ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми. Розв'язування і складання математичних задач за відведеним часом, освітнім, розвивальним, виховним і прикладним значенням – належить, без сумніву, до однієї з найважливіших форм організації навчальної діяльності учнів. Майбутній вчитель математики повинен свідомо володіти основними методами і способами розв'язування задач. Вміти реалізовувати методичну функцію задач пов'язаної з розвитком вміння навчати розв'язувати задачі.

Аналізуючи літератури і вивчення практики навчання математики в загальноосвітній школі вказує на недостатню розробку такої технології в методиці навчання математики, як розв'язування нестандартних задач. Актуальність дослідження проблеми побудови технології розв'язування нестандартних задач, спрямованої на інтелектуальний розвиток учнів обумовлена необхідністю подолання протиріччя між потребою суспільства в цілому і окремих індивідуумів у формуванні інтелектуально розвиненої особистості, здатної до активного творчого оволодіння знаннями, до самостійної, свідомої і цілеспрямованої діяльності з розв'язання різноманітних завдань, і відсутністю практичних технологій навчання, які забезпечують інтенсифікацію інтелектуального розвитку учнів у процесі оволодіння ними способами діяльності з математичною інформацією.

Проблема використання нестандартних задач для логіко-математичного розвитку учнів цікавила вітчизняних педагогів, таких, як: А.Алексюк, О.Біляєва, Е.Голанд, Л.Гордон, О.Синиця, В.Сухомлинський, В.Онищук, О.Савченко та інші. Однак через багатоплановість ця проблема не підпадає під однозначне вирішення. Формування стійких і глибоких інтересів у школярів, є завданням першорядної важливості.

Поняття «математична задача» розглядалося в працях Г. П. Бевза, Є. С. Бережанської, М. В. Богдановича, М. І. Зайкіна, Ю. М. Колягіна, В. І. Крупича, Є. І. Лященко, В. І. Мишина, Д. Пойя, Г. І. Саранцева, З. І. Слєпкань, Н. А. Терьошина, Л. М. Фрідмана, П. М. Ерднієва та інших. Автори досліджують структуру задачі, виділяють етапи її розв’язування, описують методи та прийоми, що при цьому застосовуються, складають різноманітні класифікації математичних задач.

Актуальність проблеми полягає в тому, щоб через упровадження нестандартних завдань виховувати в учнів пізнавальний інтерес до вивчення математики, формувати їх інтелектуальні здібності. Задачі є і предметом, і засобом навчання. Вони є основним засобом забезпечення зв'язку навчання із життям, здійснення міжпредметних зв'язків всередині математики та з іншими навчальними предметами.

Розв'язування математичних задач в сучасних методичних дослідженнях розглядуються як ефективний засіб формування у школярів системи основних математичних знань, умінь і навичок, математичних методів дослідження, як важлива форма діяльності учнів у процесі вивчення математики, як засіб їх математичного розвитку. Ефективність застосування задач у навчанні школярів математиці, озброєння учнів методами та способами розв'язування задач, навчання їх самостійного пошуку розв'язків задач – одна з важливих проблем шкільної математичної освіти.

Мета цього дослідження: вивчити особливості нестандартних задач з математики та у ході аналізу вказаних завдань з’ясувати їх вплив на розвиток пізнавального інтересу і інтелектуальної активності школярів при вивченні математики.

Об'єктом є навчально-пізнавальна діяльність учнів у процесі вивчення математики з використанням нестандартних задач.

Предмет дослідження є методи (особливості постановки методики і розв’язання задач), за допомогою яких можна розв’язувати нестандартні математичні задачі.

Завдання роботи:

− розкрити стан традиційної методики навчання розв’язуванню математичних задач в школі;

− розкрити основні методичні принципи добору змісту розв’язування і складання математичних задач;

− розкрити логічні і алгебраїчні підходи до діяльності з розв’язування і складання математичних задач.

− узагальнити, розвинути і систематизувати матеріал для навчання розв’язування математичних задач знання;

Гіпотеза дослідження: використання системи шкільних математичних задач з урахуванням внутрішньої структури задачі дозволить підвищити якість навчання і сприятиме управлінню процесом навчання.

Для вирішення поставлених вище завдань та перевірки гіпотези були використані наступні **методи**:

− аналіз науково-методичної літератури;

− синтез наявних теоретичних положень, методик та практичних результатів;

− системний аналіз;

− педагогічні спостереження.

Методичною основою дослідження став дидактичний матеріал, що являє собою задачники, математичні тренажери, посібники з цікавими матеріалами, програми для загальноосвітніх навчальних закладів, психолого-методичні посібники, науково-методичні журнали.

Дана робота складається із вступу, 3-х розділів, висновків та списку використаних джерел.

Розділ І. Науково – теоретичні основи розв’язування нестандартних математичних задач

1.1. Роль і місце задач у навчанні математиці

Важко знайти таку галузь людської діяльності, де можна було б обійтися без математики, причому з часом діапазон її практичних застосувань щораз збільшується.

Мету викладання математики в загальноосвітній середній школі можна визначити таким чином: шкільний курс математики має забезпечити міцне і свідоме оволодіння системою математичних знань, умінь і навичок, які потрібні для загального розвитку учнів, для їх практичної діяльності в умовах сучасного виробництва, для вивчення на достатньо високому рівні споріднених шкільних предметів (фізики, креслення, хімії та ін.) та для продовження освіти. Із сказаного випливає, що викладання математики в школах повинно відповідати загальноосвітнім, практичним і виховним цілям.Звичайно, ідеал людини майбутнього ми вбачаємо не тільки в її загальній освіті, крім цього, кожна людина повинна досконало знати принаймі одну галузь, бути спеціалістом і мати певні моральні якості. Але вона обов’язково повинна мати і загальну освіту, зокрема - певний мінімум математичних знань.

Взагалі, математика і властивий їй стиль мислення - істотні елементи загальної культури сучасної людини. Ознайомити учнів з цими елементами культури, дати їм мінімум математичних знань, які потрібні кожній освіченій людині, - це завдання покладено на вчителів математики.

Одне з важливих завдань шкільної математики - розвивати логічне мислення учнів. Під логічним розуміють послідовне, несуперечливе і доказове мислення. Звичайно, у найпростіших випадках логічно мислити може кожна людина, але там, де доводиться мати справу з складнішими об'єктами мислення, наприклад розрізняти необхідні і достатні умови, класифікувати, тощо, людина з не досить розвиненим логічним мисленням пасуватиме. Отже, учням потрібні певні знання і навички. Зрозуміло, що розвивати логічне мислення можна і треба при вивченні всіх навчальних предметів, а не тільки математики. Але математика для цього дає чи не найкращий матеріал. На уроках математики учні вчаться давати означення, наводити аналогії, ознайомлюються з основними законами логіки і т. ін. Важко назвати інший шкільний предмет, який міг би дати для розвитку логічного мислення учнів більше, ніж математика.

Суспільно - практичні цілі навчанню математиці полягають у підготовці учнів до життя, до суспільно - корисної праці, школа повинна особливу увагу звертати на ті питання програми, з якими можуть зустрітись її вихованці в житті. В цьому і полягають практичні цілі навчання математики. Говорячи про практичні застосування, не треба забувати і міжпредметні зв'язки, оскільки, на уроках математики бажано наводити приклади, відомі учням з курсу фізики, хімії та інших навчальних предметів.

Виховні цілі навчанню математиці в школі зводяться головним чином до розвитку в учнів культури мислення, виховання в них колективізму, наполегливості та інших корисних рис характеру.

Відомо, що людині в її практичній діяльності доводиться розв'язувати не тільки задачі, які повторюються, а й нові, які ніколи ще не зустрічались. Школа повинна навчити випускника знаходити шляхи до вирішення проблем, а це означає – сформувати в учнів здатність до самостійного творчого мислення. Можливості привчання учнів до навчальної діяльності творчого характеру, розвивають в них математичні задатки. Не випадково відомий педагог - математик Д. Пойа пише:

“Велике наукове відкриття дає розв’язок масштабної проблеми, але і в розв’язоку любої задачі присутня крихта відкриття”.

Роль і місце задач в навчанні математиці історично не залишалось незмінним. Так в “Арифметиці” Л. Ф. Магніцького способи розв’язування задач давались у вигляді багатослівних правил, які учні повинні були заучувати напам’ять. Задача була ціллю навчання: математику вчили для того, щоб засвоїти правила розв’язування однотипних задач.

В часи Л. Ф. Магніцького здатність звести задачу до певного типу вважалось найвищим показником високорозвиненого мислення. Відомий математик - методист С. І. Шохор - Троцький розробив так званий “метод доцільних задач”. Виклад нової теми він пропонував починати з доцільної задачі. Обговорюючи її розв’язання, розбираючи подібні задачі, він підводив учнів до самостійного вирішення потрібного правила, формули, теореми. За його словами арифметичні задачі повинні бути, не ціллю, а методом навчання арифметиці.

Кожна конкретна навчальна математична задача передбачає досягнення найчастіше не однієї, а декількох педагогічних, дидактичних, навчальних цілей. Названі цілі характеризуються змістом задачі і призначенням, якого надає задачі вчитель. Дидактичні цілі, які ставить перед тією чи іншою задачею вчитель, визначають роль задач в навчанні математики. В залежності від змісту задачі та дидактичних цілей її застосування можна виділити її провідну роль.

Навчаючу роль математичні задачі виконують в процесі формування в учнів системи знань, умінь і навичок з математики та її конкретних дисциплін. Слід виділити декілька видів задач стосовно їх навчальної ролі.

Задачі для засвоєння математичних понять. Відомо, що формування математичних понять успішно проходить при умові ретельної копіткої роботи над поняттями, їх означеннями і властивостями. Щоб оволодіти поняттям, недостатньо вивчити його означення; необхідно розібратися в смислі кожного слова-означення, чітко знати властивості поняття, що підлягає вивченню. Такі знання набуваються перш за все при розв'язуванні задач і виконанні вправ.

1.2. Поняття задача, структура задачі

Історико-генетичний аналіз поняття «задача» як у філософських, психолого-педагогічних та інших дослідженнях дозволяє визначити походження і закони подальшого перетворення поняття та його функціональне навантаження на сучасному етапі розвитку шкільної освіти.

Розглядуване поняття являється одним із фундаментальних в психології, в кібернетиці, в будь-якій із наук природничо-математичного циклу, в теорії навчання і виховання. В літературі, присвяченій вказаним галузям знань, це поняття має різноманітне формулювання, оскільки в силу специфіки тієї чи іншої наукової дисципліни досліджуються різноманітні аспекти даного об'єкта.

В найзагальнішому значенні задача трактується як поставлена ціль, якої необхідно досягнути, як питання, що потребує вирішення на основі знань і логічних операцій. Таке пояснення в цілому співпадає з життєвими асоціаціями на слово «задача».

З філософської точки зору задача – це знання про незнання, що виникає в протиріччі між об'єктом і суб'єктом.

В психологічній літературі найбільш поширене використання цього терміна до категорії діяльності суб'єкта і умов її протікання. Як зазначає А.М. Леонтьев, задача – це ціль плюс умови. Вперше поняття «навчальна задача» вводить у педагогічну культуру Д. Б. Ельконін. Він трактував його як задачу, у процесі розв'язання якої основною метою є засвоєння певного зразка дій чи понять. Основну відмінність навчальної задачі від усіх інших задач вбачає у тому, що її мета та результат полягають у зміні самого діючого суб’єкта, а не у зміні предметів, з якими він діє.

Задача - це сформульоване запитання, відповідь на яке можна знайти за допомогою арифметичних дій. Розглянемо основні елементи, з яких складається кожна задача, і з'ясуємо, що означає розв'язати задачу.

З визначення задачі випливає, що в ній обов'язково має міститись якесь запитання. Без запитання задачі немає. Оскільки відповідь на запитання задачі дістаємо в результаті виконання арифметичних дій, очевидно, в ній повинна міститися вимога визначати те чи інше число - шукане і, крім того, повинні вказуватися ті числа, за допомогою дій над якими можна знайти шукане. Тому обов'язковими елементами будь-якої арифметичної задачі є невідоме (шукане) число (чи кілька таких) і дані числа.

Термін «задача» вживається в різних значеннях. У найширшому плані можна сказати, що задача передбачає необхідність свідомого пошуку відповідних засобів для досягнення мети, яку добре видно, але яка без посередньо недосяжна. У психологічному аспекті задача розглядається як свідома мета, що існує в певних умовах, а дії -- як процеси або акти, спрямовані на досягнення її, тобто на розв'язування задачі.

В. М. Брадіс визначає задачу як всяке математичне запитання, для відповіді на яке не досить простого відтворення одного якогось результату, якоїсь теореми або означення з пройденого курсу.

На основі аналізу психолого-педагогічних досліджень (Д. Н. Богоявленського, Н. А. Менчинської, Г. С. Костюка, В. В. Давидова, Т. В. Кудрявцева і їх співробітників), А. М. Матюшкін показав, що процес засвоєння являє собою за основними закономірностями процес рішення нових задач, названих проблемними задачами. Одним із головних умов управління навчанням і розвитку мислення є попередня постановка задачі, яка викликає проблемну ситуацію, активує розумову діяльність учнів. До таких задач відносяться такі задачі: з недостатньою або надлишковою інформацією, задачі з суперечними даними та інші. В поняття задачі він не включає діючого лиця – суб’єкта.

Суб’єкт не потрібен для визначення поняття задачі, так як задачі по своїй структурі є об’єктивно задане і сформульоване в словесній чи знаковій формі відношення між умовами (умовою) і шуканим.

Тому задача А. М. Матюшкін розглядається як спосіб знакового представлення вправ одною людиною другому (чи самому собі), включаючи вказівки на ціль і умову її досягнення. В інтелектуальних задачах ціль діяльності складає шукане, виражене питанням.

Л. Л. Гурова дає наступні визначення поняття задача: задача – об’єкт розумової діяльності, яка має вимоги деякого практичного перетворення або відповідь на теоретичне питання за допомогою пошуку умови, дозволяють відкрити зв'язок (відношення) між відомим і невідомим її елементами. При цьому, вона допускає, що психологічний аналіз процесу розв’язання задачі повинен враховувати її об’єктивний характер, розуміючи під цим: зміст задачі, важкість, місце в системі задач та інше.

Далі вона розглядає деякі логічні характеристики задачі з точки зору інформації, яка міститься в ній, бо ця обставина, в першу чергу, накладає відбиток на процес її розв’язання. Автором досліджено, що будь-яка задача (як об’єкт) містить інформацію, приймаюча два значення: суб’єктивне і об’єктивне.

Суб’єктивна інформація, міститься в задачі, розглядається як пізнавальний результат кожної дії по відношенню до задачі, маючи свідому ціль.

Об’єктивна інформація, міститься в задачі, виявляється в ході логічного розв’язання задачі і визначається її логічною структурою.

Якщо суб'єктивна інформація задачі виявляється деяким реальним суб'єктом, то об'єктивна – абстрактним (суб'єктом). Дії абстрактного суб'єкта будуть відрізнятися від дій реального суб'єкта, розв'язання задачі і в цій мірі, в якій розрізняється логічний і психологічний хід розв'язання. Ці поняття достатньо тісно взаємодіють один з одним. Тому об'єктива і суб'єктивна інформація про задачу в ідеальному випадку може співпадати або, в реальних випадках, породжувати багато форм невідповідностей, тому в психології мислення виділяють по крайній мірі два визначення інформації: суб'єктивне і об'єктивне. Однак при характеристиці розв'язання задачі як результат взаємодії суб'єкта з об'єктом можуть прийматися до уваги і проміжні або синтетичні значення цього поняття.

Відповідно, розроблюючи теорію задач, необхідно дослідити об'єктивну логічну структуру розв'язання задачі і співставлення з суб'єктивною психологічною структурою розв'язання, або між ними мають місце відповідні взаємозв'язки. В зв'язку з цим, можна говорити про «об'єктивну логіку розв'язання» і «суб'єктивну логіку розв'язання». Введення цих понять виправдовується, тим що вони є наслідком існуючого в науці теоретичної різниці на об'єктивний і суб'єктивний аспекти самого поняття задачі і міститься в ній інформації.

В підсумку Л. Л. Гурова дає висновок про те, що вироблена людством логіка науки і логіка задач, яка в ній міститься «веде за собою» процес їх розв'язання і процес навчання в цілому. Це положення в психології мислення приймають в якості аксіоми.

Суб'єктивну структуру задачі, визначену її умовою і вимогою прийнято називати інформаційною структурою задачі, яка дозволяє розрізнити задачі за ступенем їх психологічної важкості (проблемності).

Під математичною задачею розуміють будь-яку вимогу обчислити, перетворити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується кількісних відношень і просторових форм, створених людським розумом на основі знань про навколишній світ.

Серед численних математичних задач виділяють задачі, які називають по-різному: арифметичні, текстові, сюжетні.

Усі ці задачі характеризуються наступними рисами:

1) задачі сформульовані на природній мові (тому їх називають текстовими);

2) в них звичайно описується кількісний бік якихось явищ, подій (тому вони називаються сюжетними);

3) вони являють собою задачі на визначення шуканого значення деякої величини, які у початковій школі розв’язуються арифметичними способами (тому їх інколи називають арифметичними). Таким чином, усі ці терміни розкривають одне й те саме поняття.

Отже, головні елементи задачі - умови і запитання. Числові (чи буквені) дані – це елементи умови. Шукане завжди міститься в запитанні. Однак іноді задачу сформульовано так, що запитання містить у собі частину умови, або вся задача викладена у формі запитання.

Усе це слід враховувати, навчаючи дітей розв'язувати задачі. Один з істотних моментів цього навчання полягає в тому, щоб діти навчилися самостійно виконувати первинний аналіз тексту задачі, відділяючи відоме від невідомого, важливо, щоб вони вміли не тільки вичленити із задачі числові дані, а й пояснити, що означає кожне з них у контексті, що сказано про те число, яке треба знайти, і т.п. Важливо, щоб у процесі первинного аналізу зверталася увага не тільки на виділення даних і шуканого, а й на зв'язки між ними, викладені в тексті задачі.

Під задачею розумітимемо задачну систему, що розглядається в її відношенні до існуючої або потенційної розв’язуючої системи.

Обговорюване тут загальне поняття задачі ми називаємо кібернетичним. При цьому ми виходимо з того, що розв’язування задачі будь-якою розв’язуючою системою можна розглядати як процес управління, в якому задачна система грає роль керованого об'єкту, а розв’язуюча система – роль керівника.

Щоб здійснити розв’язування задачі, розв’язуюча система повинна володіти ***засобами розв’язання*** – числами, фігурами, поняттями, деяким набором операцій перетворення (складанням, множенням і т. п.), а також ***способами розв’язування*** – послідовностями операцій, за допомогою яких розв'язується задача (сюди входять алгоритми, розпорядження, зразки рішень і т. п.).

Відомо, що під час формулювання поняття важливо знайти його ознаки. На думку А. М. Сохора, характерна особливість задач полягає у необхідності здогадки, евристики, на відміну від алгоритмічного характеру прикладів і вправ. І. Я. Лернер ознаками будь-якої задачі визначає такі:

1) наявність мети розв’язку, що диктується вимогою чи запитанням до задачі;

2) необхідність урахування умов і факторів, що являються передумовою застосування способу розв’язування і правильності самого розв’язку;

3) наявність чи необхідність виявлення і побудови способу розв’язування.

Змістом задачі І. Я. Лернер вважає проблему, в основі виникнення якої лежить суперечність між відомим і невідомим. Таке трактування задачі відрізняється від поширеного в педагогічних дослідженнях, де будь-яке завдання, що вимагає для свого виконання яких-небудь дій, розглядається як задача, а будь-яка пізнавальна дія – як розв’язування пізнавальної задачі.

Розуміння задачі визначається не тільки розкриттям її змісту, але і її структурою. Розглянемо основні підходи до виділення структурних елементів. Так, Ю. Н. Кулюткин виділяє в структурі задачі два компоненти:

- умова, тобто наявну сукупність об'єктів, впорядкованих певними відносинами;
- вимога, вказуючи на те, що потрібно шукати в даній умові.

Також два компоненти виділяє в задачі А. Ф. Эсаулов: умова і вимога. Умова розуміється як «певні інформаційні системи, з яких слід виходити при спробах рішення», а вимога – як те, до чого треба прагнути або що потрібно досягти в процесі перетворення інформаційних систем». Л. М. Фрідман виділяє такі елементи в структурі задачі: умова, вимога і оператор. Під оператором задачі він розуміє сукупність тих дій (операцій), які треба провести над умовою задачі, щоб виконати її вимоги. [14]

Більш узагальнений підхід до рішення питання про структуру задачі здійснений академіком В. М. Глушковим. Він в задачі розділяє задачну і розв’язуючу системи. До задачної системи відносяться умови і вимоги задач. У розв’язуючу систему входять наукові методи, способи і засоби, які в нашому розумінні є джерелами створення конкретних алгоритмів і евристик для розв’язування задач.

