Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота

магістерського рівня

на тему

Методика розв’язування геометричних задач векторно-координатним методом з використанням ІКТ

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,

групи М-М-61

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Торчило Оксана Віталіївна

Керівник: к. п. наук, доц. кафедри математики з МВ

Коваль Володимир Васильович

____

Рецензенти: доктор техніч. наук, проф.

Турбал Юрій Васильович

____

Кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики

Присяжнюк Ігор Михайлович

____

Рівне – 2019 року

ЗМІСТ

ВСТУП

В геометрії застосовуються різні методи розв’язування задач – це синтетичний (чисто геометричний) метод, метод перетворень, векторний, метод координат та інші. Вони займають різне положення в школі. Основним методом вважається синтетичний, а з інших найвище положення займають векторний метод і метод координат тому, що він тісно пов'язаний з алгеброю. Витонченість синтетичного методу досягається за допомогою інтуїції, припущень, додаткових побудов. Координатний і векторний метод не потребують розгляду складних геометричних конфігурацій, виконання додаткових побудов. Ними можна скористатись при розв’язуванні як планіметричних, так і стереометричних задач.

Можна з упевненістю говорити про те, що вивчення даних методів є невід'ємною частиною шкільного курсу геометрії. Але не можна забувати, що при вирішенні завдань векторно-координатним методом не потрібна висока міра кмітливості, оскільки вирішення завдань багато в чому алгоритмізовано, що в більшості випадків спрощує пошук рішення задачі, а це у свою чергу негативно позначається на творчих здібностях учнів. Тому необхідна методика вивчення векторно-координатного методу із застосуванням сучасних технологій, що дозволяє навчити учнів розв’язувати різноманітні задачі даним методом. Цим і визначається **актуальність дослідження** вибраної теми: «Методика навчання учнів розв’язувати геометричні задачі векторно-координатним методом з використанням ІКТ».

Питання навчання учнів розв’язувати задачі векторним і координатним методами розглядаються в дослідженнях Крайзмана М.Л., Кушніра І.А., Гельфонда І.М., Гусєва В.А і ін. Але в них навчання учнів розв’язувати геометричні задачі даними методами не виступає як самостійна проблема, а грає допоміжну роль.

Об’єктом дослідження є розв’язання геометричних задач у процесі вивчення курсу геометрії.

Предметом дослідження є навчання учнів шкіл, спеціалізованих шкіл, гімназій, ліцеїв з поглибленим курсом математики розв’язувати геометричні задачі векторно-координатним методом з використанням ІКТ.

Мета дипломної роботи полягає у розробці методики навчання учнів розв’язувати геометричні задачі векторно-координатним методом з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

Гіпотеза дослідження: застосування ІКТ на уроках геометрії при вивченні координат і векторів дозволить підвищити якість знань і вмінь для розв’язування геометричних задач координатним і векторним методами.

Задачі дослідження:

1. Виділити в курсі геометрії теоретичний матеріал, що лежить в основі розв’язування геометричних задач векторно-координатним методом.
2. Виділити компоненти уміння розв’язувати геометричні задачі координатним і векторним методами та розробити шляхи їх формування в учнів.
3. Визначити зміст вправ з формування в учнів координатного і векторного методів розв’язування геометричних задач.
4. Провести систематизацію шкільних геометричних задач, які розв’язуються методом координат; векторним методом.
5. Розробити на основі дослідження методику навчання учнів розв’язувати геометричні задачі координатним і векторним методами з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.
6. Експериментально перевірити результативність запропонованої методики.

Для досягнення цілей роботи, перевірки гіпотези і рішення поставлених вище завдань були використані наступні **методи дослідження:**

– аналіз програм з математики, навчальних посібників, методичних матеріалів, що стосуються методу координат і векторного методу;

– спостереження за ходом освітнього процесу, за діяльністю учнів;

– експериментальна перевірка розробленої методики навчання;

– статистична обробка експериментального матеріалу.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що використання його результатів в шкільній практиці сприяє більш успішному навчанню учнів розв'язувати геометричні задачі векторно-координатним методом.

Апробація результатів дослідження. Результати роботи були представлені на:

1. Звітній науковій конференції викладачів, співробітників, докторів, аспірантів та студентів РДГУ;
2. Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Тенденції та перспективи розвитку науки і0 освіти в умовах глобалізації» 31 жовтня 2019р.

Опубліковано наукову статтю «Розв'язування геометричних задач векторно-координатним методом з використанням ІКТ» у збірнику матеріалів конференції (№52, 2019р.).

Структура роботи побудована за логічним принципом і складається зі вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг 88 сторінок.

РОЗДІЛ І. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Методика розв'язування задач з геометрії

Одним з основних засобів досягнення високого рівня творчої діяльності учнів є розв'язування геометричних задач. Відомо, що «мистецтво розв'язувати геометричні задачі чимось нагадує трюки ілюзіоністів — іноді, навіть знаючи розв'язування задачі, важко зрозуміти, як можна було до нього додуматись». Цілком зрозуміло, що цьому мистецтву треба учнів навчати. Геометричні задачі можна класифікувати по-різному, залежно від того, що покладено в основу класифікації. Розрізняють задачі за: а) вимогами, сформульованими в їх умовах; б) кількістю даних вхідної інформації; в) методичним призначенням; г) кількістю розв'язків.

Що означає розв'язати геометричну задачу? Будь-яка геометрична задача побудована так, що в ній за даними елементами треба знайти інші (шукані) елементи геометричної фігури, які перебувають між собою та даними елементами в певних співвідношеннях, або визначити розміри окремих елементів. У геометричних задачах різних типів — на обчислення, доведення, побудову чи дослідження терміни «знайти», «шукані» мають конкретний зміст, який слід добре розуміти.[1, с.5]

При розв'язуванні конкретної задачі у якості головного для вчителя виступає провідна функція, заради якої розв'язувалась задача:

– навчальна функція задач спрямована на формування в учнів систем математичних знань, умінь і навичок на різних етапах їх засвоєння;

– виховна функція задач визначається цілями виховання і спрямована на виховання пізнавального інтересу, самостійності у здобутті знань і навичок навчальної праці, моральних якостей, культури;

– розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення учнів, на їх навчання ефективним прийомам розумової діяльності, наприклад, навчання вмінню виділяти головне, суттєве в задачах та їх розв'язуванні;

– контролююча функція спрямована на встановлення рівня навченості, математичного розвитку учнів, здібностей до самостійного вивчення математики, сформованості пізнавальних інтересів учнів тощо.[6]

Учителю треба вчити учнів шукати способи розв’язування задач. Основними методами пошуку розв’язування є аналітичний та синтетичний. Нагадаємо, що *аналітичний* – це метод міркувань від невідомих, шуканих до даних величин. *Синтез* – це метод міркувань від даних до шуканих, невідомих величин. *Синтетичний метод* доцільно використовувати тоді, коли задача легка або вже відомий спосіб її розв’язування. Йому треба надавати перевагу в молодших класах. Спосіб розв’язування більшості задач, зокрема складніших, треба шукати *аналітичним методом*, виходячи з вимоги задачі. Тоді кожний крок учня цілеспрямований, він шукає тільки те, що треба знайти, а не те, що можна (як при синтетичному методі). Звичайно, і при розв’язуванні аналітичним іноді доводиться вдаватися до синтезу. Коли розв’язують важку задачу, то користуються *аналітико-синтетичним методом*: прокладають шлях і від вимоги, і від умови, поки не буде знайдено зв’язку між ними. Здійснювати пошук розв’язування задачі аналітико-синтетичним методом учителю слід у формі евристичної бесіди, продумавши систему цілеспрямованих запитань до учнів.

Більшість конкретних типів задач шкільного курсу математики мають алгоритмічний або напівевристичний характер. Існують алгоритми розв’язування різних типів рівнянь, нерівностей, задач на рух, на спільну роботу, на відсотки тощо. Тому при розв’язуванні стандартних задач, тобто задач, що мають певний алгоритм розв’язування, важливим є навчання учнів складати і застосовувати алгоритми та схеми розв’язування.

Розглянемо, за якими ознаками можна співвіднести задачі із певним методом розв’язування.

Види геометричних задач, які можна розв’язувати координатним методом:

1. Задачі на відшукання геометричних місць точок (ГМТ).

2. Задачі на доведення залежностей між лінійними елементами геометричних фігур.

Види геометричних задач, які можна розв'язувати векторним методом:

1. Задачі, пов'язані з доведенням паралельності прямих;
2. Задачі, в яких треба довести, що деяка точка ділить відрізок у певному відношенні, зокрема, є його серединою;
3. Задачі, в яких треба довести, що три точки *A, B, C* лежать на одній прямій;
4. Задачі, в яких треба довести, що даний чотирикутник *ABCD* – паралелограм;
5. Задачі на знаходження довжини відрізка;
6. Задачі на знаходження величини кута;
7. Задачі, в яких лінійні елементи та кути розміщені в різних площинах і звести їх в одну площину неможливо або недоцільно та ін.[6]

1.2. Історія виникнення координатного і векторного методів.

В даний час вже дуже велике число фахівців з різних областей науки мають уявлення про прямокутні декартові координати на площині, оскільки ці координати дають можливість наочно за допомогою графіка зобразити залежність однієї величини від іншої. Назва «Декартові координати» наводить на помилкову думку про те, що ці координати були відкриті Р.Декартом. Насправді прямокутні координати використовувалися в геометрії ще до нашої ери. Спочатку ідея методу координат виникла ще в стародавньому світі у зв'язку з потребами астрономії, географії, живопису. Однією з причин її виникнення була необхідність орієнтуватися під час плавання у відкритих акваторіях, а не лише біля берегів. Старогрецького ученого Анаксимандра Мілетського (близько 610-546 до н. е.) вважають укладачем першої географічної карти. Він чітко описував широту і довготу місця, використовуючи прямокутні проекції. Старогрецький вчений Клавдій Птолемей в II столітті н.е. застосовував географічні координати (довготу і широту) для визначення місцезнаходження мореплавця. У книзі про три виміри тіл він перший говорить про три прямокутні осі – прообрази сучасної координатної системи.

Ідею використання методу координат можна знайти і в мистецтві Стародавнього світу. На стіні однієї із староєгипетських похоронних камер була виявлена квадратна сітка, якою користувалися для збільшення зображень.

Основна заслуга в створенні методу координат належить французькому математикові Р.Декарту. Він вніс до прямокутних координат дуже важливе удосконалення, ввівши правила вибору знаків. Але головне, користуючись прямокутними координатами, він побудував аналітичну геометрію на площині, зв'язавши цим геометрію і алгебру. Потрібно сказати, що одночасно з Р.Декартом, побудував аналітичну геометрію і інший французький математик П.Ферма. Значення аналітичної геометрії полягає, перш за все, в тому, що вона встановила тісний зв'язок між геометрією і алгеброю. Ці дві галузі математики до часу Р.Декарта досягли вже високого ступеня досконалості. Але розвиток їх протягом тисячоліть йшов незалежно один від одного, і до часу появи аналітичної геометрії між ними намічався лише досить слабкий зв'язок.

У основі аналітичної геометрії, створеній П.Ферма і Р.Декартом, лежать дві ідеї:

– ідея координат, що привела до арифметизації площини, тобто до того, що кожній точці площини ставиться у відповідність два числа, взяті в певному порядку і навпаки;

– ідея тлумачення будь-якого рівняння з двома невідомими як деякої лінії на площини і, навпаки, представлення будь-якої лінії, визначуваної як деяке геометричне місце точок, відповідним рівнянням.

П.Ферма раніше Р.Декарта і більш систематизовано ввів прямолінійні координати, виклав метод координат і застосував його до геометрії, вивівши рівняння прямої і кривих другого порядку.

«Геометрія» Р.Декарта була вперше опублікована французькою мовою в 1637 р. як один з трьох додатків до його філософської праці «Міркування про метод». У цьому, як і в інших своїх творах, Р.Декарт висловив думку, що математика є найважливішим засобом для розуміння законів всесвіту і кращим підтвердженням того, що людський розум здатний знайти істину в науці і пізнавати природу. Ще в 23-річному віці Р.Декарта осяяла думку про перебудову всіх наук на математичній, аналітичній основі, думка про створення однієї єдиної і всеосяжної науки – «універсальної математики». Ця думка його постійно надихала, хоча йому так і не вдалося здійснити її повністю. «Геометрія» Р.Декарта і з'явилася як часткова реалізація загальної його ідеї, як об'єднання арифметики і алгебри з геометрією.

Фактично «Геометрія» Р.Декарта є працею алгебри, і мало в ній можна знайти з того, що ми сьогодні називаємо «аналітичною геометрією», проте основна ідея останньої – алгебраїчний спосіб дослідження питань геометрії за допомогою методу координат – в ній чітко викладена. Р.Декарт починає з твердження, що всяке геометричне завдання зводиться врешті-решт до знаходження довжини або до побудови деяких відрізків, у зв'язку з чим він розвиває своє числення відрізків.

Заклавши основи аналітичної геометрії, сам Р.Декарт просунувся в цій області недалеко. Недосконалою була його система координат, в якій не розглядалися від’ємні абсциси. Майже не розглянутими залишалися питання аналітичної геометрії тривимірного простору. Отже, не тільки у П.Ферма, але і у Р.Декарта ще немає того, що ми називаємо системою декартових координат на площині, є тільки вісь абсцис з початковою точкою на ній. Хоча «Геометрія» Р.Декарта ще не була справжньою аналітичною геометрією, вона набула більшого поширення, ніж роботи П.Ферма, які були видані аж в 1679 р. Тому прямокутні координати часто називають декартовими. Раніше учені писали на латині, тому більшість математичних термінів мають латинське походження. Слово «координати» складається з двох латинських слів co (cum) – приставка, яка означає «разом» і «ordinatys», - «впорядкований», «визначений». Отже координати – це задані разом числа, які визначають положення точки на площині, на будь-якій поверхні або в просторі. Термін «абсциса» - виник від латинського слова «abscissus» - «відрізаний», а термін «ордината» - від латинського «ordinatys» - означає «розташований в порядку».[2, с.88-91]

Самим коротким шляхом аксіоматизації геометрії є шлях, запропонований в 1917 році − році найбільших революційних здійснень − Германом Вейлем. Ідея Вейля полягала в тому, що векторні простори, які усе більш проникають у різні розділи математики і її додатків, повинні органічно ввійти в курс елементарної геометрії. Поняття "пряма", "площина", "конгруентність" та ін. Вейль виключив із числа первісних, обравши замість них у якості невизначуваних інші поняття: "вектор", "сума векторів", "добуток вектора на число", "скалярний добуток векторів", "відкладання вектора від крапки". З формальної сторони це лише один з можливих шляхів аксіоматизації геометрії, еквівалентний гільбертівському, тобто, що дозволяє довести ті ж самі теореми. Але з методологічної точки зору вейлівський шлях є більш цінним. Замість скрупульозного, стомлюючого й довгого ланцюжка міркувань за гільбертівською схемою (до того ж відірваної від інших розділів математики й від природничих наук) вейлівська схема дає винятково ясний і короткий виклад, насичений сучасними ідеями і близькою до найактуальніших розділів математики, фізики, економіки, та інших сфер знання. З логічної точки зору вейлівський шлях побудови аксіоматизації є еквівалентний гільбертівському, так як доводив ті самі теореми геометрії. Та з точки зору викладання його побудова геометрії має значні переваги. Вейлівське викладання геометрії − найбільш сучасне з точки зору науки, воно дає нам змогу познайомитися з поняттям векторного простору, яке має важливу роль не тільки в математиці, але і в фізиці, хімії, економіці. Вейлівське трактування дозволяє володіти більш ефективним векторним методом рішення задач просторової геометрії, також найбільш локальним та простим.

Вейлівська аксіоматика включає сімнадцять аксіом, поєднаних між собою в п'ять груп.[32, с.30]

Ідея вектора − одна з фундаментальних ідей сучасної математичної науки та її застосувань. На векторній основі зараз будуються лінійна алгебра, аналітична і диференціальна геометрія, теорія багатовимірних просторів. Вектори широко застосовуються в сучасній фізиці, технічних науках. Тому природно, що в 50-х роках XX ст. на початку всесвітнього руху за реформу шкільної математичної освіти у всіх розвинутих країнах була висловлена одностороння думка - впровадити ідею вектора в шкільну математику. При цьому пропонувалося два підходи.

1. Крайні модерністи (Ж. Дьєдонне, Л. Фелікс, Г. Шоке) наполягали на тому, щоб зробити ідею вектора базисною ідеєю шкільного курсу і, зокрема, курс геометрії будувати на основі ідеї векторного простору, наприклад, використовуючи аксіоматику Вейля.

2. У колишньому СРСР А. М. Колмогоров, О. І. Маркушевич, які очолювали перебудову змісту шкільної математичної освіти, дотримувались поміркованого підходу і пропонували не розглядати ідею вектора як базисну і не будувати навіть певний розділ геометрії на векторній основі. Разом з тим передбачалось ввести поняття вектора і необхідний апарат векторної алгебри із загальноосвітньою метою та використовувати вектори як апарат для доведення теорем і розв'язування задач геометрії, фізики. Спробу реалізувати такий погляд здійснено в посібниках з геометрії за редакцією А. М. Колмогорова та З. А. Скопця, а також у паралельних підручниках геометрії.[36, с.312]

1.3. Особливості вивчення теми «Координати та вектори» в шкільному курсі геометрії.

Введення координатної площини в шкільному курсі геометрії розпочинається в 5 класі. Розглядають числовий промінь і як на ньому зобразити натуральні числа. У 6 класі впроваджується координатна пряма для зображення додатних і від’ємних чисел та координатна площина.

Вводиться поняття додатного та від’ємного напрямків.

Пряму, на якій вибрано початок відліку, одиничний відрізок і напрям називають **координатною прямою.**

Для того щоб знайти місцезнаходження точки на площині вводять осі координат. Горизонтальну вісь називають **віссю абсцис** і позначають *x*, вертикальну вісь називають **віссю ординат** і позначають буквою *y*. Ці осі утворюють **прямокутну систему координат.**

Координатною площиною називають площину, на якій задано прямокутну систему координат.

Тему «Декартові координати на площині» на вищому теоретичному рівні та в ширшому застосуванні вивчають у 9 класі, починаючи з повторення та систематизації знань і вмінь з попередніх класів. Розглядаються: відстань між точками заданими на площині, знаходження координат середини відрізка. Вводяться такі нові поняття для учнів як рівняння фігури та рівняння кола, рівняння прямої, кутовий коефіцієнт прямої.

Орієнтовне календарно-тематичне планування з геометрії, 9 клас, рівень стандарту (8 год) наведено у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
	Тема 1. Координати на площині	
1.	Синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180°	1
2.	Відстань між точками із заданими координатами. Координати середини відрізка	1
3.	Розв’язування задач і вправ	1
4.	Рівняння фігури. Рівняння кола	1
5.	Рівняння прямої	1
6.	Розв’язування задач і вправ	1
7.	Узагальнення і систематизація знань	1
8.	**Контрольна робота № 2 за темою: «Координати на площині»**	**1**

Для підвищення мотивації при вивченні векторів доцільно нагадати учням, що поняття векторних величин їм траплялося при вивченні фізики в 7 класі. В 9 класі при вивченні теми «Вектори на площині» вводиться значна кількість нових понять – вектор, модуль і напрям вектора, рівність векторів, координати вектора, додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, колінеарні вектори, скалярний добуток векторів.

Орієнтовне календарно-тематичне планування з геометрії, 9 клас, рівень стандарту (12 год) наведено у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
	Тема 2. Вектори на площині	1
1.	Поняття вектора. Модуль і напрям вектора	1
2.	Рівність векторів. Координати вектора	1
3.	Додавання і віднімання векторів	1
4.	Розв’язування задач і вправ	1
5.	Множення вектора на число. Колінеарні вектори	1
6.	Розв’язування задач і вправ	1
7.	Скалярний добуток векторів	1
8.	Розв’язування задач і вправ	1
9.	Векторний метод	1
10.	Розв’язування задач і вправ	1
11.	Узагальнення і систематизація знань	1
12.	**Контрольна робота № 3 за темою: «Вектори на площині»**	**1**

Метою вивчення теми «Вектори і координати в просторі» є повторення, систематизація і розширення знань учнів про вектори, координати, рівняння фігур із курсу планіметрії основної школи, поширення відповідних понять на простір, розвиток вмінь застосування векторів і координат. Дана тема вивчається в 10 класі.

Для вивчення даної теми в класах рівня стандарту відводиться 10 годин, профільного та поглибленого рівнів – 22 години.

