ЗМІСТ

ВСТУП

Розв'язування задач посідає в математичній освіті значне місце. Тому навчанню розв'язувати задачі приділяється багато уваги.

У процесі навчання математики задачі відіграють велику й багатопланову роль. Розв'язування задач сприяє досягненню тих цілей, які ставляться перед навчанням математики в середній школі. Головна мета навчання математики полягає у формуванні в учнів ключових компетентностей, необхідних для їхньої самореалізації у швидкозмінному світі.

Досить простий у застосуванні, метод координат є необхідною складовою вирішення завдань різного рівня. Використання даного методу дозволяє учням значно спростити і скоротити процес вирішення завдань, що допомагає їм при подальшому вивченні як шкільного курсу, так і при вивченні математики у вищих навчальних закладах.

Метод координат - це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів. Числа, за допомогою яких визначається положення точки, називають її координатами.

Якщовгеометріїдоводиться,якправило,шукатидлякожноїзадачіособливийшляхрозв'язання,товалгебрітааналітичнійгеометріїрозв'язування проводятьсязазагальнимдлявсіхзадачпланом,якийпристосовуєтьсядо будь-якої задачі. Перенесення в геометріювластивої для алгебри алгоритмізованості завдань – становить головну цінність координатно-векторного методу. Значимістьцихметодівполягаєвтому,щоїхзастосуванняпозбавляєвіднеобхідностівдаватисядонаочногоуявленняскладнихпросторовихзображень, що спрощує розв'язаннязадач.

Актуальність дослідження даної теми зумовлена насамперед тим, що сьогодні, незважаючи на невелику кількість годин, що відводиться в школі для розгляду теми «Декартові координати на площині», значна частина завдань Державної підсумкової атестації з математики в 9 класі присвячена розв’язуванню задач методом координат.Тому необхідна методика вивчення методу координат, що дозволяє учням навчитися вирішувати різноманітні задачі координатним методом, проте учитель не подає цей метод як основний для вирішення геометричних задач.

Проблемою координатно-векторного розв’язування задач займалася доситьвеликакогортавчених.Г.Б.Лудінавважає,щовикористовуватикоординатн уплощинувжеслідзп’ятогокласувивченняматематики,що«сприяє реалізації внутріпредметних зв’язків між алгеброю і геометрією, дозволяє зводити побудови до обчислень, що інколи більш коротким шляхом приводитьдомети».ОднакС.Смогоржевськийзастерігаєнас,щорозв’язаннязада чданимметодомнезавждиєпростішетагарнішетих,щоможе запропонувати елементарна геометрія.

Мета дослідження - усвідомлення сутності методу координат, його можливостей в геометрії; розробити методику вивчення та використання даного методу у шкільному курсі геометрії.

Об'єкт дослідження - процес навчання учнів розв’язувати геометричні задачі.

Предмет дослідження - вивчення методу координат у шкільному курсі математики.

Завдання дослідження:

1. Розглянути методичні особливості навчання учнів розв’язувати геометричні задачі.
2. Висвітлити науково-теоретичні основи розв’язування геометричних задач методом координат.
3. Проаналізувати виклад даної теми згідно діючих підручників для 9 класу, а також зміст програми з математики.
4. Описати метод координат і способи його застосування на прикладі конкретних математичних задач.

5. Розробити методику навчання учнів розв'язувати геометричні задачі методом координат у шкільному курсі геометрії.

6. Здійснити аналіз експериментальної перевірки ефективності використання розробленої методики.

Гіпотеза: вивчення методу координат в школі буде більш ефективним, якщо:

- застосовувати пакет комп'ютерних програм до розв'язування геометричних задач методом координат;
- в системному курсі планіметрії учні ознайомляться зі структурою цього методу;
- використовувати системи завдань для формування окремих компонентів методу.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що даний матеріал може бути використаний вчителями математики при здійсненні навчально-виховного процесу.

Апробація.Результати роботи були представлені на:

1)звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2019 рік;

2) XII Міжнародній науково-практичній конференції «Наука, освіта, суспільство очима молодих» 15 травня 2019 року.

За результатами доповіді опубліковано статтю«Методика навчання учнів розв'язувати задачі методом координат» у збірнику матеріалів даної конференції.

Об'єм роботи. Роботаскладається зі вступу, з трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

РОЗДІЛ 1
НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ
1.1. Історичні аспекти розвитку поняття системи координат

Метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів, це метод дослідження геометричних фігур та їхніх властивостей засобами алгебри з застосуванням системи координат.

Розвиток систем координат в історії людства пов'язаний як з математичними задачами, так і з практичними проблемами мистецтва навігації, що спиралася на картографіюта астрономію. Найвідомішу систему координат, прямокутну, запропонував Рене Декарт у 1637 році. Поняття про полярну систему координат у європейській математиці склалося приблизно в ці ж часи, але перші у'являння про неї існували ще в Стародавній Греції, у середньовічних арабських математиків, які розробляли методи обрахунку напрямку на Каабу.

Основоположниками методу координат вважаються П. Ферма і Р. Декарт. Метод Ферма (1629, опублікований у 1679) ґрунтувався на взаємно однозначній відповідності між точками площини і парами чисел (x; y). Його система координат складалася з однієї прямої (сучасна вісь абсцис) і початкової точки N (тепер початок координат). Положення, наприклад, точки P на деякій кривій визначалося відстанями A (сучасна абсциса x точки P) і E (сучасна ордината y точки P) (рис.1.1.).

Ферма розглядав лише додатні значення x і y, а тому його система координат складалася фактично з одного першого квадранта (будь-яка з чотирьох частин площини, на які її ділять дві взаємно перпендикулярні прямі).

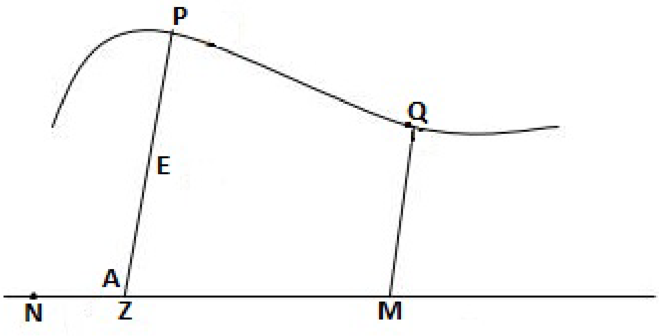


Рис.1.1.

Прямі PZ і QM – паралельні, але не обов’язково перпендикулярні прямій NM. За допомогою такого підходу встановлювалася відповідність між кривими та їх рівняннями $f(x, y) = 0$. Ферма встановив, що рівняння першого степеня описують прямі, а рівняння другого степеня – конічні перерізи.

У Декарта система координат також складалася з однієї фіксованої вісі (абсцис), але, на відміну від Ферма, він розглядав точки з додатними і від’ємними ординатами. За допомогою методу координат Декарта подавалася геометрична інтерпретація від’ємних чисел. У такий спосіб значення від’ємних і додатних чисел зрівнювалися.

Листування Ферма з відомими математиками засвідчує, що свій метод координат Ферма розробив раніше Декарта, але останній першим опублікував свої результати.

В червні 1637 року в місті Лейден (Нідерланди) вийшов в світ твір Декарта «Міркування про метод». Одна з частин цієї роботи називалась «Геометрія». Вона здійснила великий переворот в математиці. В «Геометрії» Рене Декарт запропонував універсальний метод розв'язання математичних задач – метод координат. Згідно цього методу алгебраїчні задачі розв’язуються засобами геометрії. В той же час при розв’язуванні геометричних задач використовують теорію алгебраїчних рівнянь[38, с.22].

«Геометрія» Декарта виявилася важкою для читання і розуміння. Її неодноразово коментували і доповнювали (Ф.Дебон, Ф.Скоотен, Дж.Валліс, Й.Бернуллі та інші). Дж.Валліс, зокрема, розглядав не тільки від'ємні ординати, але й від'ємні абсциси.

У 1692 році Й.Бернуллі ввів термін «декартова геометрія». На цей час робота Ферма про його систему координат не була відома широкому загалу. Тому деякі поняття, що стосуються методу координат називають декартовими: «декартові координати», «декартова система координат», «декартове рівняння», «декартова площина».

Термін «аналітична геометрія» з'явився в 1671 р. (як назва книгиІ.Ньютона). Терміни «абсциса», «ордината» мають грецьке походження і використовувалися в теорії про конічні перерізи. В сучасному розумінні їх почав використовувати Г.Лейбніц. У кінці 17 століття він також увів термін «координати», щоб підкреслити рівноправність «абсциси» і «ординати». Але загальновживаними ці терміни стали лише з середини 18 століття. Термін «вісь абсцис» увів І. Барроу (1670), а термін «вісь ординат» – значно пізніше Г. Крамер (1750). Початок координат спочатку називали початком абсцис, а в 1679 р. Ф. де Лагір використав окремий термін «початок». Р. Декарт увів традицію невідомі величини позначати останніми буквами алфавіту, а відомі – першими.

У роботі Г. Крамера «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих» (1750) систематизовано, узагальнено і доповнено багато з результатів попередників. Тут, зокрема, Г. Крамер першим використовував систему координат, яка мала дві рівноправні вісі[22, с.103].

Отже, у 1637 році побачила світ головна математична праця Рене Декарта «Міркування про метод». У цій книзі викладалася аналітична геометрія, створення якої дало змогу перевести дослідження геометричних властивостей кривих і тіл на алгебраїчну мову, тобто аналізувати рівняння кривої в деякій системі координат.Координатний метод став справжнім переворотом у геометрії та математиці в цілому. Завдяки координатам учені отримали універсальний спосіб поставити у відповідність геометричним об'єктам алгебраїчні вирази і співвідношення. Відкриття Декарта дало науці можливість створити своєрідний словник для перекладу геометричних задач мовою алгебри з подальшою можливістю використовувати рівняння і тотожні перетворення виразів для розв'язування суто геометричних проблем[9, с.82].

1.2. Теоретичні основи навчання розв’язуванню геометричних задач методом координат

Активізація Творчої особистості учнів в процесі оволодіння математикою найефективніше здійснюється через розв’язування задач. Тому задачі з планіметрії мают розвивати в учнів конструктивнийпідхід до осмислення всього комплексу геометричних знань, а не лише формувати конструктівні навички розв’язування задач.

Суть методу координат як методу розв'язання задач полягає в тому, що задаючи фігури рівняннями і виражаючи в координатах різні геометричні співвідношення, ми можемо розв’язати геометричну задачу засобами алгебри. Та навпаки, користуючись координатами, можна тлумачити алгебраїчні і аналітичні співвідношення та факти геометрично, таким чином застосовувати геометрію до вирішення алгебраїчних задач.

Метод координат - це універсальний метод. Він забезпечує тісний зв'язок між алгеброю і геометрією, об'єднуючись, вони дають «багаті плоди», які не могли б дати, залишаючись розділеними [23, с.32].

Що стосується шкільного курсу геометрії можна сказати, що в деяких випадках метод координат дає можливість будувати докази і вирішувати багато задач більш раціонально, красивіше, ніж суто геометричними способами. Метод координат пов'язаний, правда, з однією геометричною складністю. Одна і та ж задача отримує різне аналітичне подання в залежності від того чи іншого вибору системи координат. І лише достатній досвід дозволяє вибирати систему координат найбільш доцільно.

Зв'язуючою ланкою між фігурами і числами (система координат, яка дозволяє встановити взаємнооднозначну відповідність між точками прямої (площини) і дійсними числами (парами дійсних чисел), тобто дати імена безіменним точкам. Звичайно, вибір системи координат нічим не регламентується, але, як правило, вибирають прямокутну декартову систему координат, розміщуючи її найзручніше. Після цього геометричну фігуру вважають заданою, якщо задано рівняння або нерівність, або їх система яким задовольняють координати будь-якої точки, фігури і не задовольняють координати точок, які не належать фігурі.

Суть координатного методу розв'язування геометричної задачі полягає у виборі системи координат, складанні за заданими геометричними властивостями рівнянь, нерівностей або їх систем, в проведенні алгебраїчного аналізу і в з'ясуванні геометричного змісту кінцевого результату.

Порівнюючи цей метод з алгебраїчним, можна помітити, що він істотно спрощує міркування і дозволяє розв'язувати задачі за певним алгоритмом. Проте обсяг викладу може бути значним, а інколи, що саме головне з методичної точки зору, втрачається геометрична суть задачі[26, с.17].

Методом координат розв’язують такі дві задачі:

1) знаючи деякі геометричні властивості фігури, знаходять її рівняння і досліджують інші властивості;

2) знаючи рівняння фігури, знаходять її властивості.

На практиці нерідко виникає потреба розв’язати обидві задачі разом – спочатку за деякими властивостями фігури скласти її рівняння, а потім, дослідивши отримане рівняння, встановити нові властивості даної фігури. Розглянемо приклад.

Задача 1.1. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, вписаного в коло радіуса 5 см, якщо центр цього кола віддалений від основи трикутника на 3 см.

Розв’язання

Нехай ABC – даний рівнобедрений трикутник з основою AC (рис.1.2.), точка O – центр описаного кола. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок лежав у центрі кола, вісь OY містила висоту, проведену до основи AC трикутника, а вісь OX проходила паралельно цій основі (рис.1.3.).

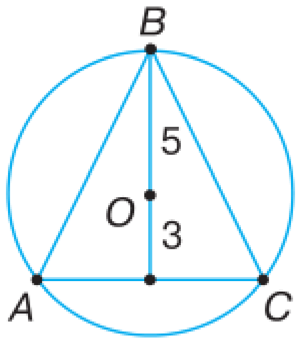


Рис.1.2.

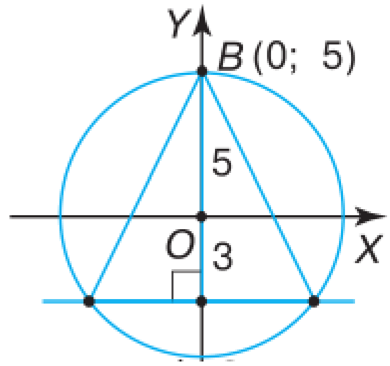


Рис.1.3.

Тоді дане коло задається рівнянням $x^2 + y^2 = 25$, а вершини трикутника мають координати: A $(-x_0; -3)$, B $(0;\ 5)$, C $(x_0; -3)$, де $x_0 > 0$. Точка C лежить на даному колі, тому її координати задовольняють його рівняння: ${x_0}^2 + (-3)^2 = 25$.

Звідси дістанемо: $x_0 = 4$, A $(-4; -3)$, C $(4;\ -3)$.

За координатами вершин трикутника знайдемо довжини його сторін: $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$ (см), $\mathrm{AC} = 8$ см.

Щоб застосувати метод координат:

1) накресліть задану фігуру та введіть прямокутну декартову систему координат (для цього вкажіть розміщення початку координат та осей абсцис і ординат відносно даної фігури);

2)визначте координати точок даної фігури;

3) скористайтеся відомими формулами [13, с.105].

Отже, розв'язуючи задачу методом координат, розглядувані фігури розміщують на координатній площині. Приписавши окремим точкам фігур координати, а лініям рівняння, далі обчислюють координати інших точок, виводять рівняння інших ліній. Зіставивши ті й ті координати точок і рівняння, приходять до відповіді[15, с.112].

1.3. Аналіз вивчення методу координат за новими освітніми вимогами та шкільними підручниками

Вивчення декартових координат у 5-6 класах. Підготовча робота до введення координатної площини починається вже в 5 класі, де розглядають поняття «числовий промінь» і показують, як зобразити на ньому натуральні числа.

У 6 класі для зображення додатних і від'ємних чисел упроваджується координатна пряма. Учні мають усвідомити, що положення точки *A* на прямій цілком визначається одним числом, яке називають координатою точки і позначають *A* (3), *B(7,* 8), *M(x).* Слід звернути увагу учнів, що одним числом визначають положення точки не лише на прямій. Наприклад, положення супутника на траєкторії, якою він рухається навколо Землі, визначається числом, що дорівнює відстані, яку він подолав від певної точки траєкторії; положення рухомого транспорту на залізниці чи автостраді можна визначити за номером кілометрового стовпа, який дорівнює відстані від певного пункту.

Після введення поняття координатної площини (на прикладі залу кінотеатру) можна навести інші приклади застосування системи координат: географічна карта (за допомогою широти і довготи визначають положення будь-якого населеного пункту), шахова дошка (положення фігури визначається двома символами - малою літерою латинського алфавіту і цифрою). Використання двох символів для позначення положення шахової фігури на дошці (наприклад, король *a2)* дає можливість транслювати перебіг шахових змагань з будь-якого міста земної кулі.

У 6 класі поняття про координати точки на прямій і на площині вводять описово на прикладах. Тут ще не ставлять за мету застосовувати означення абсциси й ординати. Важливо, щоб учні усвідомили, що координата точки на прямій - це число, модуль якого дорівнює відстані точки прямої від початку відліку - точки О. Модулі першої та другої координат точки *М* на координатній площині задають відстані цієї точки від осі *x* і осі *y*.

Уся система вправ на цьому етапі має бути спрямована на формування вміння розв'язувати пряму й обернену задачі па визначення положення точки на координатній прямій і площині.

Висловимо зауваження відносно термінології та символіки, пов'язаних з методом координат. На жаль, у шкільних підручниках щодо цього немає єдності. Так, у підручнику застосовано термін «числова вісь» та його синоніми «числова пряма», «координатна вісь». У підручнику використано термін «координатна пряма» в тому самому розумінні. У посібнику з алгебри і початків аналізу вжито два терміни: «числова пряма» і «координатна пряма», причому вони мають різний зміст. Координатна пряма - це пряма, на якій обрано початок відліку, напрямок і одиницю відліку. Числова пряма - це множина *R* всіх дійсних чисел. Числова пряма одна, а координатних прямих багато. У підручнику з геометрії використано термін «осі координат». По-різному позначаються осі координат. У підручнику з геометрії, підручниках з математики для 5 - 6 класів застосовано позначення «вісь х», «вісь *у»,* а в підручнику з алгебри і початків аналізу , підручнику з геометрії - «вісь Ох», «вісь Оу».

На відміну від 6 класу в курсі геометрії 9 класу тему «Декартові координати на площині» вивчають на вищому теоретичному рівні та в ширшому застосуванні. Зокрема, вводять означення абсциси х і ординати у точки А [37, с.307].

Навчання застосування самого методу координат для вирішення завдань відбувається в курсі геометрії 9 класу. Для цього спочатку розкриваються основні етапи застосування методу, а потім на прикладі низки завдань показується безпосереднє застосування методу координат.

Тема «Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі» є комплексною, у старшій школі вивчається в 10 класі, та розглядає такі основні моменти:

- Прямокутна система координат у просторі.
- Відстань між точками. Координати середини відрізка.
- Поділ відрізка у даному відношенні.
- Вектори у просторі. Рівність векторів.
- Колінеарність векторів. Компланарність векторів.
- Операції над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів.
- Розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами.Кут між векторами.
- Рівняння площини, сфери.
- Застосування методу координат і векторів до розв'язування геометричних задач.

Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учня з теми: Метод координат на площині

Учень/учениця:

- ✓ наводить приклади співвідношень, указаних у змісті;
- ✓ пояснює, як можна задати на координатній площині пряму, коло;
- ✓ формулює теореми провідстань між двома точками, координати середини відрізка;
- ✓ записує та пояснюєформули координат середини відрізка;
- ✓ записує та пояснює відстані між двома точками;
- ✓ записує та пояснює рівняння кола, прямої;
- ✓ зображує та знаходить на малюнках геометричну фігуру (пряму, коло) за її рівнянням у заданій системі координат;
- ✓ обчислюєкоординати середини відрізка;

- ✓ обчислює відстань між двома точками, заданих своїми координатами;
- ✓ доводить теорему про відстань між двома точками;
- ✓ доводить теорему про координати середини відрізка;
- ✓ застосовує вивчені формули й рівняння фігур до розв’язування задач.[30].

Отже, основною метою вивчення декартових координат в школі є формування поняття про координати точки на прямій і площині, вміння знаходити точку за її координатами і розв'язувати обернену задачу, знаходити відстань між двома точками і координати середини відрізка, застосовувати метод координат до розв'язування найпростіших задач і в подальшому вивченні курсу математики та суміжних предметів [37, с.306].

Особливості викладання даної теми згідно діючих шкільних підручників

Шкільні підручники рекомендовані Міністерством освіти і науки України (наказ МОН України № 804 від 07.06.17 р.)

1) Істер О. С. Геометрія: Підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. / О.С.Істер.— К. «Генеза», 2017. — 243 с.: іл.

Розділ «Метод координат на площині» є першим із п’яти поданих для вивчення у цьому підручнику і поділяється на 5 пунктів.

Кожний параграф розділу складається з теоретичного матеріалу, завдань різного рівня складності, прикладів застосування зазначеного теоретичного матеріалу для розв'язування задач, контрольних запитань для самоперевірки засвоєння теоретичного матеріалу та завдань для виконання в класі і самостійного розв'язування, підготовка до нової теми, повторення вивченого матеріалу. Для забезпечення безперервності вивчення матеріалу розділ завершується рубрикою «Завдання для перевірки знань», яка містить певну кількість завдань відповідного змісту.

Слід відзначити велику кількість завдань, структурованих з методичної точки зору. Виконано розподіл вправ на ті, що рекомендуються для виконання в класі, і вправи для домашнього завдання. Окремо позначено завдання, які можуть бути розв'язані усно. Кожному завданню приписано його рівень складності відповідно до класифікації, яка застосовується для позначення рівнів навчальних досягнень учнів: початковий і середній рівні навчальних досягнень, достатній рівень, високий рівень.

Параграф містить початкові відомості з аналітичної геометрії. Тут передбачено знаходження відстані між точками на площині, вивчення рівнянь прямої і кола на площині та використання відповідного математичного апарату для розв'язування задач.

Учні мають засвоїти поняття про рівняння фігури, усвідомити зв'язок між геометричним образом на координатній площині і його аналітичним заданням, тобто засвоїти «мову рівнянь» у геометрії. Вивчення цієї теми має на меті розуміння і засвоєння методу координат. Учні мають засвоїти відмінність між фігурою, яка є графіком функціональної залежності $y = f(x)$, і фігурою, яка не може бути графіком функціональної залежності і для аналітичного задання якої використовується рівняння виду $f(x, y) = 0$, зокрема, на прикладі вертикальної прямої і кола.

2) Мерзляк А. Г. Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір.— Х.: Гімназія, 2017. — 308 с.: іл.

Параграф «Декартові координати на площині» є четвертим із семи поданих для вивчення у цьому підручнику і поділяється на 5 пунктів. Метод координат розглядається в окремому пункті.

Додатковим матеріалом порівняно з загальноосвітніми класами є рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки; умови паралельності і перпендикулярності двох прямих; формула відстані від точки до прямої; формули координат точки, яка ділить відрізок у даному відношенні; а також подана формула Лейбніца. Параграф завершується рубрикою «Коли зроблено уроки», який містить додатковий матеріал та певну кількість завдань відповідного змісту.

3) Бурда М.І. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. - К. : УОВЦ, 2017. – 224 с.

Розділ «Метод координат» є першим із п'яти поданих для вивчення у цьому підручнику і поділяється на 6 пунктів.

Кожний пункт параграфу містить теоретичну частину, рубрику «Дізнайся більше», рубрику «Згадайте головне», завдання для виконання різної складності та рубрику «Застосуйте на практиці». Задачі підручника мають чотири рівні складності — початковий, середній, достатній і високий.

Науковість зміступідручника забезпечена, насамперед, логічно послідовним розміщенням навчального матеріалу, коректним формулюванням означень понять і теорем, достатнім рівнем строгості доведень. Доведення теорем підручника не лише строгі, лаконічні, але й посильні, зрозумілі учням. До кожної теореми дається скорочений запис, а доведення поділені на смислові блоки, що покращує усвідомлення їх учнями.

Доступністьучням навчальних текстів, можливість самостійно їх опрацювати — одна з особливостей підручника. Навчальний матеріал спирається на наочність і геометричну інтуїцію учнів, на їх життєвий досвід, що робить його доступним. Самостійно оволодіти навчальним матеріалом допоможе і підкріплення його малюнками, які виконують не лише ілюстративну, а й евристичну роль — на малюнках кольором виділяються дані і шукані величини, допоміжні будови тощо.

Матеріал параграфу ґрунтується на понятті геометричного місця точок. Це поняття лежить і в основі принципу задання координат точок на площині. Адже координати a і b точки A є координатами точки перетину геометричних місцьx $= \mathrm{a}$ і $\mathrm{y} = \mathrm{b}$.

Основна увага під час вивчення матеріалу розділу звертається на вироблення вмінь учнів розв'язувати задачі двох видів: 1) знаходити рівняння геометричної фігури за даними її властивостями; 2) знаходити властивості геометричної фігури за даним її рівнянням. Алгебраїчним апаратом, який застосовується під час складання рівнянь геометричних фігур і вивчення властивостей фігур за їх рівняннями, є формули для обчислення координат середини відрізка і відстані між точками. У процесі виведення рівнянь кола і прямої, як і при знаходженні геометричних місць точок, обґрунтовується справедливість двох взаємнообернених тверджень: координати будь-якої точки фігури задовольняють її рівняння і будь-які два числа, що задовольняють рівняння фігури, є координатами деякої точки фігури.

Наприкінці вивчення розділу учні узагальнюють уміння виражати геометричні співвідношення в розміщенні точок через алгебраїчні співвідношення між їх координатами і знайомляться з новим методом розв'язування геометричних задач - методом координат.

4) Єршова А.П. Геометрія. 9 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / А.П.Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф.Крижановський, С.В.Єршов. - Х.: Ранок, 2017. – 256 с.: іл.

Розділ «Координати на площині» є другим із п’яти поданих для вивчення у цьому підручнику і поділяється на 3 пункти. Метод координат розглядається в окремому пункті.

Кожний пункт параграфу складається з теоретичної частини, прикладів застосування зазначеного теоретичного матеріалу для розв'язування задач, усних вправ, графічних вправ, письмових вправ, вправ для повторення, задач для підготовки до контрольної роботи та підсумків у вигляді таблиць. Письмові вправи поділяються на три рівні складності.

У порівнянні з традиційними підходами до розгляду відповідного навчального матеріалу запропоновано декілька важливих інновацій. Значно збільшено кількість практичних вправ та задач, урізноманітнено задачі на готових кресленнях. Найбільш складні з точки зору обґрунтування теореми супроводжуються в основному тексті зрозумілими для пересічного учня загальними схемами міркувань, а відповідні строгі доведення подаються в Додатках.

Ілюстративний матеріал підручника забезпечує реалізацію науково-методичної концепції через унаочнення базових геометричних конфігурацій. До всіх рисунків, що супроводжують теоретичний матеріал, подаються підписи зі стислим переказом змісту геометричної конфігурації.

Наприкінці кожного розділу міститься підсумковий огляд його змісту у вигляді таблиць, які наочно ілюструють змістовно-логічні та структурно-функціональні зв'язки між елементами навчального матеріалу. Крім того, наприкінці розділу пропонуються контрольні запитання і типові задачі для підготовки до контрольних робіт[19].

5) Бевз Г. П. Геометрія. Поглиблений рівень: Підручн. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, В.М. Владіміров, Н.Г. Владімірова.— К.:Видавничий дім «Освіта», 2018. — 272 с.: іл.

Геометрія складається з двох частин: планіметрії і стереометрії. У попередніх класах ви вивчали в основному планіметрію, тепер переходите до вивчення стереометрії (від грец. στερεοζ — просторовий), у якій розглядають властивості геометричних фігур у просторі. Підручник складається з чотирьох розділів, кожний із яких розпочинається короткими відомостями про творців відповідних теорій, про зміст навчального матеріалу, а також характеристикою окремих професій , які ви можете обрати у майбутньому. Розділи містять теоретичний матеріал і задачі. Читаючи теорію, основну увагу слід звертати на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. Це нові поняття і твердження, засвоївши які ви зможете впевнено розв’язувати абстрактні та прикладні задачі. Для тих, хто хоче знати більше, призначена рубрика для допитливих , яку можна використати для поглиблення знань, розширення кругозору, виконання навчальних проектів та написання дослідницьких робіт[8].

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИВЧЕННЯ МЕТОДУ КООРДИНАТ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Методика навчання учнів розв’язувати найпростіші задачі в координатах

У системі загальної середньої освіти одне із основних місць займає математика, де закладаються розумові, моральні та емоційно-вольові якості особистості. Курс математики є основою для осмисленого засвоєння системи математичних знань, формування умінь і навичок і отримання математичної освіти в цілому.

Першим і найважливішим етапом розв'язування геометричної задачі являється побудова рисунка. Не можна навчитися розв'язувати досить змістовні геометричні задачі без міцних навичок по зображенню "добрих" рисунків. Потрібна звичка - не починати розв'язувати задачу, поки не зроблений "великий і красивий" рисунок, який задовольняє і математичним потребам, і естетичним критеріям. Звертаємо увагу на те, що мова йде про етап власне розв'язування задачі, а не про оформлення знайденого розв'язку на чистовику.

Розглядаючи кожну задачу разом з її методом розв'язування, слід виділяти так звані елементарні задачі, тобто задачі на одну дію, на застосування відомої теореми чи формули. Під "дією" розуміємо також і розв'язування одного лінійного чи квадратного рівняння. Виділення елементарних задач педагогічно виправдано і корисно, оскільки дуже часто розв'язування більш складних, більш змістовних геометричних задач може бути, як із "цеглинок", складене із задач найпростіших.

Отримали дві складові, які визначають уміння розв'язувати геометричні задачі: рисунок плюс метод. Додамо сюди третю складову: володіння певним об'ємом допоміжних геометричних фактів і теорем, наявність активно використовуваного запасу опорних задач. Справа в тому, що в теоретичну частину шкільного курсу геометрії включені в основному теореми необхідні для подальшого його вивчення. Більшість теорем мають лише теоретичне значення. В зв'язку з цим виникає необхідність у виділенні деякої кількості так званих опорних задач, додаткових до курсу теорем, які ілюструють той чи інший метод або прийом розв'язування задач.