Ю.М.Колягін підходить до характеристики задачі, використовуючи поняття системи, визначаючи її як дещо ціле, абстрактне і реальне, що складається із взаємозалежних частин: елементів деякої множини і їх властивостей.

Ю.М.Колягін в математичній задачі виділяє такі компоненти:

- початковий стан (умова задачі);
- кінцевий стан (висновок задачі);
-розв’язування (перетворення умови для знаходження шуканого);
- базис розв’язування (його теоретична основа)

вважаючи математичними всі задачі, в котрих перехід від початкового стану до кінцевого здійснюється математичними засобами.

Доцільно до визначення навчальної задачі підходити з позицій кібернетики, тобто разом з виділенням в задачі задачної системи виділяти і розв’язуючу систему. Такий підхід принципово по-новому визначить як процес розв’язування задач, так і процес навчання учнів їх розв’язуванню. При цьому навчальна задача розглядається у вигляді системи, що включає задачну і розв’язуючу підсистеми, і визначається взаємодіями між ними. Задана підсистема як складова частина задачі існує об'єктивно і задається учням завданнями і вправами в підручнику (може створюватися вчителем або учнем). Але задачі з'являється для суб'єкта за умови, якщо вона припускає для досягнення вимог ситуацій задачі певних перетворень із сторони розв’язуючого.

1.3. Нестандартні задачі і їх розв’язування

Розв'язування задачі — це «процес перетворення її умови, який здійснюється на основі знань з тієї галузі, до якої належить задача, певних логічних правил виводу і особливих правил інтуїтивного (евристичного) характеру». В найбільш загальному плані можна сказати, що цей процес складається з таких етапів: аналіз задачі, пошук плану розв'язування; здійснення знайденого плану розв'язування (розв'язання); з'ясування, що здобутий результат задовольняє вимогу задачі (перевірка розв'язання); аналіз розв'язування (з'ясування прийомів розв'язування, розгляд інших способів розв'язування).

Зазначені етапи в тій або іншій мірі діяльності мають місце і знаходять застосування і в методиці розв'язування задач 1-4 класів. При цьому виділяють здебільшого такі чотири етапи:

1) ознайомлення із змістом задачі;
2) аналіз задачі і відшукання плану розв'язування;

3) розв'язання задачі;

4) перевірка розв'язування. Розглянемо методику роботи на кожному з цих етапів.

1) Ознайомлення із змістом задачі. Усвідомлення змісту задачі — необхідна умова її розв'язання. Учень не повинен приступати до розв'язування задачі, не зрозумівши її умови. Тому ознайомлення з задачею містить власне опанування її змісту і перевірки усвідомлення його дітьми.

Приступаючи до розв'язування задачі, важливо сприйняти її в цілому, а потім вже розбивати на окремі частини. При фронтальному ознайомленні вчитель читає (або переказує) задачу двічі. Першого разу задачу читають з метою ознайомлення з її змістом в цілому. Другого разу задачу читають частинами і так, щоб кожна частина містила певну смислову «одиницю» тексту. Поділ задачі на частини здебільшого передбачає виділення окремих числових даних її. Під час другого читання доцільно на дошці записувати умову. Читаючи задачу, вчитель паузами та інтонацією виділяє числові дані та слова, що визначають вибір дії та запитання задачі. Якщо в задачі є маловідомі дітям терміни, то їх слід пояснити заздалегідь, застосовуючи для цього предметне ілюстрування або малюнки.

Щоб перевірити, як учні усвідомили умову задачі, вчитель задає учням запитання (за смислом окремих частин) або пропонує переказати всю задачу. З метою активізації контрольного повторення задачі слід наперед ставити перед учнями те або інше завдання. Наприклад: «Послухайте задачу і повторіть вголос її запитання», «Прочитайте задачу самостійно і скажіть, що нам відомої про .».

2) Аналіз задачі і відшукання плану її розв'язування. Учень зможе успішно розв'язати задачу, якщо розумітиме значення слів і виразів, з яких вона побудована. На початку навчання і при розгляді нових задач

усвідомлення значення слів та зв'язків між величинами досягається через відтворення тієї реальної проблемної ситуації, моделлю якої є задача. В подальшому дедалі частіше застосовується вербальний (словесний) аналіз (розбір) задачі.

Вербальний аналіз в широкому розумінні містить, з одного боку, семантичний аналіз, а з другого — знаходження способу розв'язування її. Суть семантичного аналізу полягає в тому, що на основі аналізу тексту задачі визначають окремі значення величин, а також відношення, що їх пов'язують.

Під час аналізу треба з'ясувати, скільки величин розглядається в задачі та які вони мають значення. Задавання кожного значення величини звичайно складається з трьох частин: назви величини, зазначення особливості певного значення і числове значення, якщо воно відоме (задане). Якщо числове значення не задано, то воно є невідомим, і якщо, крім того, в завдання цього невідомого значення входить запитання «скільки»?» чи вимога «знайти», то це значення шукане .

3) Розв'язання задачі — це виконання арифметичних дій відповідно до складеного плану. Планом користуються і тоді, коли задачу розв'язують за допомогою складання виразу чи рівняння. Виконуючи дії, учні коментують їх: що знайдено за допомогою кожної дії. При усному розв'язуванні задачі необов'язково щоразу називати питання плану повністю. Можна практикувати короткі коментарі.

4) Перевірка розв'язання є складовою частиною і характерною рисою математичної діяльності. Перевірити розв'язання задачі — це з'ясувати, правильне воно чи ні. Для вчителя цей процес є засобом виявлення прогалин у знаннях учнів, а в поєднанні з аналізом та оцінкою — засобом виховання інтересу до вивчення математики. Треба поступово виховувати в дітей почуття необхідності самоперевірки, ознайомлювати їх із найбільш доступними прийомами перевірки. З цією

метою слід проводити бесіди, в яких аналізувати допущені учнями помилки.

У процесі розв'язування простих задач учні дістають деякі уявлення про структуру задачі. При цьому учителі пропонують деякі спеціальні запитання і завдання, проте вони здебільшого зводяться до вимоги розчленувати задачу на умову і запитання: повторення умови задачі, її запитання; читання задачі і виділення в ній запитання; читання умови задачі про себе, а вголос — тільки запитання; визначення, що в задачі відомо, а що невідомо. Щоб підкреслити основну відмінність складеної задачі від простої, ставлять, наприклад, такі запитання: Чи можна розв'язати задачу однією дією? Чому не можна розв'язати задачу однією дією? Яку маємо задачу — просту чи складену? Такі запитання корисні, але вони не охоплюють усіх компонентів поняття "задача". Роботу в цьому напрямку потрібно урізноманітнити.

У підручниках для початкових класів переважна більшість задач містить запитання зі словом "скільки", решта задач містить запитання із такими словами та виразами: “Чому дорівнює .?”, “Знайти .”, “Обчислити”. Кількість цих задач з кожним наступним кроком зростає, але за змістом вони належать до практичних задач. Це є однією з причин того, що вимогу задачі учні розуміють як речення, яке починається зі слова "скільки".

Щоб запобігти такому стереотипу, слід іноді перебудовувати запитання. Наприклад, замість "Скільки літрів бензину залишилося?" запитуємо "Яка остача бензину?" або "Знайти остачу бензину", "Чому дорівнює остача бензину?" Узагальнюючим словом тут є "остача". Запитання "Скільки учень заплатив за всю покупку?" можна перебудувати так: "Яка вартість всієї покупки?" або "Обчисліть вартість всієї покупки". Запитання без слова "скільки" пропонує вчитель, а перебудоване запитання, яке містить слово "скільки", формулюють учні.

Для розвитку уявлень учнів про структуру задачі дуже корисними є вправи на перетворення та складання задач. Для простих задач основними вправами є добір запитання до умови або добір умови до запитання. До творчих завдань належать: складання задач за даним розв’язком, за малюнком; порівняння задач; перетворення даної задачі в споріднену (в них величини пов'язані однаковою залежністю). Розв'язування даної задачі та складання задачі, оберненої до неї, пов'язано з необхідністю ще раз розглянути залежності між величинами, але під іншим кутом зору. Це сприяє глибшому усвідомленню не тільки залежності між величинами і способу розв'язування задачі, а й її структури.

Свідоме вивчення математики і розвиток мислення учнів стимулюється самостійним складанням (конструюванням) математичних задач. При цьому, по-перше, виховується самостійність (діти оперують вивченими об'єктами і фактами математики, тобто розглядають та оцінюють властивості, відмінності і характерні особливості цих об'єктів); по-друге, розвивається їхня творча розумова активність.

Немає загальноприйнятого визначення поняття «задача». Існує близько 20 визначень, наприклад, математичною задачею наивається задача, що розвязується математичними методами. Або: Матемвтична задача – це яка-небудь вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм і кількісних відносин.

Розділ 2 Аналіз та синтез нестандартних задач і відшукання способів їх розв'язування

2.1. Що ж таке нестандартна задача? Постановка і розв’язування проблем при навчанні математики

Головний засіб творчого мислення учнів — розв’язування нестандартних задач або задач стандартного вигляду, які розв’язуються нестандартними методами.

Що ж таке нестандартна задача? Це задача, для якої в курсі математики немає загальних правил і положень, які визначають точну програму їхнього розв’язування.

Під час розв’язування нестандартної задачі учні повинні:

- ознайомитися з умовою задачі;
- скласти план її розв’язання;
- скласти математичну модель та розв’язати її;
- проаналізувати здобуту відповідь та метод розв’язання задачі.

Головна мета задач розвивати творче мислення учнів, зацікавити їх математикою, підвести до відкриття математичних фактів. Прикладом такої задачі є: знайти об’єм піраміди, якщо всі її бічні ребра взаємно перпендикулярні і дорівнюють відповідно 15, 16 і 17. Розв’язуючи цю задачу стандартним способом, діти “заплутуються” в обчисленні площі основи за допомогою формули Герона. Значно простіше ця задача розв’язується нестандартним способом. “Перевернувши” піраміду бічною гранню на основу, діти бачать, що одне ребро є висотою піраміди, а в основі лежить прямокутний трикутник.

Оскільки епоха, що настала, — це епоха змін, інновацій, епоха інтелекту, то вона й диктує свої умови життя, висуває нові вимоги до людини. Якісно нові зміни в суспільстві переконують, що найбільшою цінністю є неповторна людська особистість з її нахилами, вподобаннями, обдаруваннями.То ж виявлення розумової обдарованості (інтелектуальної і творчої), спеціальних здібностей у дітей, їх розвиток і реалізація є однією з актуальних проблем на сучасному етапі розвитку педагогічної теорії та практики. Саме тому навчання і виховання обдарованих учнів необхідно здійснювати з опорою на наступні дидактичні принципи: індивідуалізації і диференціації навчання, довіри і підтримки, а також залучення обдарованих учнів до участі у житті школи.

Нестандартні, дослідницькі задачі , які вчитель включає у структуру роботи, обдаровані діти сприймають як виклик власному інтелекту. Інтелектуальний і естетичний заряд шкільного курсу математики значно підвищується, коли на уроці, а також під час інших форм спілкування з школярами застосовувати ігрові елементи, яскраві історичні повідомлення, цікаві “красиві задачі”.

Обов’язковою передумовою розвитку обдарувань школярів як на уроці, так і в позаурочний час повинна виступати проблемність викладання.

Творчість учнів, новизна і оригінальність їх навчальної діяльності проявляються тоді, коли вони самостійно ставлять проблему і знаходять шляхи її розв’язання. При цьому слід добиватись постійного зростання рівня творчості обдарованих дітей, знаходити оптимальні співвідношення всіх видів їх діяльності, щоб одержати найкращі результати. Вчителю треба звернути увагу на те, що ставлячи проблему, варто залишати “нерозв’язані питання”, відповідь на які учні повинні одержати самостійно з різних джерел: літературних, експериментальних, шляхом консультацій тощо.

При розв’язуванні нестандартних задач з обдарованими дітьми можуть бути використані наступні форми навчання: індивідуальні, фронтальні, групові. Фронтальні заняття — дискусії, організаційно-діяльні ігри (ОДІ), рольові ігри. Групові заняття — це постійні групи з переміною функцій їх учасників, груповий поділ класу з однаковим завданням, з різним завданням, із загальним звітом кожної групи перед всім класом.

Математичні гуртки є основною формою позакласної роботи з математики. Заняття в них доповнюють роботу на уроках і дають можливість задовольнити інтереси та бажання учнів, що виходять за межі навчальної програми. У процесі гурткової роботи учні вчаться розв'язувати математичні проблеми, працювати з математичною літературою, готуються до участі в математичних олімпіадах.

Олімпіада — це свято, на якому сяють яскраві математичні ідеї і красиві судження. Проте успіх на такому святі чекає того, хто ретельно до нього готувався. Без системної роботи на уроці і після уроків велика перемога в олімпіаді неможлива.

Активний пошук способів розв'язання задач — це процес творчого мислення, що є необхідною умовою творчої діяльності. Розв'язуючи нестандартні задачі учні краще будуть готові до розв'язування різноманітних задач, які висуває життя, практична діяльність людини.

Процес розв'язування будь-якої нестандартної задача полягає у послідовному застосуванні двох основних операцій:

- Зведення (шляхом перетворення або переформулювання) нестандартної задачі до іншої, їй еквівалентної, але уже стандартної задачі;
- Розбиття нестандартної задачі на декілька стандартних підзадач.

В залежності від характеру нестандартної задачами використовуємо одну із цих операцій або обидві. При розв'язуванні більш складних задач ці операції доводиться застосовувати багаторазово.

Не існує єдиного методу розв'язання нестандартних завдань. Навпаки, кількість методів постійно поповнюється. Деякі завдання можна вирішити кількома різними методами або комбінацією методів. Характерна особливість таких завдань в тому, що розв'язання з вигляду нескладної проблеми може вимагати застосування методів, що використовуються в серйозних математичних дослідженнях. Нижче наводиться (за визначенням) неповний список методів вирішення нестандартних завдань: принцип Діріхле, доказ від протилежного, розв'язання методами іншої науки (заміна алгебраїчної задачі геометричної або фізичної і навпаки), правило крайнього, розв'язання з кінця, пошук інваріанта, побудова контрприклада, математична індукція, рекурсія, метод ітерацій, підрахунок двома способами, метод аналогій, провокаційний метод, допоміжна побудова, перехід у простір більшого числа вимірювань, допоміжна розмальовка.

Елементарна математика - це математика, зігріта духом її великих творців, їхнім ентузіазмом і романтикою пошуку істини, математика, в якій абсолютна першість належить не пам'яті, а мисленню. Предметом такої математики є не застиглі форми у вигляді усталених правил, теорем, ознак і формул, які треба завчити, щоб потім використовувати для розв'язування простеньких задач - логічних одно-двоходівок, а жива, одухотворена гармонійна споруда, до принад якої не можна долучитися, не розв'язуючи цікавих і змістовних задач. Розв'язуванням планіметричних задач досягаються як навчальні та розвиваючі, так і виховні цілі. Є серед "шкільних" задач і такі (зазвичай їх позначають зірочками), розв'язування яких здатне висвітлити окремі характерні грані справжньої дослідницької діяльності в галузі математики. Звичайно, це не ті одно-двоходівки на підстановку числових даних у готові формули чи на дії за відомими алгоритмами і правилами, а задачі, в яких потрібно самому знайти (тобто по-справжньому відкрити для себе) сам спосіб дій. Яскравими прикладами таких задач є задачі на побудову в геометрії.

Особлива цінність нестандартних задач в тому, що при їх розв'язуванні використовуються схеми міркувань, характерні для реальної дослідницької діяльності в галузі математики. Це, наприклад, метод доведення від супротивного, метод координат, векторний метод, традиційний геометирчний метод тощо. Саме тому ці задачі є надзвичайно популярними на всіляких математичних конкурсах та олімпіадах. Отже, ознайомлення з ними та деякими методами їх розв'язування сприятиме і успішному виступу на таких змаганнях. Пропонований матеріал можна використовувати для занять гуртка, підготовки олімпійців, індивідуальної роботи із здібними до математики учнями і, звичайно, на уроках.

Зміст додаткового навчання математики поглиблює і розширює зміст шкільного курсу математики. Додаткове навчання орієнтовано на формування умінь розв’язувати складні і нестандартні задачі, засвоєння фундаментальних ідей і методів математики.

Цілями додаткової до шкільної математичної освіти є:

1. формування в школярів інтересу до математики та її застосувань, до занять математикою;

2. розвиток математичних здібностей учнів, різних видів мислення (образного, логічного, комбінаторного тощо);

3. поглиблення і розширення знань учнів з математики, отриманих у шкільному курсі математики, забезпечення міцного і свідомого їх засвоєння, підготовка до продовження освіти;

4. поглиблення і розширення знань учнів про числа, геометричні фігури;

5. посилення тих змістових ліній шкільного курсу математики, що мають у ньому недостатній розвиток, а саме: функціональної, векторно-

6. Аналіз задачі і побудова її схематичного запису необхідні головним чином для того, щоб знайти спосіб розв'язання даної задачі.

Пошук цього способу складає третій етап розв'язування.

Коли спосіб розв'язування задачі знайдений, його необхідно виконати - це буде вже четвертий етап процесу розв'язування.

Після того як розв'язування виконано (письмово чи усно), необхідно впевнитись, що це розв'язування правильне і задовольняє всім вимогам задачі. Для цього проводять перевірку, що складає п'ятий етап процесу розв'язування.

При розв'язуванні багатьох задач, крім перевірки, необхідно ще провести дослідження задачі, а саме: встановити, за яких умов задача має розв'язок і скільки різних розв'язків існує у кожному конкретному випадку; за якої умови задача зовсім не має розв'язку. Все це складає шостий етап процесу розв'язування.

Впевнившись у правильності розв'язування і, якщо потрібно, виконавши дослідження задачі, необхідно чітко сформулювати відповідь - це буде сьомий етап процесу розв'язування.

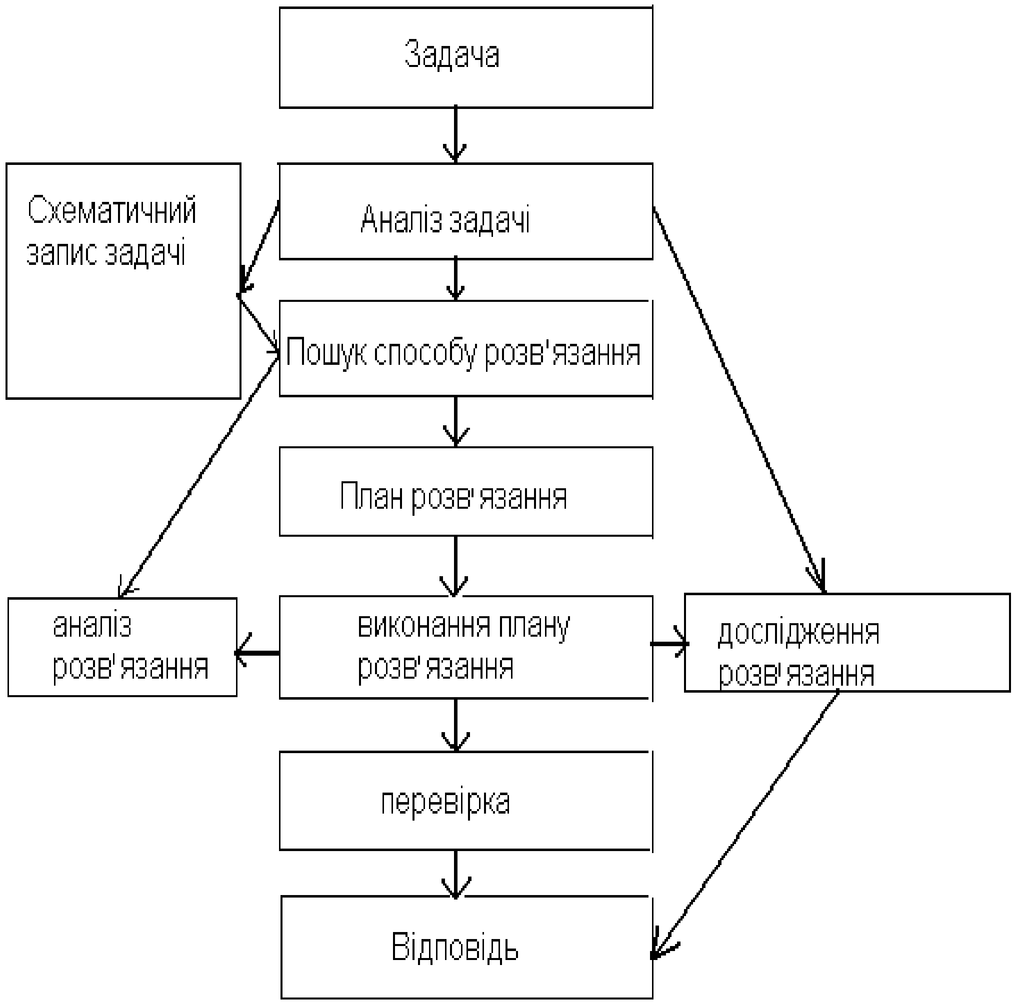
Нарешті, в навчальних і пізнавальних цілях корисно також провести аналіз виконаного розв'язування, тобто встановити, чи нема іншого, більш раціонального способу розв'язування, чи не можна задачу узагальнити, які висновки можна зробити із цього розв'язування. Все це складає останній - восьмий етап розв'язування.

