

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ З МЕТОДИКОЮ ВИКЛАДАННЯ

Дипломна робота
магістра

на тему

Методичні особливості навчання учнів 5 – 6
класів розв'язувати та складати математичні
задачі

Виконала: студентка II курсу магістратури
групи МІ – 61
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Шевчук Вікторія Вікторівна

Керівник: канд. пед. наук доцент, проф. кафедри
математики з методикою викладання
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензенти: канд. фіз-мат. наук, доц. кафедри
вищої математики РДГУ
Марач Віктор Сильвестрович

канд. фіз-мат. наук, доц. кафедри вищої
математики НУВГП
Сяський Василь Олексійович

Рівне – 2018 року

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ	8
1.1. Поняття «задача» в психолого-педагогічній та методичній літературі...	8
1.2. Математична задача, її структура та функції	20
1.3. Класифікація математичних задач	35
1.4. Місце обернених задач у навчанні математики	39
1.5. Психолого-педагогічні основи навчання учнів 5 – 6 класів розв’язувати і складати математичні задачі	42
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ 5 – 6 КЛАСІВ РОЗВ’ЯЗУВАТИ ТА СКЛАДАТИ МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ	52
2.1. Методика навчання учнів 5 – 6 класів розв’язувати текстові задачі.....	52
2.1.1. Задачі на рух.....	60
2.1.2. Задачі на відсоткові розрахунки	66
2.1.3. Задачі на суміші, розчини та сплави.....	70
2.1.4. Задачі на спільну роботу і продуктивність праці.....	74
2.2. Методика навчання учнів 5 – 6 класів складати текстові задачі	79
2.2.1. Складання аналогічних задач.....	81
2.2.2. Складання обернених задач до даної	85
2.2.3. Складання задачі за допомогою узагальнення та конкретизації.....	89
2.3. Організація, проведення і результати педагогічного експерименту.....	92
ВИСНОВКИ.....	96
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	99
ДОДАТКИ.....	104

ВСТУП

Актуальність дослідження. Нова українська школа – це ключова реформа Міністерства освіти і науки. Головна мета – створити школу, у якій буде приємно навчатись і яка даватиме учням не тільки знання, як це відбувається зараз, а й вміння застосовувати їх у житті.

Сучасна школа покликана зацікавити учнів навчанням, зокрема вивченням математики, і підготувати їх до повноцінного життя в соціумі. З цією метою навчально-виховний процес спрямовується на здобуття учнями комплексу знань, умінь, досвіду та цінностей, що можуть цілісно реалізуватися на практиці. Саме такі навички розвинути в учнях пізнавальну активність, креативність і самостійність, дозволять проявити творчий потенціал.

Потяг дітей до пізнання є природнім, а потреба в пізнанні є запорукою успішного навчання. Завдяки пізнавальній потребі самі знання і процес їх здобуття можуть стати рушієм розвитку інтелекту і важливим фактором виховання особистості, розвинути зацікавленість навколишнім світом і математикою як наукою.

Нинішні освітні реформи в Україні визначаються зміною знаннєвої освітньої парадигми на компетентнісну. Мета навчання математики в загальноосвітніх закладах на засадах компетентнісного підходу полягає насамперед у формуванні в учнів предметної математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції.

Математика є опорним предметом при вивченні суміжних дисциплін, тому без належної математичної підготовки неможлива повноцінна освіта сучасної людини.

Важливу роль у курсі математики школи відіграють задачі. Вони з одного боку, складають специфічний розділ програми, зміст якого учні мають засвоїти, а з другого – виступають як дидактичний засіб навчання, виховання і розвитку школярів.

У процесі навчання математичні задачі відіграють велику роль, оскільки ефективно організована навчальна діяльність учнів в процесі їх розв'язування являється важливим засобом формування математичної культури і таких якостей математичного мислення, як гнучкість, критичність, раціональність, логічність. Зокрема, важливість задач обумовлюється особливостями наукової структури курсу математики 5 – 6 класів. В цілому можна схилитися до думки, що основним завданням на даному етапі навчання є формування вмінь розв'язувати задачі без ускладнень такого типу як: складання аналогічних задач, обернених до даних тощо.

Робота учнів з задачами, особливо з тими, формулювання яких спирається на життєвий досвід учнів та на вивчення суміжних дисциплін, допомагає підтримувати постійний інтерес до процесу навчання, розвитку кмітливості та інтуїції, сприяє розширенню кругозору, економічному вихованню та професійній орієнтації учнів. Важливо навчати учнів розв'язувати задачі в усіх класах, бо від цього значною мірою залежить не тільки якість навчання учнів математики на даному етапі, а й результативність їх наступної навчальної і трудової діяльності.

Процес «розв'язування і складання математичних задач сприяє формуванню таких розумових дій, як аналіз і синтез, конкретизація і абстрагування, порівняння, узагальнення тощо». Від оволодіння вміннями розв'язувати і складати задачі залежать не лише підготовка школярів з математики на даному етапі навчання, а й осмислене засвоєння систематичних курсів алгебри, геометрії, фізики, інформатики у наступних класах.

До проблеми розв'язування задач при вивченні математики тією чи іншою мірою зверталися відомі методисти. Особливу увагу розв'язуванню

задач як засобу розвитку мислення, формування системи математичних понять приділяли Г.П. Бевз, Ю.М. Колягін, Л.М. Фрідман та інші [6, 24, 48].

Психологічний та методичний аспект процесу розв'язування задач досліджували Г.О. Балл, З.І. Слєпкань, Л.М. Фрідман та інші [4, 43, 50].

Позитивно оцінюючи наукову і практичну значущість праць з даної проблеми, необхідно відзначити, що ряд аспектів формування вмінь розв'язувати і складати математичні задачі залишилися нерозкритими, зокрема – обсяг теоретичних знань про математичну задачу і процес її розв'язування, а тим більше про їх складання; визначення рівнів програмних вимог до вироблення вмінь учнів середньої школи розв'язувати задачі; добір різноманітних задач, спрямованих на формування вмінь розв'язувати і складати задачі; способи раціонального поєднання фронтальної, групової та індивідуальної форм роботи на уроках математики при розв'язуванні задач в кожному конкретному класі у середній ланці школи.

Крім того, традиційна методика формування вмінь розв'язувати задачі орієнтована на «середнього учня». Вона враховує зміст та основні ідеї проекту Державного стандарту загальної середньої освіти в Україні, зокрема ідеї рівневої диференціації навчання та орієнтацію її результатів на навчальні методичні особливості ознайомлення школярів із складеними задачами, що відбувається у середній школі.

Таким чином, актуальність дослідження зумовлена його значущістю для розробки удосконаленої методики розв'язування складених задач у середній школі, яка враховує особливості навчальної діяльності учнів під час розв'язування математичних задач, психолого-педагогічні засади вироблення вмінь розв'язувати і складати задачі, різнорівневі вимоги до математичної підготовки школярів. Виявлення шляхів удосконалення методики формування вмінь розв'язувати і складати задачі у 5 – 6 класах і складає проблему нашого дослідження.

Метою дослідження є розробка методичних рекомендацій щодо розвитку творчих здібностей учнів під час розв'язування і складання математичних задач.

Об'єктом дослідження є процес розв'язування і складання математичних задач в загальноосвітній школі учнями 5 – 6 класів.

Предметом дослідження є методика навчання учнів розв'язувати і складати математичні задачі.

Гіпотеза дослідження: в результаті розв'язування і складання задач з математики в учнів розвиваються творчі здібності, які сприяють свідомому оволодінню системою знань та підвищенню рівня знань, умінь і навичок учнів, розвитку їх мислення, вихованню позитивних якостей особистості.

Поставлена мета та сформульована гіпотеза дослідження передбачає розв'язання наступних завдань:

- ❖ Здійснити огляд психолого-педагогічної та методичної літератури з теми дослідження;
- ❖ Розкрити методику розвитку творчих здібностей учнів під час розв'язування і складання математичних задач;
- ❖ Провести експериментальну перевірку ефективності розробленої методики.

Для розв'язування поставлених завдань була використана система загальнонаукових методів теоретичного та емпіричного дослідження:

- **теоретичні:** аналіз психологічної і навчально-методичної літератури з теми дослідження; аналіз математичних задач (з'ясування структурних компонентів задачі і зв'язків між ними); зіставлення й узагальнення матеріалу;
- **емпіричні:** спостереження, бесіда, анкетування, вивчення передового досвіду вчителів, педагогічний експеримент.

Наукова новизна дослідження полягає в теоретичному та експериментальному обґрунтуванні методики підготовки учнів до розв'язування і складання математичних задач.

Теоретичне значення дослідження полягає у з'ясуванні місця та ролі задач у процесі навчання математики учнів середньої школи; у визначенні психолого-методичних засад формування вмінь розв'язувати і складати математичні задачі у середній школі.

Практичне значення дослідження зумовлюється тим, що розроблена методика забезпечує ефективне вироблення вмінь розв'язувати текстові задачі у середній школі; принципи відбору текстових задач для середньої школи можуть бути використані при написанні методичних посібників.

Обґрунтованість і вірогідність отриманих у ході дослідження результатів обумовлюється аналізом науково-методичної літератури, а також змісту та структури роботи учнів при розв'язуванні і складанні математичних задач у 5 – 6 класах.

Апробація основних результатів дослідження. Результати роботи були представлені на:

XI Міжнародній науково-практичній конференції студентів та молодих науковців «НАУКА, ОСВІТА, СУСПІЛЬСТВО ОЧИМА МОЛОДИХ» 16 травня 2018 року.

Було опубліковано статтю у збірнику матеріалів конференції під назвою «Методичні особливості навчання учнів 5-6 класів розв'язувати та складати математичні задачі»

Структура і обсяг дослідження. Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновку, списку використаних літературних джерел, додатків. Загальний обсяг роботи – 112 сторінок.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Поняття «задача» в психолого-педагогічній та методичній літературі

Термін «задача» використовується в житті та науці дуже широко. Цим терміном позначається багато різних понять, проте до теперішнього часу немає загального визначення поняття «задача».

Коротко розглянемо окремі спроби визначення цього поняття, які є в науковій та навчальній літературі. Як ми вже говорили, задача може розглядатися в різних науках: психології, логіці, педагогіці, кібернетиці та ін.

У логіці проблема задач майже не розглядалася. Детально вивчено лише родинне поняття – «питання». Історія вивчення цього поняття в логіці докладно викладена в роботах В.Ф. Беркова і Ф.С. Лимантова.

Про співвідношення понять «питання» і «задача» є цікаві міркування в роботі Ф.С. Лимантова «Про природу питання». Автор вважає, що слід відрізнити поняття проблемної та задачної ситуації від понять «питання», «задача», «проблема». Останні поняття на відміну від перших є фактами свідомості, формами, що відображають об'єктивні протиріччя пізнавального процесу. Найбільш загальним з останніх трьох понять Ф.С. Лимантов вважає поняття задача як вимога виконати деякі дії. Виходячи з цього, він розрізняє поведінкові і пізнавальні (інформаційні) задачі. Проблема, з його точки зору, це окремий випадок задачі, коли пошук інформації проводиться у формі дослідницької діяльності, при якій невідомим є не тільки розв'язок, але і процес його знаходження. Питання ж розглядається як логічна форма, що є елементом кожної проблеми, але не кожної задачі.

Історико-генетичний аналіз поняття «задача» в філософських, психолого-педагогічних та інших дослідженнях дозволяє визначити походження і закони подальшого перетворення поняття та його функціональне навантаження на сучасному етапі розвитку шкільної освіти.

Дане поняття є одним із фундаментальних в психології, в кібернетиці, в будь-якій із наук природничо-математичного циклу, в теорії навчання і виховання. В літературі, присвяченій вказаним галузям знань, це поняття має різноманітне формулювання, оскільки в силу специфіки тієї чи іншої наукової дисципліни досліджуються різноманітні аспекти даного об'єкта.

В найголовнішому значенні задача трактується як поставлена ціль, яку необхідно досягти, як питання, що потребує вирішення на основі знань і логічних операцій. Таке пояснення в цілому співпадає з життєвими асоціаціями на слово «задача».

З філософської точки зору – це знання про незнання, що виникає в протиріччі між об'єктом і суб'єктом.

