Методика розв’язування планіметричних задач методом геометричних перетворень

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Розв'язування планіметричних задач є одним із основних засобів досягнення високого рівня творчої діяльності учнів. Відомо, що «мистецтво розв'язувати геометричні задачі чимось нагадує трюки ілюзіоністів — іноді, навіть знаючи розв'язування задачі, важко зрозуміти, як можна було до нього додуматись» [1], [11]. Цілком зрозуміло, що цьому мистецтву треба учнів навчати. [30].

Поряд із цим ідея геометричних перетворень є однією з провідних у сучасній математичній науці і в різних галузях її застосувань. Вона тісно пов'язана з ідеями функції, відображень, які широко використовуються в практиці (архітектура, геодезія тощо). За її допомогою з успіхом доводять складні твердження з різних розділів геометрії. За допомогою геометричних перетворень і комп'ютерної графіки кінематографісти збагачують уяву глядача дивовижними образами і незвичайними перевтіленнями на екрані. Перетворення допомагають художникам правильно будувати композиції картин, а хімікам – досліджувати структуру кристалів.

Геометричні перетворення – один із важливих розділів курсу геометрії, оскільки метод геометричних перетворень є досить продуктивним методом розв'язування геометричних задач, а його застосування часто спрощує доведення окремих математичних тверджень та розв'язання задач на побудову і обчислення.

В шкільному курсі геометрії розглядають такі види перетворень як симетрія (відносно точки та відносно прямої), поворот, паралельне перенесення та гомотетія. При вивченні даної теми з певними труднощами часто стикаються не тільки учні, але й вчителі. Цьому сприяє кілька причин. По-перше, для вчителів досить важко організувати унаочнення геометричних перетворень на папері чи дошці. По-друге, на вивчення геометричних перетворень відводиться мало часу порівняно з тим, які подальші застосування має ця тема – як у шкільному курсі геометрії, так і при розв’язуванні багатьох олімпіадних задач.

До того ж в більшості своїй вчителі «побоюються» даної теми через її несприйняття учнями. Учні ж, в свою чергу, «недолюблюють» геометричні перетворення через відсутність, зокрема, алгоритмічних підходів у розв’язуванні типових задач, відсутності очевидної сфери подальшого застосування методу геометричних перетворень. [19]

Аналіз науково-методичних робіт, присвячених описаній ситуації, виявив, що ідея застосування методів перетворення до розв'язування планіметричних задач досить мало представлена в курсі геометрії загальноосвітнього навчального закладу.

З огляду на це, актуалізується питання дослідження теорії і практики методу геометричних перетворень, методики розв’язування планіметричних задач методом геометричних перетворень цілком та в шкільному курсі планіметрії зокрема з системних науково-теоретичних і методичних позицій. Одним із напрямків цих досліджень виступає підбір та представлення різнотипних задач (на обчислення, на доведення, на побудову) з використанням властивостей та інструментарію геометричних перетворень.

Зацікавленість методом геометричних перетворень та використанням його до розв’язування планіметричних задач з геометрії, розширення спектру завдань, які ставить сучасна наука, освіта та суспільне життя вказують на актуальність проблематики теми дипломної роботи.

Мета і завдання дослідження. Мета роботи полягає в дослідженні особливостей методу геометричних перетворень, використанні методики геометричних перетворень до розв’язування планіметричних задач.

Мета дослідження реалізується виконанням таких завдань:

1) розглянути загальні питання методики розв’язування планіметричних задач;
2) вести поняття про геометричні перетворення площини;

3) з’ясувати місце та роль геометричних перетворень в шкільному курсі планіметрії;
4) встановити та проаналізувати загальні риси та основні положення методу геометричних перетворень;
5) з’ясувати суть методів симетрії, повороту, паралельного перенесення, гомотетії;
6) підібрати та представити задачі на обчислення з використанням методів геометричних перетворень;
7) підібрати та представити задачі на доведення, які передбачають застосування методу геометричних перетворень;
8) підібрати та представити задачі на побудову, які передбачають застосування методу геометричних перетворень;
9) узагальнити й систематизувати результати дослідження.

Об’єкт дослідження: процес навчання планіметрії.

Предмет дослідження: вивчення особливостей застосування методу геометричних перетворень до розв’язування задач планіметрії.

Методика дослідження. Методика дослідження ґрунтується на використанні дедуктивного методу наукового пізнання від загального до конкретного, від загальнотеоретичного рівня до рівня практично-педагогічної діяльності: спочатку розглядаються загальні науково-педагогічні засади теорії методу геометричних перетворень, потім особливості методики й практики її реалізації.

У роботі використано описовий метод, метод критичного аналізу науково-методичних джерел, методи структурно-типологічного аналізу, узагальнення й систематизації практичного досвіду.

Наукова новизна дослідження полягає в узагальненні й систематизації науково-методичних відомостей про особливості використання методу геометричних перетворень до розв’язування планіметричних задач.

Практичне значення одержаних результатів пов’язане з їх використанням у практично-педагогічній діяльності вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів, методистів, викладачів, учнів, всіх, хто цікавиться питаннями застосуванням методу геометричних перетворень до розв’язування задач планіметрії.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел (31 позиція). Загальний обсяг роботи – 88 сторінок, обсяг основного тексту – 73 сторінки.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

1.1. Загальні питання методики розв’язування планіметричних задач

Одним з важливих завдань викладання математики в школі є навчання учнів розв’язувати геометричні задачі, що виконують різні функції у навчальному процесі, зокрема навчальну, виховну, контролюючу тощо.

Геометричні задачі можна класифікувати по-різному, залежно від того, що покладено в основу класифікації.

Найуживанішою є класифікація за вимогами, сформульованими в умовах задач (за змістом). Розрізняють геометричні задачі на: обчислення, доведення, побудову, дослідження. [1]

При цьому звертатимемо увагу на те, скільки розв’язків має задача, та при яких умовах вони існують. Надалі в даній роботі розглядатимемо планіметричні задачі – (планіметрія − розділ геометрії, що вивчає фігури на площині).

Методи розв'язування планіметричних задач можна поділити на геометричні й аналітичні.

Аналітичні методи передбачають застосування тотожних перетворень і співвідношень, отриманих на підставі відомих геометричних фактів. Такі перетворення, формули часто застосовуються без урахування взаємного розміщення фігур і їхніх елементів. Розв'язати задачі, використовуючи аналітичний метод, досить часто можна без побудови рисунка.

Геометричні методи ґрунтуються на застосуванні властивостей, ознак фігур і співвідношень між ними. У цьому випадку обґрунтування задачі пов'язане із взаємним розміщенням самих фігур або їхніх елементів і тому супроводжується рисунком.

Що ж означає «розв’язати геометричну задачу»?

Будь-яка геометрична задача побудована так, що в ній за даними елементами треба знайти інші (шукані) елементи геометричної фігури, які перебувають між собою та даними елементами в певних співвідношеннях, або визначити розміри окремих елементів. У геометричних задачах різних типів — на обчислення, доведення, побудову чи дослідження терміни «знайти», «шукані» мають конкретний зміст, який слід добре розуміти. [1]

Під *задачею на обчислення* розуміють таку задачу, в якій вимагається дані про геометричну фігуру довести до встановлення числового результату. Задача на обчислення характеризується вимогою встановити дані про невідомий елемент геометричної фігури за допомогою суто геометричних викладок з використанням алгебраїчних залежностей.

Задача на обчислення з числовими даними є окремим випадком задачі з параметричними даними, тому часто виникає потреба розглядати саме їх. Вважається усталеною думка про те, що в розв'язування геометричної задачі на обчислення з параметричними даними повинно ввійти дослідження області існування геометричної фігури.

Вважати геометричну задачу на обчислення з параметричними даними розв'язаною можна лише тоді, коли, крім обчислення шуканої величини, встановлено необхідні і достатні умови існування фігури, про яку йдеться в задачі.

Задача на доведення в геометрії характеризується вимогою обгрунтувати певне математичне твердження, сформульоване в її умові. Розв'язати геометричну задачу на доведення означає вивести твердження задачі з аксіом та раніше доведених теорем або наслідків з них. Геометричні задачі на доведення бувають двох видів:

а) такі, під час розв'язування яких припускають, що описані в їх умовах геометричні фігури існують;

б) такі, в яких факт існування геометричної фігури, про яку йдеться в задачі, треба довести.

У першому випадку розв’язування задачі зводиться до обґрунтування її висновку, виходячи з посилки задачі («дано»). При цьому переформулювання умови задачі часто виступає засобом пошуку розв’язку задачі, оскільки дає змогу розв’язати іншу, спосіб розв’язування якої відомий або його можна знайти порівняно простіше. На цю обставину вчителеві варто звернути особливу увагу.

У ході розв’язування задач на доведення часто виникає потреба дослідити існування математичного об’єкта, описаного її умовою. Результати такого дослідження можуть суттєво впливати як на хід розв’язування задачі, так і на вираз у відповіді.

Під *задачею на побудову* розуміють задачу, в якій треба побудувати геометричну фігуру наперед обумовленими інструментами, якщо дано деяку іншу фігуру та зазначено певні співвідношення між елементами даної і шуканої фігур.

Розв’язати задачу на побудову означає звести її до скінченного числа елементарних побудов, які виконуються за допомогою креслярських інструментів на основі прийнятих аксіом конструктивної геометрії.

Розв’язування геометричної задачі на побудову звичайно здійснюють за схемою, що складається з чотирьох етапів: 1) аналіз; 2) побудова; 3) доведення; 4) дослідження.

З логічного погляду алгоритм розв’язування задачі на побудову не завжди можна реалізувати, бо етап «побудова» принципово можливий, а практичне виконання побудови залежить від вибору величини даних в умові відрізків і кутів.

Складаючи план розв’язування задачі, слід прагнути до того, щоб він ґрунтувався лише на необхідний умовах, тобто на таких властивостях геометричних фігур, які випливають з існування розв’язування. За планами, складеними лише за необхідними умовами, можна знайти всі розв’язки задачі та вказати всі випадки їх відсутності (для тих значень параметрів, при яких ці умови є необхідними). Інший план розв'язування не може дати розв'язків, відмінних від знайдених за таким планом. Отже, якщо під час складання плану використано лише необхідні умови існування геометричної фігури, описаної умовою задачі, то дослідження задачі можна проводити за планом її розв'язування.

У процесі дослідження задачі за складеним в аналізі планом окремі випадки розв'язання спочатку встановлюють як можливі результати виконання певних пунктів плану. Далі для кожного з цих випадків можна знайти умови, які їх визначають. Звичайно такі умови виражаються алгебраїчними або трансцендентними нерівностями (іноді рівняннями), що зв'язують параметри, які характеризують задані в задачі величини та взаємне розміщення заданих геометричних фігур.

Щоб розв'язання задачі на побудову було повним, треба домагатися, щоб в області існування шуканої геометричної фігури окремі випадки, які розглядалися при аналізі і дослідженні, охоплювали всю множину фігур, визначену умовою задачі.

Легко переконатися, що реалізувати етап «побудова» вдається лише тоді, коли вибір заданих умовою задачі величин зроблено з області існування шуканої геометричної фігури. Якщо ж цього не дотримано, то побудова геометричної фігури неможлива, а це дає помилкову відповідь на запитання про кількість розв'язків задачі.

У зв'язку з цим автори праць цілком слушно час аналізу задачі встановлювати необхідні умови існування шуканої фігури. Тоді, вибравши належним чином величини заданих параметрів, можна успішно розв'язати задачу. [10, 13, 27]

Розглянемо приклад.

Задача. [27]. Побудуйте трапецію за чотирма сторонами: *a, b, c, d.*

Дослідження. Оскільки (рис.1.1) область існування трапеції ABCD така сама, як область існування трикутника KCD (утвореного побудовою $CK \parallel BA$), то необхідною і достатньою умовами її існування будуть:

$$|a - c| < d - b < a + c$$

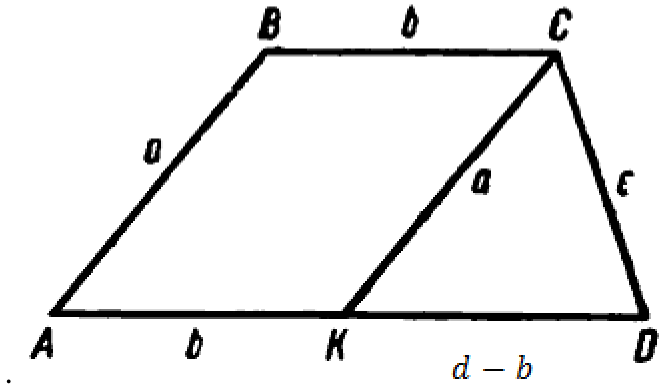


Рис.1.1

Вибравши довжини відрізків так, щоб вони задовольняли цю систему нерівностей, забезпечимо виконання плану розв'язування задачі.

Під *задачею на дослідження* розуміють задачу, в якій пропонують щось перевірити, порівняти, знайти умови існування тощо. Такі задачі, як правило, містять запитання: «Чи можна..?», «Як зміниться..?», «Чи правильно..?» та ін.

Задача. ([27],§ 5, № 13). Точки A, B, C лежать на прямій, а точка O — зовні прямої. Чи можуть трикутники AOB і BOC з основами AB та BC бути рівнобедреними? Обгрунтуйте відповідь.

Розв'язання. Припустимо, що трикутник AOB рівнобедрений з основою AB (рис. 1.2).

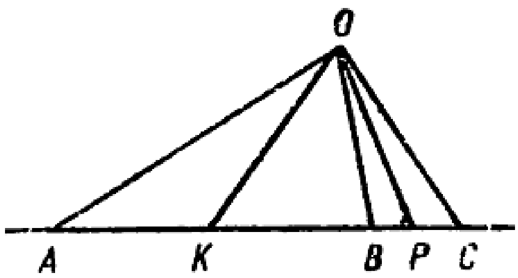


Рис.1.2

Проведемо в ньому медіану OK, яка буде одночасно і висотою, тобто OK $\perp$ AB. Провівши медіану OP у трикутнику OBC, дістанемо: OP $\perp$ BC.

Виходить, з точки О на пряму АС опущено два перпендикуляри, що неможливо. Отже, наше припущення невірне. Залишається погодитись, що трикутники АОВ та ВОС одночасно не можуть бути рівнобедреними з основами АВ та ВС відповідно.

Як бачимо, для розв’язання даної задачі довелося використати доведення. В інших задачах на дослідження використовують також обчислення або побудову. [1]

1.2. Поняття про геометричні перетворення площини, їх місце і роль в шкільному курсі планіметрії

Теорія геометричних перетворень виникла у зв'язку з пізнанням законів зображення предметів на площині. Спроби правильно відобразити на плоскому рисунку природні форми предметів здійснювалися задовго до виникнення писемності − люди малювали на стінах печер, скелях, посуді різноманітні рослини, тварин тощо. Тривала практика підказувала митцям, як передати на рисунку зображуваний предмет − так зароджувалося вчення про відповідності й перетворення.

Поняття руху (переміщення) в геометрії сформувалось шляхом абстракції реальних переміщень твердих тіл. Рух, як переміщення фігур і, зокрема, накладання був основним методом доведення у Фалеса (640 – 548р. до н.е.). і відіграв суттєву роль у напрацюваннях Евкліда. [14]

Фалес за допомогою перегинів і поворотів рисунка показав справедливість таких фактів, як рівність вертикальних кутів, рівність вписаного кута, що спирається на діаметр кола, прямому куту тощо.

Вперше значну увагу матеріалу геометричних перетворень було приділено відомим вітчизняним математиком і методистом А.Н.Колмогоровим. В його курсі геометрії (1968 – 1980) перетворення займали центральне місце та слугували основою доведення багатьох теорем.

В підручниках Погорєлова А. В. й Атанасяна Л. С. рух та перетворення подібності стали розглядатися скоріш як об’єкт вивчення, ніж універсальний апарат для розв’язування задач.

За чинною програмою та діючими підручниками з математики матеріал геометричних перетворень в загальноосвітньому курсі вивчаються лише на найпростішому, оглядовому рівні і містять мінімум означень і основних фактів. Він представлений у вигляді двох окремих тем: "Подібність трикутників" (8 клас) і "Геометричні перетворення" (9клас). Тут розглядається подібність фігур в більш загальному, порівняно з восьмим класом, аспекті, як результат перетворень площини. [24]

Програма передбачає ознайомлення учнів як з поняттям про геометричні перетворення взагалі, так і з властивостями та застосуванням окремих видів цих перетворень. У шкільному курсі планіметрії розглядаються геометричні перетворення двох видів: *рух* (зберігаються відстані між точками) і *перетворення подібності* (відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів). Як приклади перетворення руху вивчаються: симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, паралельне перенесення, поворот навколо точки. Прикладом перетворення подібності є гомотетія.

Основна мета вивчення геометричних перетворень – ознайомити учнів з різними видами рухів, подібністю і гомотетією, їх властивостями, ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворень та властивостей площ подібних фігур до розв’язування задач.

Варто зазначити, що тема «Подібні трикутники» багато років традиційно входила до теми «Перетворення подібності» і вивчалася в дев’ятому класі. Такий підхід значно звужував як теоретичне поле, в якому розглядаються трикутники у восьмому класі, так і кількість та тематику змістовних задач. Тому доцільним є виділення окремого класу подібних фігур, а саме, подібних трикутників, яким притаманні певні специфічні властивості, і їх вивчення здійснювати в курсі восьмого класу. Це дозволяє, з одного боку, забезпечити належне підґрунтя для подальшого вивчення теми «Розв’язування прямокутних трикутників», а з іншого боку, сформувати початкові поняття про подібність фігур на прикладі трикутників як досить зручної геометричної фігури для дослідження властивостей подібності. Доцільність такого підходу підтверджує багаторічний досвід вивчення теми «Рівні трикутники» автономно від теми «Переміщення (Рух)». Таким чином, вивчення окремих випадків рівності і подібності фігур (на прикладі трикутників) можна трактувати як підґрунтя до впровадження понять рівності і подібності геометричних фігур дедуктивним шляхом, а від цього — до трактування рівності і подібності як результатів геометричних перетворень.

На відмінно від рівня стандарту до поглибленого курсу вивчення математики включено окрему тему «Застосування векторів і геометричних перетворень до розв’язування задач». Значну увагу тут слід приділяти опису перетворень мовою декартових координат, встановленню відповідності між сутністю перетворення та його алгебраїчною інтерпретацією. Цей математичний апарат надає інструментарій для розв’язування широкого класу задач, у тому числі й тих, що розв’язувалися раніше іншими способами. [23]

Під час вивчення геометрії учні впевнюються, що не завжди можна дістати відповідь на поставлене запитання внаслідок безпосереднього аналізу заданої фігури або конфігурації. Часто доводиться виконувати деякі перетворення фігури. Це дає змогу зблизити окремі елементи, дістати відрізки або кути, які відповідають даним умови. Такі перетворення фігур невипадкові. Це окремі випадки застосування геометричних перетворень.

Роль навчального матеріалу:

1) Введення в шкільний курс лінії геометричних перетворень дозволило дати "апаратне", "робоче" тлумачення рівності та подібності фігур.