Переважна більшість шкільних задач виконується за певними алгоритмами. Оволодіння учнями цими алгоритмами - важливе завдання навчання математики. Разом з тим потрібно пам'ятати, що розв'язування задач - творчий процес, і його не завжди можна алгоритмізувати. Як показують спостереження, найважливішу роль в даному питанні відіграють практика і навички. Але не правильно було б думати, що все залежить тільки від кількості розв'язаних задач. Велику роль відіграє система запропонованих учням задач і ті зауваження, якими супроводжує їх вчитель, і загальні поради щодо пошуків розв'язань, складання планів, оформлення розв'язань.

Наведемо приклад схеми розв'язування геометричних задач, якою можуть користуватися учні при вивченні геометрії.

Загальна схема розв'язування геометричних задач:

1. Уважно прочитати задачу і записати що в ній дано, і що вимагається.
2. Якщо йдеться про геометричні фігури, то накреслити їх, ввести позначення.
3. Скласти план розв'язування задачі.
4. Якщо такий план розв'язування задачі скласти не можна, то слід прочитати ще раз задачу, сформулювати її своїми словами, розчленувати на частини.
5. Замінити кожне поняття його означенням.
6. З'ясувати як пов'язані дані в задачі величини.
7. Записати висновки, які випливають з умови, розв'язати частину задачі.
8. Спробувати розв'язати задачу з "кінця".

9. Після розв'язування переглянути зроблене. Чи не має в міркуваннях зайвого? Чи не можна їх спростити? [26, с.5].

Отже, розв’язування задач – це одна з активних форм навчання, у процесі якої учні ознайомлюються з новими математичними закономірностями, намагаються дещо по-іншому подивитися на вже відомі їм теоретичні факти, вчаться самостійно здобувати знання, розвивають логічне мислення.

Система координат — це площина або простір, в якому визначений початок координат та осі, що є необхідними передумовами для обчислення координат точки.Кількість чисел, необхідних для однозначного визначення будь-якої точки простору, визначає його вимірність. Обов'язковим елементом системи координат є початок координат — точка, від якої ведеться відлік відстаней. Іншим обов'язковим елементом є одиниця довжини, яка дозволяє відраховувати відстані.

Існують різні системи координат:

1. Декартова система координат. Найпоширенішою системою координат у математиці є декартова система координат (рис.2.1.), названа так на честь Рене Декарта. Декартова система координат задається початком координат і двома векторами, які визначають напрям координатних осей. Кожна точка простору задається числами, які дорівнюють віддалі від даної точки до координатних площин. Координати декартової системи на площині заведено позначати $(x; y)$.

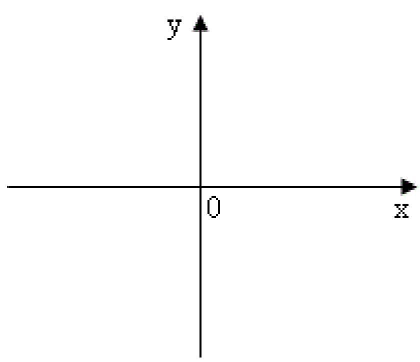


Рис.2.1.

2. <u>Криволінійна або косокутна система координат.</u> Виходячи з декартової системи координат, можна визначити криволінійну систему координат, в якої координатні осі не перпендикулярні.

На рис.2.2. зображена декартова косокутна система координат.

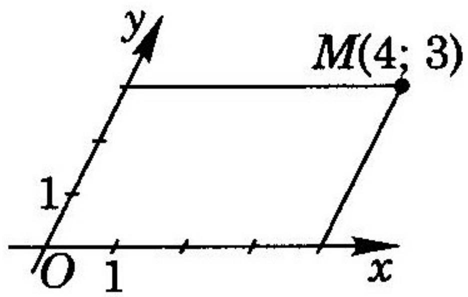


Рис.2.2.

Як визначаються координати точки в такій системі, зрозуміло з рисунка. У деяких випадках буває зручно змінювати не тільки кут між осями, а й брати по осях різні одиниці масштабу.

Точки і лінії в декартовій системі координат зручно будувати на папері в клітинку, де є координатна «сітка».

На рис. 2.3. ірис. 2.4. зображені для порівняння координатні сітки для звичайної прямокутної системи координат і для косокутної. У другому випадку замість квадратів маємо паралелограми.

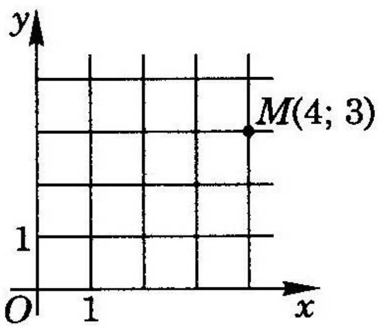


Рис.2.3.

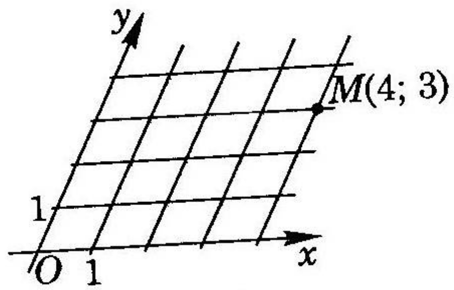


Рис.2.4.

Цікаво, що багато формул, виведених для прямокутної декартової системи координат, залишаються істинними і для косокутної.

3. <u>Полярна система координат.</u>Є координати, які більш істотно відрізняються від декартових. Прикладом такої системи координат на площині є полярна система координат, в якій положення точки задається двома числами: відстанню ρ між точкою та початком координат, і кутом φ між променем, який сполучає початок координат із точкою та обраною віссю (рис.2.5.)

Декартові та полярні координати точки зв'язані між собою формулами: $\begin{cases} x = \rho \sin\varphi\,; \\ y = \rho \cos\varphi. \end{cases}$

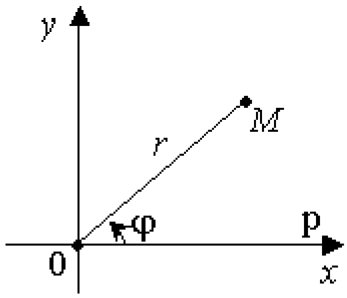


Рис.2.5.

Полярні координати точки визначаються у такий спосіб.

На площині береться числова вісь *Ox*. Початок координат цієї осі (точкаО*)* називається полюсом, а сама вісь *Ox* — полярною віссю.

Для визначення положення точки *M* у полярній системі координат вказують відстань від полюса до цієї точки і напрямок, у якому вона знаходиться (рис.2.6.).

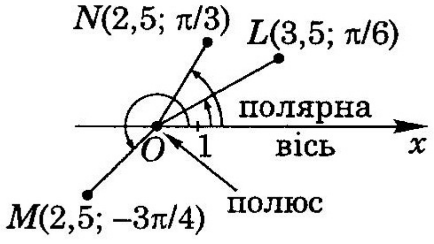


Рис.2.6.

Відстань від точки до полюса називаєтьсяполярним радіусом точки і позначається грецькою літероюρ(читається «ро»). Напрямок задається кутом повороту (проти годинникової стрілки) від променя *Ox* до променя *OM.* Цей кут називаєтьсяполярним кутом точки і позначається грецькою літероюφ («фі»). Полярні кути прийнято виражати у радіанній мірі.

На рис.4 полярний радіусρ точки *M* дорівнює 2,5, а полярнии кут φ дорівнює $\frac{-3\pi}{4}$.

Такий спосіб указування місця є дуже простим і часто застосовується. Наприклад, аби вказати дорогу людині, яка заблукала в лісі, їй кажуть: «Від горілої сосни (полюс) зверніть на схід (напрям), пройдете кілометрів зо два (відстань), і буде сторожка (точка)». Хто займався у туристичних секціях, легко зрозуміє, що ходьба по азимуту ґрунтується на тому самому принципі, що й полярні координати.

Таким чином, у полярній системі координат положення точки на площині визначають два числа (точніше,упорядкована пара чисел) $(\rho;\varphi)$, які й називаютьсяполярними координатами точки [17, с.89].

Прямокутна система координат на площині, координати точки

Найпоширенішою системою координат у математиці є декартова система координат, названа так на честь Рене Декарта. Розглянемо її детальніше.

Координатною прямою називається пряма, на якій вибрано напрям, початок координат, одиницю вимірювань (масштаб).

Координатою точки на координатній прямій називається число, яке дорівнює відстані від цієї точки до початку координат, якщо точка знаходиться на додатній півосі, і протилежне до нього у іншому випадку.

Виберемо на площині дві взаємноперпендикулярні прямі x і y, вони називаються осями координат (рис.2.7.). Вісь x (як правило, вона горизонтальна) називають вісь абсцис, а вісь y - вісь ординат. Точку О перетину осей координат називають початком координат. Вона розбиває кожну з осей координат на дві півосі. На кожній з осей вибираємо одиницю вимірювання відрізків. Таким чином на площині задано прямокутну систему координат [29, с.79].

Прямокутна система координат на площині вважається заданою, якщо на площині вказано:

а) дві взаємно перпендикулярні прямі, на кожній із яких вибрано додатній напрям - осі ординат (вісь абсцис і вісь ординат). Точка О перетину цих координат називається початком координат;

б) одиничний відрізок.

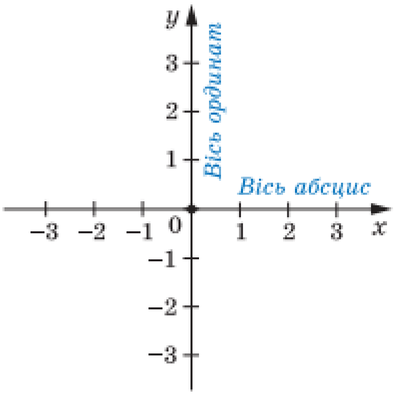


Рис.2.7.

Кожній точці A площини поставимо у відповідність пару чисел - координати точки. Для цього проведемо через точку A пряму, паралельну осі y, вона перетинає вісь x в деякій точці A_x (рис.2.8.). Абсцисою точки A називають число x, модуль якого дорівнює відстані відточки O до точки A_x. Причому, якщо A_x належить додатній півосі, то $x > 0$, а якщо A_x належить від'ємній півосі, то$x < 0$. якщо ж точка A належить осі y, то її абсциса дорівнює нулю.

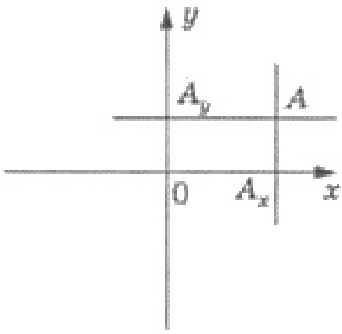


Рис.2.8.

Проведемо через точку A пряму, паралельну осі x, вона перетне вісь y в деякій точці A_y (рис.2.8.). Ординатою точки A називають число y, модуль якого дорівнює відстані від точки O до точки A_y. Причому, якщо A_y належить додатній півосі, то $y > 0$, а якщо A_y належить від'ємній півосі, то $y < 0$. Якщо ж точка A належить осі x, то її ордината дорівнює нулю.

Координати точки записуються у дужках поряд з її буквеним позначенням $A(x; y)$. На першому місці пишуть абсцису точки, а на другому - її ординату. Абсцису точки А можна позначити так: x_A, а її ординату y_A. Ці позначення зручно використовувати при розв'язанні задач, коли кожну з координат точки знаходять окремо. Якщо, наприклад, $A(-4; 1)$, то $x_A = -4$; $y = 1$.

Отже, **прямокутними координатами точки площини** називаються координати ортогональних проекцій цієї точки на координатні осі, записані у певному порядку.

Проекція на першу вісь (вісь абсцис) позначається, звичайно, через x, а на другу (вісь ординат) – через y. Вибір системи координат на площині будемо позначати (O; x; y)

Введення координат на площині дозволяє орієнтуватися на ній за допомогою чисел.

Осі координат розбивають площину на чотири частини, які називають координатними чвертями (рис. 2.9).

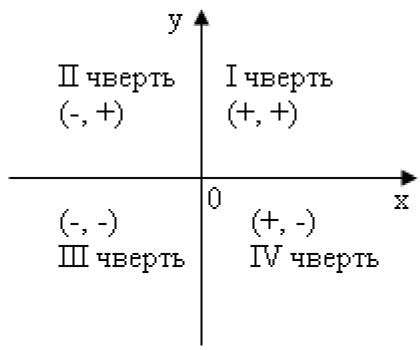


Рис.2.9.

Інколи координатні чверті називають ще координатними кутами. В межах однієї координатної чверті знаки обох координат зберігаються. Ці знаки показано на рисунку 2.9.

Отже, **прямокутна система координат на площині** складається з двох перпендикулярних координатних прямих (осей координат) із спільним початком координат і однаковими одиницями масштабу.

Відстань між точками

Задача 2.1. Дано три точки: A(4;0), B(1;–3), C(–1;3). Чи існує трикутник з вершинами у даних точках?

Розв'язання

Задамо прямокутну декартову систему координат і побудуємо у ній дані точки за їхніми координатами (рис. 2.10.). Очевидно, що точки A, B і C не лежать на одній прямій. Тому трикутник ABC існує.

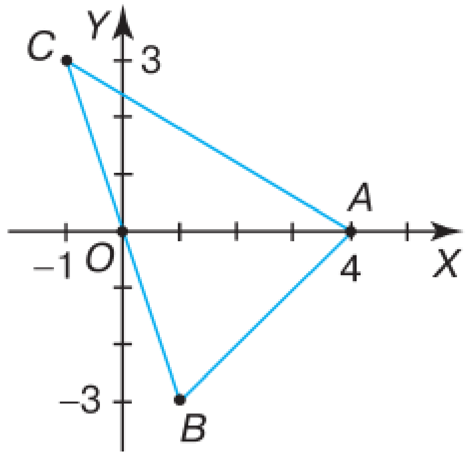


Рис.2.10.

Чи можна строго обґрунтувати висновок, який отримали у задачі? Так. Наприклад, скориставшись нерівністю трикутника. Але для цього треба знати, як знаходити відстань між двома точками за їх координатами.

Теорема 2.1*(про відстань між двома точками із заданими координатами)*

Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат.

Дано: XOY – прямокутна декартова система координат (рис.2.11.), A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$.

Довести: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

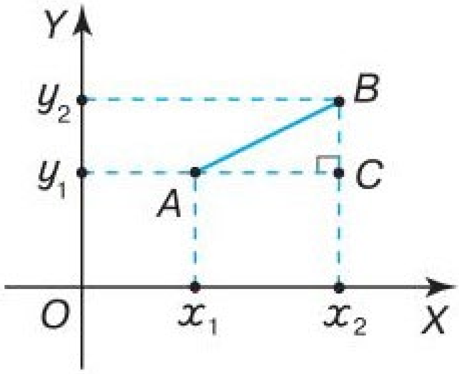


Рис.2.11.

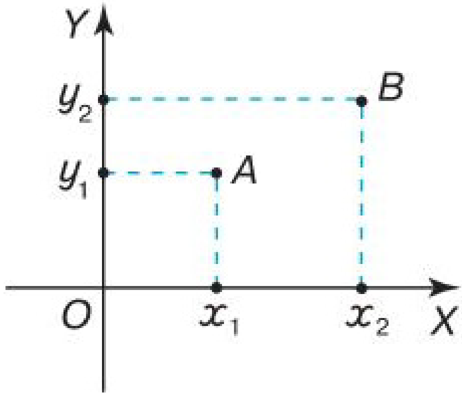


Рис.2.12.

Доведення. Нехай точки A і B містяться у першій координатній чверті,причому $x_1 < x_2$ і $y_1 < y_2$ (рис.2.11.). З'єднаємо точки A і B відрізком та проведемо через них прямі, паралельні осям координат (рис.2.12.).

Нехай C –точка перетину цих прямих. Утворився прямокутний трикутник ABC, у якого$\angle$C прямий, катет AC $= x_2 - x_1$,катет BC $= y_2 - y_1$, довжина гіпотенузи AB є шуканою відстанню.

За теоремою Піфагора,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Звідси $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ [4, с.90].

Приклад 2.1.

Вершини чотирикутника ABCD мають координати A(-2; 1), B(0; 4), C(4; 1), D(2; -2). Доведіть, що ABCD — паралелограм.

Розв'язання (1-й спосіб)

Як відомо, за ознакою паралелограма чотирикутник, протилежні сторони якого попарно рівні, є паралелограмом. Знайдемо довжини сторін чотирикутника ABCD:

$AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$,

$BC = \sqrt{(0-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$,

$CD = \sqrt{(4-2)^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{13}$,

$AD = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5,$

Отже, $AB = CD, BC = AD,$ тобто чотирикутник $ABCD$ — паралелограм за ознакою.

Інший спосіб розв'язування цієї задачі розглянемо далі [9, с.86].

Приклад 2.2.

Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки $A\,(-1;7)$, $B\,(1;3)$ і $C\,(5;5)$ є рівнобедреним прямокутним.

Розв'язання

Знайдемо довжини сторін даного трикутника:

$AB = \sqrt{(1-(-1))^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20},$

$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20},$

$AD = \sqrt{(5-(-1))^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$

Отже, $AB = BC$, тобто ΔABC – рівнобедрений.

Оскільки$AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, то ΔABC – прямокутний [28, с.81].

Отже, відстань між двома точками$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, обчислюється за формулою:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координати середини відрізка

Знаючи координати кінців відрізка, можна знаходити не тільки його довжину, а й координати його середини.

Теорема 2.2*(про координати середини відрізка).*

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.

Дано: XOY – прямокутна декартова система координат (рис.2.13.), $A\,(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$, точка M $(x; y)$ – середина відрізка AB.

Довести:$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$

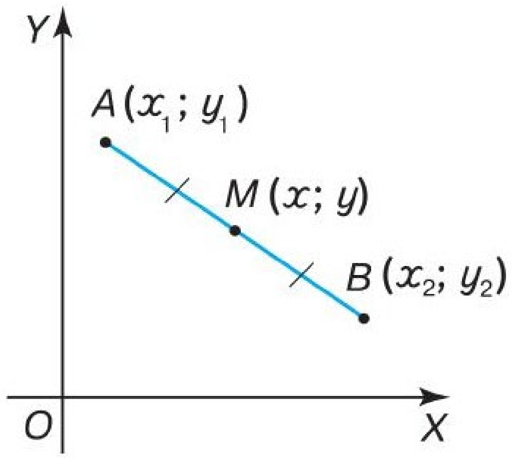


Рис.2.13.

Доведення. Нехай кінці відрізка містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (рис.2.13.). Через точки А, В і М проведемо прямі, паралельні осі ОХ (рис.2.14.). Точки їх перетину з віссю OY позначимо відповідно A_1, B_1 і M_1. Чотирикутник AA_1B_1B – трапеція з основами $AA_1 = x_1$, $BB_1 = x_2$. За побудовою, $MM_1 = x$. Оскільки AM = MB (за умовою) і $MM_1 \| AA_1 \| BB_1$ (за побудовою), то MM_1 – середня лінія трапеції AA_1B_1B.

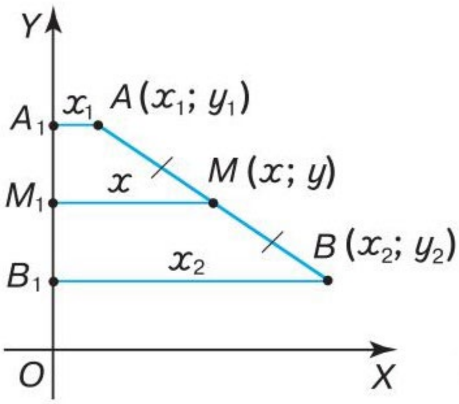


Рис.2.14.

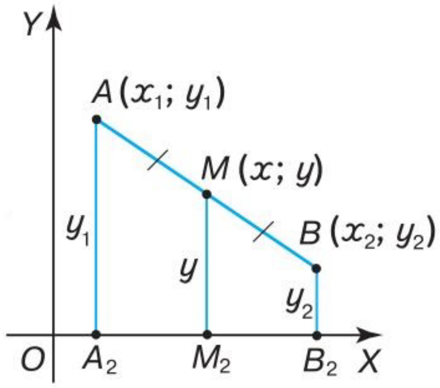


Рис.2.15.

Тому $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Аналогічно доводимо, що $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Для цього через точки A, B і M проведемо прямі, паралельні осі OY (рис.2.15.). Точки їх перетину з віссю OX позначимо відповідно A_2, B_2 і M_2. Чотирикутник AA_2B_2B – трапеція з основами $AA_2 = y_1$, $BB_2 = y_2$. За побудовою, $MM_2 = y$. Оскільки AM = MB (за умовою) і $MM_2 \| AA_2 \| BB_2$ (за побудовою), то MM_2 – середня лінія трапеції AA_2B_2B.

Тому $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Чи залежать формули координат середини відрізка від розміщення його кінців у системі координат? Не залежать.

Задача 2.2. Знайдіть довжину медіани AM трикутника з вершинами у точках: A (–1; –1), B (1; 4),C (3; 2).

Розв'язання

Точка M є серединою сторони BC (рис.2.16.), тому вона має координати: $x = \frac{1+3}{2} = 2,\ y = \frac{4+2}{2} = 3$.

Довжина медіани AM дорівнює відстані між точками A і M.

Отже, $AM = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

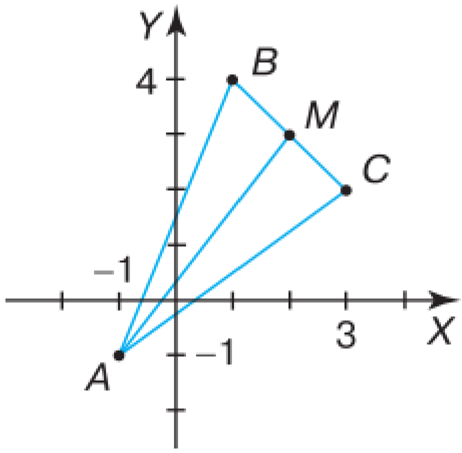


Рис.2.16.

Щоб знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин, визначте координати основи медіани та знайдіть відстань від цієї точки до протилежної вершини трикутника [13, с.90].

Приклад 2.3.

Точка $M(2;-5)$ – середина відрізка AB, $A(-1;3)$. Знайдіть координати точки B.

Розв'язання

Позначимо $(x_B;\ y_B)$ - координати точки B, $(x_A;\ y_A)$ - координати точки A, $(x_M;\ y_M)$ - координати точки M.

Оскільки $\frac{x_A+x_B}{2}=x_M$, то маємо $\frac{-1+x_B}{2}=2; -1+x_B=4; x_B=5.$

Аналогічно $\frac{y_A+y_B}{2}=y_M$, то маємо $\frac{3+y}{2}=-5;\ y_B=-13.$

Відповідь: $B(5;-13)$ [14, с.81].

Приклад 2.4.

Вершини чотирикутника ABCD мають координати A(-2;1), B(0;4), C(4;1), D(2;-2). Доведіть, що ABCD — паралелограм.

Розв'язання (2-й спосіб)

Як відомо, за ознакою паралелограма чотирикутник, діагоналі якого точкою перетину діляться навпіл, є паралелограмом.

Знайдемо координати середин діагоналей AC і BD даного чотирикутника ABCD.

Середина відрізка AC має координати $x=\frac{-2+4}{2}=1,\ y=\frac{1+1}{2}=1.$

Середина відрізка BD має координати $x=\frac{0+2}{2}=1,\ y=\frac{4+(-2)}{2}=1.$

Таким чином, відрізки AC і BD мають спільну середину (1;1), тобто чотирикутник ABCD — паралелограм за ознакою[9, с.85].

Отже, поділ відрізка M_1M_2 в даному відношені λ точкою $M(x,y)$, де

$$\mathrm{M_1M}=\lambda\mathrm{MM_2}$$

координати якої знаходять за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка $M(x,y)$ ділить відрізок M_1M_2 по полам, то $\lambda=1$.

Приклад 2.5.

Знайти безліч точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є величина постійна. Позначимо дані точки через A і B. Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox збігалася з прямою AB, а початком координат служила точка A. (Вміння оптимально вибирати систему координат). Припустимо AB = a, тоді у вибраній системі координат A (0,0), B (a, 0). (Вміння знаходити координати заданих точок) Точка M (x, y) належить шуканого безлічі тоді тільки тоді, коли AM^2- -MB^2 =b^2 де b - постійна величина (Вміння переводити геометричний мову на аналітичний, складати рівняння фігур). Використовуючи формулу відстаней між двома точками, отримуємо:

$$AM^2 = x^2 + y^2, MB^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$AM^2 - MB^2 = 2ax - a^2 = b$$

(Вміння обчислювати відстань між точками, заданими координатами), або $x = \frac{b+a^2}{2a}$. Дане рівняння є рівнянням прямої, паралельної осі Oy і віддаленої від точки A на відстань $d = \frac{|b+a^2|}{2a}$. (Вміння бачити за рівнянням конкретний геометричний образ) Неважко бачити, що і для вирішення цього завдання необхідно оволодіння перерахованими вище уміннями. Крім того, для вирішення наведеної задачі, а також і інших завдань важливо вміння «бачити за рівнянням» конкретний геометричний образ, яке є зворотним до вміння складати рівняння конкретних фігур. Виділені вміння є основою при вирішенні і більш складних завдань.

2.2. Використання рівняння фігур до розв'язування геометричних задач методом координат

Рівняння фігури на площині.

Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними x і y, якщо виконуються умови:

1) координати будь-якої точки задовольняють рівняння;

2) будь-яка пара чисел виразу $(x;\ y)$, що задовольняє це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

Так, наприклад, з курсу алгебри знайомо, що $y = \frac{6}{x}$ рівняння гіперболи, а $y = x^2 - 4$ - рівняння параболи.

Рівняння кола

Коло - це множина всіх точок площини, які лежать на даній додатній відстані (радіус) від даної точки площини, яка зветься центром.

Теорема 3.1*(про рівняння кола).*

Коло з центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом R задається рівнянням:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Дано: XOY – прямокутна декартова система координат (рис.2.17.), коло з центром $C(x_0\ ; y_0)$ і радіусом R .

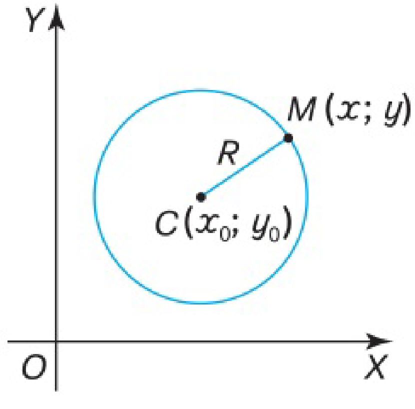


Рис.2.17.

Довести: дане коло задається рівнянням

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Доведення. Візьмемо довільну точку M(x; y) на колі.

За означенням кола, CM = R або $CM^2 = R^2$. Виразивши відстань CM через координати точок C і M, дістанемо:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2 \quad (2.1)$$

Оскільки точка M – довільна точка кола, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки кола задовольняють рівняння (2.1).

Навпаки, нехай координати деякої точки $M_1(x_1; y_1)$задовольняють рівняння (2.1). Тоді справджується рівність $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2$ або $R = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Остання рівність показує, що точка $M_1(x_1; y_1)$ віддалена від центра кола – точки $C(x_0; y_0)$ на відстань R, тобто точка $M_1(x_1; y_1)$належить цьому колу.

Наслідок. Якщо центр кола міститься у початку координат, то рівняння кола має вигляд: ${x_1}^2 + {y_1}^2 = R^2$.

Справді, початок координат O має координати$(0; 0)$, тому$x_0 = 0$, $y_0 = 0$і рівняння (2.1) набуває вигляду: $x^2 + y^2 = R^2$[4, с.95].

Приклад 2.6.

Визначте центр та радіус кола, заданого рівнянням

$$(x + 3)^2 + (\text{y} - 2)^2 = 36.$$

Розв'язання

Маємо

$$(x - (-3))^2 + (\text{y} - 2)^2 = 6^2.$$

Отже, центром кола є точка $O(-3; 2)$, а радіус кола $R = 6$.

Приклад 2.7.

Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 6\text{x} + 4\text{y} - 12 = 0$ є рівнянням кола. Знайдіть координати центра кола та його радіус.

Розв'язання

Виділимо квадрати лінійних двочленів змінних x і y:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 12 - 9 - 4 = 0;$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25;$$
$$(x-3)^2+(y-(-2))^2=5^2.$$

Отже, задане рівняння є рівняння кола з центром у точці $O(3;-2)$, а радіус кола $R=5$.

Приклад 2.8.

Складіть рівняння кола з діаметром AB, якщо $\mathrm{A}(-6;8), \mathrm{B}(4;12)$.

Розв'язання

1) Нехай точка O - центр кола. Тоді O - середина AB. Маємо:

$$x_O=\frac{-6+4}{2}=-1;\ \ y_O=\frac{8+12}{2}=10.$$

Отже, $\mathrm{O}(-1;10)$.

2) Радіусом кола буде відрізок

$$OA=\sqrt{(-1-(-6))^2+(10-8)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}.$$

Отже, $R=\sqrt{29}$.

3) Рівняння шуканого кола таке:

$$(x-(-1))^2+(y-10)^2=(\sqrt{29})^2;$$
$$(x+1)^2+(y-10)^2=29.$$

Отже,рівнянням$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$запасується коло радіуса R з центром у точці $(a;b)$.

Рівняння прямої

Пряма, що проходить через початок координат (рис.2.18.), задається рівнянням $\mathrm{y}=k\mathrm{x}$. Коефіцієнт k у цьому рівнянні називається кутовим коефіцієнтом прямої. Він дорівнює тангенсу кута між даною прямою і додатною піввіссю OX. На рисунку2.18. ви бачите, що пряма a нахилена до додатної півосі OX під кутом α.