У психологічній літературі є різні трактування поняття задача. Г.О. Балл у своїй статті «Про психологічний зміст поняття «задача»» докладно аналізує це питання. Вказавши, що «саме поняття задача ніяк не можна визнати чітко», автор зазначає, що термін «задача» вживається в психологічній і педагогічній літературі «для позначення об'єктів, що відносяться до трьох різних категорій:

1) до категорії мети дій суб'єкта, вимоги, поставлені перед суб'єктом: у цьому сенсі термін «задача» («Aufgabe») вживали, наприклад, психологи Вюрцбургської школи;

2) до категорії ситуації, що включає поряд з метою умови, в яких вона має бути досягнута;

3) до категорії словесного формулювання цієї ситуації

Г.О. Балл вважає, що в психологічній літературі найбільш поширене вживання терміну «задача» для позначення об'єктів другої категорії. Об'єкти ж першої категорії можна позначати термінами «мета дії» або «вимога задачі», а об'єкти третьої категорії – терміном «формулювання задач». Термін «проблемна ситуація», широко використовуваний для позначення об'єктів другої категорії, за Г.О. Баллом доцільно використовувати для позначення лише деякого класу цих об'єктів.

Зрештою Г.О. Балл, аналізуючи різні трактування, дає таку послідовність визначень задач:

1. Задача є ситуація, що вимагає від суб'єкта деякої дії .
2. Розумова задача – ситуація, що вимагає від суб'єкта деякої дії, спрямованої на знаходження невідомого на основі використання його зв'язків з відомим.
3. Проблемна задача, або проблема, – ситуація, що вимагає від суб'єкта деякої дії, спрямованої на знаходження невідомого на основі використання його зв'язків з відомим в умовах, коли суб'єкт не володіє способом (алгоритмом) цієї дії.

Зауважимо, що наведена Г.А. Баллом послідовність визначень, звичайно, не охоплює усіх точок зору щодо поняття задача, наявних в психологічній літературі. Прикладом найбільш широкого трактування поняття задачі є визначення, дане Я.А. Пономарьовим, як «стан обурення взаємодіючої системи (як стан її неврівноваженості)». Задачі, які виникають в системі взаємодії суб'єкта – об'єкта і вирішуються специфічними для суб'єкта способами, розглядаються Пономарьовим як приватний вид задач.

Прикладом іншого підходу до поняття задачі є трактування, дане У.Р. Рейтманом в його книзі «Пізнання і мислення».

Вказавши, що термін «задача» використовується в дуже різних ситуаціях, наприклад при пошуку інформації або в тих випадках, коли задача ототожнюється з метою, яку ставить перед собою будь-хто, У.Р. Рейтман запитує: «Що, власне, мають на увазі, коли говорять, що система інформаційних процесів має перед собою «задачу»?» Відповідаючи на це питання, У.Р. Рейтман дає таке визначення: «система має перед собою задачу, коли вона має або їй дано опис чогось, але у неї ще немає чогось, що задовольняло б цей опис» [38, с. 65]. І зауважує, що «це визначення охоплює всі види задач, нітрохи не затемнюючи, однак, можливі відмінності між ними». Далі У.Р. Рейтман так уточнює своє визначення: «Ми породжуємо задачу, коли пов'язуємо з описом того, що ми бажаємо знайти, а

вимога – це те що має бути отримано, знайдено або створено елемент, що задовольняє цей опис» [38, с.66].

А.Ф. Єсаулов, розглядаючи підхід У.Р. Рейтмана до трактування задач як дуже вдалий, відзначає дещо розпливчастий характер наведеного вище визначення. Бажаючи його уточнити, він дає таку дефініцію: «Задача – це більш-менш певні системи інформаційних процесів, неузгоджене або навіть суперечливе відношення між якими викликає потребу в їх перетворенні». І далі: «Суть розв'язання як раз і полягає в пошуках подолання шляхів такого неузгодження, яке у цілому класу задач може доходити до яскраво вираженого протиріччя» [17, с.50].

В психологічній літературі найбільш поширене використання цього терміна до категорії діяльності суб'єкта і умов її протікання. Як зазначає А.М. Леонтьєв, задача – це ціль плюс умови. Вперше поняття «навчальна задача» вводить у педагогічну культуру Д.Б. Ельконін. Він трактував його як задачу, у процесі розв'язання якої основною метою є засвоєння певного зразка дій чи понять. Основну відмінність навчальної задачі від усіх інших задач вбачає в тому, що її мета і результат полягають у зміні самого діючого суб'єкта, а не у зміні предметів, з якими він діє.

Поняття «задача», «система задач» розглядаються в контексті теорії задач і мають багато спільного. Проте в більшості досліджень вони не ототожнюються. Тому потрібно розглянути, як трактується поняття задачі, способи класифікації задач, з'ясувати сутність змісту і ролі задач в умовах розвиваючого навчання. У контексті загальних питань методики розв'язування математичних задач треба розглянути також функції, методи і способи розв'язування задач.

У процесі практичної діяльності людина постійно розв'язує задачі. Існує так званий задачний підхід до діяльності, у якому пояснюють навколишній світ задач, а людську діяльність – як сукупність процесів їх розв'язування. Тобто задача – це результат визначеного типу діяльності

людини. Постановка і формулювання задачі залежить від того, як була проаналізована проблемна ситуація.

За Л.М. Фрідманом, відмінність між поняттям «задача» і «проблемна ситуація» пояснюється тим, що остання існує реально, а задача являється абстрактною моделлю реальної ситуації, і тому проблемна ситуація завжди багатша за змістом, ніж задача, яка відображає лише деякі її сторони. Для кожної проблемної ситуації існує одна або декілька задач, які можуть різнитися між собою сукупністю представлених в них властивостей ситуації. Л.М. Фрідман визначає задачу як «знакову модель проблемної ситуації» [48, с.48].

В.М. Брадїс визначає задачу як всяке математичне запитання, для відповіді на яке не досить простого відтворення одного якогось результату, якоїсь теореми або означення з пройденого курсу.

Ю.М. Колягін стверджує, що проблемна ситуація породжує задачу не сама по собі, а за активної участі суб'єкта, який вбачає в деякій ситуації проблемний характер. Кожна задача стає задачею за суттю лише тоді, коли суб'єкт «приймає» цю задачу, тобто починає роботу над її розв'язанням. Під задачею правильно розуміти не зовнішню ситуацію, а «ситуацію для суб'єкта» [24, с.69].

Представимо сукупність задач як щось, що існує в зовнішньому світі і не залежне від того, хто вирішує задачу. В зв'язку з цим Д. Берлайн справедливо відзначає, що «часто говорять про задачу як про щось, що існує в зовнішньому світі. Вона представляється суб'єкту на листі паперу, або він виявляє її десь в природі. Про те, що складена задача для одного індивідуума, може не бути задачею для іншого». Під задачею правильніше розуміти не просто зовнішню ситуацію, а ситуацію для суб'єкта, ситуацію, яка характеризується «не просто незнанням, а усвідомленням людиною того, що у відомому є щось невідоме, істотно важливе для неї (людини) і у той же час що його не можна відразу з'ясувати». Якщо провести аналіз поняття задачі, як одного з центральних понять сучасної психології, то можна зробити

висновок про доцільність визначати задачу широко, а саме розуміти під задачею всяку ситуацію, що вимагає від суб'єкта (людини) деякої дії (дій).

Зупинимось в зв'язку з цим на понятті дії. Згідно з прийнятим в психології переконанням для кожної дії існують:

- ✓ мета, тобто встановлювана суб'єктом (звичайно – усвідомлювана) вимога до стану деякого об'єкта (або сукупності об'єктів). На виконання цієї вимоги спрямована дія;
- ✓ предмет, тобто об'єкт (або сукупність об'єктів), що перетворюються в ході дії. Предмет дії може бути матеріальним або ідеальним – залежно від цього дія є практичною або розумовою;
- ✓ мотив, тобто потреба, заради задоволення якої повинна бути досягнена мета дії;
- ✓ спосіб, за допомогою якого здійснюється дія. Спосіб дій характеризується послідовністю операцій, з яких складається дана дія.

Загальнонаукове поняття задачі можна розглядати як узагальнення описаного психологічного поняття. Задача в найголовнішому сенсі – це ситуація, що визначає дії деякої розв'язуючої с и с т е м и. Тут вже задачу вирішує необов'язково людина. Розв'язуючі системи можуть бути біологічними, технічними (наприклад, самоналагоджувальна система з сталлюю моделлю), соціальними, нарешті, системами, до складу яких входять люди і автомати (машини). При такому розширенні поняття розв'язуючої системи дію також слід трактувати ширше, ніж прийнято в психології. Це перш за все стосується мети і мотиву дії. Мета розглядається тут як закодована у розв'язуючій системі вимога до стану предмету дії. Мотив як його розуміють в психології, в загальному випадку вказати не можна; можна лише говорити про особливості алгоритму функціонування розв'язуючої системи, що визначають спрямованість її дій. Предмет дій, іншими словами, перетворювання об'єкта або сукупності об'єктів, разом з

вимогою про переважний стан цього об'єкта можна розглядати при описі розв'язування задачі як єдине ціле, а саме як деяку систему, яку ми називаємо *з а д а ч н о ю с и с т е м о ю*.

Ввівши поняття задачної і розв'язуючої системи, ми можемо уточнити загальне визначення задачі. Під задачею розумітимемо задачну систему, що розглядається у відношенні до існуючої або потенційної розв'язуючої системи.

Обговорюване тут загальне поняття задачі ми називаємо кібернетичним. При цьому ми виходимо з того, що розв'язування задачі будь-якою розв'язуючою системою можна розглядати як процес управління, в якому задачна система відіграє роль керованого об'єкта, а розв'язуюча система – роль керівника.

У кібернетичній та науково-технічній літературі зустрічається досить цікаве трактування задач, пов'язане з поняттям переходу (переведення) деякої системи з одного стану в інший. «Задача виникає щоразу, – вказує Е. Крик в книзі «Введення в інженерну справу», – коли потрібно перейти від одного стану до іншого. Два стани можуть бути двома точками в просторі, відстань між якими має бути виміряна... у будь-якій задачі є початкові умови, які називаються станом *A*, або входом, а той стан, який потрібно знайти називають станом *B*, або виходом. Задачі такого роду мають багато розв'язків, тобто різних способів переходу з одного стану в інший».

Таке трактування задачі передбачає виділення в ній елементів: входу *A*, виходу *B*, способу *P* переходу від *A* до *B*, а також теорії (базису) *T*, на основі якої конструюється спосіб *P*. Очевидно, що принаймні один з цих елементів в задачі даний (відомий), інші можуть бути невідомими. Залежно від того, які елементи невідомі, можна отримати дуже значиму класифікацію задач в кібернетичному плані.

У навчально-педагогічній літературі зустрічаються найрізноманітніші підходи до поняття задача.

Мабуть, найбільш просте визначення задачі було дано відомим педагогом-математиком С.О. Шатуновським. Воно говорить: «Задача є виклад вимоги «знайти» за «даними» речами інші «шукані» речі, що знаходяться один до одного і до даних речей у зазначених співвідношеннях». При цьому передбачається, що поняття «річ», «знайти», «дані» , «шукані» у кожному окремому випадку особливо визначаються.

Спеціальна увага в педагогічній літературі приділяється розгляду питання про задачі – проблеми. Це питання докладно проаналізовано у роботі В. Оконя [34, с.120].

Автор стверджує, що «проблема не є те ж саме, що і задача». І далі пояснює: «Проблемний характер для даного індивіда мають лише такі задачі, в яких містяться певні практичні або теоретичні труднощі, що вимагають дослідницької активності, яка приводить до розв'язку. При подоланні індивідом труднощі задача втрачає свій проблемний характер. Проблемою для нього є труднощі, для подолання якої він ще не готовий, хоча для когось іншого вона може і не бути проблемою».

Процес виникнення і рішення задач-проблем у навчанні В. Оконя характеризує так :

- а) розглядається певна життєва ситуація (проблемна ситуація);
- б) в кожній такій ситуації виступає принаймні одна проблема (задача), розв'язок якої пов'язано з труднощами;
- в) проблема формулюється, виникає гіпотеза її розв'язування;
- г) весь процес закінчується вирішенням проблеми.

А.В. Брушлинський, аналізуючи книгу В. Оконя відзначає, що в ній «далеко не завжди проводиться ясне і чітке розходження між проблемною ситуацією і власне проблемою». Автор характеризує це розходження так: «Проблемна ситуація, як відомо, виникає раніше задачі і стає першим симптомом того, що в ході своєї діяльності людина натрапляє на якісь серйозні і поки малозрозумілі труднощі – практичні або теоретичні. Потім, на наступному етапі з цієї проблемної ситуації з'являється більш-менш чітко

сформульована задача (проблема). В її словесному формулюванні, в тій чи іншій мірі, вже виділені умови і вимоги, і дуже приблизно наведене шукане (невідоме)» [7, с.100].

