на уроках математики. / А.В, Дорофеев. – Львов: Квантор, 1991. – 96 с.
25. Дунець Л. Формування професійних інтересів у майбутніх фахівців / Л. Дунець, О. Дунець // Рідна школа. - 2001. – Січень. – С. 48-49.
26. Эсаулов А.Ф. Активизация учебно-познавательной деятельности студентов / А.Ф.Эсаулов. – М.: Высшая школа, 1982. – 222с.
27. Єршова А.П. Геометрія 9 клас: Підручник для загальноосвітніх закладів. / А.П. Єршова, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов. – Х.: Ранок, 2009. – 256 с.