Орієнтовне календарно-тематичне планування з геометрії, 10 клас, рівень стандарту наведено у таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
	Тема 3. Координати та вектори у просторі	
1.	Прямокутні координати в просторі. Формула для обчислення відстані між двома точками	1
2.	Прямокутні координати в просторі. Координати середини відрізка	1
3.	Прямокутні координати в просторі. Самостійна робота	1
4.	Вектори у просторі	1
5.	Дії над векторами. Розкладання вектора на складові	1
6.	Дії над векторами, що задані координатами	1
7.	Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами	1
8.	Розв’язування задач і вправ. Самостійна робота	1
9.	Узагальнення і систематизація знань	1
10.	**Контрольна робота № 3 за темою: «Координати і вектори»**	**1**

Орієнтовне календарно-тематичне планування з геометрії, 10 клас, профільного та поглибленого рівнів наведений у таблиці 1.4.

Таблиця 1.4

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин

	Тема 4. Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі	1
1.	Прямокутна система координат у просторі. Відстань між точками. Координати середини відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні	1
2.	Розв’язування задач і вправ	1
3.	Розв’язування задач і вправ	1
4.	Вектори у просторі. Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів	1
5.	Операції над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число	1
6.	Розв’язування задач і вправ	1
7.	Кут між векторами. Скалярний добуток векторів	1
8.	Розв’язування задач і вправ	1
9.	Розв’язування задач і вправ. *Самостійна робота*	1
10.	Узагальнення і систематизація знань	1
11.	**Контрольна робота № 6 за темою: «Координати і вектори у просторі»**	**1**
12.	Рівняння площини, сфери	1
13.	Рівняння площини, сфери	1
14.	Поняття про координатний і векторний методи розв'язування задач	1
15.	Розв’язування задач і вправ	1
16.	Розв’язування задач і вправ	1
17.	Розв’язування задач і вправ. *Самостійна робота*	1
18.	Перетворення у просторі: симетрія відносно точки, симетрія відносно площини	1
19.	Перетворення у просторі: паралельне перенесення	1
20.	Розв’язування задач і вправ	1

21.	Узагальнення і систематизація знань	1
22.	**Контрольна робота № 7 за темою: «Рівняння площини, сфери. Перетворення у просторі»**	**1**

Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учня під час вивчення координат і векторів в просторі, 10 клас[28].

Учень/учениця:

– користується аналогією між векторами і координатами на площині й у просторі;

– усвідомлює важливість векторно-координатного методу в математиці;

– виконує операції над векторами;

– застосовує вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин;

– знаходить відстань між двома точками, координати середини відрізка, координати точок симетричних відносно початку координат та координатних площин;

– використовує координати у просторі для вимірювання відстаней, кутів.

Дана тема включає такі питання:

1. Вектори у просторі.
2. Розкладання вектора на складові.
3. Прямокутні координати в просторі.
4. Дії над векторами, що задані координатами.
5. Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками.
6. Рівняння прямої та площини.
7. Застосування координат до розв’язування стереометричних задач
8. Розв’язування стереометричних задач за допомогою векторів.

1. Вектори у просторі.

Перш ніж розглядати цю тему, потрібно запропонувати учням повторити за підручником навчальний матеріал стосовно векторів на площині, зокрема пригадати: означення вектора, його модуля, рівних векторів, координат вектора, властивість рівних векторів, заданих координатами, правила знаходження вектора-суми, різниці двох векторів, добутку вектора на число, формулювання векторної рівності, означення скалярного добутку і його властивість через добуток модулів і кут між ними

Враховуючи, що окремі означення і твердження про вектори переходять без змін або з невеликими змінами в простір, доцільно розглядати з учнями заздалегідь заготовлену таблицю, в якій порівнюються означення і теореми про вектори на площині та в просторі (табл. 1.5).

Таблиця 1.5. **Вектори на площині та в просторі.**

На площині	В просторі
1. Вектором називають напрямлений відрізок і позначають: $\overline{a}$, $\vec{a}$, $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$.	
2. Нехай вектор $\overline{a}$ має початком точку $A_1(x_1; y_1)$, а кінцем точку $A_2(x_2; y_2)$. Координатами вектора $\overline{a}$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Вектор $\overline{a}$, заданий координатами, позначають $\overline{a}(a_1; a_2)$.	2. Нехай вектор $\overline{a}$ має початком точку $A_1(x_1; y_1; z_1)$, а кінцем точку $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Координатами вектора називають $\overline{a}$ числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Вектор $\overline{a}$, заданий координатами, позначають $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$.
3. Координати нульового вектора $\overline{a}$ дорівнюють нулю.	
4. Два вектори називаються рівними, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.	
5. **Теорема.** Рівні вектори мають рівні відповідні координати і, навпаки, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.	

6. Вектори $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ називають однаково направленими, якщо півпрямі AB і CD однаково направлені.	
7. Абсолютною величиною (або модулем) вектора називають довжину відрізка, що зображує вектор. Позначимо $\lvert\overline{a}\rvert$.	
8. **Теорема.** Абсолютна величина вектора $\overline{a}(a_1; a_2)$ дорівнює $\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}$.	8. **Теорема.** Абсолютна величина вектора $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ дорівнює $\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$.
9. Сумою векторів $\overline{a}(a_1; a_2)$ і $\overline{b}(b_1; b_2)$ називають вектор $\overline{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.	9. Сумою векторів $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$ називають вектор $\overline{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.
10. Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ справедливі рівності: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ і $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$.	
11. Хоч якими є точки A, B і C, виконується векторна рівність $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.	
12. Різницею векторів $\overline{a}(a_1; a_2)$ і $\overline{b}(b_1; b_2)$ називають такий вектор $\overline{c}(c_1; c_2)$, який у сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$. Звідси $c_1 = a_1 - b_1$, $c_2 = a_2 - b_2$.	12. Різницею векторів $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$ називають такий вектор $\overline{c}(c_1; c_2; c_3)$, який у сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$. Звідси $c_1 = a_1 - b_1$, $c_2 = a_2 - b_2$, $c_3 = a_3 - b_3$.
13. Добутком вектора $\overline{a}(a_1; a_2)$ на число λ називають вектор $\overline{\lambda a}(\lambda a_1; \lambda a_2)$.	13. Добутком вектора $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число λ називають вектор $\overline{\lambda a}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

<table>
<tr><td colspan="2">14. Два відмінних від нульового вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.</td></tr>
<tr><td colspan="2">15. Теорема. У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні і, навпаки, якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то вектори колінеарні.</td></tr>
<tr><td>16. Скалярним добутком векторів $\overline{a}(a_1;\, a_2)$ і $\overline{b}(b_1;\, b_2)$ називають число $a_1b_1 + a_2b_2$.</td><td>16. Скалярним добутком векторів $\overline{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$ і $\overline{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$ називають число $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">17. Теорема. Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними.</td></tr>
<tr><td>18. Для будь-яких векторів $\overline{a}(a_1;\, a_2)$, $\overline{b}(b_1;\, b_2)$ і $\overline{c}(c_1;\, c_2)$ справедлива рівність $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$.</td><td>18. Для будь-яких векторів $\overline{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$, $\overline{b}(b_1;\, b_2;\, b_3)$ і $\overline{c}(c_1;\, c_2;\, c_3)$ справедлива рівність $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$.</td></tr>
<tr><td>19. Будь-який вектор $\overline{a}(a_1;\, a_2)$ можна записати у вигляді $\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2}$, де $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$ - одиничні вектори (орти).</td><td>19. Будь-який вектор $\overline{a}(a_1;\, a_2;\, a_3)$ можна записати у вигляді $\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}$, де $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ і $\overline{e_3}$ - одиничні вектори (орти).</td></tr>
</table>

[36, с.480-481]

Після цього можна запропонувати учням довести (для простору) теорему про необхідну і достатню умову рівності двох векторів.

Теорема. Рівні вектори мають рівні відповідні координати і, навпаки, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.

2. Розкладання вектора на складові.

Це питання належить до визначальних, оскільки воно є базовим для арифметизації векторної алгебри (переходу до координат векторів).

Вводимо поняття одиничного вектора, як вектора, абсолютна величина якого дорівнює одиниці. Одиничні вектори, які мають напрями додатних координатних півосей, називають координатними векторами або ортами.

Розглянемо розкладання вектора у вигляді лінійної комбінації ортів. Встановлюємо, що будь-який вектор можна розкласти за трьома не компланарними одиничними векторами:

$$\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3},$$

де $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ - одиничні вектори (орти), напрямок яких збігається із напрямком координатних осей.

3. Прямокутні координати в просторі.

Головними завданнями цієї теми є:

– введення прямокутної системи координат у просторі;

– формування вмінь оперувати координатами точок для встановлення положення точок у координатному просторі;

– формування вмінь виконувати дії над векторами у координатах і застосовувати їх до вимірювання геометричних і фізичних величин.

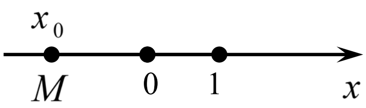
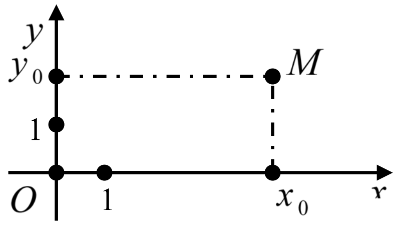
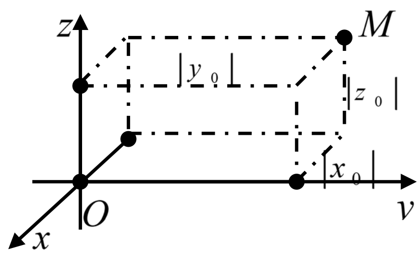
Розглядаючи декартові координати у просторі, потрібно нагадати учням відомості про координати точок на прямій і площині. Враховуючи, що поняття системи координат має визначальне значення для просторової орієнтації, необхідно домогтися, щоб всі учні володіли ним.

По-перше учні мають зрозуміти, що число осей у прямокутній системі координат залежить від того, в якому “просторі” здійснюється орієнтація: на прямій (одновимірному просторі) – 1 вісь; на площині (двовимірному) – 2 осі; у просторі (тривимірному) – 3 осі.

По-друге, координати точки однозначно фіксують її у просторі, а точніше між точками та їхніми координатами існує взаємно однозначна відповідність.

Розв’язуванню цих завдань сприяє застосування таблиці 1.6, на якій візуалізується інформація про системи координат.

Таблиця 1.6

№п.п	Система координат	Позначення координат точки M	Геометричний зміст модуля координат як відстані
1		$M(x_0)$	$OM = \|x_0\|$
2		$M(x_0;\ y_0)$	$\|x_0\|$ - від M до осі y $\|y_0\|$ - від M до осі x
3		$M(x_0;\ y_0;\ z_0)$	$\|x_0\|$ - від M до площини yz $\|y_0\|$ - від M до площини xz $\|z_0\|$ - від M до площини xy

4. Дії над векторами, що задані координатами.

Якщо на площині чи у просторі вибрано систему координат, то характеризувати однозначно за допомогою чисел можна не тільки точки, а й вектори. Усвідомлення цього положення і є головною метою даного навчального питання.

Так само, як на площині, означають дії над векторами в просторі: додавання, множення на число і скалярний добуток.

Сумою векторів $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ називають вектор $\overline{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$.

Так само, як і на площині, для будь-яких точок $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ і $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$ виконується векторна рівність:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}\ .$$

Пропонуємо учням доведення провести самостійно. Скорочений запис в зошитах учнів може бути таким:

$\overline{AB}\left(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\right)$,

$\overline{BC}\left(x_3 - x_2;\ y_3 - y_2;\ z_3 - z_2\right)$,

$\overline{AC}\left(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\right)$;

$\overline{AB} + \overline{BC} = \left(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\right)$ - за означенням. Тоді, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні. Отже, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

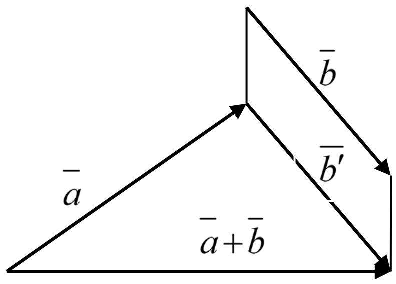


Рис. 1.1

Звідси випливає правило трикутника побудови суми довільних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Потрібно від кінця вектора $\overline{a}$ відкласти вектор $\overline{b'}$, що дорівнює вектору $\overline{b}$. Тоді вектор, початок якого збігається з початком вектора $\overline{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\overline{b'}$, буде сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис. 1.1).

Аналогічно, як і на площині, для векторів із спільним початком їх сума зображається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах (**“правило паралелограма”**).

Різницею векторів $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ називають такий вектор $\overline{c}(c_1;\ c_2;\ c_3)$, який у сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$. Звідси $c_1 = a_1 - b_1$, $c_2 = a_2 - b_2$, $c_3 = a_3 - b_3$.

Добутком вектора $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ на число λ називають вектор $\overline{\lambda a}\left(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3\right)$.

Так само, як на площині, доводять, що абсолютна величина вектора $\lambda\overline{a}$ дорівнює $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напряму вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Особливу увагу слід звернути на те, що:

1) координати вектора $\overline{OA}$, де O - початок координат, збігаються з координатами точки A;

2) координати вектора є координатами його складових по осях координат і тому мають назву проекцій або скалярних проекцій (на відміну від самих складових, які називають векторними проекціями);

3) координати вектора можна обчислювати за модулем вектора та його напрямом, який визначають за допомогою кутів, що утворює вектор з осями координат.

Після того як учні вивчили означення колінеарних векторів і умови їх колінеарності, слід розглянути скалярний добуток двох векторів.

Скалярним добутком векторів $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$ називають число (скаляр) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Теорема. Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними.

Перед доведення теореми потрібно пригадати означення кута між векторами.

Кутом між векторами $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$ називається кут BOA. Кутом між довільними двома векторами $\overline{a'}$ і $\overline{b'}$ (рис. 1.2) називається кут між рівними їм векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ із спільним початком.

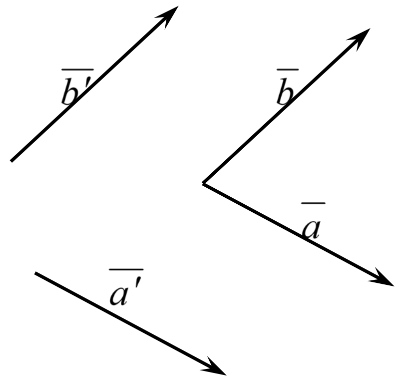


Рис. 1.2

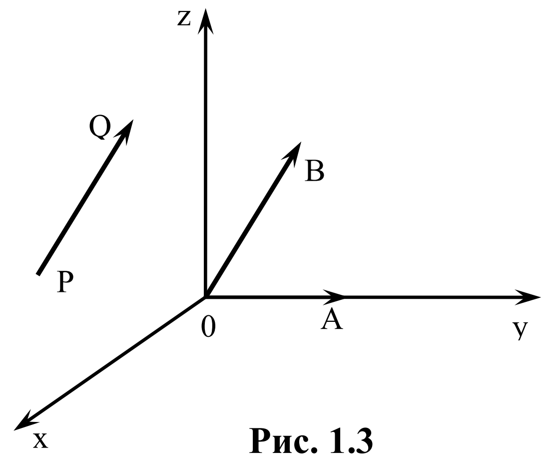


Рис. 1.3

Після цього доводимо, що $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$.

Дано: вектори $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{PQ} = \overline{b}$, $\angle(\overline{a}\,\overline{b}) = \varphi$.

Довести: $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$.

Доведення:

Від точки O відкладемо вектор $\overline{OB}$, який дорівнює вектору $\overline{PQ}$ (рис. 1.3).

Виберемо декартову систему координат так, щоб точка O була початком координат, пряма OA співпадала з віссю y, вісь z була б перпендикулярна до прямої OA і знаходилась в площині OAB, вісь x - перпендикулярна площині yz.

Визначимо координати векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ в отриманій системі координат:

$$A\left(0;\, |\overline{a}|;\, 0\right),\quad B\left(0;\, |\overline{b}|\cos\varphi;\, |\overline{b}|\sin\varphi\right);$$

$$\overline{a}\left(0;\, |\overline{a}|;\, 0\right),\quad \overline{b}\left(0;\, |\overline{b}|\cos\varphi;\, |\overline{b}|\sin\varphi\right).$$

Знаходимо скалярний добуток:

$$\overline{a}\,\overline{b} = 0 \cdot 0 + |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi + 0 \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Отже, $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$. Теорему доведено.

Наслідок: Два відмінних від нуля вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Дійсно, якщо $\overline{a}\,\overline{b} = 0$, то із рівності $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$ випливає що $\cos\varphi = 0,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

І навпаки, якщо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = 0$ і із рівності $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$ випливає, що $\overline{a}\,\overline{b} = 0$.

5. **Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками.**

Головним призначенням цього навчального питання є забезпечення вимірювання довжин і кутів за допомогою координат. Використання аналогії між формулами і правилами методу координат на площині і у просторі є важливим дидактичним прийомом викладу. Основні формули і правила цієї теми бажано подати у вигляді таблиці 1.7.

Таблиця 1.7

Величина	**Формула для її обчислення на площині**
Довжини вектора $\overline{a}$	$\overline{a} = (x;\ y)$ $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$
Довжина відрізка M_1M_2	$M_1(x_1;\ y_1),\quad M_2(x_2;\ y_2)$ $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Кут φ між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$	$\overline{a} = (x_1;\ y_1),\quad \overline{b} = (x_2;\ y_2)$ $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$
Величина	**Формула для її обчислення у просторі**
Довжини вектора $\overline{a}$	$\overline{a} = (x;\ y;\ z)$

	$\lvert\overline{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
Довжина відрізка M_1M_2	$M_1(x_1;\,y_1;\,z_1),\quad M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$ $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
Кут φ між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$	$\overline{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1),\quad \overline{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$ $\cos\varphi=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}$

Доведення формул відстані між двома точками в просторі. Після постановки завдання знайти і довести формулу відстані між двома точками $A_1(x_1;\,y_1;\,z_2)$ і $A_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$ у просторі та формулу координат середини відрізка AB учні можуть висловити гіпотезу: за аналогією з відповідними формулами планіметрії вони мають вигляд

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\;;$$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

При доведенні цих формул, в частини учнів, можуть виникнути труднощі на етапі обґрунтування побудови прямокутного трикутника в просторі. Тому доцільно організував колективний пошук доведення.

Можна запропонувати учням довести формули координат середини відрізка і просторі самостійно за підручником під час виконання домашнього завдання.

6. Рівняння площини.

Перед вивченням нового матеріалу потрібно звернути увагу учнів на те, що на площині (відносно декартової системи координат) рівняння прямої має вигляд $F(x;\,y)=0$. Наприклад, рівняння прямої: $ax+by+c=0$; рівняння кола: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ і т. д. Але рівняння просторових геометричних фігур мають інший вигляд: $F(x;\,y;\,z)=0$.

Розглянемо виведення рівняння площини.

Дано: декартову систему координат, площину α .

Вивести рівняння площини α .

Виведення рівняння площини.

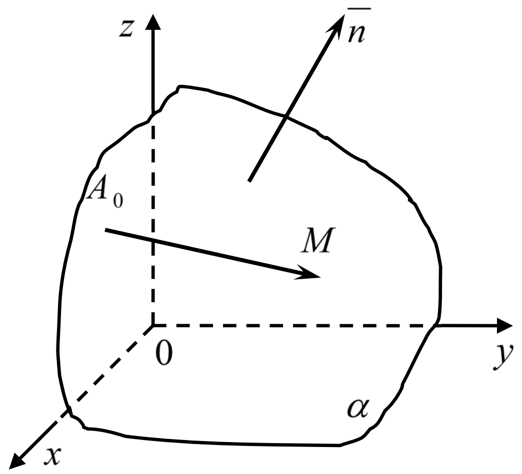


Рис. 1.4

Розміщення площини α буде визначеним відносно даної системи координат, якщо ми задамо на ній фіксовану точку $A_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ і будь-який вектор $\overline{n}\left(a;\, b;\, c\right)$, перпендикулярний до площини α (рис. 1.4).

Цими даними (параметрами) однозначно визначається розміщення площини: через дану точку A_0 проходить єдина площина, перпендикулярна до даного вектора $\overline{n}$. Далі, при виведенні рівняння площини, користуємось прийомом, який майже завжди застосовують при виведенні рівнянь фігур.

Виберемо довільну точку $M\left(x;\, y;\, z\right)$, яка належить площині α , тоді вектори $\overline{A_0M}$ і $\overline{n}$ будуть перпендикулярні, звідси, їх скалярний добуток дорівнює нулю. А так як $\overline{A_0M}\left(x-x_0;\, y-y_0;\, z-z_0\right)$, $\overline{n}\left(a;\, b;\, c\right)$, то $\overline{n}\cdot\overline{A_0M}=0$ або $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)+c\left(z-z_0\right)=0 \quad (1)$.