Сутність двох видів проблемних ситуацій – теоретичних і практичних – роз'яснює А.М. Матюшкін у післямові до книги В. Оконя. Теоретична проблемна ситуація «полягає в тому, щоб розкрити загальне положення, що обґрунтовують ті дії, які отримуються учнями, або ті факти, які необхідно пояснити (зрозуміти їх причину) для розуміння нових або обґрунтування нових дій» [29, с.55]. Практична проблемна ситуація «полягає в тому, що учень стикається з деякою «інтелектуальною» перешкодою, яку необхідно подолати для виконання відомої йому дії. При цьому виникає необхідність знайти новий спосіб дії, відповідний заданій умові виконання дії (даної ситуації).

В іншій своїй роботі А.М. Матюшкін розглядає різні моделі проблемних ситуацій. Він виділяє наступні чотири види таких моделей:

- 1) поведінкова модель проблемної ситуації,
- 2) гештальт-модель,
- 3) імовірнісна модель,
- 4) інформаційно-семантична модель.

Головні умови, що викликають проблему в цих видах проблемних ситуацій, відповідно наступні:

- 1) перешкода на шляху до мети,
- 2) деструктурованість умов і предмета мислення,
- 3) «перешкода» виражена в альтернативі,
- 4) невідповідність наявних і необхідних знань.

Вже з наведених прикладів різних трактувань поняття задача очевидно, що навряд чи можлива побудова такого загального визначення задачі, яке охопило б суттєві особливості всіх наявних в даний час визначень. Однією з причин цього є принципово різний підхід різних авторів до питання про ставлення між суб'єктом і задачею. Більшість авторів включають суб'єкта в

саме поняття задача (Г.О. Балл, А.Н. Леонтьєв, Я.А. Пономарьов, К.А. Славська та ін.). Вони розглядають задачу як ситуацію (проблемну), в якій повинен діяти суб'єкт. Тому без суб'єкта задачі немає. І те, чим є задача для одного суб'єкта, може не бути задачею для іншого. Отже, при такому підході неможливе об'єктивне вивчення задачі, незалежно від розгляду діяльності суб'єкта. По суті справи, ці автори визначають і вивчають не самі задачі, а процеси їх розв'язування.

І лише деякі автори намагаються розвести поняття задачі і проблемної ситуації з метою більш глибокого аналізу цих понять (Л.В. Брушлінський, А.М. Матюшкін). При цьому підході задача розглядається як певна реальна система, яка не потребує для своєї характеристики суб'єкта дії. Тим самим створюється можливість об'єктивного вивчення самих задач, незалежно від діяльності суб'єкта.

Щоб здійснити розв'язування задачі, розв'язуюча система повинна володіти засобами розв'язання – числами, фігурами, поняттями, деяким набором операцій перетворення (складанням, множенням і т.д.), а також способами розв'язування – послідовностями операцій, за допомогою яких розв'язується задача (сюди входять алгоритми, розпорядження, зразки рішень і т.д.).

Розв'язати задачу – це означає виконати її вимогу. Внаслідок розв'язування задач дістають розв'язок.

Поняття "розв'язок", "розв'язання" і "розв'язування" мають різні значення.

Розв'язок – це кінцевий результат розв'язування задачі, відповідь.

Розв'язання – це логічна конструкція, сукупність всіх обчислень, що приводять до потрібного висновку.

Розв'язування – це процес міркувань, який проводиться під час пошуку розв'язання.

У психології і дидактиці розглядають поняття метод і спосіб розв'язування задачі. Н. Тализіна вважає, що сукупність дій, які приводять до

розв'язання задач певного класу, називають прийомом, способом, чи методом розв'язування. Я. Ханіш методом розв'язування задач вважає весь хід міркувань з моменту ознайомлення зі змістом задачі до моменту отримання відповіді, а способом розв'язування – ряд арифметичних дій, що ведуть до отримання результату.

Розглянемо *основні елементи*, з яких складається кожна задача, і з'ясуємо, що означає розв'язати задачу.

З визначення задачі випливає, що в ній обов'язково має міститись якесь запитання. Без запитання задачі немає. Оскільки відповідь на запитання задачі дістаємо в результаті виконання арифметичних дій, очевидно, в ній повинна міститись вимога визначити те чи інше число – шукане і, крім того, повинні вказуватися ті числа, за допомогою дій над якими можна знайти шукане. Тому обов'язковими елементами будь-якої задачі є невідоме (шукане) значення (чи кілька таких) і дані значення.

Головна особливість сюжетних текстових задач полягає в тому, що в них безпосередньо не зазначається, яку саме дію (дії) треба виконувати над даними числами, щоб дістати шукане. Тому в тексті задачі потрібні непрямі вказівки на той зв'язок, який існує між даними числами й шуканими і визначає добір потрібних арифметичних дій та їх послідовності. Це – умова задачі. Умова, яка покликана розкрити зв'язки між даними і шуканими числами, природно містить числові дані задачі.

Головні елементи задачі – умова і запитання. Числові (чи буквені) дані – це елементи умови. Шукане завжди міститься в запитанні. Однак іноді задачу сформульовано так, що запитання містить у собі частину умови, або вся задача викладена у формі запитання.

Усе це слід враховувати, навчаючи дітей розв'язувати задачі. Один з істотних моментів цього навчання полягає в тому, щоб діти навчилися самостійно виконувати первинний аналіз тексту задачі, відділяючи відоме від невідомого. Важливо, щоб вони вміли не тільки вичленити із задачі числові

дані, а й пояснити, що означає кожне з них у контексті, що сказано про те число, яке треба знайти, і т.д.

У процесі первинного аналізу слід звертати увагу не тільки на виділення даних і шуканого, а й на зв'язки між ними, викладені в тексті задачі. Розглянемо тепер питання про те, що означає розв'язати задачу. На перший погляд може здатися, що тут все зрозуміло і не потребує обговорення, однак це не зовсім так.

Термін «розв'язання задачі» застосовується в методиці і в живій мові вчителя й учнів у різних значеннях, і на ґрунті цього в процесі навчання виникають іноді певні труднощі, на які слід заздалегідь звернути увагу.

Взагалі кажучи, розв'язати задачу – означає відповісти на поставлене в ній запитання. Саме так найчастіше розуміють цю вимогу діти. Нерідко, як тільки вчитель повідомить задачу, діти відразу дають відповідь на її запитання. Але це не завжди задовольняє педагога. Він намагається з'ясувати, як учні знайшли відповідь, на основі яких міркувань, за допомогою якої арифметичної дії тощо.

Серед учителів побутує думка, що коли учень не може пояснити, як він знайшов відповідь на запитання задачі, це означає, що він й не розв'язав. Діти в душі ніколи не погоджуються з таким висновком. Щоб не виникало такого взаємного непорозуміння між дитиною і вчителем, необхідно пояснити дітям у чому полягає зміст поняття «розв'язати задачу».

Вважаємо за корисне повідомити учням про таке: задачі, які ви розв'язуватимете на уроках математики – це не загадки, що їх треба відгадати. Розв'язати задачу – означає пояснити (розповісти), які дії треба виконати над даними в ній числами, щоб після цього дістати число, яке й вимагається визначити.

Щоб розв'язати задачу, учні повинні володіти засобами розв'язування – числами, фігурами, поняттями, деяким набором операцій перетворення (складанням, множенням і т.д.), а також способами розв'язування – послідовностями операцій, за допомогою яких розв'язується задача (сюди

входять алгоритми, зразки рішень і т.д.).

Відомо, що під час формулювання поняття важливо знайти його ознаки. На думку А.М. Сохора, характеристика особливості задач полягає у необхідності здогадки, евристики, на відміну від алгоритмічного характеру прикладів і вправ. І.Я. Лернер ознаками будь-якої задачі визначає такі:

1. Наявність мети розв'язку, що диктується вимогою чи запитанням до задачі;
2. Необхідність урахування умов і фактів, що являються передумовою застосування способу розв'язування і правильності самого розв'язку;
3. Наявність чи необхідність виявлення і побудови способу розв'язування.

Змістом задачі І.Я. Лернер вважає проблему, в основі виникнення якої лежить суперечність між відомим і невідомим. Таке трактування задачі відрізняється від поширеного в педагогічних дослідженнях, де будь-яке завдання, що вимагає для свого виконання яких-небудь дій, розглядається як задача, а будь-яка пізнавальна дія – як розв'язування пізнавальної задачі.

1.2. Математична задача, її структура та функції

Розуміння задачі визначається не тільки розкриттям її змісту, але і її структурою. Розглянемо основні підходи до виділення структурних елементів. Так, Ю.Н. Лернер виділяє в структурі задачі два компоненти:

- а) Умову, тобто наявну сукупність об'єктів, впорядкованих певними відносинами;
- б) Вимогу, вказує на те, що потрібно шукати в даній умові.

Також два компоненти виділяє в задачі А.Ф. Єсаулов: умова і вимога. Умова розуміється як «певні інформаційні системи, з яких слід виходити при

спробах рішення», а вимога – як те, до чого треба прагнути або що потрібно досягти в процесі перетворення інформаційних систем» [17, с.97].

Л.М. Фрідман виділяє такі елементи в структурі задачі: умова, вимога і оператор. Під оператором задачі він розуміє сукупність тих дій (операцій), які треба провести над умовою задачі, щоб виконати її вимоги [49, с.61].

Більш узагальнений підхід до рішення питання про структуру задачі здійснений академіком В.М. Глушковим. Він в задачі розділяє задачну і розв'язуючу системи. До задачної системи відносяться умови і вимоги задач. У розв'язуючу систему входять наукові методи, способи і засоби, які в нашому розумінні є джерелами створення конкретних алгоритмів і евристик для розв'язування задач.

Ю.М. Колягін підходить до характеристики задачі, використовуючи поняття системи, визначаючи її як дещо ціле, абстрактне і реальне, що складається із взаємозалежних частин: елементів деякої множини і їх властивостей.

Ю. М. Колягін в математичній задачі виділяє такі компоненти:

- початковий стан (умова задачі);
- кінцевий стан (висновок задачі);
- розв'язування (перетворення умови для знаходження шуканого);
- бази розв'язування (його теоретична основа).

Вважаючи математичними всі задачі, в котрих перехід від початкового стану до кінцевого здійснюється математичними засобами [24, с.90].

Згідно підходу У. Рейтмана, розуміння сутності задачі розкривається через визначення її структури. В структурі будь-якої задачі можна виділити умову (твердження) і вимогу (запитання), або дані і шукані величини.

Умова задачі – це частина тексту, в якій задана сюжетна ситуація (подія, явище, процес), числові значення величин, що характеризують її кількісну сторону та вказано залежність між цими значеннями. В стандартному формулюванні умова виражається одним або кількома твердженнями (розповідними реченнями), які приймаються за істинні, в яких

вказуються характеристики і відношення між об'єктами. В умові міститься один чи кілька об'єктів.

Об'єктом задачі може бути: предмет, явище, подія, процес. Якщо умова містить один об'єкт, то в умові описується ситуація, що трапилися з цим об'єктом, числове значення, що характеризує цю ситуацію може бути відомим або невідомим; якщо ж в умові міститься два і більше об'єктів, то в ній вказується відношення між цими об'єктами – воно може бути відоме або невідоме.

Своєрідність опису об'єкта в задачі, за Л. М. Фрідманом [49, с.119], виявляється в тому, що описані не всі його властивості, а лише кількісний бік об'єкта. При чому будь-яка сюжетна задача являє собою словесний опис одного або кількох фіксованих моментів (випадків, епізодів) якого-небудь явища, процесу, події.

Завершується ситуація вимогою знайти невідомий компонент. **Вимога** – це частина тексту, в якій вказана (названа, позначена) шукана величина (число, множина). Вимога задач може бути сформульована у формі наказового або питального речення.

В залежності від способів поєднання та формулювання умови та вимоги задачі визначають канонічне і неканонічне формулювання задачі. Канонічним, І.І. Аргинська, називає формулювання, в якому спочатку в словесній формі викладено умову, а потім йде запитання, яке подано запитальним реченням. Будь-яке відхилення від такої форми викладення задачі автор відносить до неканонічних.

Таких неканонічних форм може бути п'ять:

- після умови слідує запитання, подане питальним реченням;
- частина умови в розповідній формі стоїть на початку тексту, а інша її частина поєднана із запитанням у складне запитальне речення;

- частина умови в розповідній формі стоїть на початку тексту, а інша її частина поєднана із запитанням у складне оповідне речення;
- весь текст задачі поєднаний в одне складне запитальне речення, що починається з її запитання;
- весь текст задачі поєднаний у складне розповідне речення, що починається з її запитання.

Слід зазначити, що часто під умовою задачі розуміють весь текст задачі. Це поширена помилка – задача складається з умови і запитання.