Отже, весь процес розв'язування задачі можна розділити на вісім етапів:

- 1-й етап - аналіз задачі;
- 2-й етап - схематичний запис задачі;
- 3-й етап - пошук способу розв'язування задачі;
- 4-й етап - виконання розв'язування задачі;
- 5-й етап-перевірка розв'язку задачі;
- 6-й етап - дослідження задачі;

- 7-й етап - формулювання відповіді задачі;
- 8-й етап - аналіз розв'язування задачі.

Схема розв’язання задачі табл.1



Математичні задачі, для розв'язування яких в шкільному курсі математики існують готові правила, або ці правила безпосередньо випливають з означень чи теорем, що визначають програму розв'язування цих задач у вигляді послідовності кроків, називають стандартними. При цьому передбачається, що для виконання окремих кроків розв'язування стандартних задач в курсі математики існують конкретні правила.

Процес розв'язування стандартних задач має деякі особливості.

1. Аналіз задач зводиться до встановлення (розпізнавання) виду задач, до якого належить дана задача.

2. Пошук розв'язування полягає у складанні на підставі загального правила (формули, тотожності) або загального положення (означення, теореми) програми – послідовності кроків розв'язування задач даного виду. Звичайно, немає-необхідності цю програму формулювати в письмовій формі, достатньо її для себе намітити усно.

3. Саме розв'язання стандартної задачі полягає у застосуванні цієї загальної програми до умови даної задачі. Якщо деякі кроки програми розв'язування вимагають для свого виконання використання також інших програм, то стосовно них проводяться ті самі операції (розпізнавання виду задачі, складання програми розв'язування і виконання розв'язування на основі цієї програми). Звідси походить, що для того щоб легко розв'язувати стандартні задачі (а вони є основними математичними задачами, оскільки всі інші зрештою зводяться до них), треба:

- пам'ятати всі вивчені в курсі математики загальні правила (формули, тотожності) і загальні положення (означення, теореми);
- вміти розгортати згорнуті загальні правила, формули, тотожності, а також означення і теореми у програмі - послідовності кроків розв'язування задач відповідних видів.

У визначенні стандартних задач як основну ознаку цих задач вважають наявність в курсі математики таких загальних правил чи положень, які однозначно визначають програму розв’язання цих задач і виконання кожного кроку цієї програми.

Звідси зрозуміло, що нестандартні задачі - це такі задачі, для яких в курсі математики немає загальних правил і положень, що визначають точну програму їх розв’язування.

Процес розв’язування будь-якої нестандартної задача складається у послідовному застосуванні двох основних операцій:

1. Зведення (шляхом перетворення або переформулювання) нестандартної задачі до іншої, їй еквівалентної, але уже стандартної задачі;

2. Розбиття нестандартної задачі на декілька стандартних підзадач.

В залежності від характеру нестандартної задачами використовуємо одну із цих операцій або обидві. При розв'язуванні більш складних задач ці операції доводиться застосовувати багаторазово.

Типи задач:

1. алгоритмічні;
2. напівалгоритмічні;
3. евристичні.

Алгоритмічні – задачі, для розвяз. яких є алгоритм. Розвязуються за допом. безпосер. застос. визначення, формули, доведеної теореми. Роль таких задач – навчити учнів діяти в стандартних умовах.

Напівалгоритмічні - задачі, правила розвязання яких носять узагальнений характер і не м.б. зведені до об'єднання елементарних кроків, але зв'язки між елементами легко виявляються. Розвязуючи їх, учень вчитися застосовувати алгоритми в різних ситуаціях, відбувається узагальнення правил розвязання задач.

Евристичні - задачі, для розвязання яких необх. з'ясувати деякі приховані зв'язки між елементами умови і вимоги або знайти невідомий спосіб розвязанняня.

Така типологія задач дає зрозумілий напрям діяльності вчителя по організації навчання учнів розвязуванню задач.

Обовязкові вимоги до розвязування задач:

- безпомилковість;
- обгрунтованість;
- повнота розвязку, вичерпний характер.

Бажані вимоги:

- найбільша простота розвязку;
- належний його запис;
- пояснення шляхів розвязання;
- можливе узагальнення розвязку задачі.

Етапи розвязання задачі:

1. Засвоєння змісту задачі.
2. Складання плану розвязання задачі.
3. Реалізація плану розвязання.
4. Аналіз і перевірка правильності розвязку задачі.

Організація навчання розвязанню задач.

Фронтальне розвязання задач - розвязання однієї і тієї ж задачі всіма учнями класу в один і той же час:

1. Усне фронтальне ррозвязання;
2. Письмове розвязання із записом на класній дошці;
3. Письмове самостійне розвязання;
4. Коментування розвязання.

При обговоренні розвязання задачі потрібно зупинитися на наступних питаннях:

- більш повне викор. умови задачі;
- обговорення роботи з пошуку розвязання;
- виявлення зв'язків з раніше розвязаними задачами.

2.2. Прийоми аналітико-синтетичного пошуку розв’язання задач

Користуючись цікавими задачами, бажано зважати на таке:

- для роботи над ними виділяти 7-10 хвилин уроку не менш як 2-3 рази на тиждень;

- на уроці додаткові вправи слід комбінувати з програмними (стандартними) так, щоб попереднє завдання готувало учнів до виконання наступного і щоб ця робота ґрунтувалася на використанні життєвого досвіду дитини;

- особливу увагу слід приділяти розкриттю сюжету цікавої вправи, добиватися, щоб діти усвідомили кінцеву мету завдання;

- розкривати умови задач емоційно і образно, спираючись на наочність;

- не обов’язково, щоб учень розв’язав додаткову задачу самостійно, важливо створювати такі ситуації, щоб він подумав над задачею, спробував її розв’язати;

- при розв’язуванні творчих вправ має всебічно реалізуватися принцип диференційованого підходу;

- під час самостійного розв’язання творчих вправ не варто обмежувати дітей у виборі способів їх розв’язання;

- не слід показувати хід розв’язування, значно важливіше правильно спрямувати думку учня, головне – не кінцевий результат, а сам процес розв’язування;

- потрібно практикувати повторне розв’язування цікавих задач.

Розв’язування задач є специфічною особливістю інтелекту, а інтелект – це особливий дар людини. Тому, розв’язування задач може бути представлене як один з найхаратерніших виявів людської діяльності.

Підбором задач вчитель повинен допомогти учневі зрозуміти, що математична задача теж може бути цікавою і привабливою, а напружена розумова робота у випадку перемоги може принести багато радості.

Вихованню інтересу учнів до математики, розвитку їхніх математичних здібностей сприяє використання в навчальному процесі різних видів цікавих задач.

Розглядаючи різні види цікавих завдань, ми дійшли висновку, що найбільший вплив на розвиток математичних здібностей школярів мають вправи:

- логічного змісту;
- комбінаторні;
- з елементами дослідження;
- на кмітливість.

Досвід вчителів переконує, що вже в початкових класах слід проводити дослідницьку роботу. Це дозволяє показати учням роль індукції, спостереження, експерименту і дати можливість поряд із навичками логічного мислення прищеплювати навички евристичного мислення, показати їм шлях до математичної творчості.

Постійна робота над цікавими задачами спрямована на відшліфування елементарних розумових операцій, формування критичного мислення в учнів, загального розкріпачення, гнучкості їхнього мислення.

Мати гнучне мислення – значить, насамперед, бути в змозі негайно відмовитись від звичайного способу дії, коли він перестає бути ефективним, змінивши його новим, незвичним, який відповідає новим умовам, що склалися.

В процесі розв’язування цікавих задач школярі набувають навичок роботи за планом, економного вибору засобів для досягнення мети, обгрунтування та аналізу своїх дій. Кінцева мета при цьому полягає в тому, щоб учні навчились самостійно знаходити розв’язок будь-якої доступної їм задачі.

Система навчання розв’язуванню цікавих задач повинна забезпечити поступове наростання складності виконуваної роботи і бути органічно пов’язаною з розвитком в учнів логічного мислення.

У психології мислення, як було зазначено вище, встановлено, що процес мислення - це перш за все аналізування і синтезування того, що виділяється аналізом, це потім абстракція і узагальнення, які є похідними від них (19). Отже, процес вирішення завдань тісно пов'язаний з формуванням таких прийомів мислення як аналіз, синтез, узагальнення, абстрагування та ін.

Виділяють дві основні форми аналізу:

- чуттєвий аналіз, тобто аналіз чуттєвих образів, предметів і явищ;
- абстрактно-логічний аналіз, тобто розумовий аналіз словесних образів, який здійснюється за допомогою понять, думок, які висловлюються в мовах (знакові системи науки).

Для методики і практики навчання математики аналіз і синтез, як загальні операції, що лежать в основі діяльності учнів, грає особливо важливу роль. Аналіз і синтез в навчанні математики виступають в найрізноманітніших формах: як методи розв’язування задач, доведення теорем, вивчення властивостей математичних понять і ін.

Аналіз і синтез практично нероздільні одне від одного, вони супроводжують один одного, доповнюють один одного, складаючи єдиний аналітико-синтетичний метод.

Аналіз є процес уявного або реального розкладу предмета (явища, процесу), властивостей або відносин між предметами на частини (ознаки, властивості, відносини). Синтез, як процедура зворотна аналізу, полягає в поєднанні (об'єднанні) частин предмета, явища або процесу в єдине ціле. Наприклад, розклад складної задачі на ряд елементарних завдань є синтезом, а об'єднання знайдених рішень елементарних завдань є синтезом. Іншим прикладом може служити структурний аналіз процесу навчання.

Аналіз в процесі пошуку рішення задачі або доведення теореми може за формою бути або спадним, або зростаючим. При спадному аналізі, виходячи з припущення про істинність доведення твердження, отримують систему наслідків, необхідних для існування доведеного твердження. Спадний аналіз вимагає синтезу - протилежного ходу міркування.

Зростаючий аналіз має на меті довести, що відомі (дані за умовою) відношення є достатніми для існування доведеного твердження. Зростаючий аналіз містить в собі і синтез, тому він не потребує протилежних міркувань.

Зростаючий аналіз має певні методичні переваги: забезпечує свідомий і самостійний пошук доведення; сприяє розвитку логічного мислення, забезпечує розуміння і цілеспрямованість дій на кожному етапі роздумів.

Схема методу проста. Вона зводиться до вирішення двох питань: що треба знайти, довести і що для цього достатньо знати?

Необхідно відзначити, що в молодших класах доцільно здійснювати пошук розв'язку задач, доводити теореми за допомогою спадного аналізу. Це пов'язано з тим, що виводити необхідні ознаки легше, чим підбирати достатні умови для виконання відповідних висновків, тверджень.

В даному параграфі розглянемо прийоми Зростаючий аналізу для пошуку розв'язку задач на прикладі геометричних задач на обчислення, доведення і побудову.

Задача. Визначити радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, якщо бічні сторони трикутника відповідно рівні б см і 5 см.

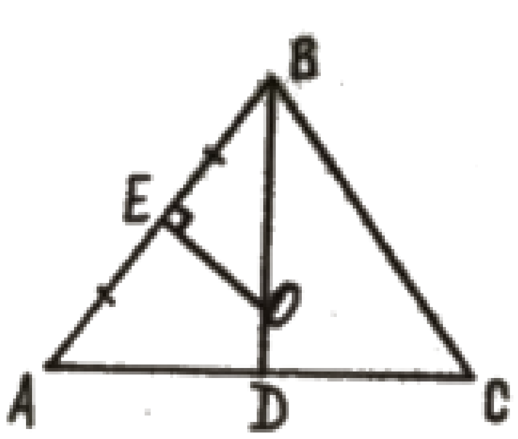


Рис.8

Дано: ΔABC, $AB = BC = 5$ см, $AC = 6$ см, OB − радіус описаного кола.

Знайти: OB.

Виконаний малюнок за умовою задачі (рис.8) дозволяє висунути припущення про те, що радіус ОВ описаного навколо рівнобедреного трикутника кола доцільно шукати, виходячи з подібності прямокутних трикутників $AВD$ і $\mathrm{OB}E$ ($\angle \mathrm{OB}E$ спільний).

Оскільки, $\Delta\mathrm{OB}E\sim\Delta\mathrm{AB}D$, то $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{B}E}{\mathrm{AB}}$, звідси,

1) $\mathrm{OB}=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B}E}{\mathrm{B}D}$, де $\mathrm{B}E$ і $\mathrm{B}D$ невідомі;

2) $\mathrm{B}E=\frac{1}{2}\cdot A\mathrm{B}$, де $A\mathrm{B}$ відомо;

3) $\mathrm{B}D^2=A\mathrm{B}^2-AD^2$, де AD невідомо;

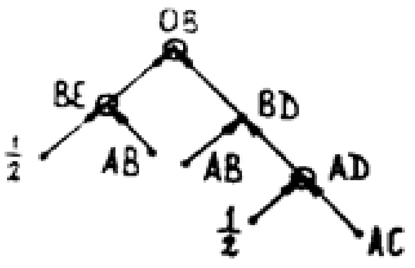
4) $AD=\frac{1}{2}\cdot AC$, де AC відомо.

Пошук розв’язку даної задачі закінчений. Тут не були виконані обґрунтування кожного кроку пошуку, так як вони очевидні.

Було звернуто увагу на інше, а саме на те, що невідоме в кожній формулі, що треба шукати. Дійсно, виявивши на першому кроці аналізу, що величини ВE і ВD невідомі, ми підбираємо для їх відшукання необхідні формули. Цей процес триває до тих пір, поки ці невідомі величини не будуть виражені через відомі. Для того, щоб записати розв’язок задачі, досить здійснити зворотний (протилежний) перехід від четвертої дії до першої. Для полегшення виконання зазначених в пошуку розв’язку дій можна послідовно виконувати відповідні обчислення.

Виконаний пошук дозволяє побудувати модель пошуку розв’язку задачі.

З цією метою побудуємо орієнтований графік пошуку її вирішення за допомогою зростаючого аналізу (ребра графіка спрямовані вгору, що означає: "досить знайти", "досить довести") (рис.9).



перший рівень

другий рівень

третій рівень

Рис.9

четвертий рівень

Міркування, виконані в протилежному напрямку від вершин, розташованих на четвертому рівні графіка, до вершини - на першому рівні є синтез (розв’язок задачі).

Однак, як було сказано вище, в цьому немає логічної необхідності, оскільки зростаючий аналіз забезпечує побудову достатніх умов для умови задачі, яка є наслідком її умови, а вірні умови при правильному міркуванні не можуть дати невірного значення шуканого.

Задача. Визначити площу рівнобедреної трапеції, у якій основи дорівнюють 10 см і 26 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін (рис.10).

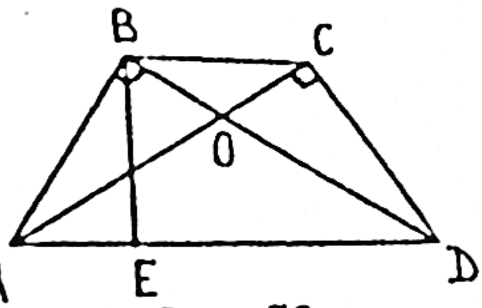


Рис.10

Дано: $ABCD$- трапеція, $AB = CD, AC \perp CD,$

$BD \perp AB, \quad BC = 10см, AD =$ 26

Знайти: $S_{тр.}$

Виконаємо аналітичний пошук розв’язку даної задачі:

1) $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AE,$ де BC і AD відомо, BE невідомо;

2) $BE^2 = AE \cdot ED$, де AE і ED невідомі;

3) $AE = \frac{1}{2}(AD - BC)$ де AD і BC відомі;

4) $ED = AD - AE,$ де AD відомо, AE невідомо, але було визначено вище на 3-му кроці пошуку рішення.

Побудуємо відповідний орієнтований графік пошуку розв’язку задачі (рис.11).

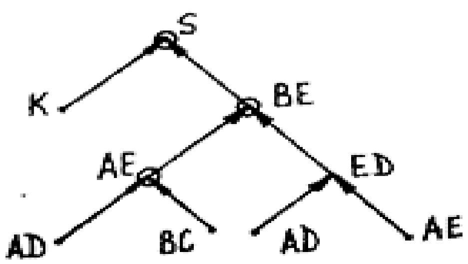


Рис.11

перший рівень

другий рівень

третій рівень

четвертий рівень

Пошук розв’язку задачі закінчений. Зауважимо, що виконаний пошук розв’язку задачі не завершився формулою, в якій невідомі величини визначаються даними задачі (як у випадку пошуку розв’язку задачі). Однак невідома величина AE на останньому етапі пошуку була визначена вище на 3-му кроці отже, спосіб розв’язку задачі знайдений.

Якщо зіставити умови і вимоги задачі, тобто дані і шукане, то в результаті такої розумової операції в геометричних задачах на обчислення можна встановити функціональне відношення між ними. Це відношення може бути як відомим, так і невідомим для суб'єкта, що прийняв задачу з метою її вирішення. Наприклад, в задачі 1 функціональне відношення невідоме, тобто учням невідома формула для знаходження шуканого. В цьому випадку його треба виявити. Раніше було встановлено, що шукане (радіус кола описаного навколо трикутника) може бути знайдено, виходячи з подібності трикутників ABD і OBE ($\angle OBE$ спільний).

У задачі 2 функціональне відношення відомо, тобто відома формула для знаходження шуканого - площа трапеції.

Знаходження або знання функціонального відношення є вихідним моментом в аналітико-синтетичному пошуку розв’язку задачі, а також базисом основного відношення, реалізованого на предметній області задачі. Основне відношення, як результат узагальнення системи відношень, реалізованої в задачі, керує пошуком її розв’язання (гл.2, 3).

Задача. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a і гострим кутом α, прилеглим до цього катета. Бічна грань, що проходить через даний катет, перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані утворюють з основою рівні кути, кожен з яких дорівнює β. Знайти об'єм піраміди.

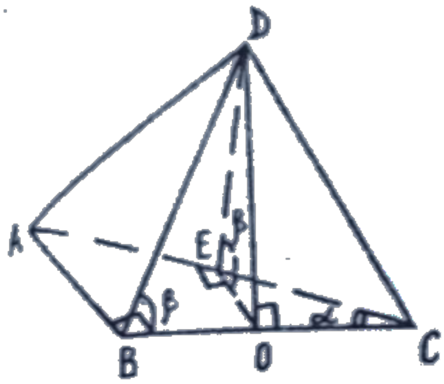


Рис.12

Дано: $DABC$- піраміда, ΔABC- основа піраміди, $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = \alpha, BC = a$, дв. кут $AB = \beta,$ дв. кут $AC = \beta, \Delta DBC \perp \Delta ABC$.

Знайти: V піраміди

Виконаний малюнок по умові завдання (рис.12.) дозволяє відзначити наступне: $\angle DOE = 90° -$ лінійний дв.кута $BC,$ $\angle DEO = \beta -$ лінійний дв.кута $AC,$ $\angle DBC = \beta -$ лінійний дв.кута AB.

У цій задачі функціональне відношення, тобто формула для знаходження шуканого, відома. У позначеннях на малюнку ця формула буде наступною: $V = \frac{1}{6} BC \cdot AB \cdot DO$.

Виконаємо аналітичний пошук розв'язку задачі.

1) $V = \frac{1}{6} BC \cdot AB \cdot DO,$ де BC відомо, AB і DO невідомі;

2) $AB = BC \cdot \tan \angle ACB$, де BC і $\angle ACB$ відомі;

3) $DO = OE \cdot \tan \angle OED$, де OE невідомо, $\angle OED$ невідомий;

4) $OE = OC \cdot \sin \angle ACB$, де OC невідомо, $\angle ACB$ відомий;

5) $OC = BC - OB$, де BC відомо, а OB невідомо;

6) $OB = \frac{DO}{\tan \angle OBD}$, де $\angle OBD$ відомий, а , DO невідомо.

Тут має місце той випадок, коли невідома величина DO в пошуку розв'язку повторюється двічі. Тому пошук розв'язку задачі слід вважати завершеним, так як послідовна підстановка значень величин в протилежному напрямку, починаючи від шостого кроку, включаючи до третього кроку пошуку, дозволяє отримати рівняння з одним невідомим. Дійсно, маємо:

$$OB = \frac{DO}{\tan \angle OBD}, OC = BC - \frac{DO}{\tan \angle OBD}, OE = \left(BC - \frac{DO}{\tan \angle OBD}\right) \cdot \sin \angle ACB,$$

$$DO = \left(BC - \frac{DO}{\tan \angle OBD}\right) \cdot \sin \angle ACB \cdot \tan \angle OED.$$

Так як $\angle OBD = \angle OED = \beta$, то отримуємо:

$DO = BC \cdot \sin \angle ACB \cdot \tan \angle OED - DO \cdot \sin \angle ACB$, звідси випливає, що

$$DO = \frac{BC \cdot \sin \angle ACB \cdot \tan \angle OED}{1 + \sin \angle ACB}$$

Величини, що входять в праву частину формули для знаходження DO, є даними. Тому DO відомо, що дозволяє отримати розв'язок задачі.