Це і є рівняння площини, яка проходить через точку $A_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}\left(a;\, b;\, c\right)$.

Вектор $\overline{n}\left(a;\, b;\, c\right)$ називають нормальним вектором (нормаллю) площини (1). Рівняння площини лінійне – відносно змінних координат $x,\, y,\, z$.

Отже, доведено, що рівняння площини відносно декартової системи координат – це лінійне рівняння з трьома змінними. Доведемо тепер обернене твердження: будь-яке рівняння з трьома змінними, лінійне відносно декартової системи координат, є рівняння деякої площини.

Дано: рівняння $ax+by+cz+d=0 \quad (2)$.

Довести: рівняння (2) (де хоча б один із коефіцієнтів a, b, c відмінний від нуля) є рівнянням площини відносно декартової системи координат.

Доведення:

Нехай $(x_0; y_0; z_0)$ один із розв'язків, який задовольняє дане рівняння (2). Це означає, що $ax_0+by_0+cz_0+d=0 \quad (2')$. Віднімемо від (2) рівняння $(2')$: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

Тоді остання рівність виражає перпендикулярність векторів $\overline{n}(a; b; c)$ і $\overline{A_0M}(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$, де $M(x; y; z)$ - довільна точка простору.

Таким чином, наше рівняння будуть задовольняти кінці векторів, перпендикулярних до вектора $\overline{n}$, і які виходять з точки $A_0(x_0; y_0; z_0)$. Всі ці точки будуть лежати в деякій площині α. Обернене твердження доведено.

Після цього потрібно звернути увагу учнів на те, що рівняння (2) задає площину тільки тоді, коли хоча б один із коефіцієнтів a, b, c відмінний від нуля. Якщо $a=b=c=0$, $d \neq 0$, то рівняння (2) не визначає жодного геометричного образу; якщо $a=b=c=d=0$, то рівняння (2) - рівняння всього простору.

Кут φ між площинами $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}.$$

Умова паралельності площин:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Умова перпендикулярності площин: $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

Відстань від точки $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$ до площини, визначеної рівнянням $ax + by + cz + d = 0$ знаходиться за формулою:

$$d = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1.4. Використання інформаційно-комунікаційних технологій

В сучасному світі інформаційні технології стали невід’ємною частиною життя. Вони стрімко входять в усі галузі.

Сучасне суспільство ставить перед освітніми закладами завдання підготовки випускників, котрі зможуть швидко адаптуватися в різних життєвих ситуаціях: критично мислити, грамотно сприймати інформацію, бути комунікабельними, самостійно розвиватися. Звісно це змушує розвиватися в першу чергу вчителя, оскільки він розпочинає знайомство учнів з технікою.

Ці чинники зумовлюють актуальність використання інформаційно-комунікаційних технологій в освіті і науці.

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ, від англ. Information and communications technology, ICT) – це сукупність методів, засобів та прийомів пошуку, зберігання, опрацювання, подання та передавання графічних, текстових, цифрових, аудіо- та відеоданих на базі персональних комп’ютерів, комп’ютерних мереж та засобів зв’язку.[33,с.14]

Інтерес до вивчення предмету багато в чому залежить від того, як проходять уроки. Застосування комп'ютерної техніки на уроках дозволяє зробити урок нетрадиційним, яскравим, насиченим, наповнюючи його зміст знаннями з інших наочних областей, що перетворюють математику з об'єкту вивчення в засіб отримання нових знань.

Системний підхід до використання інформаційно-комунікаційних технологій дозволяє вирішити ряд наступних завдань:

Навчальні: підвищити успішність, забезпечити індивідуальний підхід до кожного учня.

Розвивальні: розвивати вміння розв’язувати різноманітні задачі математики, розвивати навички роботи на персональному комп’ютері, розвивати вміння аналізувати умови завдань.

Виховні: створити належні умови для виховання наступних якостей учнів: акуратність, точність, цілеспрямованість, посидючість, наполегливість, кмітливість; сформувати вміння досягати успіхів і правильно відноситися до успіхів та невдач, розвивати впевненість в собі.[38, с.41]

Ефективність застосування нових інформаційних технологій на уроках математики обумовлена наступними факторами:

– різноманітність форм представлення інформації;
– висока степінь наочності;
– можливість моделювання за допомогою комп’ютера різноманітних об’єктів і процесів;
– звільнення від рутинної роботи, що відвертає увагу від засвоєння основного змісту;
– можливість організації колективної та індивідуальної дослідницької роботи;
– можливість диференціювати роботу учнів у залежності від рівня підготовки, пізнавальних інтересів та ін.; використовуючи сучасні інформаційні технології;
– можливість організувати комп’ютерний оперативний контроль і допомогу з боку вчителя;
– можливості комп’ютера дозволяють учню активно приймати участь у процесі пізнання.

– інформаційні технології навчання виводять дитину за межі школи, відкривають їй двері до світових знань

– підсилюють інтерес до уроку, до предмету;

– дозволяють зекономити час.

ІКТ можна використовувати на всіх етапах навчального процесу: при вивченні нового матеріалу, повторенні, закріпленні знань та вмінь учнів, контролі навчальних досягнень. Комп'ютер для учня на кожному уроці буде виконувати різні функції: учителя, наставника, знаряддя праці, об'єкт навчання, помічника, тренажера, ігрового середовища тощо.

Існує велика кількість цифрових освітніх ресурсів, зокрема: Smart Technologies, пакети математичних програм, системи дистанційного навчання, системи електронного тестування, тощо. Одним з найрозповсюдженіших і найпопулярніших елементів освітніх цифрових ресурсів є презентація. Адже за допомогою неї вчитель може продемонструвати змістовний матеріал з теми, що вивчається, дотримуватися певного логічного порядку дій, правильно розрахувати час на уроці. Крім того, презентацію можна використовувати неодноразово. Це значно зменшує підготовку до майбутніх уроків і дає можливість економити час підготовки безпосередньо перед самим заняттям. Вчителю у підготовці до занять найважливіші допоміжні матеріали можна розмістити у презентації. Тож перед самим заняттям достатньо лише увімкнути комп'ютер і, використовуючи принцип доцільності в навчанні, застосувати вже заздалегідь сформовані матеріали.

Презентацію на уроках математики використовують для перевірки домашніх завдань, самостійних робіт та математичних диктантів, демонструючи розв'язки на слайді, пояснення нової теми, роботи з усними вправами, проведення фронтального опитування та рефлексії, тестів, демонстрації геометричних креслень, умови та розв'язування завдання, портретів математиків і їх біографію та відкриття, ілюстрації практичного застосування теорем у житті, при повторенні вивченого матеріалу і організації позакласної та виховної роботи (тиждень математики в школі, олімпіади, математичні ігри та вечори) [10, с.24]. Важливим є те, що учні можуть самостійно створювати комп'ютерні презентації як для виконання творчих або розрахункових завдань з предмету, так і до уроків узагальнення й систематизації знань, що в свою чергу стимулює активізацію пізнавальної діяльності учнів (особливо це стосується геометрії).

При підготовці до уроків найчастіше використовують презентації, які створені у середовищі Microsoft PowerPoint – ППЗ, яке дає можливість поєднати навчальні елементи, що розташовані в мережі Інтернет. Адже вже готові продукти, яких досить багато можна знайти в Інтернеті, не завжди відповідають нашому баченню щодо проведення уроку та не підходять до діючої програми.

Використати презентацію можна при вивченні нової теми, наприклад, провести урок-лекцію. Вона приверне увагу учнів до найважливіших моментів викладеного матеріалу та підвищить рівень його засвоєння, оскільки в такому випадку працює не лише слухове запам'ятовування, а й активно залучається широкий спектр впливу на органи відчуття дитини, а саме, зорова пам'ять.

Зазвичай, при перевірці домашнього завдання багато часу відводиться на креслення малюнків на дошці і пояснення складних фрагментів розв'язку задачі. Використовуючи презентацію, у якій заздалегідь заготовлений малюнок та повне пояснення розв'язання, ми тим самим економимо час для розгляду «проблемних» місць матеріалу і детального пояснення ключових нюансів. Учням достатньо лише переглянути слайд і пояснити, уточнити моменти, які викликають додаткові пояснення, чи здаються незрозумілими.

Також, презентація буде досить ефективним засобом представлення інформації на етапі розв'язування усних вправ, які є невід'ємною частиною продуктивного уроку. Робота з готовими завданнями сприяє розвитку математичної мови, логіки і послідовності міркувань, навичок усної лічби, розвитку логічного і абстрактного мислення. Особливо доцільно застосовувати таку навчальну діяльність в старших класах на уроках геометрії, яка сприяє удосконаленню навичок розв'язку задач за алгоритмом. Наприклад, можна демонструвати фрагменти побудов, зразки оформлення розв’язків деяких задач, або організувати усне розв’язування не складних задач за готовими рисунками на етапі первинного застосування знань. Це сприяє чіткій структуризації поняттєвого та категоріального апарату, що веде до набуття учнями хороших математичних компетенцій.

При підготовці презентації до уроку варто пам’ятати кілька важливих правил. Наприклад, динамічні елементи, звичайно, підвищують наочність та сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу, зростає, також, і зацікавленість учнів до навчання, але при цьому один слайд не повинен бути перенасичений анімаційними елементами. Бо разом із цікавістю такі спецефекти можуть призвести до відволікання учнів від навчального процесу. Тож, створюючи презентації, важливо не захопитися анімацією. У роботі краще інформацію на слайдах розділяти на невеликі частини, що будуть зручними для сприйняття. Також слід зазначити, що для того, щоб здобути якомога кращу результативність уроку з використанням презентації, потрібно задіяти і зір, і слух учнів. Саме тому, частину навчальної інформації виноситься на демонстраційний слайд, а частину проговорюється. Такі дії значно підвищують продуктивність уроку. При створенні презентації є доцільним правила «не більше трьох», в якому рекомендується використовувати не більше:

– трьох видів анімацій;
– трьох видів шрифтів;
– трьох дефініцій в матеріалі презентацій;
– трьох пояснень до однієї думки на одному слайді;
– трьох слайдів для розкриття однієї думки, тощо.

Крім того слід пам’ятати про хороший тон в презентації:

– кожен слайд повинен містити заголовок;
– не варто використовувати нечитабельний шрифт (добрим прикладом є кегль 20, а гарнітура Arial, Times New Roman);
– малюнки повинні бути не менше, ніж ¼ розміру слайду кожен, тощо.

Систематичне використання комп'ютерних презентацій на уроках знімає актуальне питання наочності з математики.

Корисним засобом контролю навченості учнів як для молодого вчителя, так і для досвідченого фахівця є системне використання під час проміжного, тематичного і підсумкового контролю *засобів електронного тестування*. Можна розглянути програму MyTest. За допомогою неї можна розробити і створити електронні варіанти різних тестів, які можна використати на уроках математики. Позитивним можна відмітити той факт, що існує можливість подання тестових випробувань, де змішані варіанти завдань, а також варіанти відповідей. Останнє посилює індивідуальність процесу контролю знань.

Слід відзначити, що комп'ютерне тестування має значні переваги, адже тестові програми дають змогу швидко оцінити результат роботи та визначити прогалини у знаннях учнів з даної теми. А ще при такому виді роботи учень може побачити свій результат одразу ж після виконання роботи і оцінка несе об'єктивний характер і зводить до мінімуму вплив особистих відносин вчителя і учня. Під час проведення тестування учитель має змогу провести індивідуальну та диференційовану роботу з учнями, чим можна збільшити продуктивність уроку.

Таким чином, комп'ютерне тестування дозволяє здійснити контроль засвоєння учнями програмового матеріалу, проаналізувати результати кожного з них і класу в цілому, при цьому не затрачаючи багато зусиль. Дозволяє виявити і на основі отриманих результатів проілюструвати слабкі та сильні сторони навчання, зробити прогностичні алгоритми подальшого удосконалення навчально-виховного процесу і, врешті-решт, бути потужним підґрунтям для запровадження моніторингових досліджень в навчальному закладі.

Основним недоліком таких програм є неможливість встановлювати у тест графічні зображення, що є незручним саме для вчителя математики, тому у таких випадках достатньо користуватися такими програмними засобами, як MS Excel і MS PowerPoint, які допомагають правильно оформляти математичні тести, впроваджувати в завдання малюнки й формули.

Можна виокремити ряд переваг комп’ютерного тестування:

– швидке одержання результатів і звільнення викладача від трудомісткої роботи з обробки результатів тестування;

– індивідуалізація процесу навчання (автономність);

– певний психологічний комфорт учнів під час тестування;

– оперативність;

– підвищення об’єктивності оцінювання знань, і, як наслідок, позитивний стимулюючий вплив на пізнавальну діяльність учня;

– конфіденційність при анонімному тестуванні;

– тестування на комп’ютері більш цікаве у порівнянні з традиційними формами опитування, що створює позитивну мотивацію в учнів;

– виключення негативного впливу на результати тестування таких факторів як настрій, рівень кваліфікації й інші характеристики конкретного викладача;

– можливість застосування технічних засобів;

– універсальність, охоплення всіх стадій процесу навчання;

– контроль великого обсягу матеріалу;

– зменшення порівняно з традиційним опитуванням затрати часу на 50 %.

Отже, необхідно залучати учнів до роботи за комп’ютером і вона повинна бути корисною, а не тільки розважальною. На сьогодні всі учні мають вдома комп'ютери й підключення до Інтернету. У зв'язку із цим частіше практикуються *електронні домашні завдання*, які можуть бути виконані у кабінеті інформатики в позаурочний час. Наприклад, підготовка презентації з певної теми, побудова графіків в електронних таблицях Excel, пошук інформації в Інтернеті. Також вводяться тестові опитування, як засіб підготовки до домашнього завдання через Інтернет за допомогою такого ППЗ як Диск Google. Він дозволяє створювати і інтернет-уроки, і тестові завдання, які потім можна викладати на сторінці класу і діти можуть самостійно, в зручній домашній обстановці готуватися до уроку. Це є дуже доречним у тих випадках, коли дитина хворіє і немає змоги дізнатися домашнє завдання, але перевага уроків на сайті школи дозволяє дитині не відставати від однокласників.

Більш потужним та універсальним інструментом є система динамічної математики GeoGebra.

GeoGebra – інтерактивне творче середовище, засноване на принципах динамічної геометрії та комп’ютерної алгебри, призначене для створення інтерактивних креслень (моделей) з математики, що поєднують в собі конструювання, моделювання, динамічне варіювання та експеримент.

Можливості програми GeoGebra дозволяють ефективно використовувати її у процесі вивчення математики з різною метою – за її допомогою можна швидко створити якісні зображення математичних об’єктів (графіки функцій, графіки рівнянь, геометричні фігури, формули, діаграми, тощо), причому їх можна зберегти у файлах для подальшої демонстрації чи використання в мультимедійних презентаціях чи «традиційних» дидактичних матеріалах (картки завдань, плакати).

GeoGebra має потужний набір інструментів, можливості яких виходять за межі шкільного курсу математики, тому ми зупинимось лише на тих, які стосуються вивчення геометрії у загальноосвітніх навчальних закладах:

- побудова різноманітних геометричних фігур на площині (точок, прямих, променів, ламаних, векторів, кутів, многокутників, правильних многокутників, бісектрис кутів, серединних перпендикулярів, паралельних і перпендикулярних прямих, кіл (за центром і точкою, за центром і радіусом, за трьома точками), дуг кіл і конічних перетинів, дотичних до кола тощо);
- обчислення площ: многокутника, круга, частини площини, обмеженої еліпсом, сектора;
- знаходження: градусної міри кута, довжини відрізка, периметра многокутника, довжини вектора, відстані від точки до прямої, тангенса кута між прямою і додатнім напрямком осі абсцис тощо;

– перетворення фігур на площині: симетрія відносно точки і прямої, поворот навколо точки, гомотетія, паралельне перенесення;

– знаходження точок перетину двох фігур (двох прямих, прямої і кола тощо);

– знаходження середини відрізка, центра кола (еліпса).

Методичні особливості GeoGebra [39]:

– можливість використання програмного засобу як у школі, так і вдома;

– надання можливості швидше і ефективніше опанувати математичні знання та навички, краще запам’ятовувати матеріал;

– можливість вивчення математики на основі діяльнісного та евристичного підходу за рахунок впровадження елементів експерименту і дослідження в навчальний процес;

– підвищення ступеня мотивації учнів, забезпечення можливості постановки творчих завдань та організації проектної роботи;

– можливість показати, як сучасні технології ефективно застосовуються для моделювання та візуалізації математичних понять.

До технічних особливостей відносяться:

– можливість створення повнофункціональних автономних готових моделей;

– зручний, інтуїтивно зрозумілий графічний інтерфейс, надання можливості налаштовувати інтерфейс створюваних навчальних моделей;

– забезпечення можливості роботи на комп'ютерах під управлінням операційних систем Windows, Linux, MacOS.

Придатним для підтримки вивчення курсу математики в середніх навчальних закладах є комплект програми GRAN. Названий програмний засіб простий у використанні, оснащений досить зручним інтерфейсом. Від користувача не вимагається значний обсяг спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, цілком доступних для учнів середніх класів.[39]

При цьому вчителю не нав’язується ніяка методика подання навчального матеріалу, закріплення і контролю знань, конкретний зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання, співвідношення між самостійною роботою учнів і роботою разом із вчителем, між індивідуальними і колективними формами роботи та ін.

Усе це вчитель повинен визначити сам з врахуванням своїх власних позицій і уподобань, специфіки умов, в яких перебігає навчальний процес, індивідуальних особливостей окремих учнів і класного колективу.

Програмно-методичний комплекс «GRAN» складається з:

1. Педагогічного програмного засобу «GRAN-1W» – для комп’ютерної підтримки вивчення алгебри і початків аналізу, планіметрії, тригонометрії, початків теорії ймовірностей і математичної статистики, окремих розділів фізики.
2. Педагогічного програмного засобу «GRAN-2D» – для комп’ютерної підтримки вивчення планіметрії (динамічна геометрія).
3. Педагогічного програмного засобу «GRAN-3D» – для комп’ютерної підтримки вивчення стереометрії.
4. Навчально-методичних посібників: «Математика з комп’ютером», «Елементи стохастики з комп’ютерною підтримкою», «Комп’ютер на уроках геометрії».

Програма GRAN1 призначена для графічного аналізу функцій, програма GRAN-2D – для графічного аналізу систем геометричних об’єктів на площині, програма GRAN-3D – для графічного аналізу просторових (тривимірних) об’єктів [12].

Використання пакету GRAN1 дозволяє:

— будувати та аналізувати функціональні залежності явного та неявного видів, які задані в декартових чи в полярних координатах, параметрично, таблично;

— графічно розв’язувати рівняння, нерівності та їх системи з однією чи двома змінними;

— наближено визначати корені многочленів;

— досліджувати границі числових послідовностей і функцій;

— опрацьовувати статистичні дані (побудова полігону частот, гістограм, обчислення відносних частот різних подій, визначення центра розсіювання відносних частот та величини розсіювання (дисперсії));

— будувати графіки функції розподілу;

— обчислювати визначені інтеграли, площі криволінійних трапецій, площі поверхонь та об'єми тіл обертання тощо.

GRAN-2D призначено для графічного аналізу геометричних об'єктів на площині. За допомогою цього програмного засобу можна оперувати такими типами об'єктів, як точка (вільна точка, точка на об'єкті, середня точка, точка перетину об'єктів, симетрична точка), лінія (пряма, паралельна пряма, перпендикулярна пряма, бісектриса кута, дотична до кола), ламана, коло, інтерполяційний поліном та графік функції.

Використання пакету GRAN-2D дозволяє:

– створювати динамічні моделі геометричних фігур та їхніх комбінацій аналогічно класичним побудовам за допомогою циркуля та лінійки, а також використовуючи елементи аналітичної геометрії (систему координат, рівняння прямих і кіл, алгебраїчні залежності між частинами побудови, графіки функцій тощо);

– проводити вимірювання геометричних величин;

– досліджувати геометричні місця точок;

– аналізувати динамічні вирази, висувати припущення, встановлювати закономірності;

– будувати графічні зображення, використовуючи коментарі, кнопки, підказки та гіперпосилання;

– експортувати рисунки у графічні формати для вбудовування їх у інші додатки для створення геометричних ілюстрацій тощо.

Програмно-методичний комплекс GRAN-3D призначено для графічного аналізу тривимірних об’єктів.