З прямокутного трикутника OM_1M ($\angle M_1 = 90°$) дістаємо:

$$tg\alpha\ =\frac{MM_1}{OM_1}=\frac{kx}{x}=k.$$

Як задати пряму, що не проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт k ? Дослідимо це.

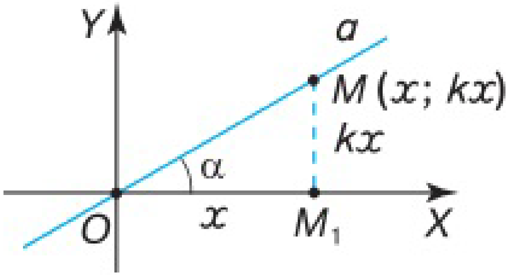


Рис.2.18.

Нехай пряма b (рис.2.19.) перетинає вісь OY у точці B(0;b) і має кутовий коефіцієнт k. Візьмемо на прямій b довільну точку N з абсцисою x та визначимо її ординату y. Для цього через початок координат проведемо пряму a||b. Вона має той самий кутовий коефіцієнт k, тому задається рівнянням $\mathrm{y} = k\mathrm{x}$. Нехай пряма, що проходить через точку N паралельно осі OY, перетинає пряму a в точці M, а вісь OX – у точці M_1. Тоді одержимо: $\mathrm{MM}_1 = k\mathrm{x}$ (бо $\mathrm{M} \in \mathrm{a}$), $\mathrm{NM} = \mathrm{OB} = b$ (бо чотирикутник NMOB – паралелограм за означенням), $\mathrm{NM}_1 = k\mathrm{x} + b$. Отже, ордината точки N виражається через її абсцису так: $\mathrm{y} = k\mathrm{x} + b$. Оскільки точка N – довільна точка прямої b, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння $\mathrm{y} = k\mathrm{x} + b$.

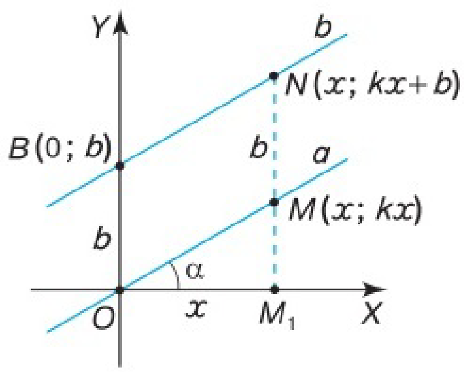


Рис.2.19.

Рівняння $y = kx + b$називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

Якщо $k > 0$, то пряма утворює гострий кут з додатнім напрямом осі ОХ, а якщо $k < 0$ - то тупий.

Звідки отримаємо важливу умову паралельності прямих:

прямі, що задані рівнянням $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, паралельні тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$.

Як задати пряму, що проходить через дві точки? Дослідимо це.

Нехай точки А і В містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (рис.2.20.). Через ці точки проведемо пряму а і позначимо на ній довільну точку М(x; y). Через точки А, В і М проведемо прямі, паралельні осі ОХ, через точку А – пряму, паралельну осі OY. Точки їх перетину позначимо C і D. Отримали два подібних трикутники ACM і ADB (у них кут А спільний і CM||DB). З подібності трикутників випливає:

$$\frac{CM}{DB} = \frac{CA}{DA}.$$

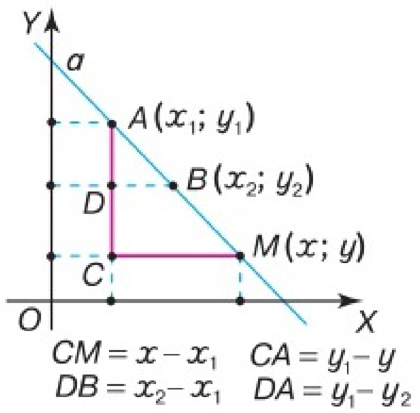


Рис.2.20.

Виразимо довжини цих відрізків:

$$CM = x - x_1, \qquad DB = x_2 - x_1, \qquad CA = y_1 - y, \qquad DA = y_1 - y_2.$$

Підставивши їх у пропорцію, отримаємо рівність:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}$$

Або

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Оскільки точка М – довільна точка прямої а, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

називають рівнянням прямої, що проходить через дві точки.

Отримане рівняння можна звести до вигляду:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0.$$

Позначивши $y_2 - y_1 = a, x_1 - x_2 = b, y_1x_2 - x_1y_2 = c$,одержимо загальне рівняння прямої: $ax + by +$ с $= 0$, де a, b, c - числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю [13, с.100].

Приклад 2.9.

Знайдіть точки перетину прямої $2\mathrm{x} - 7\mathrm{y} - 14 = 0$ з осями координат.

Розв'язання

1) Нехай точка $\mathrm{A(x; 0)}$ - точка перетину прямої з віссю абсцис.

Тоді $2\mathrm{x} - 7 \cdot 0 - 14 = 0;\ x = 7.$

Отже, A(7;0) – точка перетину прямої з віссю абсцис.

2) Нехай B(0;y) - точка перетину прямої з віссю ординат.

Тоді $3 \cdot 0 - 7y - 14 = 0;\ \mathrm{y} = -2.$

Отже, B(0;-2) - точка перетину прямої з віссю ординат.

Приклад 2.10.

Чи паралельні прямі $2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} + 7 = 0$і $4\mathrm{x} - 6\mathrm{y} - 9 = 0$?

Розв'язання

З рівняння $2x - 3y + 7 = 0$ маємо $3y = 2x + 7$; $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

З рівняння $4x - 6y - 9 = 0$ маємо $6y = 4x - 9$; $y = \frac{2}{3}x + \frac{9}{6}$.

Обидва рівняння мають однаковий кутовий коефіцієнт, тому прямі паралельні.

Рівняння прямої, що має кутовий коефіцієнт k і проходить через точку $A(x_0;\ y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Приклад 2.11.

Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2;\ 1)$ і утворює з додатнім напрямом осі абсцис кут 135°.

Розв'язання

1) $k = tg\ \alpha;\ k = tg\ 135° = -1$.

2) Маємо рівняння $y - 1 = -1(x - 2)$;

$y - 1 = -x - 2;\ x + y + 1 = 0$ - шукане рівняння.

Для того, щоб знайти координати точок перетину прямих$a_1x + b_1x + c_1 = 0, a_2x + b_2x + c_2 = 0$ необхідно розв'язати систему, рівняннями якої є рівняння, які задають дані прямі.

Отже, нехай $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$- дві різні точки. Тоді рівняння прямої, яка проходить через точкиM_1 іM_2має наступний вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k яке проходить через точку$M_0(x_0; y_0)$.

Для прямих, заданих рівняннями$y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$.

Умова паралельності:$k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності: $k_1k_2 = -1$.

В додатках запропоновані самостійні роботи, які можна провести після вивчення розглянутого матеріалу в підрозділах2.1 та 2.2(див. Додаток А).

Застосування координат до розв'язування задач на відшуканнягеометричних місць точок

Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ [29, с.104].

Розв'язування задач на відшукання ГМТ за допомогою методу координат передбачає два основні етапи:

1) складання рівняння з двома невідомими x і y, які задовольняють координати будь-якої точки шуканого ГМТ. На цьому етапі обґрунтовується пряме твердження: якщо точка M$(x; y)$ — довільна точка шуканого ГМТ, то її координати задовольняють знайдене рівняння;

2) доведення оберненого твердження: будь-яка точка, координати якої задовольняють знайдене рівняння, належить шуканому ГМТ.

*Задача 2.3.*Знайти координати центра та радіус кола

$$x^2+y^2-4x-14y+17=0$$

Розв'язання

Перепишемо дане рівняння так:

$$x^2-4x+4+y^2-14y+49+17-4-49=0 \text{або}$$

$$(x-2)^2+(y-7)^2=36$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням кола (2) одержимо: a=2, b=7, r=6. Отже, центр кола знаходиться в точці (2;7), радіус його дорівнює 6.

*Задача 2.4.*Знайти геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до вершин A і B трикутника ABC дорівнює квадрату відстані до третьої його вершини— точкиC.

Розв'язання

У задачах на метод координат важливо вдало, а точніше, вигідно обрати систему координат. У нашій задачі зручно взяти середину відрізка AB — точкуO — як початок відліку і «покласти» відрізок ABна вісь абсцис (рис.2.21.2). Виберемо одиничний відрізок так, щоб$A(-1;0)$ і $B(1;0)$. Нехай координати точки $C(a;b)$, а точка$M(x;y)$належить шуканому ГМТ. Тоді $MA^2+MB^2=MC^2$. Причому останнє можна вважати необхідною і достатньою умовою належності точки M шуканому ГМТ. Маємо:

$$(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

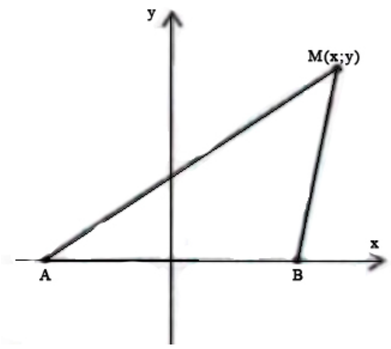


Рис. 2.21.1

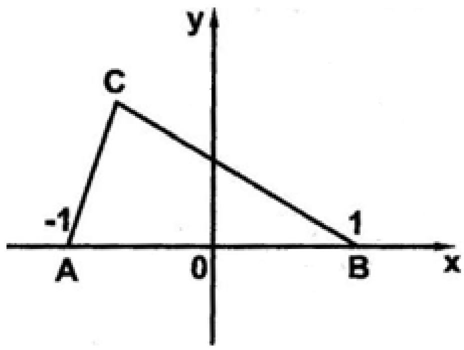


Рис.2.21.2

Після відповідних перетворень дістанемо:

$$(x+a)^2+(y+b)^2=2(a^2+b^2-1).$$

Тепер зрозуміло: якщо$a^2+b^2<1$, то шукане ГМТ — порожня множина.

Якщо$a^2+b^2=1$, то $(x+a)^2+(y+b)^2=0$, і ГМТ складається з однієї точки$D(-a;-b)$, симетричної точці C відносно початку координат.

Якщо$a^2+b^2>1$, то маємо коло з центром у точці $D(-a;-b)$, і радіусом$\sqrt{2a^2+2b^2-2}$[31, с.148].

В додатках запропоновані тестові завдання, які можна провести перед уроком повторення, узагальнення та систематизація знань учнів з теми «Декартові координати на площині» (див. додаток Б).

Методичні особливості базової задачі

Координати у просторі посідають особливе місце у вивченні геометрії. Метод координат надає геометричним дослідженням алгебраїчний характер і можливість розв'язати низку геометричних задач, іноді доволі складних. Вивчення теми «Координати у просторі» передбачає усвідомлення учнями зв'язку між геометрією і алгеброю, засвоєння сутності методу координат, формування просторової уяви, уміння застосовувати формули до розв'язування задач. Засвоєння цієї теми сприятиме свідомому розумінню учнями виведення рівняння кулі, успішному вивченню теми «Вектори в просторі», якій вона передує та встановленню міжпредметних зв'язків тощо.

Тема «Координати у просторі» на перший погляд здається зовсім нескладною. Але, зазвичай, в учнів виникають труднощі під час засвоєння та застосування формул для знаходження відстані між точками та координат середини відрізка.

У результаті вивчення цієї теми учні повинні вміти визначати положення точки в просторі за її координатами, визначати координати точки, будувати точку за її координатами, повинні засвоїти формулу для знаходження відстані між двома точками простору, заданими координатами та формулу для знаходження координат середини відрізка, якщо відомі координати його кінців.

Отже, «працюють» дві формули, або дві базові задачі: знаходження відстані між двома точками та знаходження координат середини відрізка.

Задачі, які можна запропонувати учням для формування вміння визначати положення точки в прямокутній системі координат у просторі та для засвоєння цих формул:

1. Знайти відстань між точками:
    a. A(1)і B(5); A(-5)і B(-1); A(-3)і B(5); A(a)і B(в)
2. Доведіть, що трикутник прямокутний A(7;3) , B(11;-3), C(10;5)
3. Доведіть, що трикутник рівносторонній A(1;0) , B(2;Y3), C(3;0)

4. 3.Знайти радіус кола, центром якого є точка M(-4;3), а точка A(-4;2) лежить на колі. Знайти площу круга.
5. Побудуйте ізнайдіть периметр трикутника, вершинами якого є точки A(5;-4), B(-1;4), C(5;4).
6. Знайдіть координату середини відрізка AB, якщо:
   A(5) і B(9), A(-3) і B(7), A(a) і B(b).
7. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:
   A(3;2) і B(1; 4), A(x_A ; y_A) і B(x_B ; y_B).

2.3. Особливості розв'язування геометричних задач методом координат

В даний час вже дуже велика кількість фахівців з різних галузей науки мають уявлення про прямокутні декартові координати на площині, так як ці координати дають можливість наочно за допомогою графіка зобразити залежність однієї величини від іншої. [26, с.19].

Розв'язуючи задачу координатним методом, слід виконати такі дії:

1) сформулювати задачу мовою координат;
2) визначити координати деяких точок даної фігури;
3) використати відомі співвідношення і формули;
4) перекласти отримані результати мовою геометрії.

Розв'язуючи задачу методом координат, потрібно раціонально вибрати систему координат: дану фігуру слід розмістити відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювало нулю, а також одному і тому ж числу. Наприклад, координати вершин прямокутника *ABCD* можна вибрати так, як на рисунку 2.22 [34, с.39].

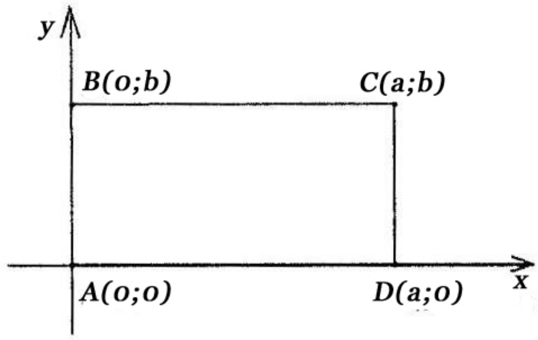


Рис.2.22.

Етапи розв'язування задач методом координат

Задача 2.5. Доведіть, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, додатній до подвоєного добутку основ.

Розв'язання

Сформулюємо дану задачу в координатах. Для цього розмістимо дану трапецію ABCD у системі координат так, щоб її вершини мали координати A(0; 0), B(a; b), C(c; b), D(d; 0) (рис.2.23.).

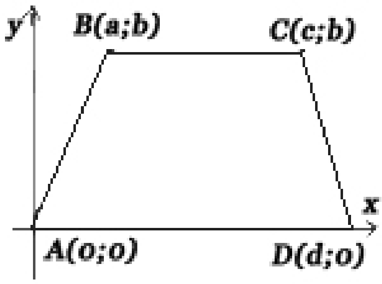


Рис.2.23.

Виразимо суму квадратів діагоналей трапеції через координати її вершин:

$$\mathrm{AC}^2 + BD^2 = \mathrm{c}^2 + b^2 + (\mathrm{a} - d)^2 + b^2 = \mathrm{a}^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2ad.$$

Обчислимо довжини основ трапеції:

$$AD = d, \mathrm{BC} = \mathrm{c} - \mathrm{a}.$$

Виразимо в координатах суму квадратів бічних сторін:

$\mathrm{A}B^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + (c - d)^2 + b^2 = \mathrm{a}^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2cd$.Додаючи до цього виразу подвоєний добуток основ, маємо:

$\mathrm{A}B^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC = \mathrm{a}^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2cd - 2cd - 2ad =$
$= \mathrm{a}^2 + 2b^2 + \mathrm{c}^2 + d^2 - 2ad$, що й треба було довести [9, с.99].

Отже, щоб розв’язати задачу методом координат необхідно виконати 3 кроки:

1) сформулювати дану задачу мовою координат;

2) перетворити алгебраїчні вирази, користуючись відомими співвідношеннями та формулами;

3) перекласти отриманий результат мовою геометрії [11, с.31].

Для прикладу розглянемо алгебраїчну та геометричну задачу і проілюструємо виконання даних 3 кроків.

Приклад 2.12.

Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$.

Розв'язання

1 крок: на геометричній мові в даній задачі потрібно знайти, скільки точок перетину мають фігури, задані даними рівняннями. Перше з них є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом, рівним 1, а друге - рівнянням параболи.

2 крок: побудова кола і параболи; знаходження точок їх перетину.

3 крок: кількість точок перетину кола і параболи є відповіддю на поставлене питання.

Приклад 2.13.

Знайдіть множину точок, для кожної з яких відстані від двох даних точок рівна.

Розв'язання

Позначимо дані точки через A і B. Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox збігалася з прямою AB, а початком координат служила точка A Припустимо далі, що $\mathrm{AB} = \mathrm{a}$, тоді у вибраній системі координат $\mathrm{A}(0; 0)$і $\mathrm{B}(\mathrm{a}; 0)$.Точка $\mathrm{M}(x; y)$належить шуканіймножині тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$, або, що те ж саме, $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{MB}^2$. Використовуючи формулу відстані від однієї точки координатної площини до іншої, отримуємо

$\mathrm{AM}^2 = x^2 + y^2, MB^2 = (x - a)^2 + y^2$.

Тоді $x^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2$.

Рівність $x^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2$ і є алгебраїчною моделлю ситуації, даної в задачі. На цьому закінчується перший етап її рішення (переклад умови задачі на координатну мову).

На другому етапі здійснюється перетворення отриманого виразу, в результаті якого отримуємо співвідношення $x = \frac{a}{2}$.

На третьому етапі здійснюється переклад мови рівняння на геометричну мову. Отримане рівняння є рівнянням прямої, яка є паралельною осі Оу і віддалена від точки А на відстань $d = \frac{a}{2}$, Тобто серединний перпендикуляр до відрізка АВ.

Розв'язуючи задачу методом координат, дану фігуру слід розміщувати відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювали нулю, а також одному і тому самому числу. Наприклад, координати вершин прямокутника ABCD доцільно взяти такі: $\mathrm{A}(0; 0), B(0; b), C(a; b), D(a; 0)$ (рис.2.24).

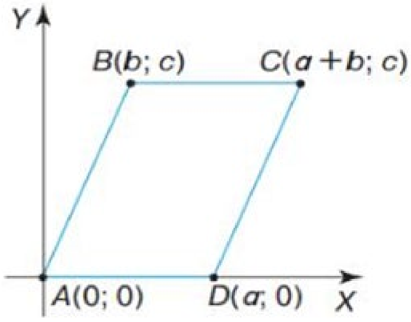


Рис.2.24.

*Задача 2.6.*Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він – прямокутник.

Розв'язання

Перший крок. Записуємо задачу мовою координат. Розміщуємо систему координат відносно паралелограма так, щоб його вершини мали координати: $\mathrm{A}(0; 0), B(b; c), C(a + b; c), D(a; 0)$.

За умовою $AC = BD$. Подаємо відстані між точками A і C, B і D через їх координати:

$$\sqrt{(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2} = \sqrt{(a - b)^2 + (0 - c)^2}\,,$$

$$(a + b)^2 + c^2 = (a - b)^2 + c^2$$

Другий крок. Перетворюємо одержану рівність:

$$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + c^2$$

$$4ab = 0.$$

Третій крок. З останньої рівності випливає: оскільки $a > 0$, то $b = 0$.

Це означає, що точка $B(b; c)$ лежить на осі ОУ. Тому кут BAD прямий, а звідси паралелограм ABCD – паралелограм.

Застосування методу координат дозволяє спростити доведення властивостей фігури. Розглянемо приклад.

Задача 2.7. Доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.

Розв'язання

Нехай ABC – даний прямокутний трикутник з прямим кутом C (рис.2.25.). Позначимо довжини його катетів малими літерами a і b, а середину гіпотенузи – M. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок містився у вершині C трикутника, а його катети лежали на осях координат (рис.2.26.). Тоді вершини трикутника матимуть координати: $\mathrm{C}\ (0; 0), \mathrm{B}\ (a; 0), \mathrm{A}\ (0; b)$. Точка M є серединою гіпотенузи AB, тому вона має координати: $M(2a; 2b)$. Знайдемо довжини відрізків MC, MA і MB:

$$MC = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}},$$

$$MA = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}},$$

$$MB = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}},$$

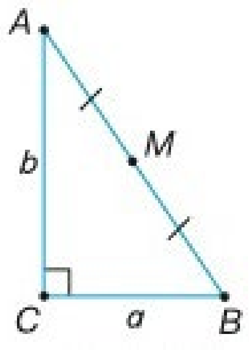


Рис.2.25.

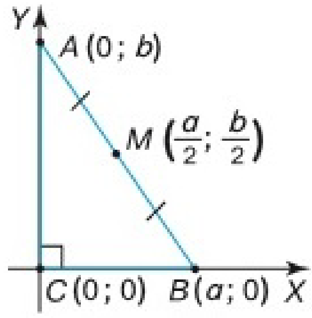


Рис.2.26.

З отриманих рівностей випливає, що $\mathrm{MC} = \mathrm{MA} = \mathrm{MB}$. Отже, точка М – рівновіддалена від вершин ΔABC[13, с.105].

Уміння необхідні для застосування методу координат

Для розробки методики формування вмінь, що необхідні для застосування методу координат, важливим є з'ясувати, як мислить учень і які логічні структури він створює у себе в голові. Метод координат передбачає наявність в учнів умінь і навичок, що сприяють застосуванню його на практиці. Проаналізуємо розв'язання декількох задач. У процесі цього аналізу виділимо вміння, які є основними для застосування методу координат до розв'язання задач.

Задача 2.8. У трикутнику ABC: $AC = b, AB = c, \mathrm{BC} = \mathrm{a}$, BD - медіана.

Доведіть, що$BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

Виберемо систему координат так, щоб точка A служила початком координат, а віссю Ох - пряма АС (рис.2.27.).

(Вміння оптимально вибирати систему координат, тобто так, щоб найбільш просто знаходити координати даних точок).

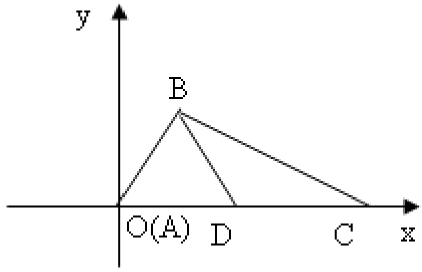


Рис.2.27.

У вибраній системі координат точки A, C і D мають наступні координати: $A(0;0), D(\frac{b}{2};0)$ і C $(b;0)$.

(Вміння знаходити координати заданих точок).

Позначимо координати точки B через x і y. Тоді використовуючи формулу для знаходження відстані між двома точками, заданими своїми координатами, отримуємо:

$$x^2 + y^2 = c^2, \ (x-b)^2 + y^2 = a^2. \qquad (2.2)$$

(Вміння знаходити відстань між двома точками, заданими координатами)

За тією ж формулою

$$BD^2 = (x - \frac{b}{2})^2 + y^2. \ (2.3)$$

Використовуючи формули (2.2) знаходимо x та y. Вони рівні:

$$x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}; \quad y = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}}$$

Далі, підставляючи x та y в формулу (2.3),знаходимо

$$BD^2 = (\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} - \frac{b}{2})^2 + c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}.$$

$$BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

(Вміння виконувати перетворення алгебраїчних виразів)

Задача 2.9. Знайти множину точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є стала величина.

Позначимо дані точки через A і B. Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox збігалася з прямою AB, а початком координат служила точка A.

(Вміння оптимально вибирати систему координат).

Припустимо $\mathrm{AB} = a$, тоді у вибраній системі координат $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(a, 0)$.

(Вміння знаходити координати заданих точок)

Точка $\mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ належить шуканій множині, тоді і тільки тоді, коли $AM^2 - MB^2 = b^2$,де b - стала величина

(Вміння переводити мову геометрії на аналітичну мову, складати рівняння фігур).

Використовуючи формулу відстаней між двома точками, отримуємо:

$$AM^2 = x^2 + y^2,\ MB^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

$$AM^2 - \ MB^2 = 2ax - a^2 = b.$$

(Вміння обчислювати відстань між точками, заданими координатами), або $x = \frac{b+a^2}{2a}$. Дане рівняння є рівнянням прямої, паралельної осі Oy івіддаленої від точки A на відстань $= \frac{|b+a^2|}{2a}$.

(Вміння бачити за рівнянням фігури, конкретний геометричний образ)

Очевидно, що і для вирішення цього завдання необхідно оволодіти перерахованими вище вміннями. Крім того, для розв’язання наведеної задачі, а також і інших задач важливо «бачити за рівнянням» конкретний геометричний образ, що є зворотною процедурою до складання рівняння конкретних фігур.

Виділені вміння є основою при розв’язанні і більш складних завдань.

Задача 2.10. У трапеції менша діагональ перпендикулярна основам. Знайти більшу діагональ, якщо сума протилежних кутів дорівнює $\frac{\pi}{2}$, а основи рівні a і b.

Направимо осі координат по меншій діагоналі і одній з основ(рис.2.28.).

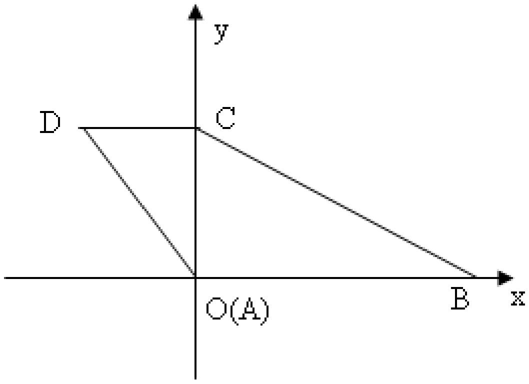


Рис.2.28.

(Вміння оптимально вибирати систему координат). Тоді отримаємо точки точка $A(0;0)$, $\mathrm{B}(a;0)$, $\mathrm{C}(0;c), D(b;c)$.

(Вміння знаходити координати заданих точок)

Нехай $\alpha = \angle ABC$ і $\beta = \angle ADC$ гострі кути в трапеції ABCD, тоді їх сума дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Для обчислення довжини більшої діагоналі BD треба знайти значення с. Його можна обчислити 2 способами.

Перший - з прямокутного трикутника ABC за формулою$tg\alpha = \frac{CO}{AB}$ знаходимо $c = atg\alpha$.

Другий спосіб з прямокутного трикутника ACD: $c = -btg\beta$.

Звідси маємо, що

$$c = atg\alpha = -btg\beta. \tag{2.4}$$

З рівності (2.4) знаходимо відношення $\frac{b}{a}$.Яке дорівнює $(tg\alpha)^2$, так як$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Виразимо $tg\alpha$. Це дорівнює$\sqrt{-\frac{b}{a}}$. Виходячи з цього, користуючись залежністю (2.4), отримуємо$c = \sqrt{-ab}$.

(Уміння виражати невідомі координати через вже відомі величини)

Далі скориставшись координатної формулою відстані між двома точками, знайдемо довжину BD.

(Вміння обчислювати відстань між точками, заданими координатами)

Вона дорівнює $\sqrt{a^2 + b^2 - 3ab}$.

Отже, щоб застосовувати метод координат у конкретних випадках потрібно необхідно володіти такими вміннями та навичками:

1. Переводити мову геометрії на аналітичну для одного типу завдань таз аналітичної на геометричну для іншого;

2. Будувати точку за заданими координатами;

3. Знаходити координати заданих точок;

4. Обчислювати відстань між точками;

5. Оптимально вибирати систему координат;

6. Складати рівняння заданих фігур;

7. Бачити за рівнянням конкретний геометричний образ;

8. Виконувати перетворення алгебраїчних співвідношень.

Дані вміння можна відпрацювати на прикладі таких завдань, що формують метод координат:

1) Задачі на побудову точки за її координатами;

2) Задачі на знаходження координат заданих точок;

3) Задачі на обчислення відстані між точками, заданими координатами;

4) Задачі на оптимальний вибір системи координат;

5) Задачі на складання рівняння фігури за її властивостями;

6) Задачі на визначення фігури за її рівнянням;

7) Задачі на перетворення алгебраїчних рівнянь.

2.4. Застосування методу координат до розв’язування геометричних задач при підготовці до ДПА та ЗНО

Атестаційна робота в 9 класі включає завдання різних типів і рівнів складності, які охоплюють більшість розділів навчальної програми, де декартові координати не є виключенням.

Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики, 9 класмістить завдання, які відносяться до даної теми. Розглянемо типові завдання з теми «Координати на площині».

Частина перша:

1. Дано точки $A(-1;4)$, $B(3;-1)$, $C(2;2)$, $D(0;1)$. Укажіть правильну рівність.

А. $AB = CD$ Б. $AB = BC$ В. $AC = AD$ Г. $AC = DB$

Правильна відповідь Г, так як:

$$AC = \sqrt{(2+1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{13}, \mathrm{DB} = \sqrt{(0-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{13}.$$

2. Точка C – середина відрізка AB, $A(-4;3)$, $C(2;1)$. Знайдіть координати точки B.

А. $(-8;1)$Б. $(8;-1)$В. $(-1;2)$ Г. $(2;1)$

Правильна відповідь Б, так як:

$$2 = \frac{-4 + x_B}{2}, x_B = 8; \quad 1 = \frac{3 + y_B}{2}, y_B = -1.$$

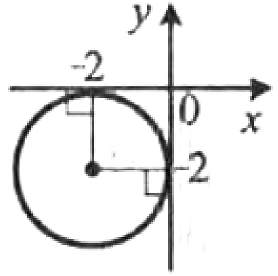
3. Укажіть рівняння кола, зображеного на рисунку.

А. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4.$

Б. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4.$

В. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$

Г. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 2.$



Правильна відповідь Б.

4. Коло задано рівнянням $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 13$. Як розташована точка $B(4;-1)$ відносно цього кола?

А. Належить колу; Б. Розташована всередині кола;

В. Розташована поза колом; Г. Встановити неможливо.

Правильна відповідь В.

Частина друга:

5. Вершинами трикутника є точки $\text{A}(-3;1), B(2;-2)$, $C(-4;6)$. Знайдіть медіану АМ.