Орієнтований графік пошуку розв'язку даної задачі буде наступним (рис.13).

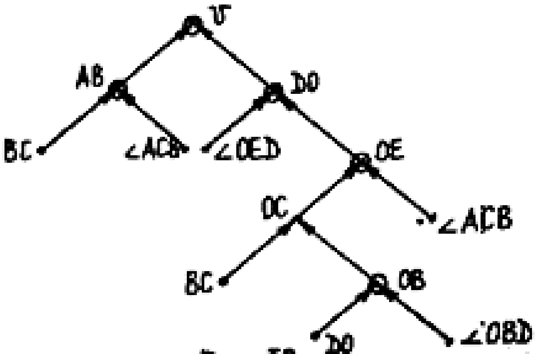


Рис.13

перший рівень

другий рівень

третій рівень

четвертий рівень

п'ятий рівень

шостий рівень

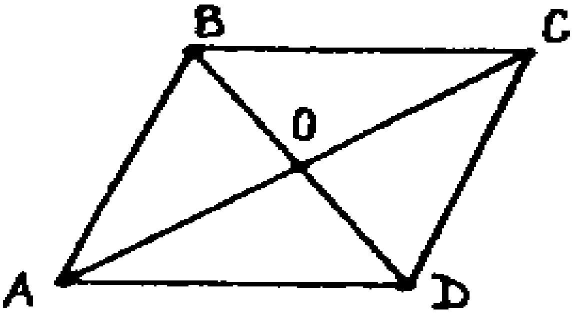


Рис.14

Задача. Знайти сторону ромба, знаючи, що його діагонагоналі відносяться як 1: 2, а площа ромба дорівнює 12 см^2 (рис.14).

Дано: $ABCD$- ромб, BD і AC - діагоналі ромба, $BD{:}\,AC = 1{:}\,2$, площа ромба S = 12 см^2

Знайти: BC.

Приймемо відрізок m за одиницю вимірювання довжини відрізка. Так як

$BD: AC = 1: 2$, то $BD = m$ і $AC = 2m$.

Функціональне відношення невідоме, проте сторону ромба можна знайти за теоремою Піфагора: $BC^2 = BO^2 + OC^2$.

Виконаємо аналітичний пошук розв'язку даної задачі.

1) $BC^2 = BO^2 + OC^2$

2) $BO = \frac{1}{2}BD$

3) $BD = m$

4) $OC = \frac{1}{2}AC$

5) AC=2m

Пошук розв'язку задачі закінчений.

Однак знайти сторону ромба не можна, так як послідовна підстановка значень величин в протилежному напрямку дозволяє встановити, що, $BC^2 = \frac{5}{4}\mathrm{m}^2$, де m невідоме. У цьому випадку виникає необхідність здійснити синтетичний пошук, виходячи з даних задачі, для визначення числового значення одиничного відрізка m. Площа ромба

$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. Враховуючи, що $S = 12\text{см}^2$, $AC = 2m$, $BD = m$, отримаємо:

$\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot m = 12$ або $\mathrm{m}^2 = 12$, тобто $m = 2 \cdot \sqrt{3}$

Зробивши послідовну підстановку знайденого значення т., у виконаний вище пошук розв'язку задачі; отримаємо: $OC = 2\sqrt{3}$, $BO = \sqrt{3}$, отже, сторона ромба $BC = \sqrt{15}$.

Таким чином, для розв'язання даної задачі виникла необхідність здійснити почерговий рух від шуканого (аналіз) до даних (синтез). При цьому синтетичний пошук дозволив знайти те значення невідомої величини, яке аналітичний пошук виявити не зміг. Графік аналітичного пошуку розв'язку задачі буде наступним (рис. 15).

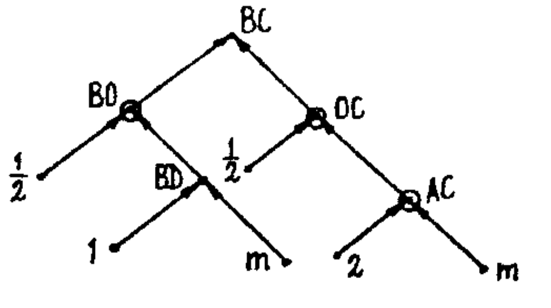


Рис.15

перший рівень

другий рівень

третій рівень

четвертий рівень

Задача. Площина α паралельна стороні BC трикутника ABC і проходить через середину AB. Довести, що площина α проходить так само через середину AC (рис.16).

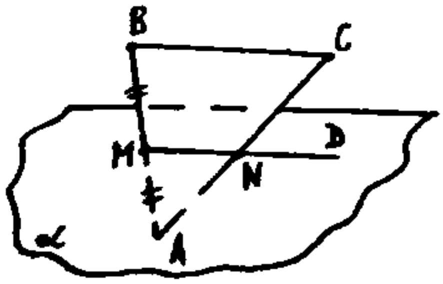


Рис.16

Дано:$\alpha, \Delta ABC, \alpha \parallel BC, AM = MB, M \in \alpha$.

Довести: α проходить через середину AC.

У задачах на доведення і побудову поняття "функціональне" і "основне" відношення збігаються за своїм змістом, що не завжди має місце для геометричних задач на обчислення.

У цій задачі, розглядаючи її як систему відношень, можна виділити наступні:

- відношення паралельності,
- відношення перетину,
- відношення прилеглостіі,
- відношення рівності.

У цій системі відношень на основі узагальнення з урахуванням умов і вимог задачі можна вказати два, відношення, які керують пошуком розв'язку задачі. Це відношення паралельності і відношення перетину. Однак, при виявленні внутрішньої структури задачі повинно бути вибрано одне з них.

Графік пошуку розв’язку задачі на доведення буде наступним (рис.17)

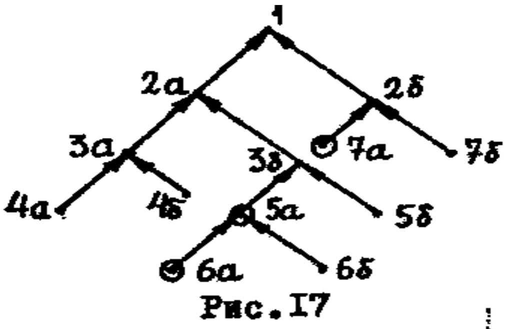


Рис.17

перший рівень

другий рівень

третій рівень

четвертий рівень

п’ятий рівень

Задача. Через три дані точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, провести коло.

Виконаємо пошук розв’язку задачі за допомогою зростаючого аналізу (рис.18).

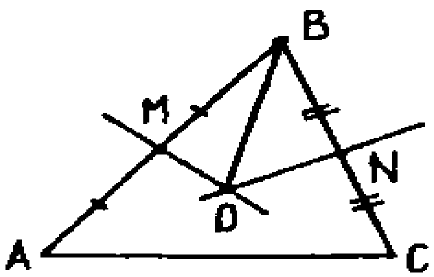


Рис.18

1. Побудувати коло, прояке проходить через три дані точки A, B, C, такі, що $C \notin AB$

2. Для цього досить побудувати точку O рівновіддалену від точок A, B і C.

3. Для реалізації п.2 досить побудувати $O = OM \cap ON$

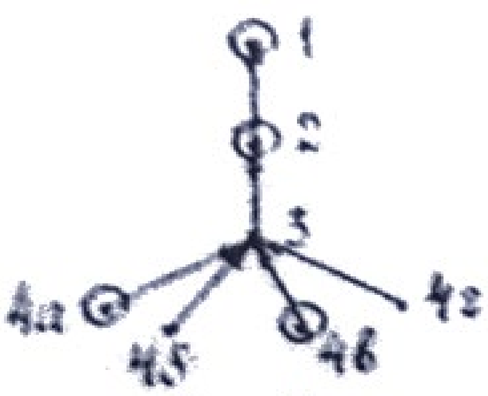


Рис.19

4. Для реалізації п.3 досить побудувати:

а) $OM \perp AB$ б) $AM = BM$, де $M \in AB$;

в) $ON \perp BC$ г) $BN = NC$, де $N \in DC$.

Метод пошуку розв’язку на

побудову буде наступним (рис.19)

У даній задачі за основне відношення слід прийняти відношення перпендикулярності, бо рівновіддаленість точки O від даних точок A, B і C є визначальною умовою.

Отже, ми розглянули деякі особливості аналітико-синтетичного пошуку розв'язання геометричних задач на обчислення, доведення і сторонніх.

Аналітично-синтетичний пошук розв'язку геометричних задач на обчислення є найбільш складним, так як евристична компонента цього пошуку в порівнянні з алгоритмічною є домінуючою.

Нижче пропонується узагальнений прийом, що розкриває механізм пошуку розв'язку геометричних задач на обчислення за допомогою зростаючого аналізу. Цей прийом містить наступну послідовність дій:

1. Записати формулу (функціональне відношення) в позначеннях малюнка для знаходження шуканого завдання.

2. У цій формулі виявити невідомі величини, які досить визначити, щоб знайти шукане.

3. Для кожної невідомої величини, що входить у вихідну формулу, підібрати формулу для знаходження цих величин (послідовно для кожної величини).

4. Процес пошуку завершити в той момент, коли:

а) для послідовності невідомих величин, що беруть участь в пошуку розв'язку задачі, будуть вказані формули їх знаходження;

б) для останньої невідомої величини (в цій послідовності) вказана формула, в якій невідомі величини визначаються даними задачі.

5. Якщо процес аналітичного пошуку не дозволяє висловити невідомі величини через дані завдання, то:

а) виявити невідому величину, яка може бути виражена двома різними способами, тобто в пошуку мають місце дві формули, в які вона входить;

б) здійснити послідовно підстановку формули, що містить невідому величину (отриманої на останньому кроці пошуку), в протилежному аналізі напрямку і отримати рівняння з одним невідомим, яке визначає шукане. В іншому випадку продовжити аналітичний пошук до виявлення іншої невідомої величини.

6. Якщо процес аналітичного пошуку не призводить до реалізації пункту 5, то, виходячи з даних завдзадачі, здійснити синтетичний пошук розв’язку задачі, при цьому:

а) синтетичний пошук припинити в той моменг, коли будуть знайдені значення невідомих величин, отриманих на останньому кроці аналітичного пошуку;

б) знайдені значення невідомих величин підставити в виконаний раніше аналітичний пошук для отримання відповідного значення шуканої величини.

В іншому випадку продовжити виконання аналізу і синтезу.

Аналітично-синтетичний пошук вирішення завдань, як і взагалі пошукова діяльність, має цілеспрямований характер. Тому вона є складовою частиною навчальної діяльності учнів у навчанні математики. Дійсно, розв’язок навчальної задачі вимагає від учнів: 1) аналізу фактичного матеріалу з метою виявлення в ньому загального відношення; 2) виявлення на основі абстракції і узагальнення частинних відношень даного матеріалу і їх об'єднання (синтезу) в цілісний об'єкт, тобто побудови його "клітинки" і поділеного конкретного об'єкта; 3) оволодіння в цьому аналітико-синтетичному процесі загальним способом побудови досліджуваного об'єкта (67).

У зв'язку з цим виникає необхідність розкриття сутності навчальної діяльності учнів у навчанні математики.

2.3. Проблема співвідношення алгоритмічних і неалгоритмічних процесів пошуку розв’язування задач

Вище було встановлено, що процес вирішення завдання є, в широкому сенсі слова, процес пошуку її вирішення, який необхідний для здійснення практичних або пізнавальних цілей навчання. Оскільки шукане в задачі тільки задано, але не дано в явній, доступною для безпосереднього сприйняття формі, остільки розв’язання задачі можна описати як процес послідовного виявлення того, що приховано і що становить предмет пошуку. Ця психологічна установка з необхідністю вимагає розгляду теоретичних основ проблеми пошуку вирішення завдань.

Пошук рішення задачі - найважливіший елемент творчого мислення учнів, що формується в системі знань, що підлягають засвоєнню.

У психології мислення під пошуком розв’язання розуміють відшукання принципу, логіки рішення, відповідно до чого виконуються ті чи інші дії, про які не можна заздалегідь сказати, чи приведуть вони до необхідного результату або не приведуть. З точки зору Л.Л.Гуровой " розв’язання ", в найбільш широкому значенні цього слова, і "пошук розв’язку " означає одне й те саме.

Виникає питання, яким чином людина "шукає" розв’язок задачі. Виявляється, тут можливі принципово різні способи дій, які не завжди чітко розмежовуються в конкретному розв’язкові, але різні по суті.

Перший вид пошуку - пошук за допомогою систематичних проб, по порядку обстежують всі можливі ходи на кожному етапі розв’язання. Цей вид пошуку можна назвати по можливості «повним перебором варіантів розв’язку».

Другий вид пошуку - випадковий пошук, при якому напрямок розв’язання визначається по чисто випадковим критерієм, наприклад, по якому-небудь випадковому числу, до якого прирівнюється отриманий результат на одному з можливих ходів з розв’язку.

Третій вид пошуку - вибірковий пошук (або сліпий пошук), коли черговий хід вибирається тільки на підставі попереднього. З психології мислення цей метод пошуку отримав також назву методу проб і помилок. Він полягає в наступному: якщо проба привела до помилки, то випробовується інший хід розв’язання. Отже, напрямок пошуку тут визначається не формальним характером, а результатом попередньої спроби: невдала спроба обривається, вдала задає напрямок розв’язання на деякому відрізку.

Четвертий вид пошуку - евристичний (упорядкований) пошук, який використовує певним чином евристичну інформацію, закладену в завданні. При евристичному пошуку внаслідок відкидання явно неперспективних напрямів (стратегій) відбувається зменшення обсягу пошуку. Чим раніше в процесі пошуку здійснюється аналіз можливих його напрямків і чим більше можливих напрямків пошуку піддається аналізу, тим більше скорочується обсяг пошуку.

В дослідженнях з теорії та методики навчання математики не висвітлені в достатній мірі умови, в основі яких лежало б формування прийомів пошуку розв’язання задач. На практиці ці прийоми найчастіше складаються в учнів стихійно. Останнє закономірно, оскільки засоби для формування прийомів пошуку розв’язування задач дані в навчальному матеріалі неявно, з пропусками то одних, то інших істотних ланок, розкидані в часі використання. Проблема полягає в тому, щоб виділити ці умови і засоби в навчальному процесі і відновити відсутні ланки.

Одним з можливих підходів до цієї проблеми є розв’язування задач в умовах організованого самонавчання, розрахованого на поступове формування умінь висувати і перевіряти гіпотези, будувати і реалізовувати плани розв’язання і т.п.

Важливу роль для здійснення такого самонавчання грають прийоми діяльності.

Зміст поняття "прийом"

З психолого-педагогічній літературі є різні точки зору на поняття "прийом". У драні дисертаційному дослідженні під прийомом діяльності будемо розуміти узагальнене знання про дії або системі дій, необхідних при знаходженні вирішені специфічних для даної діяльності завдань, причому це знання об'єктивувати яким-небудь чином, наприклад, у вигляді словесного опису.

Структурними елементами прийому зазвичай виділяються предмет, мета і операційний склад, які будь-яким чином представлені в змісті прийому.

Предмет прийому - це сукупність тих об'єктів, до якої можна застосувати даний прийом. Найчастіше предмет прийому представляє собою задачну ситуацію або деяку її частину.

Мета прийому - це той результат, на досягнення якого спрямований прийом. Наприклад, довести, що даний чотирикутник є багаторазовим паралелограмом. Однак в прийомі мета не завжди вказується явно. У цих випадках вважають, що мета прийому полягає в знаходженні плану, ідеї рішення задачі.

Операційний склад прийому - це послідовність операцій, призначених для досягнення мети прийому і, що входять в його зміст.

Як показує аналіз, структурні елементи прийому можуть характеризуватися такими параметрами:

а) узагальненість предмета прийомі;

б) узагальненість мети прийомі;

в) заданість (визначеність) операційного складу;

г) форма (складність) операційного складу.

Перші три параметри показують, наскільки повно зміст прийому розкриває відповідно його предмет, мета і операційний склад. Ці параметри визначають в свою чергу важливу інтегральну характеристику прийому - можливість и досягнення мети. Розглянемо приклади.

Задача. Дано чотирикутник $ABCD$. Точка E належить продовженню сторони AB за точку A, а точки M і K - продовженням сторін BC і CD за точку C. Кути EAD і ABC рівні 120 °, а кут MCK - 60 °. Довести, що чотирикутник $ABCD$ - паралелограм.

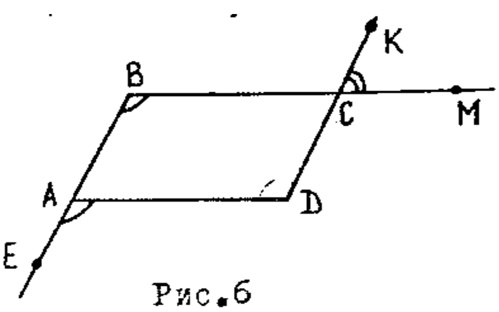


Рис.6

Розв'язання. Оскільки $\angle DCM = 120°$, то кути ACD і DCM рівні і, відповідно

$BC \parallel AD$ (рис.6). Так як кути EAD і ABC рівні, то $AB \parallel CD$. Отже, $ABCD$ -паралелограм.

Задача. Промінь BC проходить між сторонами кута ABD, причому $AB \parallel CD$, $BD = CD$. Довести, що BC - бісектриси кута ABD.

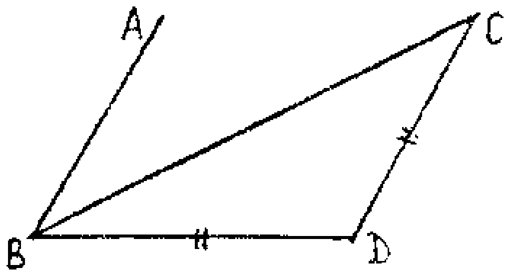


Рис.7

Розв'язання. Оскільки $BD = CD$, то трикутник BDC рівнобедрений, і відповідно, $\angle CBD = \angle BCD$ (рис.7). З іншого боку $\angle BCD = \angle ABC$ оскільки $AB \parallel CD$. Звідси випливає, що $\angle ABC = \angle CBD$ і тому промінь BC - бісектриси кута ABD.

Незважаючи на зовнішню відмінність наведених задач і їх розв'язків, можна вважати, що в обох випадках був реалізований один і той самий прийом.

Прийом 1. Щоб встановити, чи належить даний об'єкт A поняттю B, необхідно:

- згадати визначення поняття B;

- виділити його суттєві ознаки;
- перевірити, чи володіє об'єкт A кожним з цих ознак;
- при наявності у об'єкта A всіх істотних ознак дати позитивну відповідь, а за відсутності хоча б одного з цих ознак дати негативну відповідь.

Таким чином, різні на перший погляд системи дій, виконані в різних завданнях, можуть бути реалізацією одного і того ж прийому.

З іншого боку, одна і та сама конкретна дія може нерідко вважатися реалізацією різних прийомів. Рішення завдання І, розглядається кек одну дію, можна вважати реалізацією не тільки прийому І, а й, наприклад, таких прийомів:

Прийом 2. Щоб довести, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, необхідно встановити що $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Прийом 3.

Розвя’язуючи задачу, доцільно, звести її до розв’язання однієї або декількох допоміжних задач - підзадач.

Отже, завдання навчального предмету повинно задаватися не тільки вивченням певного кола предметних знань, що підлягають навчанню, але і тих структур діяльності (до них відносяться і прийоми), які передбачається сформувати у школярів у даному предметному змісті. Певним кроком до реалізації даного підходу слід визнати розроблені останнім часом "Обов'язкові результати навчання" (138), що фіксують зміни завдань, вирішення яких за задумом авторів свіделельствовало ні про засвоєння програмного матеріалу на якому максимально допустимому рівні. Однак, треба мати на увазі, що проблема формування у школярів системності знань, може бути вирішена тільки в тому випадку, коли предметні знання (аксіоми, теореми) і способи (прійоми) діяльності усваіваються учнями одночасно і в певній системі. Однак, без наявності відповідної систематизації прийомів домогтися цього не так просто.

У зв'язку з цим необхідно використовувати в навчання різні класифікації прийомів.

Виділені вище параметри структурних елементів прийому дозволяють виконати відповідну класифікацію прийомів, наприклад:

- за ступенем узагальненості прийому (спільні, частинні прийоми);
- за ступенем узагальненості мети, або інакше прийоми пошуку роз’язку і прийоми, що містять цілком визначенні вказівки про мету - прийоми досягнення певних цілей;
- за ступенем заданості складу прийому (повні, незавершені і неповні прийоми);
- за формою операційного складу (елементарні - представлені в описі одною нероздільною дією, прийоми, представлені у вигляді лінійної послідовності елементарних дій або операцій, що здійснюються в строго заданому порядку (умовно - "прийом-схема") і складні прийоми - представлені в описі деякою сукупністю декількох послідовних дій, кожна з яких може здійснюватися в лінійному порядку, але незалежно одна від одної, при цьому деякі послідовності можуть складатися всього з однієї діія або операції);
- по можливості досягнення мети (евристичні, коли гарантія досягнення мети не отримує жодного навіть при успішній реалізації складу прийому; напівеврестичні, коли можливість здійснення окремих дій зі складу прийому в загальному випадку не гарантується, проте за умови їх виконання з'являється гарантія досягнення мети; алгоритмічні, коли можливість реалізації прийому, а також гарантія досягнення мети виражені значно).