GRAN-3D дозволяє оперувати у просторі такими геометричними об'єктами, як точка, відрізок, ламана, площина, многогранник, поверхня обертання та довільна поверхня. Можна здійснювати паралельне перенесення, поворот та деформацію об'єктів, а також виконання перерізів опуклих многогранників площинами

Використання пакету GRAN-3D надає можливість:

– створювати та перетворювати моделі базових просторових об’єктів;

– виконувати перерізи многогранників площинами; обчислювати об’єми та площі поверхонь многогранників і тіл обертання;

– вимірювати відстані та кути.[37, с.57-58]

РОЗДІЛ ІІ. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

У літературі з психології і педагогіки немає єдиного трактування поняття «задача». Автори по-різному тлумачать це поняття – залежно від підходу до зв'язку між суб'єктом і задачею. У кібернетиці, дидактиці і методиці навчання математики задача трактується як ситуація зовнішньої діяльності, яка пропонується у відриві від суб'єкта діяльності. Тому здебільшого задача тут трактується як будь-яка вимога обчислити, перетворити що-небудь, побудувати або довести щось. У психології задача розглядається як мета, задана в певних умовах, як особлива характеристика діяльності суб'єкта. Задача тут тлумачиться як суб'єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, у якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта.

Щоб правильно розв’язувати різні питання методики геометричних задач, слід виходити з досить обґрунтованих загальних принципових положень. Одне з таких положень полягає в тому, щоб завжди врахувати, що таке геометрична задача і що означає розв’язати геометричну задачу.

Історія розвитку методичних ідей у галузі вивчення математики знає чимало спроб означення поняття задачі [30].

Вперше поняття «навчальна задача» вводить у педагогічну культуру Д. Б. Ельконін. Він трактував його як задачу, у процесі розв’язання якої основною метою є засвоєння певного зразка дій чи понять. Згодом Д. Б. Ельконін посилює значущість навчальної задачі, вважаючи її основною одиницею навчальної діяльності. Основну відмінність навчальної задачі від усіх інших задач вбачає у тому, що її мета та результат полягають у зміні самого діючого суб’єкта, а не у зміні предметів, з якими він діє.

Аналізуючи психологічний зміст даного поняття, Г. О. Балл зазначає, що термін «задача» можна використовувати для позначення об’єктів, які відносять до трьох різних категорій: 1) до категорії мети дій суб’єкта, вимоги, поставленої перед суб’єктом; 2) до категорії ситуації, що включає поряд з метою – умови, в яких дана мета повинна бути досягнута; 3) до категорії словесного формулювання цієї ситуації (таке розуміння характерне для С. Л. Рубінштейна та його послідовників). На основі проведеного аналізу Г. О. Балл вважає, що в психологічній літературі найбільш поширено вживання терміна «задача» для позначення об’єктів другої категорії [34].

Відомий російський математик С. О. Шатуновський у вступній статті до книги Адлера «Теорія геометричних побудов» пише: «Задача є виклад вимоги «знайти» за «даними» речами інші, «шукані» речі, що перебувають одна з одною і з даними речами в зазначених співвідношеннях». Роз’яснюючи це означення, С. О. Шатуновський говорить, що в кожній задачі розглядаються два класи речей (конкретних або абстрактних). Розв’язання задачі і полягає в переведенні речей другого класу в перший.

В. М. Брадіс пропонує і своє означення задачі. Він вважає за потрібне означити задачу так: «Задачею слід називати всяке математичне запитання, для відповіді на яке не досить простого відтворення одного якогось результату, якоїсь теореми або означення з пройденого курсу» [30].

Заманливо було б представити сукупність задач як щось, що існує в зовнішньому світі і не залежне від того, хто вирішує задачу. Проте такий підхід є тільки першим наближенням до проблеми. В зв'язку з цим Д. Берлайн справедливо відзначає, що «часто говорять про задачу як про щось, що існує в зовнішньому світі. Вона пропонується суб'єкту на листі паперу, або він виявляє її десь в природі. Проте те, що складає задачу для одного індивідуума, може не бути задачею для іншого». Під задачею правильніше розуміти не просто зовнішню ситуацію, а ситуацію для суб'єкта, ситуацію, яка характеризується «не просто незнанням, а усвідомленням людиною того, що у відомому є щось невідоме, істотно важливе для нього (людини) і у той же час що його не можна відразу з'ясувати». Якщо провести аналіз поняття задачі, як одного з центральних понять сучасної психології, то можна зробити висновок про доцільність визначати задачу широко, а саме розуміти під задачею всяку ситуацію, що вимагає від суб'єкта (людини) деякої дії (дій).

Процес розв’язування задач із психологічної точки зору являє собою послідовний перехід суб'єкта від однієї проблемної ситуації до іншої шляхом моделювання першої ситуації й прийняття побудованої моделі за об'єкт своєї діяльності. Суб'єкт будує послідовність моделей спочатку складеної або прийнятої задачі. При цьому перехід від проблемної ситуації до її моделі відбувається шляхом децентрації суб'єкта, тобто уявного виходу суб'єкта із ситуації, її активного вивчення ним зі сторони.

У випадку, коли задача стає уявною моделлю, ця децентрація приймає форму уявного роздвоєння суб'єкта: він вивчає свою власну думку, її перетворення, процес її протікання. Інакше кажучи, суб'єкт ніби роздвоюється на дві істоти: одна з них будує й перетворює уявні моделі вихідної задачі, а друга подумки вивчає моделі, які отримуються й співвідносить їх з моделлю кінцевої або проміжної мети діяльності.

Культура поводження при ознайомленні із задачею є, по суті справи, оволодіння деякою стратегією й тактикою пошуку розв’язування задачі.

Дотепер вважається, що єдиний метод формування вміння розв’язувати задачі – це практика в розв’язуванні великої кількості задач. Відомий методист Д. Пойя так і радить: «Якщо хочете навчитися розв’язувати задачі, то розв’язуйте їх!» Дотримуючись цієї поради, учителі математики, фізики й інших предметів пропонують учням величезну кількість задач і витрачають на їх розв’язування не менше половини всього навчального часу, не враховуючи часу домашньої роботи учнів, що складається в основному з розв’язування задач. А результати цієї титанічної роботи більш ніж скромні: багато учнів так і не опановують загальні підходи їхнього розв’язування й, зустрівшись із завданням незнайомого виду, губляться й не знають, як до нього підступитися [16].

Культура розв’язування задач полягає в тому, що пошук розв’язування відбувається на базі глибокого й всебічного попереднього аналізу задачі, що кожна із численних спроб обґрунтовується і її результати аналізуються, що після знаходження правильного розв’язання виробляється ретроспективний аналіз із метою виявлення загальних методів, пошуку більш раціонального способу розв’язування, якщо це можливо.

Такій культурі можна й потрібно вчити учнів, починаючи з початкових класів.

Головне – це зробити самі задачі, їхню структуру й особливості предметом особливого вивчення й засвоєння.

Для цього необхідно використати особливу систему вправ, де конкретні задачі є лише матеріалом, а метою (вимогою) є послідовно:

1) розчленовування задачі на елементарні умови й вимоги;

2) виявлення зв'язків і залежностей між окремими умовами (даними) і між даними й вимогою;

3) побудова схематичної моделі задачі;

4) перекодування задачі на іншу мову. Необхідною умовою є те, що у всіх цих вправах сама задача не розв’язується, щоб не відволікати учнів від головного – аналізу задачі.

Особливу роль у формуванні культури розв’язування задачі грає заключний, ретроспективний аналіз проведеного розв’язування з метою виявлення й засвоєння загальних методів і прийомів розв’язування задачі.

Зазначені навчальні задачі повинні використовуватися протягом всіх років навчання й стати основою для формування навичок і вмінь розв’язування задач. Сам процес формування здатностей і вмінь повинен носити цілеспрямований і керований характер. Необхідно чітко представляти, який компонент загальних умінь розв’язувати задачі формується тепер за допомогою певної системи навчальних і конкретно-практичних задач, яку роль при цьому грає кожна з використовуваних задач.

Потрібно змінити й сам підхід до задач. Замість того, щоб бездумно розв’язувати велику кількість задач, корисніше розв’язувати в кілька разів меншу кількість задач, але при цьому саме розв’язування повинне містити глибоке вивчення їх умови, сутності їхнього розв’язування, виявлення загальних методів і прийомів. Задача й механізми їхнього розв’язування повинні стати об'єктами глибокого й постійного вивчення протягом усіх років навчання. Особлива увага повинна бути також приділена формуванню культури розв’язування, розумного підходу до пошуків і конструювання методів розв’язування, виробленню дисциплінованого мислення в процесі розв’язування, вихованню естетичного погляду на розв’язування, що припускає оцінку цього розв’язання не тільки з погляду його бездоганної логічної правильності, але й краси.

Кожний школяр у процесі навчання повинен набути вміння вчитися самостійно. Воно включає, зокрема, вміння ставити навчальну задачу й розв’язувати її.

Формулювання задачі учнем пов'язане з пошуком загального способу розв’язування цілого класу задач, перебором варіантів розв’язування окремо взятої, конкретної задачі. Розв’язування задачі повинне здійснюватися на базі глибокого й всебічного попереднього аналізу задачі, необхідний і аналіз ходу розв’язання, у тому числі ретроспективний, пошук найбільш раціонального. Учитель, формуючи в школярів таку культуру розв’язування задач, домагається позитивних результатів, не перевантажуючи учнів більшим обсягом завдань. Слід також зазначити, що в процес навчання розв’язуванню задач учитель може додати багато елементів творчості. Один з ефективних творчих прийомів сприйняття самим учителем простого й зрозумілого для нього завдання, як нового й дивного, тобто спроба сприйняття проблеми очима дитини [17].

РОЗДІЛ III. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНИМ МЕТОДОМ З ВИКОРИСТАННЯМ ІКТ.

3.1. Особливості розв'язування геометричних задач векторним та координатним методами.

Розв`язування задач - основний складовий елемент засвоєння учнями системи математичних, зокрема, геометричних понять, зв'язків і відношень між ними. Практика і досвід свідчать про те, що розв'язування задач, не об'єднаних спільним прийомом, підходом, мало сприяє математичному розвитку учнів. Навпаки, озброєні загальними прийомами розв'язування, учні значно чіткіше уявляють логічну структуру того предмета, який вивчають.

Як відомо, ряд тем з геометрії ґрунтується на векторній основі, і тому метод векторів при розв'язуванні задач тут є одним з основних.

Суть методу векторів полягає в тому, щоб певне геометричне розміщення точок, прямих і площин у просторі записати мовою векторів, точніше - у вигляді векторної рівності, і, навпаки, мову векторних формул і рівностей наповнити геометричним змістом, тобто перевести ту чи іншу векторну рівність на мову геометрії, надати їй геометричного звучання.

Отже, про рівень оволодіння учнями методом векторів при розв'язуванні задач можна судити з того, наскільки вільно вони вміють перейти від векторної мови до мови геометрії, і навпаки. Особливістю методу векторів є те, що він не вимагає розгляду складних геометричних конфігурацій, а зводить геометричну задачу до алгебраїчної, яку, звичайно, легше розв'язати, ніж вихідну геометричну.

Оволодіти таким методом учням допоможе складений під керівництвом учителя так званий геометричний інвентар, тобто систематизований перелік часто вживаних способів розв'язування задач. Цей геометричний інвентар подається учням не в готовому вигляді, а складається і поповнюється поступово з вивченням нового матеріалу.

Важливо, при розв'язання декількох задач векторним методом сформувати разом з учнями правило – орієнтир розв'язування геометричних задач:

1) Перекласти вимогу задачі на векторну мову

2) Ввести прямокутну систему координат або вибрати два неколінеарні вектори на площині (або три некомпланарні вектори у просторі) як базисні.

3) Знайти координати векторів, виділених у пункті 1, або виразити ці вектори через базисні.

4) Довести або знайти виділене у пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову.

Для розв'язування ряду геометричних задач важливим є метод координат. Суть його полягає в тому, щоб залежності між елементами геометричної фігури виразити за допомогою алгебраїчних співвідношень.

Застосування цього методу також не потребує розгляду складних геометричних конфігурацій, виконання додаткових побудов та їх обґрунтування.

Розв'язування задач координатним методом починається з побудови прямокутної системи координат, у якій потрібно знайти координати точок і векторів і на цій основі складати рівняння прямих (у двовимірному просторі) і площин, визначити відстані між точками, від точки до прямої і площини, кут між прямими і площинами та інше.

Прямокутну систему координат можна вводити довільно. Результат розв'язування задачі не залежить від вибору системи координат. Проте від вдалого її вибору залежить раціональний шлях її розв'язання, швидкість і легкість одержання необхідного результату. Тому, перш ніж вводити систему координат, необхідно проаналізувати задачу, встановити, координати яких точок потрібно визначити, рівняння яких площин скласти і подумати, в якій з обраних систем координат це можна зробити з найменшою затратою фізичних і розумових сил. Загальних правил тут немає: кожна задача вимагає індивідуального підходу. Проте щоб розв'язати задачу методом координат, можна виділити певне правило-орієнтир:

1) Відокремити умови і вимоги задачі. Обрати систему координат, відносно якої перевести вимоги на мову координат і скласти рівності зі змінними. Систему координат вибираємо так, щоб дані точки мали найбільш прості координати. Зазвичай ці точки розміщують на осях координат;

2) Використовуючи умови задачі, перетворити рівності зі змінними і прийти до результату мовою координат;

3) Здобутий результат перевести на мову геометрії.

3.2. Методика навчання учнів розв'язувати геометричні задачі координатним методом.

Метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів. Числа, за допомогою яких визначається положення точки, називають її координатами.

При розв'язуванні геометричних задач координатним методом, доцільно розглянути таблицю 3.1.

Таблиця 3.1.

Мова геометрії	Мова координат
1.Точки A і B лежать на площині	1. $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$
2. Дано пряму AB	2. а) $y = kx + b$; б) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$; $x_2 \neq x_1$
3. Прямі AB і CD паралельні	3. $AB: y = k_1x + b_1$; $CD: y = k_2x + b_2$; $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$
4. Прямі AB і CD перпендикулярні	4. $AB: y = k_1x + b_1$; $CD: y = k_2x + b_2$; $k_1k_2 = -1$, $b_1 \neq b_2$
5. Точка O ділить відрізок навпіл	5. $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $O(x_0; y_0)$; $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

6. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AC}{CB} = \lambda$	6. $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_0; y_0)$; $x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$
7. Довжина відрізка AB дорівнює ρ	7. $\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, де $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

Геометричні задачі в координатній геометрії можна умовно поділити на дві групи. До першої групи відносять задачі, в яких умову сформульовано в термінах координатної геометрії.

Задача 1. *Довести, що трикутник, вершинами якого є точки* $A(-5; 2)$, $B(3; 6)$, *і* $C(4; -6)$, *– рівнобедрений.*

Розв'язання:

Розв'язання таких вправ зводиться до використання відомих учням формул. Так, в нашому прикладі, знаходимо довжини сторін трикутника ABC:

$$AB = \sqrt{(-5-3)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80};$$

$$BC = \sqrt{(3-4)^2 + (6+6)^2} = \sqrt{1+144} = \sqrt{145};$$

$$AC = \sqrt{(-5-4)^2 + (2+6)^2} = \sqrt{81+64} = \sqrt{145}$$

Таким чином, у ΔABC сторони AC і BC рівні, а це означає, що цей трикутник рівнобедрений.

Перевіримо правильність виконання задачі за допомогою програми Gran-2D (рис. 3.1). Будуємо дані точки вибравши на панелі інструментів *Об'єкт/ Створити/ Точка* та задаємо координати точок. Побудуємо трикутник з'єднавши точки *Ламаною.* Знайдемо довжини сторін створеного трикутника *Обчислення/ Відстань* та вкажемо точки, відстань між якими потрібно знайти. Отже, довжини сторін *AC* та *BC* рівні, що і потрібно було довести. ΔABC - рівнобедренний.

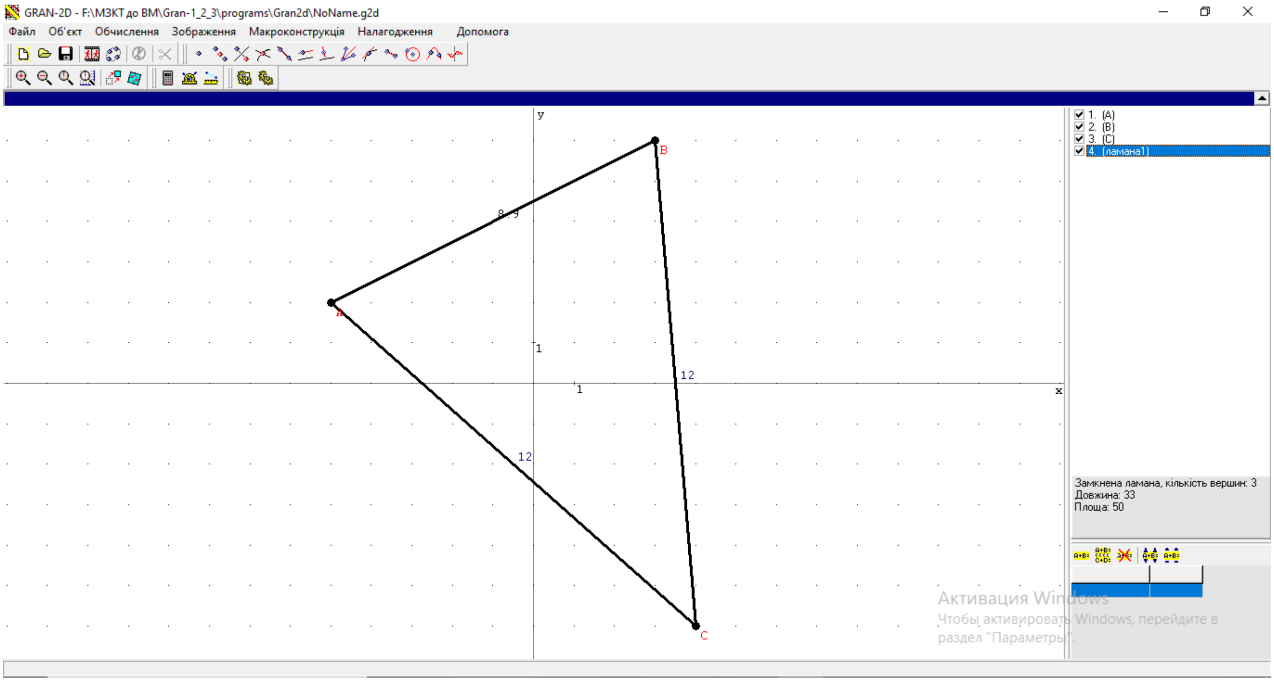


Рис.3.1

Задача 2. *Дано площину x+2y-z-8=0 і пряму l , яка прроходить через точки A(2;1;1) і B(-3;4;0). Обчислити координати точки перетину прямої l з даною площиною.*

Нехай $K(x_0;y_0;z_0)$ – шукана точка перетину прямої l з даною площиною, рівняння якої $x+2y-z-8=0$.

$$\overrightarrow{AM} = \big((x_0 - 2); (y_0 - 1); (z_0 - 1)\big), \overrightarrow{BA} = (5; -3; 1)$$

Так як точки *B, A* і *M* лежать на одній прямій, то вектори колінеарні. Отримали рівність $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BA}$. Запишемо відовідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_0 - 2 = 5k \\ y_0 - 1 = -3k \\ z_0 - 1 = k \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5k + 2 \\ y_0 = -3k + 1 \\ z_0 = k + 1 \end{cases}$$

Підставивши значення x_0, y_0, z_0 в рівняння лощини матимемо:

$$5k + 2 + 2(-3k + 1) - (k + 1) - 8 = 0 \leftrightarrow k = -\frac{5}{2}.$$

$$x_0 = -10{,}5\,, y_0 = 8{,}5\,, z_0 = -1{,}5.$$

K(-10,5;8,5;1,5) – точка перетину прямої l і площини.

Розв'яжемо задачу в Gran-3D. Створюємо площину *Створити площину/ Спосіб задання/ Рівняння*. Будуємо *Ламану* яка проходить через дві точки. Щоб знайти відстань між прямою і площиною виберемо *Обчислення/ Відстань/ Між прямою і площиною.* Автоматично створюється точка перетину прямої та площини. У діалоговому вікні *Звіт* відображаються координати шуканої точки.