Якщо в діючих підручниках спочатку вводяться рівні трикутники через рівні елементи або суміщення (накладання), то аналогічне означення рівності (подібності) для довільних фігур ввести важко – потрібні геометричні перетворення.

2) Геометричні перетворення дозволяють ввести в шкільний курс динаміку, подолати деяку статичність традиційного синтетичного підходу. При цьому з'являється можливість приділити достатньо уваги розвитку певних сторін просторової уяви учнів.

3) Геометричні перетворення дають новий ефективний метод розв'язування задач, який дозволяє у певних випадках полегшити доведення теорем і розв'язування задач.

4) Геометричні перетворення сприяють реалізації внутрішньо предметних зв'язків з алгеброю (функціональна залежність, перетворення графіків функцій), міжпредметних – з фізикою (механічний поступальний рух тощо), зауважимо, що в фізиці досліджується в основному сам процес руху, в геометрії фіксоване положення фігури, що зазнала руху (початкове, кінцеве, а інколи проміжне).

5) Геометричні перетворення додають шкільній математиці естетику, витонченість. Ідея симетрії – орнаменти, сніжинки, архітектурні споруди являються втіленням цієї ідеї, що є одним з найважливіших засобів гуманітаризації навчання математики.

Теорія геометричних перетворень в школі може бути побудована традиційним – синтетичним, а також аналітичним методами. Найбільшого розповсюдження отримав змішаний: аналітико – синтетичний підхід, що використовується в діючих підручниках. Це дозволяє спростити викладання, а також формувати в учнів представлення про можливість використання різних способів завдання геометричних перетворень.

Коротко встановимо основні поняття про геометричні перетворення.

Якщо кожній точці однієї фігури F за деяким правилом ставиться у відповідність єдина точка іншої фігури F_1, така відповідність у геометрії називається *геометричним перетворенням фігури F у фігуру* F_1 (рис.1.3).

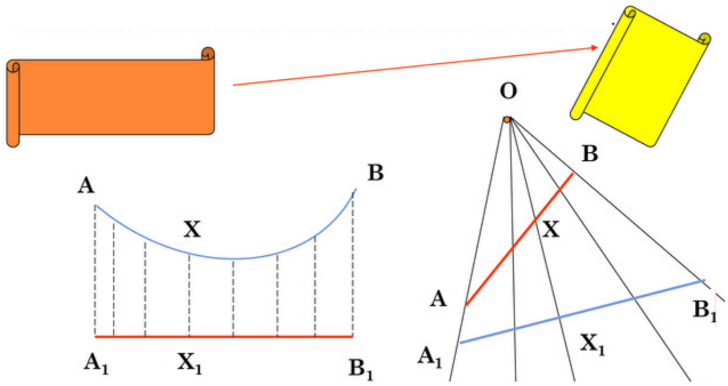


Рис.1.3

Фігура F_1 називається *образом фігури* F, а фігуру F – *прообразом* F_1.

Геометричне перетворення, яке зберігає відстані між відповідними точками, називається *переміщенням або рухом*. Переміщення іноді називають ізометрією. Рух перетворює фігуру F у рівну їх фігуру $F^{/}$(рис.1.4).

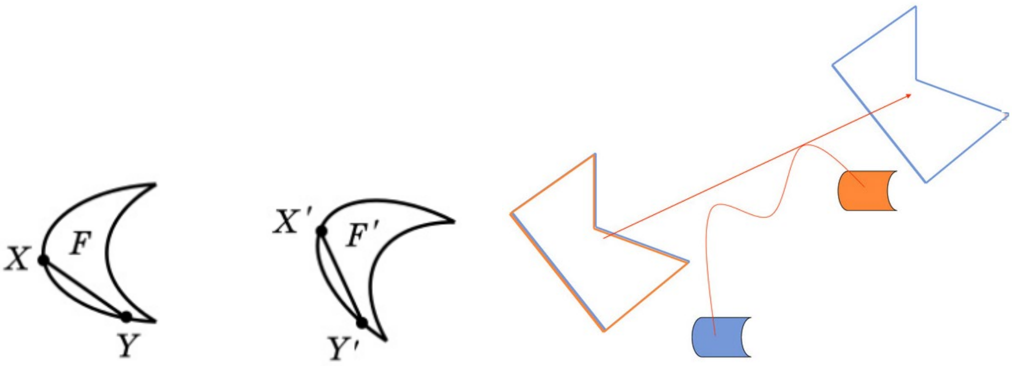


Рис.1.4

Властивості переміщення:

1. Внаслідок переміщення точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їх взаємного розміщення зберігається;
2. При переміщенні прямі переходять у прямі, промені – в промені, відрізки у відрізки;
3. Внаслідок переміщення зберігаються кути між променями.

Охарактеризуємо кожен із різновидів геометричного перетворення площини.

1.2.1. Симетрії відносно точки

Об’єкти, подані на рис. 1.5, можна описати так: вони мають таку точку O (середину відрізка, центр кола тощо), що для будь-якої точки X кожного об’єкта знайдеться така точка X', яка лежить на прямій OX на відстані OX', що дорівнює OX. Точки X і X' називаються симетричними відносно точки O, а точка O — центром симетрії. Об’єкти, які мають цю властивість, називають симетричними відносно точки O, або просто центральносиметричними.

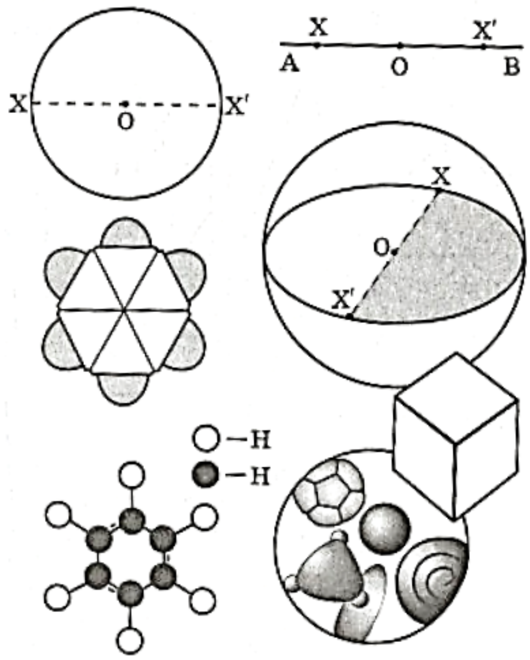


Рис. 1.5

Дві точки X і X_1 називаються *симетричними відносно точки* O, якщо точка O є серединою відрізка XX_1.

Перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури $F^/$, симетричну відносно даної точки O, *називається перетворенням симетрії відносно точки O* або *центральною симетрією* (рис.1.6).

Фігури F і $F^/$ називаються *симетричними відносно точки O.*

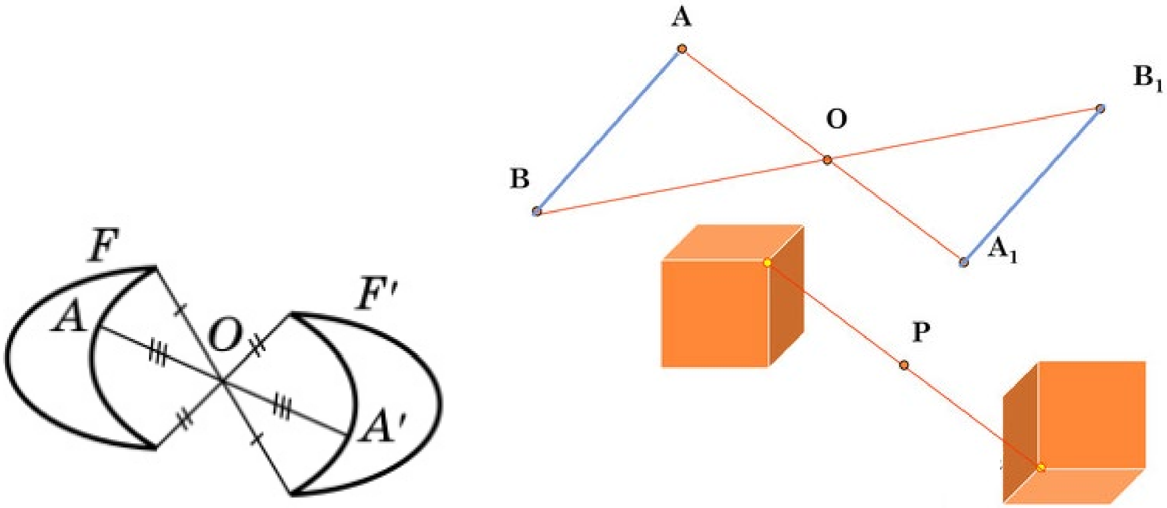


Рис.1.6

Позначають це перетворення *Zo* , причому, якщо точка *X′ є образом точки X, то це записують так: Zo(X) = X′, або X′ = Zo(X).*

Властивості центральної симетрії:

1.Зберігає відстані між точками.

2.Зберігає кути.

3.Переводить прямі у прямі, промені – у промені.

Теорема. Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.

Отже, центральна симетрія *Zo перетворює:*

а) відрізок у рівний і паралельний йому відрізок;

б) напрямлений відрізок — у рівний і протилежно напрямлений відрізок;

в) промінь — у паралельний і протилежно напрямлений промінь;

г) пряму — у паралельну пряму;

д) кут — у рівний йому кут;

е) площину — у паралельну площину.

Властивості, які розглядають у курсі геометрії 9 кл. Центральна симетрія перетворює пряму на паралельну їх пряму або в туж саму пряму, відрізок – на відрізок, многокутник – на рівний йому многокутник.

Алгоритм побудови точки, симетричної даній точці X відносно точки O:

1.Проводимо промінь XO.

2. З другого боку від точки О на промені відкласти відрізок $OX_1=XO$.

Для того, щоб побудувати фігуру, симетричну даній відносно точки (центра), потрібно для кожної точки фігури побудувати їй симетричну відносно цього центра.

Приклади центрально-симетричних геометричних фігур: коло, квадрат, ромб, паралелограм, прямокутник, відрізок.

Координатні формули симетрії відносно точки:

$$\begin{cases} x^{/} = -x + 2x_0 \\ y^{/} = -y + 2y_0 \end{cases}.$$

Якщо точка *A* має координати *(x; y),*то при симетрії відносно початку координат вона перейде в точку $\mathrm{A_1}$ з координатами *(-x; –y).*

Ці формули переконують, що для найпростішого аналітичного зображення центральної симетрії зручно за початок системи координат брати центр симетрії.

Координатні зображення геометричних перетворень часто значно спрощують розв'язування задач. Вони встановлюють зв'язки між алгеброю і геометрією, математикою і природничими науками.

1.2.2. Осьова симетрія

Нехай *l* – деяка пряма площини. Перетворення площини, при якому точки прямої *l* самі собі відповідають , а будь-якій точці А, яка не належить прямій *l,* відповідає точка $A^{/}$ цієї ж площини, що відрізок $AA^{/}$ перпендикулярний до прямої *l* і ділиться нею навпіл, називається *симетрією відносно прямої l*, або *осьовою симетрією* (рис.1.7.)

Пряма *l* називається *віссю симетрії.* Осьову симетріяю позначають S_l.

Якщо точка $A^{/}$ є образом точки А в симетрії відносно прямої *l*, то записують $A^{/}= S_l(A)$.

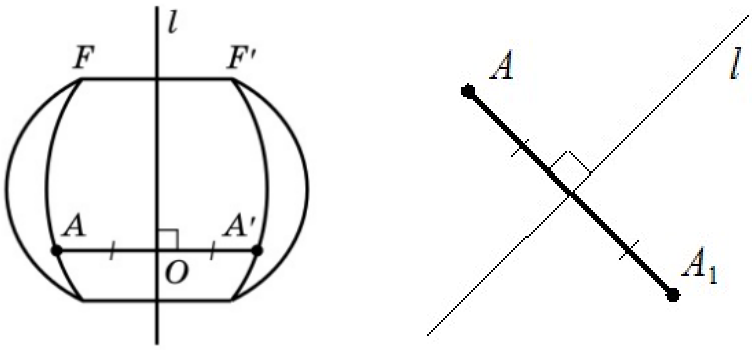


Рис. 1.7

Осьова симетрія повністю визначається заданням або осі симетрії, або однієї пари відповідних точок, або двох різних незмінних точок. [10]

Отже, перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1, симетричну відносно даної прямої l , називається *перетворенням симетрії відносно прямої l*. Пряма *l* – *вісь симетрії фігур* (рис.1.8).

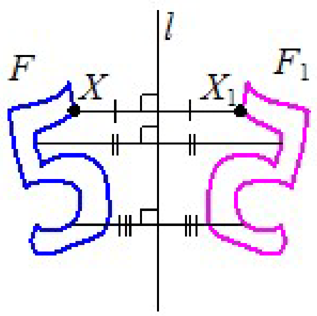


Рис. 1.8

Так, бісектриса кута є його віссю симетрії, серединний перпендикуляр відрізка є його віссю симетрії, кожна висота рівностороннього трикутника є його віссю симетрії, кожна діагональ ромба (квадрата) є його віссю симетрії, кожен діаметр кола є його віссю симетрії і т.п. [10, 11]

Властивості осьової симетрії:

1.Зберігає відстані.

2.Зберігає кути.

3.Переводить прямі у прямі, промені – у промені.

Теорема. Осьова симетрія є рухом.

Звідси випливає ряд наслідків:

1. Фігури, симетричні відносно прямої, рівні, але мають протилежну орієнтацію (рис.1.8)

2. В осьовій симетрії пряма відображається на пряму, промінь – на промінь.

3. Зберігається упорядкованість точок, паралельність прямих.

4. Симетричні прямі або перетинаються на осі симетрії, або є паралельні їй.

5. Точки осі рівновіддалені від будь-якої пари симетричних точок.

6. Для будь-яких двох прямих, які перетинаються, можна побудувати дві осі симетрії – це бісектриси кутів, утворених прямими.

Алгоритм побудови точки, симетричної даній точці X відносно прямої l:

1.Провести з точки X перпендикуляр XO до прямої *l.*

2.На продовженні перпендикуляра відкласти відрізок OX_1=OX. Точка X_1 – шукана.

Для того, щоб побудувати фігуру, симетричну даній відносно прямої потрібно побудувати для кожної точки даної фігури точку, симетричну відносно цієї прямої.

Приклади симетричних геометричних фігур: квадрат (4 осі симетрії), прямокутника (2 осі симетрії), ромб (2 осі симетрії), коло (безліч осей, адже кожен діаметр є віссю симетрії), рвнобічна трапеція (1 вісь симетрії), правильний трикутник (3 осі симетрії).

Перетворення симетрії відносно осі абсцис виражається такими координатними формулами

$$\begin{cases} x^{/} = x, \\ y^{/} = -y \end{cases}$$

Симетрія відносно осі ординат

$$\begin{cases} x^{/} = -x, \\ y^{/} = y \end{cases}$$

При таких перетвореннях кожна точка *A (x;y)* площини перетворюється в точку $A^{/}(x^{/};y^{/})$.

Перетворення координат відносно прямої y = x (бісектриси I і III координатних кутів): Якщо точка *A* має координати *(x; y),* то при симетрії відносно прямої y = x перейде в точку $A_1(x_1;y_1)$, де x_1 = y, y_1 = x.

Перетворення координат при симетрії відносно осі Ox: Якщо точка *A* має координати *(x; y),* то при симетрії відносно осі *Ox* вона перейде в точку A_1*(x; –y).* Перетворення координат при симетрії відносно осі Oy: Якщо точка *A* має координати *(x; y),* то при симетрії відносно осі Oy вона перейде в точку A_1 (–x; y).

1.2.3. Поворотна симетрія

Серед фігур, зображених на рисунку 1.9, є такі, що не симетричні ні відносно точки, ні відносно прямої. Проте вони складаються із закономірно розташованих рівних складових частин, які можуть суміщатися одна з одною при повороті на деякий кут навколо певної точки О, розташованої в площині фігури. Точку О називають *центром повороту.*

На рис.1.9 а) подано фігуру, яка перетворюється в себе при повороті на кути, кратні куту $\frac{360^0}{3}$, на рис.1.9 б) –при повороті на кут $\frac{360^0}{5}$, на рис. 1.9. в) і г) – при повороті на кут $\frac{360^0}{6}$, на рис.1.9 д) –при повороті на кут $\frac{360^0}{9}$. [10]

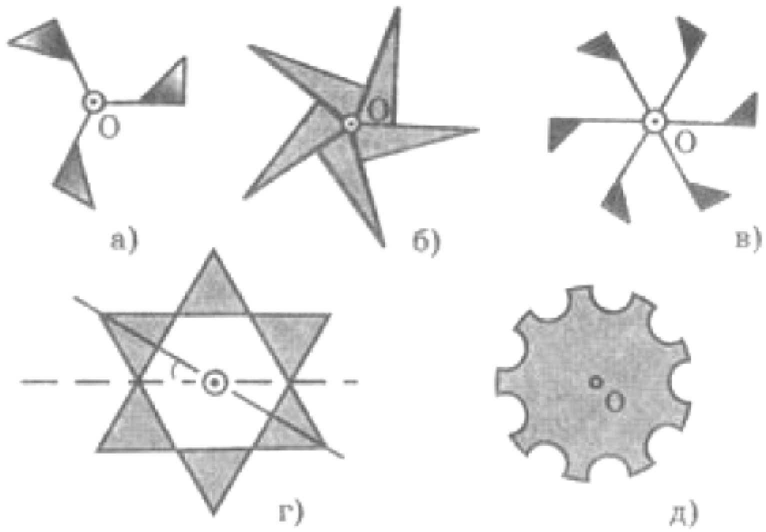


Рис. 1.9

Поворотом площини навколо точки O на заданий кут α називається таке перетворення площини, при якому кожній точці X площини, відмінній від точки O, ставиться у відповідність точка $X^{/}$ цієї самої площини, що:

1) $OX=OX^{/}$,

2) $\angle XOX^{/}$ дорівнює даному куту α і однаково з ним орієнтований.

Точка O називається при цьому *центром повороту*, кут *α – кутом повороту*.

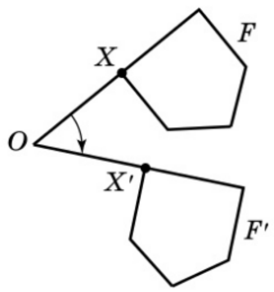


Рис.1.10

Поворот позначається символом R_O^{α}.

Точка $X^{/}$ є образом точки X у повороті навколо точки O на кут α.

Якщо при повороті фігура F відображається сама на себе, то говорять, що ця фігура має поворотну симетрію.

Розглянемо фігуру *F*, точку *O,* кут α. Кожній точці *X* фігури *F* поставимо у відповідність точку X_1, яка є образом точки *X* при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α (якщо точка O належить фігурі F, то їй співставляється вона сама). Усі співставлені точки утворюють фігуру F_1 (рис.1.11).

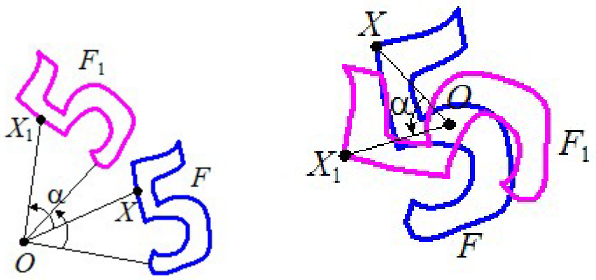


Рис.1.11

Говорять, що фігура F_1 є образом фігури F при перетворенні: повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α.