Розв'язання

Точка М – середина відрізка ВС, її координати $M(-1;2)$, тоді

$$AM = \sqrt{(-1+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Відповідь: $\sqrt{5}$.

6. Скласти рівняння кола, діаметром якого є відрізок МК, якщо $M(-3;4), K(5;10)$.

Розв'язання

Знайдемо координати центра кола: $O(1;7)$.

Шукаємо радіус кола: $MO = \sqrt{(1+3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

Отримаємо рівняння кола: $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$.

Відповідь: $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 25$.

Частина третя:

7. Доведіть, що чотирикутник ABCD з вершинами в точках $A(-1;5), B(4;6), C(3;1), \text{D}(-2;0)$ є ромбом.

Розв'язання

Нехай точки E та F – середини діагоналей AC та BD відповідно (рис. 2.46).

Тоді $x_{\text{E}} = \frac{-1+3}{2} = 1,$ $y_{\text{E}} = \frac{5+1}{2} = 3,$ $\text{E}(1;3).$

$$x_F = \frac{4+(-2)}{2} = 1, \quad y_F = \frac{6+0}{2} = 3, \quad F(1;3).$$

Отже, середини діагоналей збігаються, тоді ABCD паралелограм.

$$A\text{B} = \sqrt{(4+1)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{26},$$

$$CB = \sqrt{(4-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{26}.$$

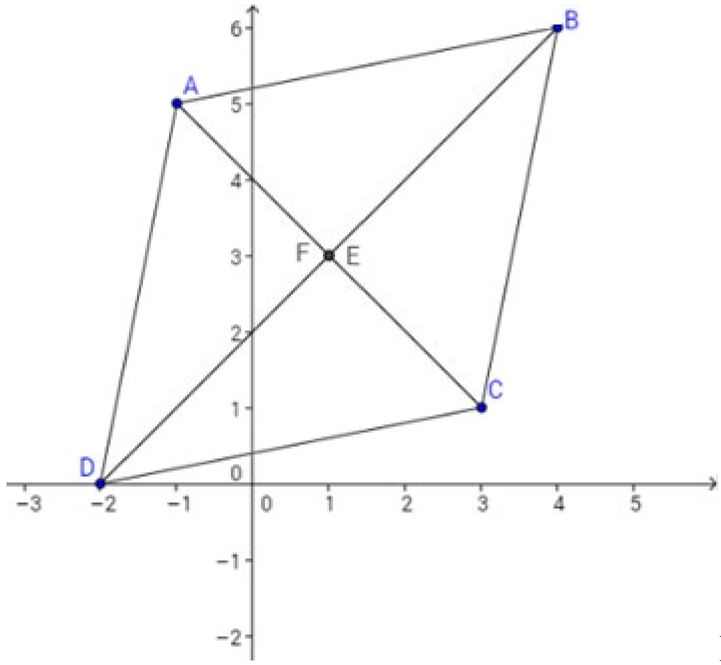


Рис. 2.46

Тобто ABCD – паралелограм з рівними сусідніми сторонами. Отже, є ромбом.

8. Доведіть, що чотирикутник ABCD з вершинами в точках $A(2;-2), B(1;2), C(-3;1), \mathrm{D}(-2;-3)$ є прямокутником.

Розв'язання

Нехай точки E та F – середини діагоналей AC та BD відповідно (рис. 2.47).

Тоді

$$x_{\mathrm{E}} = \frac{2+(-3)}{2} = -\frac{1}{2},\ y_{\mathrm{E}} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$x_F = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}, y_F = \frac{2+(-3)}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\ \ F\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

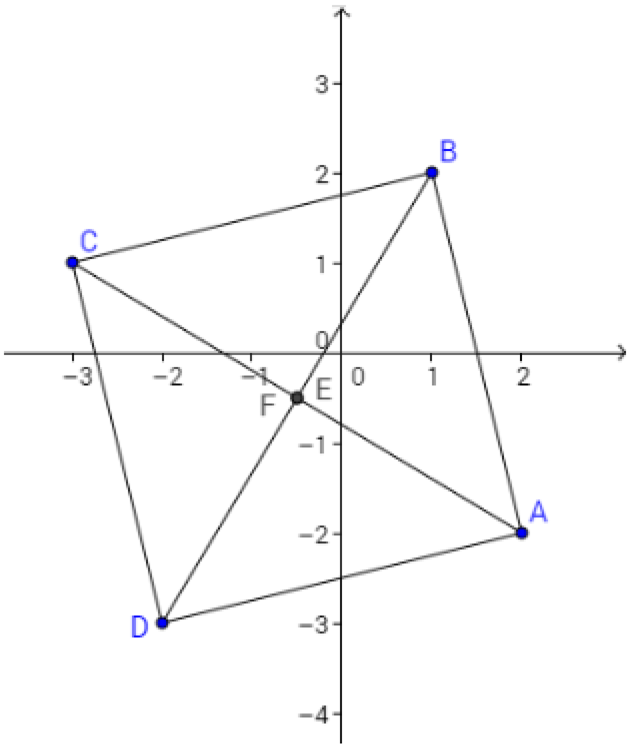


Рис. 2.47

Отже, середини діагоналей збігаються, тоді ABCD паралелограм.

Знайдемо довжини цих діагоналей:

$AC = \sqrt{(2+3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{34}$,

$BD = \sqrt{(1+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{34}$.

Отже, $AC = BD$. Паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником.

Частина четверта:

9. Дано коло $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Знайдіть рівняння кола з центром $O(4; -3)$, яке дотикається до заданого кола.

Розв'язання

Радіус заданого кола дорівнює 2, а центр міститься у точці $M(1; 1)$. Два кола можуть мати або зовнішній або внутрішній дотик. В обох випадках відстань між центрами цих кіл дорівнює $OM = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = 5$ (рис. 2.48).

У випадку зовнішнього дотику радіус шуканого кола дорівнює $5 - 2 = 3$. Тоді матимемо таке рівняння кола: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$.

У випадку внутрішнього дотику радіус шуканого кола дорівнює $5 + 2 = 7$. Тоді матимемо таке рівняння кола: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 49$.

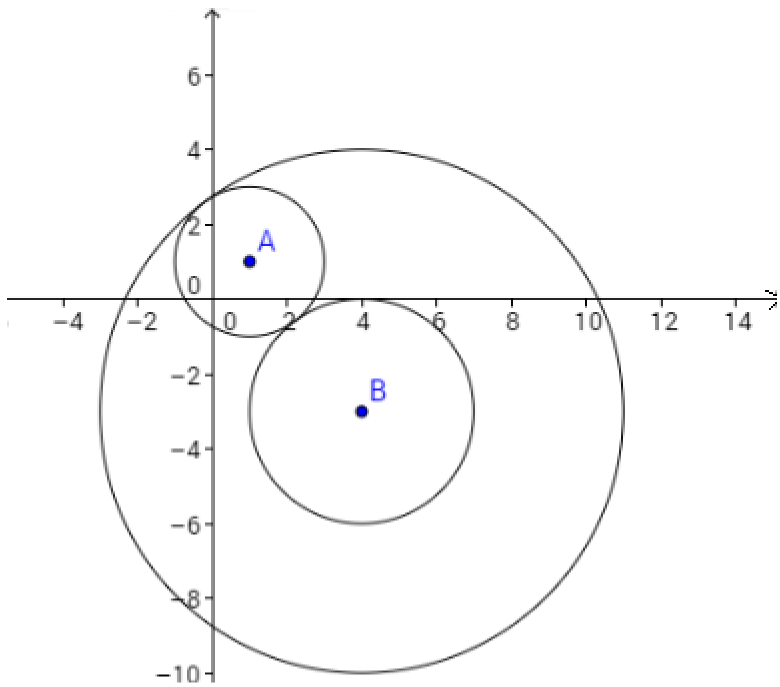


Рис. 2.48.

Мета зовнішнього незалежного оцінювання з математики - оцінити ступінь підготовленості учасників тестування з математики з метою конкурсного відбору для навчання у вищих навчальних закладах.

Програмою ЗНО передбачено завдання з розділу:

- «Планіметрія» з теми: «Координати на площині», учень повинен знати: прямокутну систему координат на площині, координати точки; формулу для обчислення відстані між двома точками та формулу для обчислення координат середини відрізка; рівняння прямої та кола. Предметні вміння та способи навчальної діяльності: знаходити координати середини відрізка та відстань між двома точками; складати рівняння прямої та рівняння кола; застосовувати координати до розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту.

- «Стереометрія» з теми: «Координати у просторі», учень повинен знати: прямокутну система координат у просторі, координати точки;

формулу для обчислення відстані між двома точками та формулу для обчислення координат. Предметні вміння та способи навчальної діяльності: знаходити координати середини відрізка та відстань між двома точками; застосовувати координати до розв'язування стереометричних задач та задач практичного змісту[35].

Розглянемо демонстраційний варіант сертифікаційної роботи з математики (базовий рівень), та знайдемо завдання, які відносяться до вище наведених розділів.

(2006) Ортогональною проекцією відрізка з кінцями у точках $A(-1;0;5)$ і $B(-1;0;8)$ на координатну площину xy є

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
пряма	промінь	відрізок	точка	фігура, що відрізняється від перелічених

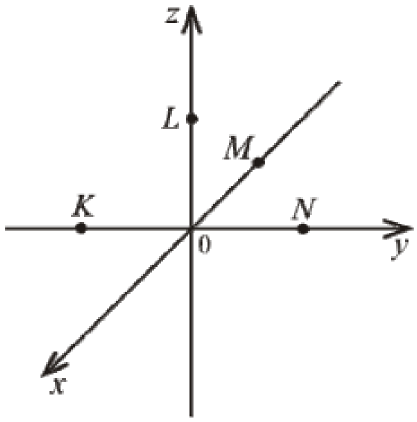
Відповідь: Г.

(2007) Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки $E(-3;8;7)$ і $F(-9;6;1)$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$(-6;7;4)$	$(-12;14;8)$	$(0;0;0)$	$(3;1;3)$	інша відповідь

Відповідь: А.

(2010) На рисунку зображено прямокутну систему координат у просторі, на осях якої позначено точки K, L, M, N. Установіть відповідність між точками K, L, M, N (1 – 4) та їхніми можливими координатами (А – Д).



Точка		Координати точки	
1	K	**А**	$(-3;0;0)$
2	L	**Б**	$(0;-3;0)$
3	M	**В**	$(0;0;-3)$
4	N	**Г**	$(0;0;3)$
		Д	$(0;3;0)$

Відповідь: 1 – Б; 2 – Г; 3 – А; 4 – Д.

(2012) Яка з наведених точок належить осі Oz прямокутної системи координат у просторі?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$M(0;-3;0)$	$N(3;0;-3)$	$K(-3;0;0)$	$L(-3;3;0)$	$F(0;0;-3)$

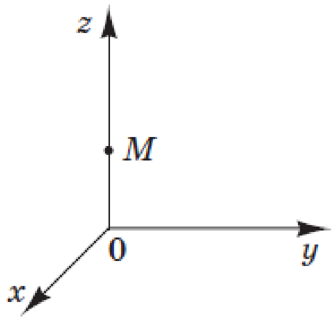
Відповідь: Д.

(2015) У прямокутній декартовій системі координат у просторі xyz задано точки $A(2;0;0)$ і $B(-4;2;6)$. До кожного початку речення (1 – 4) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення		Закінчення речення	
1	серединою відрізка AB є точка	**А**	$(-1;1;3)$.
2	вектор $\overline{AB}$ має координати	**Б**	$(0;2;0)$.
3	проекцією точки B на площину xz є точка	**В**	$(-4;0;6)$.
4	проекцією точки B на вісь y є точка	**Г**	$(-6;2;6)$.
		Д	$(-2;2;6)$.

Відповідь: 1 – А; 2 – Г; 3 – В; 4 – Б.

(2016) У прямокутній декартовій системі координат у просторі на осі z вибрано точку M (див. рисунок). Серед наведених варіантів укажіть можливі координати цієї точки.



А	Б	В	Г	Д
$(1;0;0)$	$(1;1;0)$	$(0;0;1)$	$(0;0;-1)$	$(0;1;0)$

Відповідь: В.

(2017) У прямокутній системі координат у просторі задано сферу із центром у початку координат, якій належить точка $A(0;0;-5)$. Яка з наведених точок також належить цій сфері?

А	Б	В	Г	Д
$K(5;5;0)$	$L(0;1;4)$	$M(0;0;10)$	$N(0;0;5)$	$P(5;5;5)$

Відповідь: Г.

Отже, координати на площині та у прості є невід'ємною частину ДПА у 9-ому класі та ЗНО у 11-ому.

РОЗДІЛ 3
ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

3.1. Застосування прикладного програмного забезпеченнядо вивчення декартових координат

Інноваційне навчання орієнтоване на розвиток особистості учня,на формування готовності учня до реального життя, до його швидких змін, до творчого мислення, критичного аналізу навколишнього світу й себе в ньому, до постійного оволодіння учнями новими видами діяльності й спілкування.

Інноваційні методи навчання виробляють критичне ставлення до себе, уміння бачити свої помилки та адекватно ставитись до них. Традиційна система навчання не дозволяє повною мірою формувати в учнів інтегровані знання й уміння застосовувати знання одних розділів математики в інших[27].

Найбільш зручним для підтримки вивчення курсу математики в школах є пакет програм GRAN (GRAN1, Gran-2D, Gran-3D). Названі програмні засоби прості у використанні, мають досить зручнезастосування. Від користувача не вимагається особливих вмінь з інформатики за винятком найпростіших понять, цілком доступних для учнів середніх класів.

При цьому вчителю не нав'язується ніяка методика подання навчального матеріалу, закріплення і контролю знань, конкретний зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання, співвідношення між самостійною роботою учнів і роботою разом із вчителем, між індивідуальними і колективними формами роботи та ін. Усе це вчитель повинен визначити сам з урахуванням своїх власних позицій і уподобань, специфіки умов, в яких перебігає навчальний процес, індивідуальних особливостей окремих учнів і класного колективу.

Вивчення математики за допомогою програм GRAN1, GRAN-2D дає наочні уявлення про поняття, що вивчаються за їх допомогою, відбувається розвиток образного мислення учнів, їх просторової уяви. Програми GRAN1, GRAN-2D дозволяють досить глибоко проникнути в сутність досліджуваних явищ, неформально розв'язувати задачі. Основною проблемою при використанні програм GRAN1, GRAN-2D виступає відшукання чи розробка методу розв'язування задачі, побудова її математичної моделі, а виконання і подання обчислювальних і графічних операцій, всіх технічних операцій щодо опрацювання результатів, покладається на комп'ютер.

Програма GRAN1 призначена для графічного аналізу функцій, звідки і походить її назва (GRaphic ANalysis).

Програма GRAN-2D призначена для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині.

Розв'яжемо приклад 2.6. з використання програми GRAN1.

Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 6\text{x} + 4\text{y} - 12 = 0$ є рівнянням кола. Знайдіть координати центра кола та його радіус.

Задамо рівняння неявно заданої функції, яке нам дано в умові задачі. Бачимо, що графіком цієї функції буде коло (рис. 2.29).

Побудувавши коло з центром у точці (3;-2) і радіусomR = 5 бачимо, що воно співпаде з отриманим колом вище.

В обох випадкахотримали однаковий результат. Отже, задача розв'язана правильно.

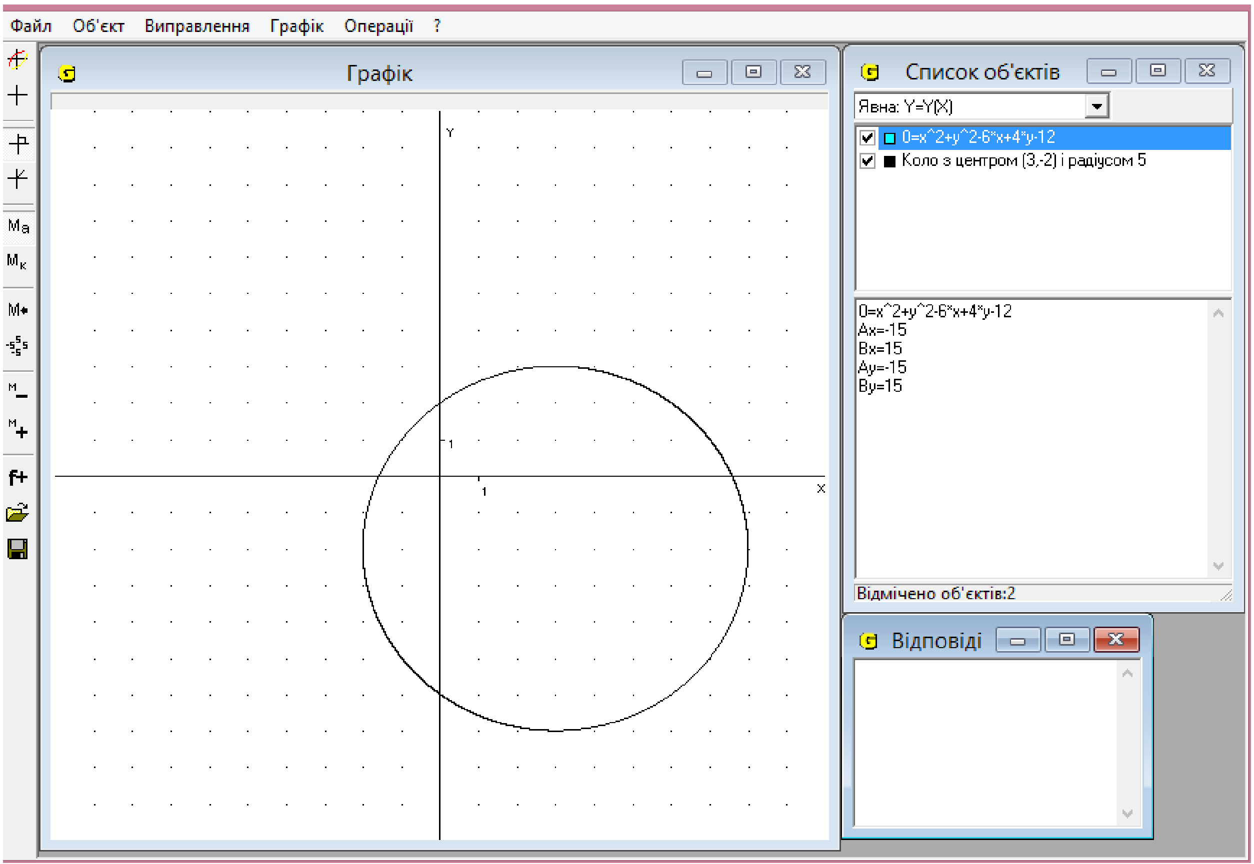


Рис. 2.29.

Розв'яжемо приклад 2.8. з використання програми GRAN1.

Знайдіть точки перетину прямої $2x - 7y - 14 = 0$ з осями координат.

Задамо рівняння неявно заданої функції, яке нам дано в умові задачі. Бачимо, що графіком цієї функції дійсно буде пряма (рис. 2.30).

Навівши курсор мишки на точки перетину прямої з осями координат, отримаємо, що точка з координатами (7;0) – точка перетину прямої з віссю абсцис та (0;-2) – точка перетину прямої з віссю ординат.

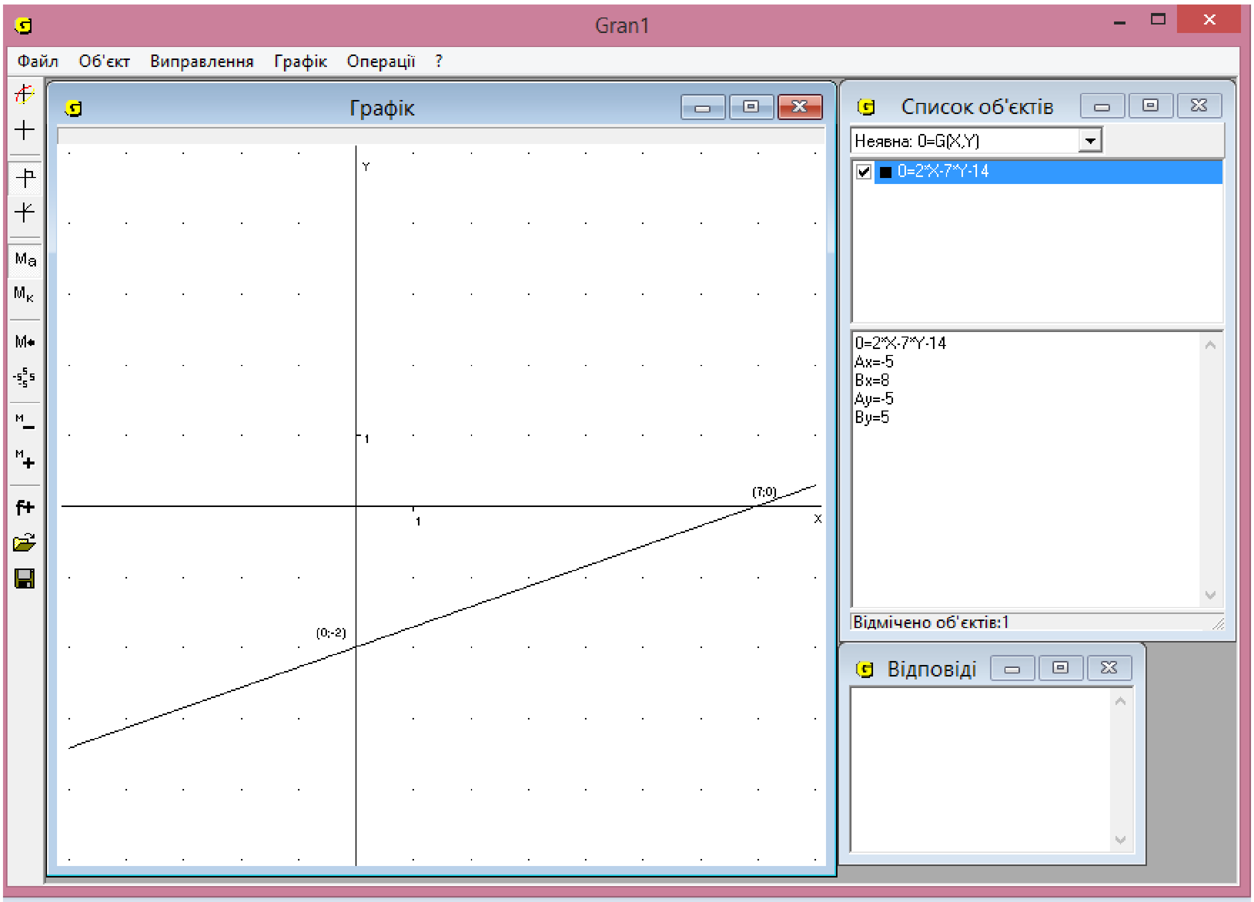


Рис. 2.30.

Розв'яжемо приклад 2.2. з використання програми GRAN-2D.

Доведіть, що трикутник, вершинами якого є точки $A(-1;7)$, $B(1;3)$ і $C(5;5)$ є рівнобедреним прямокутним.

Побудуємо точки A, B та C, сполучивши їх отримаємо трикутник.За допомогою лінійки виміряємо довжини всіх сторін, бачимо, що $AB = BC$. Виміряємо величину кута між цими сторонами, отримаємо, що $\angle ABC = 90°$. Отже, ΔABCє рівнобедреним прямокутним (рис. 2.31).

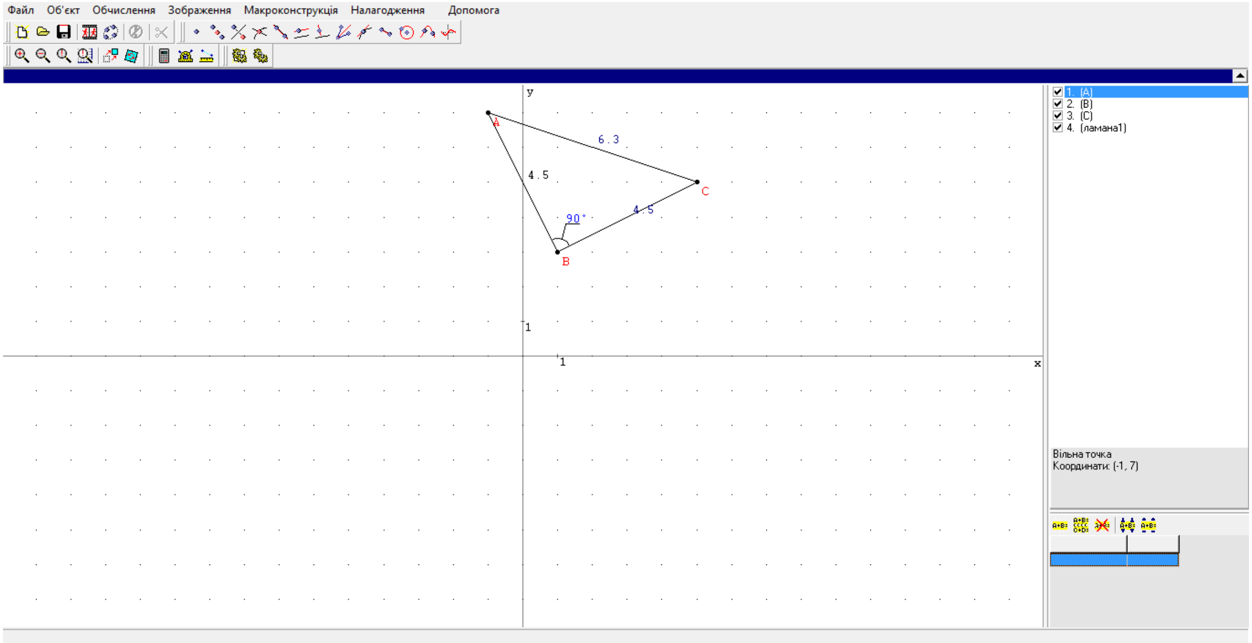


Рис. 2.31.

Розв’яжемо приклад 2.4. з використання програми GRAN-2D.

Вершини чотирикутника ABCD мають координати A(-2;1), B(0;4), C(4;1), D(2;-2). Доведіть, що ABCD — паралелограм.

Побудуємо точки A, B, C та D, сполучивши їх за допомогою ламаної отримаємо чотирикутник. Побудуємо діагоналі AC та BD, їхніми серединами відповідно будуть точки O та O1, які збігаються.

Отже, ABCD – паралелограм (рис. 2.32).

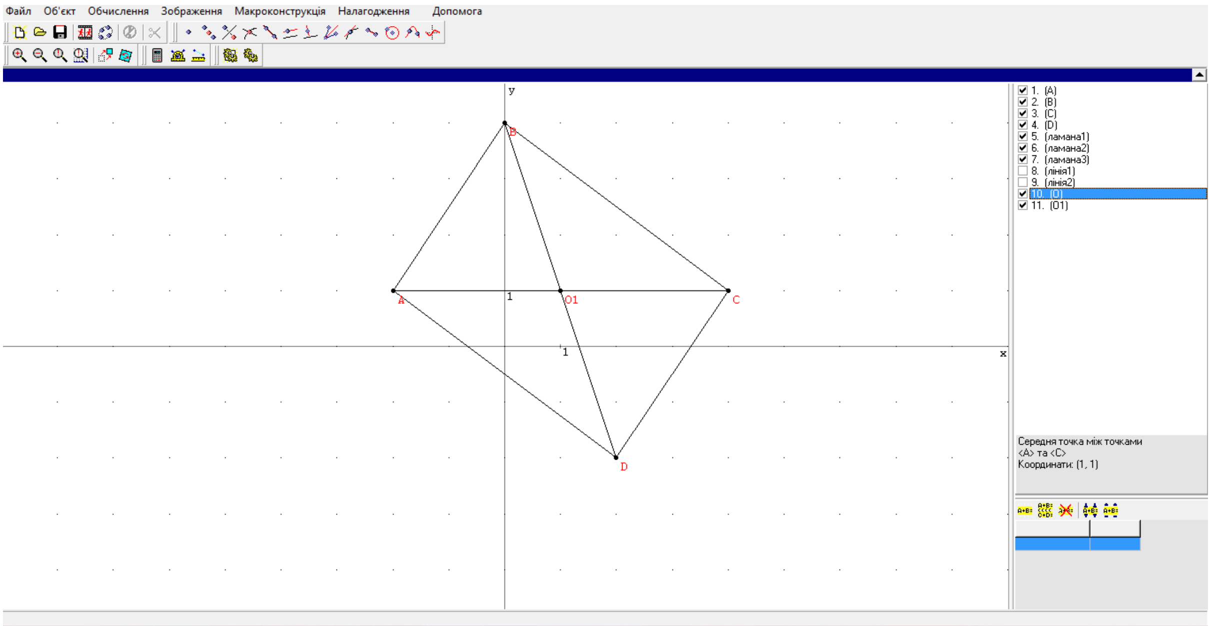


Рис. 2.32.

Останнім часом у нашому світі вже не знайдеться галузі, де б не використовували комп’ютери. Це не просто необхідна, а й невід’ємна частина нашого життя. Звісно це змушує розвиватися в першу чергу вчителя, оскільки він починає знайомство і розвиток дитини з цим цікавим, багатофункціональним і легким у використанні пристроєм.

ІКТ можна використовувати на всіх етапах навчального процесу: при вивченні нового матеріалу, повторенні, закріпленні знань та вмінь учнів, контролі навчальних досягнень. Комп’ютер для учня на кожному уроці буде виконувати різні функції: учителя, наставника, знаряддя праці, об’єкт навчання, помічника, тренажера, ігрового середовища тощо.

Існує велика кількість цифрових освітніх ресурсів, зокрема: Smart Technologies, системи дистанційного навчання, системи електронного тестування, тощо[4].

На уроках математики зазвичай не вистачає наочності, ілюстрацій, тому даний предмет дуже часто учні вважають не цікавим. Застосування ІКТ на уроках математики урізноманітнює класичні уроки.

На сьогодні розроблена вже значна кількість програмних засобів, що дозволяють вирішувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності. Це такі програмні засоби, як Mathcad, Maple, MathLab, GRAN, GeoGebra та інші.