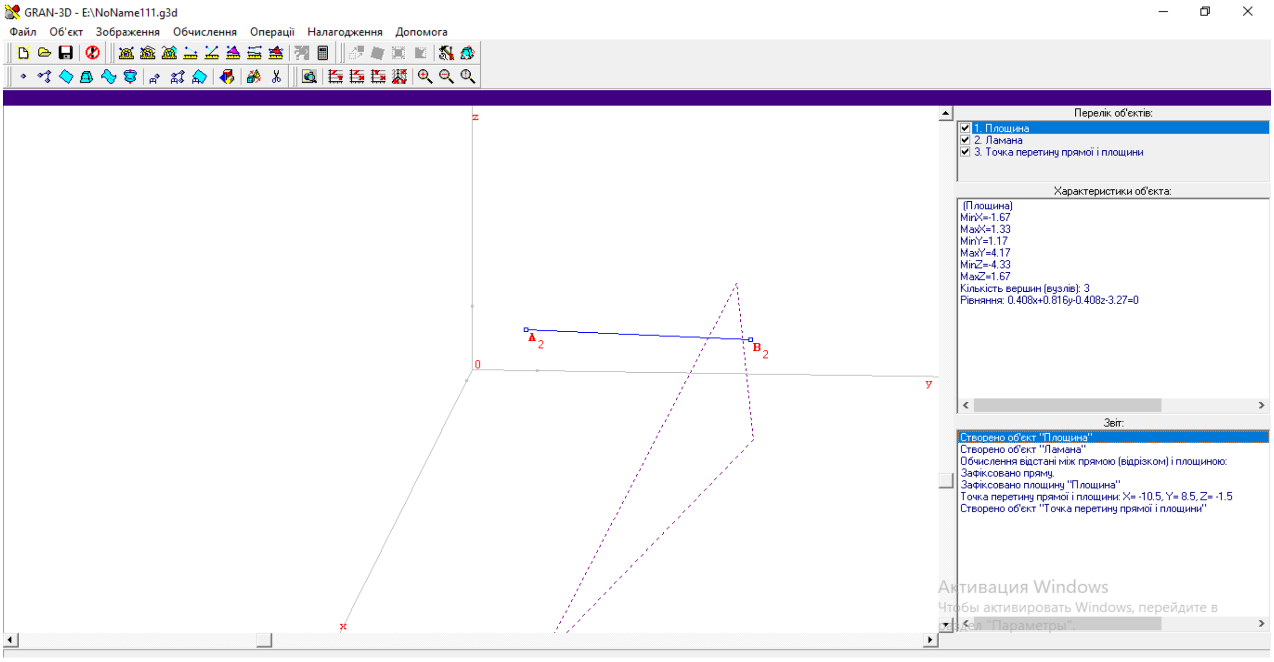


Рис.3.2

До другої групи відносяться задачі, у формулюванні яких немає вказівок на зв'язок їх з координатним методом. Як правило, такі задачі можна розв’язувати різними методами, координатний метод є одним із них. Ці задачі, звичайно, даються учням складніше, ніж задачі першої групи, тому ми приділяємо їм більше уваги.

Загальна схема розв’язування задач другої групи полягає в наступному:

1. На основі попереднього аналізу умови задачі приходимо до висновку, що її краще розв’язувати координатним методом.

2. Вибираємо систему координат на площині з таким розрахунком, щоб подальші алгебраїчні викладки були найбільш простими.

3. Знаходимо в цій системі координати потрібних для розв’язування елементів, використовуючи умову задачі і відомі із теорії формули.

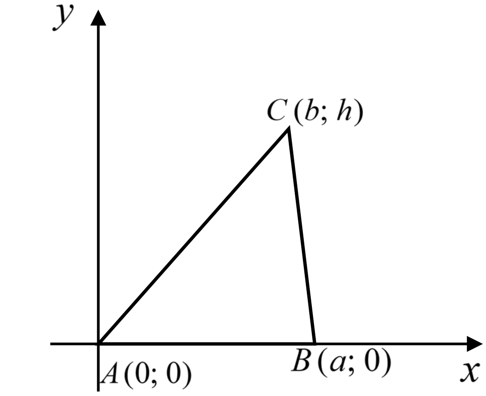
4. Записуємо алгебраїчні вирази, що випливають з умови задачі, і перетворюємо їх потрібним нам чином.

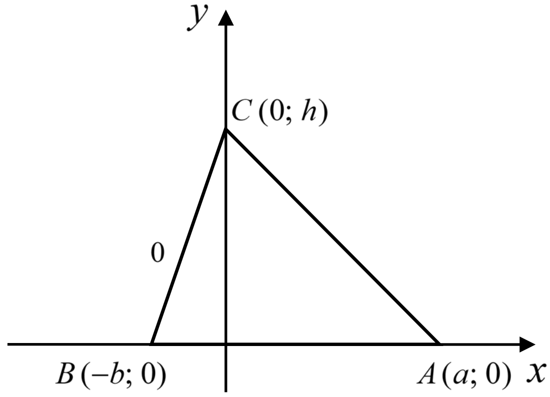
5. Отриманий результат переводимо з координатної мови на мову, в

якій сформульована задача. (табл. 3.1)

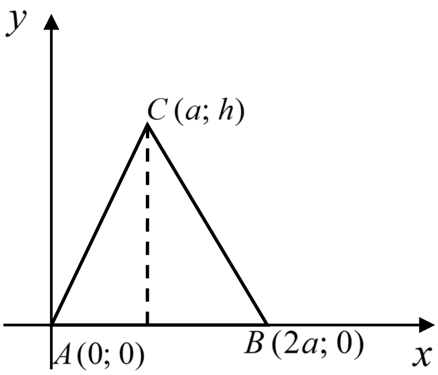
Орієнтовною схемою для вибору зручної системи координат і переводу задачі з геометричної мови на координатну може бути наступна таблиця 3.2.

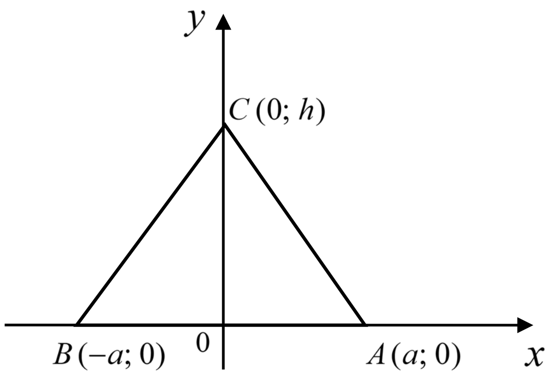
Таблиця 3.2. Умовні системи координат.



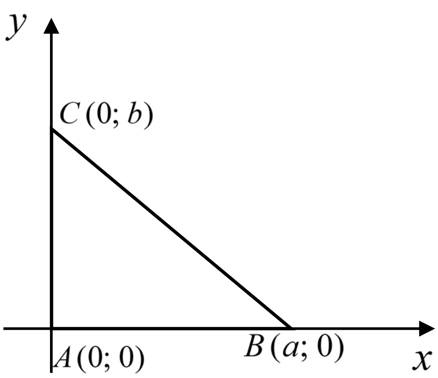


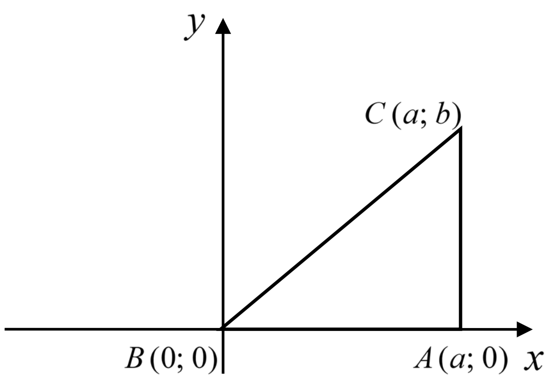
Довільний трикутник



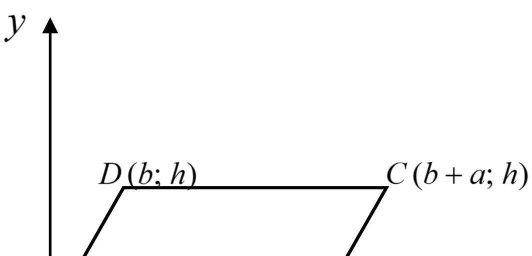


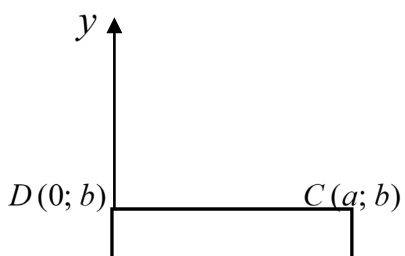
Рівнобедрений трикутник

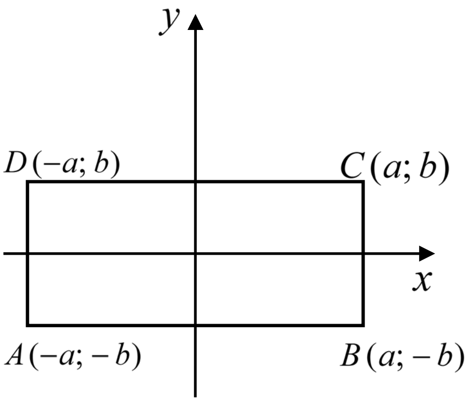




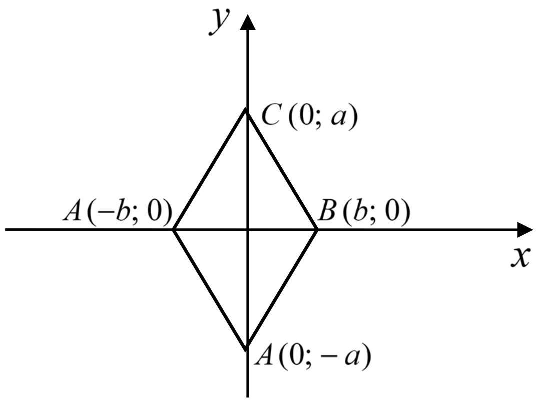
Прямокутний трикутник



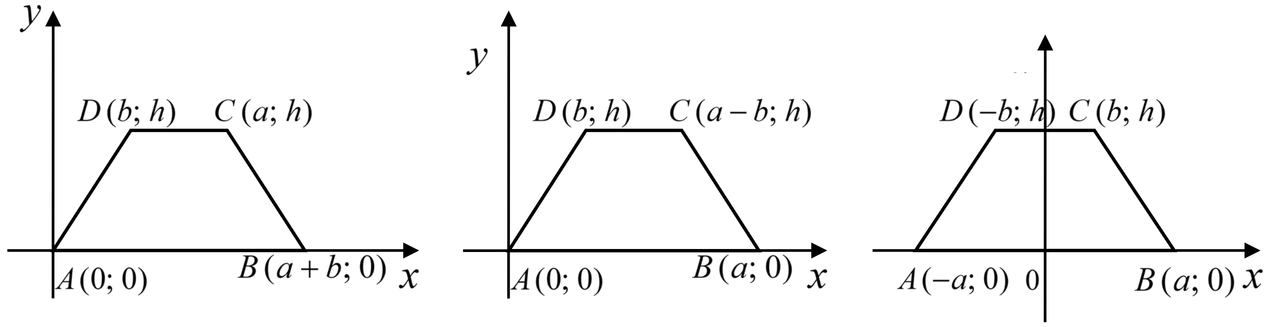




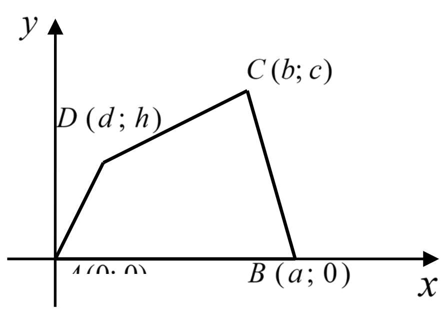
Прямокутник



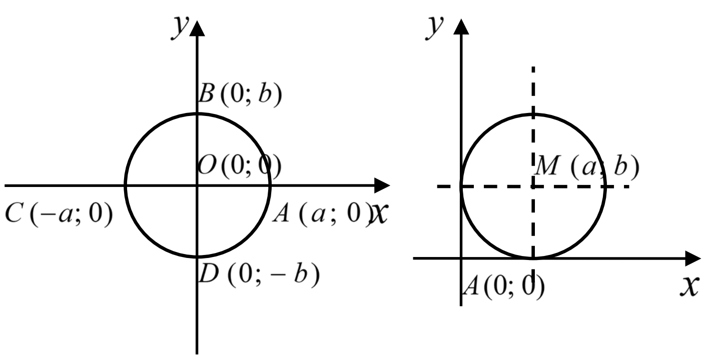
Ромб



Рівнобічна трапеція



Довільний чотирикутник



Круг

Вперше з цією схемою учні 9 класу зустрічаються в кінці теми "Декартові координати на площині" – чотири останні уроки відводяться тут на розв'язування задач. Розглянемо деякі із вправ, які доцільно розглянути на цих уроках.

Задача 2. *Довести, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.*

Розв'язування:

Нам даний прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), D - середина гіпотенузи (рис. 3.3).

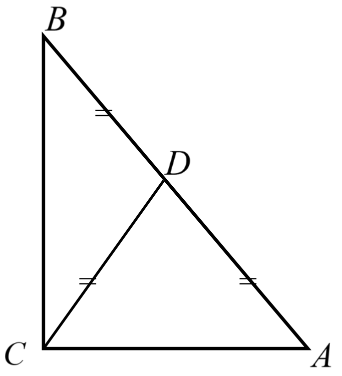


Рис. 3.3

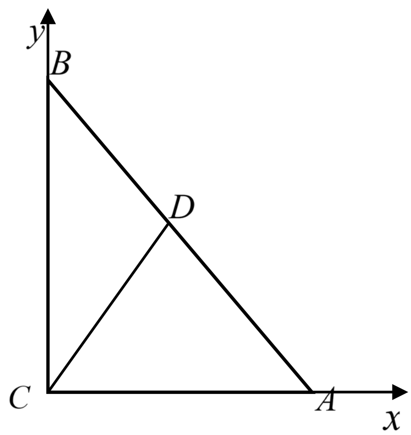


Рис. 3.4

Потрібно довести, що $DA = DB = DC$. Аналізуючи задачу, бачимо, що її можна розв'язати координатним методом, тобто потрібно знайти довжину відрізків, для цього ми скористаємось простою формулою. Тепер нам слід вибрати систему координат так, щоб координати всіх чотирьох потрібних нам точок A, B, C, легко можна було знайти. Це можна зробити по-різному. Ось один із способів (рис. 3.4). Тут точка C має координати $(0;0)$. Точки A і B лежать на протилежних координатних півосях, тому їх координати мають вигляд: $A(a;0)$, $B(0;b)$, a, b - довжини катетів нашого трикутника. Тепер легко знайти координати точки D - середини відрізка AB: $D(\frac{a}{2};\frac{b}{2})$. Залишається порахувати і порівняти між собою довжини відрізків DA, DB і DC.

$$DC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\ ;$$

$$DB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\ ; \qquad DA = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Отже, $DA = DB = DC$, що і потрібно було довести.

Перевіримо правильність виконання задачі в програмі GeoGebra. Оскільки маємо прямокутний трикутник, вершини трикутника побудуємо відповідним чином: точку *C* розмістимо на початку координат, відповідно точки *A* і *B* візьмемо довільні, *A(0;y)*, *B(x;0)*. Середину гіпотенузи *AB* знайдемо за допомогою панелі інструментів *Середина або центр,* вказавши відповідні точки *A* і *B*. Порівняємо між собою довжини відрізків *DA, DB* і *DC,* використовуючи інструмент *Відстань або довжина*. Довжини є рівними, отже, середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.

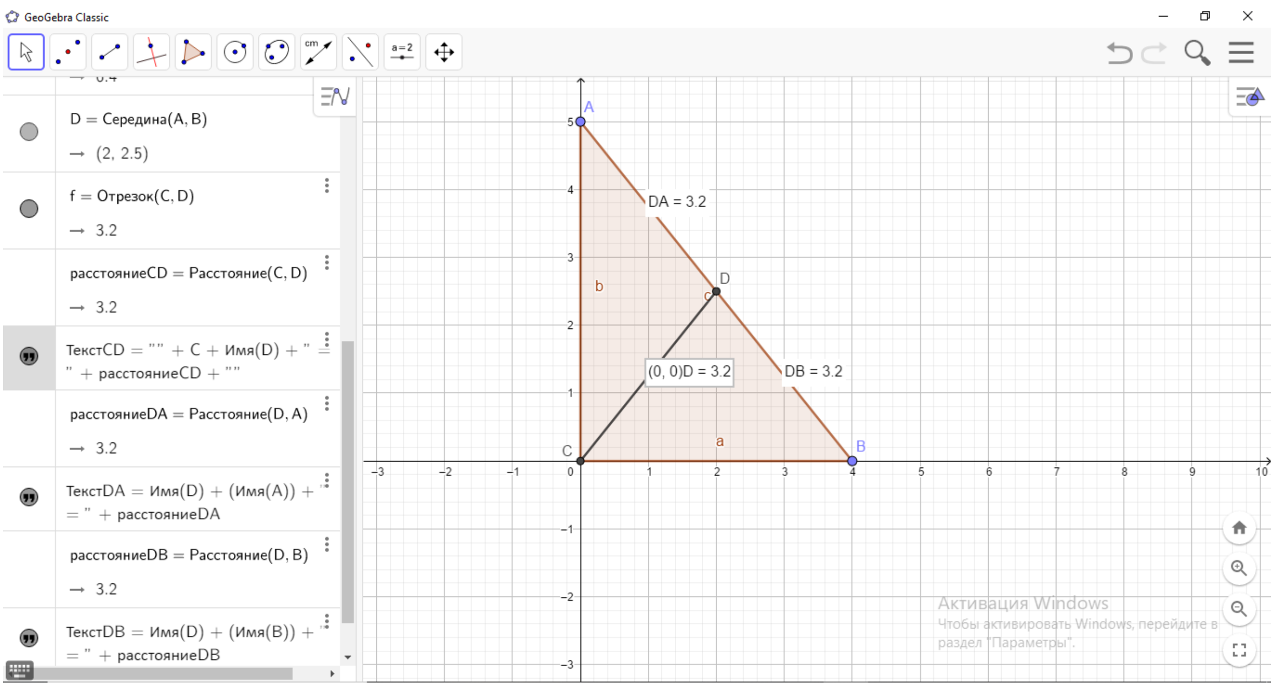


Рис. 3.5

В цій задачі систему координат можна було вибрати і іншим чином. Ось дві прості схеми:

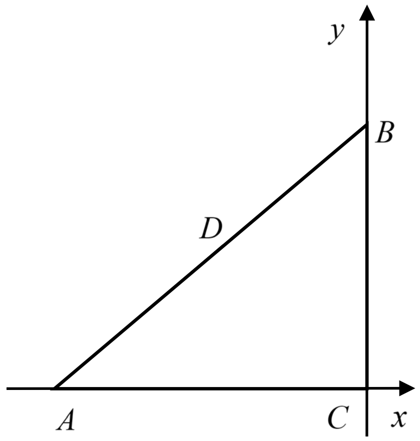


Рис. 3.6

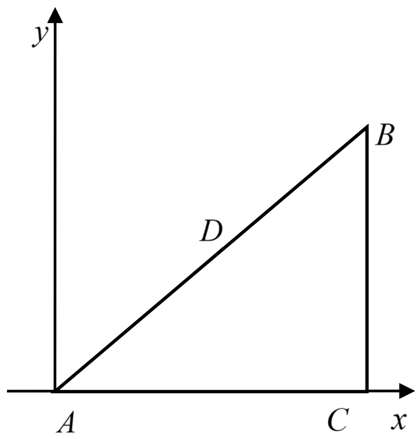


Рис. 3.7

Слід наголосити, що не завжди метод координат розв'язування задач є найраціональнішим. Цю задачу можна було б розв'язати і без використання координатного методу. Розглянемо одне із таких доведень. Дано прямокутний трикутник ABC. Через кінці гіпотенузи AB проведемо прямі, паралельні катетам (рис. 3.7), до перетину в точці E. Отримаємо чотирикутник $ACBE$, який, очевидно є прямокутником.

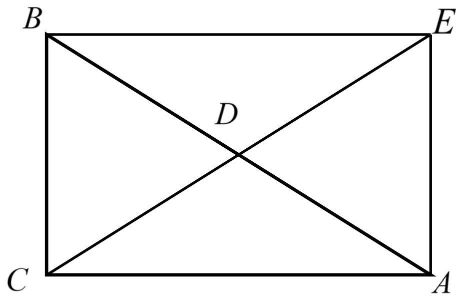


Рис. 3.7

Але тоді його діагоналі AB і CD рівні і в точці перетину діляться пополам, отже, $AD = BD = CD$, а це означає, що в трикутнику ABC середина гіпотенузи D однаково віддалена від вершин A, B, C.