В умові задачі містяться *дані задачі*, а запитання задачі вказує на *шукане*. Дані – це, як правило, числові компоненти тексту задачі. Вони характеризують: значення величин, числові характеристики множин, числові характеристики відношень між ними. Числові характеристики величин та числові характеристики множин звичайно задані числами, а числові характеристики відношень між ними можуть бути позначені словесно. Знаходження шуканого в числовому вигляді звичайно є кінцевою метою розв’язання сюжетної задачі.

Математичним змістом задач, є не самі по собі явища, а ті їх сторони, в яких виражена їх кількісна характеристика. Цей бік об’єкта задачі виявляється у заданні (в умові задачі) тих чи інших величин і їх значень – відомих і невідомих.

Кількісний бік випадку (епізоду) характеризується однією або трьома *взаємопов’язаними величинами*, із яких одна є величина відношення двох інших. Л.М. Фрідман докладно вивчав питання про задання у задачах величин та їх значень [49, с.125].

У сюжетних задачах величини і їх числові значення можуть бути задані явно або неявно (якщо у формулюванні задачі вони не вказані і виявляються лише при глибокому аналізі описаного у задачі явища). Л. М. Фрідман характеризує повне задання в тексті задач окремих значень величини:

- 1) назви величини, значенням якої воно є;
- 2) вказування особливостей даного значення, що відрізняє його від інших значень тієї самої величини;
- 3) розміру цього значення у вигляді іменованого числа, якщо це значення відоме (дане).

Однак, у більшості випадків задач задання значень величин здійснюються неповно: перша частина може бути пропущеною і лише мається на увазі; друга може бути скороченою до мінімуму і майже повністю пропущеною, але є якісь непрямі вказівки, наприклад у вигляді найменування у числа – розміру значення і так далі. Відсутність у словесному заданні значення величини третьої частини – її розміру у вигляді іменованого числа – показує, що це значення невідоме. При цьому якщо у задання значення входять слова: «Скільки?», «Знайти» і так далі, то це невідоме значення є шуканим.

Значення різних величин (відомі і невідомі) складають у сукупності предметну область сюжетних задач. Ці елементи предметної області сюжетних задач пов'язані такими співвідношеннями, моделями яких є арифметичні дії, рівності і нерівності. Співвідношення, котрими пов'язані між собою значення величин, в сюжетних задачах, поділяються на три види:

1. Співвідношення між значеннями однієї і тієї самої величини:

- а) співвідношення поєднання двох або кількох значень в одне ціле (додавання);
- б) співвідношення віднімання від цілого якоїсь його частини (віднімання);
- в) співвідношення розбиття цілого на рівні частини;
- г) співвідношення, пов'язане з переходом від однієї одиниці лічби або вимірювання до іншої.

2. Співвідношення порівняння двох значень однієї і тієї самої величини:

- а) співвідношення рівності двох значень величини;
- б) співвідношення різницевого порівняння двох значень величини;

в) співвідношення кратного порівняння двох значень величини.

3. Співвідношення між значеннями різних величин.

А.К. Артемов виділяє в задачі логічну основу умови – ядро, що «очищене» від сюжетних деталей, в ньому відображуються необхідні для розв'язування математичні відношення між об'єктами, що використані в задачі. Воно застосовується у змісті обчислювального процесу для отримання відповіді на запитання задачі. Це ядро звичайно фіксується в короткому записі тексту задачі [2, с.30]. Отже, в логічній основі умови відображуються величини, що характеризують об'єкт або об'єкти задачі, її предметну область.

В задачі може міститися не одна логічна основа, а декілька, але заданих по-різному: одна з них завжди задається у відкритій, явній формі, а інші – у прихованій. При відкритій формі логічної основи, поняття, що застосовані в задачі, і відношення між ними явно та чітко фіксуються у словесному формулюванні задачі. Виявлення прихованих логічних основ породжує інший спосіб розв'язування задачі.

Користуючись положенням Л. М. Фрідмана про види співвідношень, якими пов'язані елементи предметної області сюжетної задачі, можна сказати, що в предметній області цієї задачі задані два співвідношення:

- 1) співвідношення різницевого порівняння;
- 2) співвідношення поєднання частин у ціле (додавання).

Ця логічна основа є однорівневою, тому що в ній не можна ці співвідношення трактувати по-іншому.

Виявити приховану логічну основу задачі можна не лише через постановку додаткового запитання, а й за допомогою наочного оформлення задачі.

Наочне оформлення і аналіз його дозволяє викрити різні логічні основи умови, що породжує різні способи розв'язування. Наочне оформлення може бути у предметній та графічних формах [2, с.30].

Положення А.К. Артемов про неединичність логічних основ умови задачі перекликається з думкою Л.М. Фрідмана про залежність характеру трактування співвідношення, що задано в задачі від особистого погляду того, хто розв'язує цю задачу. Термін А.К. Артемов «логічна основа умови» та термін Л.М. Фрідмана «вид співвідношення», на нашу думку, характеризують одне й те саме поняття, і визначення логічних основ умови, і визначення видів співвідношень, якими пов'язані значення різних величин, спрямовує хід розумового процесу на розв'язання задачі.

Запитання (вимога) задачі повинно бути пов'язаним з її умовою. Цей зв'язок може бути прямим або непрямим. Прямий зв'язок: запитання задачі безпосередньо орієнтує на застосування того, що дано в умові, для відповіді на нього. Непрямий зв'язок: запитання задачі безпосередньо не пов'язане з даними в умові задачі поняттями та відношеннями між ними; тому попередньо вимагається перетворити запитання так, щоб після цього запитання безпосередньо орієнтувало на умову задачі. При цьому перетворення може бути виконане по-різному, що визначає різні способи розв'язання задачі:

1. Переформулювання запитання – заміна даного запитання іншим, що є рівносильним першому, тобто таким, щоб з першого логічно слідує друге та навпаки. Наприклад: «Дві ланки школярів вийшли одночасно назустріч одна одній з двох селищ. Одна ланка йшла з швидкістю 4 км/год, а друга з швидкістю 3 км/год. Зустріч відбулася через 2 год. Знайди відстань між селищами.» Тут зв'язок запитання і умови задачі поданий в непрямій формі: в умові немає безпосередньої вказівки на шукану відстань, цей зв'язок опосередкований, тому що відповідь на запитання задачі можлива лише через відповідь на інше запитання: яку відстань пройшли дві ланки разом? Це запитання прямо пов'язано з умовою задачі.

2. Добір допоміжного запитання. В цьому випадку до запитання даної задачі ставиться допоміжне запитання (нерівносильне першому), відповідь на яке дозволяє відповісти на запитання даної задачі. При цьому добір може бути неоднозначним, що народжує різні способи розв'язування.

Наприклад: «В парку посадили 5 рядочків лип, по 16 штук у кожному рядку, і стільки ж осик, по 20 штук у кожному рядку. Скільки рядків осик посадили у парку?». Тут запитання задачі зв'язано з її умовою непрямо. Воно не припускає переформулювання на рівносильне запитання. Тому для відповіді на нього слід підібрати допоміжне запитання, яке призведе до відповіді на запитання задачі. Про що треба попередньо дізнатися, щоб відповісти на запитання задачі? Скільки всього осик посадили? Тут постановка допоміжного запитання визначила один хід міркувань для відповіді на запитання задачі, але допоміжне запитання можна поставити інакше: «Число яких рядків було більше при однаковій кількості дерев, та на скільки більше?» (Лип в кожному рядку було по 16, а осик по 20, при однаковій кількості дерев число рядків з осиками менше, тому що в кожному рядку осик на $20 - 16 = 4$ дерева більше. Але «4 зайві» осоки, що повторені 4 рази, дадуть 16, тобто число лип в одному рядку. Значить, рядків осик буде на 1 менше, ніж лип: $5 - 1 = 4$).

У результаті встановлення взаємозв'язків між умовою й вимогою визначається оператор задачі – окрема дія (при розв'язуванні простих задач) та сукупність дій (при розв'язуванні складених задач) та їх обґрунтування.

Задача може бути розв'язною (якщо вона має хоч би один розв'язок) або нерозв'язною (якщо за даними умови задачі неможна знайти розв'язок). Щоб задачу можна було розв'язати, при її формулюванні треба дотримуватися вимог до правильної постановки сюжетних задач:

- 1) усі елементи предметної області, про які йдеться в задачі, мають існувати;
- 2) усі твердження, які задано в умові задачі, мають бути істинними;
- 3) умова і вимога задачі мають бути логічно зв'язані між собою.

Доцільно до визначення навчальної задачі підходити з позицій кібернетики, тобто разом з виділенням в задачі задачної системи виділяти і процес розв'язування задач, так і процес навчання учнів їх розв'язуванню. При цьому навчальна задача розглядається у вигляді системи, що включає задачну і розв'язуючу підсистеми, і визначається взаємодіями між ними. Задана підсистема як складова частина задачі існує об'єктивно і задається учням завданнями та вправами в підручнику (може створюватися вчителем або учнем). Але задачі з'являються для суб'єкта за умови, якщо вона припускається для досягнення вимог ситуацій задачі певних перетворень із сторони розв'язуючого.

У шкільній практиці задачами у широкому розумінні вважають не лише текстові, сюжетні задачі, а й різні вправи, приклади.

Процес розв'язування задачі як розумову діяльність досліджує психологія й аналізує методика математики. Останнім часом здійснюються спроби дослідити задачі як такі, а не лише процес їх розв'язування. Звертається увага на потребу мати чітке уявлення про структуру задачі. Відомо, що кожна задача містить умову (умови) і вимогу (вимоги).

Задачі у навчанні математики є і об'єктом вивчення, і засобом навчання. Зазвичай розрізняють чотири основні їхні функції — навчальна, розвивальна, виховна і контрольна.

Постановка цілей при розв'язуванні задач необхідна для проектування навчальних дій учнів і пов'язана із зовнішнім соціальним замовленням, освітнім стандартом, із специфікою внутрішніх умов навчання: рівнем розвитку дітей, мотивами їх вчення, особливостями досліджуваного виду завдань, наявними засобами навчання і т. д.

Кожна конкретна задача призначається для досягнення найчастіше не однієї, а кількох цілей. І ці цілі характеризуються як змістом задачі, так і значенням.

Цілі можуть бути сформульовані на трьох рівнях, які відрізняються глибиною опрацювання матеріалу з навчання розв'язувати задачі. Дані рівні

Скок Г.Б. і Лигін Н.І. пропонують визначати для зручності дієсловами: мати уявлення, знати, вміти.

Цілі першого рівня (мати уявлення + про що) – мати уявлення:

- Про коло проблем, в ряду яких знаходяться проблеми і питання розв'язування задач в процесі викладання математики;
- Про обов'язкові для вивчення розділи, а також можливості вибору «індивідуальної траєкторії» у процесі розв'язування задач;
- Про існуючі методичні підходи в розв'язуванні задач;
- Про сучасний стан наукових дисциплін, які є основою для розв'язування задач, і перспективи їх розвитку в майбутньому;
- Про основні сфери застосування одержаних знань у процесі розв'язування задач;
- Про використання задач як засіб організації міжпредметної інтеграції;
- Про питання і проблеми, які з якихось причин не розглянутих в процесі розв'язування задач, але мають значення для розуміння деяких аспектів вирішення даних задач.

Цілі другого рівня (знати + що) – знати:

- ✓ Значення задач в курсі математики;
- ✓ Поняття, визначення, терміни необхідні для розв'язування задач;
- ✓ Ознаки, параметри, характеристики, властивості елементів, відображених у змісті задачі;
- ✓ Принципи, основи, теорії, закони, правила, використані в процесі розв'язування задачі;
- ✓ Методи, засоби, прийоми, алгоритми, способи вирішення задач та їх межі застосування;
- ✓ Типології задач за різними критеріями.

Цілі третього рівня (діяльність, що задається дієсловом + об'єкт на який спрямована дана діяльність):

- Оформляти (представляти, описувати, характеризувати) дані, відомості, факти, результати роботи на мові символів (термінів, образів), відомих і які використовуються в процесі розв'язування задач;
- Висловлювати (формулювати, висувати) гіпотези про причини виникнення тієї чи іншої ситуації в процесі розв'язування задачі, про шляхи її розвитку та наслідки;
- Планувати діяльність, пов'язану з розв'язуванням задач;
- Класифікувати (систематизувати, диференціювати) факти (явища, об'єкти, системи, методи, рішення і т.д.), виявлені у процесі розв'язування задач і самостійно формулювати підстави для класифікації;
- Розраховувати (визначати, знаходити, вирішувати, обчислювати, оцінювати, вимірювати) ознаки (параметри, характеристики, величини), використовуючи відомі моделі (методи, способи, прийоми, алгоритми, закони, теорії, закономірності) в процесі розв'язування задач;
- Вибирати способи (методи, прийоми, алгоритми, моделі, закони, критерії) для вирішення задачі;
- Узагальнювати (інтерпретувати) отримані результати по заданих або певних критеріях;
- Контролювати (перевіряти, здійснювати самоконтроль) до, в ході і після розв'язку задачі;
- Змінювати (доповнювати, адаптувати, розвивати) методи (алгоритми, засоби, прийоми, методики) для розв'язування задач певних типів;
- Формулювати (ставити, формалізувати) проблеми (питання), пов'язані з розв'язком текстових задач;

- Прогнозувати (передбачати, припускати, моделювати) розвиток подій (ситуацій), що виникають у процесі розв'язування задач.