В психолого-педагогічних дослідженнях немає єдиного тлумачення поняття евристичного прийому - евристики. Зазвичай виділяться наступні їх особливості:

- евристичні прийоми задовольняють принципом редукції (відомості) підцілей;
- евристики обмежують перебір;
- на відміну від алгоритмів евристики способи "відвести" в бік ; вони не забезпечують досягнення гарантованого успіху;
- використання евристик високоефективно;
- евристичні методи можна розглядати як теорію поведінки людини при розв’язуванні задач.

Слід, однак, зауважити, що зазначені особливості в більшій або в меншій мірі притаманні всім прийомам розв’язування задач. Тільки третя особливість збігається з ознакою, який був покладений в основу виділених евристичних прийомів.

Класифікація прийомів по можливості досягнення мети дозволяє розглянути проблему про співвідношення алгоритмічних і евристичних прийомів, а також проблему відповідної типології завдань.

У психології мислення розрізнять два принципово різних прийомів діяльності по розв’язуванню задач: алгоритмічний і еврістичний. Якщо перший здійснюється учнями відповідно за відомим алгоритмом, то другий - відповідно до прийнятої ним стратегії пошуку розв’язку задачі.

У зв'язку з цим серед вільної частини психологів виникли протести проти розгляду евристичних програм в якості теорії творчого мислення. Дійсно, творчість в мисленні розуміється як якась протилежність строго логічних висновкам, діям, алгоритмам, водночас природа евристичних програм є алгоритмічною.

Однак, як зазначає Л.Л.Гурбва, евристичні, творчі процеси характеризуються тим, що вони не регламентовані жорстким приписом (детально детермінуючи всі ланки процесу) і тому можуть призводити до несподіваних результатів у розв’язанні задач. Але, в той же час, при вирішенні проблемних ситуацій і при різних умовах інтелектуальної діяльності людини можна виявити різне динамічне співвідношення евристичних (пошукових, що ведуть до відкриття нових шляхів вирішення) і неевристичних (виконуються за певними приписами - алгоритмам) компонентів процесу розв’язання задачі. Такий подвійний характер співвідношення евристичних і неевристичних компонентів, що включають відношення до суб'єкта, вирішального завдання, неминучий так само й тому, що сама задача і її вміст, розкриває її суб'єктивний і об'єктивний аспекти. Очевидно, ця проблема може полягати тільки в співвідношенні об'єктивної невизначеності задачі (як об'єкта) і суб'єктивної невизначеності області, в якій здійснюється пошук розв’язку. Однак при всіх якісних відмінностях видів інтелектуальної діяльності закономірності мислення, що характеризують динаміку цих процесів, повинні бути єдиними. "Тому теоретично неправомірно розглядати творче і репродуктивне (засноване на відомих правилах) мислення як два його різних протилежних виду".

Однак в реальному навчальному процесі вчителю необхідно дати такі засоби навчання, які дозволили б йому враховувати динаміку репродуктивного та творчого мислення, їх діалектичну єдність. Тому в психології навчання виділені прийоми вирішення завдань алгоритмічного і неалгоритмічного типу.

Характерною рисою прийомів алгоритмічного типу є повна і сувора детермінація розумових процесів за допомогою вказівок, що входять в алгоритм, точно і однозначно визначений порядок дій і операцій в зазначених умовах. Тут безліч об'єктів (умов), з якими треба проводити певні дії (операцій) і саме безліч дій задані заздалегідь.

Характерною рисою прийомів неалгоритмічних типів є неповна детермінація розумових процесів, невизначеність і неоднозначність вибору тих чи інших операцій і їх послідовності.

Виходячи з цих двох типів, в дидактиці і в методиці навчання математики найчастіше говорять про алгоритмічні і неалгоритмічні завдання (їх називають також творчими, нестандартними, евристичними і т.п.)

Навчання прийомам пошуку розв’язування задач повинно виходити нетільки із загальних теоретичних основ пошуку, але і специфіки завдань. Тому, виходячи з закономірностей по "можливості досягнення мети" може бути виділена наступна типологія задач: алгоритмічні, напівеврестичні, евристичні.

Мета дії є уявлення людини про результат дії, що відповідає певним вимогам (потребам) людини. Мета дії визначає предмет дії, якими є знання, закономірності, відносини, властивості і т.п. Вони складають базис розв’язку задачі, тобто теоретичну і практичну основу, необхідну для обґрунтування рішення. Якщо той, якого навчають прийняв задучу то він може встановити, які знання і вміння необхідні для вирішення даного завдання. У цьому випадку він зможе їх виділити, бо вони є складовою частиною базису завдання. В іншому випадку знання і вміння, необхідне для вирішення задачі йому знадобиться навіть при бажанні розв’яти запропоновану йому задачу. Тому виникає проблема пошуку відповідних знань і включення їх до складу базису задачі.

Спосіб дії залишає основу рівня різних дій. Кожна дія складається з системи операцій, розв'язуваної в тих чи інших конкретних умовах. Способи дій служать такому перетворенню предмета дії, що призводить до досягнення мети. Спосіб, який визначає процес розв’язання задачі, є спосіб дії по перетворенню умов (умови) завдання для знаходження шуканого. Тут також можлива альтернатива: алгоритм (прийом) розв’язку задачі або послідовність застосовуваних алгоритмів (прийомів) відома, або невідома. В останньому випадку виникає проблема визначення місця кожного алгоритму в процесі виконання завдання.

Умови виконання дії становлять не специфічні особливості предмета дії та особливості стану людини і момент виконання дії. Так як завдання є предметом діяльності людини, то неспецифічна особливість задачі може становити явне або неявне уявлення базису завдання, що включає в себе також функціональне відношення, яке встановлює взаємозв'язок між умовами (умовою) і вимогою завдання. У свою чергу функціональне відношення визначає основне (істотне) відношення, реалізоване на предметній області задачі, яке керує пошуком її розв’язку.

Якщо той, якого навчають прийняв завдання, то його неспецифічний стан визначається процесом пошуку функціонального відношення, що міститься в базисі, коли воно задано неявно. Отже, умови виконання дії знаходяться в прямій залежності від того як задано функціональне відношення в завданні явно або неявно, тобто чи є воно відомим для учня або невідомим.

Виділені ознаки (нові знання, закономірності, відношення, властивості, алгоритм (прийом) розв’язування задачі або їх послідовність, теоретична і практична основа (базис) розв’язку задачі) складають психологічну структуру алгоритмічних, напівеврестичних і евристичних задач в залежності від того, які з них відомі або невідомі, якого навчають в кожному з виділених типів.

Відповідно до цього приймемо такі угоди:

Угода 1. Задача може бути віднесена до типу алгоритмічних задач, якщо в процесі взаємодії з нею, в разі її прийняття, якого навчають встановлює:

- нові знання, закономірності, відношення, властивості, необхідні для обгрунтування розв’язку задачі, відомі або невідомі;
- алгоритм (прийом) або послідовність заданих алгоритмів (прийомів) розв’язувння задачі відомі;

– теоретична і практична основа (базис) розв'язку задачі, що містить функціональне відношення, відома.

Під алгоритмом тут розуміється точний загальнозрозумілий припис про виконання в певній послідовності дій (елементарних операцій), спрямованих на досягнення зазначеної мети чи на вирішення будь-якої із завдань, що належать до деякого класу (типу).

Прийом поняття ширше, ніж алгоритм, бо він передбачає, крім того, пошукову діяльність учня.

Угода 2. Задача може бути віднесена до типу напівевристичних задач, якщо в процесі взаємодії з нею, в разі її прийняття, той кого навчають встановлює:

– нові знання, зокономірності, відношення, властивості, необхідні для обгрунтування розв'язк задачі, відомі або невідомі;
– алгоритм (прийом) або послідовність заданих алгоритмів (прийомів) розв'язування задачі невідомі;
– теоретична і практична основа (базис) розв'язування задачі, що містить функціональне відношення, відома.

Угода 3. Задача може бути віднесена до типу евристичних задач, якщо в процесі взаємодії з нею, в разі її прийняття, той кого навчають встановлює:

– нові знання закономірності, відношення, властивості, несбхіні для обгрунтування розв'язку задачі, відомі або невідомі;
– алгоритм (прийом) або послідовність заданих алгоритмів (прийомів) розв'язування задачі невідомі;
– теоретична і практична основа (базис) розв'язуку задачі, що містить функціональне відношення, невідома.

Внесемо прийняті угоди в таблицю (табл.2).

Слід визнати, що виділена вище типологія задач не претендує на бездоганність і є умовною. Залежно від ряду умов (хто вирішує це завдання, коли, на якому етапі навчання) одна і та ж задача може бути віднесена до різних типів. Тому, кажучи про різні типи завдань, мається на увазі перш за все послідовність їх в розв’язування учнями в процесі засвоєння нових знань і формування умінь і навичок.

У методичній літературі іноді виділяєюься напівалгоритмічні задачі. Зіставлення їх з напівевристичними задачами дозволяє стверджувати, що в напівалгоритмічних задачах евристична компонента не є домінуючою, як це має місце в напівевристичнх задачах, в яких, навпаки, алгоритмічна компонента не є домінуючою.

Таблиця 2

<table>
<tr><th rowspan="2">№ ПП</th><th rowspan="2">Компоненти дії</th><th rowspan="2">Ознаки задачі</th><th colspan="3">Тип задач</th></tr>
<tr><th>Алгорит-мічні</th><th>Напів-еврестичні</th><th>Еврес-тичні</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">Мета (предмет) дії</td><td>Кінцевий результат розв’язку задачі: нові знання, закономірності, відношення, властивості, необхідні для обгрунтування розв’язку задачі</td><td rowspan="2">+
або</td><td rowspan="2">+
або</td><td rowspan="2">+
або</td></tr>
<tr><td>відомі</td></tr>
<tr><td>невідомі</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">Спосіб дії</td><td>Алгоритм (прийом) або послідовність алгоритмів (прийомів) розв’язання задачі</td><td rowspan="2">+</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>відомі</td></tr>
<tr><td>невідомі</td><td></td><td>+</td><td>+</td></tr>
</table>

3	Умови виконання дії	Теоретична і практична основа (базис) розв’язання задачі, що містить функціональне відношення	+	+	
		відомі			
		невідомі			+

Математичні задачі всередині кожного типу розрізняються за ступенем складності. Однак задачі, що входять в один тип, об'єднуються рівнем пізнавальної діяльності учнів за їх розв’язанням.

У дидактиці, як було показано в першому розділі, виділяється три рівні пізнавальної діяльності учнів: репродуктивний, частково-пошуковий, дослідницький (творчий).

Змістовний аналіз цих рівнів і виділеної топології задач дозволяє зробити висновок про те, що репродуктивному рівню пізнавальної діяльності відповідають алгоритмічні задачі, будучи там домінантою. Частково-пошуковому рівню відповідають напівевристичні задачі, а дослідному рівні - евристичні. Однак, слід мати на увазі, що немає чіткої межі як між рівнями пізнавальної діяльності, так і між адекватної їм типології завдань.

Нижче наведені приклади задач різних типів з виділеної типології:

Алгоритмічні задачі:

- Представити у вигляді степеня добуток $x \cdot x^2 \cdot x^3$.
- У прямокутному трикутника гіпотенуза і катер: відповідно рівні 17см і 8см. Знайти другий катет.

При розв’язуванні зазначених задач учні безпосередньо відтворюють нове правило і теорему. У цих задачах виконуються ознаки задач алгоритмічного типу:

1) учні мають знання, необхідні для вирішення кожного завдання;

2) їм відомі алгоритми розв'язування цих задач;

3) відомі також функціональні віднешення, відповідно $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, де $a \neq 0$ і $c^2 = a^2 = b^2$.

Напівевристичні задачі:

1. При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (a-1)x - 2a = a$ дорівнює 9?

2. Бічні сторони рівнобедреного трикутника рівні 5см, а основа 6см. Обчислити радіус описаного кола.

Дані задачі не можна вирішити за допомогою послідовного застосування відомих учням формул, визначень, властивостей.

Учні мають необхідні знання для розв'язування запропонованих задач, проте їм заздалегідь невідомі алгоритми їх розв'язування. Виникає потреба в пошуку відповідних алгоритмів. Теоретична основа розв'язування задач, включаючи функціональне відношення, відома. Отже, дані задачі є задачами напівевристичного типу.

Евристичні задачі:

- Розв'язати в цілих числах рівняння

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \cdots + \frac{1}{x} = 3$$

- Довести, що будь-який відрізок з кінцями на різних сторонах трикутника не більший за одну найбільшу сторіну трикутника.

В учнів недостатньо знань для розв'язування цих задач. Їм невідомі алгоритми їх розв'язування і функціональні відношення, що визначаються умовою і вимогою в кожній з цих задач. Значить ці задачі є здаачами евристичного типу.

Необхідно зауважити, що в діючих підручниках алгебри і геометрії міститься два основних типи задач: алгоритмічні і напівеврестичні. Безліч напівеврестичних задач в цих підручниках значно ширші, ніж безліч алгоритмічних. Задачі евристичного типу містяться як правило, в розділі "Завдання підвищеної складності".

Виділена типологія алгоритмічних і неалгоритмічних задач використовується в даному дослідженні для визначення ступеня проблемності завдань шкільного курсу математики. У загальному випадку алгоритмічні і напівеврестичні задачі алгоритмічно розв'язні. Тому їх відносять до стандартних задач. Евристичні задачі в процесі пошуку розв'язків дозволяє виявити локальні алгоритми. Однак для завершення процесу їх розв'язання необхідний евристичний пошук, який встановлює взаємозв'язки між виявленими лекальними алгоритмами. Отже, евристичні задачі алгоритмічно нерозв'язні.

Описана структура пошуку розв'язування евристичних задач як задач підвищеної складності дозволяє віднести їх до нестандартних задач.

Зупинимося коротко на проблемі пошуку розв'язування нестандартних задач.

Задача вважається нестандартною, якщо вона не може бути віднесена ні до якого класу алгоритмічно нерозв'язних задач.

Нестандартні задачі мають найбільш сильний вплив на розвиток творчого мислення учнів. У процесі розв'язування нестандартних, як втім і стандартних задач можна виділити два складових елементи: уявлення (опис) задачі і пошук розв'язку. Однак, як було обгрунтовано вище, основним елементом процесу розв'язування задачі є пошук. Пошук може служити або знаходження всіх розв'язків, або одного з розв'язків найбільш раціонального, або встановлення можливості або неможливості розв'язання.

А. А. Столяр зазначає, що уявлення задачіі пошук її рішення істотно залежать від загального підходу ж вирішення задач. При цьому виділяються два підходи:

1) уявлення задачі в просторі станів і

2)зведення (редукція) задачі до сукупності (або до альтернативних сокупностях) підзадач.

Ми не ставимо собі за мету розкриття сутності цих методів пошуку, так як відповідна теорія досить повно викладена в ряді методичних досліджень.

Відзначимо, однак, що з поданням завдання в просторі станів (його описом у вигляді деякого математичного об'єкта) пов'язані такі поняття: стан, в тому числі початковий, цільове; опис стану; оператор, що перетворює один стан в інше; простір станів (або простір пошуку).

Подання задачі в просторі станів задають за допомогою трьох параметрів:

1) опис початкового стану, тобто представлення даних задачі;

2) безлічі операторів з описом їх застосовності і впливів;

3) цільового стану (або критерію визначення мети).

Метод пошуку буде більш раціональним, ніж менше простір пошуку. Мінімальний з усіх можливих простір пошуку визначає оптимальний спосіб розв'язання задачі .

Більш загальний підхід до пошуку розв’язування задач заснований на зведенні задачі до підзадач. Він використовується для широкого кола завдань, в тому числі до пошуку вирішення задач на доведення.

Сутність такого пошуку розв'язування задач полягає в зведенні задачі, яку треба буде розв'язати, до підзадач, розв'язання яких необхідне для розв'язання вихідної задачі, потім від підзадач до підзадач і так далі до тих пір, поки вихідна задача не буде зведена до системи елементарних задач. Під елементарними задачами розуміють, по-перше, задачі, які розв'язуються за один крок перебору, по-друге, розвязання яких вже відомо, кого навчають, як у випадку стандартних, так і в разі нестандартних задач. Зауважимо, однак, що поняття "елементарна задача" носить прагматичний характер, відбиваючи відношення між задачою і її розв'язком.

Як приклад розглянемо таку задачу: "За яких значеннях a значення суми дробів $\frac{a}{a-3}$ і $\frac{6}{a+3}$ дорівнює значенню їх добутків?"

Ця задача заможе бути зведена до підзадач, кожна з яких є елементарною. Операторами відомості, в даному випадку, є првила суми, множення і порівняння дробів:

1) знайти суму дробів

$$\frac{a}{a-3}+\frac{6}{a+3}=\frac{a^2+9a-18}{a^2-9a}$$

2) знайти добуток дробів

$$\frac{a}{a-3}\cdot\frac{6}{a+3}=\frac{6a}{a^2-9a}$$

3) порівняти дроби з однаковими знаменниками;

4) розв’язати рівняння $a^2+9a-18=6a$, при $a\neq\pm3$

Таким чином, пошук має місце як при розв'язанні стандартних, так і нестандартних завдань. З першому випадку спосіб розв'язання в загальних рисах відомий і пошук неправлений на конкретний зміст зодачі, щоб, з огляду на можливі варіації, пристосувати відомий спосіб до конкретної задечі. При цьому за формою основного процесу розв'язання задачі є два етапи, які знаходяться у взаємозв'язку і взаємозумовленості: пошук розв'язання і його реалізація.

У другому випадку спосіб розв'язання невідомий. Він формується по ходу, протягом всього процесу розв'язування задачі. Пошук в розв'язанні нестандартної задачі не складає окремого етапу, а пронизує весь цей процес.

У методиці навчання математики має місце точка зору, яка полягає в тому, що в кожному випадку метою пошуку є не просто відшукання способу розв'язання задачі, а відшукання найбільш раціонального з усіх можливих способів її розв'язання. У найпростіших випадках мається на увазі найкоротший шлях досягнення мети і простота розв'язання.

Слід, однак, відзначити, що такий односторонній підхід до утримання і сутності пошуку неправомірне лише тому, що виявлений вимагає пошуку всіх можливих способів її розв'язання, в тому числі і нераціональних в зазначеному вище сенсі.

Останнє необхідно також і тому, що підвищення ефективності навчання математики можливо тільки на основі процесу взаємодії об'єктивної і суб'єктивної інформації, яку включає в собі задача як складний об'єкт. Крім того, засвоєння знань є складним процесом і поки не встановлено, з певним ступенем достовірності, які умови досягнення більш високого рівня засвоєння учнями нових знань в процесі взаємодії раціональних і нераціональних способів розв'язання задачі. Ця проблема ще чекає свого рішення.

Отже, в даному параграфі викладені деякі, вихідні для подальшого дослідження, теоретичні основи проблеми пошуку і процесу розв'язання завдань. Показано, що в психології мислення "спосіб розв'язання " і "пошук розв'язання " задач в широкому сенсі означає одне й те саме. Це дозволяє досить чітко розрізняти способи дій при різних стратегіях пошуку.

З метою подальшого дослідження розкривається зміст поняття "прийом". Під прийомом діяльності розуміється узагальнене знання про дії або системі дій, необхідних при знаходженні розв'язків специфічних для даної діяльності задач, знання об'єктивувати яким-небудь чином, наприклад, словесного опису або схеми. Прийом діяльності має свою структуру: предмет, мета і операційний склад. Виходячи з структури прийому тут виконана відповідна їх класифікація в навчання математики.

З метою розробки механізму виявлення проблемності задачі в даному параграфі запропоновано типологію завдань, виходячи зі співвідношення алгоритмічних і евристичних прийомів пошуку.

Розділ 3 Методика навчання учнів розв’язувати нестандартні задачі

3.1. Вимоги до нестандартних завдань на уроках математики в початковій школі

Для пожвавлення і підтримання інтересу до математики нестандартні завдання повинні задовольняти наступні умови:

1) бути несхожими на звичайні математичні завдання;
2) зміст завдань повинен бути зрозумілим дітям;
3) розв'язання завдань повинно бути доступно кожному з присутніх дітей;
4) відповіді повинні отримуватися швидко; якщо необхідні обчислення, то вони повинні виконуватись частіше усно.