Побудуємо прямокутний трикутник аналогічно до попереднього випадку. Прямі, паралельні катетам, побудуємо вибравши в меню інструментів *Паралельна пряма* та вказавши точку і відповідну паралельну пряму. Точка перетину побудованих прямих є вершиною чотирикутника. Побудуємо діагоналі чотирикутника натиснувши *Відрізок* і вкажемо *кінці відрізка.* Виміряємо відстань від точки перетину діагоналей до вершин, відстані – рівні., а це означає, що середина гіпотенузи трикутника рівновіддалена від його вершин.

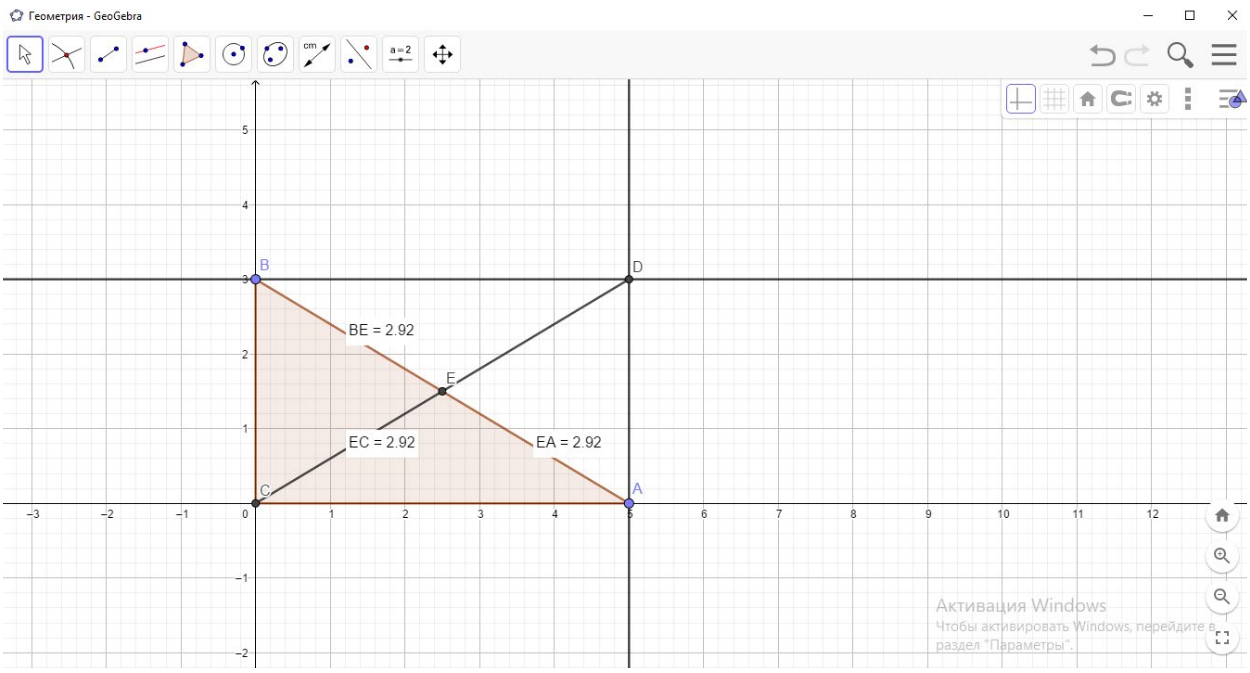


Рис. 3.8

Задача 3. *Знайти координати вершин правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a, знаючи, що початок координат співпадає з центром шестикутника, а вісь абсцис проходить через дві протилежні вершини.*

Розв'язання:

Нехай $ABCDEF$ – правильний шестикутник, центр якого точка O (рис.3.9).

Маємо $OA = OB = a$. Тоді $A(a; 0)$, $D(-a; 0)$. Нехай BM - висота рівностороннього трикутника OAB.

Тоді:

$$AM = OM = \frac{a}{2};\ MB = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

Точка C симетрична точці B відносно осі Oy, тому $C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

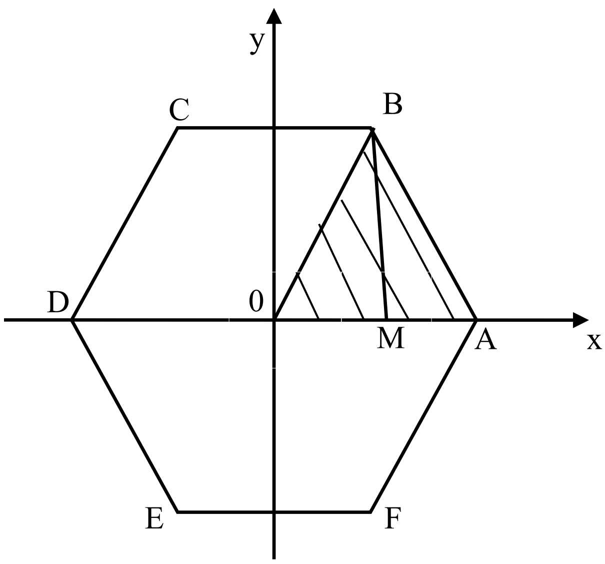


Рис. 3.9

Точка E симетрична точці C відносно осі Ox, тому $E\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Точка F симетрична точці B відносно осі Ox, тому $C\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв’яжемо дану задачу в програмі Gran-2D. Пригадаємо властивість правильного шестикутника про рівність його сторони і радіуса описаного навколо нього кола. Побудуємо *Коло*, центр якого міститься в початку координат. На осі абсцис позначимо *Довільну точку* та *Симетричну їй* відносно початку координат. Виміряємо радіус кола, який буде дорівнювати стороні шестикутника. Через вибрану точку на осі абсцис і точку на колі відкладемо відрізок рівний радіусу. Точку, що утворилася відобразимо симетрично відносно початку координат. Аналогічно зробимо з симетричною точкою на осі абсцис. Побудуємо шестикутник використавши інструмент *Ламана.* В полі *Конструювання об’єкта* натиснувши правою кнопкою миші на відповідну точку ми дізнаємося її координати.

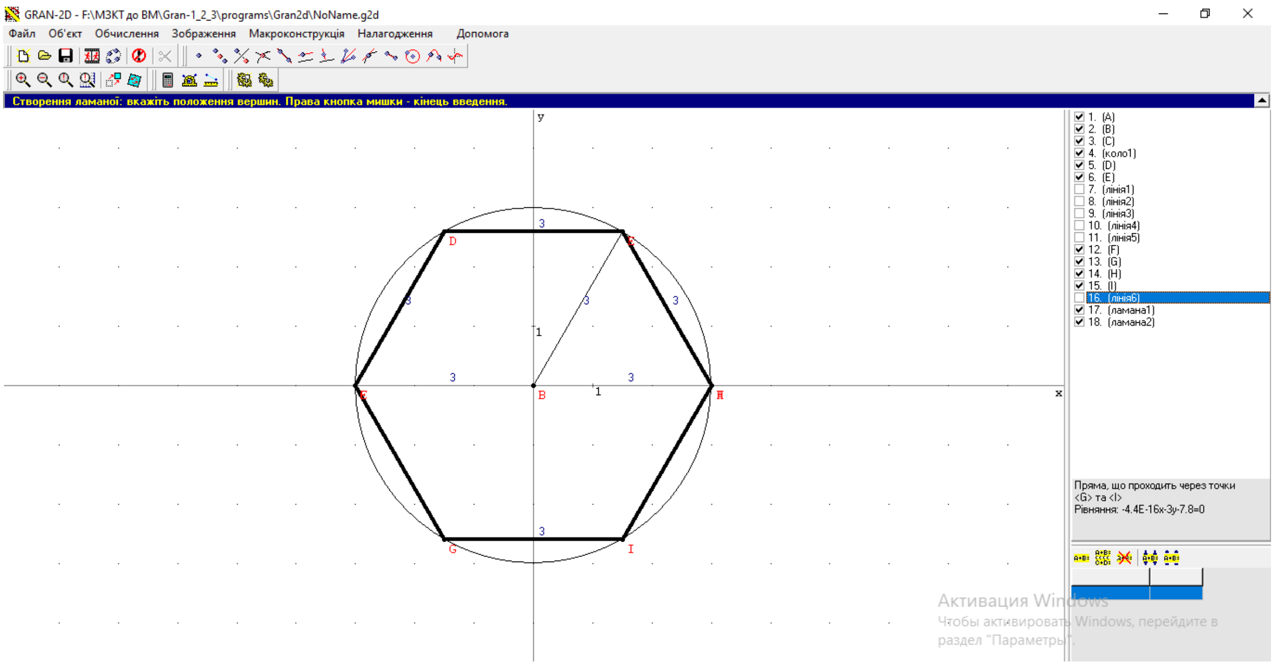


Рис. 3.10

Задача 4. *У коло з центром в точці* O *вписано чотирикутник* $ABCD$ *з перпендикулярними діагоналями, які перетинаються в точці* P. *Довести, що* *середини сторін AB і CD, центр O і точка P є вершинами паралелограма (рис. 3.11)*

Доведення:

Виберемо початок координат у центрі кола, осі розмістимо паралельно діагоналям вписаного чотирикутника. Позначимо $C(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Тоді $A(-x_1; y_1)$, $D(x_2; -y_2)$, $P(x_2; y_1)$.

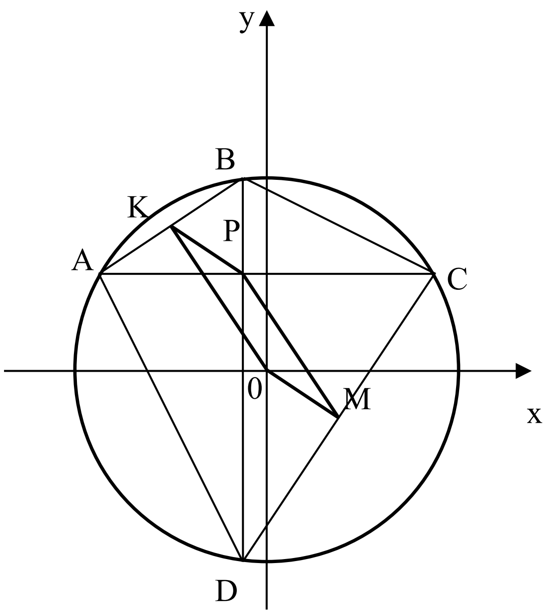


Рис. 3.11

Оскільки точки K і M є серединами відрізків AB і CD, то їхні координати:

$$K\left(\frac{x_2 - x_1}{2}; \frac{y_2 + y_1}{2}\right);$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 - y_2}{2}\right).$$

Щоб довести, що $OKPM$ - паралелограм, досить показати, що:

1) протилежні його сторони попарно рівні й паралельні;
2) точки O, P, K, M не лежать на одній прямій.

За формулою відстані між двома точками:

$$OK^2 = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)^2;$$

$$PM^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2} - y_1\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2 - 2y_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2;$$

$$KP^2 = \left(x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2} \right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_2 + y_1}{2} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2x_2 - x_2 + x_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{2y_1 - y_2 - y_1}{2} \right)^2 = \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2} \right)^2$$

;

$$OM^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2} \right)^2;$$

Звідси $OK = PM$, $KP = OM$.

Визначимо кутові коефіцієнти k_1 і k_2 прямих OK і OM . Відомо, що кутовий коефіцієнт прямої дорівнює відношенню різниць ординат і абсцис двох точок, що належать цій прямій. Тому

$$k_1 = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2}}{\frac{x_2 - x_1}{2}} = \frac{y_1 + y_2}{x_2 - x_1}; \quad k_2 = \frac{\frac{y_1 - y_2}{2}}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2}.$$

Звідси можна зробити висновок, що $k_1 \neq k_2$. Неважко довести, що кутовий коефіцієнт k_3 прямої PM дорівнює k_1 .

Отже, доведено, що протилежні сторони чотирикутника $OKPM$ рівні і паралельні. Тому цей чотирикутник – паралелограм.

Розв'яжемо дану задачу в програмі GeoGebra. Побудуємо *Коло*, центр якого візьмемо в початку координат і за довільною точкою. На колі побудуємо *Пряму* за двома точками та пряму перпендикулярну їй, закріпимо точки перетину прямих з колом. Побудуємо *Багатокутник*, в нашому випадку чотирикутник, вершини якого лежать на колі. Знайдемо середини протилежних сторін *Середина або центр*. Через середини протилежних сторін, точку перетину діагоналей та початок координат побудуємо *Чотирикутник*. Вимірявши довжини сторін даного чотирикутника та кути можемо сказати, що даний чотирикутник є паралелограмом.

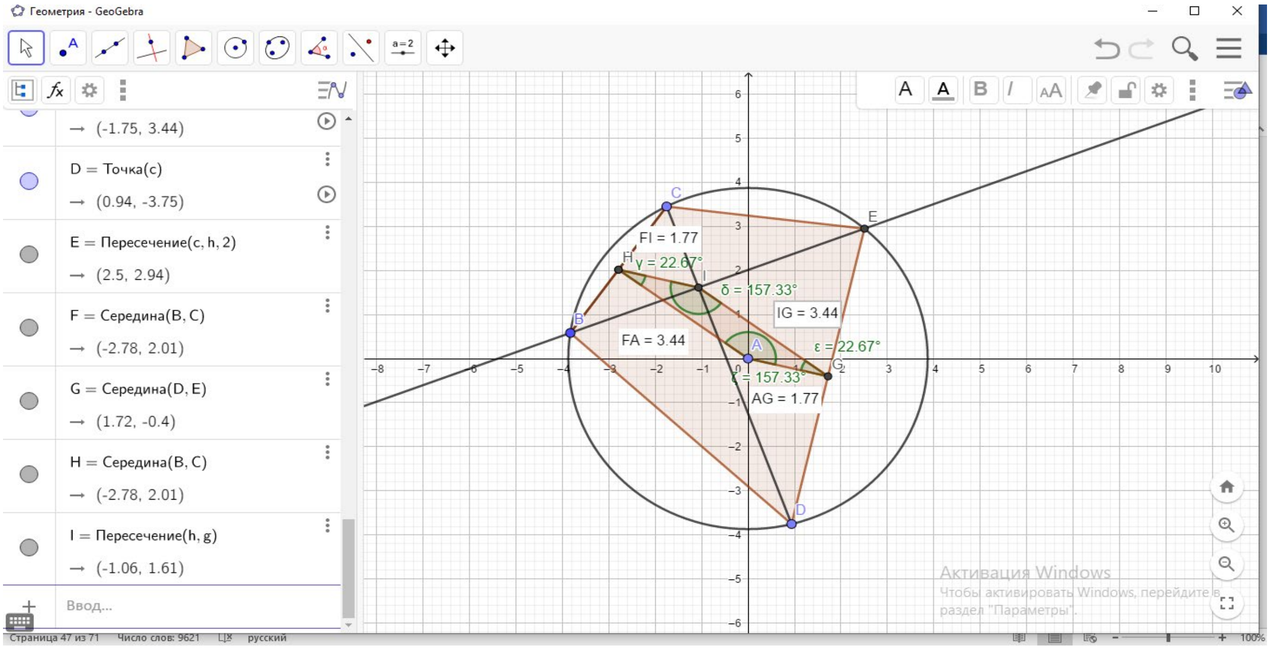


Рис. 3.12

Практикум розв'язування геометричних задач координатним методом.

У школі з поглибленим вивченням математики потрібно систематично використовувати координатний метод для розв'язування стереометричних задач. Тут доцільно на прикладах розв'язування принаймні двох задач сформулювати правило-орієнтир методу координат.

Задача 1. *Знайти радіус сфери, яка проходить через вершини* A_1 *і* C_1 *куба* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *та середини* M *і* N *ребер* DD_1 *і* DC *цього куба, якщо довжина ребра 4 см.*

Розв'язання:

Введемо прямокутну систему координат, як показано на рис. 3.13.

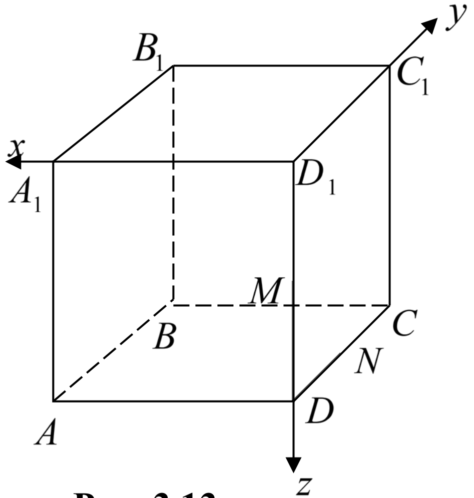


Рис. 3.13

У цій системі маємо: $A_1(4;0;0)$, $C_1(0;4;0)$, $M(0;0;2)$, $N(0;2;4)$, $O(x;y;z)$, де O - центр сфери. Виходячи з того , що $|OA_1| = |OC_1|$, $|OA_1| = |ON|$ та $|ON| = |OM|$, складемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-4)^2 + z^2; \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2)^2; \\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2. \end{cases}$$

Розв'язавши її, дістанемо: $x = y = \frac{7}{3}$, $z = \frac{5}{3}$. Тоді

$$R = |OA_1| = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{11}$$

Відповідь: $R = \sqrt{11}$

Задача 2. *У куб вписано сферу. Довести, що сума квадратів відстаней від довільної точки сфери до вершин куба не залежить від вибору точки. Знайти цю суму.*

Розв'язання.

Введемо прямокутну систему координат так, щоб початок її був у центрі куба, а осі координат були паралельні відповідним ребрам куба (рис. 3.14).

Якщо візьмемо довжину ребра куба за a, то радіус вписаної сфери дорівнюватиме $\frac{a}{2}$. У введеній системі вершини куба матимуть такі координати:

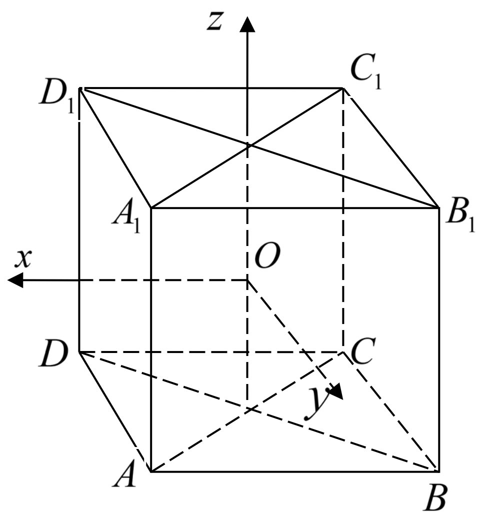


Рис. 3.14

$A(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-\frac{a}{2})$, $B(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};-\frac{a}{2})$, $C(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};-\frac{a}{2})$,

$D(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};-\frac{a}{2})$, $A_1(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2})$, $B_1(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2})$,

$C_1(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};\frac{a}{2})$, $D_1(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};\frac{a}{2})$.

Нехай M - точка на сфері має координати $(x;\ y;\ z)$. Враховуючи, що

$$x^2+y^2+z^2=R^2=\frac{a^2}{4},$$

сума квадратів відстаней точки від усіх вершин куба:

$$\begin{aligned}S=&\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2\right)+\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2\right)+\\&+\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2\right)+\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2\right)+\\&+\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right)+\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right)+\\&+\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right)+\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right)=\\&=8x^2+8y^2+8z^2+6a^2=8\cdot\frac{a^2}{4}+6a^2=8a^2.\end{aligned}$$

Узагальнюючи спосіб розв’язування наведених двох задач, учні можуть назвати істотні спільні етапи їх розв’язування і сформулювати правило-орієнтир методу координат.

Правило-орієнтир методу координат.

Для того щоб розв’язати задачу методом координат, потрібно:

1) відокремити умови і вимоги задачі. Обрати систему координат, відносно якої перевести вимоги на мову координат і скласти рівності зі змінними;
2) використовуючи умови задачі, перетворити рівності зі змінними і

прийти до результату мовою координат;

3) здобутий результат перевести на мову геометрії.

Після того як учні сформулюють правило-орієнтир, можна проілюструвати застосування координатного методу розв'язанням таких задач, які допоможуть учням набути досвіду, як «прив'язати» систему координат до даної фігури. Важливо, щоб учні розуміли, що від того, наскільки вдало вдається обрати координати осі, залежить успіх у розв'язуванні задачі.

Задача 1. *У сферу вписано правильну чотирикутну піраміду з двогранним кутом при основі α. Знаючи, що площа сфери дорівнює S, знайти площу основи піраміди.*

Розв'язання:

У цьому випадку зручно вибрати систему координат так, щоб початок її був у центрі M основи, а додатні напрямки осей x, y, z збігалися відповідно з напрямками променів MB, MC, MS, на яких лежать діагоналі основи і висота піраміди (рис. 3.15).