Реалізація позначених цілей дозволяє в процесі розв'язування задач одночасно і в нерозривній єдності збагатити особистість учня науковими знаннями, розвинути її інтелектуальні і творчі здібності, а також сформувати її світогляд і морально-естетичну культуру.

Навчальна функція спрямована на формування у школярів системи математичних знань, умінь і навичок, що дозволяють оволодіти вмінням розв'язувати задачі.

Навчальна функція включає в себе дві взаємопов'язані групи дидактичних завдань, що відповідають двом структурним компонентам вміння розв'язувати задачі:

- 1) Завдання, спрямовані на здобуття знань;
- 2) Завдання, спрямовані на оволодіння вміннями.

Таким чином, при розв'язуванні задачі, дитина знайомиться з ситуацією, яка в ній описана, з застосуванням математичної теорії до її розв'язку, вивчає методи рішення, теоретичні розділи математики, необхідні для розв'язування задачі. Все це дозволяє їй підвищити свою математичну освіту.

Для того, щоб досягти необхідного результату при постановці поставлених завдань, потрібно, задовольняли такі вимоги:

1. Задачі повинні відповідати темам і розділам досліджуваного курсу. Кожна задача містить в явному або неявному вигляді певні математичні поняття, тому вона може бути включена в урок тільки на деякому етапі вивчення цих понять і їх властивостей. Таким чином, задачу можна використовувати і як засіб навчання.

2. Зміст задачі має забезпечувати доступність виконання учнями тієї навчальної мети, яка ставилася перед виконанням завдання.

3. Забезпечення поступового ускладнення умов виконання вивченого способу дій або розширення засвоєваних знань. Це можна продемонструвати

при переході від простішої задачі до більш складної. Звертаючи увагу учнів на те, що одна і та ж задача може бути одночасно як частиною деякої задачі, так і самостійною задачею, що складається з інших задач. А тому на думку Зайцевої Г.Т., сформувані в учнів уявлення «про системності математичних знань про те, що предмет математика складається з окремих частин, тісно пов'язаних між собою та співпадають один з одним».

4. Система задач повинна забезпечувати учнів навчити застосовувати вивчені способи і накопичення знань про ситуації (види задач), в яких застосування того чи іншого способу найбільш ефективно і в яких його застосування менш ефективно.

5. Система завдань під час розв'язування задач повинна бути спрямована на встановлення:

- а) рівнів навченості й освіченості, здатності до самостійного вивчення математики;
- б) рівня математичного розвитку учнів сформованості пізнавальних інтересів.

Розв'язок текстових задач може бути використаний як засіб для контролю та оцінки навчальної діяльності учнів. Це обумовлено тим, що характер розв'язування задачі та виявлених при цьому помилок показують рівень засвоєння та оволодіння учнями навчального матеріалу

Отже, навчальна функція полягає у формуванні в учнів системи математичних знань, навичок і умінь на різних етапах навчання. За допомогою системи задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й на етапі мотивації переконуються у потребі здобуття нових знань; у процесі розв'язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію і відомості про методи розв'язування.

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення школярів, на формування в них розумових дій і прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння математизувати ситуацію тощо.

Розвитку мислення учнів найефективніше сприяє розв'язання задач. Тому необхідно, щоб у курсі математики поряд з тренувальними задачами учні розв'язували і розвивальні. До розвивальних задач належать задачі, які розвивають в учнів кмітливість, ініціативу, вміння комбінувати і розмірковувати. Під час розв'язування учні вчаться зіставляти відомі і невідомі факти, узагальнювати отримані розв'язки, робити певні умовиводи. Зокрема, це можуть бути завдання на відшукування різних способів розв'язування однієї задачі, на доведення і дослідження, на відшукування помилок, на складання власних задач, а також задачі практичного змісту та «цікаві» задачі.

Прийоми посилення розвивальної функції задач:

- розширення кола запитань до умови задачі;
- розв'язування задачі різними способами;
- переформулювання задачі;
- заміна числових значень на буквені та розв'язування задачі у так званому загальному вигляді;
- складання задач.

Застосування таких прийомів у роботі над задачами дає змогу, по-перше, підвищити активність учнів під час уроку, а по-друге, цілеспрямовано формувати у них компоненти теоретичного мислення – аналіз, узагальнення, абстрагування, планування і рефлексію.

Виховна функція задач спрямована на формування у школярів світогляду, пізнавального інтересу і навичок навчальної праці, моральних якостей особистості людини.

Виховуючими факторами в процесі розв'язування задач є: зміст освіти, система методів викладання, характер спілкування вчителя і учнів, психологічний клімат у класі, взаємодія учасників процесу навчання, стиль керівництва вчителя пізнавальною діяльністю учнів.

Приступаючи до розв'язування задачі, ми спочатку знайомимося з її умовою, тому важливо, щоб зміст завдання викликав живий інтерес. Цього

можна досягти тільки тоді, коли текст задачі звернений і до розуму, і до емоцій учнів, викликає почуття причетності до вирішення тих чи інших проблем, що стоять як перед кожною людиною окремо, так і перед усім суспільством. При цьому формування і розвиток пізнавального інтересу та виховний вплив здійснюються не тільки через зміст сюжету, а й мимоволі, через підтекст, прихований в задачі.

Зміст задачі – це інформаційна система, в якій в заданій формі визначені структурні елементи, зв'язок між ними, а також відомі і невідомі елементи структурних об'єктів. У змісті відображені, по-перше, процеси і явища навколишньої дійсності, не пов'язані з діяльністю людини, і, по-друге, суспільне буття, яке характеризується формами суспільних відносин і результатами діяльності людини.

Для організації цілеспрямованої виховної роботи в процесі розв'язування задач можна використовувати таку типологію текстових задач за змістом:

1. Задачі, зміст яких відображає процеси і явища, які відбуваються в природі і не пов'язані з діяльністю людини.
2. Задачі, зміст яких відображає суспільне буття, яке характеризується основними формами суспільних відносин.

При побудові навчального процесу з використанням текстових задач не можна забувати слова Сухомлинського В.А про те, що «Вплив слів буде ефективніший, якщо вихованці не подумують, що ви вирішили щось їм розповісти спеціально для того, щоб їх виховувати».

Отже, виховна функція задач спрямована на формування в учнів наукового світогляду, вона сприяє екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю, відповідальність за доручену справу та ін.).

Контрольна функція задач полягає у встановленні навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом загалом.

Жодна із названих функцій не може реалізовуватися ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель має відокремити основну функцію і за належної цільової установки прагнути, насамперед, її реалізації. Кожна з основних функцій задач важлива в загальній системі навчання, але останнім часом особливу увагу приділяють розвивальній функції. Не випадково Д. Поя (1887-1985), Е. Резерфорд (1871-1937), Н. Бор (1885-1962), А. Ейнштейн (1879-1955), П.Л. Капіца (1894-1984), Б.М. Кедров (1903-1985) та інші видатні вчені зазначали, що задачі мають не тільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати досліди розумової діяльності, метод підходу до явищ, що виявляються. Однією з найважливіших проблем шкільної математичної освіти є навчання учнів методів і способів розв'язування задач, самостійного пошуку розв'язку задач. Методи і способи розв'язування задач визначаються характером самих задач і тими знаннями та допоміжними засобами, якими учні володіють на певному етапі навчання.

Нині у дослідженнях психологи, дидактики і методисти переконливо показали, що вміння школярів розв'язувати задачі прямо не залежить від кількості розв'язаних задач. Якщо навіть учень розв'язав багато задач, але в нього не сформований загальний підхід до задачі, аналізу її, пошуку плану розв'язування, то самостійно розв'язувати задачі він не зможе.

1.3. Класифікація математичних задач

Загалом задачі у початковому курсі математики класифікуються на прості і складені. Задача, для розв'язування якої потрібно виконати одну арифметичну дію, називається простою. Задача, для розв'язування якої потрібно виконати декілька дій, пов'язаних між собою (незалежно від того, чи будуть це різні чи однакові дії), називаються складена.

Прості задачі можна розділити на види або залежно від дій, за допомогою яких вони виконуються (прості задачі, які розв'язуються

додаванням, відніманням, множенням, діленням), або в залежності від тих понять, які формуються при їх виконанні.

Прості задачі у системі навчання математики відіграють надзвичайно важливу роль. За допомогою розв'язувань простих задач формується одне з центральних понять початкового курсу математики – поняття про арифметичні дії та ряд інших понять. Уміння виконувати прості задачі є підготовчим ступенем оволодіння учнями умінням розв'язувати складні задачі, так як розв'язок складних задач зводиться до виконання ряду простих задач. Розв'язуючи прості задачі відбувається перше знайомство із завданням і її складовими частинами.

На першому етапі знайомства дітей з простими задачами, перед учителем виникає одночасно кілька досить складних проблем:

- Потрібно, щоб у свідомість дітей закріпилися вторинні сигнали про певні поняття, пов'язані з задачею;
- Виробити вміння бачити в задачі дані числа і шукане число;
- Навчати свідомо вибирати дії і визначати компоненти цих дій.

Для складних задач немає такої єдиної класифікації, яка дозволила б розділяти їх на певні групи. Однак з методичних міркувань доцільно виділити з усього різноманіття задач деякі групи, подібні або математичною структурою (наприклад, задачі, в яких треба суму розділити на число), або способом розв'язування (наприклад, задачі, які виконуються способом знаходження постійної величини), або конкретним змістом (наприклад, задачі, пов'язані з рухом).

Складні задачі включають в себе ряд простих задач, пов'язаних між собою так, що шукані прості задачі служать даними інших. Виконання складних задач зводиться до розчленування їх на ряд простих задач і до послідовності їх розв'язування. Таким чином, для виконання складних задач треба встановити систему зв'язків між даним і потрібним, відповідно до якої вибрати, а потім виконати математичні перетворення.

У психолого-педагогічному аспекті задачі класифікують:

- за способом подання умови;

- за ступенем складності;
- за методами розв'язування;
- за повнотою даних;
- за змістом;
- за основною дидактичною метою;
- за місцем у процесі навчання та ін.

Так, за місцем в процесі навчання розрізняють навчальні задачі, які розв'язують учні у своїй навчальній діяльності, і дидактичні задачі, тобто задачі управління цією діяльністю, які розв'язує вчитель.

Педагог Т. Лернер серед навчальних задач виділяє пізнавальні задачі, які спрямовані на засвоєння учнями нових знань і способів діяльності. «Особливості пізнавальних задач в тому, що учень, маючи всі необхідні дані, потрібні для наступного розв'язування задачі, не може, однак, дістати цей розв'язок безпосередньо з цих даних. Щоб здобути результат, він повинен перетворити ці дані і самостійно виконати за їх допомогою ряд практичних і розумових операцій у потрібній послідовності.»

За дидактичною метою та ступенем самостійності учнів в процесі розв'язування, задачі поділяють на навчальні і пошукові. Методист Л. Закота за основною дидактичною метою виділяє такі типи задач:

- 1) задачі – вправи, спрямовані на формування певних навичок і вмінь;
- 2) задачі на засвоєння нових теоретичних положень;
- 3) задачі на з'ясування суті явищ, подій, процесів;
- 4) задачі на визначення способів діяльності;
- 5) задачі на широке перенесення способів діяльності в нові умови, що сприяють формуванню творчих здібностей школярів;
- 6) задачі-комплекси на узагальнення і систематизацію знань, умінь і навичок.

Н. Метельський за дидактичною метою ділить всі задачі на пізнавальні, тренувальні і розвиваючі.

