Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота
Бакалавр
(освітньо-кваліфікаційний рівень)
на тему:

«Методика навчання учнів фізико-математичного профілю розв'язуванню показникових та логарифмічних рівнянь»

Виконала: студенка IV курсу, групи МІ-42
Галузь знань 0402 «Фізико-математичні науки»
напряму підготовки 6.040201 «Математика»

Стрибулевич (Мельникович) Діана Петрівна

Керівник: ст. викл. Клекоць Г. Я.
(прізвище та ініціали)

Рецензент: док. техн. н., проф. Турбал Ю. В.
(прізвище та ініціали)

м. Рівне – 2019 рік

ЗМІСТ

ВСТУП

Перші зародки поняття логарифмів можна знайти в Архімеда, але сама ідея розвитку не набула. 300 років тому почався бурхливий розвиток науки, техніки і мореплавства в епоху Відродження. Розвиток астрономії, уточнення астрономічних спостережень, вимагали нових методів обчислень, які були доступні широкому колу людей. В основу таких методів і були покладені логарифми. Слово логарифм грецького походження, воно означає – відношення та число.

Перші таблиці логарифмів склав швейцарський механік, годинникар, астроном і математик І. Бюргі. Він довго не наважувався їх опублікувати і лише в 1620 ріці за наполяганням І. Кеплера він їх видав. Оригінал цих таблиць зберігається зараз у Пулковській обсерваторії. За свою неквапливість Бюргі поплатився пріоритетом .У 1614 році в Англії шотландський математик Дж. Непер, барон, який займався різними науками, особливо астрономією і математикою, надрукував таблиці логарифмів тригонометричних функцій від 0 до 90 .

Ідея десяткових логарифмів виникла в англійського професора А. Брігса, який пасля зустрічі з Дж. Непером вжев 1617 р. опублікував такі таблиці для чисел першої тисячі . Після чого менше ніж за 7 років він обчислив 30 000 логарифмів з 14 десятковими знаками. У 1628 р. голландський математик А. Влакк доповнив їх, а на основі цих таблиць у 1703 р. в Росії були надруковані таблиці логарифмів синусів та тангенсів.

Для обчислення логарифмів довгий час використовували логарифмічну лінійку, яку сконструював англійський математик, священник В.Оутред. Близько 350 років вона залишалася надійним апаратом для наближених , але швидких обчислень. Логарифмічна лінійка сприяла прискоренню науково-технічного прогресу. Але час іде, наука і техніка рухаються вперед, і на зміну логарифмічній лінійці прийшов мікрокалькулятор.

До початку XVII ст. у математиці уникали вживання дробових та від'ємних показників степенів. Лише в кінці XVII ст. у зв'язку з ускладненням математичних задач виникла необхідність поширити область визначення показника степеня на всі дійсні числа. Узагальнення поняття степеня a^n, де n - будь-яке дійсне число, дало змогу розглянути показникову функцію $y = a^x$ на множині дійсних чисел і степеневу функцію $y = x^n$ на множині додатних чисел (для цілих n степенева функція визначена і для x<0).

Термін «показник» (нім. exponent, лат. expoпеге — «виставляти на показ»; exponens, exponentis — «що виставляється на показ», «той, що показується») для степеня теж увів у 1553 р. Михайль Штифель (1487—1567). Він увів дробові й нульові показники. Позначення a^x для натуральних показників увів Рене Декарт (1637), а вільно поводитися з такими самими дробовими й від'ємними показниками почав із 1676 р. Ісаак Ньютон. Степені з довільними дійсними показниками, без будь-якого загального означення, розглядали Лейбніц та Иоганн Бернуллі. 1679 р. Лейбніц увів поняття експоненціальної (тобто показникової) функції для залежності $y=a^x$ та експоненціальної кривої для графіка цієї функції.

Питання, пов'язане з показниковою функцією, розробляв Леонард Ейлер. У двох розділах своєї праці «Вступ до аналізу» він описав «показникові і логарифмічні кількості». В ній, зокрема зазначено, що показникові кількості можуть бути різноманітними залежно від того, «чи буде змінною кількістю один лише показник степеня, чи, крім того, ще і кількість, яку підносять до степеня». До перших належать a^x, до других y^z.

Актуальність вивчення даної теми не викликає сумнівів, оскільки ці функції трапляються в найрізноманітніших галузях науки — фізиці, хімії, біології, економіці, інформатиці, медицині, лісництві, картографії, будівництві тощо, а питання методики її вивчення у школі не розкрито повною мірою.

Мета даного дослідження: систематизувати відомості про показникову та логарифмічну функції, розкрити роль і місце вивчення показникових та логарифмічних рівнянь та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи та ознайомитися з методикою їх викладання.

Об'єкт дослідження: показникові і логарифмічні рівняння.

Предмет дослідження: методика навчання учнів розв'язуванню цих видів рівнянь.

Завдання курсового дослідження:

1. Систематизувати відомості про показникові і логарифмічну функції, види і методи розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи.
2. З'ясувати місце показникових та логарифмічних рівнянь в діючій навчальній програмі з математики, конкретизувати вимоги до знань, умінь і навичок учнів.
3. Проаналізувати сучасні діючі і пробні підручники з алгебри.
4. Подати приклади розв'язування рівнянь різної складності.
5. Ознайомитися з методикою вивчення даної теми в сучасній школі.
6. Запропонувати методичні рекомендації щодо викладання тем "Показникова функція" та «Логарифмічна функція» в загальноосвітній школі та розробити дидактичні матеріали (самостійні і контрольні роботи, розробки уроків).
7. Зробити висновки щодо особливостей вивчення даної теми.

Для розв'язання поставлених завдань використовувались наступні **методи дослідження:**

1. дослідницький метод при вивченні психолого-педагогічної, наукової та методичної літератури з предмету дослідження;
2. аналітичні методи;
3. практична реалізація запропонованої методики.

Розділ І. Теоретичні основи дослідження показникових і логарифмічних рівнянь.

1.1. Рівняння: основні означення, твердження.

В алгебрі розглядають два види рівностей - тотожності і рівняння. Розглянемо функції y=f(x), визначену на множині M, і y=g(x), визначену на множині N.

Якщо на деякій множині R, яка є підмножиною як M, так і N, має місце рівність f(x)=g(x), то говорять, що ці функції тотожно рівні на множині R, а рівність f(x)=g(x) при цьому називається тотожністю на множині R.

Часто приходиться розглядати функції, про які невідомо, якою є множина значень аргументу, на якій вони тотожно рівні. В такому випадку рівність f(x)=g(x) називають рівнянням. Воно виражає задачу пошуку тих значень x, при яких f(x) та g(x) рівні. Шукані значення x при цьому називають коренями (розв’язками) рівняння. Значення невідомих, які належать множині допустимих значень рівняння і задовольняють його (тобто перетворюють рівняння в правильну рівність (тотожність), називають коренями рівняння. Областю визначення рівняння будемо називати перетин областей визначення функцій $f \cap g$.

Букви, які входять в рівняння, за умовою задачі можуть бути нерівноправними: одні можуть приймати всі свої допустимі значення і називаються коефіцієнтами (інколи параметрами) рівняння; інші, значення яких потрібно знайти, називаються невідомими (їх майже завжди позначають останніми буквами латинського алфавіту: x, y, z, або тими ж буквами, але з індексами: x1,x2,...,xn або y1,y2,...,yk).

В загальному вигляді рівняння з n невідомими x1,x2,...,xn може бути записано у вигляді f(x1,x2,...,xn)=g(x1,x2,...,xn),

де f(x1,x2,...,xn),g(x1,x2,...,xn) - функції вказаних змінних. В залежності від кількості невідомих рівняння називають рівнянням з одним, двома і більше невідомими.

Рівняння вважається розв'язаним, якщо знайдено всі його корені або показано, що рівняння коренів немає.

Методи розв'язування рівнянь базуються на понятті рівносильності (еквівалентності).

Якщо всі розв'язки рівняння $f(x)=g(x)$ є розв'язками рівняння $\varphi(x)=\psi(x)$, то говорять, що рівняння $\varphi(x)=\psi(x)$ є наслідком рівняння $f(x)=g(x)$, і записують $f(x)=g(x) \Rightarrow \varphi(x)=\psi(x)$.

Два рівняння $f(x)=g(x)$ та $\varphi(x)=\psi(x)$ називають еквівалентними, якщо кожне з них являється наслідком другого, і записують

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \varphi(x)=\psi(x)$.

Таким чином два рівняння вважаються еквівалентними, якщо множини розв'язків цих рівнянь співпадають.

Можна сказати, що рівняння рівносильні, якщо кожне з них є наслідком другого.

Деякі еквівалентні рівняння:

1. Рівняння F+G=G еквівалентне рівнянню F=0, яке розглядається на множині допустимих значень вихідного рівняння.

2. Рівняння $\frac{F}{G}=0$ еквівалентне рівнянню F=0, яке розглядається на множині допустимих значень вихідного рівняння.

3. Рівняння F×G=0 еквівалентне двом рівнянням F=0 і G=0, кожне з яких розглядається на множині допустимих значень вихідного рівняння.

4. Рівняння Fn=0 еквівалентне рівнянню F=0.

5. Рівняння Fn=Gn при непарному n еквівалентне рівнянню F=G, а при парному n еквівалентне двом рівнянням: F=G і F=-G.

Заміна рівняння рівносильним йому рівнянням або заміна рівняння рівносильною йому сукупністю рівнянь називається рівносильним переходом.

Наведемо основні теореми про рівносильність рівнянь.

Теорема 1. Рівняння $f(x)=g(x)$ і $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ рівносильні, якщо $\varphi(x)$ існує в області визначення вихідного рівняння.

З цієї теореми випливає, що доданки можна переносити з однієї частини рівняння в іншу, змінюючи знак цього доданку на протилежний.

Теорема 2. Якщо обидві частини рівняння $f(x)=g(x)$ помножити на вираз $\varphi(x)$, який існує в області визначення рівняння $f(x)=g(x)$, то отримаємо рівняння $f(x)\times\varphi(x)=g(x)\times\varphi(x)$, яке є наслідком рівняння $f(x)=g(x)$. Якщо при цьому $\varphi(x)\neq0$, то рівняння $f(x)=g(x)$ і $(x)\times\varphi(x)=g(x)\times\varphi(x)$ рівносильні.

Теорема 3. Рівняння $fn(x)=gn(x)$, де $n\geq2$ (натуральне), є наслідком рівняння $f(x)=g(x)$.

Це значить, що будь-який корінь рівняння $f(x)=g(x)$ є коренем і рівняння $fn(x)=gn(x)$, але рівняння $fn(x)=gn(x)$, може мати ще й інші корені, які не задовольняють рівняння $f(x)=g(x)$. Іншими словами, при піднесенні до натурального степеня обох частин рівняння $f(x)=g(x)$ можуть з'явитись зайві корені.

Розрізняють рівняння алгебраїчні і трансцендентні. В алгебраїчних рівняннях над невідомими можуть здійснюватись, причому в скінченій кількості, тільки операції додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до раціонального степеня.

Якщо над невідомими здійснюються й інші операції, то рівняння називають трансцендентним.

Прикладами трансцендентних рівнянь є показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, а також рівняння, що містять обернені тригонометричні функції.

У загальному випадку трансцендентні рівняння не можуть бути розв'язанні алгебраїчно, тобто за допомогою послідовного виконання ряду арифметичних та алгебраїчних дій над даними, які належать до їх складу. Елементарна математика розглядає окремі види трансцендентних рівнянь, допускаючих аналітичне рішення. Зокрема, до них відносяться показникові та логафмічні рівняння.

В процесі розв'язування рівняння за допомогою різних перетворень замінюють простішим, рівносильним йому рівнянням. Якщо це не вдається, то можливі два такі випадки:

Під час переходу до нового рівняння може трапитись втрата коренів.

Нове рівняння може містити корені, що не є коренями вихідного рівняння (зайві корені). Зайві корені можна виявити за допомогою перевірки (підстановкою всіх коренів нового рівняння у вихідне).

1.2. Поняття показникової функції та її графік. Способи розв'язування показникових рівнянь.

Функція, задана формулою $y = a^x$ де $a > 0$ и $a \neq 1.$ називається показниковою функцією.

Наприклад $y = 2^x$, $y = \pi^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = (\frac{\sqrt{3}}{2})^x$ — показникові функції. Зазначимо, що функція виду $y = a^x$ існує і при а = 1. Тоді $y = a^x = 1^x$, тобто $y = 1$ при всіх значеннях $x \in R$. Але в цьому випадку функція $y = 1^x$ не називається показниковою. (Графік функції $y = 1^x$ — пряма, зображена на рис.1)

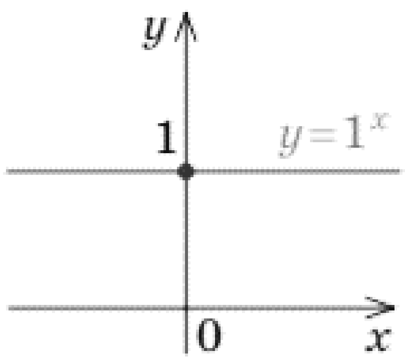


Рис.1. Графік функції $y = 1^x$

Сформулюємо основні властивості показникової функції .

Оскільки при $a > 0$ вираз $y = a^x$ означений при всіх дійсних значеннях х, то областю визначення показникової функції $y = a^x$ всі дійсні числа $D(a^x) = R$.

Областю значень функції $y = a^x$ є множина всіх додатних чисел, тобто функція $y = a^x$ набуває тільки додатних значень, причому будь-яке додатне число є значенням функції, або $E(a^x) = (0;+\infty)$. Це означає, що графік показникової функції $y = a^x$ завжди розміщений вище від осі Ох і будь-яка пряма, паралельна осі Ох і розташована вище від неї, перетинає цей графік.

Функція не є ні парною, ні непарною. Це слідує з того, що $a^{-x} \neq a^x$ і $a^{-x} \neq -a^x$.

Якщо $a > 1$, функція зростає на всій числовій прямій, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$. Якщо $0 < a < 1$, функція спадає на множині R, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Якщо $a > 1$, показникова функція $y = a^x$ зростає при всіх значеннях *x*; якщо $0 < a < 1$, ця функція спадає при всіх значеннях *x* (Рис.2).