З цікавістю діти беруться за відгадування простих ребусів. При цьому слід пропонувати не будь-які ребуси, а лише ті, які мають певний зв'язок з математикою: або в його зображенні зустрічаються математичні знаки, або у відповіді міститься математичний термін, або мають місце першу та другу ознаки одночасно. Ребуси можна заздалегідь зобразити на листах паперу. Тоді в будь-який час учитель може запропонувати дітям їх для розгадування.

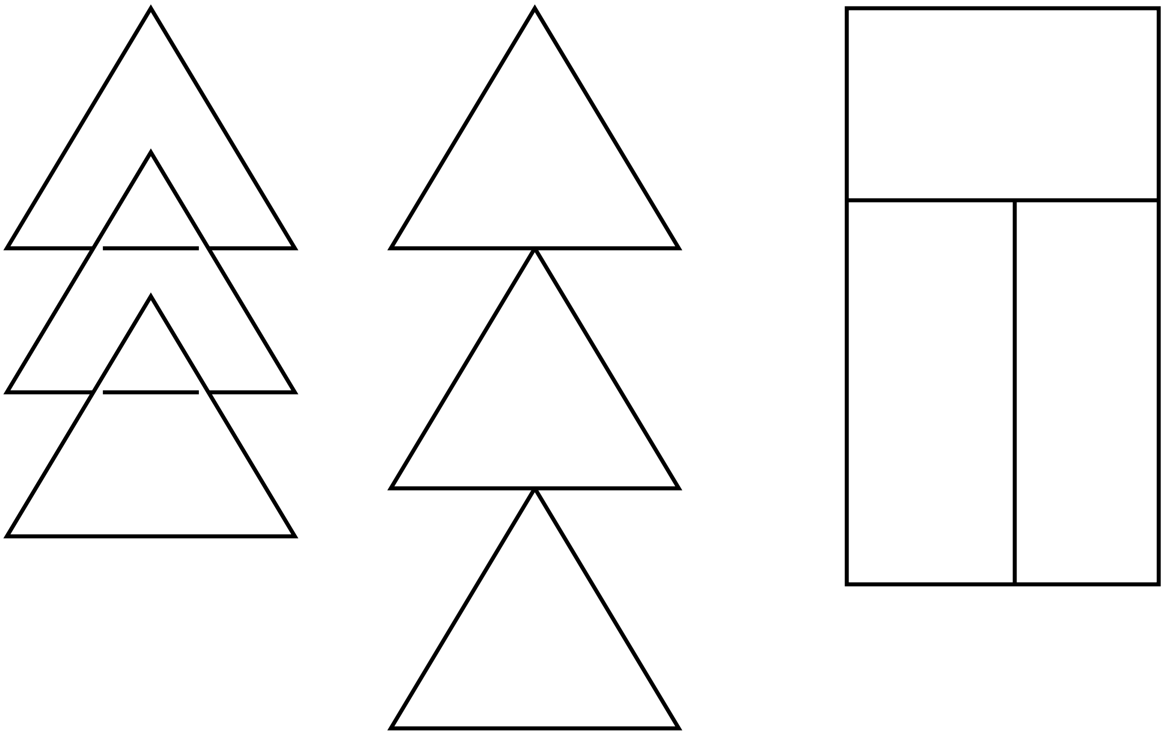
Діти завжди з захопленням відгадують загадки. Тут також слід звернути увагу на те, що загадки повинні мати якісь математичні елементи. Найчастіше таким елементом є число, яке міститься в загадці та служить однією з ознак, за якою відбувається пошук відповіді на загадку. В інших загадках можуть зустрітися математичні відношення (“рівність”, “більше”, “менше”) або відповіддю є термін, пов'язаний з математикою.

Доцільно також пропонувати дітям рухливі математичні ігри, наприклад “Математичні салки”, “Знай таблицю множення”. Можна також проводити логічні вправи, наприклад:

1. З

яких геометричних фігур складені ці ялинки? Чим відрізняється одна ялинка від іншої? В якій ялинці більше трикутників і на скільки?

2. З скількох різних прямокутників складено це “вікно”?



В результаті знайомства дітей з елементами цікавої математики в хвилини відпочинку може виникнути в них і цікавість до систематичного проведення групових позакласних занять.

Групові позакласні заняття з математики проводяться після уроків, але ані за змістом, ані за формою вони не схожі на заняття, які організуються для слабких учнів.

До позакласних групових занять доцільно залучати всіх учнів класу. Роботу цю слід починати з 1 класу. Кожне з цих занять планується учнями у відповідності з вимогами підвищення інтересу дітей до математики та з урахуванням знань, вмінь та навичок, які вже є у дітей. Послідовне ускладнення змісту занять проводиться, виходячи з накопичення в учнів знань з математики та вмінь виконувати вправи з цікавої математики (ребуси, шаради, головоломки, загадки і т.д.).

В 1 класі позаурочні групові заняття з математики проводяться епізодично. В 2 та 3 класах ці заняття проводяться систематично, але не частіше, ніж один-два рази на місяць, оскільки вони вимагають великої підготовки.

Тривалість групових позакласних занять з математики повинна бути в 1 класі 20-25 хвилин, в 2 – 25-35 хвилин, в 3 – 35 –40 хвилин.

Позакласні заняття з математики можуть бути тематичними. В цих випадках вчитель ставить мету – застосовуючи цікаві та ігрові форми вправ, сприяти закріпленню знань тої чи іншої теми.

Найчастіше з проводяться комбіновані заняття, матеріал яких безпосередньо не пов'язаний з темами останніх уроків з математики. Більш часте проведення комбінованих занять пояснюється тим, що на них можна використовувати різноманітний матеріал як за змістом, так і за формою. Тому й самі заняття для дітей можуть бути більш цікавими.

Підтримці цікавості дітей на протязі всього заняття сприяє його організація. Кожне позакласне заняття складається з трьох частин: 1) вступної, 2) основної; 3) підсумкової. У вступній частині діти відразу відчувають необхідність цих занять, несхожість їх з уроками. Дітям пропонуються ребуси, задачі у віршах, або вчитель в ситуацію заняття вводить героїв дитячих оповідань і казок, від імені яких пропонуються різні види завдань математичного характеру. В основну частину включаються завдання, які вимагають більш напруженої розумової діяльності учнів, уваги та зосередженості. Діти розв’язують різноманітні математичні задачі, виконують логічні вправи, задачі-жарти тощо. Основним змістом підсумкової частини заняття є загадки й математичні або логічні ігри. Корисно закінчувати заняття в той момент, коли діти готові з задоволенням повторити гру. Ці бажання слугують “зародком інтересу” до наступних позакласних занять, оскільки у молодших школярів інтереси до математики поки ще тісно переплітаються з прагненням до ігрової діяльності.

Під час проведення позакласних занять необхідно ретельно продумувати застосування наочності. З одного боку, наочність повинна бути цікавою, з іншої – вона повинна сприяти розумінню дітьми сутності рішення того чи іншого питання, запам’ятовуванню деталей математичного або логічного завдання.

В процесі занять потрібно забезпечити диференційований підхід, враховуючи особливості окремих учнів, оскільки запропоновані їм питання та завдання можуть бути спрямовані на виховання уваги, пам’яті на числа, формування обчислювальних навичок, розширення загального світогляду, прищеплення інтересу до розв'язання задач і т.д.

Отже, роботу з учнями по активізації пізнавальних інтересів треба будувати на уроках в такій послідовності: цікаво – знаю – вмію. Треба намагатися зробити навчання не простішим, а зрозумілішим. Дитині має бути зрозумілою мета завдання. І тоді вона зможе з інтересом виконувати дуже багато нецікавої, але потрібної роботи.

Уміння пробудити в дітей інтерес до знань є важливою якістю творчого вчителя. Лише тоді, коли дитина зацікавиться матеріалом, у неї виникне бажання дізнатись про нього більше.

Ефективне навчання математики неможливе без пошуків шляхів активізації пізнавальної діяльності учнів. Адже діти повинні не тільки засвоїти певну суму знань, а й навчитися спостерігати, порівнювати, виявляти взаємозв'язок між поняттями, міркувати. А досягти цього можна лише засобами, що активізують пізнавальну діяльність у процесі формування інтересу до вивчення математики.

Розв’язання цікавих задач розвиває в учнів ці розумові операції, а також вимагає від учня певної незалежності мислення, творчих пошуків, оригинального підходу, кмітливості й винахідливості, критичного ставлення до своєї роботи.

Розв’язання цікавих задач має величезний вплив на розвиток уваги та пам’яті школярів, самостійного мислення, лаконічної математичної мови, уяви, на виховання у них волі, активності та ініціативності.

Вихованню інтересу учнів до математики, розвитку їхніх математичних здібностей сприяє використання в навчальному процесі різних видів цікавих задач.

Розглядаючи різні види цікавих завдань, ми дійшли висновку, що найбільший вплив на розвиток математичних здібностей школярів мають вправи:

- логічного змісту;
- комбінаторні;
- з елементами дослідження;
- на кмітливість.

Досвід вчителів переконує, що вже в початкових класах слід проводити дослідницьку роботу. Це дозволяє показати учням роль індукції, спостереження, експерименту і дати можливість поряд із навичками логічного мислення прищеплювати навички евристичного мислення, показати їм шлях до математичної творчості.

Постійна робота над цікавими задачами спрямована на відшліфування елементарних розумових операцій, формування критичного мислення в учнів, загального розкріпачення, гнучкості їхнього мислення.

Увесь цей набір нестандартних завдань у комплексі зі звичайними сприяє розвитку логічного мислення молодших школярів, опануванню ними математичної мови, стимулює інтерес дітей до «цариці наук». Крім того, така робота з учнями формує мислячу особистість.

Система навчання розв’язуванню цікавих задач повинна забезпечити поступове наростання складності виконуваної роботи і бути органічно пов’язаною з розвитком в учнів логічного мислення.

В процесі занять потрібно забезпечити диференційований підхід, враховуючи особливості окремих учнів, оскільки запропоновані їм питання та завдання можуть бути спрямовані на виховання уваги, пам’яті на числа, формування обчислювальних навичок, розширення загального світогляду, прищеплення інтересу до розв'язання задач

Ефективною методика навчання учнів розв'язуванню задач може бути лише за комплексного підходу до навчального процесу. Це означає, що має бути чітко визначена мета навчання учнів розв'язування задач певного виду чи оволодіння певним методом, ретельно розроблена система самих задач, які розв'язуватимуться в класі та пропонуватимуться як домашнє завдання, доцільно вибрані методи і організаційні форми роботи на уроці, засоби навчання, здійснений контроль стану сприймання учнями методів і способів розв'язування, набутих ними навичок і умінь.

У процесі розв'язування задач здійснюється як алгоритмічна, так і евристична діяльність. Значна кількість шкільних задач, зокрема алгебраїчних вправ, опорних задач на побудову, вправ на дослідження функцій, обчислення похідних та інтегралів, виконується за певними алгоритмами. Опанування учнями цих алгоритмів є важливим завданням навчання математики. Філософи стверджують, що немає кращого способу створити умови для творчої діяльності як бездоганне знання алгоритмів. Справді, розв'язування творчих, нестандартних задач зводиться, зрештою, до виконання відомих опорних задач, які розв'язуються за певними алгоритмами. На жаль, нерідко на уроці в школі та на вступних екзаменах до вищих навчальних закладів окремі учні знаходять спосіб розв'язування складної нестандартної задачі, але довести справу до кінця не можуть, оскільки забули розв'язування опорної задачі, до якої звелась нестандартна, або не можуть правильно розв'язати найпростіше, наприклад тригонометричне, рівняння.

Водночас навчити учнів розв'язувати задачі та вправи алгоритмічного характеру, лише пропонуючи їм готові алгоритми, не можна. Доцільніше організувати на прикладах розв'язування однієї-двох задач колективний пошук алгоритму.

Це стосується і навчання учнів розв'язування задач і вправ певних типів за певним алгоритмом чи правилами-орієнтирами.

Наведемо приклади. На уроці в 5 класі учні розв'язують задачі на рух двох типів: зустрічний і рух в одному напрямку.

Задача. З двох міст, відстань між якими 840 км, одночасно назустріч один одному виїхали два поїзди: один зі швидкістю 60 км/год, а другий - зі швидкістю 80 км/год. Через скільки годин вони зустрінуться?

Задача. Літак вилетів з аеропорту зі швидкістю 500 км/год. Через 2 год з того самого аеропорту в тому самому напрямку вилегів другий літак зі швидкістю 700 км/год. Через скільки годин після вильоту другий літак наздожене перший? Яка відстань буде між ними через 3 год?

Розв'язавши ці дві задачі та аналогічні їм, учні колективно можуть дійти висновку, що в разі розв'язування задач на зустрічний рух, в яких потрібно визначити час, через який об'єкти зустрінуться, слід додати їхні швидкості та поділити відстань між пунктами, від яких почався рух, на сумарну швидкість.

У задачах на рух, в яких об'єкти рухаються від одного пункту і в одному напрямку, а потрібно визначити відстань між об'єктами через певний час, раціональнішим є спосіб розв'язування, за якого знаходять різницю між швидкостями об'єктів і множать її на заданий час.

У задачах на спільну роботу орієнтиром для розв'язування є вказівка щодо прийняття всієї роботи за одиницю і вираження частки всієї роботи, яку виконують окремі особи чи механізми за одиницю часу, або частки роботи, яку вони виконують разом.

Аналогічні вказівки або правила-орієнтири доцільно пропонувати учням для розв'язування задач на проценти, пропорційний поділ, геометричних задач на побудову, які розв'язують методами геометричних місць, геометричних перетворень, задач на доведення методом від супротивного, побудову перерізів багатогранників, побудову графіків функцій за допомогою геометричних перетворень, розв'язування задач векторним методом та ін.

Особливу увагу слід приділити навчанню учнів основних методів розв'язування задач. Для прикладу розглянемо методику навчання методу рівнянь для розв'язування текстових (сюжетних) задач.

Шкільна практика свідчить, що хоча метод рівнянь розглядають уже в 6 класі та використовують упродовж всього подальшого вивчення шкільного курсу математики, результати вступних екзаменів до вищих навчальних закладів незаперечно доводять, що значна частина випускників слабко опанувала цей метод.

Однією з причин цього ми вважаємо недостатню увагу вчителів до розв'язування в 5 -6 класах арифметичним способом текстових задач і вправ, які безпосередньо готують учнів до усвідомлення методу рівнянь. Крім того, потрібно спеціально контролювати засвоєння учнями евристичної схеми пошуку рівняння як моделі зв'язків між відомими і шуканими.

Уміння розв'язувати задачі методом рівнянь як компонента відповідної діяльності містить такі розумові дії: аналіз задачі (виокремлення умов і вимог); встановлення істотних зв'язків між відомими і шуканими; виявлення величин, значення яких прирівнюватимуться, позначення невідомої та подання потрібних величин через введену невідому, складання рівняння і його розв'язування; перевірка розв'язування задачі. Уміння можна сформувати, якщо попередньо відпрацьовано всі його складові.

Успішно аналізувати формулювання задачі учні можуть лише тоді, коли вони засвоїли її зміст. Для цього важливо вдало подати задачу учням. Це можна зробити по-різному. Якщо задача з підручника, то ефективніше, коли задачу вголос читає вчитель або один з учнів, а решта стежать, як сформульовано задачу. Досвід свідчить, що найкраще, коли задачу читають не менш як двічі. Доцільно, щоб учень, який розв'язуватиме задачу, після повторення змісту задачі та виокремлення умови і вимоги скорочено записав їх на дошці. Перші скорочені записи на дошці вчителеві доцільно робити самому, пропонуючи зразок, що його наслідуватимуть учні. Для окремих задач умову і вимогу потрібно подати у вигляді таблиці або графічної ілюстрації. Наведемо приклад.

Задача. Один кусок дроту на 54 м довший за другий. Після того як від обох кусків відрізали по 12 м, перший виявився в 4 рази довшим, ніж другий. Знайти довжину кожного куска.

Скорочений запис змісту задачі може мати вигляд:

I	II + 54	−12;	II · 4	?
II		−12		?

Геометричне зображення змісту задачі наочно ілюструє зв'язок між даними і шуканими, допомагає доцільно вибрати невідому *x* і скласти просте для розв'язання рівняння 3x = 54 (рис. 6.1).

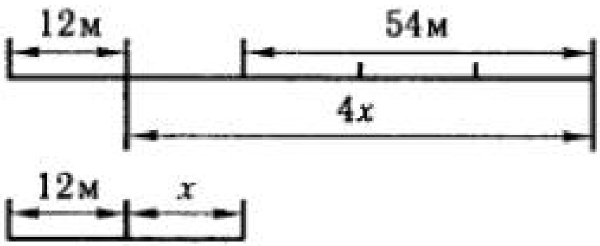


Рис. 6.1

У процесі пошуку рівняння потрібно з'ясувати, про які величини йдеться в змісті задачі, які зв'язки існують між цими величинами і шуканим, значення яких величин можна прирівняти. Залежно від цього доцільно ввести невідому і скласти рівняння.

У методиці навчання алгебри відомі дві евристичні схеми пошуку рівняння до задачі.

Першу схему застосовують до розв'язування нескладних задач, вона має такий вигляд:

1) позначити як x шукану величину (або одну із шуканих);

2) виразити через x інші величини, про які йдеться в змісті задачі;

3) ґрунтуючись на залежності між відомими і невідомими величинами, скласти рівняння.

Друга евристична схема зручна для розв'язування складніших задач:

1) з'ясувати, виходячи зі змісту задачі, значення яких величин можна прирівняти;

2) вибрати невідому і позначити її буквою x;

3) виразити через x значення величин, які прирівнюватимуться;

4) скласти рівняння.

Друга евристична схема забезпечує цілеспрямований вибір невідомої та вираження через неї потрібних величин.

На першому, підготовчому етапі навчання учнів методу рівнянь потрібно нагадати всі види основних задач, які розв'язуються кожною арифметичною дією, їх буквений запис, сформувати навички складання простих виразів з невідомою. Далі розв'язуються усно найпростіші задачі на складання рівнянь за умовою задачі.

Для прикладу наведемо кілька задач.

1. До якого числа слід додати 12, щоб дістати 68? (Учні позначають як x невідоме число і записують рівняння: $x + 12 = 68$.)

2. Число а на 7 більше за число b. Як можна записати залежність між a і $Ь$ за допомогою рівності?

3. Число те втричі більше, ніж число n. Як можна записати залежність між те і и за допомогою рівності?

4. Купили 10 кг цукерок по x гривень за 1 кг. Як записати у вигляді виразу вартість покупки?

Важливо домогтися усвідомлення учнями того, що словосполучення «а на стільки-то більше за *Ьь* іноді потребує дії додавання, а іноді - віднімання залежно від того, якої з двох величин воно стосується. Це саме стосується словосполучення <<а в стільки-то разів більше за b>». Досвід показує, що деякі учні не реагують на слова «сума», «додано», «всього» в умові задач. Тому на першому етапі потрібно спеціально акцентувати слова, які містять інформацію для складання рівняння.

Існують різні організаційні форми щодо розв'язування задач. На уроці можливі колективне фронтальне розв'язування задач, колективна робота окремих груп і самостійне розв'язування.

Готуючись до колективної фронтальної роботи, яка проводиться інколи методом евристичної бесіди, потрібно продумати і записати в конспекти (якщо йдеться про практиканта або вчителя-початківця) систему запитань щодо пошуку способу розв'язування. Доцільно пропонувати слабшим учням відповідати на прості запитання, щоб їх залучити до процесу пошуку способу розв'язування задачі. Іноді спосіб розв'язування знаходять сильні учні, а реалізацію його на дошці доцільно запропонувати середньому чи слабкому учневі. Не можна допускати, щоб учні механічно переписували розв'язування задачі з дошки, не усвідомивши способу. Тому в процесі оформлення запису можна пропонувати окремим учням пояснити, чому виконується та чи інша дія або яким має бути наступний крок розв'язування.

За групової форми організації розв'язування задач на уроці вчитель має підготувати для кожної групи набір задач відповідно до здібностей учнів групи, під час уроку контролювати діяльність кожної групи і надавати допомогу тій, яка більше її потребує. Інколи слід спеціально провести консультацію (3-5 хв), в якій активну участь братимуть сильніші учні, а не лише вчитель.

Можливі різні форми організації самостійного розв'язування учнями задач на уроці. Це здебільшого навчальні самостійні роботи, але інколи потрібні й контрольні. Самостійні роботи можуть тривати цілий урок, але частіше - частину уроку. Залежно від мети такі роботи можуть проводитись на початку, в середині або наприкінці уроку. Якщо вчитель хоче перевірити стан виконання домашнього завдання і надати допомогу тим, хто відчуває труднощі, віл може запропонувати задачу або вправи, аналогічні домашнім. Якщо опановується певний тип задач, самостійну роботу можна запропонувати в середині чи наприкінці уроку. Для ефективної й оперативної перевірки таких робіт можна запропонувати двом-трьом учням оформити розв'язування на плівці та спроектувати його на екран через графопроектор. Інколи два учні розв’язують задачу на відкидних дошках, і відразу після закінчення допущені помилки аналізують. Можлива й усна фронтальна перевірка за етапами розв'язування задач і вправ.