Аналогічно означають перетворення повороту фігури F за годинниковою стрілкою на кут (рис.1.12).

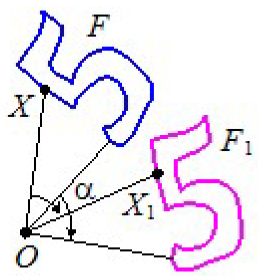


Рис.1.12

На рис. 1.13. зображені відображення:

1) точок $A^{/} = R_O^{\alpha}(A)$, $B^{/} = R_O^{\alpha}(B)$, $C^{/} = R_O^{\alpha}(C)$;

2) відрізків $A^{/}B^{/} = R_O^{\alpha}(AB)$, $A^{/}C^{/} = R_O^{\alpha}(AC)$, $B^{/}C^{/} = R_O^{\alpha}(BC)$;

3) кутів;

4) трикутника $\Delta ABC = R_O^{\alpha}(\Delta ABC)$.

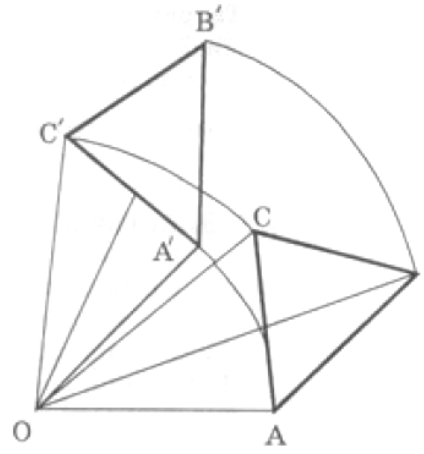


Рис.1.13

Із наведеного випливає, що поворот навколо точки повністю визначається заданням центра повороту і орієнтованого кута повороту. Крім того поворот може бути заданий центром повороту і парою відповідних точок або двома парами відповідних точок (парою відповідних відрізків). [10, 12]

Властивості повороту:

1. Образом точки про повороті площини є точка.
2. На площині існує єдина незмінна точка – центр повороту О, якщо кут повороту відмінний від 0^0.
3. Незмінними прямими при повороті на кут 180 ^{0} є всі прямі, що проходять через центр повороту.

Теорема. Поворот є рухом.

А тому, поворот має всі властивості руху:

4. Поворот переводить прямі у прямі, промені у – промені.
5. Поворот переводить відрізки у рівні їм відрізки.
6. Поворот переводить кути у рівні їм кути.
7. Поворот переводить коло у коло того ж радіуса.

Алгоритм виконання повороту:

1.Задаємо центр О повороту, кут α повороту, напрям повороту (за чи проти годинникової стрілки).

2.Проводимо промінь OX, де X – задана точка, поворот якої виконується.

3.Від променя OX відкладаємо кут XOA. що дорівнює куту α в заданому напрямі.

4.Проводимо коло з центром в точці O радіуса OX. НА перетині цього кола і променя OA отримуємо точку X_1, таку, що OX = OX_1.

Якщо на площині задана фігура F, то її поворот виконують виконавши поворот кожної її точки. Тоді фігура F перейде у фігуру F_1.

Поворот на 180° і -180^0 є центральною симетрією (рис.1.14).

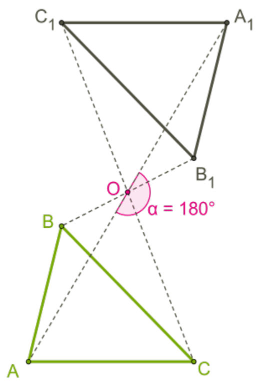


Рис.1.14

Якщо фігура F внаслідок повороту навколо деякої точки O на кут $\frac{360^{\circ}}{n}$ (*n* – натуральне число) переходить сама в себе, то фігура F має симетрію обертання *n*-го порядку. [10]

Фігури, що мають симетрію *n*-го порядку (рис.1.15):

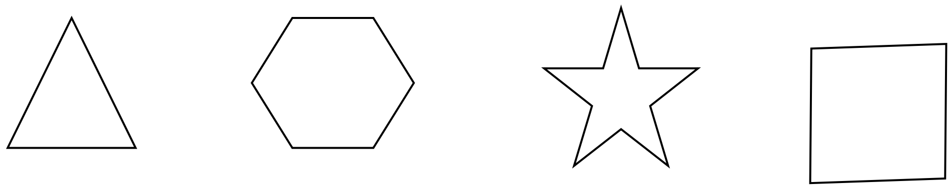


Рис.1.15

Формули, що виражають координати точки-образу через координати точки її прообразу при повороті площини у випадку, коли система координат і кут повороту однаково орієнтовані, мають вигляд

$$\begin{cases} x^{/} = x cos a - y sin\alpha; \\ y = x sin\alpha + y cos a. \end{cases}$$

Коли протилежно орієнтовані, формули повороту набувають вигляду:

$$\begin{cases} x^{/} = x cos a + y sin\alpha; \\ y = x sin\alpha - y cos a. \end{cases}$$

1.2.4. Паралельне перенесення

З рівномірними повтореннями фігур, ліній, об'єктів ми стикаємося в природі, техніці, мистецтві. (рис.1.16). Такі рівномірні повторення називають паралельними перенесеннями. [12]

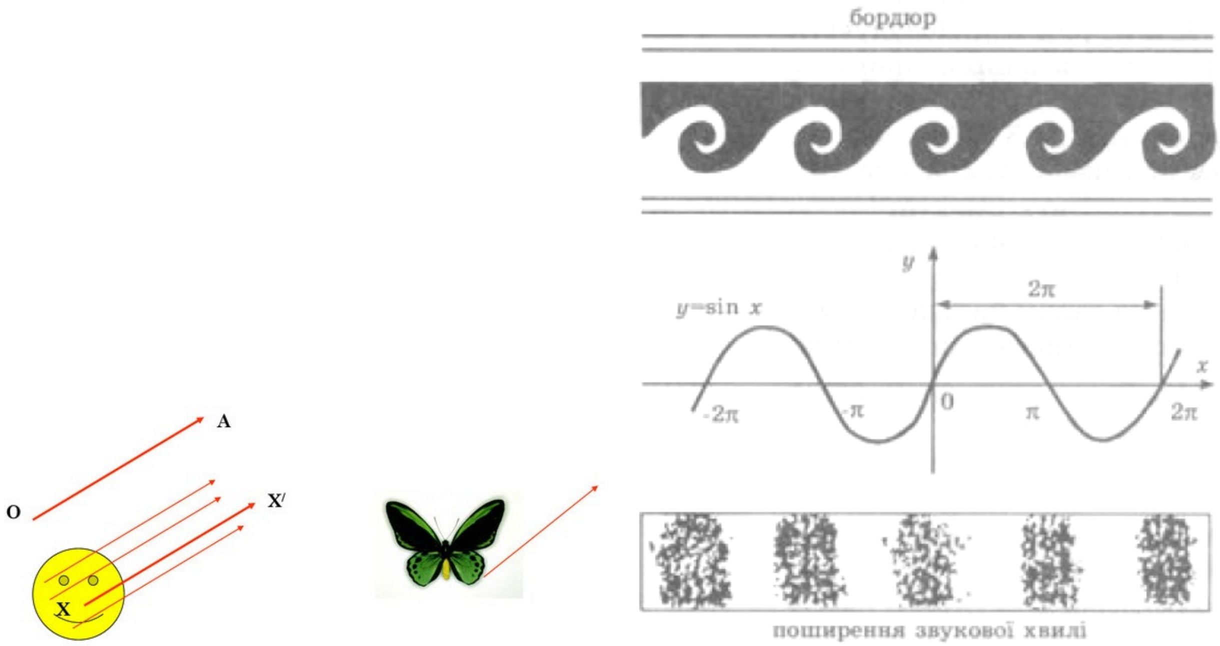


Рис. 1.16

Перетворення площини, при якому кожна точка M площини відображається на таку точку M/ цієї ж площини, що $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$, називають *паралельним перенесенням* (рис.1.17). Позначають $\mathrm{T}_{\vec{a}}$.

Паралельне перенесення ще називають трансляцією.

Точка M/ називається образом точки M при паралельному перенесенні. Символічно записують $M^{/} = \mathrm{T}_{\vec{a}}(M)$ або $M^{/} = \vec{a}(M)$ (рис. 1.17).

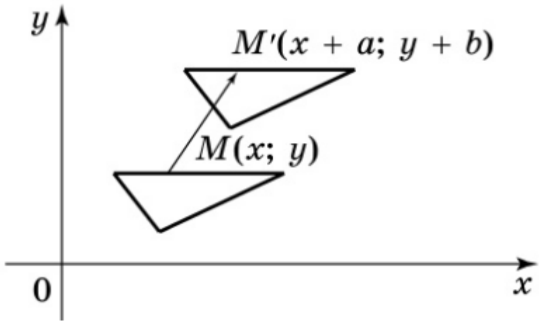


Рис.1.17

Паралельним перенесенням фігури називається перенесення всіх точок простору на одну відстань в одному напрямі.

Паралельне перенесення визначає вектор переміщення, за яким відбувається перенесення.

Щоб здійснити паралельне перенесення, потрібно знати напрям і відстань, що означає задати вектор (рис.1.18). Початкова фігура та фігура, отримана після паралельного перенесення, рівні.

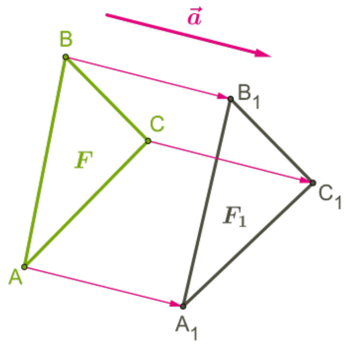


Рис.1.18

Аби при паралельному перенесенні побудувати зображення многокутника, достатньо побудувати зображення вершин цього многокутника.

Паралельне перенесення в координатах задається формулами

$$\begin{cases} x^{/} = x + a, \\ y^{/} = y + b. \end{cases}$$

Ці формули виражають координати $x^{/}$, $y^{/}$ точки фігури $F^{/}$ образу, у яку переходить точка (x; y) фігури F прообразу при паралельному перенесенні на вектор з координатами (*a;b*).

Властивості паралельного перенесення:

1) *Теорема.* Паралельне перенесення є рухом.

2) При паралельному перенесенні точки переміщуються вздовж паралельних прямих (або однієї прямої) на ту саму відстань.

3) Пряма переходить у паралельну пряму (або в себе); промінь переходить у співнапрямлений промінь. Два промені називаються співнапрямленими, якщо дані промені паралельні й лежать по один бік від прямої, що проходить через їх початки, або промені лежать на одній прямій і один із них є частиною другого. На рис. 1.21 промені OA і BC, OA і MA, BC і MA — співнапрямлені.

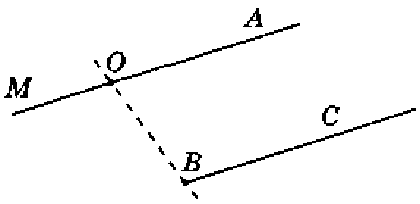


Рис.1.19

5) Які б не були точки A і A' існує єдине паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку A'.

Так як паралельне перенесення є рухом, то образом фігури F у паралельному перенесенні є фігура F', рівна фігури F.

Таким чином, при паралельному перенесенні кожен відрізок відображається на паралельний і рівний йому відрізок, трикутник – на рівний йому трикутник, коло – на рівне йому коло, кут − на рівний йому кут і т.д.

Корисними при розв'язуванні задач також є властивості:

1.На площині при паралельному перенесенні немає незмінних точок.

2. Незмінними у паралельному перенесенні є ті прямі, які паралельні до вектора переміщення.

3. При будь-якому паралельному перенесенні якщо точка C лежить між точками A і B, то точка образ C' точки C лежить між образами A' і B' точок A і B. [10, 12]

Висновки:

1.Композиція (послідовне виконання) двох осьових симетрій, осі яких паралельні, є паралельне перенесення.

2.Композиція двох центральних симетрій з різними центрами симетрії є паралельним перенесенням.

3.Композиція двох поворотів навколо різних центрів є поворот або паралельне перенесення.

1.8. Подібність і гомотетія

Перетворення фігури F на фігуру F_1 називається *перетворенням подібності,* якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в ту саму кількість разів (рис. 1.20).

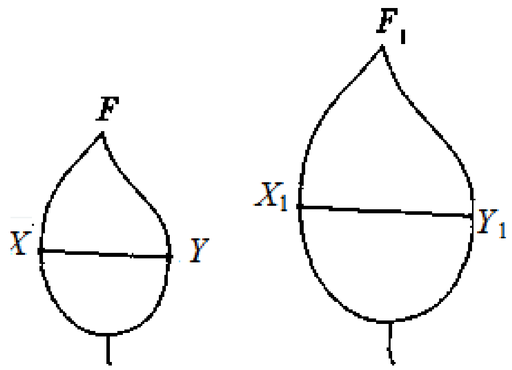


Рис. 1.20

Або іншими словами: якщо довільні точки X і Y фігури F при перетворенні подібності переходять у точки X_1 і Y_1 фігури F_1, то $X_1Y_1 = k \cdot XY$, де k — те саме число для будь-яких точок X і Y. Число k називається коефіцієнтом подібності.

Властивості перетворення подібності

1) При перетворенні подібності точки, які лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розташування.

2) Перетворення подібності переводять прямі у прямі; промені — у

промені; відрізки — у відрізки.

3) При перетворенні подібності кут переходить у рівний йому кут.

Фігура F_1 називається *подібною до фігури* F ($F_1 \sim F$), якщо існує відображення фігури F на фігуру F_1, при якому для будь-яких двох точок A і B фігури F та їх образів A_1 і B_1 фігури F_1 відношення відстаней AB і A_1B_1 є величиною сталою. Число $k = \frac{AB}{A_1B_1}$ називають *коефіцієнтом подібності*. Таким чином, фігури називаються подібними, якщо вони переходять одна в одну при перетворенні подібності.

4) Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом подібності $k = 1$.

5) Якщо фігура F_1 подібна фігурі F з коефіцієнтом подібності k, то фігура F подібна F_1 з коефіцієнтом подібності $1/k$.

6) Якщо фігура F_1 подібна фігурі F з коефіцієнтом подібності k_1, а фігура F_2 подібна F_1 з коефіцієнтом подібності k_2, то фігура F_2 подібна F з коефіцієнтом подібності k_1k_2. [10, 13]

Тому, кожен рух площини можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$. Рух є окремим випадком перетворення подібності.

Нехай F — дана фігура і O — фіксована точка (рис. 1.21).

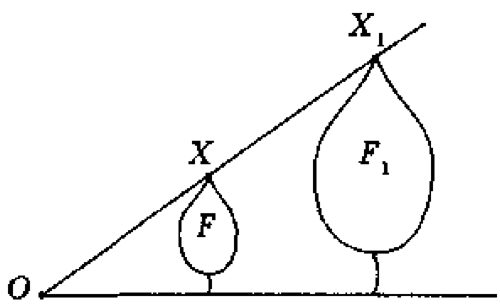
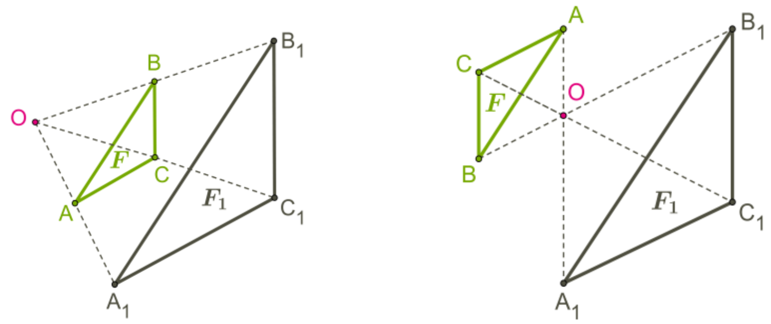


Рис.1.21

Через довільну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX_1, який дорівнює $k \cdot OX$, де k — додатне число. Перетворення фігури F, при якому кожна її точка X переходить у точку X_1 і $OX_1 = k \cdot OX$, називається *гомотетією* відносно точки O; число k — коефіцієнтом гомотетії; фігури F і F_1 — гомотетичними.

На рис. 1.22 показано гомотетію трикутників з центром в точки O. Якщо $k>0$, то отримаємо випадок зображений на рис. 1.22 а) , коли фігури розміщені по один бік від центра гомотетії; і якщо $k<0$, то − фігури симетричні відносно центра гомотетії.



а) б)

Рис.1.22.

Властивості гомотетії

1) Гомотетія з коефіцієнтом k є перетворенням подібності з коефіцієнтом k.

2) При гомотетії пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе; відрізок — у паралельний йому відрізок; кут — у рівний йому кут.

3) На координатній площині гомотетія точок $A(x;\ y)$ і $B(x_1;\ y_1)$ задається формулами: $\begin{cases} x_1 = kx, \\ y_1 = ky. \end{cases}$

4) Образом будь-якої точки в гомотетії з центром О і коефіцієнтом k є точка і при тому єдина.

5) Незмінною точкою площини в гомотетії є лише центр гомотетії, а незміними прямими – всі прямі, що проходять через центр гомотетії.

6) Гомотерія з центром О і коефіцієнтом -1 є центральною симетрією з центром в точці О.

7) Промінь, що виходить з центра гомотетії, переходить сам у себе, якщо $k>0$ і в симетричний відносно центра гомотетії якщо $k<0$.

8) Кожна пряма, що не проходить через центр гомотетії, переходить у паралельну їй пряму.

9) Гомотетія з коефіцієнтом 1 є тотожним перетворенням площини. [10, 13]

1.3. Характеристика та суть методу геометричних перетворень

Перетворення площини – рух і подібність – у багатьох випадках дозволяють економно і витончено розв’язувати геометричні задачі. Однак оволодіти методом геометричних перетворень нелегко: не будь-яка задача може бути розв’язана цим методом і потрібен певний досвід, щоб вибрати підходящий вид перетворення.

В залежності від того, яке геометричне перетворення ми використовуємо (паралельне перенесення, осьову симетрію, симетрію відносно точки, поворот чи гомотетію) метод відповідно й називається:

1. методом "паралельного перенесення",
2. методом «центральної симетрії»,
3. методом "осьової симетрії",
4. метод «повороту»
5. метод «гомотетії».

З’ясуємо суть кожного із вище вказаних методів.

Використання властивостей центральної симетрії до розв’язування геометричних задач називають *методом центральної симетрії*.

Метод симетрії відносно точки застосовується в задачах про центрально-симетричні фігури або про відрізки з серединою в даній точці і кінцями на двох даних прямих. [11]

Хід міркувань зводиться до:

а) знаходження положення прямої, що проводить через центр симетрії двох геометричних фігур;

б) відшукання образу точки на одній з фігур, якщо відомі центр їх симетрії і прообраз цієї точки.