MathCad

MathCad надає можливості побудови двовимірних графіків у декартових і полярних координатах, ліній рівня, зображення поверхні, а також побудови ряду інших тривимірних графіків.

Точки, з яких складається графік, визначаються дискретними аргументами: MathCad наносить на графік одну точку для кожного значення дискретного аргументу.

Для того, щоб побудувати двомірний графік у декартовій системі ко- ординат функції **y(t)**, необхідно:

1.Клацнути мишею нижче (правіше) формули для y(t) і вибрати Graph Toolbar - X-Y Plot / Графік - X-Y залежність: кнопка або ви- користати операційне меню Insert - Grath - X-Y Plot/Вставка - Графік - X-Y залежність). На екран буде виведений шаблон графіка.

Шаблон задавання параметрів для побудови графіка

2.У полі введення під віссю абсцис потрібно ввести ім'я змінної t, поставивши, таким чином, у відповідність до цієї осі змінну t.

3.Клацнути в полі навпроти середини осі ординат і ввести ім'я фун- кції з обов'язковою вказівкою її аргументу y(t). Поля, що залишаються призначеними для введення меж на осях (максимального і мінімального значень, що відкладаються на осі). Якщо залишити їх порожніми, MathCad автоматично заповнить їх за умовчанням при побудовіграфіка.

4.Після клацання поза графіком відбувається процес його побудови. Під ім'ям функції y (t) з'являється зразок креслення лінії. Подвійне клацан- ня по вікну графіка чи використання Format - Graph - X-Y Plot / Формат - Графік - X-Y залежність дозволяє провести форматування зовнішнього виглядуграфіка.

Діалогове вікно форматування графіка має чотири вкладки. Розглянемо дві з них.

Склад вкладки X-У Axes :

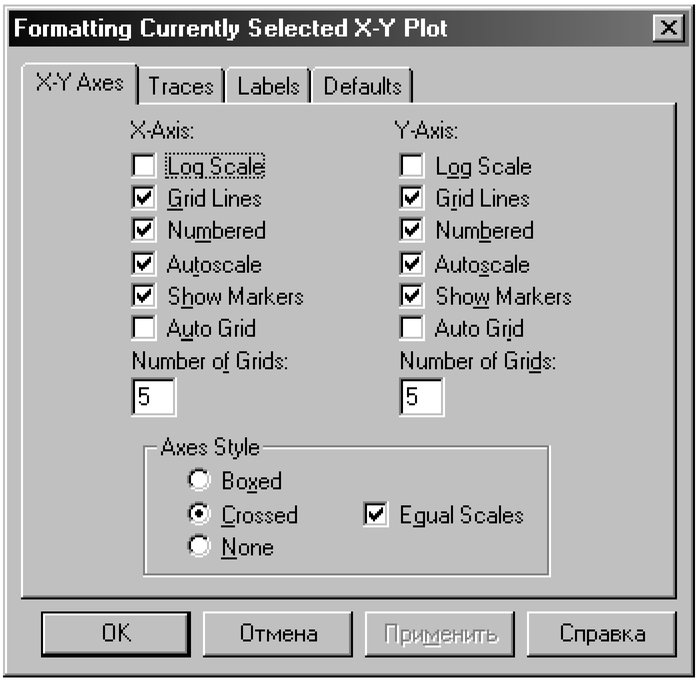
Log scale – установка логарифмічного масштабу; Grid lines – установка ліній масштабної сітки; Numbered – установка цифрових даних по осях; Auto scale – автоматичне завдання масштабу осей; Show markers – нанесення рисок;

Auto grid – автоматична установка масштабних ліній; Number of grids – установка числа масштабних ліній; Boxed – рамка навколо графіка;

Crossed – пересічні осі;

None – відсутність осей;

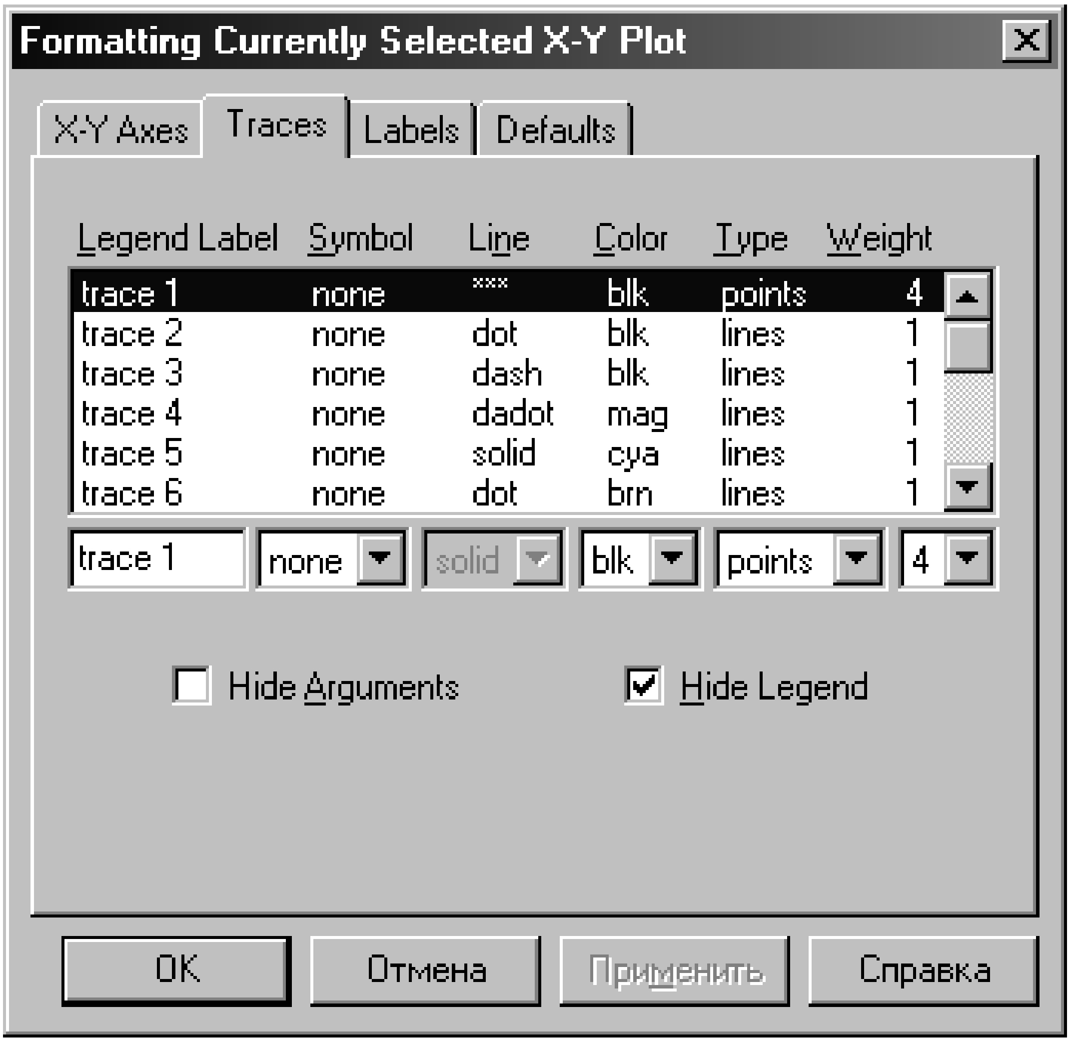
Equal Scales – рівні масштаби.



Вікно форматування графіків. Вкладка X-У Axes

Мітки точок (Symbol), тип лінії (Line), колір (Color), товщину (Weight) і тип лінії (Type) графіка можна змінювати, використовуючи вкладку Traces вікна форматування графіка.

На одному рисунку можна побудувати декілька графіків. У середній квадрат по вертикалі вписуються через коми всі імена функцій або їхні ви- значення. Аналогічно в середній квадрат по горизонтальній осі заносяться аргументи функції (чи аргумент, якщо він один). Для побудови графіка не- обхідно клацнути мишею за його межами (або натиснути клавішу F9).



Вікно форматування графіків. Вкладка ***Traces***

Виділивши поле графіка пунктирною лінією (клацнувши біля нього і протягнувши мишу, відпустити клавішу), можна потім перемістити на ньо- го курсор, домогтися появи "долоньки" і, клацнувши, переміщати поле по робочому вікну. Для того, щоб розтягувати (звужувати) межі графіка, потрібно захопити курсором необхідну сторону і перемістити її.

Операції копіювання, видалення графіків відбуваються аналогічно діям з іншими об'єктами MathCad і описані раніше. Функції побудови не- обхідно визначати вище (ліворуч) від місця иведення макета.

Приклад 2.11

Побудувати графіки функцій

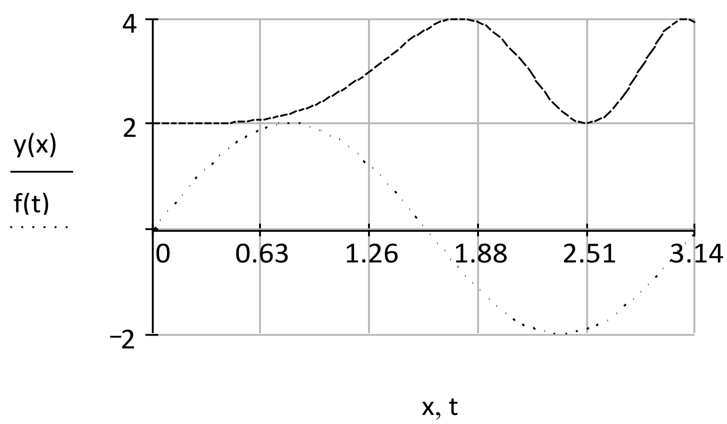
$y(x) = 3 - \cos(x^2)$ *і* $f(t) = 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$

на відрізку **[0; π]** з кроком зміни аргументу **π/64**.

Точність відображення графіка функції залежить від кроку зміни аргументу: чим менше крок, тим більш "гладким" буде графік.

$x := 0, \frac{\pi}{64} .. \pi \qquad t := 0, \frac{\pi}{64} .. \pi$

$y(x) := 3 - \cos\left(x^2\right) \qquad f(t) := 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$



Результат побудови графіків функцій у заданому діапазоні зміни аргументу в декартовій системі координату пакеті MathCAD[14].

Maple

Maple — комерційна система комп'ютерної алгебри від компанії WaterlooMaple. Перша обмежена версія була розроблена та оприлюднено в грудні 1980-го року групою Symbolic Computation Group під керівництвом Кіта Ґеддеса з університету Во́терлу, місто Ватерлоо (Во́терлу), Онтаріо, Канада. Перший раз була продемонструвана на конференціях в 1982-ому році. До кінця 1983 року понад 50 університетів мали копії Maple, встановлені на їх машинах. Остання версія містить понад 5000 функцій для більшості розділів сучасної математики, моделювання та інтерактивної візуалізації, підтримує мову програмування Maple, і дозволяє комбінувати алгоритми, результати обчислення, математичні формули, текст, графіку, діаграми та анімацію зі звуком в електронному документі.

З 1988 року програму Maple розробляє і продає ліцензії компанія Waterloo Maple Inc. (також відома як Maplesoft) - канадська компанія з Ватерлоо, Онтаріо, Канада[24].

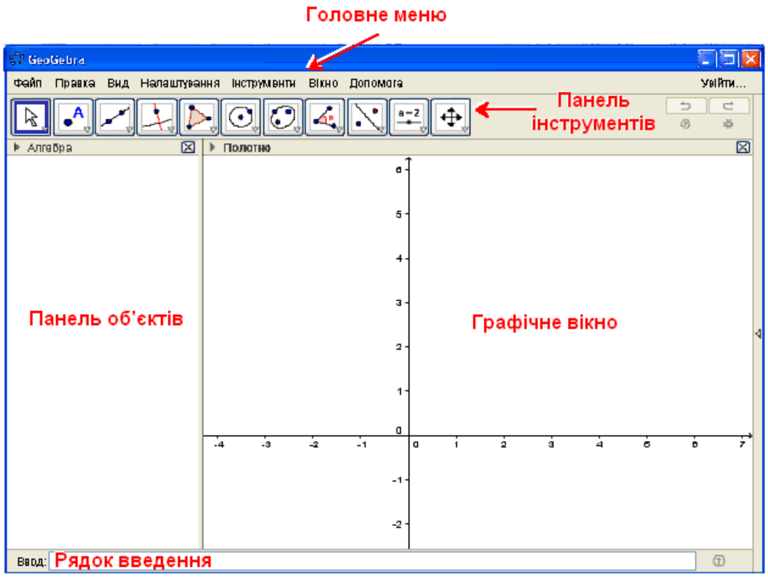
MathLab

MATLAB — пакет прикладних програм для числового аналізу, а також мова програмування, що використовується в даному пакеті. Система створена компанією *The MathWorks* і є зручним засобом для роботи з математичними матрицями, малювання функцій, роботи з алгоритмами, створення робочих оболонок (user interfaces) з програмами в інших мовах програмування. Хоча цей продукт спеціалізується на чисельному обчисленні, спеціальні інструментальні засоби працюють з програмним забезпеченням Maple, що робить його повноцінною системою для роботи з алгеброю.

MATLAB має більше, ніж мільйон користувачів на виробництвах і науковців. Ціна базової комерційної версії без інструментів близько 2000 дол. США і лише 100 дол. США для навчальних закладів з мінімальним набором інструментів.

Інтерактивне геометричне середовище GeoGebra.

Програма складається з головного меню, панелі інструментів, панелі об’єктів, графічного вікна та рядка введення.



Головне меню – меню основних функціональних можливостей програми GeoGebra.

Панель інструментів – набір кнопок швидкого доступу до інструментів створення геометричних конструкцій в графічному вікні.

Графічне вікно – область для відображення геометричних конструкцій.

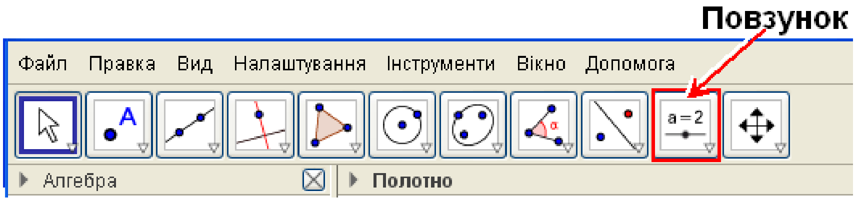
Панель об’єктів – область для відображення інформації про геометричні об’єкти, що входять до складу зображень в графічному вікні геометричної конструкції.

Рядок введення – поле для вводу алгебраїчних рівнянь, що задають геометричне місце точок. Після вводу алгебраїчного рівняння і натисканні клавіші Enter інформація про геометричний об’єкт відображається в панелі об’єктів, а сам геометричний об’єкт зображується в геометричному вікні.

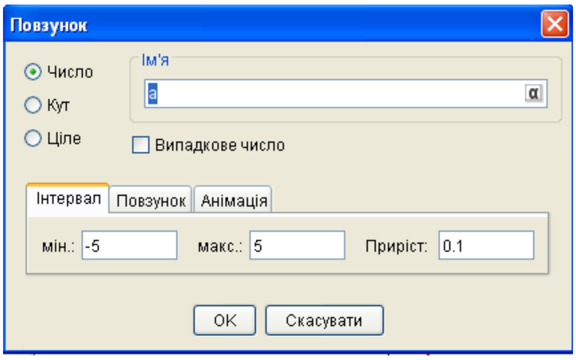
1. Побудова динамічних об’єктів.

Основноюособливістюпрограми GeoGebra єможливістьпобудовидинамічнихоб’єктів. Тобто, побудова геометричних конструкцій, які змінюються при зміні параметра (параметрів).

Інструментом, що дозволяє змінювати значення параметра в програмі GeoGebra є *Повзунок*

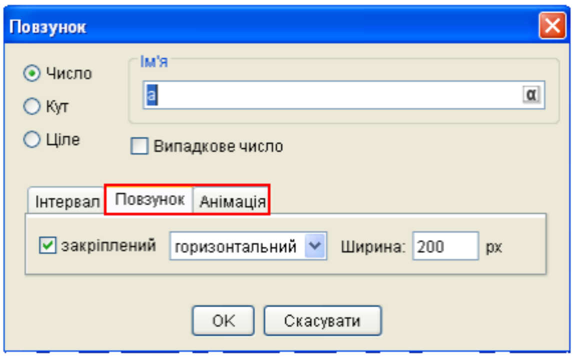


Побудову динамічного об’єкта потрібно розпочати з натискання кнопки *Повзунок* на панелі інструментів. Після цього потрібно клацнути лівою кнопкою миші (в любому місці графічного вікна. В результаті з’явиться вікно діалогу *Повзунок*, в якому потрібно задати характеристики повзунка: тип параметра (число, кут або ціле число), ім’я параметра, мінімальне і максимальне значення параметра, величину шагу зміни параметра.

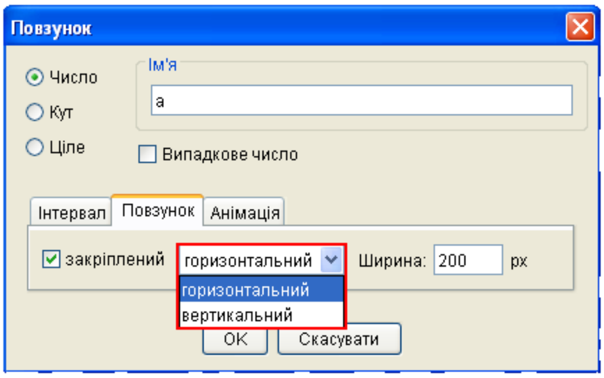


Мінімальне і максимальне значення визначається областю дійсних значень параметра, визначених змістом поняття “довжина відрізка”, “величина кута”.

У випадку коли параметр буде визначатися значенням кута, то його область дійсних значень і крок зміни можуть бути задані як в градусах, так і в радіанах. По замовчуванню одиницею вимірювання є градус. Діалогове вікно дозволяє встановити деякі властивості повзунка. Для цього існують вкладки *Повзунок* та *Анімація.*

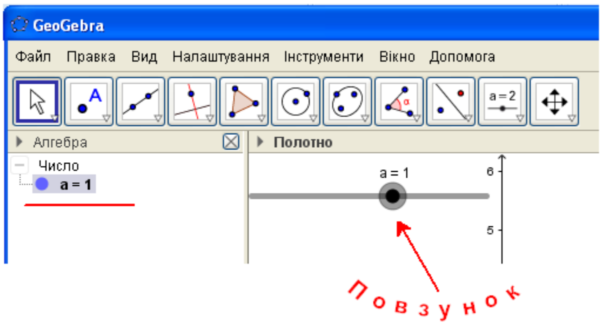


На вкладці *Повзунок* можна вибирати варіант розміщення повзунка (горизонтальний або вертикальний).

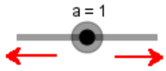


Дозволити чи заборонити його переміщення в графічному вікні за допомогою миші (прапорець *закріплений*), а також вибрати розміри повзунка (поле вводу *Ширина*).

Після визначення всіх характеристик повзунка потрібна нажати на *Ок*. В графічному вікні з'явиться зображення повзунка, а в панелі об'єктів символ та початкове його значення.



Для зміни початкового значення параметра потрібно скористуватися інструментом *Переміщення* . Після вибору інструмента потрібно захватити точку на повзунку та змінювати відповідне значення параметра.



Параметри, що задаються повзунком, можуть бути використані в описі геометричних фігур за допомогою рівнянь. Для цього в рядок введення достатньо записати рівняння, що містить цей параметр та нажати Enter. Крім цього, параметри можна використовувати для побудови геометричних фігур та конструкцій за допомогою елементів панелі інструментів.

Числові параметри використовуються наступними інструментами:

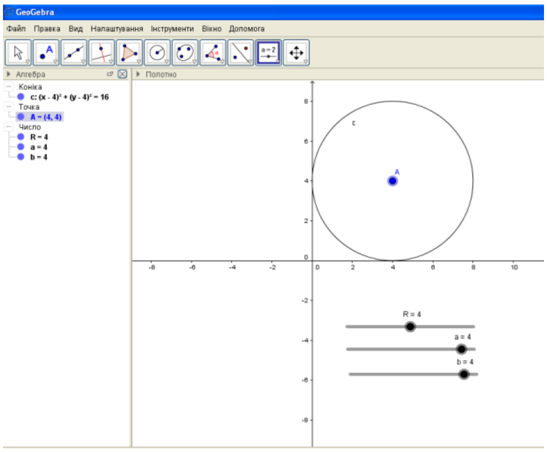
- Відрізок заданої довжини (параметр – *довжина*)
- Коло за центром та радіусом (параметр – *радіус*)
- Гомотетія відносно точки (параметр – *коефіцієнт гомотетії*)

Параметри, що визначають величину кута, можна використовувати в наступних інструментах:

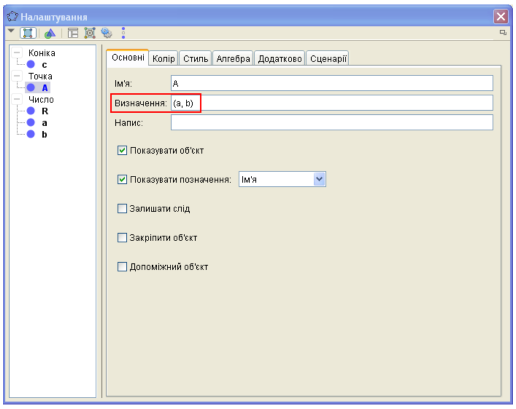
- Кут заданої величини (кутовий параметр – *величина кута*)
- Поворот навколо точки (кутовий параметр – *кут повороту*)

Продемонструємо використання повзунка для побудови динамічної фігури на прикладі кола з центром, абсциса і ордината якого можуть змінюватися в межах від -5 до 5, та із радіусом, діапазон якого можна змінювати в межах від 1 до 7.

Для реалізації даної побудови в програмі GeoGebra спочатку створимо повзунок, який відповідатиме за зміну радіуса (R) кола від 1 до 7 з кроком 0,1. Після цього вибираємо в панелі інструментів *Коло за центром та радіусом,* указуємо за допомогою мишів довільному місці графічного вікна точку, яка буде центром кола, а потім в діалоговому вікні *Коло за центром та радіусом* в полі для введення *Радіус* указуємо параметр R. (Рис.8)



Тепер потрібно добавити ще два повзунка, які будуть відповідати за зміну абсциси (параметр а) і ординати (параметр в) центра кола. Після цього в панелі об'єктів нажати правою кнопкою миші на об'єкт *Точка А* і в контекстному меню вибрати *Властивості…* , що приведе до появи діалогового вікна. В рядку введення *Визначення* потрібно ввести найменування параметрів (a;b), що відповідають за абсцису і ординату точки А.



Таким чином, змінюючи значення повзунків, ми змінюємо три параметри a,b і R.

Те ж саме можна було отримати безпосереднім записом в рядок введення рівняння кола: $(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=R^2$

Тепер розглянемо використання програми для розв'язування задач, що містять параметри.

3. Приклади використання програми для розв'язування задач з параметрами.

Задача 2.11. *Знайти всі значення параметра a, при яких функція* $f(x)=\frac{(a^2-1)}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+5$ ***зростає на R.***

1.Математичний розв'язок.

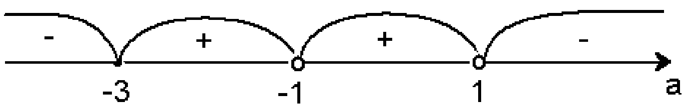
1) Розглянемо випадок коли $a^2-1=0$, тобто $a^2=1$, $a=\pm1$. Якщо $a=1$, то функція має вигляд $f(x)=2x+5$ і є зростаючою функцією. Якщо $a=-1$, то функція має вигляд $f(x)=-2x^2+2x+5$ - парабола.

2) Нехай $a\neq\pm1$. Дослідимо функцію за допомогою похідної. $f'(x)=(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$.

$f'(x)=0$, коли $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2=0$;

$$D=4(a-1)^2-4(a^2-1)*2=4(a-1)^2-4(a-1)(a+1)*2=$$
$$=4(a-1)((a-1)-2(a+1))=4(a-1)(a-1-2a-2)=$$
$$=4(a-1)(-a-3)=-4(a-1)(a+3)$$

Дослідимо знак дискримінанта:



Якщо $D>0$, то функція має дві екстремальні точки, тобто вона має проміжки зростання і спадання. Це дійсно для $a\in(-3;-1)\cup(-1;1)$.

Якщо $D<0$, то функція екстремальних точок не має. Це дійсно для $a\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Нас цікавлять випадки коли $f'(x)>0$ для всіх значень $x\in R$.

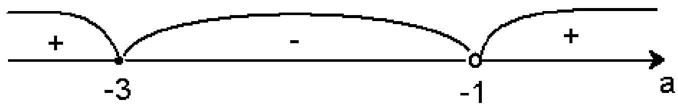
Графік функції $f'(x)$ є парабола, вітки якої направлені вверх. $(a^2-1)>0$ для $a\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.Знайдемо координати вершини параболи

$$x_b=\frac{-2(a-1)}{2(a^2-1)}=-\frac{1}{a+1}$$

$$y_b=\frac{a^2-1}{(a+1)^2}-\frac{2(a-1)}{a+1}+2=\frac{a-1}{a+1}-\frac{2(a-1)}{a+1}+2=$$
$$=\frac{a-1-2a+2+2a+2}{a+1}=\frac{a+3}{a+1}$$

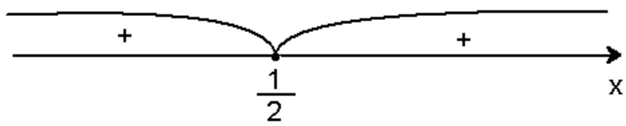
Нас цікавлять випадки коли $y_b > 0$. Тобто $\dfrac{a+3}{a+1}>0$

$(a+3)(a+1)>0$



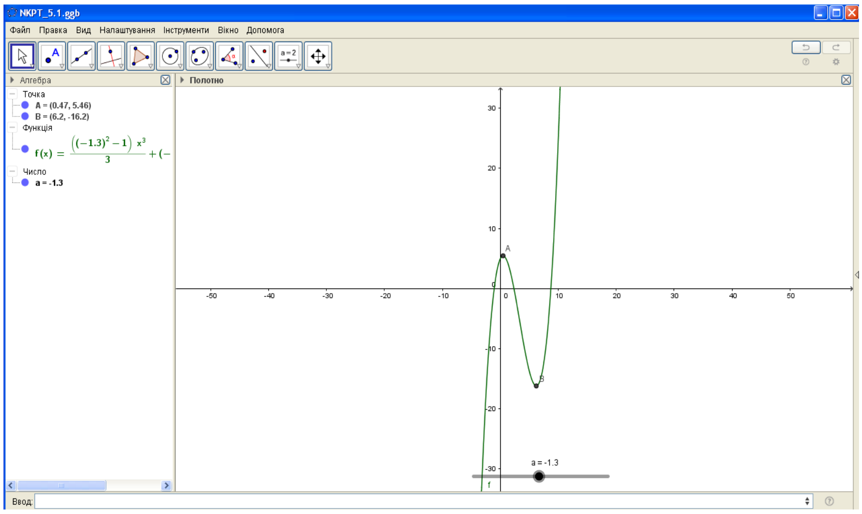
Це дійсно для $a \in (-\infty;-3) \cup (-1;+\infty)$. Враховуючи початкові умови отримуємо для $a \in (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$.

3) У нас залишився випадок коли $a=-3$. Тоді $f'(x)=8x^2-8x+2$ і $D=0$, $x_b=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$



Функція монотоно зростає.

2.Дослідження за допомогою програми GeoGebra.



а) на полотні розмістити повзунок $a, a \in [-50;50], h=0.1$;

б) побудувати функцію з параметром a

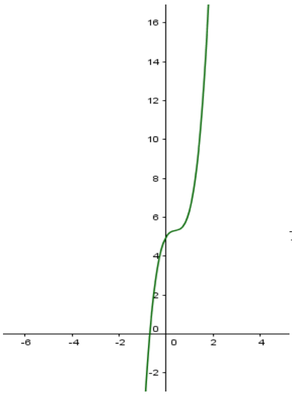
$f(x)=\dfrac{(a^2-1)}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+5$ та встановити екстремальні точки (на графіку це точки A і B);

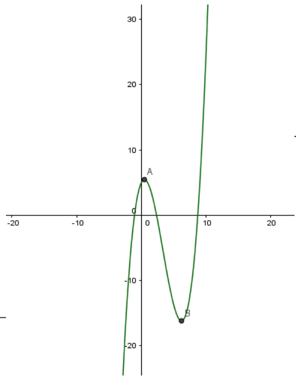
в) дослідити розміщення функції для різних значень a.

Висновки:

1) якщо $a \in (-\infty;-3)$ - графік функції зростаюча квадратна гіпербола, екстремальних точок не має. (Рис. 1.1)

2) якщо $a = -3$ - монотонно-зростаюча квадратна гіпербола, одна екстремальна точка.