Позначимо сторону основи як a.

У вибраній системі координат $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\, 0;\, 0\right)$, $S\left(0;\, 0;\, \frac{a}{2}tg\alpha\right)$, $O(0;\, 0;\, z)$.

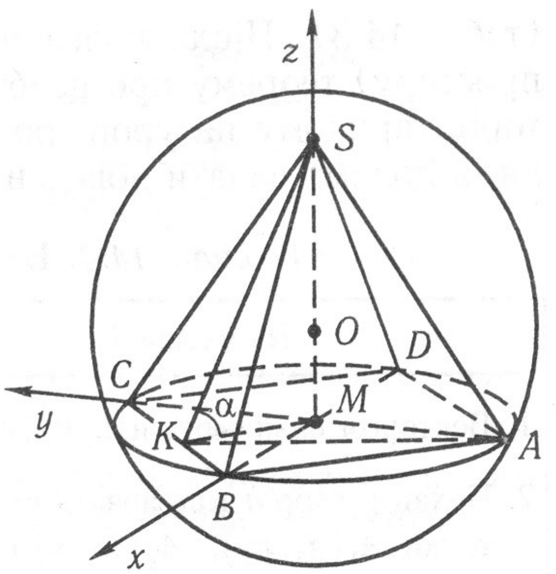


Рис. 3.15

Аплікату z центра O сфери визначимо із співвідношення $OM^2 + MB^2 = OB^2$, враховуючи, що $OB = OS$, $MB = \frac{MK}{\sin 45°}$, $MB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Отже, маємо $z^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{a\,tg\alpha}{2}-z\right)$. Звідси $z=\frac{a\left(tg^2\alpha-2\right)}{4tg\alpha}$.

Радіус описаного кола:

$$R^2=OB^2=z^2+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2\left(tg^2\alpha-2\right)^2}{16tg^2\alpha}+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2\left(tg^2\alpha+2\right)^2}{16tg^2\alpha}.$$

Відомо, що $S=4\pi R^2$, або $S=\frac{\pi a^2\left(tg^2\alpha+2\right)^2}{4tg^2\alpha}$. Із цієї рівності визначимо площу основи піраміди $SABCD$: $Q=a^2=\frac{4Stg^2\alpha}{\pi\left(tg^2\alpha+2\right)^2}$.

Відповідь: $\frac{4Stg^2\alpha}{\pi\left(tg^2\alpha+2\right)^2}$.

У ході розв’язування задач підручника слід формувати навички використання основних формул координатного методу для встановлення координат точок і векторів, обчислення відстаней і кутів в просторі, доведення паралельності, перпендикулярності, встановлення форми окремих многокутників тощо.

Задача 2. *Доведіть, що точки* $A(1;-1;1)$, $B(1;3;1)$, $C(4;3;1)$, $D(4;-1;1)$ *є вершинами прямокутника. Обчисліть довжини його діагоналей і координати точки їхнього перетину.*

Розв’язання:

Оскільки за умовою задачі необхідно знайти точки перетину діагоналей, то найзручніше розв’язувати задачу за таким планом:

1. Розглянувши вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, впевнитись, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2. Знайти координати середини відрізків AC і BC. Вони виходять

однаковими. Це означає, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються і в точці перетину діляться навпіл, отже цей чотирикутник є паралелограмом.

3. Знайдемо довжини відрізків AC і BD. Вони рівні. Тому даний чотирикутник є прямокутником.

Проаналізувавши розв'язування вище вказаних задач можна виділити компоненти уміння застосовувати координатний метод в конкретних ситуаціях, а саме:

1) перекладати геометричну мову на аналітичну для одного типу завдань і з аналітичної на геометричну для іншого;

2) знаходити точку по заданих координатах;

3) знаходити координати заданих точок;

4) обчислювати відстань між точками із заданими координатами;

5) оптимально вибирати систему координат;

6) складати рівняння заданих фігур;

7) визначати за рівнянням конкретний геометричний образ;

Дані уміння можна відпрацювати на прикладі наступних завдань, що формують координатний метод:

1) завдання на побудову точки за її координатами;

2) завдання на знаходження координат заданих точок;

3) завдання на обчислення відстані між точками із заданими координатами;

4) завдання на оптимальний вибір системи координат;

5) завдання на складання рівняння фігури по її характеристичній властивості;

6) завдання на визначення фігури за її рівнянням;

3.3. Методика навчання учнів розв'язувати геометричні задачі векторним методом.

Векторний метод розв'язання геометричних задач пов'язаний з використанням теорії векторів.

Геометричні задачі, що розв’язують за допомогою векторів, можна умовно розділити на дві групи.

До першої групи відносять задачі, в яких умова вже сформульована на мові векторів. До другої групи відносять задачі, у формулюванні яких не вказаний зв'язок з векторним методом. Як правило, такі задачі можна розв’язувати різними методами, - векторний метод є одним із них. Ці задачі даються учням важче ніж задачі першої групи, тому ми приділимо їм основну увагу.

В свою чергу задачі першої і другої групи поділяються на два види:

1. Афінні задачі – це задачі, в яких необхідно довести:
   а) паралельність прямих (відрізків);
   б) належність точки до прямої;
   в) поділ відрізка в даному відношенні.
2. Метричні задачі – це задачі, в яких необхідно знайти довжину відрізка або міру кута між прямими (відрізками).

Як відомо, розв’язуючи задачу векторним методом, потрібно виконати такі специфічні розумові дії:

1) спочатку подані в задачі співвідношення перекладають на “мову векторів”, тобто записують їх відповідними векторними рівностями;

2) дії (операції) над векторами;

3) подання вектора у вигляді суми, різниці двох векторів, добутку вектора на число;

4) перетворення векторних рівностей з використанням законів векторної алгебри і властивостей скалярного добутку;

5) перехід від співвідношення між векторами до співвідношень між їхніми довжинами, тобто користуючись правилами векторної алгебри, ці векторні рівності перетворюють і, нарешті, від мови векторів знову переходять до мови геометрії.

Зрозуміло, чим більше геометричних співвідношень учні можуть записати у вигляді векторних рівностей, тим ширший клас геометричних задач вони зможуть розв’язати векторним методом. Згідно з теорією поетапного формування розумових дій важливо заздалегідь поступово відпрацювати кожну розумову дію, яка є складовою діяльності щодо розв'язування задач векторним методом.

Практикум розв'язування геометричних задач векторним методом.

Слід звернути увагу на те, що векторний метод доведення теорем не універсальний, його зручно застосовувати для доведення паралельності та перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, поділу відрізка в заданому відношенні, для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів.

Під час розв'язування **метричних задач**, зокрема на визначення довжини відрізка і міри кута векторним методом, доцільно запропонувати учням відповідні алгоритми (табл. 3.3)

Таблиця 3.3. Алгоритм векторного методу розв'язування метричних задач

Обчислення довжини відрізка	Обчислення значення міри кута
1. Вибрати два неколінеарні (на площині) або три некомпланарні (у просторі) основні вектори, довжини і кути між якими відомі	1. Вибрати два неколінеарні (на площині) або три некомпланарні (у просторі) основні вектори, довжини і кути між якими відомі
2. Розкласти по них вектор, довжину якого потрібно обчислити	2. Вибрати вектори, що задають шуканий кут, і розкласти їх по основних векторах
3. Знайти скалярний квадрат цього вектора за формулою $\bar{a}\cdot\bar{a}=a^2$ і довжину $\left\|\bar{a}\right\|=\sqrt{a^2}$	3. Обчислити $\cos\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left\|\bar{a}\right\|\cdot\left\|\bar{b}\right\|}$

Правило-орієнтир розв'язування позиційних задач і алгоритм розв'язування метричних задач векторним методом в стереометрії такий самий, як і в планіметрії. Потрібно запропонувати учням пригадати це правило-орієнтир і алгоритм розв'язування, записані заздалегідь на таблиці. Застосування їх зручно проілюструвати на прикладі таких задач.

Задача 1. *Кожне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює* a. *Визначити відстань між висотою піраміди і мимобіжною з нею висотою бічної грані.*

Розв'язання:

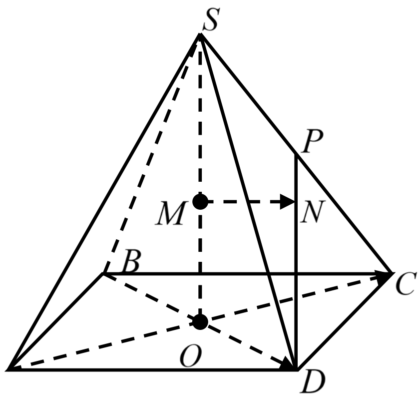


Рис. 3.16

Припустимо, що MN - шукана відстань (рис. 3.16). Візьмемо точку O (перетин діагоналей основи) за полюс і виразимо вектор $\overline{MN}$, довжина якого визначається, через вектори $\overline{OS} = \overline{m}$, $\overline{OC} = \overline{n}$, $\overline{OD} = \overline{k}$ з урахуванням, що

$$\overline{MN} = \overline{MO} + \overline{OD} + \overline{DN}.$$

Оскільки $\overline{MO} = x \cdot \overline{SO} = -x \cdot \overline{m}$,

$$\overline{DN} = y \cdot \overline{DP} = y \cdot \left(\overline{OP} - \overline{OD}\right) = y\left(\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n} - \overline{k}\right), \text{ то}$$

$$\overline{MN} = \left(-x + \frac{1}{2}y\right)\overline{m} + (1-y)\overline{k} + \frac{1}{2}y \cdot \overline{n}.$$

Взявши до уваги, що $\overline{MN} \perp \overline{SO}$ і $\overline{MN} \perp \overline{DP}$, тобто $\overline{MN} \cdot \overline{SO} = 0$, $\overline{MN} \cdot \overline{DP} = 0$, отримаємо

$$\begin{cases} \left(\left(-x+\frac{1}{2}y\right)\overline{m}+(1-y)\overline{k}+\frac{1}{2}y\cdot\overline{n}\right)\left(\frac{1}{2}\overline{m}+\frac{1}{2}\overline{n}-\overline{k}\right)=0; \\ \left(\left(-x+\frac{1}{2}y\right)\overline{m}+(1-y)\overline{k}+\frac{1}{2}y\cdot\overline{n}\right)\overline{m}=0. \end{cases}$$

Оскільки $\overline{m}\cdot\overline{n}-\overline{m}\cdot\overline{k}=0$, то після спрощення матимемо

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(-x+\frac{1}{2}y\right)\overline{m}^2+\frac{1}{4}y\cdot\overline{n}^2-(1-y)\overline{k}^2=0; \\ \left(-x+\frac{1}{2}y\right)\overline{m}^2=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+\frac{1}{2}y=0; \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-(1-y)=0, \end{cases}$$

звідси $x=\frac{2}{5}, \quad y=\frac{4}{5}$.

Підставивши значення x та y в рівність, що виражає $\overline{MN}$ через $\overline{m}$, $\overline{k}$, $\overline{n}$, отримаємо $\overline{MN}=\frac{1}{5}\overline{k}+\frac{2}{5}\overline{n}$. Визначивши скалярний квадрат $\overline{MN}^2$, дістанемо $\overline{MN}^2=\frac{1}{25}\left(\overline{k}^2+4\overline{n}^2\right)$. Оскільки $k^2=n^2=\frac{2a^2}{4}$, то

$$MN^2=\frac{1}{25}\left(\frac{2a^2}{4}+\frac{8a^2}{4}\right)=\frac{10a^2}{100};$$

$$MN=\frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Відповідь: $MN=\frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Для розв’язування багатьох задач на площині та в просторі зручно скористатися векторною формулою чотирьох точок – для довільних чотирьох точок A, B, C, D справджується така векторна рівність:

$$\overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} + \overline{CA} \cdot \overline{DB} = 0 .$$

Потрібно звернути увагу учнів, що вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{CA}$ взято в одному напрямку обходу периметра трикутника, інші співмножники кожного доданка є векторами з початком у точці D і кінцями у точках A, B і C.

Доведення:

Нехай O - довільна точка простору. Якщо виразити кожний вектор доводжуваної рівності через різницю векторів, які виходять з точки O, то дістанемо

$$\overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} + \overline{CA} \cdot \overline{DB} = \left(\overline{OB} - \overline{OA}\right)\left(\overline{OC} - \overline{OD}\right) +$$
$$+ \left(\overline{OC} - \overline{OB}\right)\left(\overline{OA} - \overline{OD}\right) + \left(\overline{OA} - \overline{OC}\right)\left(\overline{OB} - \overline{OD}\right) = 0.$$

Використання доведеної рівності значно спрощує розв’язання векторним методом задачі про перетин в одній точці трьох висот трикутника в планіметрії.

Задача 2. *Довести, що коли дві пари мимобіжних ребер тетраедра взаємно перпендикулярні, то й ребра третьої пари також взаємно перпендикулярні.*

Доведення:

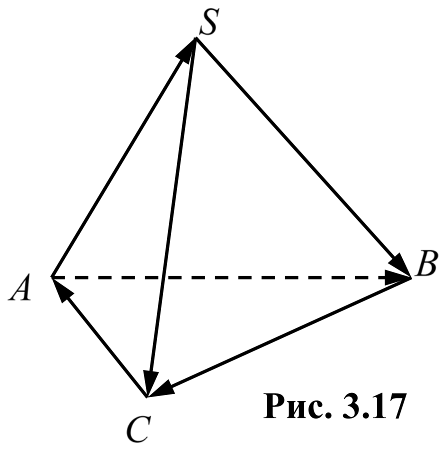


Рис. 3.17

Застосуємо до точок A, B, C, S векторну рівність для чотирьох точок (рисунок 3.17).

Оскільки $AS \perp BC$, то $\overline{AS} \cdot \overline{BC} = 0$. Через те, що $SC \perp AB$, маємо $\overline{SC} \cdot \overline{AB} = 0$. Звідки $\overline{CA} \cdot \overline{SB} = 0$, а це означає, що $CA \perp SB$.

Задачі на доведення суміщення двох точок.

Для того щоб дві точки збіглися, необхідно і достатньо показати, що вектор, зображений напрямленим відрізком з початком і кінцем у даних точках, був нульовим.

Задача 1. *Доведіть, що відрізки, які сполучають точки перетину медіан протилежних бічних граней довільної чотирикутної піраміди проходить через одну точку і діляться нею пополам.*

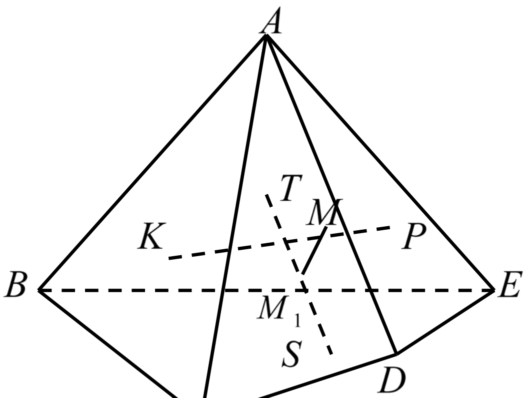


Рис. 3.18

Розв'язання:

Нехай K і P — точки перетину медіан граней ABC і ADE піраміди $ABCDE$ (рис. 3.18), а S і T - точки перетину медіан двох інших її бічних граней. Тоді, позначивши середини відрізків KP і ST буквами M і M_1 і взявши довільну точку O простору, матимемо:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE});$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}).$$

Почленно віднявши ці рівності дістанемо $\overline{MM_1} = 0$, точки M і M_1 збігаються. А це й означає, що M — середина кожного з відрізків KP і ST.

Задачу можна розв'язати й інакше (також векторним методом). Позначивши $\overline{AB} = \overline{b},\ \overline{AC} = \overline{c},\ \overline{AD} = \overline{d},\ \overline{AE} = \overline{e}$, неважко визначити, що $\overline{AK} = \frac{1}{3}(\overline{b} + \overline{c})$, $\overline{AP} = \frac{1}{3}(\overline{d} + \overline{e})$, $\overline{AS} = \frac{1}{3}(\overline{c} + \overline{d})$, $\overline{AT} = \frac{1}{3}(\overline{b} + \overline{e})$. Тоді $\overline{AM} = \frac{1}{6}(\overline{b} + \overline{c} + \overline{d} + \overline{e}),\qquad \overline{AM_1} = \frac{1}{6}(\overline{c} + \overline{d} + \overline{b} + \overline{e}).$,

Отже, $\overline{AM} = \overline{AM_1}$, тобто точки M і M_1 збігаються.

Задача 2. *В основі піраміди $DABC$ (рис. 3.19) лежить рівносторонній трикутник ABC, довжина сторони якого дорівнює $4\sqrt{2}$. Бічне ребро DA перпендикулярне до площини основи і дорівнює 2. Знайти величину кута між прямими DE і AM, якщо E – середина AB, а M – середина BC.*

Розв'язання:

Позначимо кут між мимобіжними прямими DE і AM через φ ($(DE \, ; AM) = \varphi$).

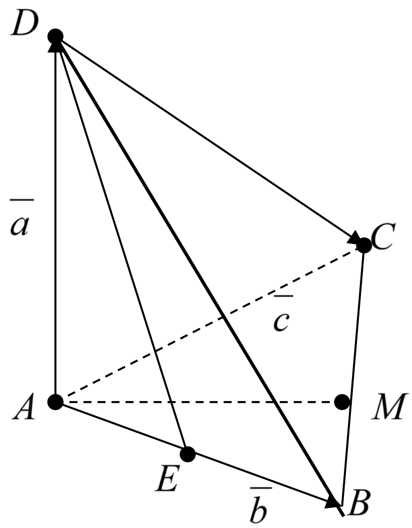


Рис. 3.19

1. На векторній мові вимога задачі означає, що нам необхідно знайти кут φ із співвідношення

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{DE} \cdot \overline{AM}\right|}{\left|\overline{DE}\right| \cdot \left|\overline{AM}\right|}.$$

2. Виберемо три базисні вектори (найчастіше їх вибирають так, щоб вони виходили з однієї точки і не лежали в одній площини, причому бажано, щоб кути між ними та їх довжини буди відомі):

$$\overline{AD} = \overline{a},\ \overline{AB} = \overline{b},\ \overline{AC} = \overline{c}.$$

Відразу ж зазначимо, що за умовою:

$\left|\bar{a}\right| = AD = 2,\quad \left|\bar{b}\right| = AB = 4\sqrt{2},\quad \left|\bar{c}\right| = AC = 4\sqrt{2}$, $\angle\left(\bar{b},\bar{c}\right) = \angle CAB = 60^\circ$ (ΔABC – рівносторонній). Окрім цього, оскільки за умовою ребро DA перпендикулярне до площини ABC, то ребро DA перпендикулярне до ребер AC і AB. Отже, $\bar{a} \perp \bar{b}$ і $\bar{a} \perp \bar{c}$ (тобто ми знаємо довжини усіх базисних векторів та кути між ними).

3. Виразимо вектори $\overline{DE}$ і $\overline{AM}$ (виділені у пункті 1) через базисні: $\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = \frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}$ (E - середина AB, тому $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$), а оскільки M – середина BC, то $\overline{AM} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{b} + \bar{c}\right)$.

4. Обчислимо всі вирази, що входять у формулу з першого пункту:

$$\overline{DE}\cdot\overline{AM} = \left(\frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \frac{1}{4}\bar{b}^2 + \frac{1}{4}\bar{b}\cdot\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a}\cdot\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

Але $\bar{b}^2 = \left|\bar{b}\right|^2 = 32$, $\bar{b}\cdot\bar{c} = \bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\cos 60^\circ = 16$, $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$ та $\bar{a}\cdot\bar{c} = 0$ (табл. 3.1). Тоді $\overline{DE}\cdot\overline{AM} = 12$.

Щоб знайти $\left|\overline{DE}\right|$, знайдемо $\overline{DE}^2$ та скористаємось формулою $\overline{DE}^2 = \left|DE\right|^2$ (*).

$$\overline{DE}^2 = \left(\frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}\right)^2 = \frac{1}{4}\bar{b}^2 - \bar{b}\cdot\bar{a} + \bar{a}^2 = \frac{1}{4}\cdot 32 - 0 + 2^2 = 12.$$

З формули (*) дістаємо: $\left|\overline{DE}\right| = \sqrt{\overline{DE}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Аналогічно,

$$\overline{AM}^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\bar{b} + \bar{c}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\bar{b}^2 + \frac{1}{2}\bar{b}\cdot\bar{c} + \frac{1}{4}\bar{a}^2 = \frac{1}{4}\cdot 32 + \frac{1}{2}\cdot 16 + \frac{1}{4}\cdot 32 = 24.$$

Тоді $\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{\overline{AM}^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Підставляємо всі знайдені значення в формулу з першого пункту:

$$\cos\varphi = \frac{12}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}}.$$

Отже, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ й φ – гострий кут (як кут між прямими), тому $\varphi = 45°$.