Здебільшого цей метод ефективний тоді, коли серед даних елементів є відрізок, середина якого відома. [10]

Прикладами таких задач є задачі наступного змісту.

Задача. [1; 27]. Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії.

Доведення. Нехай точка *O* — точка перетину діагоналей паралелограма *ABCD.* За теоремою про точку перетину діагоналей паралелограма діагоналі *AC* та *BD* діляться нею пополам, тому точки *A* і *C, B* і *D* симетричні відносно точки О. Отже, відрізки *AB* та *CD, BC* та *DA* симетричні відносно точки О, яка є центром симетрії паралелограма.

Використання властивостей осьової симетрії до розв'язування задач у геометрії називають *методом осьової симетрії.*

Суть методу полягає в тому, що поряд з даними або шуканими точками (фігурами) розглядають і симетричні їм точки (фігури) відносно певним чином вибраної прямої. Успіх застосування методу осьової симетрії істотно залежить від вдалого вибору осі симетрії.

Оскільки бісектриса кута, діагоналі ромба, квадрата є осями симетрії відповідних фігур, то метод симетрії застосовується до задач, що включають у число даних елементів положення осей симетрії фігури. [10]

Метод симетрії відносно прямої використовується в задачах про геометричні фігури, що мають вісь симетрії, або в тих випадках, коли в задачі дано суму (різницю) лінійних або кутових елементів. При цьому учні повинні вміти знаходити:

а) образи геометричних фігур при заданій симетрії;

б) точки на фігурах, симетричних відносно деякої осі. [1]

Приклади задач, які можна розв'язати цим методом.

Задача 1. Діагоналі паралелограма ABCD лежать на прямих $y = 0$ та $y = x$. Середина однієї із сторін − точка M(3;1). Знайти координати вершин паралелограма.

Задача 2 . Довести, що два трикутники рівні, якщо сторона, прилеглий до неї кут і різниця двох інших сторін одного трикутника дорівнюють відповідним елементам другого.

Розв'язання двох сформульованих вище задач на обчислення та доведення подано в розділі 2.

Отже, застосування методу симетрії дозволяє дану в умові задачі фігуру (або її елементи) замінюємо фігурою, симетричною даній відносно деякої точки або прямої. [11]

Використання властивостей повороту до розв'язування задач у геометрії називають *методом повороту*.

Метод повороту навколо даної точки застосовується в тих задачах, в умовах яких можна виділити рівнобедрений трикутник з відомим кутом між рівними сторонами.

Успіх у його застосуванні залежить від рівня умінь:

а) будувати образи геометричних фігур (точки, відрізка, променя, прямої, трикутника тощо);

б) відшукувати центр повороту;

в) будувати відповідні при даному повороті точки на довільних фігурах, описаних задачними ситуаціями. [1]

Суть методу повороту полягає в тому, що, використовуючи поворот усієї фігури або її частини навколо вдало вибраного центра на певний кут, зближають дані елементи, дістають зручні їх розміщення, що полегшує розв'язання задачі на обчислення, доведення чи побудову.

Зокрема, метод повороту застосовують до розв'язування задач на побудову таких фігур, у яких відомий сталий кут і хоча б два різних відрізки, наприклад, до побудови правильних і рівнобедрених трикутників, квадратів, правильних многокутників. [10, 12]

Приклад задачі. *Задача.* На сторонах AB і AC трикутника ABC побудовані правильні трикутники ABM і ACH. Довести, що відстань між точками M і H дорівнює стороні BC.

Розв'язання. Розглянемо поворот площини навколо центра A на кут 60^0. Оскільки $\angle MAB = 60^0$ і AM = AB, то при цьому перетворенні точка M перейде в точку B (рис.1.23). Отже, поворот перетворює відрізок MH у відрізок BC, звідки за властивістю повороту MH = BC.

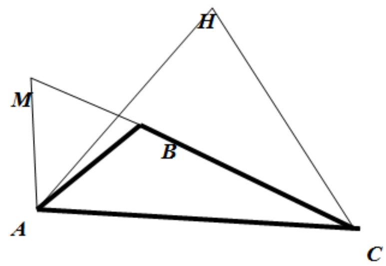


Рис.1.23

Інші застосування повороту до розв'язування планіметричних задач подано у розділі 2.

Застосування теорії паралельного перенесення до розв'язування задач на обчислення, доведення та побудову називають *методом паралельного перенесення.*

Властивості паралельного перенесення дають можливість спростити розв'язання ряду задач. Суть цього методу полягає в тому, що разом з даними і шуканими елементами фігури розглядають і їх образи у певним чином вибраному паралельному перенесенні. При цьому перенесення може стосуватися або всієї фігури, або окремих її частин. [12]

Метод паралельного перенесення здебільшого використовують для зближення розрізнених частин чотирикутників загального виду, трапецій, трикутників тощо. У всіх випадках вибір частини фігури, яку збираються перенести, і пари відповідних точок (вектори), що характеризують здійснюване паралельне перенесення, спираються на конкретну умову задачі.

При розв’язуванні задач цим методом інколи доводиться застосовувати не одне, а кілька паралельних перенесень. [10]

Приклади формулювання задач.

Задача 1. Якщо дві медіани трикутника рівні між собою, то трикутник рівнобедрений. Довести.

Задача 2. Побудувати трапецію за даними її основами та діагоналями.

Розв’язання сформульованих задач та застосування паралельного перенесення до розв’язування інших планіметричних задач подано у розділі 2.

Отже, метод паралельного перенесення застосовують з метою «зближення» елементів геометричної фігури.

Щоб добре оволодіти умінням використовувати його, треба навчитися будувати образи геометричних фігур при цьому перетворенні, «бачити» його в конкретних задачннх ситуаціях.

За навчальними підручниками і посібниками означення і властивості паралельного перенесення можна ввести в використанням декартових координат. Це істотно позначається на характеристиці типів відповідних задач, виділених у ньому. За змістом їх можна розподілити на групи:

а) виконання паралельного перенесення в координатах;

б) використання властивостей паралельного перенесення. [1]

Використання властивостей подібності та гомотетії до розв’язування задач у геометрії називають *методом подібності або гомотетії.*

Суть методу подібності (гомотетії). Величини відповідних кутів і відношення відповідних відрізків є інваріантами перетворення подібності. Тому метод подібності зручно використовувати для розв’язування таких задач, в умові яких, серед даних є кути і відношення відрізків. Суть цього методу при розв’язуванні задач на побудову полягає в тому, що спочатку будують допоміжну фігуру, подібну шуканій так, вона задовольняла всі умови задачі, крім однієї, яка характеризує лінійні розміри. Потім допоміжну фігуру відображають у їй подібну (шукану) так, щоб виконувалася відкинута умова. У результаті дістають шукану фігуру. [10, 13]

Метод подібності в задачах на побудову грунтується на тому, що спочатку будують допоміжну геометричну фігуру, подібну даній, але таку, яка не задовольняє лише одну з вимог задачі. Після цього перетворюють знайдену фігуру у подібну їй так, щоб задовольнити невикористану вимогу.

Цей метод застосовують найчастіше до задач, в яких задано довжину одного з відрізків, а інші дані, що визначають шукану фігуру,— або кути, або відношення інших відрізків. Щоб серед даних умовою задачі величин вибрати ті, за якими можна побудувати допоміжну фігуру, подібну шуканій, учневі треба знати, якими величинами можна задати форму геометричної фігури. Такими величинами є:

а) для трикутника —величини двох кутів, відношення двох сторін і величина кута між ними, відношення трьох сторін, відношення трьох медіан, відношення трьох висот:

б) для прямокутника — відношення суміжних сторін, відношення діагоналі і сторони, кут між діагоналями;

в) для паралелограма —відношення двох сторін і величина кута між ними, відношення діагоналей і величина кута між ними, відношення діагоналей і величина одного з його кутів;

г) для ромба —величина його кута, відношення діагоналей. [13]

Наприклад. Довести, що медіана трикутника менша півсуми сторін, між якими вона розташована. [10]

Розв’язання. Побудуємо точку D, симетричну точці C відносно точки M як показано на рисунку 1.24.

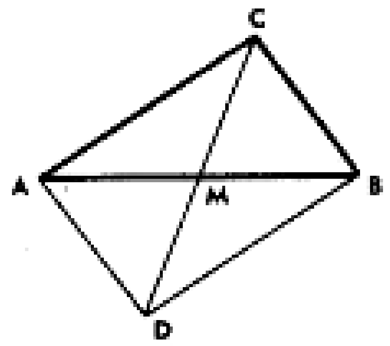


Рис.1.24

Так як точка М – середина відрізка AB, то відрізок AD симетричний відрізку BC. Ми отримали трикутник ACD в якому $CD=2CM$, $AD=BC$.

Отже, $2CM<AC+BC$ або $m_c<(a+b)/2$, де m_c=CM, a=BC, b=AC.

Інші приклади розв’язування планіметричних задач методом гомотетії подані в розділі 2.

Отож, метод гомотетії зручно застосовувати до розв’язування задач на побудову, в яких заданими елементами, що визначають фігуру, є:

1) Один лінійний елемент (сторона, бісектриса, висота, медіана, радіус вписаного чи описаного кола);

2) Сума двох лінійних елементів (сума двох медіан, бісектрис, висот, чи сума висоти і медіани тощо);

3) Відношення лінійних елементів;

4) Кути, які не змінюють величини при подібному перетворенні;

5) Коли потрібно одну фігуру вписати в іншу. У цьому випадку відкидають одну з умов розміщення шуканої вписаної фігури і будують фігуру, подібну до шуканої. Такою умовою часто буває те, що одна з вершин вписаної фігури не належить відповідній стороні даної фігури. Тоді допоміжну фігуру геометричним перетворенням переводять у шукану вписану.

Як бачимо, метод гомотетії застосовують до розв’язування таких задач на побудову, умову яких можна розбити на дві частини, одна з яких визначає форму фігури (кути, відношення відрізків), а інша – її розміри, положення відносно даних ліній і точок.

Допоміжну фігуру краще будувати так, щоб вона була не лише подібною до шуканої, ай подібно з нею розміщена, зокрема, щоб допомідна і шукана фігури були гомотетичними. При цьому важливо вдало вибрати центр гомотетії. Коефіцієнт гомотетії (подібності) дорівнює відношенню будь-якої пари відповідних відрізків шуканої і допоміжної фігур. Слід пам'ятати властивості відношень двох величин. Наприклад, якщо відрізки *a,b,c, …* фігури F відповідають відрізки $a^/,b^/,c^/$ фігури $F^/$, то коефіцієнт подібності дорівнює відношенням: [10, 13]

$$\frac{a}{a^/}=\frac{b}{b^/}=\frac{c}{c^/}=\frac{a+b}{a^/+b^/}=\frac{a-b+c}{a^/-b^/+c^/}=\cdots$$

Як відомо, навчання учнів розв'язанню геометричних задач із використанням геометричних перетворень представляють особливі труднощі. Це пов'язано з тим, що розв'язування задач даним методом не можна звести до визначених алгоритмів або вказівок. Розв'язання кожної задачі представляє творчий процес. [19, 30]

Розв'язування задач методом геометричних перетворнень буде результативним при чіткому розумінні змісту властивостей кожного із перетворень площини. Відповідно, властивості геометричних перетворень використовуються ефективно до розв'язування задач лише тоді, коли учні вміють:

а) будувати геометричні фігури при конкретних видах перетворень;

б) визначати вид перетворення за окремими елементами геометричних фігур;

в) встановлювати (обчисленням, побудовою) положення відповідних точок при певному виді перетворення. [1]

Для формування цих умінь корисно скористатися розв’язуванням задач на побудову. Задачі цього виду можна умовно поділити на групи:

1) побудова відповідних точок при заданому геометричному перетворенні;

2) побудова фігури, для якої відповідне перетворення треба знайти.

Тому, перш ніж приступити до навчання розв’язувати задачі даними методами, особливу увагу необхідно приділити поетапному формуванню наступних умінь:

1) будувати образи фігур при переміщені і гомотетії;
2) знаходити відповідні в перетвореннях точки на даних відповідних у тому ж перетворені фігурах.
3) виділяти елементи, що визначають перетворення: осі симетрії, центр і кут повороту, напрям і відстань паралельного перенесення, коефіцієнт гомотетії;
4) будувати відповідні в перетвореннях точки на заданих фігурах. [1]

Для виявлення рівня сформованості уміння призначені діагностичні задачі, які варто запропонувати учням перед зразками розв’язання задач кожним методом.

І тільки переконавшись, що учні вільно володіють вказаними методами, можна приступити до навчання розв’язання задач.

Отже, суть методу геометричних перетворень полягає в розгляді поряд з даними фігурами їхніх образів, отриманих за допомогою певного перетворення.

Використання цих методів для розв’язування задач на обчислення, доведення та побудову наводиться у розділі 2. Основними джерелами для підбору задач, які розглядаємо у 2 є [1, 10, 11, 12, 13, 27].

Висновки до розділу 1

Геометричні перетворення площини спрощують розв'язуння багатьох планіметричних задач та виступають потужним інструментом їх розв'язання. Основна ідея цього методу полягає в тому, що фігура, яка розглядається в умові задачі, перетворюється в «нову» фігуру, яку дістали з даної за допомогою певного геометричного перетворення; з'ясовуємо властивості «нової» фігури і розв'язавши задачу для перетвореної фігури, потім оберненим перетворенням повертаємося до початкової фігури. Так знаходимо шлях розв'язування задачі.

У деяких задачах перетворення застосовуємо не до всієї фігури, а лише до деякої її частини.

Залежно від того, яке перетворення застосовується, розрізняють різновидності методу геометричних перетворень: метод симетрії, метод повороту, метод паралельного перенесення та метод подібності.

Метод симетрії досить часто застосовують у процесі розв'язування завдань на знаходження мінімальних значень певних величин.

Метод повороту корисно застосовувати тоді, коли в умові задачі дано трикутник з відомим кутом між рівними сторонами (рівносторонній, рівнобедрений прямокутний трикутник тощо) або дано фігуру, в якій можна виділити зазначений трикутник.

Метод паралельного перенесення дозволяє зблизити віддалені один від одного частини фігури і цим спростити задачу.

Метод подібності дозволяє розглядати не задану в умові задачі фігура, а їй подібну. Найчастіше цей метод використовується у задачах на побудову. Умова задачі дає змогу побудувати фігуру подібну шуканій або дає можливість «помножити» певним способом побудовану фігуру і, якщо потрібно, помістити її у потрібне положення. [18]

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Застосування методу геометричних перетворень до розв'язування задач на обчислення

2.1.1. Метод осьової та центральної симетрії в задачах на обчислення

Задача1. Записати рівняння прямої, симетричної прямій $y = 2x - 3$ відносно початку координат.

Розв'язання. Використавши формулу симетрії з центром у початку координат, дістанемо рівняння прямої, симетричної даній відносно початку координат: $y = 2x + 3$.

Відповідь. $y = 2x + 3$.

Задача 2. Дане коло має рівняння $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Записати рівняння кола, симетричного відносно початку координат даному колу. *Розв'язання.* Центри кіл, симетричних відносно початку координат, також симетричні, а радіуси однакові. Центром даного кола є точка C (–4; 1), тому її образом у симетрії з центром у початку координат буде точка C' (4; –1). Рівняння цього кола має вигляд $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Відповідь. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Задача 3. Визначити площу земельної ділянки, яка має форму трапеції ABCD, якщо її бічна сторона AB перпендикулярна до основи AD і має довжину 10 м, а середина другої бічної сторони CD — точка E — знаходиться від вершини A на відстані 18 м.

Розв'язання. Нехай трапеція ABCD є зображенням даної земельної ділянки: AB = 10 м, AB $\perp$ AD, E — середина DC, тобто CE = ED, AE = 18 м (рис.2.1).

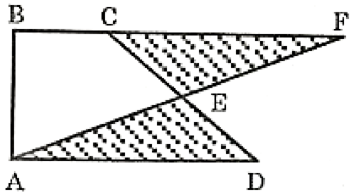


Рис. 2.1

З’єднаємо точку A з серединою сторони CD точкою E. Приймемо точку E за центр симетрії, тоді $C=Z_E(D)$. Побудуємо точку $F=Z_E(A)$, тоді за властивостями центральної симетрії CF ||AD і CF = AD. Оскільки трикутники AED і FEC симетричні відносно точки E, то ∆AED = ∆FEC. Отже, площа трапеції ABCD дорівнює площі прямокутного ∆ ABF, у якого AB = 10 м і AF = 36 м.

За теоремою Піфагора

$\sqrt{AF_2 - AB_2} = \sqrt{362 - 102} = \sqrt{1196} \approx 35.$

$S_{DABF} = 12 \cdot 10 \cdot 35 = 175.$

Відповідь. 175 м^2.

4. Діагоналі паралелограма ABCD лежать на прямих *y = 0* та *y = x.* Середина однієї із сторін − точка M(3;1). Знайти координати вершин паралелограма.

Розв’язання. У прямокутній системі координат пряма *y = 0* – це вісь абсцис, а пряма *y = x* – бісектриса першого і третього координатних кутів. Вони перетинаються у початку координат. Отже, центром симетрії шуканого паралелограма є початок координат (рис.2.2)

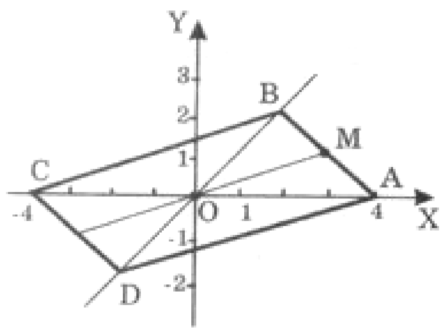


Рис.2.2

Дві протилежні вершини паралелограма лежать на осі абсцис, а дві інші – на прямій $y = x$. Нехай на осі абсцис лежить точка A($x;0$), а на бісектрисі $y = x$ – точка B($x_1;y_1$), де $x_1=y_1$.

Координати середини відрізка через координати кінців відрізка визначаються рівностями $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$.

За умовою задачі маємо $\frac{x+x_1}{2} = 3$, $\frac{0+x_1}{2} = 1$.

З останніх двох рівнянь одержимо x_1=2, x=4.

Отже, A(4;0), B(2;2). За властивостями симетрії з центром у початку координат C(-4;0), D(-2;-2).

Відповідь. A(4;0), B(2;2), C(-4;0), D(-2;-2).

Задача 5. Осями симетрії ромба є осі координат. Серединою однієї сторони ромба є точка (2;3). Знайти координати вершин ромба.

Оскільки осі координат є осями симетрії ромба, а осі симетрії містять діагоналі ромба, то його вершини лежать на осях координат.

Нехай ABCD – ромб, його вершини A,C лежать на осі абсцис, а вершини B,D – на осі ординат (рис.2.3).