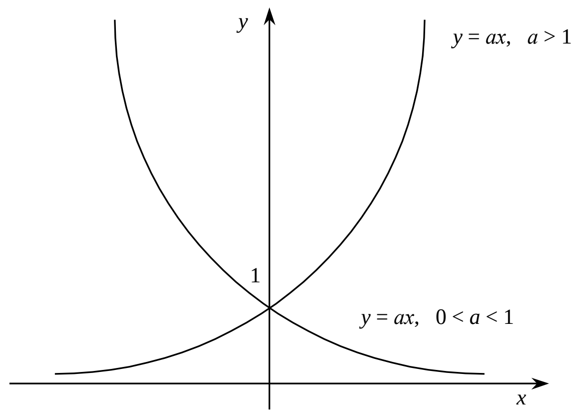


Рис.2. Графік показникової функції.

Функція $y = a^x$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень, оскільки її область значень — проміжок (0; + ∞), який не містить ні найменшого, ні найбільшого чисел.

Точки перетину з осями координат:

- графік функції $y = a^x$ перетинає вісь Оу у точці у =1 (справді, на осі Оу значення $x = 0$, тоді $y = a^x$ =1).
- графік показникової функції $y = a^x$ (а > 0, а ≠1) не перетинає вісь Ох, оскільки на осі Ох $y = 0$, а значення у = 0 не входить до області значень показникової функції $y = a^x$ ($y = a^x = 0$ тільки при $a = 0$, але за означенням $a > 0$).

Проміжки знакосталості: у > 0 при всіх дійсних значеннях х, оскільки $y = a^x > 0$ при $a > 0$. Показникова функція - це строго монотонна функція, визначена на всій числовій прямій. [1, 13]

Способи розв'язування показникових рівнянь.

Показникові рівняння відносяться до трансцендентних рівнянь. Показниковими називаються рівняння, в яких невідоме входить тільки до показників степенів при сталих основах.

Рівняння називають показниковим, якщо його невідомі входять лише до показників степенів.

Існує багато видів показникових рівнянь і різних підходів до їх розв'язування. Основними методами розв'язування показникових рівнянь є:

1) Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами.
2) Логарифмування рівняннння.
3) Метод уведення нової змінної.
4) Розклад рівняння на множники.
5) Розв'язування однорідних рівнянь.
6) Функціонально-графічний метод.

Розглянемо кожен із цих методів докладніше. [3,4,5]

1) Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами застосовують у рівняннях, які можна звести до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Такі рівняння розв’язують на основі монотонності показникової функції. Якщо а > 0, а ≠1, то рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ і $f(x)=g(x)$— рівносильні.

Теорема: Нехай $a>0$ и $a\neq 1$. Рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x)=g(x)$.

Доведення: Доведемо, що якщо $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, то $f(x)=g(x)$. Дійсно, так як показникова функція строго монотонна, то з рівності її значень $a^c=a^d$, слідує рівність показників $c=d$. Навпаки: якщо $f(x)=g(x)$, $a^{f(x)}=a^{g(x)}$.

Зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами можна здійснити за допомогою таких рівностей (властивостей степеня):

$$a^{x+y}=a^x\cdot a^y,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},$$
$$(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}.$$

Приклад: Розв’язати рівняння $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}$.

Розв’язання: Записавши рівняння у вигляді $2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{2x}{2\cdot 3}}\cdot 2^{-\frac{3}{x\cdot 2\cdot 3}}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{3}}$, прирівняємо показники при основі 2:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}=\frac{7}{3}.$$

Далі маємо: $5x^2-14x-3=0,\quad x_1=3,\quad x_2=-\frac{1}{5}$.

Відповідь: 3; $-\frac{1}{5}$.

Приклад: Розв’язати рівняння $\left(\sqrt{5}\right)^{\lg x}=5^{\lg 2}(25)^{\lg\left(\sqrt{x}-1\right)}$.

Розв’язання: Прирівнюємо показники при основі 5:

$\frac{1}{2}\lg x = \lg 2 + 2\lg\left(\sqrt{x}-1\right)$, або $\sqrt{x} = 2\left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

Позначивши $\sqrt{x} = t$, дістанемо:

$t = 2(t-1)^2$, $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$;

$\sqrt{x} = 2$, $x_1 = 4$; .

$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Корінь x_2 не задовольняє рівняння.

Відповідь: 4; $\frac{1}{4}$.

Приклад: Розв'язати рівняння $2^{\mathrm{x}} \cdot 5^{\mathrm{x}} = 0{,}1(10^{\mathrm{x}-1})^3$.

Розв'язання:

$2^{\mathrm{x}} \cdot 5^{\mathrm{x}} = 0{,}1(10^{\mathrm{x}-1})^3$;

$10^{\mathrm{x}} = 10^{-1} \cdot 10^{3\mathrm{x}-3}$;

$10^{\mathrm{x}} = 10^{3\mathrm{x}-4}$; x=2.

Відповідь: 2.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $2^{x-1} + 2^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 3 \cdot 4^{\frac{2}{x}}$;

Розв'язання:

$2^{x-1} + 2^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 3 \cdot 4^{\frac{2}{x}}$;

$2^{\mathrm{x}-3}(4 + 2 - 3) = 3 \cdot 4^{\frac{2}{x}}$;

$2^{\mathrm{x}-3} \cdot 3 = 3 \cdot 2^{\frac{4}{x}}$;

$2^{\mathrm{x}-3} = 2^{\frac{4}{x}}$;

$\mathrm{x} - 3 = \frac{4}{\mathrm{x}}$;

$$\begin{cases} \mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 4 = 0; \\ \mathrm{x} \neq 0; \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x = 4,\\ x = -1,\end{array}\right.\\ x \neq 0;\end{array}\right.$$

Відповідь: -1;4.

2) Логарифмування рівняння. Використовуючи властивості степенів, рівняння $a^x = b$, де $a > 0, a \neq 0, b > 0$, можна розв'язувати так: $a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Якщо замість x у показнику степеня стоїть деяка функція f(x), тобто рівняння має вигляд $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0,$ то за допомогою логарифмування обох частин цього рівняння (це можливо, тому що обидві частини рівняння додатні), приходимо до еквівалентного рівняння $f(x) = \log_a b$.

Приклад: Розв'язати рівняння $5^{x-1} = 3^{x^2-3x+2}$.

Розв'язання: Логарифмуємо обидві частини рівняння при основі 3:

$2(x-1)\log_3 5 = (x-1)(x-2); \ x-1=0, \ x_1 = 1,$

$\log_3 5 = x-2, \quad x_2 = 2 + \log_3 5 = \log_3 45.$

Відповідь: 1; $\log_3 45$.

Приклад: Розв'язати рівняння $|x|^{x^2-2x} = 1$.

Розв'язання: Оскільки $|x| > 0$, то можна логарифмувати рівняння.

$(x^2 - 2x)\lg|x| = 0;$

$x^2 - 2x = 0;$

$x_1 = 2; \ |x| = 1; \ x_2 = 1, \ x_3 = -1.$

Відповідь: 2; 1; -1.

3) Метод уведення нової змінної. Для розв'язування більш складних показникових найчастіше використовують заміну змінних. Щоб зорієнтуватися, чи можна ввести заміну змінних у даному показниковому рівнянні, часто буває корисно на початку розв'язування позбутися числових доданків у показниках степенів, використовуючи формули зведення степенів. Потім намагаємося всі степені (зі змінною в показнику) звести до однієї основи і виконати заміну змінної. Якщо у рівнянні, нерівності або тотожності кілька разів присутній один і той самий вираз зі змінною, то зручно цей вираз позначити однією буквою (новою змінною).

Зазначимо, що використання як основних формул дій над степенями, так і заміни змінної та оберненої заміни завжди приводить до рівняння, рівносильного заданому на його ОДЗ, через те, що всі вказані перетворення ми можемо виконати і в прямому, і в зворотному напрямках. (Отже, ми завжди зможемо довести, що кожний корінь одного рівняння є коренем другого й навпаки, — аналогічно обґрунтуванню рівносильного переходу для найпростіших показникових рівнянь). У тих випадках, коли всі степені (зі змінною в показнику) у показниковому рівнянні, яке не зводиться безпосередньо до найпростішого, не вдається звести до однієї основи, потрібно спробувати звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння.

Приклад: Розв'язати рівняння $27^{\lg x} - 7\cdot 9^{\lg x} - 21\cdot 3^{\lg x} + 27 = 0.$

Розв'язання: Позначивши $3^{\lg x} = t$, дістанемо:

$t^3 - 7t^2 - 21t + 27 = 0;$

$t_1 = 1,\ \ t_2 = 9,\ \ t_3 = -3$

$3^{\lg x} = 1, \quad x_1 = 1;\ \ 3^{\lg x} = 9, \quad x_2 = 100;\ \ 3^{\lg x} = -3, \quad x \in \varnothing$.

Відповідь: 1; 100.

Приклад: Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

Розв'язання: Позначивши $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t$, дістанемо $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{t}$;

$t + \frac{1}{t} = 4,\ t_{1,2} 2 \pm \sqrt{3};$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}, \quad x_1 = 2;$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3},\ x_2 = -2.$

Відповідь: 2; -2.

Приклад: Розв'язати рівняння $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

Розв'язання: Позначивши $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t,$ дістанемо:

$t^2 - 5t\cdot 2^{-1} - 6 = 0,$

$t^2 - \frac{5}{2}t - 6 = 0$;

$t_1 = 4,\ x + \sqrt{x^2-2} = 2,\ x = 1{,}5;$

$t_2 = -1{,}5;\ t_2 = -1{,}5,$

$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = -1{,}5;\ x \in \varnothing$.

Відповідь: 1,5.

Приклад: Розв'язати рівняння $49^{\mathrm{x}} - 8\cdot 7^{\mathrm{x}} + 7 = 0$.

Розв'язання:

$49^{\mathrm{x}} - 8\cdot 7^{\mathrm{x}} + 7 = 0;\ (7^2)^{\mathrm{x}} - 8\cdot 7^{\mathrm{x}} + 7 = 0; (7^{\mathrm{x}})^2 - 8\cdot 7^{\mathrm{x}} + 7 = 0;$

Нехай $7^{\mathrm{x}} = t > 0$, тоді $t^2 - 8t + 7 = 0;$

$t_1 = 7;\ t_2 = 1;$

Отже, 1) $7^{\mathrm{x}} = 7$; x=1;

2)$7^{\mathrm{x}} = 1$; x=0.

Відповідь: 0; 1.

4) Розклад рівняння на множники.

Рівняння $f(x) = 0$ намагаємося подати у вигляді $f_1(x)f_2(x) = 0$ і прирівнюємо до нуля кожний множник.

Приклад: Розв'язати рівняння $3\cdot 4^x+(3x-10)\cdot 2^x+3-x=0$.

Розв'язання: Узявши $2^x=t$, розкладемо рівняння $3\cdot t^2-10\cdot t\cdot +3+\ \ +x(3t-1)=0$ на множники: $(3t-1)(t-3)+x(3t-1)=0$. Далі маємо: $3t-1=0,\ t=\frac{1}{3},\ 2^x=\frac{1}{3},\ x_1=-\log_2 3$; $t-3+x=0,\ 2^x=3-x$. Розв'язавши останнє рівняння графічно, знаходимо корінь $x_2=1$.

Відповідь: $-\log_2 3$; 1.

Приклад: Розв'язати рівняння $2\sqrt{x}\cdot 4^x+5\cdot 2^{x+1}+2\sqrt{x}=2^{2x+2}+5\sqrt{x}\cdot 5\sqrt{x}\cdot 2^x+4$.

Розв'язання: Узявши $2^x=t$, згрупуємо члени з множниками $\sqrt{x}$:

$\sqrt{x}(2t^2-5t+2)=2t^2-10t+4,\quad (\sqrt{x}-2)(2t^2-5t+2)=0$.

Прирівняємо кожний множник до нуля:

1) $\sqrt{x}-2=0,\ \ x_1=4$;

2) $2t^2-5t+2=0$, $t_1-2,\ t_2=\frac{1}{2}$; $2^x=2,\ x_2=1,\ 2^x=\frac{1}{2},\ x_3=-1$. Корінь $x_3=-1$ не задовольняє рівняння.

Відповідь: 4; 1.

5) Однорідні рівняння.

Показникові рівняння виду $A\cdot a^{2x}+B(a\cdot b)^x+C\cdot b^{2x}=0$ називаються однорідними.

Розв'язуються такі рівняння почленним діленням або на $a^{2x}\neq 0$, або на $b^{2x}\neq 0$ ($a^{2x}>0$, $b^{2x}>0$).

Рівняння $Aa^x\cdot a^x+Ba^x\cdot b^x+Cb^x\cdot b^x=0$ можна переписати у вигляді $A\frac{a^xa^x}{b^xb^x}+B\frac{a^x}{b^x}+C=0$. Виконавши заміну, $\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x=t$, дістанемо рівняння $At^2+Bt+C=0$.

Приклад: Розв'язати рівняння $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$.

Розв'язання: Запишемо рівняння так:

$3\cdot 4^{2x}+2\cdot 9^{2x}-5\cdot(4\cdot 9)^x=0$;

Поділимо обидві частини рівняння на $4^{2x} \neq 0$. Отримаємо:

$3 + 2\cdot(9/4)^{2x} - 5\cdot(9/4)^{x} = 0$;

Зробимо заміну: $(9/4)^x = t$; $t > 0$.

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння:

$2t^2 - 5t + 3 = 0$;

$t_1 = 1$, $t_2 = 3/2$.

Повернемось до заміни і розв'яжемо показникові рівняння:

1) $(9/4)^x = 1$; $(9/4)^x = (9/4)^0$; $x = 0$.

2) $(9/4)^x = 3/2$; $(3/2)^{2x} = (3/2)^1$; $x = ½$.

Відповідь: 0; ½.

Приклад: Розв'язати рівняння $4\cdot 3^x - 9\cdot 2^x = 5\cdot 6^{\frac{x}{2}}$.

Розв'язання: Перепишемо рівняння у вигляді:

$$4\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot 3^{\frac{x}{2}} - 9\cdot 2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}} = 5\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}}.$$

Виконаємо заміну $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$.

$4t^2 - 9 = 5t$;

$t_1 = \frac{9}{4}$, $t_2 = -1$;

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \frac{9}{4}; \quad x_1 = 4; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = -1, \quad x \in \varnothing.$$

Відповідь: 4.