Відповідь: $\varphi = 45°$.

Задача 3. 1) Скласти рівняння площини, яка проходить через точки A(1, 3, 0), B(4, -1, 2) і C(3, 0, 1); 2) Знайти відстань до цієї площини від точки D(4, 3, 0); 3) Записати рівняння площини, яка проходить через дану точку і паралельна до площини ABC.

Щоб скласти рівняння площини, обираємо пункт меню *Об'єкт/ Створити/ Площина* та записуємо координати заданих точок. У звіті прочитаємо складене рівняння: 0,82x+0,41y-0,41z=0. Будуємо точку D (*Об’єкт/ Створити/ Точка*). Для обчислення відстані використовуємо послугу *Обчислення/ Відстань/ Між точкою і площиною* і вказуємо відповідно до запитів програми на точку і на площину ABC. Щоб скласти рівняння площини, паралельної до ABC, пригадуємо умову паралельності – пропорційні координати нормальних векторів. Виписуємо координати вектора, перпендикулярного до ABC (0.82, 0.41, -0.41) ; складаємо рівняння площини, активізувавши пункт меню *Об’єкт/ Створити/ Площина/ Точка і вектор нормалі.*

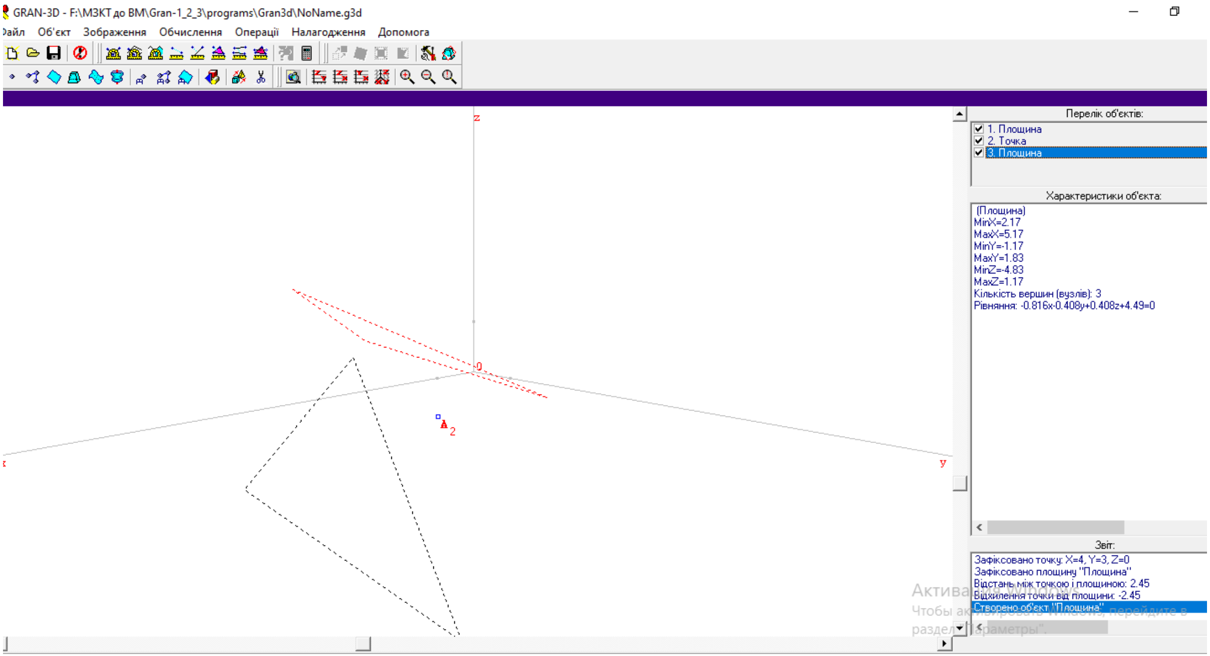


Рис. 3.20

Проаналізувавши розв’язування вище вказаних задач можна виділити компоненти уміння застосовувати векторний метод в конкретних ситуаціях, а саме:

1) перетворювати векторні співвідношення;

2) переходити від співвідношення між векторами до співвідношень між їхніми довжинами;

3) виражати довжину вектора через його скалярний квадрат;

4) виражати величину кута між векторами через їх скалярний добуток.

Дані уміння можна відпрацювати на прикладі наступних завдань, що формують векторний метод:

1) доведення паралельності прямих і відрізків;

2) доведення перпендикулярності прямих і відрізків;

3) задачі на доведення поділу відрізка в заданому відношенні;

4) доведення належності трьох точок одній прямій;

5) доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів;

6) задачі на знаходження величини кута.

РОЗДІЛ IV. ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ТА СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ

Педагогічний експеримент є таким методом досліджень, при якому відбувається активний вплив на педагогічні явища шляхом створення нових умов, що відповідають меті дослідження.

Педагогічний експеримент – це науково поставлений дослід, спостереження досліджуваного явища в точно врахованих умовах, які дають можливість стежити за ходом явища і відтворювати його при повторенні цих умов. Характерною рисою експерименту є заплановане втручання людини в явище, що вивчається, можливість його багаторазового відтворення у змінених умовах. [13,с.26]

Предметом педагогічного експерименту є визначення ефективності застосування інформаційно- комунікаційних технологій на уроках геометрії при розв’язуванні задач векторно-координатним методом.

В експерименті брали участь учні 10-А та 10-Б класів Рівненської міської ЗОШ №22 у яких рівень навчальних досягнень з математики майже однаковий.

Ми використали порівняльний вид експерименту. Оскільки робота велась паралельно в двох класах, де на дану тему виділялась однакова кількість годин, то об’єм матеріалу відповідно був поданий однаковий, однак відрізнялись форми подання. Експериментальний 10-Б клас вивчав тему, використовуючи розроблену нами методику, а контрольний 10-А – традиційні методи проведення уроків.

В 10-Б класі на уроках геометрії навчальні заняття проводилися з використанням презентації та пакетів математичних програм Gran та GeoGebra.

Навчаючий етап експерименту передбачав постановку і розв’язання таких завдань:

– закріпити знання з теми дослідження;
– урізноманітнити навчальний процес;

– перевірити розроблену систему рівневих завдань з математики для учнів десятих класів;

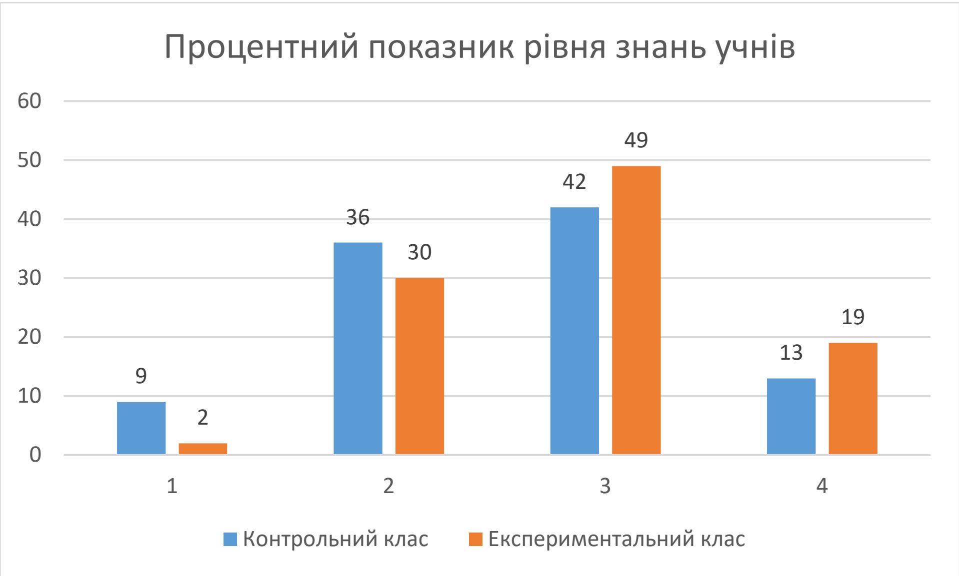
– з'ясувати порівняльну ефективність традиційного навчання та навчання за допомогою комп'ютерних технологій.

Після проведення уроку узагальнення та систематизації знань (Додаток А) в 10-А та 10-Б класах, виконання контрольних завдань передбачало письмову та комп'ютерну перевірку на рівні не нижче обов'язкового, результати яких такі:

Таблиця 4.1

Рівень знань учнів	Процентний показник рівня знань учнів контрольного 10-А класу	Процентний показник рівня знань учнів експериментально 10-Б класу
Початковий	9	2
Середній	36	30
Достатній	42	49
Високий	13	19

Результати також подамо у вигляді діаграми.



Отже, можна зробити висновок, що учні експериментальних класів, які навчалися за впровадженою методикою, з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, показали дещо вищий рівень знань, ніж учні контрольної групи, для яких навчання проводилося традиційними методами. Використання комп'ютера на уроках математики підсилює інтерес до уроку, до предмету, підсилює мотивацію вивчення учнями навчального предмету, дозволяє зекономити час, має високу степінь наочності.

ВИСНОВКИ

Отже, при розв'язуванні геометричних задач, крім традиційних методів з використанням алгебри і тригонометрії, можуть використовуватись і інші методи, в тому числі і векторно-координатний.

Векторно-координатний метод поєднує в собі два методи розв'язування задач: векторний та координатний. Порівнюючи вказаний метод з іншими методами розв'язування задач ми виявили, що дуже часто він дозволяє уникнути штучних побудов, спрощує розв'язання багатьох геометричних задач і доведення теорем. Він зручний також тим, що не потрібно використовувати велику кількість формул, ознак і властивостей фігур.

Тему «Декартові координати на площині» на вищому теоретичному рівні та в ширшому застосуванні вивчають у 9 класі (рівень стандарту, 8 год), починаючи з повторення та систематизації знань і вмінь з попередніх класів.

В 9 класі на вивчення теми «Вектори на площині» відводиться 13 год.

Метою вивчення теми «Вектори і координати в просторі» є повторення, систематизація і розширення знань учнів про вектори, координати, рівняння фігур із курсу планіметрії основної школи, поширення відповідних понять на простір, розвиток вмінь застосування векторів і координат. Дана тема вивчається в 10 класі.

Для вивчення даної теми в класах рівня стандарту відводиться 10 годин, профільного та поглибленого рівнів – 22 години.

В даній роботі ми розглянули суть методів координат і векторів:

– метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел. Числа, за допомогою яких визначається положення точки, називають її координатами;

– векторний метод розв'язання геометричних задач пов'язаний з використанням властивостей векторів.

Геометричні задачі, які розв'язуються з використанням векторно-координатного методу ми умовно поділили на дві групи задач: задачі, в яких умову сформульовано в термінах координатної або векторної геометрії і задачі, у формулюванні яких немає вказівок на зв'язок їх з координатним або векторним методом.

Також ми виділили основні компоненти уміння застосовувати векторний і координатний методи:

– компонентами уміння застосовувати координатний метод в конкретних ситуаціях є:

- o обчислювати відстань між точками із заданими координатами;
- o складати рівняння заданих фігур;
- o визначати за рівнянням конкретний геометричний образ;

– компонентами уміння застосовувати векторний метод в конкретних ситуаціях є:

- o перетворювати векторні співвідношення;
- o переходити від співвідношення між векторами до співвідношень між їхніми довжинами;
- o виражати довжину вектора через його скалярний квадрат;
- o виражати величину кута між векторами через їх скалярний добуток.

На основі дослідження ми розробили методику навчання учнів розв’язувати геометричні задачі векторно-координатним методом з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

Для перевірки гіпотези дослідження, про ефективність викладання за допомогою комп’ютера, було проведено педагогічний експеримент в 10-А та 10-Б класах. Із учнів цих класів були сформовані контрольний та експериментальний класи. В контрольному класі навчання проводилося традиційними методами, а в експериментальному класі впровадили застосування пакетів математичних програм.

Результати педагогічного експерименту підтвердили, що використання комп’ютера на уроках математики допомагає значно підвищити якість знань з геометрії, сформувати в учнів уміння здобувати знання самостійно і вдосконалювати свої розумові здібності, розвиває вміння працювати з комп’ютером, сприяє підвищенню зацікавленості учнів розв’язувати задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антоненко М. І. Розв'язування геометричних задач: книжка для вчителя / М. І. Антоненко. – К.: Рад. школа, 1991. – 128с.

2. Бевз В. Г. Історія математики / В. Г. Бевз. – Харків: Основа, 2006. – 176с.

3. Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. – 288с. :іл.

4. Боровик, В.Н. Векторно-координатний метод розв'язування геометричних задач на площині та у просторі: навч. посіб. для слухачів Малих академ. наук/ В.Н.Боровик, М.Я.Ігнатенко. – К., 1995. – 116 с.

5. Буковська, О. Сучасний урок-лекція з геометрії на тему: «Вектори на площині та у просторі» / О.Буковська // Математика в школі. – 2008. - №2. – с.14-25.

6. Волошин С. В. Методика розв'язування задач з геометрії: методична розробка / С. В. Волошин. – 2019. – 16с.

7. Возняк О. Г. Метод координат у геометричних задачах: навч. посібник / О. Г. Возняк. – Т.: Навчальна книга – Богдан, 2013. – 64с.

8. Гельфанд І. М. Метод координат: навч. посібник / І. М. Гельфанд, О. Г. Глаголєва, Кирилов О. О.// пер. з рос. і заг. ред. В. О. Тадєєва. – Т.: Навч. книга – Богдан, 2011. 216с.

9. Гунько Л. Метод векторів для розв'язування задач із геометрії / Л. Гунько, В. Кухар // Математика в рідній школі. – 2018. - №10. – С. 15-24.

10. Думанська Г. О. Застосування комп'ютерних технологій у навчальному процесі / Г. О. Думанська // Математика в школах України. – 2009. №4. – С. 24.

11. Єгорова О. Використання сучасних гаджетів та QR-технології на уроках математики / О. Єгорова // Математика в рідній школі. – 2019. - №7-8. – С. 59-61.

12. Жалдак М. І. Проблеми інформатизації навчального процесу в середніх і вищих навчальних закладах / М. І. Жалдак // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2013. - №3.– С. 8-15.

13. Жосан О. Е. Педагогічний експеримент: навч.-метод. посібник / О. Е. Жосан. – Кіровоград: КОШППО ім. В. Сухомлинського, 2008. – 72 с.

14. Зеленяк О. П. Застосування інтегрованого середовища GeoGebra / О. П. Зеленяк // Математика в школах України. – 2016. -№6. – С. 2-13.

15. Зеленяк О. Застосування СКА-середовища GeoGebra при розв'язуванні геометричних задач / О. Зеленяк // Математика в рідній школі. – 2016. - №1. – С. 26-32.

16. Касьяненко М.Д. Підвищення ефективності навчання математики / М.Д. Касьяненко. – К., 1999. – 180 с.

17. Колягин Ю.М. Методики преподавания в средней школе. Общая методика / Ю.М. Колягин та ін. – М.: Просвещение, 1980. – 386 с.

18. Крайзман М. Л. Розв'язування геометричних задач методом векторів. Посібн. для самоосвіти вчителів / М. Л. Крайзман. - К.: Рад. школа, 1980. – 96с.

19. Крайзман М. Л. Розв'язування геометричних задач методом координат. Посібн. для самоосвіти вчителів / М. Л. Крайзман. - К.: Рад. школа, 1983. – 127с.

20. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером. Посібн. для вчителів і студентів / За редакцією М. І. Жалдака. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272с.

21. Кузьмук І. В. Координати середини відрізка / І. В. Кузьмук // Математика в школах України. – 2019. -№19-21. – С. 47-50.

22. Курило М. О. Шукайте естетику в координатному методі / М. О. Курило // Математика в школах України. – 2015. -№13-15. – С. 49-53.

23. Матяш О. І. Геометрична компетентність як складова математичної компетентності учнів / О. І. Матяш // Математика в рідній школі. – 2016. - №3. – С. 28-32.

24. Мельник Г. М. Упроваджуємо інноваційні методи навчання математики / Г. М. Мельник, Н. В. Баюн // Математика в школах України. – 2016. -№7-8. – С. 2-6.

25. Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвітніх навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010. – 144с. :іл.

26. Мерзляк А. Г. Геометрія 10 кл. : збірник задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017. – 240с. :іл.

27. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальноосвітньої середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 256с. :іл.

28. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. [Електронний ресурс] // Міністерство освіти і науки україни – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

29. Навчальна програма з математики для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів з математики [Електронний ресурс] // Міністерство освіти і науки україни – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas

30. Нагібін Ф.Ф. Геометричні задачі у восьмирічній школі / Ф. Ф Нагібін, О. Ф. Семенович – К.: Рад. школа, 1967. – 328 с.

31. Панченко Г. В. Розв'язування геометричних задач векторним методом / Г. В. Панченко, І. А. Маскаєва // Математика в школах України. – 2019. -№19-21. – С. 41-46.

32. Паньженский В. И.Различные варианты построения евклидовой геометрии: учебное пособие / В. И. Пальженский, М. В. Сорокина, Н. А. Тяпин. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2015 – 60с.

33. Паньова Н. Використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики / Н. Паньова // Математика в рідній школі. – 2019. - №4. – С. 14-22

34. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навч. посібник для студентів мат. спец. педагог. університетів / за редакцією В. О. Швеця. – К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2012. – 267с.

35. Розв'язування планіметричних задач векторним методом [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://sites.google.com/site/metodikarozvazuvanna11111/rozv-azuvanna-planimetricnih-zadac-vektornim-metodom

36. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. – 2-ге вид., доп. і переробл. / З. І. Слєпкань. – К.: Вища школа, 2006. – 582с.

37. Светлова Т. В. Сучасний кабінет математики / Т. В. Светлова // Математика в школах України. – 2015. -№22-24. – С. 56-63.

38. Хавелов С. В. Компьтерные технологии на уроках математики / С. В. Хавелов // Математика в школах України. – 2015. - №13 -15. – С. 41-48.

39. Чирко В. О. Інформаційна технологія і математична освіта / В. О. Чирко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 1988. - №2. – С. 8-15.

Додаток А

Контрольна робота з теми «Координати та вектори в просторі»

Варіант 1

1. Дано точки *M(3;-2;1)* і *N(5;2;-3)*. Знайдіть координати середини відрізка *MN* та його довжину.

2. Дано точки *A(-2;1;3)* і *B(3;-2;-1)* і *C(-3;4;2)*. Знайдіть:

а) координати векторів $\overline{AB}\ і\ \overline{AC}$;

б) модуль вектора $\overline{AB}$;

в) координати вектора $\overline{MN} = 2\overline{AB} - 3\ \overline{AC}$.

3. Точки *A(-2;-4;1)* і *B(-5;-6;-1)* – вершини паралелограма *ABCD,* точка *O(1;3;2)* – точка перетину його діагоналей. Знайдіть координати вершин *C* і *D* паралелограма *ABCD.*

4. Знайдіть кут між векторами $\overline{\mathrm{AB}}$ і $\overline{CD}$, якщо *A(1;0;2), B(1;*$\sqrt{3}$*;3), C(-1;0;3),D(-1;-1;3).*

5. Точки *A(3;-2;6)* і *C(-1;2;-4)* є вершинами квадрата *ABCD.* Знайдіть площу цього квадрата.

Варіант 2

1. Дано точки *A(-6;5;3)* і *B(4;1;-5)*. Знайдіть координати середини відрізка *AB* та його довжину.

2. Дано точки *M(-4;-2;1)* і *N(3;-1;-1)* і *K(2;1;-3)*. Знайдіть:

а) координати векторів $\overline{MN}\ і\ \overline{KM}$;

б) модуль вектора $\overline{MN}$;

в) координати вектора $\overline{PF} = 3\overline{MN} - 2\overline{KM}$.

3. Точки *A(2;-4;1)*, *B(-6;2;3)* і *D(4;0;1)* – вершини паралелограма *ABCD,* Знайдіть координати вершини *C* паралелограма і координати точки перетину його діагоналей.

4. Знайдіть кут між векторами $\overline{C\mathrm{A}}$ і $\overline{DB}$, якщо *A(2;-1;*$\sqrt{2}$*), B(1;-2;0),* *C(1;-3;0), D(2;-2;0).*

5. Точки *A(5;-5;4)* і *B(8;-3;3)* є вершинами рівностороннього трикутника *ABC.* Знайдіть периметр цього трикутника.