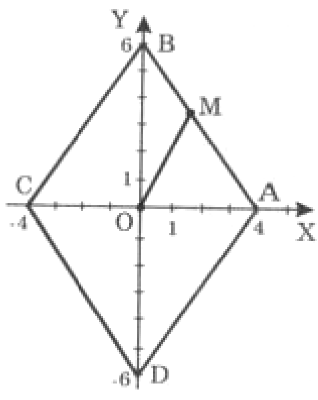


Рис.2.3

Вершини ромба матимуть координати *A(x;0), B(0;y), C(-x;0), D(0;-y)*. Розглянемо прямокутний трикутник ABO, точка M(2;3) є серединою гіпотенузи AB. За властивістю медіани прямокутного трикутника, яка виходить з вершини прямого кута,

$$OM = MA = MB = \frac{1}{2}AB$$

Відстань точки M від початку координат

$OM = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$

Оскільки AM=OM, то

$AM^2 = (x-2)^2 + 9 = 13.$

Звідки x=4. Визначена точка A(4;0), відповідно C(-4;0).

Оскільки BM=OM, то

$BM^2 = 4 + (y-3)^2 = 13.$

Звідки y=6. Визначена точка B(0;6), відповідно D(0;-6).

Відповідь. A(4;0), B(0;6), C(-4;0), D(0;-6).

Методом осьової симетрії також можна знайти координати вершин прямокутника, який задано в задачі наступного змісту.

Діагоналі прямокутника лежать на прямих $y = 3x$ та $y = -3x$. Одна із сторін проходить через точку (2;6) (див.рис.2.4).

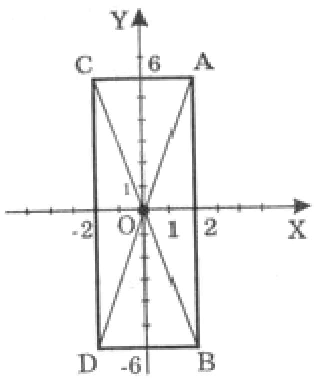


Рис.2.4

Задача 6. На відрізку AE взято точки B,C,D так, що AB=DE=2, BC=CD=1. З точки M, яка не лежить на прямій AE, відрізки AB, BC, CD, ED видно під рівними кутами. Знайти кут AME.

Розв'язання. Нехай на відрізку AE взято точки B,C,D такі, що AB=DE=2, BC=CD=1 (рис.2.5). Проведемо через точку C пряму CN, перпендикулярну відрізкуAE. Тоді точки B і D, A і E попарно симетричні відносно прямої CN=*l*. Тому точка M повинна лежати на прямій CN.

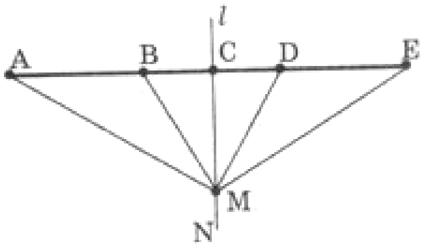


Рис.2.5

За умовою задачі $\angle$ AMB=$\angle$ MBC=$\angle$ CMD=$\angle$ *D*ME.

Звідси випливає, що прямі MB і MD є бісектрисами кутів AMC і EMC прямокутних трикутників AMC і EMC. За властивістю бісектриси MB кута AMC трикутника AMC

$$\frac{MC}{AM}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$$

Отже, катет MC вдвічі менший гіпотенузи AM, тому $\angle$ MAB=30^0.

$\angle$ EMC = 60^0.   Отже, $\angle$ AME = $\angle$ AMC + $\angle$ EMC = 120^0.

Відповідь. 120^0.

2.1.2. Метод повороту в задачах на обчислення

Задача 1. Знайти координати точок, які є образами точок A(3;0), B(0;-2), C(-3;-4), D(-1;4) при повороті навколо початку координат на кут 90^0 (проти руху годинникової стрілки).

Розв'язання. Знайдемо координати точок без використання аналітичного задання повороту.

У прямокутній системі координат кут *XOY* дорівнює 90^0. Тому при повороті навколо початку координат на кут 90^0 вісь абсцис переходить у вісь ординат, і навпаки вісь ординат − у вісь абсцис протилежного напрямку до осі OX.

При цьому абсциси точок переходять у ординати їх образів, а ординати – в абсциси з урахуванням знаків у відповідній четверті.

Точка A(3;0) лежить на додатній півосі абсцис, томі її образ $A^{/}$ в даному повороті перейде на додатну піввісь ординат, і при цьому $OA=OA^{/}=3$. Отже, $A^{/}(0;3)$ (рис.2.6).

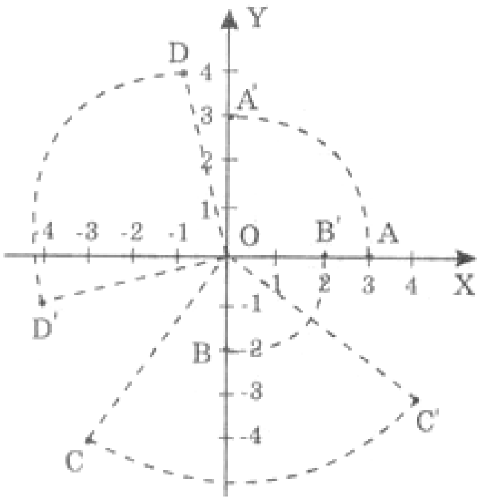


Рис. 2.6

$$B^{/} = R^{O}_{90^0}(B),\ \ C^{/} = R^{O}_{90^0}(C),\quad D^{/} = R^{O}_{90^0}(D).$$

Тоді, використовуючи попередні міркування, $B^{/}(2;0)$, $C^{/}(4;-3)$, $D^{/}(-4;-1)$.

Відповідь. $A^{/}(0;3)$, $B^{/}(2;0)$, $C^{/}(4;-3)$, $D^{/}(-4;-1)$.

Задача 2. Знайти координати точки перетину прямої $3x+2y-5=0$ і образа прямої $y=x-3$ при повороті навколо початку координат на кут 90^0.

Розв'язання. Враховуючи, що при даному повороті $x^{/}=-y$, $y^{/}=x$, образом прямої $y=x-3$ буде пряма $y=-x+3$.

Координати точки перетину знайдемо, розв'язавши систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} y = -x + 3, \\ 3x + 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

Відповідь. (-1;4).

Задача 3. На гіпотенузі прямокутного трикутника зовні побудовано квадрат. Знайти відстань від вершини прямого кута трикутника до центра квадрата, якщо сума довжин катетів трикутника дорівнює a.

Розв'язання. Нехай О – центр квадрата ABMN (див.рис.2.7).

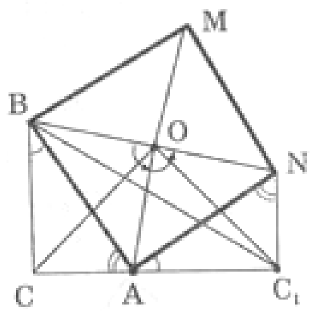


Рис. 2.7

Поворот навколо точки О на 90^0 відображає точку В на точку А, а точку А – на точку N. Якщо цим же поворотом точка С відображається на точку C_1, то точки С, А, C_1 лежать на одній прямій, бо $\angle CAB + \angle BAN + \angle ANC_1 = 180^0$. Трикутник АВС дорівнює трикутнику ANC_1, і тому $AC_1=BC$, $CC_1=CA+BC=a$.

Трикутник COC_1 – прямокутний рівнобедрений, звідси

$2CO^2=a^2$ і

$$CO = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2.1.3. Метод паралельного перенесення в задачах на обчислення

Задача 1. По один бік від залізничної колії розміщені села А і В (рис.2.8). Де потрібно побудувати залізничну платформу довжиною $MN=a$, щоб загальна довжина дороги АМ і BN була найменшою?

Розв'язання. Оскільки довжина платформи є величиною сталою, то її можна виключити із загальної довжини шляху AM+MN+BN. Для розв'язання задачі достатньо виконати паралельне перенесення $T_{\vec{a}}$ (довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює *а*) точки А, тоді $A^{/} = T_{\vec{a}}(A)$, $N^{/} = T_{\vec{a}}(M)$. Тепер задача полягає у знаходженні на залізничній колії *l* такого пункту N, щоб шлях A_1N+NB був найменший. Такий пункт, як відомо, можна знайти, користуючись методом симетрії відносно прямої *l*: шукана точка $N = l \times BA_1^{/}$, $A_1^{/} = S_l(A_1)$.

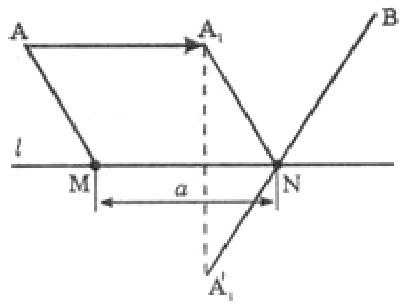


Рис.2.8

Відклавши від точки N відрізок NM=*а* у напрямі A_1A, дістанемо точку M. Цим самим знайдемо положення платформи MN.

Задача 2. Яким паралельним перенесенням можна відобразити точку А (4;-3) на точку $A^{/}$ (1;2)?

Розв'язання. Використавши формули паралельного перенесення:

$$\begin{cases} x^{/} = x + x_0, \\ y^{/} = y + y_0 \end{cases}$$

отримаємо, $x_0=1-4=-3$, $y_0=2+3=5$.

Шуканим є паралельне перенесення $\vec{a}(-3; 5)$.

Координатні формули матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x^{/} = x - 3, \\ y^{/} = y + 5. \end{cases}$$

Задача 3. Сума довжин основ трапеції дорівнює 21 см, а довжини діагоналей дорівнюють 13 см і 20 см. Обчислити площу трапеції.

Розв'язання.

Нехай у трапеції ABCD AD+BC=21 см, AC=13 см, BD=20 см (див.рис.2.9).

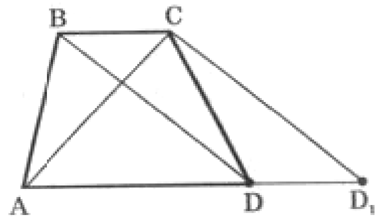


Рис. 2.9

Виконаємо паралельне перенесення діагоналі BD на вектор $\overrightarrow{BC}$. Тоді точка B перейде в точку C, а точка D – у D_1. Тоді $CD_1=BD=20$, $DD_1=BC$, тому $AD_1=21$ (см). Отже, у трикутнику ACD_1 відомі усі сторони, його площу можна обчислити за формулою Герона.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6} = 126,$$

$$\text{де} \quad p = \frac{P}{2} = \frac{21+13+20}{2} = 27.$$

Площа трапеції ABCD дорівнює площі трикутника ACD_1 ($S_{ABCD} = S_{ACD_1}$).

Відповідь. 126 см^2.

Задача 4. У рівнобічній трапеції довжина більшої основи дорівнює 20 см, довжина бічної сторони дорівнює 8 см, а величина одного із кутів 60^0. Обчислити довжину меншої основи.

Розв'язання. Використовуючи паралельне перенесення сторони AB на вектор $\overrightarrow{BC}$ (рис.2.10), отримаємо рівносторонній трикутник A_1CD.

$A_1D=8$ см. $BC=AA_1=AD-A_1D=20-8=12$ (см).

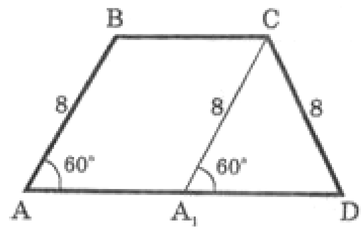


Рис.2.10

Відповідь. 8 см.

Задача 5. Два кола радіусів R і 3R дотикаються зовні. Знайти площу фігури, обмеженої дугами цих кіл і їх спільною зовнішньою дотичною.

Розв'язання.

Покладемо R=1, тоді маємо коло K(0;3) і коло $K_1(0;1)$, до них проведена зовнішня дотична AB, де A і B – точки дотику (див.рис.2.11).

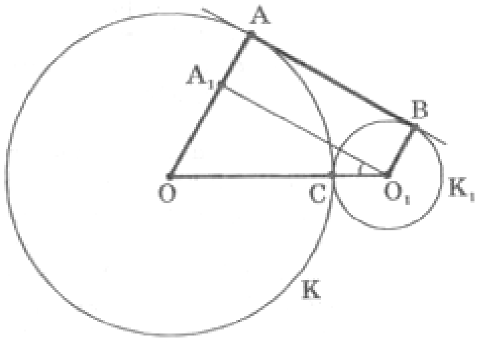


Рис.2.11

Площу фігури ABC, обмеженої дугами AC і BC кіл та дотичною AB, знайдемо як різницю площі трапеції ABO_1O і площ секторів AOC, BO_1C кіл. Щоб знайти висоту трапеції, виконаємо паралельне перенесення дотичної AB на вектор $\overrightarrow{BO_1}$, дістанемо відрізок $O_1A_1 \perp OA$.

Трикутник A_1O_1O – прямокутний, у ньому катет $OA_1=2$, гіпотенуза $OO_1=4$ (при R=1), тому $A_1O_1 = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Тоді площа трапеції ABO_1O буде ььь$S_1 = \frac{3+1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Оскільки в прямокутному трикутнику A_1O_1O катет A_1O удвічі менший за гіпотенузу O_1O, то $\angle A_1OO_1=60^0$, а $\angle OO_1A_1=30^0$. Тоді площа сектора AOC дорівнює $\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$, а площа сектора BO_1C дорівнює $\frac{\pi}{3}$ (бо $\angle BO_1C=120^0$).

Площа шуканої фігури дорівнює

$$S = 4\sqrt{3} - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}.$$

Відповідь. $4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}$.

2.1.4. Метод подібності та гомотетії в задачах на обчислення

Задача 1. Через середину E висоти BD рівнобедреного трикутника ABC (AB=BC) паралельно бічній стороні AB проведена пряма, яка перетинає сторони AC і BC трикутника ABC відповідно в точках M і K. Обчислити периметр трикутника MKC, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 40 см.

Розв'язання. На рисунку 2.12 зображено трикутник ABC, в якого AB=BC, $BD \perp AC$, BE=ED, MK||AB, точка E належить MK. Оскільки ME||AB і BE=ED, то відрізок ME –середня лінія трикутника ABD, тому AM=MD. Звідси маємо, що $\mathrm{MC} = \frac{3}{4}\mathrm{AC}$. Трикутник CMK є образом трикутника ABC в гомотетії з центром C і коефіцієнтом $k = \frac{3}{4}$: $\Delta CMK = H_C^{\frac{3}{4}}(\Delta ABC)$.

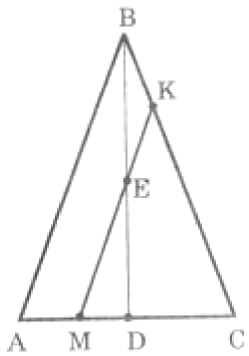


Рис. 2.12

За властивостями гомотетії периметр трикутника MKC, дорівнює $\frac{3}{4}$ периметра трикутника ABC, тобто 30 см.

Відповідь. 30 см.

Задача 2. У гострий кут, рівний 60^0, вписано два кола, які зовні дотикаються одне до одного. Радіус меншого кола *r*. Знайти радіус більшого кола.

Розв'язання. За умовою задачі $\angle$ BMD = 60^0, $O_1A = O_1C = r$ (див.рис.2.13).

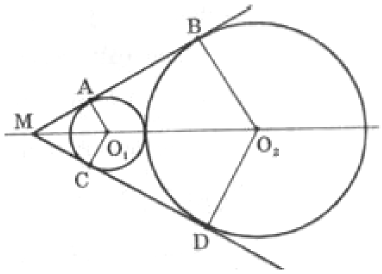


Рис.2.13

Нехай $O_2B= O_2D=R$ – шуканий радіус. Тоді, оскільки центри вписаних кіл O_1 і O_2 вписаних у даний кут кіл лежать на бісектрисі кута, то $\angle AMO_1 = 30^0$. Тоді у прямокутному трикутнику AO_1M гіпотенуза $MO_1=2r$, а гіпотенуза прямокутного трикутника BMO_2 $MO_2=2R$.

Трикутники MO_1A і MO_2B − гомотетичні з центром гомотетії M, тому

$$\frac{AO_1}{BO_2}=\frac{MO_1}{MO_2},$$

або $\frac{r}{R}=\frac{2r}{3r+R}$.

Звідки $3r^2 + Rr = 2\,Rr$, $3r^2 = Rr$, $R = 3r$.

Відповідь. $3r$.

Задача 3. Для обчислення висоти дерева (чи іншого предмета) на деякій відстані від нього становлять віху, вищу за ріст людини, що вимірює, відходять від неї по прямій з деревом до тих пір, поки вершина дерева, верхушка віхи і око спостерігача будуть на одній прямій. Знайти висоту дерева, якщо зріст людини 1,7 м, висота віхи – 2 м, а відстань від дерева до віхи 50 м, від віхи до людини – 1,5 м.

Розв’язання. Розглянемо рисунок 2.14.

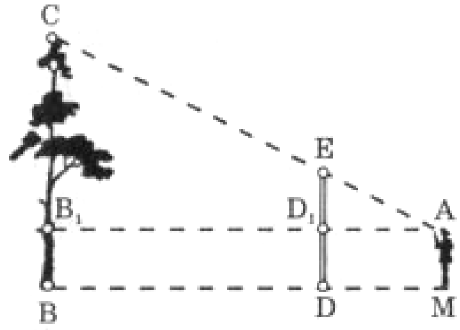


Рис.2.14

AM=1,7 м, DE=2 м, BD=50 м, DM=1,5 м, DD_1=1,7 м, D_1E=0,3 м.

З подібності трикутників AD_1E і AB_1C маємо $\frac{AD_1}{D_1E} = \frac{AB_1}{B_1C}$.

Звідки $B_1C = \frac{AB_1 \cdot D_1E}{AD_1}$.

$AB_1 = AD_1 + D_1B_1$ = MD+DB = 1,5+50 = 51,1 (м).

AD_1 = MD = 1,5 (м), D_1E = 0,3 (м).

Тоді, $B_1C = \frac{51{,}5 \cdot 0{,}3}{1{,}5} = 10{,}3$ (м).

Висота дерева BC = $BB_1 + B_1C$ = AM + B_1C = 1,7 + 10,3 =12 (м).

Відповідь. 12 м.

Задача 4. У прямокутний трикутник з катетами *a* і *b* вписано квадрат, який має з трикутником спільний прямий кут. Знайти периметр квадрата.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC ∠ C= 90^0, AC= *b*, BC=*a*, CMLN – вписаний квадрат (див.рис.2.15).

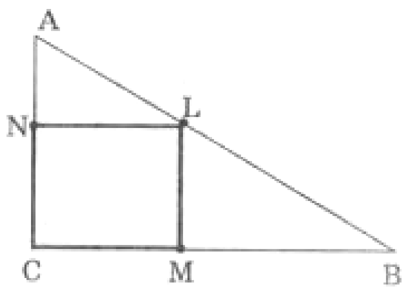


Рис.2.15

Оскільки $\Delta ANL \sim \Delta ACB$, то $\frac{NL}{BC} = \frac{AN}{AC}$. Або $\frac{NL}{a} = \frac{b-NL}{b}$, $NL = \frac{ab}{a+b}$.

Периметр квадрата P_{CNML}=4NL= $\frac{4ab}{a+b}$.

Відповідь. $\frac{4ab}{a+b}$.

За допомогою методу гомотетії також можна розв'язати цікаву прикладну задачу наступного змісту.