Текстові задачі є досить різноманітними як за типами, так і методами їх розв'язування. Переважна більшість з них має практичне підґрунтя та застосування. Найбільш вдалою, є класифікація таких задач, подана М.В. Лур'є та Б.І. Александровим, згідно з якою виділяють:

- ✓ задачі «на проценти» та «пропорційні відношення»;
- ✓ задачі «на рух»;
- ✓ задачі «на роботу»;
- ✓ задачі «на числа»;
- ✓ нестандартні задачі з вказаних вище типів, які мають описовий або логічний характер, і для розв'язування яких, як правило, окрім складання рівнянь необхідно використовувати нерівності або інші властивості невідомих величин;
- ✓ на представлення чисел у десятковій системі числення;
- ✓ «на подільність», серед яких:
 - задачі на застосування загальних властивостей та ознак подільності,
 - задачі, пов'язані з найбільшим спільним дільником та найменшим спільним кратним чисел,
 - задачі на застосування алгоритму Евкліда,
 - задачі на доведення подільності з використанням таких методів, як метод «обчислення остач» та метод математичної індукції,
 - задачі, пов'язані з подільністю на числові вирази,
 - задачі з простими числами, у тому числі рівняння «в простих числах»,
 - рівняння та системи «в цілих числах» (діофантові рівняння).
- ✓ задачі з числами, які є членами арифметичної або (і) геометричної прогресії;
- ✓ задачі на обчислення значень числових рядів, на визначення характерних властивостей числових виразів (чисел).

Залежно від того, яку вимогу поставлено в задачі, розрізняють:

- задачі на обчислення;
- задачі на доведення;

- задачі на побудову;
- задачі на дослідження.

У *задачах на обчислення* потрібно знайти число (або множину чисел) за даними числами і умовами, якими вони пов'язані між собою та з невідомими числами. До таких задач належать текстові задачі й різні приклади (задачі на розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем тощо).

У *задачах на доведення* потрібно довести сформульоване в них твердження. Цим вони не відрізняються від теорем. Тому не дивно, що те саме твердження подається в різних підручниках або під рубрикою теорем, або під рубрикою задач. Теоремами, зазвичай, вважають найважливіші твердження, які широко використовують під час розв'язування різних задач і доведення інших теорем. Водночас, на окремі задачі доводиться посылатися як на теореми.

До *задач на побудову* належать як геометричні задачі, в яких потрібно побудувати певну фігуру, що задовольняє умову задачі, так і задачі на побудову графіків функцій, діаграм, перерізів багатогранників та інших тіл.

У *задачах на дослідження* потрібно дослідити що-небудь.

У системі навчання учнів 5 – 6 класів загальноосвітньої школи переважають арифметичні задачі. Задачі на побудову, найпростіші доведення, а також завдання логічного порядку займають порівняно незначне місце. У навчанні математики задачам відведено особливу роль. З одного боку, вони становлять специфічний розділ програми, матеріал якого учні мають засвоїти, а з другого, виступають як дидактичний засіб навчання, виховання і розвитку школярів.

1.4. Місце обернених задач у навчанні математики

Однією з характерних особливостей пропонованої системи навчання є так званий метод обернених задач. Цей метод означає, що роботу над

завданням недоцільно завершувати отриманням відповіді до неї; потрібно прийомом звернення скласти і вирішувати в порівнянні з вихідною (прямою) задачею нову, обернену задачу, витягуючи тим самим додаткову інформацію, яка полягає в нових зв'язках між величинами вихідної задачі.

Для цього в умову вихідної задачі вводиться її відповідь, а деякі числа з умови переводяться в розряд шуканих.

У задачі доцільно розрізнити три елементи:

- 1) сюжетну сторону (наприклад, завдання на рух);
- 2) числові дані (скажімо, десяткові дробби);
- 3) математичні залежності і дії, за допомогою яких вирішується задача.

Істотним елементом, від якого залежить в основному тип (вид) задачі, складність її вирішення, є третій елемент.

При підборі вправ по тій чи іншій теми варіюють, зазвичай, сюжети і числа, зберігаючи незмінними математичні залежності.

Це призводить до того, що в тій чи іншій групі задач, що розглядаються сукупно у «часі і просторі», зазвичай знаходяться тільки однотипні; структурно протилежні завдання часто розглядаються окремо один від одного, окремо в часі.

«Обернені» задачі доречно вводити, починаючи з елементарних завдань, які використовують, скажімо, для перевірки кмітливості.

Зупинимось докладніше на аналізі логічних і психологічних особливостей методу обернених задач.

Визнаний вчителями інтерес дітей до прийому перетворення прямої задачі у обернену пояснюється насамперед тим, що такий шлях встановлює різноманітність зв'язків, укладених в змісті досліджуваного матеріалу.

Звернемо увагу на такі особливості рішення взаємно обернених задач (не тільки в арифметиці) .

а) При цій методиці одне і те ж число, поняття, величина, фігура тощо входить в кілька різних міркувань і знаходиться істотно іншими ходами думки.

б) У процесі перетворення прямої задачі у обернену учень виявляє і використовує взаємно зворотні зв'язки між величинами задачі: якщо в прямій задачі, скажімо, визначалася вартість за ціною товару і його кількістю, то в оберненій задачі визначається ціна або кількість товару.

в) Вирішуючи обернені задачі, учні самостійно перебудовують судження і умовиводи, використані при вирішенні прямої задачі. При цьому вони опановують практично новими, складнішими формами міркувань.

Таким чином, цінні для розвитку мислення і прямі, і обернені задачі, взяті як такі самі по собі; найбільш важливий пізнавальний елемент полягає тут у процесі перетворення однієї задачі в іншу, тобто в тих «невидимих» і важковловимих при логічному аналізі елементах думки, які пов'язують процеси вирішення обох задач.

г) Важливо відзначити й іншу структурну особливість подібних комплексних вправ: сукупність прямої і оберненої задач, кожна з яких є, скажімо, завданням на 2-3 дії, в дидактичному плані є не лише всього дві окремі задачі на 2-3 дії; по суті, це єдина, якісно нова вправа, одна задача на 4-6 дій; друга частина такої складної задачі цілком виступає продуктом творчості учнів, будучи логічним продовженням першої частини.

Як показує наша практика, доцільно поширити поняття «обернена задача» на випадок більш складних алгебраїчних задач, коли не одне, а 2 – 3 числа з відповіді замінюють стільки ж чисел, даних в умові вихідної задачі.

Приєм складання нових задач, обернених даних, є майже універсальним: він застосований для будь-яких розділів математики і завжди підводить учня до постановки нових проблем, отримання істотно інших різновидів задач. Уміння вирішувати пряму і обернену задачі є важливим критерієм досягнутої учнем глибини розуміння досліджуваного розділу математики. Тому важливо розглядати в методиці математики складання та розв'язування обернених задач як досить простий і зручний прийом розвитку творчого мислення учнів.

У старших класах школи цим шляхом вдається з'ясувати зміст логічних категорій «необхідні і достатні умови».

Інакше кажучи, свідоме (або довільне, як кажуть психологи) протиставлення понять викликає інші, більш прості поняття.

В даний час «метод обернених задач» знайшов досить широке місце в програмах і стабільних підручниках середньої школи.

Тим часом метод обернених задач в нашому досліді довів свою необхідність в практиці навчання навіть вищої школи, аналітичної геометрії, математичного аналізу...

1.5. Психолого-педагогічні основи навчання учнів 5 – 6 класів розв'язувати і складати математичні задачі

Курс математики основної школи логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів. В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено *компетентнісний підхід*, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, як здатності учня застосовувати свої знання в навчальних і реальних життєвих ситуаціях, повноцінно брати участь в житті суспільства, нести відповідальність за свої дії. Формування зазначеної компетентності підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти. До них належать:

- формування *ставлення* до математики як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишнього світу;

- забезпечення *оволодіння* математичною мовою, розуміння учнями математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;
- формування *здатності* логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;
- розвиток *умінь* працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті;
- формування *здатності* оцінювати правильність і раціональність розв'язування математичних задач, обґрунтовувати твердження, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації.

Вивчення математики у 5–6 класах здійснюється з переважанням індуктивних міркувань в основному на наочно-інтуїтивному рівні із залученням практичного досвіду учнів і прикладів із довкілля. Відбувається поступове збільшення теоретичного матеріалу, який вимагає обґрунтування тверджень, що вивчаються. Це готує учнів до ширшого використання дедуктивних методів на наступному етапі вивчення математики.

Істотне місце у вивченні курсу займають текстові задачі, основними функціями яких є розвиток логічного мислення учнів та ілюстрація практичного застосування математичних знань. Під час розв'язування текстових задач учні також вчаться використовувати математичні моделі. Розв'язування таких задач супроводжує вивчення всіх тем, передбачених програмою, а також задачі мають велике і багатостороннє значення.

1) *Освітнє значення математичних задач.* Вирішуючи математичну задачу, людина пізнає багато нового: знайомиться з новою ситуацією, описаною в задачі, із застосуванням математичної теорії до її розв'язування, пізнає новий метод розв'язування або нові теоретичні розділи математики, необхідні для розв'язку задачі і т.д. Іншими словами, при розв'язуванні математичних задач людина набуває математичних знань, підвищує свою математичну освіту. При оволодінні методом розв'язування деякого класу задач у людини формується вміння розв'язувати задачі, а при достатньому тренуванні – і навиках, що теж підвищує рівень математичної освіти.

2) *Практичне значення математичних задач.* При розв'язуванні математичних задач учень навчається застосовувати математичні знання до практичних потреб, готується до практичної діяльності в майбутньому, до вирішенні повсякденних задач, висунутих практикою. Майже у всіх конструкторських розрахунках доводиться розв'язувати математичні задачі, виходячи із запитів практики. Дослідження і опис процесів та їх властивостей неможливо без залучення математичного апарата, тобто без розв'язку математичних задач. Математичні задачі розв'язуються у фізиці, хімії, біології, електро- і радіотехніці, особливо в їх теоретичних основах, та ін.

Це означає, що при навчанні математики учням слід пропонувати задачі, пов'язані із суміжними дисциплінами (фізикою, хімією, географією та ін.), а також задачі з технічним, практичним і життєвим змістом.

3) *Значення математична задач у розвитку мислення.* Розв'язування математичних задач привчає виділяти дані і шукані елементи, знаходити спільне, і особливо в даних, зіставляти і

протиставляти факти. При розв'язуванні математичних задач, виховується правильне мислення, і перш за все учні привчаються до повноцінної аргументації. Розв'язування задач повинно бути повністю аргументованим, тобто не допускаються незаконні узагальнення, необґрунтовані аналогії, ставиться вимога повноти диз'юнкції (розгляд усіх випадків даної в задачі ситуації), дотримуються повнота і витриманість класифікації. При розв'язуванні математичних задач в учнів формується особливий стиль мислення: дотримання формально-логічної схеми міркувань, лаконічний вираз думок, чітка послідовність ходу мислення, точність символіки.

- 4) **Виховне значення математичних задач.** Задача виховує своїм текстовим змістом, а тому правильно поставлене навчання розв'язувати математичні задачі виховує в учнів чесність і правдивість, наполегливість у подоланні труднощів, повагу до праці своїх товаришів.

Отже, задачі являються засобом реалізації загальноосвітньої, виховної і розвиваючої цілей.

Для формування виділених елементів теоретичних знань і оволодіння учнями відповідними видами діяльності необхідно розглядати систему задач, що забезпечує засвоєння навчального матеріалу.

1. Особливості системи задач на засвоєння поняття і його означення. Наявність задач: пов'язаних з показом практичної значущості; на виділення істотних ознак; на розпізнання поняття: на засвоєння тексту; на використання символіки; на встановлення властивостей; на застосування понять.

Наведена система задач, забезпечує формування двох учбових. Підведення об'єкта під поняття, виділення наслідків із факту належності об'єкта даному поняттю.

2. Особливості системи задач на засвоєння теореми і її доведення. Наявність задач на розкриття необхідності знань математичного факту, сформульованого в теоремі; на актуалізацію математичних фактів, які використовуються при доведенні теореми або фактів, для яких дана теорема є узагальненням, а також на актуалізацію способів доведення аналогічних фактів, які використовувались в даній теоремі; на обчислення і доведення або побудову, які приводять учнів до усвідомлення факту, сформульованого в теоремі; на засвоєння формулювання теореми, окремих етапів доведення теореми; на знаходження другого способу доведення факту, сформульованого в теоремі; на застосування факту, сформульованого в теоремі, для одержання нових фактів; установлення кількісних відношень між об'єктами і одержання способів побудови об'єктів.
3. Особливості системи задач на засвоєння правил (алгоритмів). Наявність задач: на необхідності розгляду правила; на актуалізацію знань, необхідних для обґрунтування правил і умінь; виконання правил; на виконання окремих операцій, котрі входять в алгоритми (правила); на застосування правил в різних ситуаціях (знайомих і не знайомих).

Описані системи задач мають деяку надмірність. Наявність і відсутність в цих задач деяких видів залежить від місця вивчення відповідного учбового матеріалу, від змісту матеріалу і від методичної концепції його вивчення.

Сукупність математичних понять і зв'язків між ними відноситься до предмету математики, методика ж розглядає процес формування математичних понять і встановлення зв'язків між ними, виявляє найкращі способи передачі знань, їх закріплення і подальшого застосування.