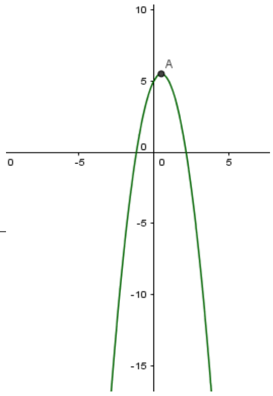
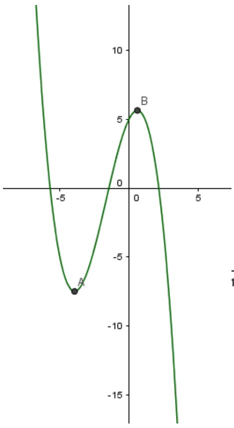


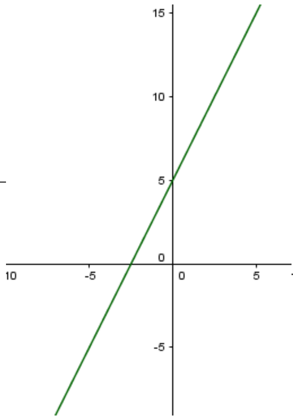
Рис. 1.1 Рис. 1.2 Рис. 1.3

3) якщо $a \in (-3;-1)$ - графік функції має проміжки зростання і спадання, дві екстремальні точки. (Рис. 1.2)

4) якщо $a = -1$ - графік функції перетворюється в параболу. (Рис. 1.3)

5) якщо $a \in (-1;1)$ - квадратна гіпербола має проміжки зростання, спадання та дві екстремальні точки. (Рис. 1.4)





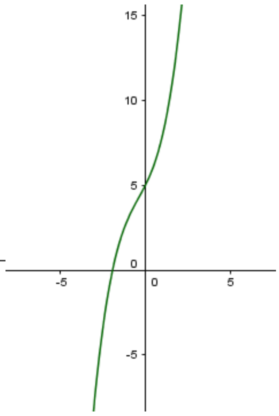


Рис. 1.4 Рис. 1.5 Рис. 1.6

6) якщо $a = 1$ - функція перетворюється в зростаючу лінійну функцію. (Рис. 1.5)

7) якщо $a \in (1;+\infty)$ - графік функції зростаюча квадратна гіпербола, екстремальних точок не має. (Рис. 1.6)

Відповідь: функція зростає для $a \in (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$ та для $a=-3$ монотонно зростає.

ЗАДАЧА 2. *Знайти всі значення параметра а, при яких система рівнянь не має розв'язків.* $\begin{cases} 2x+(a+6)y=a+3 \\ ax-4y=a+1 \end{cases}$

1.Математичний розв'язок.

Система не матиме розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. Тобто $\frac{a}{2}=\frac{-4}{a+6}\neq\frac{a+1}{a+3}$; $a^2+6a=-8$; $a^2+6a+8=0$.

За теоремою Вієта $a_1=-2, a_2=-4$

1) якщо $a_1=-2$, то $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. Система має безліч розв'язків.

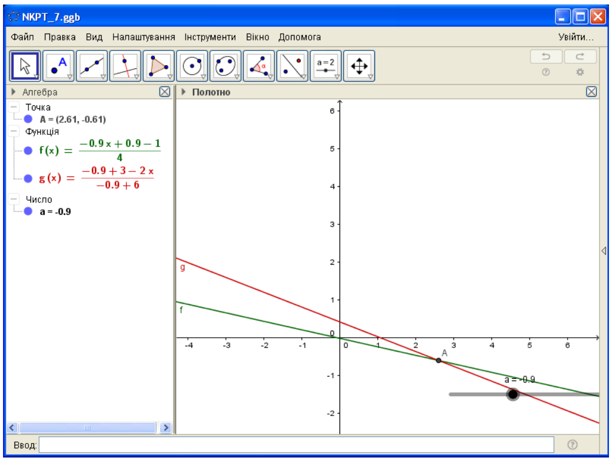
2) якщо $a_1=-4$, то $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. Система не має розв'язків.

2.Дослідження за допомогою програми GeoGebra.

а) на полотні розмістити повзунок $a, a\in[-5;5], h=0.1$;

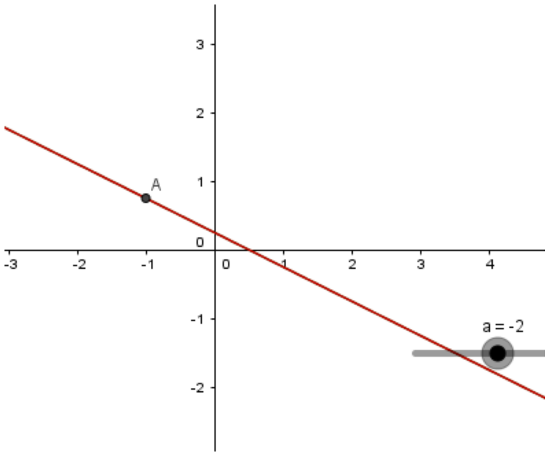
б) побудувати графіки функцій з параметром a

$f(x)=\frac{ax-a-1}{4}$ та $f(x)=\frac{-2x+a+3}{a+6}$. Вибрати в меню точку перетину функцій;

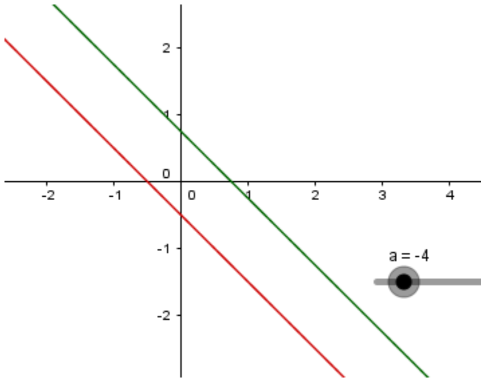


в) змінюючи значення параметра a за допомогою повзунка, розглянути різні випадки розміщення прямих.

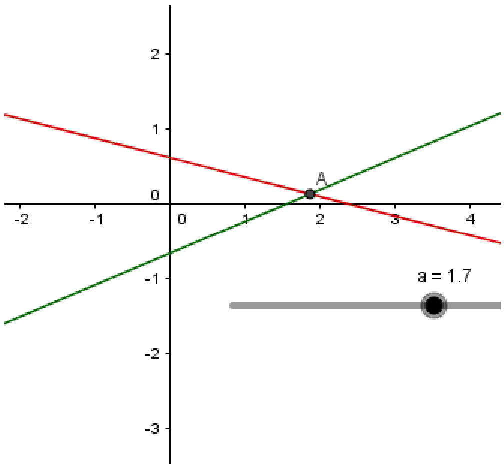
Якщо $a=-2$ обидва графіка співпадають. Тобто система має нескінчену кількість розв’язків.



Якщо $a=-4$ графіки не перетинаються. Тобто система не має розв’язків.



Для всіх інших значень параметра a графіки лінійних функцій мають одну спільну точку.

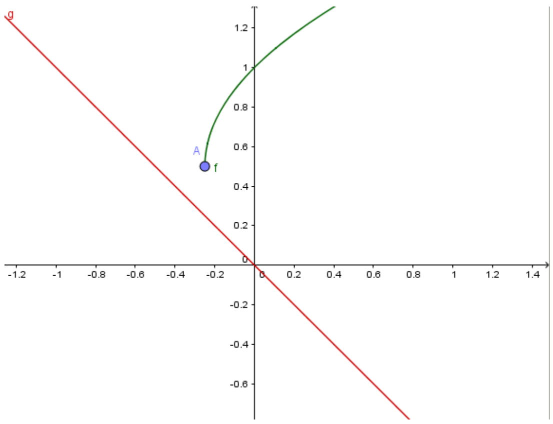


Відповідь: система рівнянь не має розвязків для $a=-4$.

Задача 2. 12. *Знайти розв'язки рівняння* $\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a-x$ ***взалежності від параметра*** a**.**

1.Математичний розв'язок.

Побудуємо схематично графіки функцій $y=\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}$ та $y=a-x$ для ($a=0$). Графік функції $y=a-x$ є графіком спадної лінійної функції. Графік функції $y=\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}$ є зростаюча крива, найменше значення якої є точка $A(-\frac{1}{4};\frac{1}{2})$.



Найменший розв'язок буде коли функція $y=a-x$ проходить через точку $A(-\frac{1}{4};\frac{1}{2})$. Тобто $\frac{1}{2}=a+\frac{1}{4};\ a=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. Значить для всіх $a\geq\frac{1}{4}$ завжди буде єдиний розв'язок.

Знайдемо його.

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a-x;$$

$$\sqrt{\sqrt{x+\frac{1}{4}}^{2}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}=a-x;$$

$$\left|\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right|=a-x.$$

Так як $\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\succ 0$, то

$$\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=a-x;\ \sqrt{x+\frac{1}{4}}=\left(a-\frac{1}{2}\right)-x$$

Візьмемо праву і ліву частини рівняння в 2-у степінь.

$$x+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)x+x^2;\ x^2-2ax+x+a^2-a+\frac{1}{4}-x-\frac{1}{4}=0;$$

$$x^2-2ax+a^2-a=0;\ D=4a^2-4(a^2-a)=4a^2-4a^2+4a=4a;$$

$$x_1=\frac{2a+2\sqrt{a}}{2}=a+\sqrt{a};\ x_2=a-\sqrt{a}\ .$$

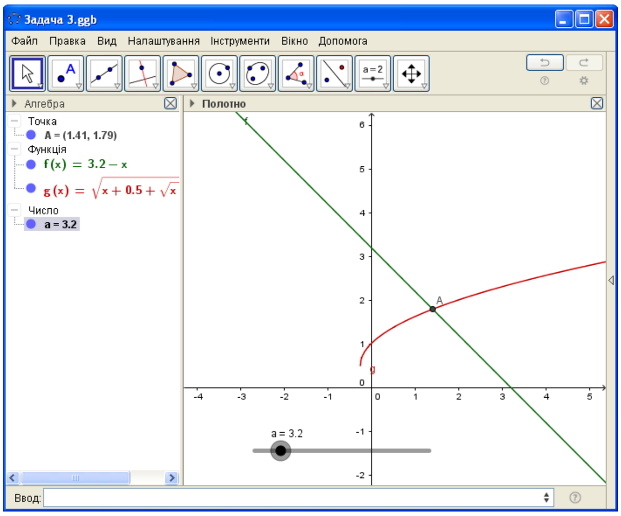
Так як $a-x\geq 0;\ x\leq a$, то $x_1=a+\sqrt{a}$ - зайвий корінь.

2. Дослідження за допомогою програми GeoGebra.

а) на полотні розмістити повзунок $a, a\in[-5;50], h=0.05$;

б) побудувати графік функції з параметром a

$f(x)=a-x$ та $f(x)=sqrt(x+0.5+sqrt(x+0.25))$. Вибрати в меню точку перетину функцій;



в) змінюючи значення параметра a за допомогою повзунка, розглянути різні випадки розміщення графіків.

Програма не дає можливості знайти загальну формулу розв'язку рівняння, але вона допомагає проаналізувати для яких значень параметра a графіки функцій перетинаються, тобто рівняння має єдиний розв'язок.

Відповідь: $x = a - \sqrt{a}$ для $a \geq \dfrac{1}{4}$.

Задача 2.13. *При якому значені параметра* a ***відстань між вершинами парабол*** $y = x^2 + 8x + 5$ ***і*** $y = 2x^2 - 8x + a + 2$ *є найменшою.*

1. Математичний розв'язок.

Знайдемо координати вершини параболи $y = x^2 + 8x + 5$

$$x_b = \frac{-8}{2} = -4;\ y_b = 16 - 32 + 15 = -1;\ A(-4;-1)$$

Знайдемо координати вершини параболи $y = 2x^2 - 8x + a + 2$

$$x_b = \frac{8}{4} = 2;\ y_b = 8 - 16 + a + 2 = a - 6;\ B(2; a-6)$$

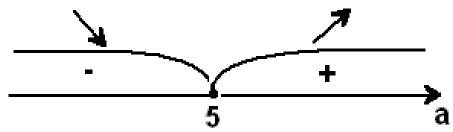
Визначимо відстань між вершинами парабол

$$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (-1-(a-6))^2} = \sqrt{36 + (5-a)^2}$$

Проведемо дослідження функції $f(a) = \sqrt{36 + (5-a)^2}$ та знайдемо її мінімальне значення.

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{36 + (5-a)^2}} \cdot (-2(5-a)) = \frac{a-5}{\sqrt{36 + (5-a)^2}}$$

$$\frac{a-5}{\sqrt{36 + (5-a)^2}} = 0;\ a = 5$$



$a = 5$ - локальний мінімум. Якщо $a = 5$, то відстань між вершинами парабол $AB = \sqrt{36 + (5-5)^2} = \sqrt{36} = 6.$

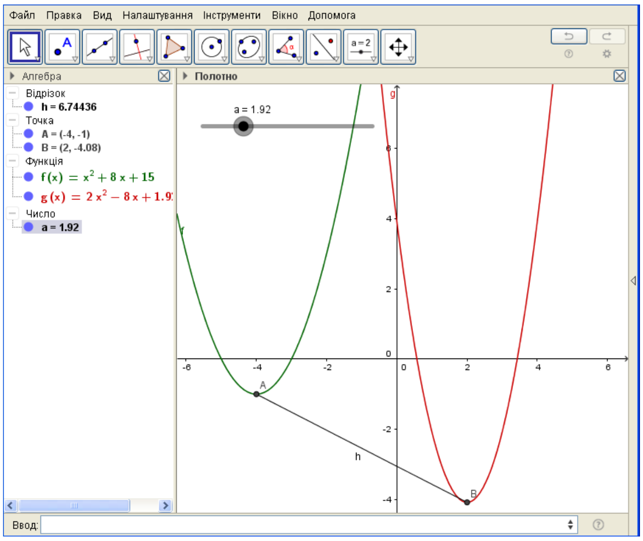
2. Дослідження за допомогою програми GeoGebra.

а) на полотні розмістити повзунок $a, a \in [0;8], h = 0.01$;

б) побудувати графіки функцій

$y = x\text{^}2 + 8 \cdot x + 5$ та $y = 2 \cdot x\text{^}2 - 8 \cdot x + a + 2$.

в) В меню програми вибрати Extremum для графіків функцій. На рисунку це відповідно точки A і B.



г) В меню програми вибрати “Відрізок” і з’єднуємо точки A і B. На панелі об’єктів це відрізок h.

д) В меню програми вибрати “Налаштування”- “округлення”-“5 десяткових розрядів”.

е) перемістивши повзунок, знаходимо найменше значення відстані між вершинами парабол $h = 6$ при $a = 5$.

Відповідь: $h = 6$ при $a = 5$.

Задача 2.14. *В залежності від значення параметра* a ***розв’язати рівняння*** $\sqrt{2x + a} = x - 2$**.**

1. Математичний розв’язок.

Областю дійсних значень змінної x є множина, що задовольняє системі нерівностей.

$$\begin{cases} 2x + a \geq 0; \\ x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Візьмемо праву і ліву частину рівняння в квадрат.

$$2x + a = x^2 - 4x + 4;\ x^2 - 6x - a + 4 = 0;\ D = 36 - 16 + 4a = 20 + 4a.$$

Якщо $D < 0$, тобто $20 + 4a < 0;\ 4a < -20;\ a < -5$, то рівняння розв’язків не має.

Якщо $D = 0$, тобто $a = -5$, то рівняння має один розв’язок $x = \frac{6}{2} = 3$, що задовольняє ОДЗ.

Якщо $D > 0$, тобто $a > -5$, то рівняння має два корені $x_1 = \frac{6+\sqrt{20+4a}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5+a}}{2} = 3+\sqrt{5+a};$

$x_2 = 3 - \sqrt{5+a}$.

Перевіримо чи задовольняють наші корені першій умові ОДЗ. Для $x_1 = 3+\sqrt{5+a}$:

$2(3+\sqrt{5+a})+a \geq 0;\ 6+2\sqrt{5+a}+a \geq 0;\ 5+a+2\sqrt{5+a}+1 \geq 0;$

$(\sqrt{5+a}+1)^2 \geq 0.$ Даний вираз дійсний для любого значення $a > -5.$

Для $x_2 = 3-\sqrt{5+a}$:

$2(3-\sqrt{5+a})+a \geq 0;\ 6-2\sqrt{5+a}+a \geq 0;\ 5+a-2\sqrt{5+a}+1 \geq 0;$

$(\sqrt{5+a}-1)^2 \geq 0.$ Даний вираз дійсний для любого значення $a > -5.$

Значить перша умова ОДЗ ніяких обмежень на корені не дає.

Перевіримо другу умову ОДЗ. Для $x_1 = 3+\sqrt{5+a}$:

$3+\sqrt{5+a}-2 \geq 0;\ 1+\sqrt{5+a} \geq 0.$ Даний вираз дійсний для любого значення $a > -5.$

Для $x_2 = 3-\sqrt{5+a}$:

$3-\sqrt{5+a}-2 \geq 0;\ 1-\sqrt{5+a} \geq 0;\ 1 \geq \sqrt{5+a};\ 1 \geq 5+a;\ a \leq -4.$

Тобто для $a \in (-4;+\infty)$ корінь $x_2 = 3-\sqrt{5+a}$ не існує.

Проаналізувавши розв'язок отримуємо відповідь.

Якщо $a \in (-\infty;-5)$, то рівняння розв'язків не має.

Якщо $a \in \{-5\} \cup (-4;+\infty)$, рівняння має один розв'язок $x = 3+\sqrt{5+a}.$

Якщо $a \in (-5;-4]$, рівняння має два розв'язки $x_1 = 3+\sqrt{5+a};\ x_2 = 3-\sqrt{5+a}.$

2. Дослідження за допомогою програми GeoGebra.

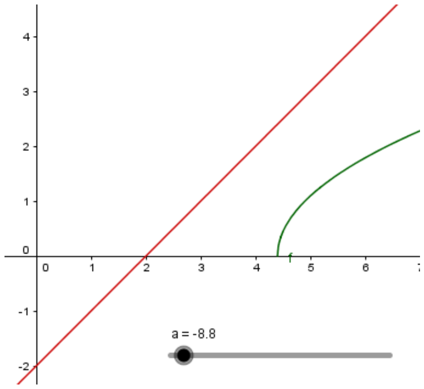
а) на полотні розмістити повзунок $a, a \in [-10;10], h = 0.05$;

б) побудувати графіки функцій

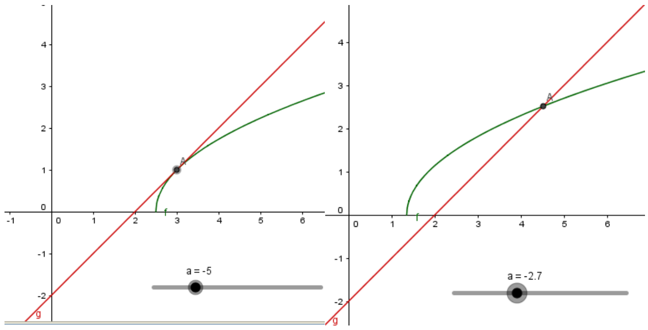
$y = sqrt(2x+a)$ та $y = x-2$.

в) змінюючи значення параметра a за допомогою повзунка, розглянути різні випадки розміщення графіків.

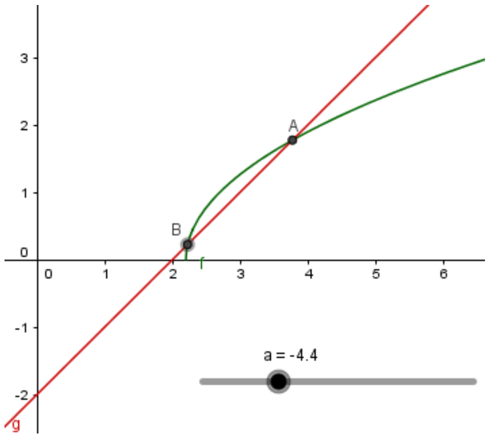
Якщо $a \in (-\infty; -5)$, то рівняння розв'язків не має.



Якщо $a \in \{-5\} \cup (-4; +\infty)$, рівняння має один розв'язок $x = 3 + \sqrt{5 + a}$.



Якщо $a \in (-5; -4]$, рівняння має два розв'язки $x_1 = 3 + \sqrt{5 + a}$; $x_2 = 3 - \sqrt{5 + a}$.



Відповідь: 1) Якщо $a \in (-\infty; -5)$, то рівняння розв'язків не має.

2) Якщо $a \in \{-5\} \cup (-4; +\infty)$, рівняння має один розв'язок $x = 3 + \sqrt{5 + a}$.

3) $a \in (-5; -4]$, рівняння має два розв'язки $x_1 = 3 + \sqrt{5 + a}$; $x_2 = 3 - \sqrt{5 + a}$.

Завдання з параметрами становлять хоч і невелику, але помітну частинуматематики. Матеріал, пов'язаний з рівняннями і нерівностями, що містять параметри, становить значну частину курсу. Це пояснюється тим, що рівняння і нерівності широко використовуються в різних розділах, при розв'язуванні важливих прикладних задач. Вивчення багатьох фізичних процесів і геометричних закономірностей часто призводить до розв'язування завдань, що містять параметри. Сьогодні немає необхідності доводити актуальність теми «Задачі з параметрами» в рамках навчання математики. Також завдання з параметрами включені в завдання ЗНО. Вони часто бувають дуже складними і вимагають нестандартного підходу до вирішення.

На перших заняттях розв'язування завдань з параметрами, не потрібно примушувати учнів розв'язувати задачі графічними методами. Необхідно дати йому можливість самостійного вибору методу розв'язання тієї чи іншої задачі (функціонального або аналітичного). І тільки після цього, на прикладах в порівнянні з аналітичним або функціональним методами показати переваги графічного методу, того що використання цього методу в сукупності часто спрощує і скорочує час вирішення тієї чи іншої завдачі з параметром.

GeoGebra це відмінний інструмент, який дозволить не просто урізноманітнити заняття з математики, а підвищити рівень якості розв'язування задач.

Використання програми GeoGebra на заняттях дозволяє:

- оптимізувати навчальний процес, більш раціонально використовуючи час;
- здійснювати диференційований підхід в навчанні;
- проводити індивідуальну роботу, використовуючи персональні комп'ютери;
-розширювати кругозір студентів;
- сприяє розвитку пізнавальної активності студентів.

Прогнозовані ефекти від застосування даної технології:

-можливе підвищення інтересу до досліджуваного предмета;

- підвищення рівня самооцінки;

- розвиток навички самоконтролю;

- спонукання до відкриття і вивчення нового в сфері інформаційних технологій.

Доцільніше використовувати в навчанні кожної окремої теми різні програми. Розглянемо деякі програми, які найбільш зручні у використанні під час вивчення декартових координат на площині.

ІКТ дозволяють учневі працювати у своєму власному режимі, не створюючи дискомфорту ні собі ні іншим. Навчання за допомогою цих засобів стають більш змістовними і видовищними, сприяють розвитку самостійності й творчих здібностей учнів, істотно підвищують рівень знань учнів.

Майстерність учителя на уроці полягає головним чином у вмілому володінні методикою навчання й виховання, творчому застосуванні сучасних педагогічних технологій і передового педагогічного досвіду, раціональному керівництві пізнавальною й практичною діяльністю учнів, їхнім інтелектуальним розвитком. Тому використання ІКТ на уроках математики є досить важливим кроком у майбутнє як у розвитку вчителя так і учня.

Актуальність проблеми використання ІКТ при викладанні шкільного курсу математики спонукає нас, як майбутнього покоління досвідчених педагогів, шукати все нові і нові шляхи її вирішення. І, напевно, вже ні для кого не буде секретом, що при вивченні даного предмету в школі застосування інформаційних технологій неминуче, адже немає такої галузі, де б сьогодні не використовувався комп’ютер. Це дозволяє зробити уроки більш цікавими, доступними, насиченими та видовищними, що буде сприяти розвитку пізнавального інтересу до вивчення математики.

Останнім часом освіта знаходиться в такій ситуації, коли є необхідність введення істотних змін у системі навчання і виховання дітей. Тому, на нашу думку, не слід захоплюватися лише опрацюванням і застосуванням ІКТ на уроках математики, а шукати і впроваджувати найрізноманітніші технології навчання учнів з метою вирішення широкого кола освітніх проблем[25].

3.2. Організація, проведення та результати педагогічного експерименту

Педагогічна діагностика була проведена для того, щоб визначити ефективність вивчення матеріалу за допомогою пакету програм GRAN1 та GRAN-2D.

Педагогічне діагностування — це вид діяльності, мета якої полягає у встановленні і вивченні ознак, що характеризують стан і результати процесу навчання, і дає змогу на цій основі прогнозувати можливі відхилення, визначати шляхи їх попередження, а також корегувати процес навчання з метою підвищення якості його результату.

Сутність педагогічної діагностики визначає її предмет: кого виховувати у відповідності з поставленими цілями і завданнями виховання за яких умов, хто і що при цьому повинен робити, якими засобами, шляхами, методами впливати на вихователів і вихованців.

Педагогічний експеримент проводився в Рокитнівському навчально-виховному комплексі «школаI-III ступенів-ліцей» Рівненської області. Для експерименту було обрано 9 клас з поглибленим вивченням математики та 11 клас з профільним навчанням математики. В 9 класі було проведено уроки з використанням програм GRAN1, GRAN-2D та GeoGebra до розв’язування задач методом координат на площині; в 11 класі - з застосовуванням комп’ютерної програми GeoGebra до розв’язування задач методом координат у просторі.

Перед проведенням експерименту були поставлені такі цілі:

1) активізувати діяльність учнів;
2) сприяти закріпленню знань з теми дослідження;
3) забезпечити можливість перевірити правильність розв’язку задачі;
4) урізноманітнити монотонну працю учнів.

Для учнів обох класів було підібрано ряд уроків з теми «Декартові координати на площині» з використанням пакету програм GRAN-1 таGRAN-2D. Задуми, які потрібно було організувати, було обговорено з учителями математики та інформатики.

Після проведення розроблених уроків учні виконали тестові завдання (Додаток Є), які дали змогу оцінити рівень їхніх знань. Результати перевірки знань показали, що під час уроків учні виявляли інтерес до матеріалу, намагались самостійно розв'язувати і досліджувати задачі, звертались з додатковими запитаннями.

Застосування пакету програм GRAN1 та GRAN-2D на уроках геометрії дає можливість зробити уроки більш різноманітними, заощадити час для повторення теоретичних питань та розв'язування задач.

Після уроку узагальнення та систематизації знань (див. Додаток В), було проведено контрольну роботу (див. Додаток Г).

Отже, можна зробити висновок, що застосування поданого в магістерській роботі матеріалу сприяє досягненню поставленої вчителем мети, підищенню рівня знань учнів.

ВИСНОВКИ

Досить простий в застосуванні, метод координат є необхідною складовою розв’язування завдань різного рівня. Використання даного методу, дозволяє учням значно спростити і скоротити процес розв’язування завдань, що допомагає їм при подальшому вивченні, як шкільного курсу математики, так і при вивченні математики у вищих навчальних закладах.

В даній магістерській роботі було розглянуто:

1) теоретичні основи теми дослідження. Розв’язування задач – це одна з активних форм навчання, у процесі якої учні знайомляться з новими математичними закономірностями, намагаються дещо по-іншому подивитися на вже відомі їм теоретичні факти, вчаться самостійно здобувати знання, розвивають логічне мислення;

2) історію виникнення та розвитку методу координат;

3) суть методу координат, яка полягає в тому, що кожній точці на площині за певним правилом ставляться у відповідність числа, які і називають координатами точки. Це дає можливість за допомогою чисел засобами алгебри робити дослідження властивостей фігур;

4) методику навчання учнів розв’язувати задачі методом координат.

Метод координат на площині знаходить широке застосування у розв’язанні задач з планіметрії. Це досить потужний засіб, оволодіння яким дає змогу набагато легше розв’язувати планіметричні задачі без використання різних теорем (теорема синусів, косинусів та ін.).

5) проаналізовано кілька діючих шкільних підручників щодо теми «Метод координат»;

6) різні підходи до введення систем координат на площині. Як приклад наведено геометричні задачі та прийоми вибору адекватного методу їх розв’язування.

Нами були розроблені самостійні та контрольні роботи, тестові завдання пов’язані з темою дослідження. Показано застосування комп’ютерних програм до розв’язування геометричних задач методом координат.

За допомогою задач із компетентнісним підходом можна навчити застосовувати учнів математичні знання в оволодінні майбутньою професією, сприяти розвитку математичної грамотності і творчих здібностей, розширити їх кругозір, вміти робити власні дослідження та висновки, розвивати уміння аналізувати логічно мислити при вирішенні виробничих і побутових проблем.

Застосування пакету комп’ютерних програм допоможе підвищити якість знань з геометрії, сформувати в учнів уміння перевіряти свої знання самостійно. Даний матеріал може бути використаний вчителями математики при здійсненні навчально-виховного процесу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – http://lib.mdpu.org.ua/e-book/ernestbook/temas/12_9.htm.

2. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – https://ankolpakov.ru/metod-koordinat-v-prostranstve-formuly-i-kommentarii-repetitora/.

3. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – https://naurok.com.ua/metodika-vikladannya-matematiki-89741.html.

4. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – https://naurok.com.ua/stattya-vikoristannya-ikt-na-urokah-matematiki-19886.html.

5. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – https://studfile.net/preview/6795145/.

6. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – https://www.mccme.ru/s43/math/uroki/2011_2012/11mat_1112/geom/g-1112-1104-koordinaty-sait.pdf.

7. [Електроннийресурс] : [Веб-сайт]. – https://www.yaklass.ru/materiali?mode=lsntheme&themeid=101.

8. Бевз Г. П. Геометрія. Поглиблений рівень: Підручн. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, В.М. Владіміров, Н.Г. Владімірова.— К.:Видавничий дім «Освіта», 2018. — 272 с.: іл.

9. Бевз Г.П. Геометрія. 9 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова. - К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.: іл.

10. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посіб. / Г.П.Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.

11. Белешко Д.Т. Практикум по решению геометрических задач. Часть I./ Д.Т.Белешко – Ровно: Ровенский обласной институт усовершенствования учителей, 1986. – 30-39 с.

12. Боднар С.М. Формування ключових компетентностей на уроках математики/ Укладач С.М.Боднар// Математика в школах України. – 2019 - №7-9(595-597) - с.4-6.

13. Бурда М.І. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. - К. : УОВЦ «Оріон», 2017. – 224 с.: іл.

14. Васильєва Л. В.Чисельні методи розв’язання інженерних задач у пакеті MathCAD: Навчальний посібник з дисципліни “Інформатика” для студентів вищих навчальних закладів./ Л. В. Васильєва, О. А. Гончаров, В.А.Коновалов, Н. А. Соловйова – Краматорськ, 2006. – 109 с.

15. Великий довідник школяра з тестовими завданнями / [авт. тексту Г.П.Бевз]. – К.: Махаон-Україна, 2007. – 864 с.