Задача 5. Шлагбаум має плечі довжиною 4 м і 1 м. На скільки піднявся кінець довгого плеча шлагбаума, якщо його короткий кінець опустився на 60 см? (Початковим вважати горизонтальне положення шлагбаума).

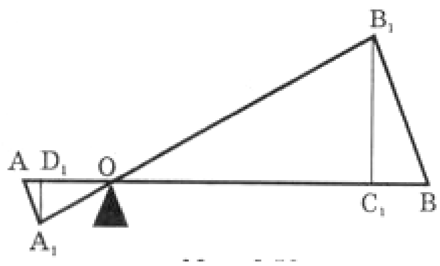


Рис.2.16

Вказівка. З подібності трикутників OAA_1 і OBB_1 знайдемо висоту трикутника OBB_1: $B_1C_1=4\cdot 0{,}6=2{,}4$ (м).

2.2. Застосування методу геометричних перетворень до розв’язування задач на доведення

2.2.1. Метод осьової та центральної симетрії в задачах на доведення

Задача 1. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться у відношенні 2:1.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC медіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці O (див. рис.2.17).

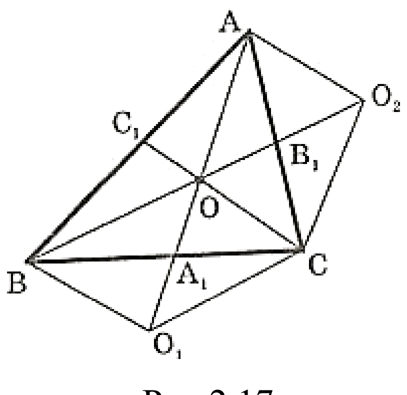


Рис.2.17

Проведемо пряму CO і розглянемо центральну симетрія з центром A_1. У ній образом трикутника BO_1C, який разом із своїм прообразом утворюють паралелограм CO_1BO. Аналогічно знайшовши образ трикутника COA у центральній симетрії з центром B_1 дістанемо паралелограм $AOCO_2$.

Звідси маємо, $CO_1 \parallel OB$ і $CO_1 \parallel O_2O$, $O_2C \parallel OA$ і $O_2C \parallel OO_1$. Тому чотирикутник CO_2OO_1 – паралелограм і $CO_1= OO_2$. Врахувавши, що $CO_1=OB$, дістанемо $OO_2= OB$. Крім того, $CO \parallel AO_2$. Отже пряма CO перетинає сторону AB у такій точці C_1, що OC_1 є середньою лінією трикутника ABO_2, тому $AC_1=C_1B$ і відрізок CC_1 є третьою медіаною трикутника ABC, яка теж проходить через точку O перетину двох перших. Враховуючи, що $OB_1=B_1O_2$ і $OB=OO_2$, маємо $BO : OB_1 = 2 : 1$. Аналогічно доводиться , що й інші медіани точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини. *Доведено.*

Задача 2. Два рівних кола дотикаються одне до одного у точці M. Довести, що на кожній прямій, яка проходить через точку M, ці кола відтинають рівні між собою хорди.

Доведення. Два даних кола симетричні відносно точки їх дотику M (див.рис.2.18)

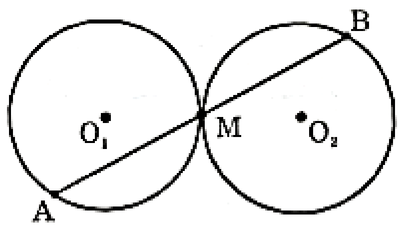


Рис.2.18

Це випливає з того, що ці кола рівні між собою і їх центри симетричні відносно точки M. Точки A і B, які лежать на одній прямій з центром симетрії M і належать симетричним колам, також симетричні відносно точки M. Отже, AM = BM. Ці міркування справедливі для кожної прямої, яка проходить через точку M і перетинає дані кола. *Доведено.*

Задача 3. Дві прямі, які проходять через точку перетину діагоналей паралелограма, перетинають його сторони відповідно в точках M і L, N і K. Довести, що чотирикутник $MLNK$ — паралелограм.

Доведення. Оскільки точка O перетину діагоналей паралелограма є центром його симетрії, то точки M і L, N і K — взаємно симетричні відносно точки O, тобто чотирикутник $MNLK$ має центр симетрії O і його діагоналі точкою O поділяються навпіл, тому чотирикутник $MNLK$ — паралелограм (див.рис.2.19).

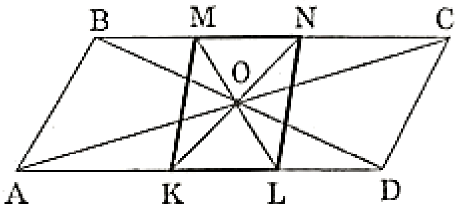


Рис.2.19

Задача 4. Довести, що медіана трикутника менша півсуми сторін, що виходять з нею з однієї вершини, і більша різниці між цією півсумою і половиною сторони, до якої медіана проведена.

Доведення. Нехай BM — медіана трикутника ABC (рис. 2.20).

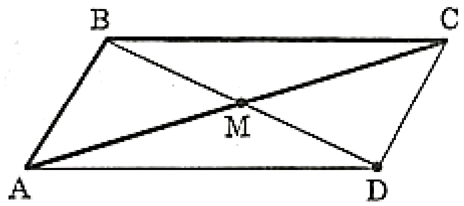


Рис. 2.20

Побудуємо точку D, симетричну точці B відносно точки M. Чотирикутник $ABCD$ —паралелограм. З трикутника BCD випливає, що $2BM<BC+CD$, звідси

$BM<(BC+CD)/2$ або $BM<(BC+\mathrm{AB})/2$.

З трикутників AMB і BMC маємо $BM+AC/2 >AB$ і $BM+ AC/2>BC$. Додавши почленно дві останні нерівності і поділивши на 2, дістанемо

$$BM > \frac{AB + BC}{2} - \frac{AC}{2}.$$

Що й потрібно було довести.

Задача 5. Довести, що два трикутники рівні, якщо сторона, прилеглий до неї кут і різниця двох інших сторін одного трикутника дорівнюють відповідним елементам другого.

Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ − задані трикутники:
$AC=A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AB-BC = A_1B_1 - B_1C_1$ (див.рис.2.21).
Задамо осьові симетрії бісектрисами l_1, l_2 відповідно кутів B і B_1.
Побудуємо $C' = S_{l_1}(C)$, $C_1' = S_{l_2}(C_1)$. Тоді $\Delta ACC' = \Delta A_1C_1C'_1$ ($AC= A_1C_1$, $AC' = A_1C'_1$), а це означає, що існує переміщення p, яке відображає $\Delta ACC'$ у $\Delta A_1C_1C'_1$: $A_1=p(A)$, $C_1=p(C)$, $C'_1 =p(C')$.

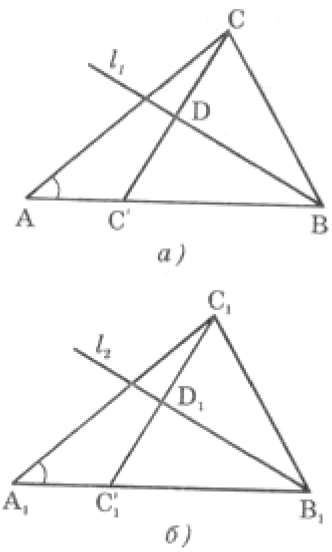


Рис.2.21

При такому переміщенні $D_1=p(D)$, точки D і D_1 –середини відповідно відрізків CC_1 і $C_1C'_1$, $l_2=p(l_1)$ і $A_1C'_1=p(AC')$.

Оскільки точка B є перетином прямих AC' і l_1, а точка B_1 є перетином образів прямих $A_1C'_1$ і l_2 цих прямих, то $B_1=p(B)$.

Отже, $\Delta A_1B_1C_1= p\ (\Delta ABC)$, а це означає, що $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$. *Доведено.*

Задача 6. Довільне коло перетинає одне з двох концентричних кіл у точках A і B, а друге – у точках C і D. Довести, що хорди AB і CD паралельні, AC=BD, AD=BC.

Доведення. Нехай $K\ (O,\ R)$, $K_1\ (O_1,\ R_1)$, $K_2\ (O_1,\ R_2)$ – дані кола, O і O_1 – їх центри, A і B – точки перетину кіл K і K_1, C і D – точки перетину кіл K і K_2 (див.рис.2.22).

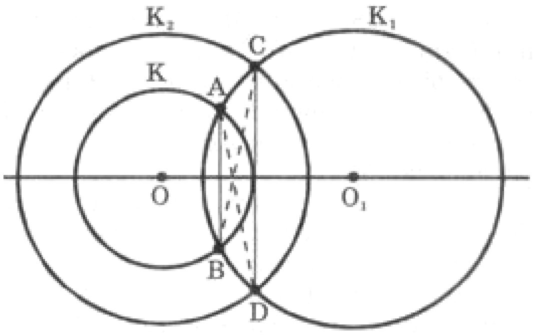


Рис. 2.22

Тоді пряма OO_1 є віссю симетрії даних кіл. У цій симетрії

$B = S_{OO_1}(A), \quad D = S_{OO_1}(C)$.

Звідси $AB \perp OO_1$, $CD \perp OO_1$, отже $AB \parallel CD$.

$BD = S_{OO_1}(AC) \Rightarrow BD = AC, \qquad BC = S_{OO_1}(AD) \Rightarrow BC = AD$.

Чотирикутник ABCD – рівнобедрена трапеція. *Доведено.*

2.2.2. Метод повороту в задачах на доведення

Задача 1. Точка B лежить між точками A і C. У півплощині з межею AC побудовані рівносторонні трикутники ABM і BNC. Точки K і D – середини відрізків AN і MC. Довести, що ΔBKD рівносторонній.

Доведення. На рисунку 2.23 маємо рівносторонні трикутники ABM і BNC, K – середина відрізка AN і D – середини відрізка MC.

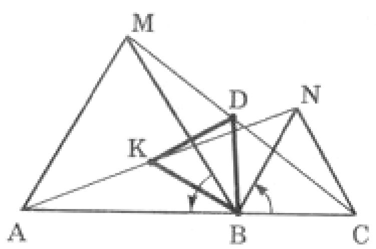


Рис.2.23

Поворотом навколо точки B на кут 60^0 точки M і C відображаються відповідно на точки A і N, тому відрізок MC цим же поворотом відображається на відрізок AN.

Оскільки поворот зберігає відношення відрізків, то $R_B^{60^0}(D) = K$.

Звідси маємо, BK=BD і $\angle$ KBD = 60^0. Тобто, Δ BKD − рівносторонній.

Задача 2.

Чотирикутник ABCD – ромб, у якого $\angle$ BDA = 60^0. На сторонах AB і BC ромба взято точки M і N такі, що AM=BN. Довести, що Δ MDN рівносторонній.

Доведення. $\angle$ ADB = $\angle$ BDC = 60^0, AB=BC, тому поворотом навколо точки D на 60^0 точка C відобразиться на точку B, точка B – на точку A, відрізок CB – на відрізок BA (рис.2.24).

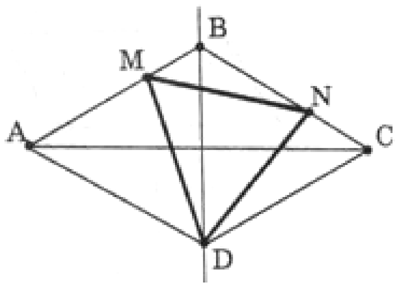


Рис.2.24

З AB=BC і AM=BN випливає, BM=CN; тому при повороті навколо точки D на 60^0 точка N перейде в точку M, а звідси DN=DM. Δ MDN – рівнобедрений і при вершині D має кут 60^0, тому

$\angle$ DMN = $\angle$ DNM = 60^0 і Δ MDN – рівносторонній. *Доведено.*

Задача 3. Зовні квадрата на його сторонах побудовані рівносторонні трикутники. Довести, що чотирикутник із вершинами в центрах побудованих трикутників, є квадратом.

Доведення. Центри O_1, O_2, O_3, O_4 побудованих рівносторонніх трикутників лежать на осях симетрії даного квадрата ABCD, які проходять через середини протилежних сторін квадрата, бо ці центри лежать на медіанах (і висотах) побудованих трикутників (див.рис.2.25)

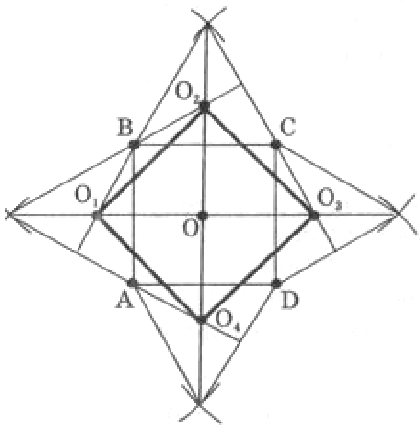


Рис.2.25

Отже, діагоналі одержаного чотирикутника взаємно перпендикулярні. Крім того, діагоналі чотирикутника рівні, у точці O діляться пополам. Тому поворотом навколо центра O квадрата ABCD на 90^0 чотирикутник відображається на себе.

Отже, $O_1O_2O_3O_4$ – квадрат. *Доведено.*

Задача 4. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC зовні його побудовано квадрат з центром O. Довести, що промінь CO є бісектрисою кута ACB.

Доведення. Нехай ABC – прямокутний трикутник, $\angle$ C = 90^0 і на стороні AB побудовано квадрат ABMN з центром O.

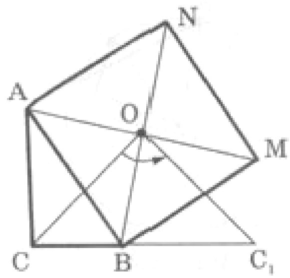


Рис.2.26

Поворотом навколо точки O на 90^0 точка A відображається на точку B (OA=OB, $\angle$ AOB = 90^0), точка C – на точку C_1, відрізок AC – на відрізок BC_1. Точка B належатиме відрізку CC_1. Оскільки $OC=OC_1$ і $\angle$ COC_1 = 90^0, то трикутник COC_1 – прямокутний рівнобедрений. Отже, $\angle$ OCB = 45^0 і CO – бісектриса кута ACB.

2.2.3.Метод паралельного перенесення в задачах на доведення

Задача 1. Якщо дві медіани трикутника рівні між собою, то трикутник рівнобедрений. Довести.

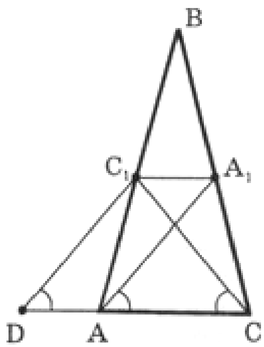


Рис.2.27

Доведення. Нехай у трикутнику ABC медіани $AA_1=CC_1$. Потрібно довести, що $\angle BAC = \angle BCA$.

Побудуємо відрізок DC_1 – образ відрізка AA_1 у паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. За властивостями паралельного перенесення $AA_1 \parallel DC_1$, тому

$$\angle A_1AC = \angle C_1DA. \quad (1)$$

Крім того, ΔDC_1C – рівнобедрений ($DC_1=C_1C$), тому

$$\angle C_1DA = \angle C_1CD. \quad (2)$$

З рівностей (1) і (2) маємо $\angle A_1AC = \angle C_1CA$.

Тоді $\Delta CAC_1 = \Delta ACA_1$ ($CC_1=AA_1$, AC – спільна, $\angle A_1AC = \angle C_1CA$).

Із рівностей цих трикутників випливає рівність кутів C_1AC і A_1CA, тобто $\angle BAC = \angle BCA$. Трикутник ABC рівнобедрений. *Доведено.*

Задача 2. Довести, що різниця основ трапеції завжди менша суми, але більша різниці бічних її сторін.

Доведення. Дана трапеція ABCD, BC || AD, AD > BC (див.рис.2.28).

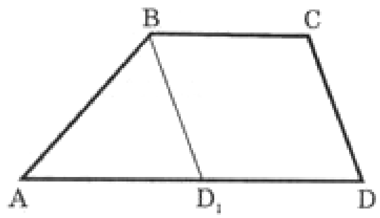


Рис.2.28

Виконаємо паралельне перенесення бічної сторони CD на вектор $\overrightarrow{CB}$: точка C перейде в точку B, точка D – в точку D_1. Одержали $\Delta\ ABD_1$, двома сторонами якого є бічні сторонами трапеції, а третьою – різниця основ AD – BC = AD_1. За властивістю сторін трикутника $AD_1 < AB + BD_1$, тобто $AD_1 < AB + DC$. Звідси також випливає, що $AD_1 > AB - DC$. *Доведено.*

2.2.4.Метод подібності та гомотетії в задачах на доведення

Задача 1. Довести, що висоти будь-якого трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай ABC – даний трикутник, AA_1, BB_1, CC_1 – його медіани, M – точка їх перетину, AA_2, BB_2, CC_2 – висоти (див.рис.2.29).

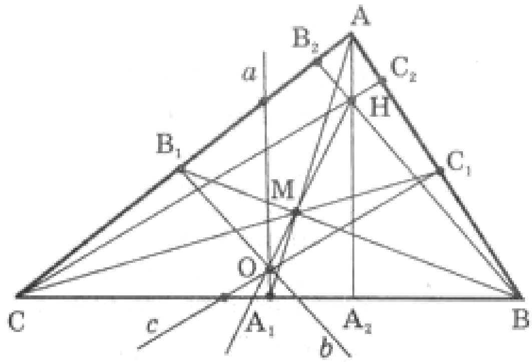


Рис.2.29

Розглянемо гомотетію з центром у точці M і коефіцієнтом $k = -0{,}5$. У цій гомотетії пряма, що містить висоту AA_2, відобразиться в пряму *a*, що проходить через точку A_1 паралельну висоті AA_2, тобто пряма *a* перпендикулярна до сторони BC в її середині.

Аналогічними міркуваннями можна показати, що прямі, які містять висоти BB_2 і CC_2 переходять у цій гомотетії відповідно у прямі *b,c,* перпендикулярні до відрізків AC і AB у їх серединах. Оскільки прямі *a, b* і *c,* перетинаються в одній точці O, то прообрази цих прямих, тобто висоти AA_2, BB_2, CC_2 перетинаються в одній точці H. *Доведено.*

Задача 2. Довести, що пряма, яка з'єднує точку O перетину діагоналей трапеції ABCD з точкою перетину її бічних сторін, проходить через середини основ трапеції.

Доведення. Маємо трапецію ABCD, S – точка перетину бічних сторін, O – точка перетину її діагоналей. Потрібно довести, що пряма SO перетинає основи трапеції в точках M і N, таких, що AM=MD, BN=NC.

Задамо гомотетію центром S і парою відповідних точок A і B (див.рис.30).

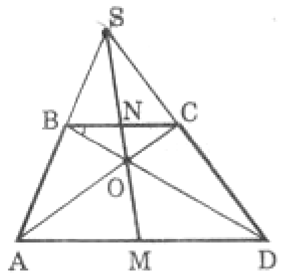


Рис.2.30

Тоді точка D перейде в точку C і відрізок AD – у відрізок BC, а тому і середини основ M і N також гомотетичні. Отже, точки M і N лежать на одній прямій з точкою S.