3.2. Проведення нестандартних уроків математики у школі

Успішність проведення нестандартних форм уроків залежить від ряду дій вчителів і учнів:

- Проводиться ретельна підготовка таких уроків: даються попередні завдання, пояснюється побудова уроку, роль і завдання кожного учня, готуються наочні посібники.
- Продумується хід занять з урахуванням рівня і особливостей як класу в цілому, так і окремих учнів, характеру і здібностей учнів, які отримали конкретне завдання, послідовність операцій.

Зрозуміти головне в нестандартному уроці допомагають творчі принципи. Минскин Є. М. виділяє такі принципи:

1. Відмова від шаблону в організації уроку, від рутини і формалізму у його проведенні.

2. Максимальне залучення учнів класу в активну діяльність на уроці. Різні форми групової роботи на уроці.

3. Не розважальність, а цікавість і захопленність як основа емоційного тону уроку.

4. Підтримка альтернативності, множинності думок.

5. Розвиток функції спілкування на уроці як умова забезпечення взаєморозуміння, спонукання до дії, відчуття емоційного задоволення.

6. «Прихована» диференціація учнів за навчальними можливостями, інтересами, здібностями і нахилами.

7. Використання оцінки в якості формуючого інструменту.

Манвелов С. Г. Виділяєи три етапи підготовки та проведення нестандартного уроку: підготовчий, власне урок і його аналіз.

Підготовчий етап. У ньому активну участь беруть і вчитель, і учні. Учні діляться на групи (команди, екіпажі), отримують або набирають певні завдання, які необхідно виконати до уроку: підготовка повідомлень на тему майбутнього уроку, складання питань, кросвордів, вікторин, виготовлення необхідного дидактичного матеріалу і т. д.

Власне Урок (виділяють три основних етапи):

Перший етап. Він є передумовою формування і розвитку мотиваційної сфери учнів:

- ставляться проблеми,
- з'ясовується ступінь готовності до їх вирішення, до знаходження шляхів досягнення мети уроку.

Намічаються ситуації, участь у яких дозволить вирішувати пізнавальні, розвиваючі і виховні завдання. Розвиток мотиваційної сфери здійснюється тим ефективніше, чим результативніший проведений підготовчий період: якість виконання учнями попередніх завдань впливає на їх інтерес до майбутньої роботи. При проведенні уроку вчитель враховує ставлення учнів до оригінальної форми уроку, рівень їх підготовленості, вікові та психологічні особливості.

Другий етап. Повідомлення нового матеріалу, формування знання учнів у різних нестандартних формах організації їх розумової активності.

Третій етап. Він присвячений формуванню вмінь і навичок. Контроль, зазвичай, не виділяється в часі, а " розчиняється " у кожному з попередніх етапів.

Аналіз. У період аналізу даних уроків доцільно оцінювати як підсумки навчання, виховання, розвитку учнів, так і картину спілкування - емоційний тонус уроку: не тільки в спілкуванні вчителя з учнями, а й у спілкуванні учнів один з одним, а також окремих робочих груп. [5,8]

У процесі навчальної діяльності в початкових класах велику роль, як відзначають психологи, відіграє рівень розвитку пізнавальної активності та пізнавальних процесів: уваги, сприйняття, спостереження, пам'яті, уяви, мислення. Розвитку та формуванню пізнавальних процесів сприяють нестандартні форми уроків. Регулярне використання на уроках математики системи спеціальних задач і завдань, спрямованих на розвиток пізнавальних можливостей і здібностей, розширює математичний кругозір учнів початкових класів, сприяє математичному розвитку, підвищує якість математичної підготовленості, дозволяє дітям більш впевнено орієнтуватися в найпростіших закономірностях навколишньої їхньої дійсності й активніше використовувати математичні знання в повсякденному житті. Щоб дитина вчилася в повну силу своїх здібностей, потрібно викликати у неї бажання до навчання, до знань. Треба допомогти дитині повірити в себе, у свої здібності. Майстерність вчителя збуджувати, зміцнювати і розвивати пізнавальні інтереси учнів у процесі навчання полягає в умінні зробити зміст свого предмета багатим, глибоким, привабливим, а способи пізнавальної діяльності учнів різноманітними, творчими, продуктивними. Урок математики націлений не стільки на повторення вивченого матеріалу, скільки на знайомство з дітьми в невимушеній атмосфері. Робота учнів з учителем повинна проходити без страхів і напруги, а нетрадиційні уроки допомагають вчителю знайти спільну мову з учнями. На звичайному уроці діти будуть відчувати себе скуто, а на нестандартному уроці вони зможуть розслабитися, і вчитель зможе розглянути кожного з них. [14]

Відомо, що будь-який урок — це складне педагогічне явище, витвір вчителя, на якому учні демонструють свої знання, уміння та навички.

— Чи цікаво дітям на уроці? Чи люблять вони вчитися?

— На ці питання не можна відповісти напевне.

Іноді діти ідуть на урок із задоволенням, іноді без нього. Як зацікавити дітей? Як привернути їх увагу до свого предмету? Звичайно, за допомогою того, що їм буде слухати найцікавіше, того, що вони будуть робити із задоволенням.

Як донести матеріал до їх свідомості яскраво і красиво, щоб запам'яталось надовго і назавжди?

Іноді можна почути, що математика складна, суха і нецікава наука. Людей, які люблять математику, це вражає й ображає. Математика сувора, але красива й глибока, як чиста криниця. А завдання — вчителя і полягає в тому, щоб розкривати перед учнями її емоційний бік, чуйну і вродливу стать. Як краще цього домогтися?

Красивими, цікавими уроками. Уроками, які пробуджують цікавість і працьовитість, фокусують увагу і зосередженість. Отже, нестандартний урок. Він не вкладається в рамки виробленого і сформульованого дидактикою. На цьому уроці можна не дотримуватись чітких етапів навчального процесу, методів, традиційних видів роботи.

Для такого уроку характерною є інформаційно-пізнавальна система навчання — оволодіння готовими знаннями, пошук нових форм викладу, розкриття внутрішньої сутності явищ через гру, змагання або нетрадиційні форми роботи з дітьми, використовувати власні дидактичні матеріали, часто саморобні і тим більше корисні для учнів.

Для прикладу наведу урок у 6 класі з теми «Відсотки» під назвою «Бізнес-гейм».

Щоб наблизити математику до життя, щоб показати її різноманітність застосування, цей урок було проведено у вигляді ділової гри.

Учнів класу було поділено на три команди, і весь урок вони працювали за груповим методом. Кожна команда сиділа за окремим великим столом. Ідея уроку полягала в тому, що учні — гості, які приїхали у місто «Відсоток», а вчитель — бізнесмен, мешканець цього міста, знайомить їх з ними і його мешканцями. Під час цієї мандрівки з учнями трапляються цікаві пригоди — вони витрачають і заробляють гроші, займаються бізнесом, а допомагають їм у цьому відсотки. Урок краще проводити в кінці теми, щоб діти були знайомі з усіма типами задач на відсотки. Цей урок вимагає гарної підготовки вчителя. Необхідно намалювати яскраві плакати з написами об'єктів продажу, картки з задачами, принести гральний кубик і кашкети з написами «Бізнес-гейм». У проведенні уроку вчителеві допомагають учні цього класу — «працівники фірми». Учень начальник фінансів — буде вести банківські рахунки команд на одній з відкидних дощок, троє менеджерів по одному біля кожного з трьох столів – для виплати коштів, зароблених учнем окремо та для того, щоб кидати гральний кубик.

Під час проведення цього уроку спостерігається велика зацікавленість учнів, вони активні, збуджені, працюють із задоволенням це можна пояснити, мабуть, тим, що учні відчувають себе у ролі бізнесменів, мають змогу заробити і витратити власний капітал. Це урок – міні-модель сучасного життя, де без знань відсотків та їх застосування не обійтись. Тому ми бачимо і мотиваційний бік цього уроку. Під час підведення підсумків я відзначаю не тільки командну роботу певної групи учнів, але й індивідуальні відповіді.

Досвід роботи показує, що для поліпшення розуміння, закріплення та відтворення інформації доцільно проводити такі уроки як: урок-змагання; урок-вікторина, урок- "круглий стіл"; урок-гра та ін. Щоб зацікавленість учнів до вивчення математики не знижувалась, доречно систематично проводити ігри з використанням інтерактивних технологій.

Так у 9 класі практикую проведення уроків-змагання під час узагальнення і систематизації знань учнів з певної теми. Наприклад, урок узагальнення і систематизації знань за темою "Числові послідовності". Клас поділено на три команди: "Трикутник", "Квадрат", "Коло".

Актуалізація опорних знань учнів (міні-іспит) – у формі змагання між трьома командами. Кожна з команд задає другим командам по два питання; за правильну відповідь – плюс 1 бал, за неправильну – мінус 1 бал.

Математичне лото. Кожній з команд пропонується завдання, яке складається з дев'яти задач. До них додається стільки ж (квадратних) карток, на яких записані відповіді. Номер ставиться на тому боці картки, на якому записана відповідь. На зворотному боці картки написана частина висловлювання про математику.

- Захист творчих робіт капіталами команд.
- Підсумок уроку.
- Така організація учбової діяльності на уроці дає можливість
- реалізувати принципи диференціації навчання, оскільки гарантує участь кожного учня на тому чи іншому етапі уроку. Так, учні з низьким рівнем навчальних здібностей можуть забезпечити команді бали на І етапі уроку, а учні з високими здібностями – виступи із захистом творчих робіт.

Другий етап уроку – “поле діяльності” для учнів з середніми навчальними здібностями.

Позакласна робота з математики дуже важлива для пробудження в учнів інтересу до математики. Тому математичні вікторини, змагання, ігри, прес-конференції, вечори сприяють підвищенню математичної культури, розширюють і поглиблюють здобуті на уроках знання, показують застосування їх на практиці, розвивають мислення, математичні здібності, допомагають ввійти у світ наукових і технічних ідей.

Так при проведенні прес-конференції “Гранітна опора наук” учні 7-9 класів багато дізналися про значення математики в різних галузях людської діяльності. Така форма роботи сприяє розширенню кругозору учнів, розвиткові уміння самостійно й творчо працювати з навчальною, науково-популярною літературою, формуванню в дітей інтересу до математики, а також поглибленню знань.

Учням дуже подобається брати участь в іграх, правила яких максимально наближені до умов тих ігор, за якими вони мають можливість спостерігати з екранів телевізорів. Такими іграми є “Перший мільйон”, “Поле чудес”, “Слабка логіка” та інші.

Щоб розвинути творчі здібності учнів, поступово та систематично залучати до самостійної пізнавальної діяльності, щоб забезпечити співпрацю між учнями та учителем, традиційного уроку недостатньо.

У проведенні нестандартних уроків є своя специфіка.

Однотипність уроків викликає у дітей втому. Тому, якщо педагог більше розповідає сам, то знижується зворотній зв’язок, який дає можливість урізноманітнювати форми роботи, поглиблювати знання і залучати до активної роботи якомога більше учнів. Головне місце на нестандартних уроках відводиться елементам творчого пошуку. За розмаїттям форм – це мандрівки змагання, ігри, живі журнали, теле- та радіо заняття, концерти, іспити тощо. Вони можуть бути присвячені окремим предметам, але найчастіше у їх змісті можна виділити майстерно інтегровані компоненти кількох. На таких уроках учні виступають у ролі вчителя, журналіст ведучого "телерадіопередачі", артиста, коментатора, поета, капітана команди, лоцмана тощо, звісно, враховуючи вікові особливості учнів.

Готуючись до уроку, хороший вчитель так підбирає матеріал до нього і форми роботи, щоб забезпечити розумову діяльність кожного учня кожну хвилину . А дуже хороший учитель, крім цього, ще й передбачає ті моменти, коли ця діяльність може почати згасати, і передбачає методи її стимуляції, причому не якимись волюнтаристськими способами, а шляхом розумної ін'єкції в структуру уроку чогось несподіваного, незвичайного, дивного, азартного, веселого, тобто такого, що викликає природний, живий інтерес в учнів, що проганяє з уроку нудьгу.

Що ж потрібно знати тому, хто прагне створити на своїх уроках позитивну емоційну обстановку? Насамперед, те , що на уроках такої суворої науки, як математика, зробити це можна тільки введенням в них цікавих моментів. Цікаві елементи на уроці можуть бути безпосередньо пов'язані з досліджуваної темою (К. Д. Ушинський називав їх «внутрішніми»), а можуть бути з нею зовсім не пов'язаними (за К. Д. Ушинського - «зовнішніми»). Цілком очевидно, що «внутрішня» цікавість переважніше «зовнішньої». Тому що хороший вчитель не просто « розмочує » сухий матеріал уроку цікавим, він підбирає останній так і знаходить йому таке місце, щоб «вичавити» з нього якомога більше користі. Нестандартні уроки - це імпровізоване навчальне заняття, що має нетрадиційну (невстановлену) структуру. Думки педагогів на нестандартні уроки розходяться: одні бачать в них прогрес педагогічної думки, правильний крок у напрямку демократизації школи, а інші, навпаки, вважають такі уроки небезпечним порушенням педагогічних принципів, вимушеним відступом педагогів під натиском обледащіли учнів, які не бажають і не вміють серйозно трудитися.

Аналіз педагогічної літератури дозволив виділити декілька десятків типів нестандартних уроків . Найбільш поширеними типами є:

1. Уроки - ділові ігри .
2. Уроки - змагання.
3. Уроки типу КВН .
4. Комп'ютерні уроки.
5. Уроки творчості
6. Уроки - аукціони .
7. Уроки - конкурси .
8. Урокі - рольові ігри .
9. Міжпредметні уроки.
10. Уроки - ігри « Поле чудес».
11. Уроки - фантазії. [12,8]

За допомоги сучасних технологій у вчителів є безліч можливостей використовувати інформаційно-комунікативні технології на уроках математики та інших предметах. Можна збудувати нестандартний урок, де всі етапи уроку будуть показані на мультимедійній дошці або на персональному комп’ютері, якщо є можливість провести урок у комп’ютерному класі.

Гарним посібником може стати програма Microsoft Power Point.

Використання презентацій у форматі Microsoft Power Point необхідно для розробки проблемних ситуацій на уроках математики. POWER POINT - це програма, у якій можна створювати різноманітні презентації із почерговою зміною слайдів. На слайдах можна розставляти графіку, звук та ін. Мультимедійна презентація допомагає структурувати матеріал і активізувати увагу.

Отже, використання нестандартних уроків і окремих нестандартних прийомів педагогічної техніки та технології на уроках сприяє творчості як вчителя, так і учнів. [21]

Переваги нестандартних уроків математики в порівнянні із звичними структурами уроків в тому, що підвищується інтерес учнів до навчання, їх активність в пізнанні і творчості, самостійність пошуків знань, переживання успіху досягнень, ініціативність, можливість індивідуального підходу до учнів, використання інноваційних та інформаційних педагогічних технологій, розвиток культури спілкування, взаємовідповідальності і т.д.

Але є деякі складності і недоліки використання нестандартних уроків:

- затрати більшого часу на підготовку і проведення таких уроків;
- не всі учні в рівній мірі активні;
- організаційні труднощі (дисципліна, правила поведінки);
- ускладнюється система оцінювання, аналізу результатів навчання;
- забезпечення науково-методичної і матеріально-технічної бази навчання;
- труднощі із заміною учасників, якщо хтось відсутній (залежно від типу нестандартного уроку)
- знаходження певного місця таких уроків в навчально-виховному процесі тощо.

Недарма відомий педагог В.О. Сухомлинський казав, що до хорошого уроку треба готуватися все життя. Такими ж прикладами творчого підходу і проведення занять з учнями являється досвід роботи педагогів - новаторів В.Ф. Шаталова, І.П. Волкова та багатьох інших.

3.3. Педагогічний експеримент

Методи педагогічних досліджень – це шляхи, способи пізнання педагогічної дійсності. За допомогою методів педагогіка здобуває інформацію про те чи інше явище, процес, аналізує і обробляє одержані дані, включає їх в систему відомих знань. Тому темп і рівень розвитку педагогічної теорії залежить від того, які методи дослідження вона використовує.

Особливості процесу виховання вивчити і розкрити нелегко. Педагогічні процеси мають неоднозначний характер. Результати навчання, виховання й освіти залежать від одночасного впливу багатьох причин. Достатньо змінити вплив одного фактора, щоб результати процесу суттєво відрізнялись один від одного. Для педагогічних процесів характерна неповторимість. Якщо дослідник природничих наук (у хімії, фізиці) може кількаразово повторити експеримент, використовуючи ті самі матеріали, створюючи незмінні умови, то педагог-дослідник такої змоги не має: повторне дослідження пропонує вже інші умови праці, і як наслідок – інші результати. Ось чому «чистий» експеримент у педагогіці неможливий. Зважаючи на цю обставину, педагоги роблять свої висновки обережно і коректно, розуміючи відносність умов, в яких вони були отримані. Кількаразове повторення спостережень дає змогу в узагальненій формі формулювати висновки, визначати найхарактернішу тенденцію.

Важливим завданням педагогічного дослідження є виявлення порядку в процесі, що вивчається, тобто встановлення закономірності. Закономірність – це факт наявності постійного й необхідного взаємозв'язку між реальними феноменами процесу.

На основі емпіричних закономірностей процесу виховання розкриваються теоретичні закони. Закон – строго зафіксована закономірність. Сучасна наука визначає його як необхідну, властиву природі явищ тенденцію зміни, руху, розвитку, яка характеризує загальні етапи і форми становлення явищ, процесів, систем, що розвиваються. Закони існують незалежно від того, як повно вони розкриті наукою. Пізнання закону дозволяє зрозуміти його дію і правильно використати в інтересах виховання.

Кінцевою метою педагогічного дослідження є виявлення закономірностей і законів.

У даний час педагогічні дослідження здійснюються за допомогою цілої системи різноманітних методів. До них належить і педагогічний експеримент.

Педагогічний експеримент (лат. experimentum – проба, дослід). Суть експерименту як методу дослідження полягає у спеціальній організації педагогічної діяльності учителів і учнів, вихователів і вихованців з метою перевірки й обґрунтування наперед розроблених теоретичних припущень, або гіпотез. Якщо гіпотеза знаходить своє підтвердження в педагогічній практиці, дослідник робить відповідні теоретичні узагальнення і висновки.

Педагогічні експерименти класифікують за різними ознаками: спрямованістю, об'єктами дослідження, місцем і часом проведення та ін. Залежно від поставленої експериментом мети розрізняють:

а) констатуючий експеримент, що проводиться на початку дослідження і своїм завданням має вияснення стану справ у шкільній практиці з тієї чи іншої проблеми;

б) творчо-перетворюючий, коли вчений розробляє гіпотезу, теоретичні основи, здійснює конкретні практичні заходи щодо вирішення досліджуваної проблеми;

в) контрольний, суть якого полягає в застосуванні апробованої методики в роботі інших педагогів та шкіл.

Повернемось до педагогічного експерименту, який проводився в 6 класах.

Метою експерименту було перевірити знання учнів методів розв’язання математичних задач, знання учнів про визначення планіметричних фігур (довільний трикутник, квадрат, рівнобедрений трикутник, тощо) та рівень зацікавленості до геометрії, до проведення курсу за вибором і після його проведення.

Для експерименту було вибрано два 6-х класи Рівненської ЗОШ №28, у яких рівень успішності з математики був приблизно однаковий.

При вивченні теми «Раціональні числа» у 6 -Г класі на уроках математики широко використовувались нові методи при вирішенні задач, в 6–А класі проводились уроки математики без застосування різних підходів до розв'язку поставлених задач.

Оскільки робота велась паралельно в двох класах, де на дану тему виділялась однакова кількість годин, то результати експерименту повинні були з'явитись після певної кількості проведених уроків, які передбачали використання різних методів рішення математичних задач. Визначити результати експерименту проводилось шляхом написання самостійної роботи в обох паралельних класах.

На підсумковому уроці була проведена самостійна робота у 6-Г та у 6-А класах. На основі результатів виконання самостійної роботи було оцінено навчальні здобутки учнів двох класів.

Рівень засвоєння знань в учнів 6-Г класу був значно вищим, ніж в учнів 6-А класу. Це було зумовлено розвитком навичок використовувати різні методи рішення математичних задач в учнів. Якісний характер цього процесу і обумовлює ефективність проведеного педагогічного експерименту. Це видно із результатів виконання самостійної роботи (Таблиця 3)

Таблиця 3

Класи	Кількість учнів класу	Бали за самостійну роботу		
		4-6	7-9	10-12
6 – Г	28	7	15	6
6 – А	31	10	17	4

Покращення успішності у 6-Г класі показує, що дуже важливо у своїй практиці вчителю проводити нетрадиційні уроки та використовувати різні методи до розв’язування математичних задач, адже це сприяє вихованню в учнів активності, наполегливості, розвиває логічне та просторове мислення учнів.

Висновок

Проаналізувавши праці видатних педагогів щодо використання нестандартних уроків у школі та провівши декілька з них у школі з учнями, я дійшла висновку, що нестандартні уроки займають дуже важливе місце у педагогічній діяльності вчителя та в сприйманні і осмисленні матеріалу учнями.