16. Гельфанд І.М. Метод координат/ І.М.Гельфанд, О.Г.Глаголєва, О.О.Кирилов – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. -216 с.

17. Гельфанд І.М. Метод координат: навч. посіб. / І.М.Гельфанд, О.Г.Глаголєва, О.О.Кирилов. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 216 с.

18. Глейзер Г.И. История математики в школе / Герш Исаакович Глейзер. – М.: Просвещение, 1964. — 376 с.

19. Готуємося до нового навчального року [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – http://www.library.ukma.edu.ua.

20. Дерев’яненко Н. Декартові координати на площині/Н.Дерев’яненко // Математика. – 2011. - № 45. – С. 5-8.

21. Дерев’яненко Н. Декартові координати на площині/Н.Дерев’яненко // Математика. – 2011. - № 46-47. – С. 45-47.

22. История математики: в 3-х т. / под. ред. А.П.Юшкевича - М.: Наука, 1970. – Т.2: Математика XVII столетия. – 301 с.

23. Істер О. С. Геометрія : підручник для 9 кл.загальноос. нав. закладів / О. С. Істер. – К. : Генеза, 2017. – 240 с.: іл.

24. Кобильник Т.П. Програмування в середовищі Mapleдля розв’язування задач аналітичної геометрії/ Т.П.Кобильник // Дидактика в математиці– 2006. - №26. - С.160-164.

25. Кузьмук І. В. Координати середини відрізка 9 клас/І. В.Кузьмук// Математика в школах України. – 2019 - №19-21(607-609) - с.47-51.

26. Маркевич І.О. Навчання учнів методам розв’язування планіметричних задач: методичний посібник. / І.О.Маркевич, Г.Я.Клекоць, Д.Т.Белешко. – Рівне, 2013. – 35 с.

27. Мельник Г. М. Інноваційні методи навчання математики/ Г.М.Мельник // Математика в школах України. – 2019 - №34-36(622-624) - с.5-6.

28. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір.— Х.: Гімназія, 2017. — 304 с.: іл.

29. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір.— Х.: Гімназія, 2017. — 240 с.: іл.

30. Навчальна програма для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів з математики // Міністерство освіти і науки України. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – http://www.mon.gov.ua.

31. Педагогічний експеримент : навч.-метод. посіб. / [укладач О. Е. Жосан]. – Кіровоград : Видавництво КОІППО імені Василя Сухомлинського, 2008. – 72 с.

32. Полонський В.Б. Вчимось розв’язувати задачі з геометрії: навч.-метод. посібник / В.Б.Полонський, Ю.М.Рабінович, М.С.Якір. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2002. – 240 с.

33. Попова Ю.А. Використання координатного та векторного методу в шкільному курсі геометрії/ Ю.А.Попова, Б.Б. Бесідін//Збірник наукових пряць математичного факультету ДДПУ. – 2013 - №3 - с.150-153.

34. Присяжнюк М.М. Загальні методи розв’язування геометричних задач на доведення: посібник для студентів спеціальності «математика» / М.М.Присяжнюк, О.В.Ткачук. – Рівне, 2013. – 102 с.

35. Програма ЗНО з математики 2020 [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. –https://osvita.ua/test/program_zno/1126/.

36. Склярова І.О. Календарне планування на 2017-2018 рр.. Математика. 5-11 класи / І.О. Склярова. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – http://matematikazp.blogspot.com/p/2017-2018.html .

37. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. / З.І.Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с: іл.

38. Филипповский Г.Б. Рене Декарт. Декартова система координат/Г.Б.Филипповский // Математика в школах України. – 2011. - № 35-36. – С. 22-27.

39. Шевчук Л.В. Декартові координати на площині/Л.В.Шевчук // Математика в школах України. – 2011. - № 35-36. – С. 30-32.

ДОДАТКИ Додаток А

Самостійна робота №1

Координати середини відрізка. Відстань між двома точками

Варіант 1

1. Знайдіть координати точки Р - середини відрізка ХУ, якщо Х(1; 6),У(7; 8).

2. Точка О — середина відрізкаCD. Знайти координати точки C, якщоO(0; -1), D(6;-7).

3. Знайдіть відстань між точками M (5; 2) і N (7; 8).

4. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках А(- 3; 0), В (3; 3), С (0; - 3) рівнобедрений з основою АС.

Відповідь.

1. Р(4; 7). 2. С(-6; 5). 3. $\sqrt{40}$.

4. Вказівка. Знайти середини основ трикутника та визначити довжини медіан.

Варіант 2

1. Знайдіть координати точки Р - середини відрізка СВ, якщо С(5; 7) , В(3;7).

2. Точка О — середина відрізкаМК. Знайти координати точки М, якщоO(1; -3), K(-4;-5).

3. Знайдіть відстань між точками M(- 4; 6) і N(5; 6).

4. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках А (- 1; 4), В(1; 4), С (0; -5) рівнобедрений з основою АВ.

Відповідь.

1. Р(4;7). 2. М(6;-1). 3. 9.

4. Вказівка. Знайти середини основ трикутника та визначити довжини медіан.

Самостійна робота №2. Рівняння кола

Варіант 1

1.Знайдіть координати центра кола, заданого рівнянням $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. Вкажіть радіус цього кола.

2. Знайдіть координати центра кола, його радіус та запишіть рівняння цього кола, якщо кінцями діаметра даного кола є точки A(1; 5) і B(1; 1).

3. Знайдіть координати точок перетину кола $(x-2)^2 + (y - 4)^2 = 2$ з прямою $y= 5$.

Відповідь.

1.R=4; O(3;-2).

2.O(1;3); r=2; $(x-1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

3.M(3;5); K(1;5).

Варіант 2

1.Знайдіть координати центра кола, заданого рівнянням $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$. Вкажіть радіус цього кола.

2. Знайдіть координати центра кола, його радіус та запишіть рівняння цього кола, якщо кінцями діаметра даного кола є точки A(0; 4) і B(0; 0).

3. Знайдіть координати точок перетину кола $x^2 + y^2 = 20$ з прямою $y= x- -2$.

Відповідь.

1.O(-5;4); r=3.

2.O(0;2); r=2; $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

3. M(4;2); K(-2;4).

Самостійна робота №3. Рівняння прямої

Варіант 1

1. Дано відрізок, координати кінців якого точки A(2; -6), B(-4; 8). Знайти координати середини відрізка.

2. Вкажіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої 10x -2y +8 = 0.

3. Знайдіть відстань між точками M(- 4; 6) і N(5; 6).

4. Коло задане рівнянням $(x-2)^2+(y+4)^2=7$. Знайти координати його центра і радіус.

5. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки (4;- 6) і (-3; 2).

Відповідь.

1. (-1;1). 2. k=5 3. MN = 9.

4. (2;-4), R=$\sqrt{7}$. 5. $y=-\frac{8}{7}x-\frac{10}{7}$.

Варіант 2

1.Дано відрізок, координати кінців якого точки A(5; -9), B(-1; 5). Знайти координати середини відрізка.

2. Вкажіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої 12x + 3y – 6 = 0.

3. Знайдіть відстань між точками M (5; 2) і N (7; 8).

4. Коло задане рівнянням $(x-5)^2+(y+4)^2=8$. Знайти координати його центра і радіус.

5. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки (5; -2) і (-3; 1).

Відповідь.

1. (2;-2). 2. k=4. 3. MN = $\sqrt{40}$.

4. (5;-4), R=2$\sqrt{2}$. 5. $y=-0.375x-0.125$.

Додаток Б

Тестові завдання

1. Середина відрізка з кінцями K(-6;8) і M(2;-2) має координати: А)(-2;3); Б)(-4;6); В(-8;10); Г(-4;5).
2. Відстань між точками P(5;3) і C(2;-1) дорівнює... А)53; Б) √53; В)5; Г) √13.
3. Рівняння кола з центром у точці B(2;-1) і радіусом 3 має вигляд...

А)$(x+2)^2+(y-1)^2=9$

Б)$(x-2)^2+(y+1)^2=3$

В)$(x+2)^2+(y-1)^2=3$

Г)$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

4. Основа перпендикуляра, опущеного з точки A(-5;4) та вісь Ox, має координати... А)(0;-5); Б)(0;4); В)(-5;0); Г)(4;0)

5. Довжина медіани BM трикутника ABC з вершинами A(-3;3), B(4;1) і C(3;5)дорівнює...А)5; Б) √65; В)65; Г)25.

6. Точка K, яка належить осі абсцис і рівновіддалена від точок A(-1;4) і B(5;2) має координати...

А) (-5;2); Б) (-10;4); В) (-4;10); Г) (-2;5).

7. Середина відрізка з кінцями N(-8;6) іF(-2;2) має координати... А) (-10;8); Б)(-3;2); В)(-5;4); Г)(-4;5).

8.Відстань між точками K(11;-1) і B(10;1) дорівнює... А) 1; Б) √21; В) 21; Г) √5.

9.Рівняння кола з центром у точці B(-3;1) і радіусом 4 має вигляд... А)$(x+3)^2+(y-1)^2=16$;

Б)$(x-3)^2+(y-1)^2=4$;

В)$(x-3)^2+(y+1)^2=16$;

Г) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

10.Основа перпендикуляра, опущеного з точки A(4;-5) на вісь Oy, має координати... А)(0;-5); Б)(0;4); В)(-5;0); Г(4;0).

11.Довжина медіани AF трикутника ABC з вершинами A(0;-1), B(2;1) і C(-2;3)дорівнює... А) 9; Б)5; В)25; Г)3.

12.Точка А, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок M(-1;2) і N(5;4),має координати...

А)(9;0);Б)(2;3); В)(0;9); Г)(4;2)

Відповідь.

Завдання	Правильна відповідь
1	А
2	В
3	Г
4	В
5	А
6	А
7	В
8	Г
9	А
10	А
11	Г
12	В

Додаток В

Конспект уроку

Тема уроку. Відстань між двома точками площини із заданими координатами.

Мета уроку: повторити, узагальнити та систематизувати знання з теми «Прямокутна система координат»; узагальнити і систематизувати вміння будувати точки із заданими координатами на координатній площині та знаходити координати точок за їх зображенням. Працювати над засвоєнням учнями змісту теореми, що виражає формулу відстані між двома точками в прямокутній системі координат, а також способу її доведення, формувати в учнів уявлення про сферу застосування формули відстані між двома точками, вміння відтворювати вивчену формулу, записувати її відповідно до умови задачі, а також використовувати для розв'язування задач на обчислення.

Розвивальна: розвивати творчі пізнавальні здібності та навички учнів; прищеплювати вміння спілкуватися для здійснення спільної діяльності; аналізувати, робити висновки; розвивати уяву.

Виховна: сприяти вихованню відповідальності учнів за результати виконання завдань, сприяти розвитку комунікативних умінь, взаємоповаги, взаємодопомоги, почуття колективізму, культуру поведінки, виховувати повагу до пам'яті видатних діячів в області математики.

Форми роботи на уроці: індивідуальна, групова, робота в парах.

Міжпредметні зв'язки: історія**,** інформатика.

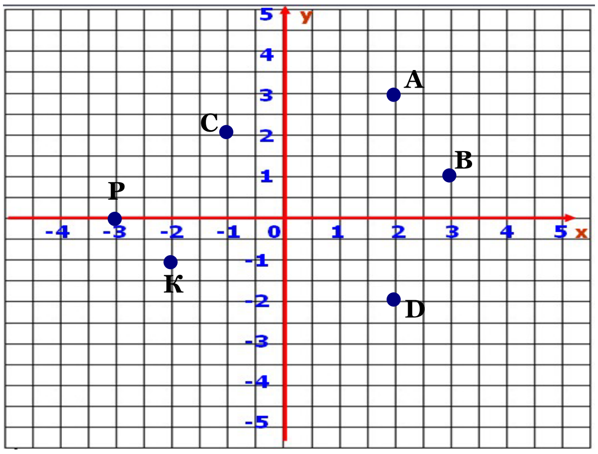
Хід уроку

1.Повідомлення теми уроку і епіграфа.

2. Планування очікуваних результатів.

3.Актуалізація опорних знань і умінь учнів

У якої з точок неправильно позначені координати(**за комп'ютером):**



A (2;3); B (3;1); C (-1;2); D (-2;2); P (0;-3); К (-2;-1)

(Це точки D та P)

Встанови відповідність за допомогою стрілок:

A (-145; 200) III чверть

D (- 139;- 247) II чверть

C (218; 203) IV чверть

B (358; - 422) I чверть

Побудувати точки

А(3;-1), В(4;2), С(-3;-2), К(-2;0), Д(-1;-4).

Продовжи речення.

- Осі координат розташовані одна відносно іншої…(перпендикулярно)
- Горизонтальна вісь називається…(вісь абсцис)
- Вертикальна вісь називається…(вісь ординат)
- Точка перетину осей – це..(початок координат)
- Координати точки – це…(абсциса, ордината)
- Координатних чвертей є (4)
- Прямокутну систему координат по іншому називають…(Декартовою)

Історична довідка.

Завдання. В якому році було введено поняття прямокутної системи координат? (1637)

Скільки років тому було введено це поняття?(378)

Рене Декарт народився у Франції 31 березня 1596 року. Він отримав від батька невеликий спадок, який дозволив йому присвятити своє життя науці та мандрівкам. З 1604 по 1612 роки Декарт навчався в єзуїтському коледжі, де отримав добру гуманітарну та математичну освіту. Він проявляв великі здібності до філософії, фізики та психології. Через слабке здоров'я директор коледжу звільнив Декарта від відвідування ранкових богослужінь і дозволив йому залишатися у ліжку до полудня — звичка, яка збереглася у Декарта на все життя. Після коледжу Декарт навчався в університеті Пуатьє, отримавши в 1616 диплом бакалавра і ліцензію правника, виконуючи волю батька, який бажав, щоб син став юристом. Коли йому виповнився 21 рік, він кілька років служив добровольцем в арміях Голландії, Баварії та Угорщини.. У 1629 році переїхав до Нідерландів. Декарт надавав великого значення практичному використанню наукових знань. Так, його цікавило, яким чином можна зберегти волосся від посивіння. Він проводив також досліди з крíслом-гойдалкою. Для продовження занять математикою Декарт повернувся до Парижа.

У 1637 році написав математичний трактат « Геометрія», в якому були закладені основи аналітичної геометрії. Він показав, як завдяки системі координат можна переходити від точок до числа, від ліній до рівнянь, від геометрії до алгебри. Систему координат, якою ми сьогодні користуємося, називають Декартовою. Це пов’язано з тим, що Рене Декарт у своїй роботі “ Міркування про метод» винайшов нову зручну буквену символіку, а саме: ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x,y,z, а коефіцієнти – першими а,в.с.

- А яких українських математиків ви знаєте? (Михайло Остроградський, Георгій Вороний, Михайло Кравчук, Володимир Левицький, Віктор Глушков,Мирон Зарицький**).**

4. Пояснення нового матеріалу. Перед нами стоїть завдання: дослідити можливість визначення відстані між двома точками через їхні координати в прямокутній системі координат.

Дано: A (x_1; y_1) B (x_2; y_2) Знайти: AB (виразимо відстань між точками через координати цих точок)

Розв’язання

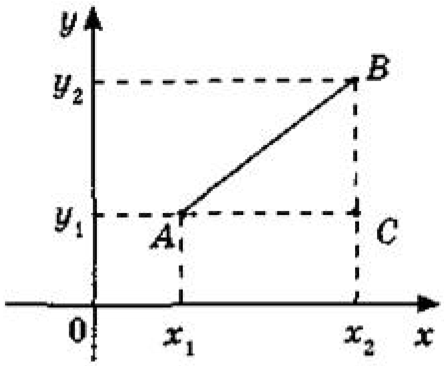


Рис. 137

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$.

Проведемо через точки A і B прямі, паралельні осям координат і позначимо через точку C точку їх перетину.

- Яка фігура утворилася?

- Який трикутник?

- Як називаються сторони трикутника?

- Як знайти гіпотенузу?

Відстань між точками C і A дорівнює $|x_2 - x_1|$, а відстань між точками B і C дорівнює $|y_2 - y_1|$

За т. Піфагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$ $AC = |x_2 - x_1|$, $BC = |y_2 - y_1|$. За теоремою Піфагора маємо: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ або $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$,

$AB = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Отже, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Читання формули. Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат.

Хоча формула для відстані між точками виведена у припущенні $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$, вона залишається правильною і для інших випадків. Справді, якщо $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, то відстань між точками дорівнює $|y_1 - y_2|$. Такий самий результат дістанемо і за формулою. Аналогічно розглядається випадок, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 = y_2$. Якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, то точки А і В збігаються і за формулою відстань між ними дорівнює 0.

Іноді відстань між точками позначають $\mathbf{d^2} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

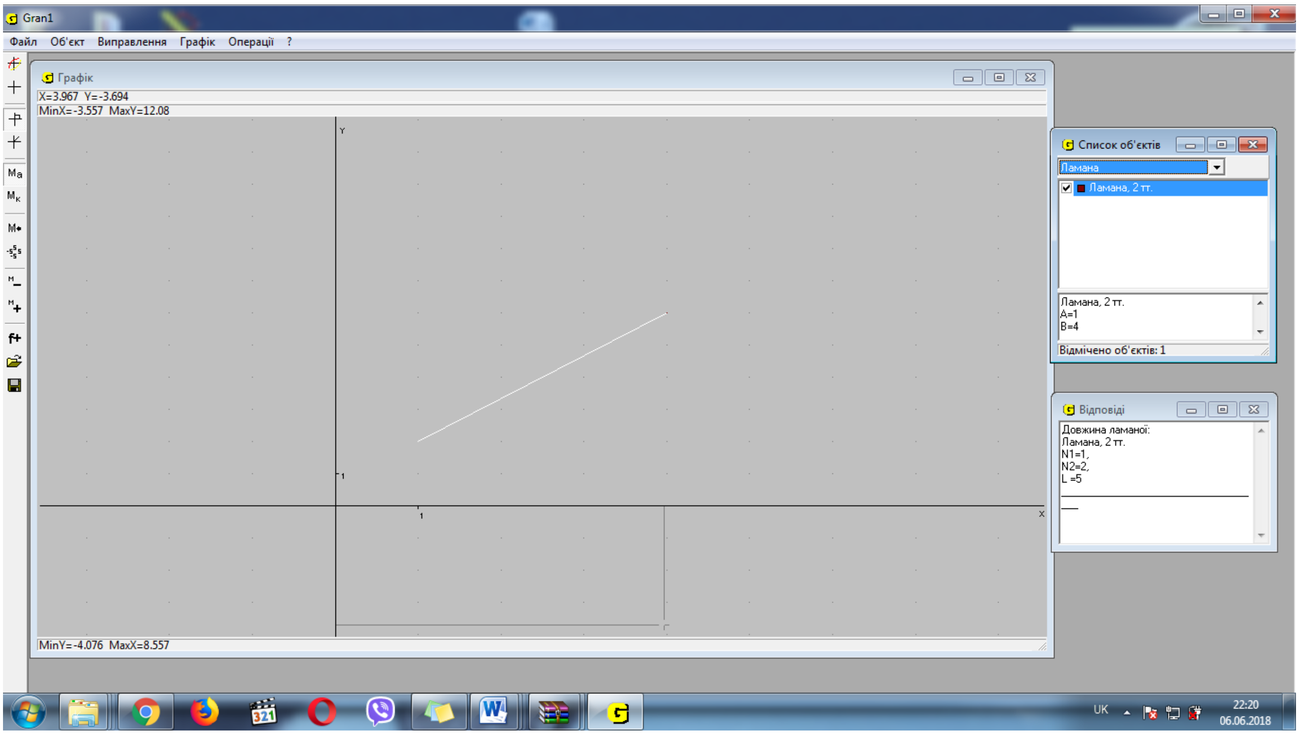
5.Засвоєння нових знань і вмінь.

Усно

Знайти відстань між точками: А(1)і В(5); А(-5)і В(-1); А(-3)і В(5); А(а)і В(в)

Знайти відстань між двома точками.

А(1;2) і В(4;6)



Робота в парах

1. Знайти відстань А(1;7) і В(-5;-1).

$$\sqrt{(-5-1)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} =$$

$$= 6\sqrt{2};$$

2. Знайти відстань A(-1;3) і B(3;0).

$$\sqrt{(3+1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5;$$

3.Знайти відстань від точки A(2;4), до початку координат. Порівняти, яка відстань є більшою.

$$\sqrt{(0-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

4.Знайдіть відстань від точки A(-5; 12) до початку координат.

$$\sqrt{(0+5)^2+(0-12)^2}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

Колективна робота

Запитання:

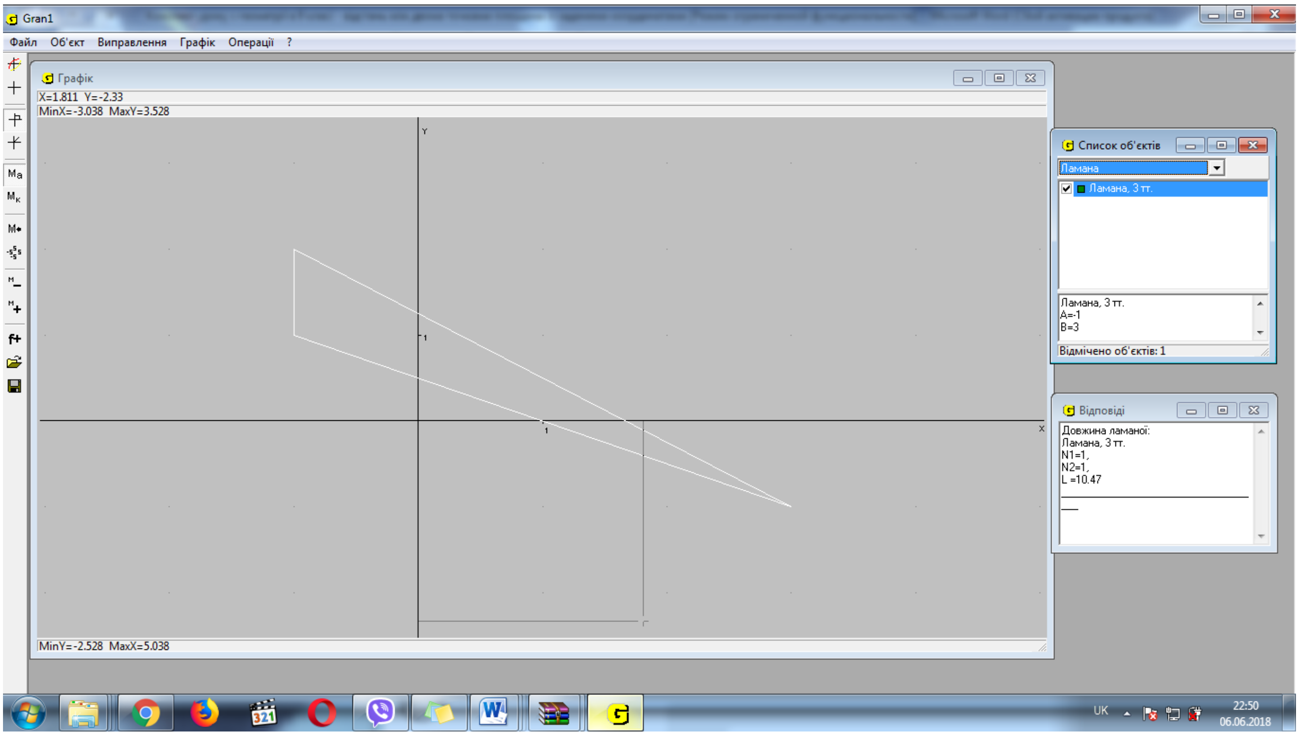
-Який трикутник називається рівнобедреним? (У якого рівні дві сторони)

- Як називаються рівні сторони?
- Як називається третя сторона?
- Що ми знаємо ще про рівнобедрений трикутник?

Робота в групах (з використанням програми GRAN-1).

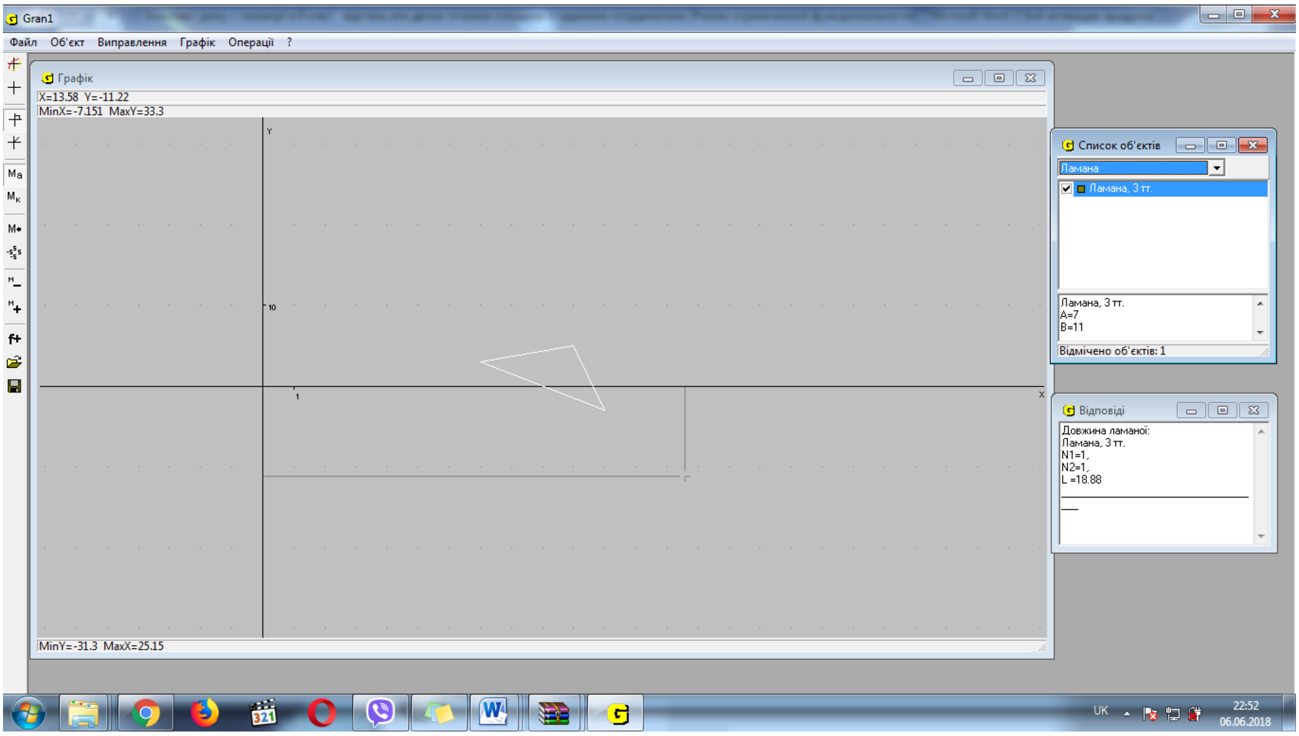
1 група.

1.Побудуйте ізнайдіть периметр трикутника, вершинами якого є точки A(-1;2), B(3;-1), C(-1;-1).



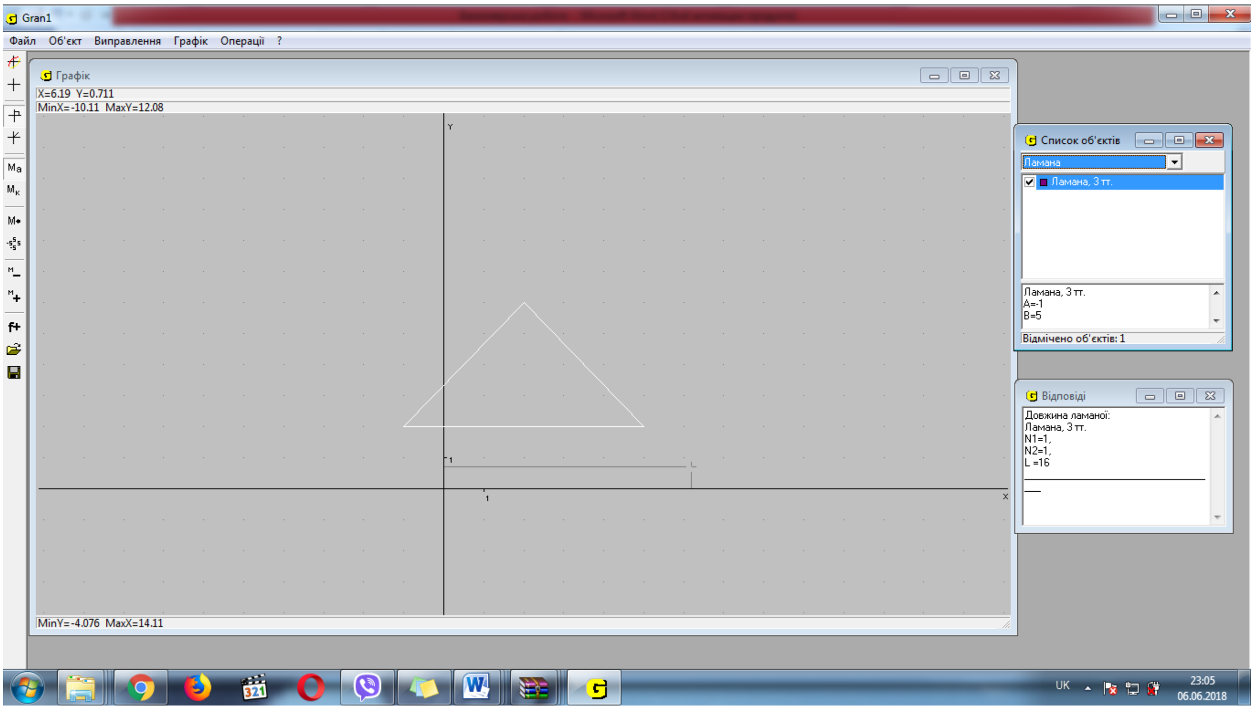
2 група.

1. Побудуйте ізнайдіть периметр трикутника, вершинами якого є точки A(5;-4), B(-1;4), C(5;4).



3 група.