Друга гомотетія, що задається центром O і парою відповідних точок A і C, відображає точку D на B, відрізок AD на відрізок CB, відрізок AC – на відрізок DB, тому точки M, N і O лежать на одній прямій. Оскільки й точка S лежить на прямій MN, то пряма, що з'єднує точку O перетину діагоналей трапеції з точкою S перетину її бічних сторін, проходить через середини M, N основ трапеції. *Доведено.*

2.3. Геометричні перетворення в задачах на побудову

2.3.1. Застосування методу осьової та центральної симетрії

Задача 1. Через дану точку М, що лежить усередині даного кута, провести пряму так, щоб її відрізок, обмежений сторонами кута, ділився в точці М навпіл.

Розв'язання. Дана точка М лежить усередині даного кута АОВ. Візьмемо на стороні ОА кута довільну точку С і побудуємо симетричну їй відносно точки М точку C_1 (див.рис. 2.31). Пряма, що проходить через точку C_1 паралельно стороні ОА даного кута, перетне сторону ОВ у точці N – одному кінці шуканого відрізка.

MN – шукана, вона перетинає сторону ОА в точці L, такій, що MN=ML. Правильність побудови випливає з того, що центрально-симетричні прямі паралельні.

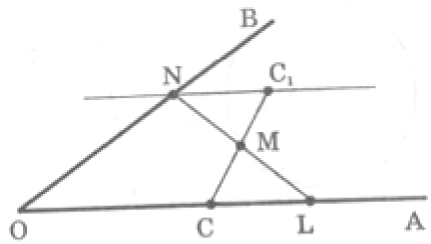


Рис.2.31

Задача 2. Побудувати трикутник за трьома його медіанами m_a, m_b, m_c.

Розв'язання. Аналіз. Нехай АВС – шуканий трикутник з медіанами $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$, $CC_1 = m_c$, де m_a, m_b, m_c – задані відрізки, М – точка перетину медіан (див.рис.2.32).

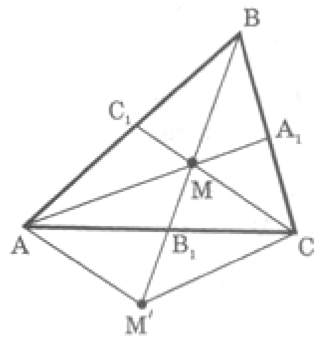


Рис.2.32

Побудуємо точку M/, симетрично точки B_1, і розглянемо чотирикутник AMCM/. У нього $MB_1 = B_1M^/$ і $AB_1 = B_1C$, а тому він паралелограм. Врахувавши, що медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини, маємо

$MM^/ = \frac{2}{3}m_b$, $MC = AM^/ = \frac{2}{3}m_c$, $CM^/ = AM = \frac{2}{3}m_a$.

Це означає, що побудова шуканого трикутника зводиться до побудови допоміжної фігури – одного з трикутників CMM/ або AMM/.

Побудова. Будуємо:

1. Трикутник CMM/ за трьома відомими сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$; маємо вершину C шуканого трикутника.

2. Точку B_1 – середину сторони MM/.

3. Точку $A = Z_{B_1}(C)$.

4. Точку $B = Z_M(M^/)$.

ABC – шуканий трикутник.

Доведення. Правильність побудови випливає з проведеного аналізу: $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$, $CC_1 = m_c$.

Дослідження. Задача має єдиний розв'язок, якщо дані відрізки m_a, m_b, m_c задовольняють таку подвійну нерівність

$$|\; m_b - m_c \,| < m_a < m_b + m_c\,.$$

Задача 3. Дана пряма *m*, не належна їй точка М і коло *К* в одній півплощині з межею *m*. Знайти на даній прямій таку точку А , щоб сума відстані МА і довжини відрізка дотичної з точки А до кола, була найменшою.

Розв'язання. Аналіз. Нехай шуканою є точка А на прямій *m* : МА + АС = min (див.рис.2.33)

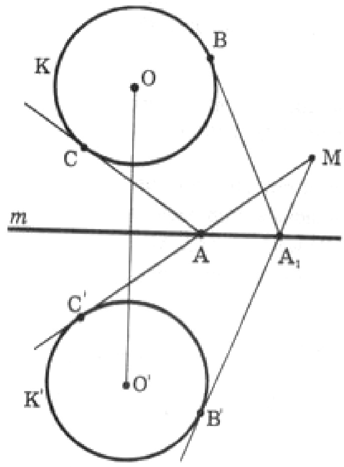


Рис.2.33

Сума двох відрізків ламаної найменша, коли ці відрізки є продовженням один одного на одній прямій. Побудуємо коло K' $(O'; R)$, симетричне колу K $(O\ ;\ R)$ відносно прямої *m*. Точка дотику С у симетрії відносно прямої *m* перейде в точку C' кола K' $(O'; R)$, при цьому $AC = AC'$. Тоді $AM + AC = AM + AC' - \min$.

Отже, точка А є точкою перетину прямої *m* з дотичною MC', проведеною з точки М до кола K' $(O'; R)$.

Побудова. Будуємо:

1. Коло K' $(O'; R)$, симетричне колу K $(O; R)$ відносно прямої *m*.

2. Дотичну з точки М до кола K' , C' − точка дотику; точка А перетину дотичної MC' з прямою *m* – шукана.

Доведення. Правильність побудови обгрунтована в аналізі.

Дослідження. Оскільки з точки М, яка не належить колу K $(O; R)$, а отже, і колу K' $(O'; R)$, можна провести дві дотичні, то на прямій *m* існує дві точки А і A_1, які задовольняють умові задачі.

Задача 4. Дано кут AOB і точки M і K усередині даного кута. Потрібно сполучити ці точки ламаною лінією найменшої довжини так, щоб дві її вершини лежали на сторонах кута AOB.

Розв'язання. Побудуємо точку K_1, симетричну точці K відносно прямої OA, і точку M_1, симетричну точці M відносно прямої OB. Точки N і L перетину прямої K_1M_1 зі сторонами кута – шукані (див.рис.2.34).

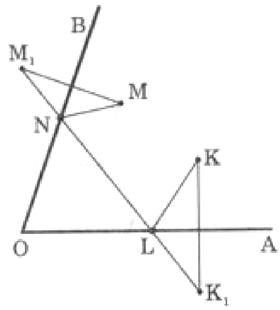


Рис.2.34

Справді, сума $KL + LN + NM = K_1L + LN + NM_1$ – найменша, оскільки останні три відрізки утворюють прямолінійний відрізок.

2.3.2. Застосування методу повороту

Задача 1. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих (по одній на кожній).

Розв'язання. Аналіз. Припустимо, що ΔABC задовольняє умову задачі (див.рис.2.35).

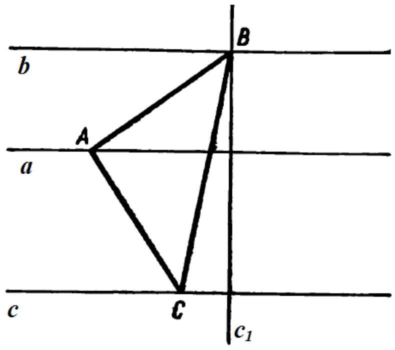


Рис.2.35

Приймемо точку А за центр повороту на кут 90° (проти напряму руху стрілки годинника). Виконаємо поворот навколо точки А. Тоді образом точки С буде точка В. Знайдемо образ прямої *с* при тому самому повороті. Ним буде пряма c_1. Оскільки точка С лежить на прямій *с,* то точка В лежить на прямій c_1. Крім того, точка *В* лежить на прямій *b* (за умовою), тому вона є точкою перетину прямих *b* та c_1. Побудувавши точку В, будують точку С при тому самому повороті (але в напрямі за годинниковою стрілкою).

Побудова. Взявши довільну точку А на прямій *а* за центр повороту, здійснимо поворот прямої *с* на кут 90° (проти напряму руху стрілки годинника). Для цього досить побудувати відрізок, що є відстанню точки А до прямої *с* і виконати зазначений поворот. Отримаємо точку В. Здійснивши поворот відрізка АВ на кут 90° (в напрямі руху стрілки годинника), матимемо точку С − третю вершину трикутника.

Доведення. За побудовою $\angle$ ВАС = 90°, бо $c_1 \perp b$ і точки А, В, С належать відповідно прямим *а, b, с.*

Дослідження. Розв'язок задачі існує завжди, оскільки положення точки В при повороті точки С на 90° навколо точки А визначається однозначно. З точністю до рівності фігур на площині та розташування трикутника задача має один розв'язок.

Задача 2. Побудувати рівностононній трикутник такий, що його одна вершина знаходиться в даній точці С, а дві інші – по одній на даному колі і на даній прямій.

Розв'язання. Аналіз. Нехай рівносторонній трикутник АВС побудовано так, що однією вершиною є дана точка С, вершина А лежить на даній прямій *а*, а вершина В – даному колу *К* (*О ; R*) (див.рис.2.36).

Оскільки АС = ВС і $\angle$ АСВ = 60^0, то поворот навколо точки С на кут 60^0 відображає точку А на точку В, пряму *а* – на пряму a', причому точка В належить прямій a'. Але точка В належить і колу *К* (*О ; R*). Тому точку В знайдемо як точку перетину кола *K* (*O* ; *R*) із прямою $a^{/} = R_{C}^{60^0}(a)$. Тоді точка А є образом точки В при повороті навколо точки С на кут -60^0.

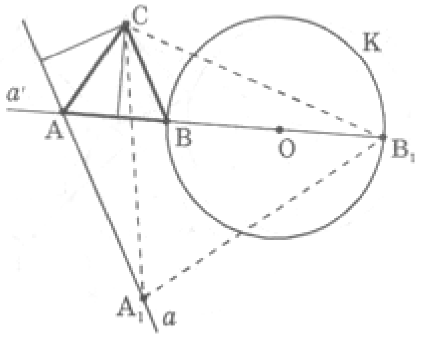


Рис.2.36

Побудова. Дані точка С, пряма *a* і колу *K* (*O ; R*) (рис.).

Будуємо:

1. Пряму $a^{/} = R_{C}^{60^0}(a)$.

Точка В – це точка перетину прямої $a^{/}$ із колом *K* (*O ; R*).

2. Точку $A = R_{C}^{-60^0}(B)$.

Трикутник АВС – шуканий.

Доведення. СА = СВ, ∠ АСВ = 60^0 за побудовою. Отже, Δ АВС – рівносторонній.

Дослідження. Кількість розв'язків задачі визначається кількістю точок перетину даного кола *K* (*O ; R*) із прямою $a^{/} = R_{C}^{60^0}(a)$.

Таким чином, їх може бути два (як на рис. Δ АВС і Δ $A_1B_1C_1$), один або жодного.

Задача 3. Земельна ділянка форми квадрата була огороджена. Із забору залишилося два стовпці на паралельних сторонах квадрата і стовп у центрі квадрата. Відновити межі ділянки.

Розв'язання. Аналіз. Припустимо, що межі ділянки (квадрата ABCD) відновлені, точка (стовпець) M лежить на стороні AB, точка N (стовпець) – на стороні CD (див.рис.2.37).

Нехай точки M і N не лежать на одній прямій з центром O квадрата. Побудуємо точки M_1 і N_1, симетричні точкам M і N відносно точки O : $M_1 = Z_O(M),\ N_1 = Z_O(N)$. Далі виконуємо поворот точок M і N, M_1 і N_1, навколо точки O на 90^0. Точки M, N, M_1, N_1, $M^/$, $N^/$ визначають прямі, на яких лежать сторони квадрата.

Побудова. Дано точки M, N і O, які не лежать на одній прямій (див.рис.2.37). Порядок побудови визначений в аналізі:

1.Будуємо $M_1 = Z_O(M),\ N_1 = Z_O(N)$.

2.Точки

$M^/ = R_O^{90^0}(M),\ M_1^/ = R_O^{90^0}(M_1),\ N^/ = R_O^{90^0}(N),\qquad N_1^/ = R_O^{90^0}(N_1)$.

3. Прямі MN_1, NM_1, $M^/N^/_1$, $N^/M^/_1$.

4. Точки: точку A перетину прямих MN_1 і $M^/N^/_1$, точку B перетину MN_1 і $N^/M^/_1$, точку C перетину прямих $N^/M^/_1$ і NM_1, точку D перетину прямих NM_1 і $M^/N^/_1$.

Чотирикутник ABCD – шуканий квадрат.

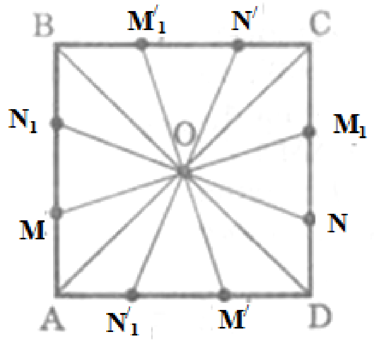


Рис.2.37

Доведення. Правильність побудови випливає з аналізу та властивостей центральної симетрії та повороту навколо точки.

Дослідження. Якщо точки M і N не симетричні відносно точки O, то задача має єдиний розв’язок. Якщо ж точки M, N, O лежать на одній прямій, то задача має безліч розв’язків.

2.3.3.Застосування методу паралельного перенесення

Задача 1. Населенні пункти А і В розділені двома каналами, кожний з яких має паралельні береги. Потрібно визначити місце для мостів через ці канали такі, щоб пункти А і В були сполучені найкоротшим шляхом.

Розв'язання. Аналіз. Положення пунктів А і В та каналів a, b, a_1, b_1 з берегами зображені на рисунку 2.38.

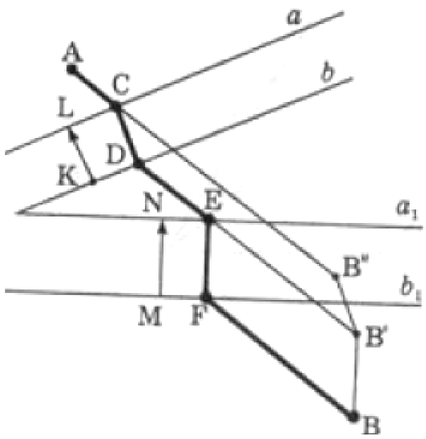


Рис. 2.38

Визначити місця мостів можна наступними способами.

1-й спосіб. Побудуємо точку $B^{/}$ − образ точки В у паралельному перенесенні на відстань, яка дорівнює ширині каналу (a_1, b_1) у напрямі від берега b_1 до берега a_1 (на вектор $\overrightarrow{MN}$). Потім побудувати точку $B^{//}$ − образ точки $B^{/}$ у паралельному перенесенні на відстань, яка дорівнює ширині каналу (a, b) у напрямі від берега b до берега a (на вектор $\overrightarrow{KL}$). Пряма $B^{//}A$ перетне пряму a в шуканій точці С. $CD \perp b$ – положення моста на каналі (a, b). Відрізок $DB^{/}$ перетне перетне берег a_1 в точці Е, такій, що $EF \perp b_1$ – положення моста на каналі (a_1, b_1).

Ламана ACDEFB – шуканий найкоротший шлях між пунктами А і В.Справді, цей шлях складається із відрізків сталої довжини CD і EF та суми відрізків $AC + DE + FB = AC + CB^{//}$. Оскільки останні два відрізки утворюють прямолінійний відрізок $AB^{//}$, то їх сума найменша.

2-й спосіб. Побудуємо точку $A^/$ – образ точки A в паралельному перенесенні на відстань між берегами *a, b* в напрямі між берегами від *a* до *b a* (вектор $\overrightarrow{LK}$) і точку $B^/$ – образ точки A в паралельному перенесенні на відстань між берегами a_1, b_1 в напрямі між берегами від b_1 до a_1 (на вектор $\overrightarrow{MN}$).

Відрізок $A^/B^/$ перетне береги *b і* a_1 відповідно в точках D і E таких, що $DC \perp a$, $EF \perp b_1$ – шукані місця мостів (див.рис.2.39).

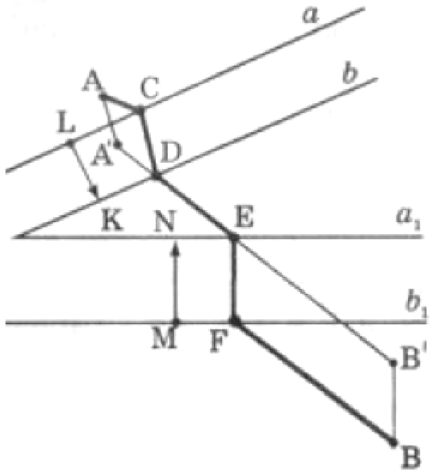


Рис. 2.39

Ламана ACDEFB – шуканий найкоротший шлях між пунктами A і B.

Правильність побудови випливає з того, що відрізки CD і EF у складі ламаної – мають сталу величину. За побудовою $AC = A^/D$, $FB = EB^/$, тому сума $AC + DE + FB = A^/D + DE + EB^/ = A^/B^/$, ланки якої утворюють прямолінійний відрізок, має найкоротшу довжину.

Задача 2. Побудувати трикутник за даними його двома медіанами і кутом між ними.

Розв'язання. Аналіз. Нехай побудований трикутник ABC, в якого медіани $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$, $\angle AOB = \alpha$ (див.рис.2.40).

Виконаємо паралельне перенесення медіани BB_1 на вектор $\overrightarrow{B_1A_1}$, дістанемо відрізок DA_1.

Утворився трикутник AA_1D, який можна побудувати за двома сторонами AA_1 і DA_1 та кутом α між ними, а від нього легко перейти до шуканого трикутника, враховуючи властивості точки перетину медіан трикутника.

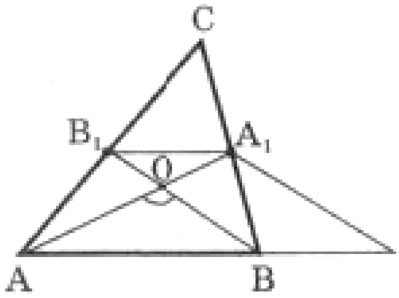


Рис.2.40

Побудова.

1.Будуємо трикутник AA_1D за сторонами $AA_1 = m_a$, $DA_1 = m_b$ і $\angle AA_1D = \alpha$.

2. Ділимо відрізок m_a на три рівні частини і відкладаємо на AA_1 відрізок $AO = \frac{2}{3} m_a$.

3. Через точку O проводимо пряму, паралельну прямій DA_1, вона перетинає сторону AD в точці B.

4. На прямій BO відкладаємо відрізок $OB_1 = \frac{1}{3} m_b$.

5. Прямі AB_1 і BA_1 у перетині дають точку C.

Δ ABC – шуканий.

Доведення. Оскільки $OB \parallel A_1D$, то $\angle AOB = \angle AA_1D = \alpha$.

$AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$ – за побудовою. Отже, Δ ABC задовольняє умові задачі.

Дослідження. Розв’язання задачі звелося до побудови трикутника за двома сторонами і кутом між ними, а така побудова завжди можлива і однозначна.

Задача 3. Побудувати трапецію за даними її основами та діагоналями.

Розв’язання. Аналіз. Нехай ABCD – шукана трапеція, в ній AD = *a,* BC = *b*, AC = d_1, BD = d_2 – дані відрізки (див.рис.2.41).