Приклад: Розв'язати рівняння $6^x + 4^x = 9^x$.

Розв'язання: $3^x\cdot 2^x + 2^x\cdot 2^x = 3^x\cdot 3^x$; $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$;

$$t_{1,\,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x \in \varnothing;$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad x = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

$x \approx 1{,}18681439$.

Відповідь: $x \approx 1{,}18681439$.

Приклад: Розв'язати рівняння $6^{2x^2} - 2\cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} = 0.$

Розв'язання: Запишемо рівняння у вигляді:

$3^{x^2}\cdot 3^{x^2} - 2\cdot 3^{x^2}\cdot 3^{x+6} + 3^{x+6}\cdot 3^{x+6} = 0.$

Позначивши $t = \frac{3^{x^2}}{3^{x+6}} = 3^{x^2-x-6}$, дістанемо:

$t^2 - 2t + 1 = 0,\ t = 1;$

$x^2 - x - 6 = 0$; $x_1 = 3,\ x_2 = -2$.

Відповідь: 3; -2.

Приклад: Розв'язати рівняння $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$.

Розв'язання: Зведемо всі степені до двох основ 4 і 9:

$3\cdot 4^{2x} - 5\cdot 4^x\cdot 9^x + 2\cdot 9^{2x} = 0.$

Маємо однорідне рівняння (у всіх членів однаковий сумарний степінь – 2х). Для його розв'язування поділимо обидві частини на $9^{2x} \neq 0$.

$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5\left(\frac{4}{9}\right)^{x} + 2 = 0$.

Заміна $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = t > 0$ дає рівняння:

$3t^2 - 5t + 2 = 0;$

$t_1 = 1;\qquad t_2 = \frac{2}{3};$

Обернена заміна: $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = 1;\ \left(\frac{4}{9}\right)^{x} = \left(\frac{4}{9}\right)^{0}$; x=0.

$\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = \frac{2}{3};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$; 2x=1; $x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: 0; $\frac{1}{2}$.

6) Функціонально-графічний спосіб.

Функціонально-графічний метод полягає в тому, що, знаходять корені рівняння за допомогою побудови графіків або шляхом добору доводять, що інших коренів рівняння не має.

Приклад: Розв'язати рівняння $7^{6-x} = x + 2.$

Розв'язання: Корінь x=5 може бути знайденим підбором. Інших розв'язків рівняння не має, так як функція $f(x)=7^{6-x}$ монотонно спадає, а $g(x)=x+2$ монотонно зростає, тобто графіки цих функцій можуть перетинатися не більше ніж один раз.

Тобто графічним способом не важко знайти наближенні розв'язки рівнянь такого виду $a^{f(x)}=\varphi(x)$. Знання графіків функції $y=a^{f(x)}$ та $y=\varphi(x)$ не рідко дозволяє визначити число розв'язків рівняння та їх наближені, а іноді і точні значення.

Приклад: Розв'яжіть графічно рівняння $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=x+1$

Розв'язання: Побудуємо графіки функцій $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, $y=x+1$ в одній системі координат. Графіки $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ і $y=x+1$ перетинаються в точці, абсциса якої x=0 (Рис. 4).

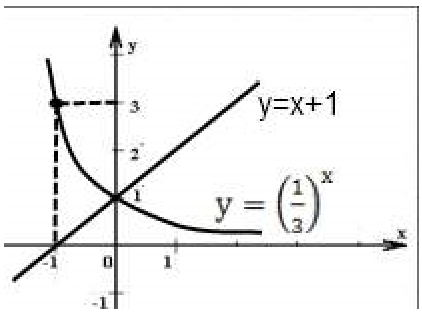


Рис. 4. Графіки функцій $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ і $y=x+1$

Відповідь: 0.

1.3. Поняття про логарифмічну функцію. Способи розв'язання логарифмічних рівнянь.

Рівняння $a^{x}=b,$ де a>0 і $a\neq1$ не має розв'язків, якщо $b\leq0$, і має єдиний корінь у випадку $b>0$. Цей корінь називають логарифмом b за основою a і позначають $\log_a b$, тобто $a^{\log_a b}=b$

Логарифмом числа b за основою a називається показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число b. Формулу $a^{\log_a b} = b$ (де $b > 0, a > 0$ і $a \neq 1$) називають основною логарифмічною тотожністю.

Функцію, задану формулою $y = \log_a x,$ називають логарифмічною функцією за основою a.

Десятковий логарифм — це логарифм за основою 10. Позначення: $\log_{10} x = \lg x$.

Натуральний логарифм — це логарифм за основою e (e — ірраціональне число, наближене значення якого e ≈ 2 7,). Позначення: $\log_e x = \ln x$. Логарифмічна функція $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$ — це функція, обернена до показникової функції $y = a^x$.

Основою логарифма може бути довільне додатне число, крім одиниці. Як відомо, коли a > 0 і a ≠1, то область визначення показникової функції $y = a^x$.— множина всіх дійсних чисел R, а область значень — множина всіх додатних дійсних чисел. Тому при таких значеннях a для будь-якого додатного числа b знайдеться таке α, що $a^\alpha = b$. Іншими словами: при будьякій основі a, де a > 0 і a ≠1, існує логарифм кожного додатного числа. Логарифм від'ємного числа і нуля не існує.

Знаходження логарифма числа називають логарифмуванням. Ця операція обернена до операції піднесення до степеня з відповідною основою.

Основні властивості логарифмічної функції:

Якщо $a > 1$, логарифмічна функція зростає при $x > 0$; якщо $0 < a < 1$, логарифмічна функція спадає при $x > 0$ (рис. 3).

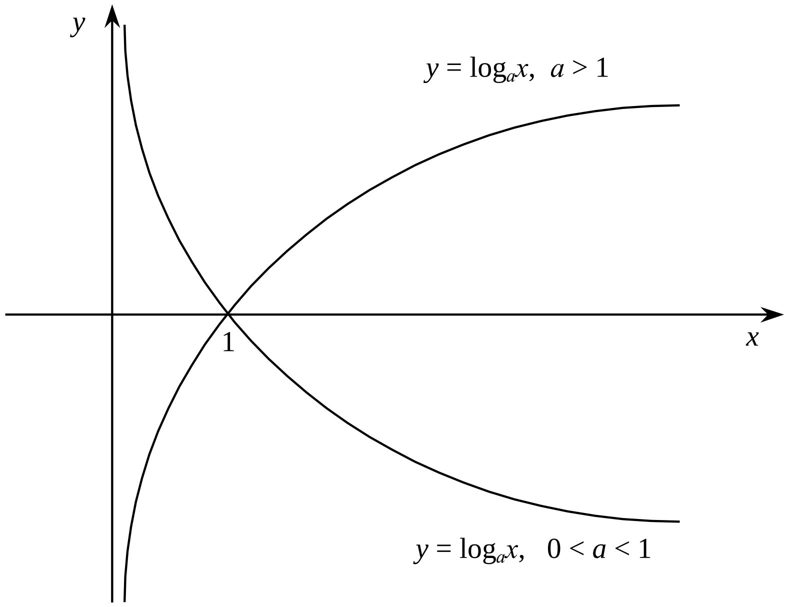


Рис. 3. Графік логарифмічної функції

Область визначення логарифмічної функції - множина всіх додатних чисел R+, тобто D(loga)= R+. (0; +∞). Справді, кожне додатне число x має логарифм за основою a.

Область значень логарифмічної функції - множина всіх дійсних чисел (∞; +∞). Для будь-якого дійсного y виконується рівність $\log_a\left(a^y\right) = y,$ тобто функція $y = \log_a x$ набуває значення y_0 в точці $x_0 = a^{y_0}$.

Логарифмічна функція монотонна на всій області визначення. Якщо $a > 1$ функція зростає , тобто якщо $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 > \log_a x_1$. Якщо $0 < a < 1$ функція спадає, тобто якщо $x_2 > x_1 > 0$, то $\log_a x_2 < \log_a x_1$.

Логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a > 0$ та $\grave{a} \neq 1$- це функція обернена до показникової функції $y = a^x$. Графіки показникової і логарифмічної функції, що мають однакову основу, симетричні відносно прямої $y = x$.

Якщо деякий вираз A, який складається з додатніх чисел за допомогою операцій множення, ділення та піднесення до степеня, то використовую властивості логарифмів, можна виразити $\log_a A$ через логарифми вхідних у вираз A чисел. Таке перетворення називається логарифмуванням. Розв’язок оберненої задачі , тобто знаходження виразу за його логарифмом, називається потенціюванням.

Під час роботи з логарифмами застосовуються такі їх властивості, що випливають з властивостей показникової функції. Наведемо деякі властивості логарифмів.

1. $\log_a 1 = 0$.

2. $\log_a a = 1$.

3. $\log_a b = \log_a b + \log_a c$.

4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

5. $\log_a b^{\beta} = \beta \log_a b$.

6. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

7. Формула переходу до нової основи $c > 0,\ c \neq 1$: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

9. $\log_{a^{\alpha}} b^{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b$.

10. $\log_a b = \log_{a^{\alpha}} b^{\alpha} = \log_{a^2} b^2 = \log_{a^3} b^3 = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} = \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[3]{b} = \ldots$

11. $\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$.

12. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Властивості степенів і логарифмів тісно пов'язані між собою. Вони фактично виражають одне і теж тільки один раз ми звертаємо увагу на поведінку самих степенів, а другий - на поведінку показників степеня:

$$a^{t_1} a^{t_2} = a^{t_1 + t_2}, \qquad \log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2;$$

$$\frac{a^{t_1}}{a^{t_2}} = a^{t_1 - t_2}, \qquad \log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2;$$

$$\left(a^t\right)^k = a^{tk}, \qquad \log_a b^k = k \log_a b.$$

Логарифмічним рівнянням називається рівняння, що містять невідому величину під знаком логарифма або в основі логарифма (або те і друге одночасно). Розв'язати логарифмічне рівняння – це означає знайти всі його корені або довести, що рівняння коренів не має.

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь використовуються означення логарифма та його властивості, дії логарифмування та потенціювання, різні логарифмічні тотожності. [24,25]

Способи розв'язання логарифмічних рівнянь [3,4,5].

1) Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь.

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд $log\ x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. За означенням логарифма випливає, що $x = a^b$.

Інший вигляд найпростішого логарифмічного рівняння такий: $log_a\ x = log_a\ b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $b > 0$. Із цього рівняння випливає, що $x = b$. Дійсно із рівності $log_a\ x = log_a\ b$ на підставі означення логарифма і основної логарифмічної тотожності маємо: $x = a^{\log_a b} = b$.

Найпростішим логарифмічним рівнянням є рівняння $log_x\ a = b$, де $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$. За означенням логарифма маємо: x^b = а, звідси $x = a^{\frac{1}{b}}$. Слід враховувати, що:

а) при $a \neq 1$ і $b \neq 0$ має єдиний корінь $x = a^{\frac{1}{b}}$;

б) при $a = 1$ і $b = 0$ має розв'язком будь-яке додатне, відмінне від одиниці число;

в) при $a = 1$ і $b \neq 0$ коренів не має;

г) при $a \neq 1$ і $b = 0$ коренів не має .

Приклад : Розв'язати рівняння $0,2\log_x \frac{1}{32} = -0.5$.

Розв'язання: Оскільки $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$, то $\log_x \frac{1}{32}=5\log_x \frac{1}{2}$, тобто початкове рівняння рівносильно рівнянню $\log_x \frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, звідки $x=(1/2)^{-2}=4$. Число 4 - єдиний корінь даного рівняння.

Відповідь: 4.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $log_3(2x+1)=2$.

Розв'язання: За означенням логарифма маємо:

$2x + 1 = 3^2$,

$2x = 8$,

$x = 4$.

Перевірка: $log_3(2 \cdot 4 + 1) = log_3 9 = 2$.

Відповідь: 4.

Приклад : Розв'яжіть рівняння $log_3 x = log_3(6 - x^2)$.

Розв'язання: Із рівності логарифмів чисел випливає:

$x = 6 - x^2$;

$x^2 + x - 6 = 0$;

$x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Перевірка:

1) Число -3 не є коренем даного рівняння, бо вираз $log_3(-3)$ — не визначений;

2) $log_3 x = log_3 2$; $log_3(6 - x^2) = \log_3(6 - 2^2) = log_3 2$.

Відповідь: 2.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $log_{x+1}(2x^2+1)=2$.

Розв'язання: За означенням логарифма маємо:

$2x^2 + 1 = (x + 1)^2$;

$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$;

$x^2 - 2x = 0$;

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Перевірка:

1) Значення $x_1 = 0$ не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма $x+1$ не повинна дорівнювати 1.

2) $\log_{x+1}(2\cdot 2^2 + 1) = \log_3 9 = 2$.

Відповідь: 2.

2) Рівняння, що розв'язуються за допомогою означення логарифма:

Теорема: Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильно рівнянню $f(x) = g(x)$ при обмеженнях $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Доведення: Нехай x - розв'язок рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Тоді визначені логарифми чисел $f(x)$ та $g(x)$, тобто ці числа повинні бути більше нуля. Потенціюючи рівність $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, отримуємо рівність $f(x) = g(x)$. Навпаки, нехай x - розв'язок рівняння $f(x) = g(x)$, причому $g(x) > 0$ та $f(x) > 0$. Тоді рівність $f(x) = g(x)$ можно прологарифмувати, і ми отримаємо $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Логарифмічне рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0, a \neq 1$) рівносильне кожній з наступних систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Для розв'язку рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ переходять тільки до одної з цих систем (та, яка легше) або розв'язують рівняння $f(x) = g(x)$, яке може мати корні лишні для початкового рівняння , і перевіряють кожне з них підстановкою в початкове рівняння.

Для розв'язування рівнянь

$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a u(x)$,

$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a u(x)$,

$p\log_a f(x) = \log_a u(x)$,

використовують властивості логарифма , їх приводять відповідно до виду:

$\log_a(f(x)\cdot g(x)) = \log_a u(x)$,

$\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \log_a u(x)$,

$\log_a(f(x))^p = \log_a u(x)$

і далі розв'язуються так, як вказано попередньо. Із знайдених коренів слідує включити до відповіді ті, для яких $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $u(x) > 0$, або перевірити кожен з них підстановкою до початкового рівняння.