Методика математики не може обмежуватися у своїй теорії поняттями і засобами логіки, що розглядає крок в статичному плані, з точки зору результатів мислення; умовою успішного розвитку методики математики є її опора на діалектичну логіку, оскільки остання відображає закономірності процесів мислення, зміни і саморозвитку знання.

Методика навчального предмета вивчає питання: чому, як (і чому так !) слід вчити.

Однією з головних умов успішного оволодіння деякою галуззю знань є виявлення «основної клітинки» відповідної науки, що дозволяє, зосередивши зусилля на всебічному аналізі цієї клітинки, побудувати ефективну систему знань. В якості такої клітинки методики математики на наш погляд, слід взяти поняття «математична задача».

Дійсно, всяке дослідження за методикою математики, зрештою, зводиться до задачі: до з'ясування принципів класифікації їх, різноманітності форм і змісту, до питання про прийоми роботи і послідовності виконання вправ.

Засвоєння математики здійснюється в процесі виконання задач, а тому й розвиток методики математики йде шляхом впровадження нових форм і видів математичних задач, що викликають у школярів велику розумову активність.

В даний час важко стверджувати, що загальні питання методики математичних задач вирішені досить ґрунтовно, на рівні сучасних уявлень про мислення.

У роботі над математичними задачами чітко виділяються чотири послідовних і взаємопов'язаних етапи:

- а) складання математичної задачі;
- б) розв'язання задачі;
- в) перевірка відповіді (контроль);
- г) перехід до більш складної задачі.

В існуючій практиці навчання користуються здебільшого другим із зазначених етапів (тобто лише одним з чотирьох етапів роботи над задачами).

У пізнавальному відношенні не може бути нормальним те, що процес виникнення математичних вправ (задач, рівнянь і т.д.) цілком відданий іншій особі, що не навчається. Тим часом процес складання задач, рівнянь, тотожностей, нерівностей і т.д. в психологічному відношенні багатий своєрідними, синтетичними ходами думки, принципово недоступними для пізнання розуму, якщо тільки навчальна робота користується рішенням чужих задач; в тій же мірі процес виконання готової задачі, отриманий від попереднього етапу, носить переважно аналітичну спрямованість, бо він структурно протилежний етапу складання задач. Стає зрозуміло, чому так важливо ознайомити учня з цими процесами в їх діалектично суперечливих якостях і у взаємозв'язках. Розв'язування і складання задач – взаємодоповнюючі методи роботи над нею.

Навіть розглядаючи питання навчання із звичайною, більш обмеженою позицією – вироблення вміння розв'язувати певні види задач, ми приходимо до висновку про необхідність включати в навчальну роботу школяра діяльність, адекватну (тотожну) тій, яка закладена в задачі; в задачі ж закладена, насамперед, діяльність щодо її складання, а не тільки діяльність щодо її розв'язування.

До останнього часу в нашій школі застосування математичних знань в основному зводилося до вирішення задач, в яких математичні питання вже були сформульованими. У середовищі вчителів математики вважають, що: «вивчити математику – це навчитися розв'язувати задачі». А на виробництві, в житті від людини вимагається вміння самій сформулювати питання і, застосовуючи математичні знання, знайти відповідь на нього.

Одним із способів пропедевтики такої якості розуму є складання задач учнями на уроках, причому природно, що спочатку зразками для елементарної творчості дітей повинні служити типові шкільні вправи.

Серйозної уваги методистів вимагає і останній етап – завершення

однієї задачі як перехід до нової. Ускладнення задачі є проблема угруповання задачі по ступені їх труднощі, інформативності і т.д.

Досвід навчання на основі збільшення одиниць засвоєння показав, що основною формою вправи має стати багатокomпонентна задача, яка утворюється з декількох логічно різнорідних, але психологічно зістикованих в деяку цілісність частин, наприклад:

- а) розв'язування звичайної «готової» задачі;
- б) складання оберненої задачі і її розв'язування;
- в) складання аналогічної задачі до даної формули (тотожності) або рівняння і розв'язання її;
- г) складання задач за деякими елементами, спільними з вихідною задачею;
- г) розв'язування або складання задач, узагальнених з тих чи інших параметрів вихідної задачі.

Зрозуміло, спочатку в ускладнені вправи можуть увійти лише деякі із зазначених варіацій.

Головне в роботі над ускладненими вправами – щоб усі складові частини по можливості були виконані у зазначеній послідовності на одному занятті (при недостатності часу – хоча б усно або обговорені коротко із завершенням в домашній роботі).

Педагогічні задачі багатофункціональні, але основний зміст педагогічної діяльності – учень. У цьому зв'язку головним критерієм діяльності вчителя є уявлення про кінцевий результат: чи хочемо ми дати учневі певний набір знань з предмета або сформувати особистість, готову до творчої діяльності. У першому випадку не доводиться говорити про розвиток учнів, так як учень отримує готову інформацію, сприймає її, розуміє, запам'ятовує, потім відтворює, тобто тут спостерігаємо репродуктивну діяльність. Звичайно, і в цьому випадку потрібні певні здібності до навчання, але таке навчання не здійснює істотного впливу як на загальний психічний розвиток дітей, так і на розвиток їх спеціальних здібностей.

Тільки тоді, коли навчальна діяльність, спрямована на оволодіння основами наук і на розвиток особистісних якостей, сформована на розвиток особистісних якостей, починає ясно виявлятися її творча сторона. І тут слід сказати про те, що потенційні можливості майже всіх школярів високі і головне – знайти той «важіль», який приведе в рух механізм розвитку творчої діяльності, а разом з тим і особистості учнів. Під таким «важелем» слід розуміти раціональну організацію всього навчального процесу. Сюди включено і логіко – змістовну побудову курсів, і створення проблемних ситуацій, і частково – пошуковий або дослідницький метод навчання. Але який би метод навчання ми не обрали, результат залежить від успішного протікання розумового процесу.

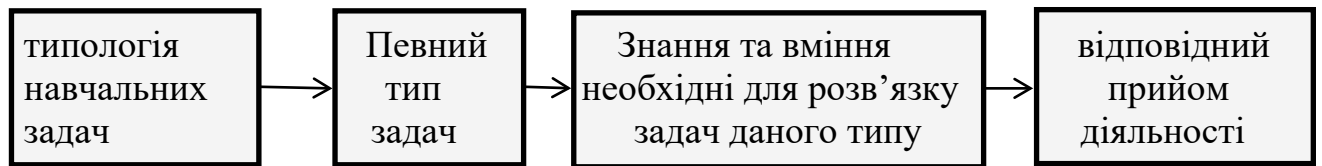
Творча діяльність учня, спрямована на творче розуміння засвоюваного матеріалу і породження нових способів дії, її розвиток залежать від наявності трьох складових мислення:

1. Високий рівень сформованості елементарних розумових операцій: аналізу і синтезу, порівняння, аналогії, класифікації.
2. Високий рівень активності і плюралістичності мислення, що виявляються у висуванні безлічі гіпотез, варіантів розв'язку, нестандартних ідей.
3. Високий рівень організованості та цілеспрямованості мислення, який виявляється у виділенні істотного в явищах, усвідомленні власних способів мислення.

Сформованість названих якостей мислення дозволить подолати труднощі в оволодінні навчальним матеріалом і призведе до розвитку творчої особистості учня. Це пояснюється тим, що учень, отримуючи теоретично обґрунтовані способи дій, знання, може самостійно виробляти подібні способи в незнайомих ситуаціях або нові способи при вирішенні поставлених проблем.

Задача навчання, що включає формування прийомів навчальної діяльності в процесі вивчення конкретної теми курсу математики, полягає в

тому, щоб організувати діяльність учнів по засвоєнню досліджуваного матеріалу. З цією метою вчителю необхідно розкрити зміст і структуру навчальної діяльності на даному етапі навчання, тобто визначити предмет засвоєння, що включає теоретичні знання і відповідні способи дій. Найбільш істотним тут є вміння вчителя виділити прийоми навчальної діяльності учнів по засвоєнню теоретичних знань. Допомогти в цьому вчителю може наступна схема аналізу досліджуваного матеріалу:



Таким чином, завдання вчителя зводиться до формування зазначених компонентів мислення. При цьому інструментом повинно виступати творче завдання. Рішення учнями творчих задач забезпечується сформованими у них знаннями, вміннями та навичками. Слід також зазначити, що в збереженні високої активної розумової діяльності на уроці відіграє мотивація, інтерес дитини до того, що вона робить.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ 5 – 6 КЛАСІВ РОЗВ’ЯЗУВАТИ ТА СКЛАДАТИ МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ

2.1. Методика навчання учнів 5 – 6 класів розв’язувати текстові задачі

Текстові задачі використовуються як ефективний засіб засвоєння учнями понять, методів, взагалі математичних теорій, як найбільш дієвий засіб розвитку мислення учнів, як універсальний засіб математичного виховання і незамінний засіб прищеплення учням умінь і навичок у практичних застосуваннях математики. Розв’язування задач сприяє досягненню всіх тих цілей, які ставляться перед навчанням математики. Перш за все задача виховує своєю фабулою, текстовим змістом.

Виховну роль відіграє не тільки фабула задачі, але і весь процес навчання розв’язуванню текстових задач. Правильне розв’язування текстових задач без будь-яких логічних натяжок виховує в учнів чесність і правдивість. Розв’язання задач вимагає від учнів наполегливості у подоланні труднощів і мужності. При розв’язуванні задач формуються вміння і навички розумової праці: посидючість, уважність, акуратність, послідовність розумових дій. Розв’язування задач розвиває також почуття відповідального ставлення до навчання.

Загальний прийом розв’язування задач включає:

- знання етапів розв’язку;
- методів (способів) виконання;
- типів завдань;
- обґрунтування вибору способу виконання на підставі аналізу тексту задачі;
- володіння предметними знаннями: поняттями, визначеннями термінів, правилами, формулами, логічними прийомами й операціями.

До етапів розв'язування можна віднести:

- 1) аналіз тексту задачі;
- 2) переклад тексту на мову математики;
- 3) встановлення відносин між даними і питанням;
- 4) складання плану до розв'язування задачі;
- 5) здійснення плану розв'язку;
- 6) перевірка та оцінка розв'язування задачі.

Аналіз тексту задачі.

Робота над текстом задачі включає семантичний, логічний і математичний аналіз.

1. Семантичний аналіз спрямований на забезпечення розуміння змісту тексту.
2. Логічний аналіз передбачає: вміння замінювати терміни їх визначеннями; виводити наслідки з наявних в умові задачі даних (поняття, процеси, явища).
3. Математичний аналіз включає аналіз умови і вимоги задачі.

Переклад тексту на мову математики.

У результаті аналізу текст задачі записують коротко з використанням умовної символіки. Після того як дані задачі спеціально вицленовані в короткому записі, слід перейти до аналізу відносин і зв'язків між цими даними.

Для цього здійснюється переклад тексту на мову графічних моделей різного виду: креслення, схема, графік, таблиця, символічний малюнок, формула, рівняння та ін. Переклад тексту у форму моделі дозволяє виявити в ньому властивості й відносини, які часто важко виявити при читанні тексту. Виконане креслення (рисунок) за текстом задачі дозволяє фіксувати хід міркувань при її виконанні, що сприяє формуванню спільних підходів до розв'язування задачі.

Тому, до виконання креслень потрібно пред'являти вимоги: вони повинні бути наочними, чіткими, відповідати тексту завдання, на них повинні бути відображені по можливості всі дані, що входять в умову задачі; виділені на них дані і шукані повинні відповідати умові задачі і загальноприйнятим позначенням.

Формування вміння виконувати креслення до задачі буде успішним, якщо учні будуть вміти читати відповідне креслення. У зв'язку з цим учням потрібно пропонувати вправи на складання тексту задачі за кресленням, малюнку.

Встановлення відносин між даними і питанням.

Реалізація цього компонента загального прийому розв'язування задач передбачає встановлення відносин між:

- ✓ даними умови,
- ✓ даними питання,
- ✓ даними умови і питанням задачі.

На основі аналізу умови і питання задачі, визначається спосіб розв'язування задачі (обчислити, побудувати, довести), вибудовується послідовність конкретних дій. При цьому встановлюється достатність, недостатність або надмірність даних.

План розв'язку.

На підставі виявлених відносин між величинами об'єктів вибудовується послідовність дій - план розв'язку. Особливе значення має складання плану для розв'язування складних задач.

Здійснення плану розв'язку включає:

- розв'язування задачі – виконання дій;
- запис виконання задачі;
- виділення способів розв'язування .