1. Побудуйте ізнайдіть периметр ламаної ABC, вершинами якої є точки A(-1;2), B(2;6), C(5;2).



6. Підсумок уроку.

Гра « Так чи ні». Яке з наведених тверджень є правильним?

- Зазвичай на координатній площині зображають двоє осей.
- Вісь ОХ називають віссю ординат.
- Вісь ОУ називають віссю абсцис.
- Друга координата точки називається ординатою.
- Якщо точка А лежить на осі ординат, то її абсциса дорівнює 0.
- Якщо точка А збігається з початком координат, то її обидві координати дорівнюють 0.
- Точки осі абсцис мають ординати, що дорівнюють 0.
- Точка В(-2;-2) належить 2 чверті.
- Точка з координатами (5;0) віддалена від початку координат на відстань 5 одиниць.

Рефлексія

-Чи справдилися ваші очікування?

- Я дізнався про…
- Я повторив…

- Мені було важко…

- Я можу пояснити…

- Мені сподобалося…

7. Домашнє завдання

1. Вивчити формулу для знаходження відстані між двома точками, які задано координатами.
2. Розв'язати задачі.
   1) Знайдіть радіус кола, центром якого є точка *M*(-4; 3), а точка *A*(-4; 2) лежить на колі.

$$\sqrt{(-4+4)^2+(2-3)^2}=\sqrt{0^2+(-1)^2}=\sqrt{0+1}=1$$

   2) Знайдіть периметр трикутника *ABC,* якщо *A*(-1; 3), *B*(3; 5), *C*(3; 2).

$$\sqrt{(3+1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20};$$

$$\sqrt{(3-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{0+9}=3;$$

$$\sqrt{(-1-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17};$$

$$\mathrm{P}=\sqrt{20}+3+\sqrt{17}.$$

Висловлювання Декарта

- Бог може все, що я вважаю можливим

- Прагни перемагати швидше самого себе, ніж долю, і змінювати своє бажання, ніж - порядок у світі.

- Здоровий глузд — найбільш розповсюджена річ у цьому світі, оскільки кожен думає, що він наділений ним повною мірою.

- Прагнення відмінностей при нестачі характеру згинає одну людину перед іншою.

- Ми можемо давати собі звіт щодо стану нашого здоров’я, але щодо стану розуму — ніколи.

- Я мислю — отже існую.

- Правильно визначайте слова, і ви позбавите світ від половини непорозумінь.

- Всі науки настільки пов’язані між собою, що легше вивчати їх всі відразу, ніж якусь одну із них окремо від інших.

- Мало мати хороший розум, головне — правильно його використовувати.

- Розпач — це страх без надії.

Додаток Г

Контрольна робота

Декартовові координати на площині

Тематична контрольна робота соадається з трьох рівнів. Завдання 1-3 тестові і оцінюються по 1 балу; завдання 4-6 — оцінюється 2 балами; завдання 7— 3 бали, всього — 12 балів.

Варіант 1

І рівень.

1.Знайдіть координати точки В - середини відрізка АС, якщо С (0; 4), А (2; 8).

2. Записати кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $y = 3x+5$.

3. Вказати координати центра і радіус кола, заданого рівнянням

$(x – 3)^2 + (y – 4)^2 = 4$.

ІІ рівень.

4. Знайдіть відстань між точками Р (-3; 5) і Q (1; 2).

5. Складіть рівняння кола з центром в точці О (2; - 4) і $R=\sqrt{5}$.

6. Вкажіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $2x – 4y – 7 = 0$.

ІІІ рівень.

7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки (0; - 3) і (- 2; 1).

Варіант 2

І рівень.

1. Знайдіть координати точки К - середини відрізка АВ, якщо А (1; 0), В (5; 14).

2. Записати кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $y = 2x - 3$.

3. Вказати координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$.

ІІ рівень.

4. Знайдіть відстань між точками F (3; 0) і Е (-2;12).

5. Складіть рівняння кола з центром в точці О (-1; 9) і $R=\sqrt{7}$.

6. Вкажіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої $3x + 4y - 9 = 0$

ІІІ рівень.

7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки (2; 3) і (4; 1).

Відповідь.

Завдання	1	2	3	4	5	6	7
Варіант 1	B(1;6)	k=3	r=2; O(3;4)	5	$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$	-2	y=-2x-3
Варіант 2	K(3;7)	k=-2	r=3; O(2;5)	13	$(x+1)^2 + (y-9)^2 = 7$	1	y=-x+5

Додаток Д

Конспект уроку

Тема уроку: Прямокутна система координат у просторі.

Мета уроку: домогтися засвоєння учнями: поняття прямокутної системи координат у просторі; назви координатних осей; сформувати вміння: відтворювати зміст вивчених понять; визначати положення точки в просторі за її координатами; визначати координати точки в просторі; проводити аналогії та порівняння.

Тип уроку: засвоєння нових знань, формування вмінь.

Обладнання: підручник (*Геометрія 11 клас Бурда М.І.*), модель прямокутного паралелепіпеда, конспект «Прямокутна система координат у просторі»

ХІД УРОКУ

І. Організаційний момент.

ІІ. Формування мети й завдань уроку; мотивація навчальної діяльності.

Слово вчителя.

Давайте обміркуємо, скільки чисел необхідно знати, щоб однозначно визначити положення точки на прямій? (*Одне)* Скільки чисел необхідно знати, щоб визначити положення точки на площині? (*Два*) Тобто під час руху по прямій треба знати, скільки пройти вправо-вліво, під час руху на площині треба знати, скільки пройти вправо-вліво і вперед-назад. Для визначення розміщення точки у просторі треба знати три числа. Наприкла, птах пересувається у просторі не тільки вперед-назад і вправо-вліво, але й уогру-низ. Щоб говорити про координати точки, треба насамперед увести систему координат.

Система координат оточує нас всюди:

- спілкуючись один з одним люди часто говорять: «Залиште свої координати». Для чого? Для того, щоб людину було легко знайти.

Це може бути: номер телефону, домашня адреса, місце роботи, електрона адреса. Де ще людина зустрічається з координатами:

Відповіді учнів:

а) місце в кінотеатрі;

б) система географічних координат (широта, довгота);

в) гра «Морський бій»

г) льотчики, моряки за допомогою координат визначають положення об'єкту;

д) туристичні схеми;

є) при астрономічних спостереженнях.

III. Актуалізація опорних знань.

Фронтальне опитування:

- Яку будову має прямокутна система координат на площині?
- Яку вісь називають віссю абсцис?
- Яку вісь називають віссю координат?
- Як визначають координати точки?
- Скідьки існує точок із заданими координатами?
- Скільки ккоординат має задана точка?
- Користуючись рис. 1 назвіть координати позначених точок.

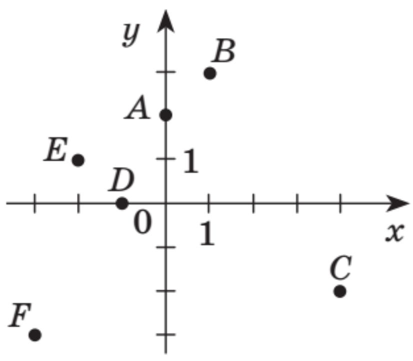


Рис. 1

- Дано: точка A(2; 3), точка B(x; y). Наведіть які-небудь значення x і y такі, щоб відрізок AB:
  1) перетинав вісь абсцис, але не перетинав осі ординат;
  2) перетинав вісь ординат, але не перетинав осі абсцис;
  3) перетинав обидві координатні осі;
  4) не перетинав жодної з координатних осей;
  5) проходив через початок координат.

Викладач: Щоб здобути ці знання, ми і розглянемо сьогодні тему уроку «Декартові координати у просторі».

IV. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу.

Лекція з елементами бесіди.

1. Координатні осі та площини

Розглянемо три взаємно перпендикулярні координатні осі *Ox*, *Oy* і *Oz* зі спільною точкою *O* (**початком координат**) та рівними одиничними відрізками на осях (рис. 2).

Вісь *Ox* називають **віссю абсцис**, вісь *Oy* — **віссю ординат**, вісь *Oz* — **віссю аплікат**, а площини *Oxy*, *Oxz*, *Oyz* — **координатними площинами**. Задану в такий спосіб систему координат називають **прямокутною декартовою системою координат** у просторі.

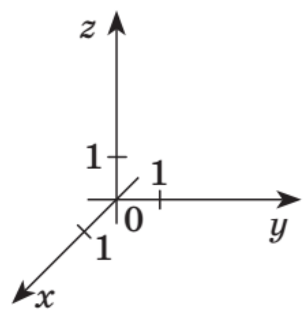


Рис. 2

2. Визначення координат довільної точки.

Для визначення координат довільної точки A простору проведемо з даної точки перпендикуляри AA_x, AA_y і AA_z до осей *Ox, Oy* і *Oz* відповідно (рис.3) Тоді координати x, y, z точок A_x, A_y і $A_я$ на

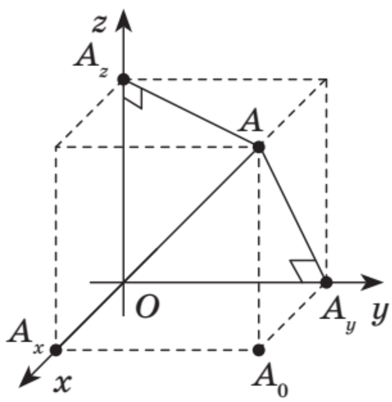


Рис. 3

осях *Ox, Oy* і *Oz* відповідно є координатами точки А в даній системі координат. Коротко це записують так: A(x, y, z), де x – абсциса, y – ордината, z – аплікат точки А.

3. Алгоритм побудови точки.

Давайте разом з вами складемо алгоритм побудови точки А (3;4;-2):

1) Вибрати масштаб.
2) Відкласти на осі Ох відрізок, якій рівень 3 один. відрізкам.
3) Через отриману точку провести пряму, паралельну осі Оу.
4) Відкласти на осі Оу відрізок, якій рівень 4 один. відрізкам.
5) Через отриману точку провести пряму, паралельну осі Ох.
6) Через точку перетину двох проведених прямих провести пряму, паралельну осі Oz.
7) На цій прямій відкласти вниз 2 один. відрізка.
8) Отримали точку А(3; 4; -2)

V. Формування вмінь.

Виконання усних вправ.

1. Точка М розташована на від'ємній півосі Oz на відстані 10 від початку координат. Які координати точки М?
2. Перша координата точки від'ємна, а друга і третя дорівнює нулю. Як розміщена ця точка в просторі?
3. Точка К лежить на площині ху, але не на осях координат. Що можна сказати про координати цієї точки?

Виконання письмових вправ.

1) Заповнити порожні місця в таблиці:

Положення точки	На координатній осі			У координатній площині		
	Ох	Оу	Oz	ху	yz	xz

Координати точки						

2) Знайдіть відстань від точки А (1; 2;3) до координатних площмн, осей і початку координат.

Розв'язання. Нехай проекціями точки A на площини Oxy, Oxz, Oyz будуть відповідно точки A_{xy}, A_{xz}, A_{yz} (рис. 4). Тоді $AA_{xy} = |z| = 3$; $AA_{xz} = |y| = 2$; $AA_{yz} = |x| = 1$.

За теоремою Піфагора $AA_x = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$; $AA_y = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, $AA_z = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $AO = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right) + z^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

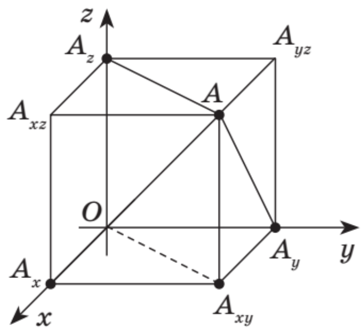


Рис. 4

3) Розв'язати завдання з підручника: №№ 2- 5, 7, 9, 10.

VI. Домашнє завдання:

1. Знайдіть відстань від точки К(-2; 3; -5) до координатних площин.
2. Дано точку В(-5; 8; 2). Вкажіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на коордлинатні осі.

Додаток Е

Конспект уроку

Тема уроку. Прямокутна система координат

Тип уроку: «відкриття » нових знань.

Клас : 6

Основна мета:

Освітня: *сформувати математичні компетенції : логічні поняття координатної площини, здатності до визначення координат точок та побудові точок за їх координатами; повторити і закріпити: дії з раціональними числами, поняття модуля числа, рішення рівнянь і нерівностей з модулем*

Розвиваюча:формувати практичну та логічну компетенції шляхом розвитку *уміння правильно визначати координати точок*

Виховна:*формування соціальних, комунікаційних компетенцій*

Обладнання : презентація, картки-завдання , портрети видатних математиків, листки контролю .

Девіз уроку*: Не достатньо лише мати добрий розум, головне – це раціонально застосовувати його*

Рене Декарт

1. **Організаційно-мотиваційний етап.**

1.1.Організація класу, привітання

Учитель.

Сьогодні ми продовжимо вивчати математику. Щоб вона стала зрозумілішою і цікавішою, я закликаю вас уважно слухати, логічно мислити і робити правильні висновки.

1.2. Самовизначення до діяльності .

Учитель. Яке завдання в домашньому завданні не відповідало темі , яку ми вивчали останні уроки ? (*Побудова багатокутника за координатами його вершин*) .

Чи не помітили Ви , якусь особливість в координатах точок , в домашньому завданні ? (*Серед координат не було позитивних чисел*).

Сьогодні ми продовжимо вивчення правила побудови точок з двома координатами , вираженими раціональними числами.

2. Актуалізація опорних знань і фіксація труднощів в діяльності.

Я хочу розпочати урок з повторення вивченого раніше.

- Діти давайте пригадаємо, чи зустрічались ви з таким поняттям, як координатна пряма? (так)
  1. То ж яка пряма називається координатною?*(Пряму з вибраними на ній початком відліку, одиничним відрізком і вказаним додатним напрямом називають координатною прямою.)*
  2. Якими числами визначаються координати точок, розташованих справа від початку координат? Зліва від початку координат? *(додатними, від'ємними)*
  3. Яку координату має початок координат? *(нуль)*
  4. Скільки чисел визначають положення точки на координатній прямій? *(одне число)*

Молодці! А чи чули ви, що люди звертаючись один до одного просять залишити свої координати? Що це означає?

(*Це означає повідомити або свою адресу, або номер телефону, або місце де працюєте.*)

Учитель. Система координат дозволяє знайти положення об'єкту за відомими орієнтирами. Розвиток систем координат в історії людства пов'язаний як з математичними задачами, так і з практичними проблемами мистецтва навігації, що спиралася на астрономію.

Нещодавно в Україні відбулося «Євро-2012» і як ви вважаєте чому йдучи на стадіон люди одразу знаходили свої місця і не відбулося такого, що приходячи на матч місце було кимось зайняте? (*Люди знаходили свої місця за секторами, рядами, місцями*). Це ще один приклад системи координат без якого в житті не обійтись.

- А можливо ви зможете навести приклади координат?

(Шахова дошка, стільці в кінотеатрі, поле для гри «Морський бій», географічні положення (широта, довгота), в астрономії також не обійтись без координат, координатна сітка для пілотів, моряків…)

1. Обчисліть:

$(-2)+(-7)$

$(-2\frac{1}{2})\cdot 2$

$3\frac{1}{2}\cdot(-2)$

$0{,}125\cdot(-3)\cdot 8$

(– 9; – 5; – 7; – 3)

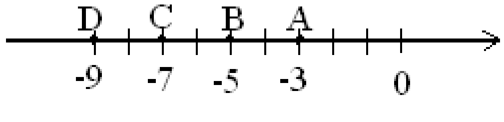
– Назвіть отримані результати в порядку спадання. Яку закономірність ви помітили? (- 3; - 5; - 7; - 9; кожне наступне число менше ніж попереднє число на 2).

– Продовжіть ряд на три числа вперед. (- 3; - 5; - 7; - 9; - 11; - 13; - 15)

– Назвіть саме велике число в даному ряду чисел, саме маленьке. (Саме велике число – 3, самое маленьке – 15).

– Яке число протилежне –m, якщо $-m=-3$; $-m=-15$. (3; 15).

2. Назвіть модуль координат точок на координатній прямій:



(9; 7; 5; 3; 0).

***3.* .Постановка проблеми уроку**

3. 1. Індивідуальне завдання:

– Намалюйте на середині листка координатний кут і позначте точки с координатами:

A (- 1; 2); R (- 2; 4); Q (- 3; - 6).

3.2. Виявлення причин труднощів і постановка мети діяльності на уроці.

- У чому виникло утруднення? (В координатному куту побудувати ці точки не можна, тому що ні на осі абсцис, ні на осі ординат немає точок, які відповідають від'ємним числам.)

- Яке завдання встало перед нами? (Розширити координатний кут, щоб можна було позначати точки з будь-якими координатами).

- Сформулюйте тему уроку. (Правило побудови точок з раціональними координатами)

- Запишіть тему в зошити.

II . Операційно- діяльнісний етап. Отримання знань.

1.1. Побудова проекту розв'язання проблеми.

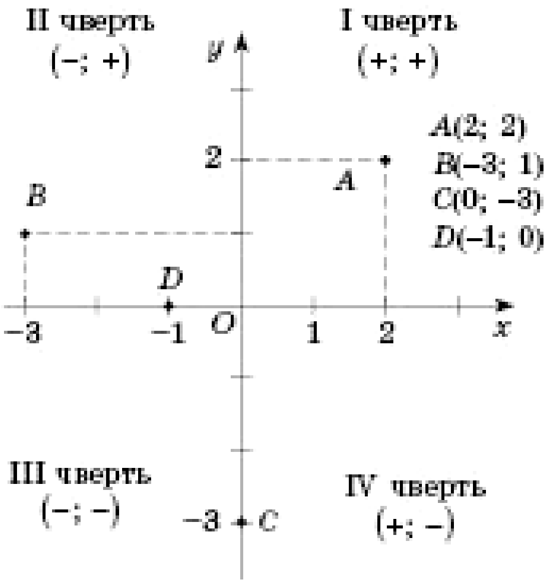
Учитель.

Які є пропозиції ?

Якщо пропозицій не буде , то запитати учнів , що ми зробили , коли у нас постала необхідність позначити на координатному промені точку з негативною координатою **. (** *Координатний промінь замінили координатною прямою***) .**

Що треба зробити з координатними променями в координатному куту ? **(***Замінити їх координатними прямими* **) .**

Давайте спробуємо побудувати координатну площину. Для цього проведемо дві перпендикулярні прямі, які перетинаються в точці – O і мають однакові одиничні відрізки. Ця точка є початком координат. Горизонтальну пряму називають віссю абсцис і позначають ОХ, а вертикальну – віссю ординат або – ОУ. Вісь абсцис і вісь ординат вони утворюють прямокутну систему координат і називаються координатними осями. Площину, на якій задана прямокутна система координат, називають координатною площиною. Площина координатними осями ділиться на чотири чверті (мал..)



Для того щоб знайти положення точки на площині необхідно знати дві її координати наприклад: В (-3;1)

-3 - координата по осі ОХ, 1 – координати по осі ОУ. Тому починаючи з початку відліку рухаємось вліво до -3 і проводимо з цієї точки перпендикуляр до осі абсцис, потім з початку координат рухаємось вгору на 1 одиницю і проводимо також перпендикуляр до осі ординат. Перетин двох перпендикулярів і є шукана точка В. Якщо точка лежить на осі абсцис, то її ордината дорівнює нулю (D(-1; 0)); якщо точка лежить на осі ординат, то її абсциса дорівнює нулю (С(0;-3))

1.2. Проміжний аналіз діяльності. Сприйняття і усвідомлення учнями нового матеріалу.

Мозкова атака.

Що треба пам'ятати , коли будуємо точки за координатами або визначаємо координати по точці на площині? (*Що перша координата завжди береться на осі абсцис , а другий на осі ординат*) .

Запишіть у загальному вигляді координату будь-якій точці .

А (х ; у)

Тепер ви можете виконати завдання , яке вам було запропоновано ? (*Так*).

Учні виконують завдання в зошитах , три учні біля дошки (*по одному будують по одній точці*)

Алгоритм побудови точок на координатній площині.

(Учні в парах складають алгоритм побудови точок на координатній площині)

Учитель

Складіть алгоритм побудови точок на координатній площині.

Алгоритм побудови точок в координатній площині.

1 . Знайти на осі абсцис число відповідне перший координаті (провести через неї пунктирну пряму) .

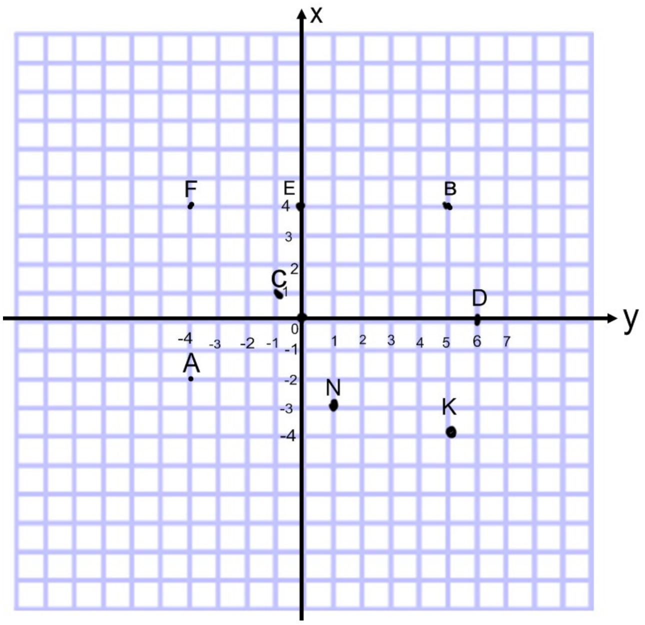
2 . Знайти на осі ординат число відповідне другий координаті (провести через неї пунктирну пряму) .

3 . Відзначити точку перетину пунктирних прямих , позначити великою літерою латинського алфавіту.

13 . Первинне закріплення нових знань

Виконання усних вправ

Визначити координати точок:



Відповідь:A(-4;-2), C(-1;1), D(6;0),F(-4;4), E(0;4), B(5;4), N(1;-3), K(5;-4)

1. Назвати координати точок I та IV чверті *(відповідь: I чверть – B, IV чверть - A)*
2. Чому дорівнює абсциса точок F; C; N; B. *(-4, -1, 1, 5)*
3. Чому дорівнює ордината точок C; A; F; K. *(1, 0, 4, -4)*
4. Назвіть точку, яка належить осі абсцис; ординат.*(D; E)*

Учитель

Складіть алгоритм визначення координати точки в координатній площині.

<u>Алгоритм визначення координат точки в координатній площині.</u>

1. Провести пунктирні прямі з точки на осі координат.

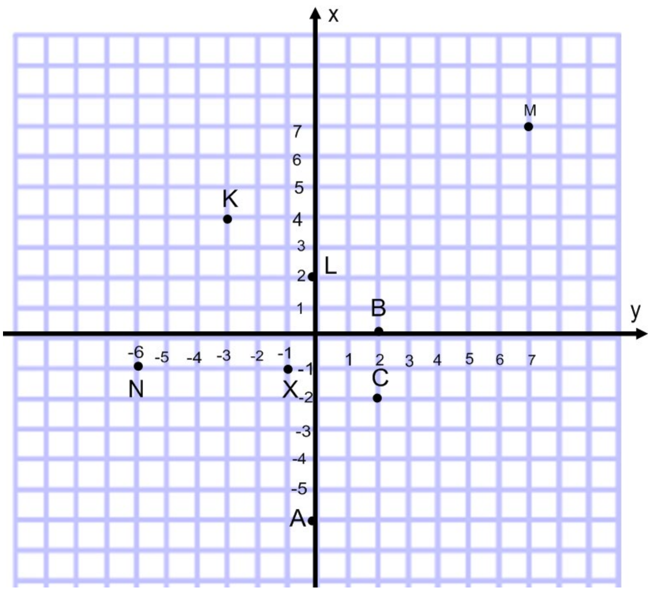
2. Вказати числа, відповідні точкам перетину пунктирних прямих з осями координат.

3. Записати точку і в дужках її координати: перша по осі абсцис, друга по осі ординат.

III. Первинне застосування знань у змінених умовах

Самостійна робота із самоперевіркою.

3.1. Запишіть в зошити координати точок зображених на наступному малюнку.



Відповідь:A(0;-6), B(2;0), C(2;-2), L(0;2), M(7;7), N(-6;-1), K(-3;4), X(-1;-1).

3.2. Побудуйте систему координат взявши за одиничний відрізок 1 см і позначте точки.

A(0;2), B(-4;5), C(2;-3), D(3;0), K(0;4), M(-5;1), F(3;-4), N(-3;0)

3.3. На координатній площині побудуйте декілька точок, що мають ординату 5. Як розташовані ці точки? Чи належать вони одній прямій?

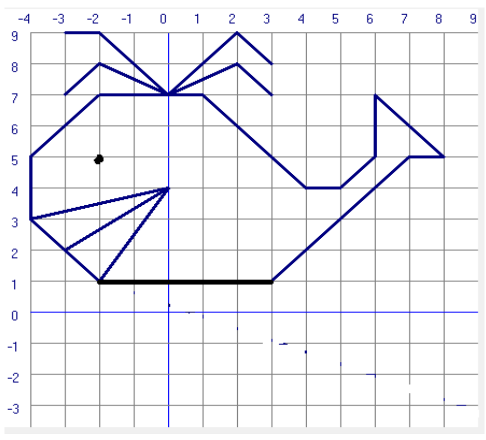
3.4. Дано координати трьох послідовних вершин квадрата ABCD A(-1;3), B(4:3), C(4;-2).

А) накресліть цей квадрат.

Б) запишіть координати точки D.

В) знайдіть периметр цього квадрата взявши одиничних відрізок за 1 см.

Малюнок за координатами



(-2;1)	(0;7)	(-2;9)	(-4;5)
(3;1)	(2;8)	(-3;9)	(-4;3)
(7;5)	(3;7)		(-2;1)
(8;5)		(0;7)	(3;1)
(6;7)	(0;7)	(-2;8)	
(6;5)	(2;9)	(-3;7)	(-4;3)

(5;4)	(3;8)		(0;4)
(4;4)		(0;7)	(-3;2)
(1;7)	(0;7)	(-2;7)	(0;4)
			(-2;1)
		Око (-3;5)	

Додаток Є

ТЕСТИ

Варіант І.

4. Середина відрізка з кінцями К(-6;8) і М(2;-2) має координати:
   А)(-2;3); Б)(-4;6); В(-8;10); Г(-4;5).
5. Відстань між точками Р(5;3) і С(2;-1) дорівнює... А)53; Б) √53; В)5; Г) √13.
6. Рівняння кола з центром у точці В(2;-1) і радіусом 3 має вигляд...

А)$(x+2)^2+(y-1)^2=9$

Б)$(x-2)^2+(y+1)^2=3$

В)$(x+2)^2+(y-1)^2=3$

Г)$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

4. Основа перпендикуляра, опущеного з точки А(-5;4) та вісь Ох, має координати... А)(0;-5); Б)(0;4); В)(-5;0); Г)(4;0)

5. Довжина медіани ВМ трикутника АВС з вершинами А(-3;3), В(4;1) і С(3;5) дорівнює...А)5; Б) √65; В)65; Г)25.

6. Точка К, яка належить осі абсцис і рівновіддалена від точок А(-1;4) і В(5;2) має координати...

А) (-5;2); Б) (-10;4); В) (-4;10); Г) (-2;5).

Варіант ІІ.

1. Середина відрізка з кінцями N(-8;6) iF(-2;2) має координати... А)(-10;8); Б)(-3;2); В)(-5;4); Г)(-4;5).

2.Відстань між точками К(11;-1) і В(10;1) дорівнює... А) 1; Б) $\sqrt{21}$; В) 21; Г) $\sqrt{5}$.

3.Рівняння кола з центром у точці В(-3;1) і радіусом 4 має вигляд...

А)$(x+3)^2+(y-1)^2=16$;

Б)$(x-3)^2+(y-1)^2=4$;

В)$(x-3)^2+(y+1)^2=16$;

Г) $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

4.Основа перпендикуляра, опущеного з точки А(4;-5) на вісь Оу, має координати... А)(0;-5); Б)(0;4); В)(-5;0); Г(4;0).

5.Довжина медіани AF трикутника АВС з вершинами А(0;-1), В(2;1) і С(-2;3) дорівнює... А) 9; Б)5; В)25; Г)3.

6.Точка А, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок М(-1;2) і N(5;4), має координати...

А)(9;0); Б)(2;3); В)(0;9); Г)(4;2)

Тест 3.

Варіант I

1. Координати середини відрізка знаходять за формулами...

2. Рівняння кола має вигляд....
3. З точок A(0;-3), B(1;1), C(-2;6), D(2;0) на прямій 3x+2y-6=0 лежать...
4. Відстань між точками A(x;3) і B(1;-5) дорівнює 10, тому x дорівнює...
5. Якщо відрізок MN є радіусом кола і M(-3;1), N(1;6), то рівняння кола має вигляд...або...
6. Якщо точка A лежить на осі ординат і рівновіддалена від точок (1;2) і (4;7), вона має координати...

Варіант II

1. Довжину відрізка AB можна знайти за формулою...
2. Центр кола з рівнянням $(x+9)^2+(y+4)^2=3$ знаходиться в точці з координатами...
3. З прямих x-2y+1=0; 3x+y+1=0; y-2=0, x+1=0 через точку E(-1;2) проходять...
4. M – середина відрізка KN. Якщо N(-4;5) і M(1;2), то точка K має координати...
5. Пряма y=x+1 і коло (x-2)+y=4 мають спільних точок.
6. Якщо точка A лежить на осі абсцис і рівновіддалена від точок (1;2) і (4;7), то вона має координати...

№	Тест 1 Варіант I	Тест 1 Варіант II	Тест 2 Варіант I	Тест 2 Варіант II
1	X	I	A	B

2	X	X	B	Γ
3	I	X	Γ	A
4	I	X	B	A
5	I	I	A	Γ
6	I	I	A	B