Якщо при розв'язуванні за допомогою формул виконуються перетворення виду $\log_a(f(x)\cdot g(x))$, $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$, $\log_a(f(x))^p$, де p - парне число, то виникає можливість втрати коренів заданого рівняння. Для того щоб уникнути можливої втрати коренів, треба користуватися вказаними формулами у такому вигляді:

$$\log_a(f(x)\cdot g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$$

$\log_a(f(x))^p = p\log|f(x)|$, p - парне число.

Приклад : Розв'язати рівняння $\log_8 \log_2 \log_2 \log_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$

Розв'язання: За означенням логарифма отримуємо :

$$\log_2 \log_2 \log_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 8^0 = 1$$

$$\log_2 \log_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 2$$

$$\log_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 2^2 = 4$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{x} = 16 \\ -\frac{1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{16}$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} &\log_8 \log_2 \log_2 \log_2 16 = 0 \\ &\log_2 \log_2 \log_2 16 = 1 \\ &\log_2 \log_2 16 = 2 \\ &\log_2 16 = 4 \\ &16 = 2^4 \\ &16 = 16. \end{aligned}$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{16}$

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_{5+x/3} 3 = \log_{-1/x+1} 3$.

Розв'язання: Рівняння $\log_{5+x/3} 3 = \log_{-1/x+1} 3$ рівносильно змішаній системі

$$\begin{cases} \dfrac{5+x}{3} > 0, \\ \dfrac{5+x}{3} \neq 1, \\ \dfrac{5+x}{3} = \dfrac{-1}{x+1} \end{cases}$$

Рівняння системи має два корені: $x_1 = -4, x_2 = -2$. Число $x_1 = -4$ задовольняє всім співвідношенням системи , а для числа $x_2 = -2$ не виконується умова $\dfrac{5+x}{3} \neq 1$. Таким чином рівняння $\log_{5+x/3} 3 = \log_{-1/x+1} 3$ має один корінь - число $x_1 = -4$.

Відповідь: -4.

3) **Зведення до спільної основи.** Якщо в рівнянні маємо логарифми з різними основами, то переходимо до спільної основи.

Приклад: Розв'язати рівняння $(3\log_x 5 + 1)\log_5^2 x = 4$.

Розв'язання: $\left(\dfrac{3}{\log_5 x} + 1\right)\log_5^2 x = 4,$

$\log_5 x = t, \quad \left(\dfrac{3}{t} + 1\right)t^2 = 4,$

$t^2 + 3t - 4 = 0, \quad t_1 = 1, \; t_2 = -4;$

$\log_5 x = 1, \quad x_1 = 5, \quad \log_5 x = -4, \quad x = 5^{-4}.$

Відповідь: 5; 5^{-4}.

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$.

Розв'язання: Переходимо до основи 5:

$$\frac{\log_5(125x)}{\log_5 x}\left(\frac{\log_5 x}{\log_5 25}\right)^2 = 1.$$

Позначивши $\log_5 x = t,$ дістанемо $\frac{3+t}{t}\frac{t^2}{4} = 1,$ звідки

$t^2 + 3t - 4 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = -4;$

$\log_5 x = 1,\ x_1 = 5,\ \log_5 x = -4,\ x_2 = 5^{-4}.$

Відповідь: 5; 5^{-4}.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3.$

Розв'язання:

$log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 3;$

$log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 3;$

$log_3 x - 2 \cdot \frac{\log_3 x}{-1} = 3;$

$log_3 x + 2log_3 x = 3;$

$3log_3 x = 3;$

$log_3 x = 1;$

$x = 3.$

Перевірка: $log_3 3 - 2\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + 2 = 3$. Отже, $x = 3$ — корінь.

Відповідь: 3.

4) Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного (або метод заміни змінної).

Логарифмічне рівняння зводиться до алгебраїчного рівняння.

Приклад: Розв’язати рівняння $\log_{0,5}^2 x + 6 = 5\log_{0,5} x$.

Розв’язання: Позначимо $\log_5 x = t,$

$t^2 - 5t + 6 = 0,\ t_1 = 2;\ t_2 = 3;$

$\log_5 x = 2,\ x_1 = 25,$

$\log_5 x = 3,\ x_2 = 125$

Відповідь: 25; 125.

Приклад: Розв’язати рівняння $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0.$

Розв’язання: Позначимо $\sqrt[3]{\log_2 x} = t$.

Тоді $\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} = \sqrt[3]{\dfrac{2(\log_2 x)^2}{(\log_2 16)^2}} = \dfrac{1}{2}t^2,$

$t^2 - t - 6 = 0,\ t_1 = 3,\ t_2 = -2;$

$\sqrt[3]{\log_2 x} = 3,\ \log_2 x = 27,\ x_1 = 2^{27};$

$\sqrt[3]{\log_2 x} = -2,\ \log_2 x = -8,\ x_2 = 2^{-8}.$

Відповідь: 2^{27} *;* 2^{-8} .

Приклад: Розв'яжіть рівняння $log_2^2\ x - 3log_2 x = 4$.

Розв'язання:

Позначимо $log_2 x$ через y. Дане рівняння набере вигляду:

$y^2 - 3y = 4;$

$y^2 - 3y - 4 = 0;$

$y_1 = 4;\ y_2 = -1.$

Звідси $log_2 x = 4,$ $\qquad$ $log_2 x = -1;$

$x = 2^4;$ $\qquad$ $x = 2^{-1};$

$x = 16,$ $\qquad$ $x = \dfrac{1}{2}.$

Перевірка: 1) $log_2^2\ 16 - 3\ log_2 16 = 16 - 12 = 4;$

2) $log_2^2 \dfrac{1}{2} - 3\ log_2 \dfrac{1}{2} = -1 + 3 = 4.$

Відповідь: 16; $\dfrac{1}{2}$.

5) **Потенціювання.**

Якщо під знак логарифма входить сума або різниця, то рівняння потенціюють. Розв’язок неодмінно перевіряють.

Приклад: Розв’яжіть рівняння $\log_4(x+12)\log_x 2 = 1$.

Розв'язання: Перейдемо до основи 2:

$$\frac{\log_4(x+12)}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 x}=1,$$

$$\log_4(x+12)=2\log_2 x.$$

Далі виконуємо потенціювання: $x+12=x^2;\ x_1=4,\ x_2=-3$.

Корінь $x_2=-3$ не задовольняє рівняння.

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_x\left(x^2-5x+5\right)=1.$

Розв'язок: За умовою маємо: $x^2-5x+5=x,$ звідки $x_1=5,\ x_2=1$.

Корінь $x_2=1$ не задовольняє рівняння.

Відповідь: 5.

*Приклад***:** Розв'яжіть рівняння $log_5(x – 1) + log_5(x – 2) = log_5(x + 2)$.

Розв'язання:

Пропотенціюємо дану рівність і одержимо:

$log_5((x – 1)(x – 2)) = log_5(x + 2)$;

$(x – 1)(x – 2) = x + 2$;

$x^2 – 2x – x + 2 = x + 2$;

$x^2 – 4x = 0$;

$x(x – 4) = 0$;

$x = 0$ або $x = 4$.

Перевірка:

1) Значення $x = 0$ не є коренем рівняння, тому що вирази $log_5(x – 1)$ і $log_5(x – 2)$ не мають смислу при $x = 0$.
2) $log_5(x–1) + log_5(x–2) = log_5(4–1) + log_5(4–2) = log_5 3 + log_5 2 = log_5(2\cdot 3) = log_5 6$.

$log_5(x + 2) = log_5(4 + 2) = log_5 6$.

Отже, $x = 4$ — корінь.

Відповідь: 4.

6) Логарифмування. Якщо в показник при невідомому входять логарифми невідомого, то звичайно обидві частини рівняння логарифмують.

Приклад: Розв’язати рівняння $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$

Розв’язання:

$\left(10^{\lg_{10} x}\right)^{\lg x} + x^{\lg x} = 20$,

$x^{\lg x} + x^{\lg x} = 20,\ x^{\lg x} = 10$.

Логарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10: $\lg x^{\lg x} = \lg 10,\ (\lg x)^2 = 1,\ \lg x = \pm 1,\ x = 10^{\pm 1}$.

Відповідь: 10;0,1.

Приклад: Розв'яжіть рівняння $x^{\,lgx} = 100x$.

Розв'язання:

Прологарифмуємо обидві частини рівності ($x > 0$), одержимо:

$lgx^{\,lgx} = lg(100x)$;

$lgx\ lgx = lg\ 100 + lgx$;

$lg^2x - lg\ x - 2 = 0$.

Замінимо $lg\ x = y$. Рівняння прийме вигляд:

$y^2 - y - 2 = 0$;

$y_1 = 2,\ y_2 = -1$.

Тоді: 1) $lg\ x = 2;\ x = 10^2;\ x = 100$.

2) $lg\ x = -1;\ x = 10^{-1};\ x = 0{,}1$.

Перевірка:

1) $x^{lgx} = 100^{\,lg100} = 100^2$; $100x = 100 \cdot 100 = 100^2$. Отже, $x = 100$ — корінь.

2) $x^{lgx} = 0{,}1^{lg0{,}1} = 0{,}1^{-1} = \frac{1}{0{,}1} = 10$; $100x = 100 \cdot 0{,}1 = 10$.

Отже, $x = 0{,}1$ — корінь.

Відповідь: 100; 0,1.

7) **Розклад на множники.**

Рівняння подається у вигляді $f_1(x) f_2(x) = 0,$ і кожний множник прирівнюється до нуля.

Приклад: Розв’язати рівняння $\log_2 x \log_3 x = \log_2 x^4 + \log_3 x^4 - 16.$

Розв'язання:

$$\log_2 x \log_3 x - 4\log_2 x - 4\log_3 x + 16 = 0,$$

$$(\log_2 x - 4)(\log_3 x - 4) = 0.$$

Далі маємо:

1) $\log_2 x = 4,\ x_1 = 2^4 = 16;$

2) $\log_3 x = 4,\ x_2 = 3^4 = 81$

Відповідь: 16; 81.

Приклад: Розв'язати рівняння

$$\frac{4}{3}\left(\log_3 (5x-6)^3\right)^2 - \log_3 (5x-6) \cdot \log_3 x^6 + 6\left(\log_3 \frac{1}{x}\right)^2 = 0$$
.

Розв'язання: Позначивши $\log_3 (5x-6)^3 = y$, $\log_3 x = z,$ дістанемо рівняння $\frac{4}{3}y^2 - 6yz + 6z^2 = 0$, або $2y^2 - 9yz + 9z^2 = 0$, звідки маємо $(y-3z)(2y-3z) = 0.$

Прирівнюємо до нуля кожний множник:

1) $y = 3z,\ \log_3 (5x-6)^3 = \log_3 x,\ 5x - 6 = x,\ x_1 = \frac{2}{3};$

2) $2y = 3z,\ \log_3 (5x-6)^2 = \log_3 x,\ (5x-6)^2 = x,\ x_2 = \frac{36}{25},\ x_3 = 1.$

Корінь $x_3 = 1$ не задовольняє рівняння.

Відповідь: $\frac{2}{3}; \frac{36}{25}.$

8) Графічний спосіб розв'язування. Рівняння записують у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$. Далі будують графіки функцій $y = f_1(x),\ \ y = f_2(x)$ і відшукують точки їх перетину, які визначають розв'язок рівняння.

Приклад: Розв'язати графічно рівняння $\log_2 x = 3 - x$.

Розв'язання: Графіки функцій $y = \log_2 x,\ y = 3 - x$ перетинаються в точці $x = 2,\ y = 1$. Маємо розв'язок $x = 2$.

Відповідь: 2.

9) Поєднання кількох способів. Розв'язуючи логарифмічні рівняння здебільшого застосовують кілька способів їх перетворення.

Приклад: Розв'язати рівняння $2\log_3 x = \log_x\left(x^{\log_3 x} + 2\right)$.

Розв'язання: Переходимо до основи 3:

$$2\log_3 x = \frac{\log_3\left(x^{\log_3 x} + 2\right)}{\log_3 x},\ \log_3 x^{2\log_3 x} = \log_3\left(x^{\log_3 x} + 2\right).$$

Потенціюємо рівняння:

$x^{2\log_3 x} = x^{2\log_3 x} + 2,\ x^{\log_3 x} = t$;

$t^2 - t - 2 = 0,\ t_1 = -1,\ t_2 = 2,\ x^{\log_3 x} = -1,\ x \in \varnothing$; $x^{\log_3 x} = 2$.

Логарифмуємо рівняння за основою 3:

$(\log_3 x)^2 = \log_3 2;\ \log_3 x = \pm\sqrt{\log_3 2},\ x = 3^{\pm\sqrt{\log_3 2}}$.

Відповідь: $3^{\pm\sqrt{\log_3 2}}$.

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_3\left(\sqrt{x} + \left|\sqrt{x} - 1\right|\right) = \log_9\left(4\sqrt{x} - 3 + 4\left|\sqrt{x} - 1\right|\right)$.

Розв'язання: Розглядаємо два випадки:

1) $\sqrt{x} - 1 \le 0$, тоді рівняння перетворюється на тотожність

$\log_3 1 = \log_9 1,$ звідки $\sqrt{x} \le 1,\ x \ge 0,\ x \le 1,\ x \in [0; 1]$;

2) $\sqrt{x} - 1 \ge 0$, тоді $\log_3\left(2\sqrt{x} - 1\right) = \log_9\left(8\sqrt{x} - 7\right)$.

Потенціюємо рівняння:

$\left(2\sqrt{x} - 1\right)^2 = 8\sqrt{x} - 7;$

$4\left(\sqrt{x}\right)^2 - 12\sqrt{x} + 8 = 0;$

$\sqrt{x} = 1,\ x = 1;$

$\sqrt{x} = 2,\ x = 4.$

Відповідь: 1; 4.

Розділ ІІ. Методичні основи дослідження навчання учнів фізико-математичного профілю розв’язуванню показникових і логарифмічних рівнянь.

2.1. Аналіз навчальної програми з математики.

Провідною ідеєю організації процесу вивчення математики у середніх навчально-виховних закладах є рівнева і профільна диференціація. На цій основі створюються умови для його гуманізації, демократизації та реалізації культуротворчої функції національної школи. Програми визначають базовий зміст математичної освіти в основній і старшій школі з урахуванням кількості годин на математику, передбачених базовим та іншими навчальними планами і діючими підручниками та навчальними посібниками.