Нестандартні уроки впливають на розвиток творчого мислення школярів та результативність процесу навчання: знання набувають якості системності, уміння стають узагальненими, комплексними, посилюється світоглядна спрямованість пізнавальних інтересів учнів, ефективніше формуються їхні переконання і досягається всебічний розвиток особистості.

Нестандартні уроки подобаються учням, тому, що навчальний процес тут має багато спільного з ігровою діяльністю дітей. Майже всі прийоми, способи дії нестандартних уроків відзначаються ігровим спрямуванням. Успіх організації нестандартного уроку під час розв’язання проблемної ситуації на етапі засвоєння нових знань чи виконання завдань на етапі застосування набутих знань на практиці залежить від того, як засвоєнні прийоми спілкування, розвинута техніка мовлення, мовленнєвий етикет, уміння володіти своїм організмом: міміка, жести, погляд, постава, манера триматися під час розмови, зустрічі і т.д. А саме такі якості допомагають будь-який урок зробити нетрадиційним.

Методично правильна побудова і проведення нестандартних уроків впливають на розвиток творчого мислення школярів та результативність процесу навчання: знання набувають якості системності, уміння стають узагальненими, комплексними, посилюється світоглядна спрямованість пізнавальних інтересів учнів, ефективніше формуються їхні переконання і досягається всебічний розвиток особистості.

Особлива цінність нестандартних задач в тому, що при їх розв'язуванні використовуються схеми міркувань, характерні для реальної дослідницької діяльності в галузі математики.

Математика як наука виникла із задач в основному для розвязання задач і через задачі. У навч. процесі задачі грають важл. роль, 2/3 учбового часу відводиться на розвязання задач. Розвязуючи задачі, учні вчаться застосовувати отримані теоретичні знання з практики, розвивають мислення і просторові уявлення.

Освоюючи та застосовуючи нетрадиційні методи, ми маємо пам’ятати:

- на сучасному етапі роботи школи в основу педагогічної практики слід покласти творчий підхід;
- новації мислення мають бути педагогічно впровадженими та відповідати основним вимогам навчання й виховання;
- на уроці необхідно досягти поєднання ігрової та навчальної форми діяльності;
- нетрадиційні заняття дають змогу урізноманітнювати форми і методи роботи на уроці, позбавлятися шаблонів, виховувати цілісну, творчу особистість;
- використання нетрадиційних форм навчання сприяє формуванню пізнавальних інтересів школярів, їхніх життєвих компетенцій;
- уміле поєднання традиційних і нетрадиційних форм роботи забезпечує високу ефективність нестандартних уроків, бажання дітей навчитися, належний рівень навчальних досягнень школярів.

Нестандартні задачі характеризуються відкритістю, неповторністю, невизначеністю і мають такі особливості: наявність потреби у багатократній зміні підходів до розв’язування; необхідність у створенні значної кількості варіантів розв’язування, спрямованість учня на знаходження особливих, часто неочікуваних результатів; прогнозування кількох правильних альтернативних розв'язань. Для розв'язування нестандартної задачі учень не має готової схеми дій, або задачу неможливо розв'язати відомими способами, до результату також неможливо перейти на основі прямого відтворення знань і операцій.

Отже, нестандартні завдання – це такі, для яких в курсі математики немає загальних правил і положень, що визначають точну програму їх розв'язування.

Під час розв'язування нестандартних задач учні оволодівають новими методами та прийомами, засвоюють нові математичні факти, які вони можуть використати під час розв'язування інших задач. Нестандартні задачі корисні ще й тим, що не містять алгоритмічних підходів,потребують проведення аналізу, систематизації, висування гіпотез, стимулюють пізнавальні інтереси учнів, формують навички самостійної роботи,допомагають оволодіти дедуктивним методом та, безпосередньо, пов'язані з проблемами формування творчих здібностей учнів початкової школи.

Систематичне розв'язування задач практичного змісту переконує учнів, що математика справді широко застосовується. Разом з тим ці задачі сприяють виробленню в учнів певного практичного підходу до вирішення певних проблем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Фрідман Л. М. Как научиться решать задачи / Л. М. Фрідман, Е. Н. Турецький. – Москва: Просвещение, 1984. – 176 с. – (друге).
2. Ананченка К. О. Загальна методика викладання математики у школі / К. О. Ананченка. – Москва: Універсітецкае, 1997.
3. Рогановскій Н. М. Методика викладання в середній школі / Н. М. Рогановскій. – Мінск: Вища школа, 1990.
4. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача / Г. Фройденталь. – Москва: Просвещение, 1998.
5. Колягін Ю. М. Методика викладання математики в середній школі / Ю. М. Колягін. – Москва: «Просвещение», 1999.
6. Столяр А. А. Логические проблемы преподавания математики / А. А. Столяр. – Мінск: Вища школа, 2000.
7. Бурляй М. Ф. Задачі, розв'язування яких пов'язане з пошуком нової ідеї / М. Ф. Бурляй. – Київ: Математика в школах України, 2012. – (№ 4).
8. Василевський А. Б. Обучение решению задач по математике / А. Б. Василевський. – Москва: Вища школа, 1988.
9. Кривошия Т. І. Нестандтартні задачі як засіб формування пізнавальної діяльності та творчості учнів / Т. І. Кривошия. – Київ: Математика в школах України, 2007.
10. Островский А. І. 75 задач по элементарной математике – простых, но…. / А. І. Островский. – Москва: Просвещение, 1966.
11. Тулькибаєва Н. Н. Методика обучения учащихся умению решать задачи / Н. Н. Тулькибаєва, А. В. Усова. – Челябинск, 1981. – 263 с.
12. Моторіна В. Г. Методика вивчення геометричних побудов в курсі геометрії загальноосвітньої школи, Наукове видання: Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики в 3-х томах / В. Г. Моторіна., 1996. – 444 с. – (1).

13. Леонтьев А. Н. Проблемы развития психики / А. Н. Леонтьев. – Москва: МГУ, 1972. – 575 с. – (3).

14. Каменецький С. Е. Методика решения задач по физике в средней школе: Пособие для учителейПросвещение / С. Е. Каменецький, В. П. Орехов. – Москва: Просвещение, 1971. – 448 с.

15. Фрідман Л. М. Логико-психологический анализ школьних учебних задач / Л. М. Фрідман. – Москва: Педагогика, 1977. – 208 с.

16. Колягин Ю. М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы / Ю. М. Колягин. – Москва, 1977. – 55 с.

17. Эльконин Д. Б. Интеллектуальные возможности младших школьников и содержание обучения. – В кн.: Возрастние возможности усвоения знаний / Д. Б. Эльконин. – Москва: Просвещение, 1966.

18. Бевз Г. П. Методика розв'язання стереометричних задач: Посібник для вчителя / Г. П. Бевз. – Київ: Рядянська школа, 1988. – 192 .

19. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: Книга для учителей /Я. И. Груденов. – Москва: Просвещение, 1990. – 224 с.

20. Фрідман Л. М. Теоретичні основи методики навчання математики в школі: Посібник для вчителів, методистів і педагогічних вищих навчальних закладів / Л. М. Фрідман. – Москва: Флінта, 1998. – 204 с.

21. Антипова О., Румянцева Д., Паламарчук В. У пошуках нестандартного уроку / Антипова О., Румянцева Д., Паламарчук В. – Київ: Рад. школа. – 1991. – № 1. – С.65-69.

22. Нестандартные формы урока [Электронный ресурс] / www.mat.1 september.ru. Режим доступа: http: // www.mat.1 september.ru. , свободный. – Загл. с экрана.

23. Богданович М.В. Методика викладення математики в початкових класах / Богданович М.В. – Київ: А,С,К., 1998.

24. Фіцула М.М. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти / Фіцула М.М. 2000. – 170–171с.
25. Прошкуратова П. Від творчих вчителів до творчих учнів / Прошкуратова П. / Початкова школа. – 1998. №2. – 2-4с.

Додаток 1

НЕСТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ в молодших класах

Задачі на кмітливість

За книгу заплатили 1 гривню і залишилося заплатити ще стільки, скільки залишилося б заплатити, якби за книгу заплатили стільки, скільки залишилося заплатити. Скільки коштує книга?

Відповідь. 2 грн.

У підвалі стоять 7 повних бочок олії, 7 бочок, наповнених наполовину, і 7 порожніх бочок. Як розподілити ці бочки між трьома автомашинами, щоб на кожній з них було 7 бочок, на всіх автомобілях був однаковий вантаж і олію не довелось переливати з однієї і бочки в іншу?

Розв'язання.

Одна повна бочка містить дві півбочки олії. Всього олії є $7 \cdot 2 + 7 = 21$ (півбочки). Отже, на кожну машину треба навантажити 7 півбочок олії і 7 бочок. Можливі два розв'язки цієї задачі подані в таблиці:

		Повні бочки	Бочки, наповнені	Порожні бочки
Перший розв'язок	Перша	3	1	3
	Друга	3	1	3
	Третя	1	5	1
Другий розв'язок	Перша	3	1	3
	Друга	2	3	2
	Третя	2	3	2

Комбінаторні задачі

У шаховому турнірі брали участь 7 чоловік. Кожний з кожним зіграв по одній партії. Скільки партій вони зіграли?

Розв'язання.

Два гравці зіграли одну партію. Третій гравець зіграв з кожним з цих двох по партії. Отже, 3 гравці зіграли (1+2) партії. Четвертий зіграв із кожним з трьох попередніх по партії. Отже, 4 гравці зіграли (1 + 2 + 3) партії. Продовжуючи подібні міркування, прийдемо до того, що 7 гравців зіграли 1+2+3+4+5+6=21 партію.

Можна міркувати інакше. Кожен гравець зіграв по 6 партій - по одній партії з кожним з решти учасників. Оскільки учасників було 7 і кожну партію грають два учасники, то всіх партій було $7 \cdot 6 : 2 = 21$.

НЕСТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ В 5 класі

Рівноправна участь

Мешканці Трійкіна, П'ятіркіна й Безпаливний вирішили зварити обід. Трійкіна поклала у спільну плиту 3 дровини, П'ятіркіна - 5 дровин, а Безпаливний на відшкодування витрат заплатив сусідкам 40 копійок. Як вони мають поділити між собою ці гроші?

Розв'язання.

Безпаливний заплатив третину вартості палива, тобто 40 копійок становлять третину вартості восьми дровин. Отже, $40 \cdot 3 = 120$ (копійок) коштують 8 дровин. $120 : 8 = 15$ (копійок) коштує одна дровина. Трійкіна внесла палива на $3 \cdot 15 = 45$ (копійок). Їй треба повернути 45 - 40 = 5 (копійок). П'ятіркіна внесла палива на 5 · 15 = 75 (копійок). Їй треба повернути 75 - 40 = 35 (копійок).

Відповідь. 5 коп. і 35 коп.

Нестача й лишок

Якби Івась купив 6 зошитів, то у нього залишилось би 70 коп., а якби він захотів купити 10 зошитів, то йому б не вистачило 50 коп. Скільки грошей було в Івася?

Розв'язання.

1) 70 + 50 = 120 (коп.) коштують 10 - 6 = 4 (зошити);

2) 120 : 4 = 30 (коп.) коштує 1 зошит;

3) 6 · 30 + 70 = 250 (коп.) було в Івася.

Відповідь: 2 грн. 50 коп..

Солдати вишикувалися в 6 рядів, але три солдати виявилися лишніми. Тоді з кожного ряду по одному солдату стали в сьомий ряд, і тепер уже двох солдатів не вистачало, щоб заповнити останній ряд. Скільки було солдатів?

Розв'язання.

Сьомий ряд складався з трьох лишніх солдат, шістьох солдат по одному від кожного ряду і ще двох солдат не вистачало. Отже, в сьомому ряді мало стояти 3 + 6 + 2 = 11 (солдат). В семи рядах мало стояти 7 · 11 = 77 (солдат). Оскільки двох солдат не вистачало, то насправді було 77 – 2 = 75 (солдат).

Відповідь: 75 солдат.

Логічні задачі

Дівчата Береза, Верба і Тополя посадили три дерева: березу, вербу й тополю. Жодна з них не посадила дерева, від якого пішло її прізвище. Яке дерево посадила кожна дівчинка, якщо відомо, що Береза посадила не тополю.

Розв'язання.

Умови подібних задач зручно записувати в таблицю:

	Береза	Верба	Тополя
Береза	1 -	5 +	4 -
Верба	8 -	2 -	9 +
Тополя	7 +	6 -	3 -

Оскільки жодна дівчина не посадила дерева, від якого пішло її прізвище, то Береза не посадила березу, Верба не посадила вербу, а Тополя - тополю (у клітинках 1, 2, 3 поставимо знак «-»). Оскільки Береза не садила тополю, то в клітинці 4 поставимо «-». З першого рядочка таблиці видно, що Береза могла посадити лише вербу (в клітинці 5 поставимо «+»). В другому стовпчику тільки одна вільна клітинка - 6. Так як вербу посадила Береза, то Тополя її не садила, тому в клітинці 6 ставимо «-». З третього рядка видно, що Тополя посадила березу:«+» в клітинку 7. Отже, Верба березу не садила й ставимо «-» в клітинку 8. Їй залишається тополя.

Відповідь. Береза посадила вербу, Верба — тополю, Тополя березу.

Додаток 2

Вступна задача по принципу Діріхле

Задача. Запишіть 5 таких натуральних чисел, щоб різниця жодних двох із них не ділилась на 4.

Розв'язання.

Такі 5 чисел записати не вдасться. Справді, за умови ділення на 4 можливі лише 4 різні остачі: 0, 1, 2, 3. А оскільки записаних чисел 5, то принаймні два з них під час ділення на 4 даватимуть одну і ту ж остачу. Але тоді їх різниця ділитиметься на 4.

Суть принципу Діріхле

Де «кролики», а де «клітки»?

Попередню задачу було досить просто розв'язати. Але вона допускає одне цікаве узагальнення, яке носить назву «принцип Діріхле». Сформулюємо його у загальновідомому популярному вигляді: «якщо кроликів розмістити у m клітках і $m > n$, то принаймні в одній з кліток опиниться не менше двох кроликів». Справді, якщо б у кожній клітці було не більше одного кролика, у n клітках помістилося б не більше n кроликів.

Очевидно, що у попередній задачі роль кроликів відігравали 5 чисел, а роль кліток - 4 можливі остачі від ділення на 4. Але не завжди все так просто. Іноді доводиться самому здогадатися, що вважати «кроликами», а що «клітками».

Задача. Доведіть, що серед будь-яких десяти цілих чисел можна вибрати одне чи декілька, сума яких ділиться на 10.

Розв'язання.

Складемо такі 11 сум:

$0, a_1, a_1 + a_2 + a_3, ..., a_1 + a_2 + ... + a_{10}$. Принаймні дві з них під час ділення на 10 дають однакові остачі. Але у такому випадку їхня різниця буде шуканою сумою, яка ділиться на 10.

Принцип Діріхле і підрахунок двома способами

Часто, розв'язуючи задачі, доводиться застосовувати міркування, аналогічні принципу Діріхле, виконуючи при цьому обчислення однієї і тієї ж величини двома способами.

Задача. Деяка комісія засідала 40 разів, причому в кожному засіданні брали участь 10 її членів, жодні два з яких не зустрічалися на засіданнях більше одного разу. Доведіть, що до складу комісії входить понад 60 осіб.

Розв'язання.

Якщо у комісії менше 60 осіб, то ніхто з них не брав участі більше, ніж у шести засіданнях (кожного разу з іншими членами комісії), бо вже 7 · 9 > 60. Оскільки учасників усіх засідань 40 · 10 = 400, а на кожного учасника припадає не більше шести засідань, то членів комісії не менше 400 : 6 > 60. Одержане протиріччя доводить, що припущення про їх кількість, меншу за 60, було неправильним.

Узагальнення принципу Діріхле

Припустимо тепер, що $m > nk$. Зрозуміло, що при цьому принаймні в одну з кліток доведеться помістити не менше $k+1$ кролика.

Задача. У квадраті зі стороною l взяли 51 точку. Доведіть, що деякі три з цих точок можна накрити кругом радіуса $\frac{1}{7}$.

Розв'язання.

Розіб'ємо квадрат на 25 однакових менших квадратиків зі стороною 0,2. Оскільки 51 > 25. 2, то принаймні в одному з них опиниться не менше трьох з цих точок. Круг радіуса - з центром у центрі такого квадратика, очевидно, також покриє ці точки.

Принцип Діріхле і комбінаторні обчислення

Як ми вже бачили вище, застосовуючи принцип Діріхле, іноді доводиться користуватися й іншими міркуваннями. Часто на допомогу приходять комбінаторні обчислення.

Задача. 8 шахістів провели турнір в одне коло. Виявилося, що серед будь-яких трьох шахістів принаймні двоє зіграли між собою внічию. Знайдіть найменшу можливу кількість нічиїх на цьому турнірі.

Розв'язання.

Розіб'ємо шахістів на дві групи по чотири учасники. Припустимо, що в кожній із цих груп усі шахісти зіграли між собою внічию; кількість зіграних партій у кожній групі така ж, як і кількість способів вибору двох шахістів із чотирьох, тобто $C_4^2 = 6$. Отже, разом маємо 12 нічиїх. Яких би трьох шахістів ми не взяли, принаймні два з них попадуть в одну групу. Отже, за 12-ти нічиїх умови задачі будуть виконані. При цьому звернемо увагу на те, що кожен шахіст зіграв внічию тричі. Очевидно, меншою кількість нічиїх могла б бути тоді, коли б хтось зіграв внічию не більше двох разів. Припустимо, що таким є гравець А. Тоді знайдуться принаймні 5 шахістів, з якими він не розійшовся миром. Складемо трійку, в яку входить А та довільні два гравці із вказаних п'яти. Оскільки А із вибраними гравцями не зіграв внічию, то вони мусили зіграти внічию між собою. А отже, і всі партії гравців з даної п'ятірки завершилися внічию. А таких було

$C_5^2 = 10$. Якщо з двома іншими шахістами А зіграв внічию, то разом маємо не менше 12-ти нічийних зустрічей. Якщо ж ні, — то аналогічними міркуваннями уже для шістки гравців встановлюємо, що нічиїх було не менше $C_6^2 = 15$. Отже, найменша можлива кількість нічиїх на турнірі дорівнює 12.

Геометричні застосування принципу Діріхле

Часто принцип Діріхле використовують у якій-небудь геометричній формі, наприклад:

а) якщо на відрізку довжини l розташовано декілька відрізків, сума довжин яких більша за l, то принаймні два з цих відрізків мають спільну точку;

б) якщо на колі радіуса R розташовано декілька дуг, сума довжин яких більша за $2\pi R$, то принаймні дві з цих дуг мають спільну точку. ($2\pi R$ — довжина кола радіуса R, $\pi \approx 3{,}14$);

в) якщо всередині фігури з площею S розташовано декілька фігур, сума площ яких більша за S, то принаймні дві з цих фігур мають спільну точку.

Обґрунтування кожного з тверджень а) - в) елементарне: припустивши відсутність спільної точки обумовлених фігур, легко прийдемо до протиріччя стосовно суми довжин чи суми площ цих фігур.

Задача. У квадраті з площею 4 см^2 розміщено 7 прямокутників, кожен з яких має площу 1 см^2. Доведіть, що площа спільної частини принаймні двох з цих прямокутників не менша за $\frac{1}{7} см^2$.

Розв'язання.

Припустимо, що площа спільної частини кожної пари таких прямокутників менша за $\frac{1}{7} см^2$. Оскільки всіх можливих попарних перетинів є $C_7^2 = 21$, то разом вони займають менше, ніж 3 см^2. А отже, сума площ тих частин прямокутників, які не перекриваються між собою, повинна бути більшою, ніж 7 см^2 - 3 см^2 = 4 см^2. Але у такому випадку ці 7 прямокутників не помістилися б у заданому квадраті.

Просторовий варіант використання принципу Діріхле

У просторовому випадку застосування принципу Діріхле, як правило, пов'язане з об'ємами. Але можливе також поєднання дискретного та неперервного варіантів цього принципу.

Задача. Археологи виявили піраміду у формі правильного тетраедра, складену з дев'яти монолітних блоків. Знайдений ними папірус стверджував, що кожен блок був витесаний з однієї з дев'яти однакових кам'яних брил, які також мали форму правильних тетраедрів. Доведіть, що відходи древнього будівництва перевищили 11 %.

Розв'язання.

Розглянемо 10 точок — вершин піраміди та середин усіх її ребер. Оскільки брил лише 9, то принаймні дві з виділених точок належатимуть якомусь одному з цих блоків. А отже, діаметр такого блоку, тобто відстань між найвіддаленішими його точками, не менший за половину ребра піраміди. Звідси випливає, що об'єм кожної з брил не менший за $\frac{1}{8}$ об’єму всієї піраміди. А це означає, що матеріал принаймні однієї з дев'яти брил пішов у відходи, які у такому разі перевищили 11%.