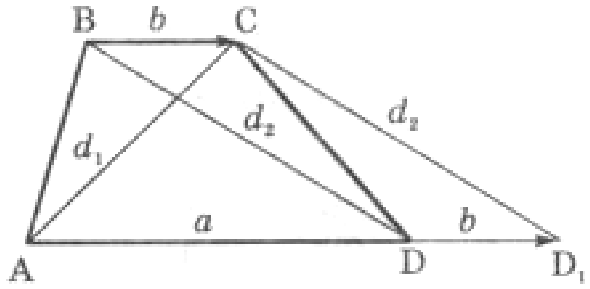


Рис.2.41

Задамо паралельне перенесення вектором $\overrightarrow{BC}$ і побудуємо образ діагоналі *BD* в цьому перенесені – дістанемо відрізок $CD_1 = BD = d_2$. Одержали трикутник ACD_1, у якого відомі усі сторони: $AD_1 = a + b$, $AC = d_1$, $CD_1 = d_2$. Отже, трикутник ACD_1 можна побудувати, при цьому матимемо дві вершини A і C шуканої трапеції. Дві інші вершини B і D дістанемо, виконавши паралельне перенесення сторони CD_1 на вектор $\overrightarrow{CB}$, довжина якого *b* і напрям, паралельний прямій AD від D_1 до A відомі.

Побудова.

1.Побудуємо трикутник ACD_1 за трьома відомими сторонами.

2. Через точку C проведемо пряму, паралельну AD_1, і на ній відкладемо відрізок $CB = b$ у напрямі від D_1 до A.

3. Через точку B проводимо пряму, паралельну CD_1, вона перетне сторону AD_1 в точці D – четвертій вершині шуканої трапеції.

4. ABCD –шукана трапеція.

Доведення. $BD = CD_1 = d_2$ – за властивістю паралельного перенесення. $BC = b$, $AC = d_1$, $AD = AD_1 - DD_1 = AD_1 - b = a$, $BC \parallel AD$ – за побудовою. Отже, ABCD –шукана трапеція.

Дослідження. Оскільки розв’язання задачі звелося до побудови трикутника ACD_1 за відрізками трьома відомими сторонами $a + b$, d_1, d_2, то задача має єдиний розв’язок, якщо $| d_1 - d_2 | < a + b$ або $d_1 + d_2 > a + b$. Задача розв’язку не має, якщо $d_1 + d_2 \le a + b$ або $| d_1 - d_2 | \ge a + b$.

2.3.4. Застосування методу подібності та гомотетії

Задача 1. Побудувати трикутник за трьома його висотами h_a , h_b , h_c.

Розв'язання. Аналіз. Нехай трикутник ABC побудовано такий, що його висоти $AH_1 = h_a$, $BH_2 = h_b$, $CH_3 = h_c$, де h_a , h_b , h_c – дані відрізки (див.рис.2.42 *а*). Запишемо залежність між сторонами, висотою і площею трикутника ABC: $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}bh_b$, $S = \frac{1}{2}ch_c$.

Звідси $ah_a = bh_b = ch_c$. Розділимо останню рівність на $h_a h_b$, дістанемо $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{c}}$. Позначимо $m = \frac{h_a h_b}{c}$, тоді $\frac{m}{h_a} = \frac{h_b}{h_c}$.

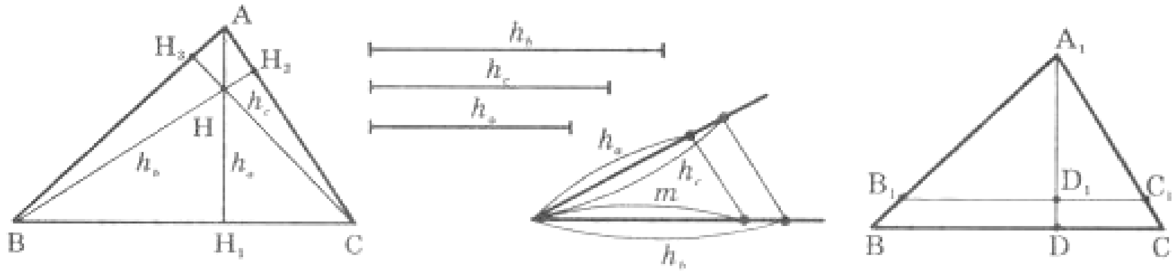
h_a , h_b , h_c – дані відрізки, тому відрізок m можна побудувати як четвертий пропорційний відрізків h_a , h_b , h_c.

Рівність $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{m}$ свідчить про те, що шуканий трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$, у якого відомі сторони h_a , h_b, m.

Отже, трикутник $A_1B_1C_1$ можна побудувати, а потім методом подібності побудувати і трикутник ABC.

Побудова. Будуємо:

1. Відрізок $m = \frac{h_a h_b}{c}$



а) b) в)

Рис.2.42

2.$A_1B_1C_1$ за сторонами $A_1C_1 = h_a$, $B_1C_1 = h_b$, $A_1B_1 = m$.

2. Висоту $A_1D_1 = h_{a1}$ трикутника $A_1B_1C_1$ (рис. *в*).

3. Трикутник A_1BC гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ у гомотетії з центром A_1 і коефіцієнтом $k = h_{a1} : h_a$. Для цього на прямій A_1D_1, що містить висоту h_{a1} від точки A_1 відкладемо висоту h_a і через її кінець – точку D – проведемо пряму, паралельну прямій B_1C_1, яка перетне прямі A_1B_1 і A_1C_1 у шуканих вершинах B і C (рис. *в*).

4. Трикутник A_1BC – шуканий.

Доведення. Првильність побудови обгрунтовано в аналізі. Крім того, використано твердження, що в подібних трикутникахвисоти пропорційні відповідним сторонам, тобто $h_a : h_{a1} = a : a_1$.

Дослідження. Задача має єдиний розв'язок, якщо відрізки h_a , h_a , m задовольняють нерівність сторін трикутника.

Задача 2. Побудувати прямокутний трикутник, у якого один катет у два рази більший другого, а гіпотенуза дорівнює даному відрізку m.

Розв'язання. Аналіз. Нехай прямокутний трикутник ABC побудовано ($\angle$ C = 90^0) побудовано такий, що AC = 2 BC і гіпотенуза AB = m, де m – даний відрізок (див.рис.43). Візьмемо на катеті AC довільну точку A_1 і проведемо через неї пряму, паралельну гіпотенузі AB до перетину з катетом CB в точці B_1. Отримаємо трикутник A_1CB_1, подібний трикутнику ABC, у нього один катет $A_1C = 2CB_1$. Прямокутний трикутник A_1CB_1, у якого один катет у два рази більший за другого, легко побудувати, їх нескінченна множина. Побудувавши один із них – Δ A_1CB_1, перейдемо до шуканого трикутника ACB за допомогою гомотетії з центром у точці C і коефіцієнтом $k = AB : A_1B_1$.

Побудова. Будуємо:

1. Прямокутний трикутник A_1CB_1, у якого $\angle$ C = 90^0, $A_1C = 2CB_1$.Позначимо $A_1B_1 = m_1$.

2. Трикутник ABC гомотетичний трикутнику A_1CB_1 у гомотетії з центром у точці C і коефіцієнтом $k = m : m_1$. Для цього досить побудувати відрізок CA як четвертий пропорційний до відрізків A_1C, $m_1 = A_1B_1$ і m.

Пряма, проведена через точку А паралельно прямій A_1B_1, перетне промінь CB_1 у третій вершині В шуканого трикутника АВС.

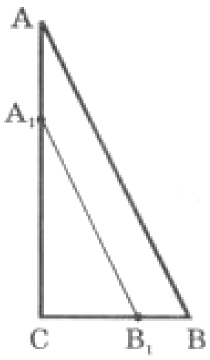


Рис. 2.43

Доведення. Правильність побудови обгрунтована в аналізі.

Дослідження. Задача завджи має єдиний розв'язок, оскільки її розв'язання зводиться до побудови трикутника, гомотетичного побудованому в гомотетії, що однозначно визначається.

Задача 3. Побудувати трикутник за даними його двома кутами і периметром.

Розв'язання. Аналіз. Нехай дано кути α і β при основі АВ і периметр $2p$ трикутника АВС. Відкинувши умову, що дано периметр, за двома кутами α і β можна побудувати безліч трикутників, подібних шуканому трикутнику. Нехай один із них – Δ AB_1C_1 (рис.2.44). У подібних трикутниках відношення периметрів дорівнює коефіцієнту подібності. Використаємо гомотетію з центром у точці А і коефіцієнтом $k = 2p_1 : 2p$, де p_1−півпериметр трикутника АВС.

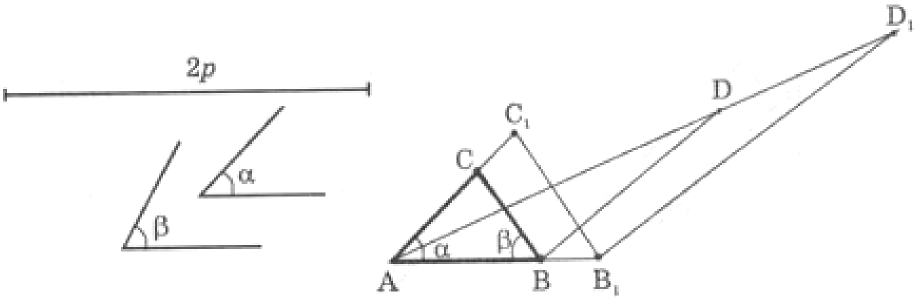


Рис.2.44

Побудова. Будуємо:

1. Трикутник $\Delta\ AB_1C_1$ за даними кутами $\alpha = \angle B$ і $\beta = \angle B$.

2. Довільний промінь з центром в точці A і на ньому відкладаємо відрізки AD = *2p,* AD_1 = *2p.*

3. Пряму B_1D_1 і через точку D проводимо пряму, паралельну прямій B_1D_1, яка перетне пряму AB_1 в точці B.

4. Через точку B пряму, паралельну прямій B_1C_1, яка перетне пряму AC_1 в точці C.

Трикутник ABC – шуканий.

Доведення.

Оскільки $BD \parallel B_1D_1$ і $BC \parallel B_1C_1$, то

$\frac{AD_1}{AD} = \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = k$ і $\Delta AB_1C_1 = H_A^k(\Delta ABC)$.

$\angle\ CAB = \angle C_1AB_1 = \alpha$, $\angle\ CBA = C_1B_1A = \beta$ і $AB + AC + BC = AD = 2p$.

Дослідження. Задача завжди має єдиний розв'язок, оскільки в даній гомотетії існує єдиний трикутник, гомотетичний побудованому $\Delta\ AB_1C_1$.

Висновки до розділу 2

Кожне геометричне перетворення має свої властивості, а тому застосування кожного геометричного перетворення має свої особливості.

У другому розділі на прикладах розв'язування задач детально розкрито суть кожного із методів геометричних перетворень: методу центральної та осьової симетрії, методу повороту, методу паралельного перенесення та методу гомотетії на практиці їх застосування та реалізації до розв'язування планіметричних задач.

Розглянуті задачі, і типові їм, доцільно детально вивчати на факультативах та гуртковій роботі, адже вони сприяють розвитку логічного мислення, уяви та пам'яті, дають цікавий матеріал для дослідницької роботи.

ВИСНОВКИ

Питання дослідження теорії і практики методу геометричних перетворень, методики розв’язування планіметричних задач методом геометричних є актуальними напрямками досліджень в математиці з огляду на розширення спектру завдань, які ставить сучасна освіта та суспільне життя. Адже запорукою успішної самореалізації особистості у сучасному суспільному житті є володіння математичними предметними компетенціями, навичками математичної діяльності та вміннями застосовувати їх до розв’язування різноманітних реальних і навчальних проблем.

Розв’язування планіметричних задач методом геометричних перетворень є одним із основних засобів досягнення високого рівня творчої діяльності учнів.

В ході написання дипломної роботи досліджено особливості методу геометричних перетворень, розкрито методику розв’язання планіметричних задач з використанням методу геометричних перетворень.

Зокрема, у першому розділі розглянуто загальні питання методики розв’язування планіметричних задач, введено поняття про геометричні перетворення площини, з’ясовано місце та роль геометричних перетворення в шкільному курсі планіметрії, встановлено та проаналізовано загальні риси та основні положення методу геометричних перетворень.

Дано відповідь на основне питання «В чому суть методу геометричних перетворень?»: щоб розв’язати задачу методом геометричних перетворень, розглядаються разом із заданими фігурами нові фігури, які дістали з даних за допомогою певного перетворення; з’ясовуються властивості нових фігур, які переносяться на дані фігури і так знаходимо шлях розв’язування задачі.

Таким чином, геометричні перетворення площини спрощують розв’язання багатьох планіметричних задач, оскільки основна ідея цього методу полягає в тому, що фігура, яка розглядається в умові задачі, перетворюється в таку, для якої розв’язання стає простішим. Розв’язавши задачу для перетвореної «»нової фігури, потім оберненим перетворенням повертаються до початкової фігури.

Разом з тим застосування кожного геометричного перетворення має свої особливості. І так як одним із напрямків дослідження в даній кваліфікаційній роботі виступав підбір та представлення різнотипних задач з використанням властивостей та інструментарію геометричних перетворень, то у другому розділі детально розкрито суть методів центральної та осьової симетрії, методу повороту, методу паралельного перенесення та методу гомотетії на практиці їх реалізації та застосування до розв’язування планіметричних задач на обчислення, доведення та побудову.

Навчання учнів розв’язанню планіметричних задач із використанням методів геометричних перетворень представляють певні труднощі, адже немає чітких визначених алгоритмів реалізації методу геометричних перетворень. Розв’язання кожної задачі представляє творчий процес.

Процес використання методу геометричних перетворень до розв’язування задач буде ефективним лише тоді, коли учні вміють: будувати геометричні фігури при конкретних видах перетворень; визначати вид перетворення за окремими елементами геометричних фігур; встановлювати (обчисленням, доведенням, побудовою) положення відповідних точок при певному виді перетворення.

Розв’язування планіметричних задач методом геометричних перетворень сприяє кращому розумінню і засвоєнню геометрії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антоненко М.І. Розв’язування геометричних задач: Книжка для вчителя / М.І. Антоненко . – К.: − Рад.шк., 1991.
2. Апостолова Г.В. Геометрія: 9: дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / Г.В.Апостолова. – К. : Генеза, 2009.
3. Бевз Г.П. Геометрія: підручник для 9 кл. загальноосвітн. навч. закладів / Г.П.Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017.
4. Боравльов А.П. Аналіз у розв’язуванні задач на побудову: Посібник для студентів математичних спеціальностей / А.П. Боравльов, І.Г.Ленчук. – К.: Вища школа, 2002. – 192 с.
5. Брославська Г.М. Навчання учнів проводити дослідження в задачах на побудову / Г.М. Брославська // Математика в школах України. – 2005. − №30 (114). – С. 33-37.
6. Бурда М.І. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітн. навч. закладів / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак – ЕКО, 2009.
7. Бурда М.І. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітн. навч. закладів / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: УОВЦ «Оріон», 2017.
8. Бурда М. І. Геометрія: Навч. посіб. для 8-9 кл. шк. з поглибл. вивч. математики / М. І. Бурда, Л. М. Савченко. – К.: Освіта, 2004.
9. Висоцька А.М. Перетин прямої і кола / А.М. Висоцька // Математика в школах України. – 2011. − № 5 (53). – С. 15-16.
10. Геометричні перетворення площини: навч.посібник / Н.В.Боровик, І.В.Зайченко, М.Мурач, В.П.Яковець. − Суми: ВТД “Університетська книга”, 2003. — 504 с.
11. Геометричні перетворення площини: навч.посібник / Н.В.Боровик, І.В.Зайченко, М.Мурач, В.П.Яковець. Частина 1: Основні поняття та

відомості про відображення фігур. Симетрія відносно точки. .симетрія відносно прямої. – Ніжин , 2001. – 208 с.

12. Геометричні перетворення площини: навч.посібник / Н.В.Боровик, І.В.Зайченко, М.Мурач, В.П.Яковець. Частина 2: Поворот площини навколо точки. Паралельне перенесення. – Ніжин , 2002. – 241 с.
13. Геометричні перетворення площини: навч.посібник / Н.В.Боровик, І.В.Зайченко, М.Мурач, В.П.Яковець. Частина 3: Подібність і гомотетія. Інферсія. – Ніжин , 2021. – 277 с.
14. Дорофеев С. Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах / Дорофеев С. Н. – Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2002. – 189 с.
15. Єршова А.П. Геометрія 9 клас: підручник для загальноосвітн. навч. закладів / А.П. Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф. Крижановський. – Х.:Вид-во «Ранок», 2010.
16. Заславский А. А. Геометрические преобразования / Заславский А. А. – М.: МЦНМО, 2004. – 86 с.
17. Кравчук О.М. Геометричні перетворення. Частина I. Ортогональні перетворення: методичні рекомендації до вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Геометричні перетворення» / Ольга Мусіївна Кравчук. – Луцьк, 2018. – 73с.
18. Ленчук І. Метод перетворень: паралельне перенесення / І. Ленчук // Математика в рідній школі : науково-методичний журнал. 2016. № 3. С. 37-42.
19. Матяш О. І. Вивчення рухів фігур в курсі геометрії школи II ступеня : Дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Матяш Ольга Іванівна; УДПУ ім. М.П.Драгоманова. – Київ, 1995. – 187 с.
20. Мерзляк А.Г. Геометрія для 9 класу: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. − Харків: «Гімназія», 2010, 2017.

21. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. – Х.: Гімназія, 2004. – 272 с.
22. Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами I Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. / Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця, 2017 – 269 с.
23. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] / [М.І.Бурда, М.Ф.Городній, Д.А.Номіровський, А.В.Паньков, Н.А.Тарасенкова, М.В.Чемерис, В.О.Швець, М.С.Якір]. − Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf
24. Навчальна програма для з математики 5-9 клас для загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] / [М. І. Бурда, Ю. І. Мальований, Є. П. Нелін, Д. А. Номировський, А. В. Паньков, Н. А. Тарасенкова, М. В. Чемерис, М. С. Якір] − Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas
25. Новий державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. − Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti
26. Полонський В.Б. Вчимося розв’язувати задачі з геометрії / В.Б. Полянський, Ю.М. Рабинович, М.С. Якір. – Тернопіль: Підручники й посібники, 2009.
27. Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія: Підручник для 7-9 кл. серед. шк. / О.В.Погорєлов. − К.: Освіта, 1994. – 238 с.
28. Погорєлов О.В. Геометрія: Підручник для 7-9 кл. серед. шк. / О.В.Погорєлов. − К.: Освіта, 1994, 2001.

29. Семець Сергій. Навчання учнів основної школи методам геометричних перетворень [Електронний ресурс] / Сергій Семець. − Режим доступу до ресурсу: https://core.ac.uk/download/pdf/12083041.pdf
30. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів / З.І.Слєпкань. – К.: Зодіак ЕКО, 2006, 2010.
31. Шарапа Валентина. Конструктивні задачі в 8 класі / В.Шарапа // Математика в школах України. – 2009. - №1 (13). − С. 16-17.