Програми передбачають можливість реалізації базової математичної освіти з різним ступенем обгрунтованості і повноти на основному (обов’язковому для всіх учнів) та підвищеному (для тих, хто має здібності та інтерес до математики) рівнях, які визначають мінімальний і максимальний обсяги навчального матеріалу у масовій школі. Їх засвоєння - необхідна умова для одержання учнем відповідно позитивної та відмінної оцінок з математики.

Вивчення теоретичного матеріалу на основному рівні, як правило, не потребує відтворень доведень і обгрунтувань, але бажання і спроби роботи це необхідно всіляко підтримувати та заохочувати, як і спроби розв’язувати задачі і вправи складніші, ніж обов’язкові для всіх учнів. Зрозуміло, що підвищенний рівень засвоєння учнями теоретичного матеріалу, оволодіння практичними уміннями і навичками розв’язування задач і вправ характеризується досить високим рівнем обгрунтованості і пояснення. Учні, які претендують на відмінну оцінку з математики, повинні вміти розв’язувати практично весь задачний матеріал підручника або навчального посібника, крім включеного до додаткових розділів або позначеного зірочками.

Показникові й логарифмічні рівняння та нерівності вивчаються в 11 класі загальноосвітньої школі у розділі «Показникова і логарифмічна функції». Згідно чинної навчальної програми в курсі алгебри (профільний рівень) вивчення розділу **«Показникова та логарифмічна функція»** відбувається в **11 класі.** Навчальною програмою передбачено опрацювання учнями таких тем з даного розділу: Степінь із дійсним показником. Показникова функція. Логарифми та їх властивості. Логарифмічна функція. Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами. Похідні показникової та логарифмічної функцій.

В ході її вивчення учень (учениця):

- ✓ **формулює** означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості;
- ✓ **формулює** означення логарифма та властивості логарифмів;
- ✓ **будує** графіки показникових і логарифмічних функцій;
- ✓ **перетворює** вирази, які містять логарифми;
- ✓ **знаходить** похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і **застосовує** їх до дослідження цих класів функцій;
- ✓ **розв'язує** показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами
- ✓ **застосовує** показникову та логарифмічну функції до розв'язування прикладних задачах.

За підручником для 11 класу під редакцією Є.П.Нелін, О. Є. Долгова "Алгебра і початки аналізу (профільний рівень, 2019 рік) показникова і логарифмічна функції вивчаються в школі у таких темах:

- Узагальнення поняття степеня. Степінь із дійсним показником.
- Показникова функція, її властивості та графік.
- Розв'язування показникових рівнянь та нерівностей.
- Логарифм числа. Властивості логарифмів. Логарифмічна функція, її властивості і графік.

- Розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей .
- Похідні показникової та логарифмічної функцій.
- Розв'язування показниково-степеневих рівнянь та нерівностей. Показникові та логарифмічні рівняння й нерівності .

Зміст і структуру освіти визначають цілі. Своє вираження вони завжди приймають у вигляді переліку певних вимог, які характеризують кінцевий результат процесу навчення і виховання.

У програмі з математики для середньої школи, зокрема в розділі «Тематичне планування навчального матеріалу», зміст освіти по кожному із курсів (математика, геометрія, алгебра, алгебра і початки аналізу) розбито на навчальні теми. Вивчаючи кожну з них, вчитель і учні ставлять перед собою певні цілі. Саме їх ми і будемо називати навчальними.

Навчальні цілі - ідеальне уявлення результату, який має бути досягненим в ході вивчення тієї чи іншої навчальної теми.

Слід відмітити, що навчальна ціль як ідеальний результат майбутньої діяльності проектується при вивченні математики такими п'ятьма напрямками.

1) формування світогляду і особистості учня;
2) Формування мислення і мовної культури учня;
3) Розвиток прикладних і політехнічних вмінь;
4) Розвиток загально-трудових і навчальних вмінь;
5) вимоги до математичної підготовки учнів.

Кожний із цих напрямків, очевидно, теж визначає цілі, які будуть похідні від навчальної. Їх у дидактиці прийнято поділяти на три групи, відповідно називаючи кожну з груп: дидактична або освітня мета, виховна мета і розвиваюча. Формуються навчальні цілі завжди свідомо і мають бути науково-обґрунтованими та практично досяжними.

Визначимо навчальні цілі які повинні бути поставленні перед вчителем і учнями в процесі вивчення теми «Показникова і логарифмічна функції»:

1. Учні повинні вміти зображати графік показникової і логарифмічної функцій, повинні знати основні показникові та логарифмічні тотожності.

2. Учні повинні вміти розв’язувати типові вправи на використання основних показникових та логарифмічних тотожностей. Вміти розв’язувати основні показникові та логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи.

Сформульовані цілі визначають певний рівень навчально-пізнавальної діяльності учнів під час вивчення даної теми. Це так званий рівень вмінь і навичок. У дидактиці виділяють кілька таких рівнів. Будемо дотримуватись класифікації рівнів, яка дана в посібнику:

І-й рівень - рівень знайомства,

ІІ-й рівень - рівень відтворення,

ІІІ-й рівень - рівень умінь і навичок,

ІV-й рівень - рівень творчості.

Учень, який досяг І-го рівня навчально-пізнавальної діяльності, здатний впізнати предмет, об’єкти, процеси, властивості, але тільки за їх виглядом описом, зображенням, характеристикою. Кажуть, що він володіє знаннями-знайомствами.

Іноді ці знання умовно поділяють на знання про об’єкти що вивчаються і оперативні знання (про зв’язки між об’єктами).

Учень, який досягнув ІІ-го рівня, повинен вміти відтворити (повторити) інформацію, операції, дії, засвоєнні під час навчання. В цьому випадку кажуть, що він володіє знаннями-копіями. Розділяють буквальне і реконструктивне відтворення.

На ІІІ-му рівні учень повинен уміти виконувати дії, загальна методика і послідовність (алгоритм), яких вивченні на заняттях, але зміст і умови їх виконання нові.

Успішно навчаючись учень може досягнути ІV-го рівня. Тоді він здатний самостійно орієнтуватись в нових, нестандартних ситуаціях, складати програму дій і виконувати їх, пропонувати нові, невідомі йому раніше розв’язання. Його діяльність носить пошуковий характер.

Визначені цілі, очевидно, будуть цілями III-го рівня, саме того, який повинен бути досягнутий всіма учнями в процесі вивчення теми «Показникова і логарифмічна функція». Проте процес засвоєння підпорядкований ієрархії рівнів діяльності: учень не може перейти на III-й рівень, минувши рівні I і II. Тому, крім визначених цілей III-го рівня, повинні бути сформульовані цілі I-го і II-го рівнів. Вони безпосердньо проектуються вже виділеними цілями III-го рівня. Так, в нашому випадку ще дві цілі: «Учні повинні знати означення показникової і логарифмічної функцій», «Учні повинні знати і вміти доводити властивості логарифмічної та показникової функцій». Щодо цілей IV-го рівня, то їх визначити потрібно, але відносити до класу дидактичних не варто. Оскільки досягнути їх всі учні класу не можуть. Правильно буде, якщо віднести їх до класу розвиваючих.

Підкоригувавши формулювання чотирьох визначених цілей та встановивши відповідно до принципу ієрархії порядок їх досягнення, матимемо:

Тема: «Показникова та логарифмічна функції» (20 (30)год).

Мета: Вивчивши тему учні повинні знати означення показникової та логарифмічної функції; вміти доводити їх властивості, будувати графіки данних функції, розв’язувати вправи на використання основних властивостей даних функцій з достатнім обгрунтуванням в ході розв’язання.

Теоретичний матеріал теми не весь вивчається на одному й тому ж рівні. Певна його частина вивчається на рівні знайомства, інша на рівні знань чи умінь і навичок. Для того, щоб знати на якому рівні яка частина матеріалу вивчається (щоб виділити головне і знати другорядне) здійснюють розбиття всього матеріалу на елементи знань.

Під елементом знань розуміють логічно завершену порцію інформації. В математиці кожному елементу знань встановлюють його статус : поняття - П; факт- Ф; твердження -Т; ознака -О; метод -М; спосіб дії -СД.

Розбиття навчального матеріалу на елементи знань і побудова графічної схеми взаємозв'язку між ними називається логіко-дидактичним аналізом навчального матеріалу.

2.2. Методика вивчення показникових та логарифмічних рівнянь.

Засвоєння учнями нових знань при вивченні розділу базується на раніше вивченному матеріалі про степені й корені, розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь і нерівностей, тощо. Бажано, щоб актуальні питання раніше вивченного матеріалу грунтовно систематизувалися за рахунок часу, виділеного на узагальнююче повторення. При плануванні узагальнюючого повторювання це слід урахувати, і до повторенного матеріалу без потреби можна не повертатися.

Приступаючи до розв'язування найпростійших показникових рівнянь, доцільно вписати на довідковій таблиці або на дошці основні формули дій із степенями. Спочатку доцільно розглянути найпростіші рівняння виду $2^{x-5}=\sqrt[5]{8}$. Записуючи праву частину рівняння як степінь числа 2, дістаємо $2^{x-5}=2^{\frac{3}{5}}$. Оскільки основи даних степенів рівні і самі степені рівні, то маємо змогу прирівняти показники: $x-5=\frac{3}{5}$. Тоді дістаємо: $x=5\frac{3}{5}$.

Звертаємо увагу учнів на те, що записані вище формули, якщо їх застосовувати зліво направо, дають змогу замість двох степенів записати один степінь. Отже, якщо в лівій і правій частинах даного показникового рівняння тільки добутки, частки, степені або корені, то можна це рівняння завжди звести до найпростійшого рівняння виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, $(a>0)$. Цей орієнтир бажано занотувати в зошитах учнів, щоб вони в подальшому вільно пізнавали такі показникові рівняння, які безпосередньо зводяться до найпростіших.

При введенні поняття логарифму і властивостей логарифмічної функції необхідно значну увагу приділити вмінню застосовувати основну логарифмічну тотожність, а також формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої.

Приступаючи до розв'язування логарифмічних рівнянь, треба враховувати, що всі властивості логарифмічної функції були доведені за умови, що вирази, які стоять під знаком логарифма, додатні.

Наприклад, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ тільки при $x > 0$ і $y > 0$. Якщо ж у рівнянні або нерівності знаходиться вираз-добуток xy, то він буде додатнім не тільки тоді, коли x і y додатні, але й тоді,, коли x та y будуть одночасно від'ємні. У цьому випадку формулу «логарифм добутку» не використовують, бо можлива втрата коренів.

Структура рівносильних перетворень рівнянь: Область визначення; Обмеження, які необхідні для гарантування прямих і обернених перетворень; Відповідні властивості числових рівностей або властивості відповідних функцій.

Як бачимо, щоб виконувані перетворення були рівносильні, необхідно, щоб виконувалися і обернені перетворення на області визначення даного рівняння.

Бажано по можливості не використовувати формули логарифмування добутку, частки, і парного степеня, якщо це призводить до звуження області визначення рівняння, а користуватися цими формулами тільки справа наліво, що приводить до розширення області визначення (в цьому випадку можлива хіба що поява сторонніх коренів, але їх можна відсіяти перевіркою).

Приклад: Розв'язати рівняння $2\lg x(x-1) = \lg(x-1)^2 + 4$ (1).

Розв'язання: На області визначення рівняння $\begin{cases} x(x-1) > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases}$ це рівняння рівносильне рівнянню $\lg(x(x-1))^2 - \lg(x-1)^2 = 4$ (2)

яке в свою чергу рівносильне рівнянню $\lg\dfrac{x^2(x-1)^2}{(x-1)^2} = 4$ (3)

Усі перетворення рівносильні, бо на області визначення даного рівняння можна виконувати перетворення (1) - (2) - (3) і обернені перетворення (3) - (2) - (1). Скоротивши в рівнянні (3) дріб на $(x-1)^2$ (на області визначення $(x-1)^2 \neq 0$), дістанемо рівносильне рівняння: $\lg x^2 = 4$. Це рівняння за означенням логарифма рівносильне рівнянню $x^2 = 10^4$.

Звідси $x = \pm 100$. Оскільки ці значення входять в область визначення рівняння і ніяких додаткових обмежень у нас не було, то $x = \pm 100$ - корені даного рівняння.

Слід звернути увагу учнів на те, що при розв'язуванні логарифмічних рівнянь можна користуватися не тільки рівносильними перетвореннями, але й діставати рівняння-наслідки (коли ми гарантуємо тільки прямі перетворення і не гарантуємо обернені). Учні повинні розуміти, що при використанні рівнянь-наслідків можлива поява стороніх коренівь і тому в цьому випадку перевірка є складовою частиною розв'язування рівняння.

Слід звернути увагу учнів на те, що певної акуратності потребує використання формули переходу від однієї основи до іншої:

$\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$, де $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Якщо a і b -числа, що недорівнюють одиниці, то цю формулу можна застосовувати і зліва направо і справа наліво (при $N > 0$), тобто використання цієї формули при розв'язуванні рівнянь або нерівностей приводить до рівняння (нерівності), рівносильного даному. Якщо ж новою основою логарифма є вираз із змінною, то може виявитися, що цей вираз на області визначення початкового рівняння дорівнюватиме одиниці, а після застосування формули переходу від однієї основи до іншої вираз, що стоїть в основі логарифма, вже не дорівнюватиме одиниці. В цьому випадку застосування формули переходу від однієї основи до іншої може привести до втрати тих коренів початкового рівняння, для яких нова основа логарифма дорівнює одиниці.

Підсумовуючи ці міркування, робимо висновки: якщо при переході від однієї основи логарифмів до іншої нова основа - число (звичайно більше від нуля і не дорівнює одиниці), то дістанемо рівняння, рівносильне даному на його області визначення.

Якщо доводиться використовувати вираз із змінною як нову основу логарифма, то щоб не втратити корені рівняння, необхідно розглядати два випадки:

- вираз, який береться як нова основа, дорівнює одиниці (якщо це можливо на області визначення розглядуваного рівняння), і перевіряємо, чи будуть ці значення змінної, при яких вираз дорівнює одиниці, коренями даного рівняння;
- нова основа не дорівнює одиниці - в цьому випадку користаємося формулою переходу від однієї основи логарифма до іншої.

Бажано звернути увагу учнів на те, що деякі логарифмічні рівняння, які зведені до вигляду $f(x)=0$ можна розв'язати за допомогою розкладання лівої частини рівняння на множники.

Досить часто зустрічаються рівняння, члени яких є степенями, в яких основа і показник степеня - функції від змінної величини.

Приклад: Розв'язати рівняння $x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}$.

Розв'язання: Область визначення: $x>0$. Тоді ліва і права частини цього рівняння додатні на області визначення. Прологарифмуємо обидві частини за основою 4: $\log_4\left(x^{\log_4 x-2}\right)=\log_4\left(2^{3(\log_4 x-1)}\right)$.

Дістаємо рівняння, рівносильне даному на області визначення:
$(\log_4 x-2)\cdot\log_4 x=3(\log_4 x-1)\cdot\log_4 2$.

Позначимо $\log_4 x=y$ і, врахувавши, що $\log_4 2=\frac{1}{2}$, маємо: $(y-2)y=3(y-1)\cdot\frac{1}{2}$

Звідки $y=3$ або $y=\frac{1}{2}$. Тоді $\log_4 x=3$ або $\log_4 x=\frac{1}{2}$. Отже, $x=4^3=64$ або

$x = 4^{\frac{1}{2}} = 2$. Оскільки ці значення входять до області визначення, то $x = 64$ і $x = 2$- корені даного рівняння.

Підводячи підсумки розв'язування цього рівняння, бажано звернути увагу учнів на те, що в цьому рівнянні (в його лівій частині) змінна входить і в основу, і в показник степеня. Доцільно зафіксувати в зошитах учнів, що рівняння, в якому змінна входить і в основу, і в показник степеня, найчастіше розв'язується логарифмуванням обох частин рівняння.

Слово «найчастіше» присутнє в наведеному правилі в зв'язку з рівняннями типу: $x^{2\log_x(x+1)} = 4x + 4$.

На його області визначення $(x > 0, x \neq 1)$ це рівняння рівносильне рівнянню: $x^{\log_x(x+1)^2} = 4x + 4$, яке за основною логарифмічною тотожністю рівносильне (на області визначення) рівнянню $(x+1)^2 = 4x + 4$. Звідси $x = -1$ (не входить до області визначення) або $x = 3$ (входить до області визначення і є коренем).

Після відпрацювання цього правилу на прикладах доцільно запропонувати учням більш загальний підхід (він, як правило, використовується тоді, коли немає можливості взяти логарифм від обох частин рівняння) - перехід від степеня, в основі якого стоїть вираз із змінною, до степеня з числовою основою a за формулою $(f(x))^{\varphi(x)} = a^{\varphi(x)\log_a f(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Зауваження. Очевидно, що при $f(x) > 0$ цю формулу можна застосовувати як зліва направо, так справа наліво. Якщо ми використаємо цю формулу при розв'язуванні рівняння, на області визначення якого $f(x) > 0$, то ми гарантуємо і прямі, і обернені перетворення, тобто гарантуємо рівносильність утвореного рівняння на області визначення даного.

Необхідно звернути увагу учнів на те, що ідея логарифмування обох частин рівняння (або нерівності) є досить плідною і може використовуватись для розв'язування різних типів рівнянь (нерівностей), починаючи з найпростіших показникових типу $2^{x+3}=5$ (за означенням логарифма або прологарифмувавши обидві частини за основою 2, маємо: $x+3=\log_2 5$, тобто $x=\log_2 5-3$).

У процесі розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь та їх систем корисно систематизувати знання учнів про рівносильність рівнянь і систем, виділити операції, які можуть порушувати рівносильність. Слід звернути увагу на причини виникнення сторонніх коренів при розв'язуванні рівнянь і в зв'язку з цим на необхідність перевірки знайдених розв'язків, а також на причини втрати коренів [20,23,25].

2.3. Розробка дидактичних матеріалів з теми «Розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь».

2.3.1. Розробка уроку на тему «Розв'язування логарифмічних рівнянь».

Формування компетентностей:

- ***предметна компетентність:***

сприяти узагальненню і систематизації матеріалу з теми «Логарифмічна функція, рівняння», розвивати вміння узагальнювати, мислити логічно, робити висновки, чітко висловлювати свою думку, відтворити вміння розв'язувати завдання із даної теми;

- ***ключові компетентності:***

- *математична компетентність* – перевірити рівень засвоєння попереднього навчального матеріалу, систематизувати методи розв'язування логарифмічних рівнянь, удосконалити вміння і навички розв'язування логарифмічних рівнянь, попередити появу типових помилок, яких допускаються учні при розв'язуванні рівнянь, дати можливість кожному перевірити свої знання та підвищити їх рівень, показати важливість даної теми, активізувати роботу групи через різні форми та методи роботи, інтерпретувати та оцінювати результати;

- *спілкування державною мовою* – доречно та коректно вживати математичну термінологію, поповнювати свій словниковий запас, робити висновки на основі отриманої інформації, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку;

- *інформаційно – цифрова компетентність* – структурувати дані, визначати достатність даних для розв'язування завдань;

- *основні компетентності у природничих науках і технологіях* – розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, і які можна розв'язати засобами математики;

- *соціальна та громадянська компетентності* – співпрацювати у команді, виділяти та виконувати власну роль у командній роботі, бути мобільним, стійким перед труднощами, створювати ситуацію успіху для формування позитивного ставлення до себе ”я можу, у мене все вийде ”.;

- *уміння вчитися впродовж життя* – визначати мету навчальної діяльності, відбирати і застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення мети;

- *ініціативність і підприємливість* – генерувати нові шляхи розв'язання поставлених проблем, ухвалювати оптимальні рішення, аргументувати свою позицію.

Тип заняття: застосування знань, умінь і навичок.

Форма проведення заняття: класно-урочна.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби: роздатковий матеріал, таблиці, презентації, мультимедійне обладнання.

Підручник: Мерзляк А.Г. Алгебра. 10 кл.: збірник задач і контрольних робіт. – Х.: Гімназія, 2011.

Зміст і хід заняття

І. Організаційна частина.

Перевірка наявності учнів та їх підготовки до заняття.

Сьогодні ми з вами поринемо в світ чудовий та прекрасний – в світ математичних рівнянь.

Розпочнемо наше заняття словами Джорджа Пойя:

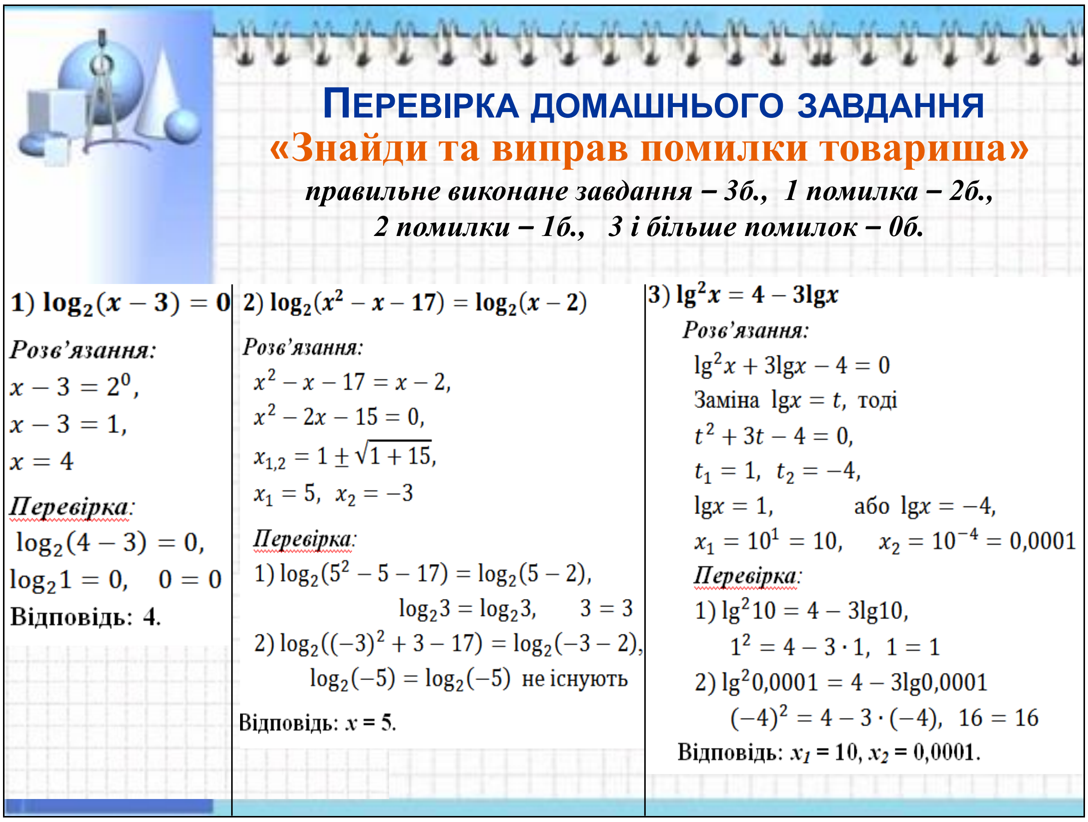
«Уміння розв'язувати математичні задачі — практичне мистецтво, подібне плаванню, або катанню на лижах, або грі на фортепіано: навчитися цьому можна, лише постійно тренуючись...»

ІІ. Перевірка домашнього завдання

Відкрийте зошити запишіть число. Перевіримо як ви виконали домашнє завдання. Яке було домашнє завдання? (*повторити теми: Логарифм числа. Логарифмічні рівняння. Розв'язати рівняння.*)

1. Інтерактивна вправа «Знайди та виправ помилки товариша».

Обміняйтеся зошитами. Перед вами на слайді розв'язані рівняння. Знайдіть та виправте помилки свого товариша і оцініть дану роботу.



Учні обмінюються зошитами і звіряють д/з свого товариша з виконаними завданнями на слайді і оцінюють свого товариша: ***правильне***

виконане завдання – 3б., 1 помилка – 2б., 2 помилки – 1б., 3 і більше помилок – 0б.

Завдання: Розв'язати рівняння.

1) $\mathbf{\log_2(x-3)=0}$

Розв'язання:

$x-3=2^0,$

$x-3=1,$

$x=4$

Перевірка:

$\log_2(4-3)=0,$

$\log_2 1=0, \quad 0=0$

Відповідь: 4.

2) $\mathbf{\log_2(x^2-x-17)=\log_2(x-2)}$

Розв'язання:

$x^2-x-17=x-2,$

$x^2-2x-15=0,$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+15},$

$x_1=5, \ \ x_2=-3$

Перевірка:

1) $\log_2(5^2-5-17)=\log_2(5-2),$

$\log_2 3=\log_2 3, \qquad 3=3$

2) $\log_2((-3)^2+3-17)=\log_2(-3-2),$

$\log_2(-5)=\log_2(-5)$ не існують

Відповідь: $\boldsymbol{x}$ **= 5.**

3) $\mathbf{\lg^2 x=4-3\lg x}$

Розв'язання:

$\lg^2 x+3\lg x-4=0$

Заміна $\lg x=t$,тоді

$t^2 + 3t - 4 = 0,$

$t_1 = 1, \; t_2 = -4,$

$\lg x = 1,$ або $\lg x = -4,$

$x_1 = 10^1 = 10,$ $x_2 = 10^{-4} = 0{,}0001$

Перевірка:

$1) \lg^2 10 = 4 - 3\lg 10,$

$1^2 = 4 - 3 \cdot 1, \; 1 = 1$

$2) \lg^2 0{,}0001 = 4 - 3\lg 0{,}0001$

$(-4)^2 = 4 - 3 \cdot (-4), \; 16 = 16$

Відповідь: $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}0001$.

Перед вами на парті лежать картки обліку знань, підпишіть їх. В них на кожному етапі заняття ви будете записувати отримані бали. В кінці, відповідно до набраних балів, ви отримаєте оцінку.

А зараз перенесіть в картку кількість балів, які ви отримали за виконане домашнє завдання. (*Отримані бали виставляються в картку обліку знань.)*

ІІІ. Актуалізація опорних знань

Французький письменник Анатоль Франс (1844-1924) помітив, що: «Навчатися можна весело, з гарним настроєм, посміхаючись… Щоб переварити знання, потрібно поглинати їх з апетитом».

Прислухаємося до поради письменника: будемо на занятті активними, уважними і «поглинати» знання будемо з великим бажанням, адже вони скоро нам знадобляться для успішного виконання контрольної роботи, а в подальшому і успішної здачі ЗНО.

1. Рефлексія настрою та емоційного стану «*Смайлик*»

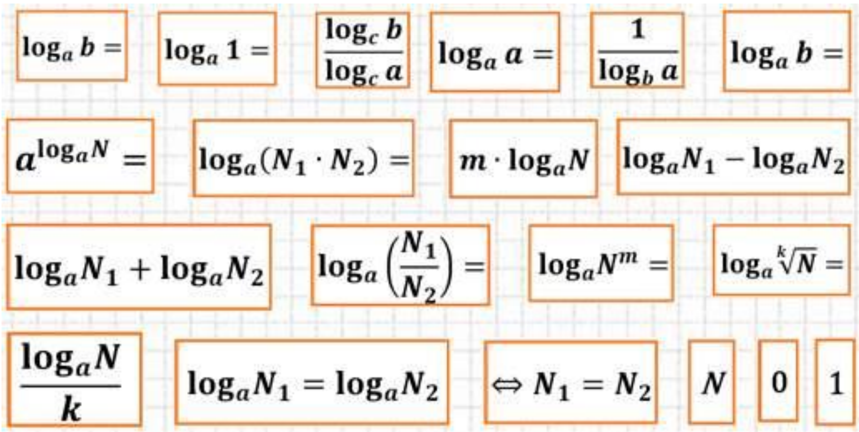
Оберіть смайлик, який відповідає вашому настрою. Надіюсь ваш настрій чудовий, сповнений бадьорості та активності. Адже лише гарний настрій підвищує працездатність, впливає на самопочуття, надає впевненості в собі, допомагає впоратися з складними ситуаціями.

2. Інтерактивна вправа «Знайди пару».

Робота в малих групах.

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь нам не обійтись без властивостей логарифмів та деяких логарифмічних тотожностей. Учнямм, які отримають конверт, потрібно об'єднатися в пари та за 5хв. виконати таке завдання:

Завдання. Скласти формули, які відображують властивості логарифмів та логарифмічні тотожності.



Два учні працюють на закритій магнітній дошці

3. Усний рахунок (*проводиться одночасно з вправою «Знайди пару»)***.**

В цей час ми пригадаємо, що називається логарифмом числа. Проведемо усний рахунок. .За кожну правильну відповідь нараховується 1бал.

4. ***Хвилинка ерудита (фронтальне опитування)***

Перевіримо, чи виконали завдання учні, які працювали в парах, та пригадаємо властивості логарифмів.

– Чому дорівнює логарифм одиниці? (0).

– Чому дорівнює логарифм основи? (1).

– Назвіть основну логарифмічну тотожність. ($a^{\log_a N} = N$)

– Чому дорівнює логарифм добутку двох додатних чисел? (…*дорівнює сумі логарифмів*)

– Чому дорівнює логарифм частки двох додатних чисел? (…*різниці логарифмів діленого і дільника*)

– Чому дорівнює логарифм степеня додатного числа? (…*показнику степеня, помноженому на логарифм основи цього степеня*)

– Чому дорівнює логарифм кореня з додатного числа? (…*логарифму підкореневого виразу, поділеному на показник кореня*)

– Якими є додатні числа, якщо логарифми таких чисел за тією самою основою рівня? (…*рівні*)

4. Інтерактивна вправа «Асоціативний кущ».

Назвіть властивості, які асоціюються з кожним виразом.

Слайд з виразами: $\log_4(-36)$, $\log_{-2}5$, $\log_5(-x)$, $\log_x 2$.

– Чи існує логарифм від'ємного числа? (*Ні*)

– Логарифм ще якого числа не існує? (0)

– Якою може бути основа логарифма? (тільки додатною, і $\neq 1$)

Не забувайте записувати отримані бали за кожний етап заняття!

IV. Мотивація навчальної діяльності

Відомі вчені так висловлювалися про логарифми:

«*Винахід логарифмів, скорочуючи обчислення декількох місяців в працю кількох днів, немов подвоює життя астрономів*». П'єр Симон Лаплас

Альберт Енштейн казав: *«Мені доводиться ділити свій час між політикою та рівняннями. Проте рівняння, як на мене, набагато важливіше, тому що політика існує тільки для даного моменту, а рівняння будуть існувати вічно».*

Область застосування логарифмів дуже різноманітна. Як виявилося, і в сільському господарстві, і в медицині не обійшлося без логарифмів.

Наприклад,

- час, за який тварини набувають заданої ваги, можна обчислити за допомогою логарифма $t = \frac{\ln m - \ln m_0}{k}$, де m – задана вага, m_0 - вага при народженні, k – коефіцієнт відносної швидкості росту, t – період часу;
- закон, що описує швидкість зміни кількості ліків в організмі; швидкість руйнування адреналіну в крові;
- час виведення з крові радіоактивних ізотопів містить натуральний логарифм $t = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{A_0}{kA_t - A_0}\right)$, де A_t – кількість речовини в тілі через час t, A_0 – початкова кількість речовини в тілі, k – коефіцієнт пропорційності.

Розв'язування багатьох практичних задач зводиться до складання та розв'язування рівнянь.

А *«Рівняння – це золотий ключ, що відкриває усі математичні сезами»*

(польський математик С.Коваль)

V. Повідомлення теми, мети та завдань заняття

Отже, тема заняття : Розв'язування логарифмічних рівнянь.

Мета та основні завдання:

- систематизувати методи розв'язування логарифмічних рівнянь,
- удосконалити вміння і навички розв'язування логарифмічних рівнянь,
- перевірити свої знання та підвищити їх рівень,

- з’ясувати важливість даної теми.

Тема та мета озвучуються викладачем, демонструються на слайдах, записуються в зошити.

VI. Удосконалення вмінь і навичок

Виконання усних вправ

1. Фронтальна бесіда.

– Які з даних рівнянь є логарифмічними?

$\log_7 x = 2$

$\log_{0,5} 0{,}25 + 4x^2 = 0$

$\log_5\big(5 + 4 \cdot \log_3(x-1)\big) = 2$

$\log_3 27 - 2^{x-4} = 5$

$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$

$\log_4 x + \dfrac{5}{\log_x 4} = 6$

– Які рівняння називаються логарифмічними? (*які містять невідоме або під знаком логарифма, або в основі логарифма*)

– Що означає розв’язати рівняння?

– Вкажіть найпростіше логарифмічне рівняння. $\log_7 x = 2$.

– Назвіть основні методи розв’язування логарифмічних рівнянь.

(*за означенням логарифма, потенціювання, введення нової змінної, зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи, логарифмування*)

2.Встановлення відповідності «Рівняння – метод»

Встановіть відповідність:

1	$\log_5(5+4\log_3(x-1))=2$	**введення нової змінної**
2	$\log_9(x+1)+\log_9(x+9)=1$	**логарифмування**
3	$\log_2 x+\log_2^2 x-5=9$	**за означенням логарифма**
4	$x^{\log_2 x}=4$	**потенціювання**
5	$\log_4 x+\dfrac{5}{\log_x 4}=6$	**зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи**

Пам'ятайте!

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь досить часто доводиться виконувати не рівносильні перетворення, які можуть призвести до появи сторонніх коренів. Тому обов'язково виконуємо перевірку.

Математика – це не так знання, як уміння. В. Серве

Виконання письмових вправ

Колективне виконання завдань під керівництвом вчителя.

Розв'язати рівняння:

1) $\log_5\left(5+4\cdot\log_3(x-1)\right)=2$

2) $\log_9(x+1)+\log_9(x+9)=1$

3) $\log_4 x+\frac{5}{\log_x 4}=6$

Коментоване розв'язування рівнянь 1) – 3) на дошці.

VII. Застосування знань, умінь і навичок

Скажи мені – і я забуду,

Покажи мені – і я запам'ятаю,

Дай мені діяти самому – і я навчуся.

Давньокитайська мудрість

Самостійна робота «Аукціон логарифмічних рівнянь».

Запишіть в зошитах самостійна робота.

Завдання: Розв'язати рівняння та назвати метод.

Проведемо «Аукціон логарифмічних рівнянь».

У мене смужки різних кольорів, на кожній з них записано рівняння. Кожний колір смужки відповідає рівню складності:

Червоний колір – високий рівень (3б.)

Зелений колір – достатній рівень (2б.)

Синій колір – початковий та середній рівні (1б.)

Розв'язавши рівняння високого рівня ви отримаєте 3б., достатнього – 2б., середнього – 1б. Час на виконання 10хв.

Прошу самостійно обрати рівняння, яке б відповідало вашому рівню засвоєння даної теми. Допоможе мені черговий.

Кожен учень обирає й розв'язує 1 рівняння, за що отримує відповідну кількість балів.

Синій колір

1) $\log_3 x = -2$

2) $\log_3(x^2 - 5x + 7) = 1$

3) $\log_5(3x - 4) = \log_5(12 - 5x)$

Зелений колір

1) $\lg(x - 1) + \lg(x + 1) = \lg(9x - 9)$

2) $\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 = 0$

Червоний колір

1) $\log_3^2 x + 2\log_3\sqrt{x} = 2$

2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$

Перевірка виконання самостійної роботи на екрані висвітлено відповіді або учні розв'язують рівняння на дошці. Занесіть отримані бали до картки обліку знань та підрахуйте загальну кількість.

VIII. Підведення підсумків заняття.

Отже, на занятті ви добре попрацювали, продемонстрували свої знання, вміння та навички, були активними.

1. *Чи є існує універсальний спосіб розв'язування логарифмічних рівнянь (ні).*
2. *Який спосіб використовувався найчастіше?*
3. *Який спосіб найбільше вам подобається?*
4. *Як уникнути втрату коренів та появу сторонніх коренів логарифмічних рівнянь?*
5. *З якими труднощами ви зустрілися? Що допомогло подолати ці труднощі (конспект, допомога товариша, типові приклади в зошиті ...)?*
6. *Що на занятті було цікавим? Не цікавим?*

Учні по списку групи називають отримані бали, викладач оцінює учнів.

Оголошення оцінок.

IX. Домашнє завдання

«Домашня пошта»: Зараз прошу отримати поштові листи з домашнім завданням. Черговий мені допоможе.

Додатки

КАРТКА ОБЛІКУ ЗНАНЬ

Прізвище,ім'я ____

Вид завдання	**Отримані бали**	**Кількість балів на етапі**
«Знайди та виправ помилки товариша»		*Правильно виконане завдання – 3 б., 1 помилка – 2 б., 2 помилки – 1 б., 3 і більше помилок – 0 б.*
«Знайди пару»		*Правильно виконане завдання – 3б., 1-2помилки – 2б., 3- 4 помилки –1б., 5і більше помилок – 0 б.*
Усний рахунок		*За кожну вірну відповідь – 1б.*
«Асоціативний кущ»		*1б.*

Усна відповідь		*За кожну вірну відповідь – 1б.*
Робота біля дошки		*1б.*
Самостійна робота		*Від1б. – до 3б.*
Сума балів		

ПОШТОВІ ЛИСТИ

Варіант 1

1. Повторити відомості про логарифмічні рівняння та методи їх розв’язування.

2. Розв’язати рівняння:

1) $\log_2(3-6x)=3$

2) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$

3) $\log_3^2(x-1) + 2\log_3(x-1) = 8$

4) $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$

3* Знайти значення виразу:

$(\log_3 2 + \log_2 81 + 4) \cdot (\log_3 2 - 2\log_{18} 2) \cdot \log_2 3 - \log_3 2.$

Варіант 2

1. Повторити відомості про логарифмічні рівняння та методи їх розв’язування.

2. Розв’язати рівняння:

1) $\log_2(5+x) = -2$

2) $\log_3^2 x + 2\log_3 x = 3$

3) $\log_2(x+13) = 2\log_2(x+1)$

4) $\log_{81} x + \frac{1}{2}\log_9(x-6) = \frac{3}{4}$

3* Створити презентацію на тему «Логарифмічні рівняння».

2.3.2. Розробка уроку на тему «Показникові рівняння».

Формування компетентностей:

• ***предметна компетентність:***

сприяти усвідомленню матеріалу з теми «Показникові рівняння», розумінню алгоритмів їх розв'язання, розвивати вміння узагальнювати, мислити логічно, робити висновки, чітко висловлювати свою думку, відтворити вміння розв'язувати завдання із даної теми;

• ***ключові компетентності:***

- *математична компетентність* – ознайомити з означенням показникових рівнянь та алгоритмом розв'язування цих рівнянь; формувати вміння розв'язувати показникові рівняння;

- *спілкування державною мовою* – доречно та коректно вживати математичну термінологію, поповнювати свій словниковий запас, робити висновки на основі отриманої інформації, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку;

- *інформаційно – цифрова компетентність* – структурувати дані, визначати достатність даних для розв'язування завдань;

- *основні компетентності у природничих науках і технологіях* – розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, і які можна розв'язати засобами математики;

- *соціальна та громадянська компетентності* – співпрацювати у команді, виділяти та виконувати власну роль у командній роботі, бути мобільним, стійким перед труднощами, створювати ситуацію успіху для формування позитивного ставлення до себе ”я можу, у мене все вийде ”.;

- *уміння вчитися впродовж життя* – визначати мету навчальної діяльності, відбирати і застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення мети;

- *ініціативність і підприємливість* – генерувати нові шляхи розв'язання поставлених проблем, ухвалювати оптимальні рішення, аргументувати свою позицію.

Тип заняття: засвоєння нових знань, умінь та навичок.

Форма проведення заняття: класно-урочна.

Основні методи та прийоми: словесні, фронтальна бесіда, розповідь, колективне обговорення, самостійна робота, робота з підручником, робота в парах.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби: набір завдань для «мозкового штурму», картки із завданнями, плакат для гри «Впізнай мене».

Підручник: Мерзляк А.Г. Алгебра. 10 кл.: збірник задач і контрольних робіт. – Х.: Гімназія, 2011.

Епіграф уроку:

Недостатньо мати лише добрий розум,

Головне - це раціонально застосовувати його.

Рене Декарт

Хід уроку:

I. Організаційний момент.

II. Актуалізація опорних знань.

Два учні працюють з завданнями на картках.

Прийом «Мозковий штурм»

1. Яка з даних функцій є показниковою? (№ 16.6 ст. 161):

   1) $y=x^6$

   2) $y=\sqrt[6]{x}$

   3) $y=6^x$

   4) $y= 6$?

   Чому? Яка функція називається показниковою?

   Назвіть відомі вам властивості показникової функції.

2. $y=2^x$, $y=0{,}2^x$. Яка з цих функцій зростаюча, а яка спадна?

3. $y=2^x$ на відрізку $[-2;5]$. При якому значенні змінної x функція набуває найменшого (найбільшого) значення?

4. Встановіть відповідність. *Завдання «пастка». (одна із формул не існує)*

Гра «Впізнай мене»

$x^a \cdot x^в$	$x^{a-в}$
$x^a : x^в$	$\frac{x^a}{y^a}$
$(x^a)^в$	$x^{a+в}$
$x^{\sqrt{3}}$	$x^{aв}$
$(\frac{x}{y})^a$	$3x^2$

5. Замініть зірочки, щоб утворилась тотожність (16.1(1,2) ст. 160):

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{*+2\sqrt{2}+*} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{*+2\sqrt{2}+*-2\sqrt{2}} = 3^3 = 27$

ІІІ. Мотивація навчання.

Як бачите, вміння використовувати властивості степеня з довільним дійсним показником, практично полегшує роботу під час розв'язання завдань, спрощення виразів, побудови та читання графіків показникових функцій . Ці властивості застосовуються досить часто. Сьогодні ми ознайомимось з означенням та алгоритмом розв'язування показникових рівнянь.

IV. Вивчення нового матеріалу (п.17 ст. 166)**.**

Розглянемо рівняння: $2^x = 8$; $3^x \cdot 3^{x-1} = 4$; $0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}$

У всіх цих рівняннях зміна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь.**

Теорема 17.1. *При $a > 0$ і $a \neq 1$рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.*(З доведенням та наслідком учні знайомляться самостійно)

Наприклад. 1) $2^x=8$, $2^x=2^3$, x=3.

2) Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $2^x=\frac{1}{8}$?

$(-6;-4), (-4;-2), (-2,0), (2,4)$

V. Закріплення знань та вмінь.

1. Усно. Розв'яжіть рівняння. *(робота з підручником)* № 17.1 (1,2,6,8) ст.. 170.

1) $4^x = 64$; 2) $3^x = \frac{1}{81}$;

6) $8^x = 16$; 8) $\sqrt{5^x} = 25$.

2. Розв'язування завдань. (17.3 ст. 171)

1) Робота біля дошки:

Розв'яжіть рівняння:

а) $3^x=\frac{1}{9}$; б) $5^{x+3}=(\frac{1}{125})^x$; 3) $3^{x+2} + 3^x = 90$.

2) робота в парах: хлопці – $2^{x+6}=(\frac{1}{16})^x$; дівчата – $5^x+5^{x+1}=30$.

3) Самостійно – хлопці - № 17.1; дівчата - № 17.3 ст. 170

IV. Підсумок уроку

1) Сьогодні на уроці я вивчив …

пригадав …

запам'ятав…

зрозумів …

мені важко давалося …

тепер буду намагатись …

VII. Домашнє завдання

п. 17 ст. 166 (вивчити), виконати № 17.4 (1,2), № 17.6 ст. 171.

2.3.3. Розробка самостійної роботи на тему: «Показникові рівняння» .

Варіант 1.

Розв'язати рівняння:

Середній рівень

1) $3^x = \frac{1}{81}$; 2) $5^{x-1} - 1 = 0$; 3) $3^{x+1} + 3^x = 108$; 4) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) $4^{x+1} - 4^x - 4^{x-1} = 44$; 2) $2^{x+1} + 4^x = 80$.

2. $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 225$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 1, \\ 3^{2x} \cdot 3^y = 27. \end{cases}$.

Високий рівень

1. 1) $2 \cdot 4^{x+1} - 3^x = 3^{x+2} - 2 \cdot 4^x$; 2) $4 \cdot 9^x + 12^x = 3 \cdot 16^x$.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$.

3. Розв'язати рівняння $\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 21 = 0$.

Варіант 2.

Розв'язати рівняння:

Середній рівень

1. 1) $2^{4x} = 64$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} - 1 = 0$; 3) $5^{x+2} + 5^x = 130$; 4) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

Достатній рівень

1. 1) $5^{x+1} - 5^x + 5^{x-1} = 105$; 2) $3^{x+1} + 9^x = 108$.

2. $\sqrt[4]{2^x} \cdot \sqrt[4]{5^x} = 1000$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2^{3x} \cdot 2^y = 64. \end{cases}$.

Високий рівень

1. 1) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$; 2) $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x = 5 \cdot 25^x$.

2. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$.

3. Розв’язати рівняння $6\sqrt[2x]{2} - \sqrt[x]{2} = 8$.

2.3.4. Розробка самостійної роботи на тему: «Логарифмічні рівняння».

№ 1 Розв’язати рівняння: 1) $\log_{0,2}(x+4) = -2$; (1б) 2) $\log_8(x^2 - 7x + 4) = \log_8(x-3)$; (2б) 3) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$; (2б) 4) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$; (2б) 5) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$; (3б) 6) $x^{\lg 3} + 3^{\lg x} = 54$. (2б)	№ 2 Розв’язати рівняння: 1) $\lg(x+1) = 1$; (1б) 2) $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$; (2б) 3) $\lg(x-3) + \lg(x+6) = 1$; (2б) 4) $\lg^2 x - 7\lg x + 6 = 0$; (2б) 5) $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$; (3б) 6) $x^{\log_2 x + 2} = 256$. (2б)
№ 3 Розв’язати рівняння: 1) $\lg(10 - x) = 4$; (1б) 2) $\log_{0.7}(x^2 - 4x - 5) = \log_{0.7}(7 - 3x)$; (2б) 3) $\log_6(x+1) + \log_6(2x+1) = 1$; (2б) 4) $\lg^2 x + 7\lg x + 6 = 0$; (2б) 5) $\frac{1}{\lg x + 3} + \frac{2}{3 - \lg x} = 1$; (3б) 6) $7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}$. (2б)	№ 4 Розв’язати рівняння: 1) $\log_{0,1}(x-7) = -1$; (1б) 2) $\lg(2x-1) + \lg(x-9) = 2$; (2б) 3) $\log_7(2x^2 + 4x - 7) = \log_7(x+2)$; (2б) 4) $\log_3^2 x + \log_3 x = 2$; (2б) 5) $\frac{1}{5 - 4\lg x} + \frac{4}{1 + \lg x} = 3$; (3б) 6) $x^{\lg x} = 1000x^2$. (2б)

2.3.5. Розробка контрольної роботи на тему «Логарифмічна функція».

Варіант 1.

Середній рівень

1. **1)** Побудувати графік функції $y = \log_2 x$ і записати її властивості.

2) Розв'язати рівняння $\log_2 (3x + 1) = 4$.

2. Розв'язати рівняння $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$.

3. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}(3x+2) > 2\log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_{\frac{1}{3}} 2$.

Достатній рівень

1. **1)** Побудувати графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$ і записати її властивості.

2) Прологарифмувати за основою 4 вираз $64\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c^5}}$.

3) Розв'язати нерівність $\lg (3x + 4) < \lg 2x$.

2. Розв'язати рівняння $\log_5 \log_3 \log_2 x = 0$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \lg x + \lg y = 3, \\ \lg x - \lg y = 1. \end{cases}$

Високий рівень

1. **1)** Побудувати графік функції $y = 1 + \log_3 (x - 1)$.

2) Розв'язати рівняння $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1$.

3) Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-x) \geq -2$.

2. Розв'язати рівняння $x^{\lg x} = 1000x^2$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2{,}5, \\ xy = 27. \end{cases}$.

Варіант 2.

Середній рівень

1. **1)** Побудувати графік функції $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ і записати її властивості.

2) Розв'язати рівняння $\log_5 (2x - 1) = 3$.

2. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x+7) = -3$.

3. Розв'язати нерівність $\log_4 (x-3) \le \log_4 5 + \log_4 3$.

Достатній рівень

1. **1)** Побудувати графік функції $y = \log_2 (x+3)$ і записати її властивості.

2) Прологарифмувати за основою $\frac{1}{3}$ вираз $27\sqrt[6]{\frac{a^5 b}{c^7}}$.

3) Розв'язати нерівність $\log_{0,1}(x+2) \le \log_{0,1}(8-x)$.

2. Розв'язати рівняння $\lg \log_3 \log_4 x = 0$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \lg x + \lg y = 5, \\ \lg x - \lg y = 7. \end{cases}$

Високий рівень

1. **1)** Побудувати графік функції $y = -1 + \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$.

2) Розв'язати рівняння $\log_2 x + \log_x 2 = 2,5$.

3) Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{6}}(7-x) + \log_{\frac{1}{6}}(12-x) \ge -2$.

2. Розв'язати рівняння $x^{\log_2 x + 2} = 256$.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy = 20, \\ x^{\lg y} = 2. \end{cases}$.

ВИСНОВКИ

Курсова робота на тему: «Методика навчання учнів фізико-математичного профілю розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння» мала на меті систематизувати відомості про показникову та логарифмічну функції, розкрити роль і місце вивчення показникових та логарифмічних рівнянь та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи та ознайомитися з методикою їх викладання.

В ході виконання даної роботи я проаналізувала велику кількість літератури для реалізації поставлених завданнь, а саме:

- Систематизувала відомості про розв’язування показникових та логарифмічних рівнянь та їх систем в шкільному курсі алгебри старшої школи. Розглянула основні способи розв’язання показникових та логарифмічних рівнянь та їх систем, навела приклади завдань та алгоритмів їх розв’язування.

- З’ясувала місце показникових та логарифмічних рівнянь та їх систем в діючій програмі з математики, конкретизувала вимоги до уявлень, знань, умінь та навичок учнів.

- Ознайомилася з методикою вивчення даної теми в сучасній школі.

- Запропонувала методичні рекомендації щодо викладання тем «Показникова і логарифмічна функція» в старших класах загальноосвітньої школи.

- Розробила дидактичні матеріали, які можна використовувати на уроках алгебри і початків аналізу в 11 класі, а саме конспекти уроків засвоєння нових знань на тему «Показникові рівняння» та закріплення знань, умінь і навичок на тему «Розв’язування логарифмічних рівнянь»; самостійні роботи на теми: «Показникові рівняння», «Логарифмічні рівняння»; контрольну роботу на тему: «Логарифмічна функція».

У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені корені та їх властивості, засвоюють поняття показникової і логарифмічної функцій, їх властивості та графіки, навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів показникової і логарифмічної функції, розв’язувати показникові і логарифмічні рівняння й нерівності та їх системи, здійснювати обчислення числових виразів з логарифмами і степенями.

Учні повинні навчитися схематично зображати графіки показникових і логарифмічних функцій при різних основах, пам’ятати основні властивості цих функцій та вміти використовувати їх при розв’язанні показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей та їх систем. Бажано ознайомити учнів на факультативних чи гурткових заняттях із схематичним зображенням графіків показникових та логарифмічних функцій з модулями.

У процесі розв’язування показникових і логарифмічних рівнянь та їх систем корисно систематизувати знання учнів про рівносильність рівнянь і систем, виділити операції, які можуть порушувати рівносильність. Слід звернути увагу на причини виникнення сторонніх коренів при розв’язуванні рівнянь і в зв’язку з цим на необхідність перевірки знайдених розв’язків, а також на причини втрати коренів.

Засвоєння учнями нових знань при вивченні розділу базується на раніше вивченному матеріалі про степені й корені, розв’язанні системи алгебраїчних рівнянь і нерівностей, тощо. Бажано, щоб актуальні питання раніше вивченного матеріалу грунтовно систематизувалися за рахунок часу, виділеного на узагальнююче повторення. При плануванні узагальнюючого повторювання це слід урахувати, і до повторенного матеріалу безпотреби можна не повертатися.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Барановська Галина Григорівна. Практикум з математики: Показникова та логарифмічна функції: навч. посібник для вступників до вузів / Г. Г. Барановська, В. В. Ясінський ; Національний технічний ун-т України «Київський політехнічний ін-т». Факультет довузівської підготовки. — К. : [б.в.], 1998. — 124 с.

2. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики: Навч. посібник/ Вишневський В.А., М.О. Перестюк, А. М. Самойленко — 2-ге вид., доп. — К.: Либідь, 1993. — 344 с.

3. Гусак Г. М., Капуцкая Д. А. Математика для подготовительных отделений вузов: Справ. пособие / Под ред. А. А. Гусака. — Мн.: Высш. шк., 1989. — 495 с.

4. Іваненко Т.І. Систематизація методів розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей/ Т.І. Іванко // Математика в школах України.- 2007. – березень (№ 7). С. 16-21.

5. Інтерактивні технології на уроках математики: Навч. - метод. посібник / Упоряд. І.С. Маркова – Х.: Вид. група «Основа». 2007 – 126с.

6. Колмагорова А. Н. Алгебра и початки аналізу: Учебн. для 10—11 кл. общ. учредж. / Под ред. А. Н. Колмогорова. — 12-е изд. — М.: Просвещение, 2002. — 384 с.

7. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики / А.М. Капіносов– Х.: Вид. група «Основа». 2006.–140с.

8. Кларин М.В. Интерактивное обучение – инструмент освоения нового опыта. Педагогика / М.В. Кларин – 2000. – № 7. – с. 12–18.

9. Кушнір І.. У світі логарифмів / І. Кушнір— К. : Факт, 2004. — 136 с.

10. Логарифмічні рівняння // Математика. – 2004. – квітень (№ 14). с 7-10.

11. Логарифмічні та показникові нерівності // Математика в школі. – 2004. - № 1. с.20-22.

12. Лурьве М. В., Александров Б. И. Задачи на составление уравнений: Учеб. рук-во. / М.В. Лурьве, Б.И. Александров — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1990. — 96 с.

13. Маслай Г. С., Шоголева Л. О. Рівняння та системи рівнянь з параметрами: Математика. № 21—22 (81—82), Червень 2000.

14. Маслова Т. Н., Суходений А. М. Ваш домашний репетитор. / Т. Н. Маслова, А.М. Суходений— М.: ООО «Изд. дом "ОНИКС 21 век"», 2003. — 672 с.

15. Математика для поступающих в экономические вузы: Уч. пос. для вузов / Под ред. проф. Н. М. Кремера. — 2-ге изд., перероб. и доп. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 430 с.

16. Нелін Є.П., Дольова О.Є. Алгебра і початки аналізу. Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. / Є.П. Нелін, О.Є. Дольова. –Харків: Світ дитинства, 2006.

17. Пометун О.І, Пироженко Л.В. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід./ О.І. Пометун, Л. В. Пироженко. – К., 2002.

18. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук.-метод. Пос. / О.І. Пометун, Л. В. Пироженко.. – К.: Вид-во А.С.К., 2003. – 192 с.

19. Саушкін О. Ф. Розв'язування алгебраїчних рівнянь / О. Ф. Саушкін. — К.: КНЕУ.

20. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – К.,: «Зодіак-ЕКО», 2000.

21. Сторчай Володимир Федорович. Показникові і логарифмічні рівняння: навч. посібник / В. Ф. Сторчай ; Дніпропетровський держ. ун-т. — К. : [б.в.], 1995. — 100 с

22. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: Метод проектів. Комп'ютерні технології. Розвивальне навчання / Упоряд. І.С. Маркова – Х.: Вид. група «Тріада». 2007 – 171с.

23. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: Розвиток критичного мислення: Навч. – метод. посібник / Упоряд. І.С. Маркова – Х.: Вид. група «Основа». 2007 – 125с

24. Шкіль М.Г., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу. Підручник для учнів 10-го класу з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти / М.Г. Шкіль, Т. В. Колесников, Т.М. Хмара. –Київ: Освіта, 2000.

25. Шкіль М.Г., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу. Підручник для учнів 11-го класу з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти / М.Г. Шкіль, Т. В. Колесников, Т.М. Хмара. –Київ: Освіта, 2000.

26. Щербинин, Гарий Петрович. Показательно-логарифмические выражения, уравнения и неравенства: учеб. пособие / Г. П. Щербинин, Т. А. Недзельская ; ИСИО, Харьковский гос. технический ун-т радиоэлектроники. — Х. : [б.в.], 1995. — 60 с.

ЗМІСТ