Запис розв'язання задачі може здійснюватися у вигляді запису послідовних певних дій (з поясненнями і без) і у вигляді виразу (розгорнутого або скороченого).

Перевірка та оцінка виконання завдання з точки зору адекватності плану розв'язку, способу розв'язку, що веде до результату: раціональність способу, чи немає простішого. Різні типи задач вимагають використання різних методів і прийомів розв'язування.

Розв'язування задач у 5-6 класах здійснюється в основному трьома способами:

арифметичним, що складається із знаходження значень невідомої величини за допомогою складання числового вираження (числової формули) і підрахунку результату;

алгебраїчним, при якому складається рівняння (система рівнянь), виконання якого засноване на властивостях рівнянь;

комбінованим, який включає як арифметичний, так і алгебраїчний способи розв'язку.

Арифметичні способи розв'язання задач дозволяють розвивати вміння аналізувати задачні ситуації, будувати план виконання з урахуванням взаємозв'язків між відомими і невідомими величинами (з урахуванням типу задачі), тлумачити результат кожної дії в рамках умови задачі, перевіряти правильність розв'язку за допомогою складання і виконання зворотної задачі. Тобто дозволяють формувати і розвивати важливі загальнонавчальні вміння.

Алгебраїчні способи розв'язування текстових задач вчать дітей перших абстракцій, дозволяють виховувати логічну структуру, можуть сприяти створенню сприятливого емоційного фону навчання, розвитку у школярів естетичного почуття стосовно виконання завдань і вивчення математики, викликаючи інтерес спочатку до процесу пошуку розв'язування задачі, а потім і до досліджуваного предмета .

При розв'язуванні задач арифметичним способом форми запису можуть бути:

- питання з подальшою дією;
- дія з наступним поясненням;
- запис розв'язування з попереднім поясненням;
- числове розв'язування без будь-якого тексту.

При розв'язуванні задач алгебраїчним способом істотне значення має вибір величини за невідоме, за допомогою якої можна висловити інші (чи частину інших) величини, що входять у задачу, і встановити залежність між даними задачі, що дасть можливість скласти рівняння.

Для багатьох задач за невідоме можна приймати величину, яку потрібно знайти; тоді відповідь на питання задачі отримують без додаткових обчислень.

При розв'язуванні текстової задачі часто використовують поєднання арифметичного і алгебраїчного способів виконання. У силу цього форма запису розв'язування кожної частини буде різною.

Вчитель математики повинен познайомитися з методикою викладання вчителя початкових класів, знати основні прийоми роботи цього вчителя і продовжувати застосовувати їх, не сильно відступаючи від того, чому діти вже навчені (складання схем, таблиць, короткого запису умови задачі і т.д.), доповнюючи, збагачуючи способи розв'язування задач своїми напрацюваннями.

У 5 класі доводиться, не сильно відступаючи від початкової школи, виправляти і приділяти багато уваги розв'язуванню задач на знаходження відносин між числами ("більше на ...", "менше на ...", "більше в ... раз", "менше в ... раз"). На допомогу приходять завдання типу:

- намалюй будинок, в якого один поверх;
- намалюй будинок, у якого на два поверхи більше попереднього;

- намалюй будинок, у якого в два рази більше поверхів, ніж у попереднього;
- намалюй будинок, у якого в три рази менше поверхів, ніж у попереднього.

У результаті виходить картинка. Діти справляються з таким завданням легко, але далеко не всі правильно. А перевіряють вони по малюнку, який показує вчитель. Завдання подібного роду потрібно давати тривалий час, поки не зникнуть помилки, але вони не обов'язкові для всіх.

Також дуже важливо дітей вчити робити прикидку відповіді задачі. Складання короткого запису умови задачі, схем, малюнків і т.д. учні повинні супроводжувати поясненням і обговоренням в парах, біля дошки, індивідуально вчителю, але ні в якому разі не мовчки. Проговорюючи кожен свій крок, учні краще усвідомлюють умову задачі і знаходять у ній все більше і більше знайомих їм ситуацій, особливо, якщо ця задача складається з декількох елементарних задач.

Допомагає у розв'язуванні складної задачі розчленування її на більш дрібні ситуації. Учневі краще пропонувати допоміжну ситуацію з його життя, цікаву і зрозумілу. Наприклад, в магазин пішли не хтось інший, а ти і твій друг чи ти доганяєш на велосипеді свого друга та інші.

Ніколи не потрібно квапити дитину з розв'язком, якщо у неї виникають труднощі. Потрібно спробувати допомогти їй ще і ще раз. Обов'язково похвалити за розв'язану задачу, навіть якщо учень правильно зробив лише один крок. У такому випадку він на наступному уроці буде подвійно уважний і зробить вірно вже не один крок, а більше. І в подальшому зможе розв'язати її всю. Для дітей, яким задачі складно розв'язувати, вчитель повинен ставати помічником, другом, співучасником вирішення проблеми. Потрібно змусити дитину подолати страх перед задачами. Він у них виробляється в початковій школі, так як зміст задач не завжди відповідає віку. У розв'язуванні допомагає правильно складена за умовами задачі схема, прикидка відповіді і відповідність отриманої відповіді умові завдання. Треба

домагатися, щоб діти при рішенні не пропускали жодного з цих кроків. Тоді успіх забезпечений.

Задачі розв'язують усно або письмово

Усне розв'язування. Під час розв'язування задач на 2 дії учні спочатку повідомляють план розв'язування, а потім вже виконання окремих дій і відповідь. При розв'язуванні задач на 3 дії складання плану може супроводжуватися одночасним виконанням дій, причому відповіді кожної простої задачі, з яких складається дана складена, доцільно записувати на дошці.

Усне розв'язування проводиться у вигляді математичного диктанту, доцільно записувати і проміжні результати.

Письмове розв'язування. У початкових класах можна використовувати такі основні форми запису розв'язання: учні записують розв'язування (окремі дії чи вираз), а пояснення подають усно; учні записують окремі дії і коротко письмово коментують кожну з них; учні послідовно складають вираз, коротко письмово пояснюючи кожну його частину; учні записують розв'язок з письмовим планом: перше запитання і одразу дія, друге запитання і дія і т.д. (іноді записують спочатку всі запитання плану розв'язування, а потім вже розв'язання) учні складають за умовою задачі рівняння і розв'язують його.

Пояснення до дій може бути і у стверджувальній формі, і у запитальній.

Перевірка розв'язання.

При перевірці розв'язку задачі доцільно запроваджувати такі прийоми перевірки: порівняння результату, який дістали учні в процесі розв'язання задачі з відповіддю вчителя і встановлення відповідності результату й умови; розв'язання задачі різними способами; складанням й розв'язуванням обернених задач, попередня прикидка числових меж шуканого результату.

Розглянемо кожен з прийомів перевірки.

Звіряння відповіді. Школярів середньої школи слід вчити звіряти результат з тим, який дає вчитель. Самостійне виправлення помилок свідчить про те, що учень зміг проаналізувати умову і запитання задачі, встановити необхідні зв'язки. Залежно від конкретних ситуацій і поставленої мети відповіді можна давати як до початку розв'язування, так і після.

Крім остаточної відповіді, можна іноді зазначати тільки числові межі результату. Наприклад: у відповіді буде число, яке більше 70, але менше 90.

Встановлення відповідності результату й умови. Це найбільш загальний прийом перевірки для математичних задач. Суть його полягає в тому, що відповідно до опису подій, про які йдеться в задачі, учні виконують необхідні дії над заданими й знайденими числами. Якщо після виконання дій дістають число, яке є в умові – задачу розв'язано правильно.

Закріплення вміння розв'язувати задачі.

Мета цього етапу – добитися, щоб учень узагальнив спосіб розв'язування і вмів розв'язувати будь-яку задачу розглядуваного виду. Для правильного узагальнення способу розв'язування задач певного виду велике значення має система добору і розміщення задач. Система має задовольняти певні вимоги.

Насамперед задачі повинні поступово ускладнюватись як щодо збільшення числа дій, за допомогою яких розв'язують задачу, так і включення нових зв'язків між заданими величинами і шуканою.

Однією з важливих умов для правильного узагальнення способу розв'язування задач певного виду є розв'язування достатньої їх кількості. Спочатку задачі розглядуваного виду розв'язують частіше, а потім дедалі рідше поряд з іншими видами. Узагальненню способу розв'язування сприяє включення задач із буквеними даними.

Загалом можна сказати, що процес формування вмінь розв'язувати задачі неперервний. Учні розв'язують задачі на кожному уроці математики і в процесі виконання домашніх завдань.

Формування вмінь передбачає також ознайомлення з новим видом задач, перехід від одного виду задач до іншого та зв'язок між ними, повторне розв'язування задач, різновиди творчої роботи над задачами.

2.1.1. Задачі на рух

В задачах на рух розглядаються три взаємопов'язані величини:

s – пройдена відстань (шлях);

t – час руху;

v – швидкість руху, тобто відстань, яка подолана за одиницю часу.

Відстань (s) – це добуток швидкості та часу руху

$$s = v \cdot t$$

Швидкість (v) – знаходиться діленням відстані на час

$$v = s : t$$

Час (t) – це частка від ділення відстані на швидкість

$$t = s : v$$

Розрізняють такі випадки задач на рух:

- об'єкт рухається з однієї точки в іншу;
- рух за течією або проти неї;
- рух двох об'єктів з одного пункту в інший з відставанням;
- рух двох об'єктів з одного пункту в протилежних напрямках;
- рух двох об'єктів назустріч одне одному;
- рух двох об'єктів в одному напрямі навздогін.

Відстань, на яку віддаляються об'єкти за одиницю часу, називають **швидкістю віддалення** ($v_{\text{від}}$)

У випадку руху двох об'єктів з одного пункту з відставанням $v_{\text{від}} = v_1 - v_2$ (якщо $v_1 > v_2$)

Через t годин між об'єктами буде відстань

$$s_{\text{від}} = v_{\text{від}} \cdot t = (v_1 - v_2) t$$

Якщо ж об'єкти одночасно почнуть рух з одного пункту і будуть рухатися в протилежних напрямках $v_{\text{від}} = v_1 + v_2$

$$s_{\text{від}} = v_{\text{від}} \cdot t = (v_1 + v_2) t$$

Відстань, на яку зближаються об'єкти за одиницю часу, називають *швидкістю зближення* ($v_{\text{збл}}$)

У випадку руху двох об'єктів назустріч одне одному $v_{\text{збл}} = v_1 + v_2$

$$s = v_{\text{збл}} \cdot t = (v_1 + v_2) t$$

Для прикладу розглянемо такі задачі:

Задача №1: Два автомобілі одночасно виїхали в одному напрямку. Швидкість першого автомобіля 60 км/год, швидкість другого 72 км/год. Яка відстань буде між автомобілями через 9 годин?

I спосіб

- 1) $60 \cdot 9 = 540$ (км) – відстань, яку проїде перший автомобіль за 9 год
- 2) $72 \cdot 9 = 648$ (км) – відстань, яку проїде другий автомобіль за 9 год
- 3) $648 - 540 = 108$ (км) – відстань між автомобілями через 9 годин

Відповідь: 108 км

II спосіб

- 1) $72 - 60 = 12$ (км/год) – швидкість віддалення двох автомобілів
- 2) $12 \cdot 9 = 108$ (км) – відстань між автомобілями через 9 годин

Відповідь: 108 км

Задача №2: Відстань між двома причалами 35 км. Скільки часу витратить теплохід на шлях по річці від одного причалу до іншого і назад, якщо власна швидкість теплохода 17 км/год, а швидкість течії річки – 3 км/год?

Розв'язання:

Запис умови

Рух теплохода	S, км	v, км/год	t, год
За течією річки	35	$v_{\text{власна}} + v_{\text{течії}}$	$S : v_{\text{за течією}}$
Проти течії річки	35	$v_{\text{власна}} - v_{\text{течії}}$	$S : v_{\text{проти течії}}$

- 1) $35 : (17 + 3) = 1,75$ (год) – час руху теплохода за течією річки
- 2) $35 : (17 - 3) = 2,5$ (год) – час руху теплохода проти течії річки
- 3) $1,75 + 2,5 = 4,25$ (год) – час, який витратить теплохід на шлях по річці від одного причалу до іншого і назад

Відповідь: 4,25 год

Задача №3: З пункту *A* у напрямі пункту *B*, відстань між якими 40 км, о 8 год. виїхав червоний автомобіль. Через 1 год. з пункту *B* назустріч йому виїхав жовтий автомобіль, який був у дорозі 4 год. Відстань між автомобілями 660 км. Знайти швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість червоного на 5 км/год більша ніж жовтого.

Розв'язання:

Нехай x км/год швидкість жовтого автомобіля.

	S , км	v , км/год	t , год
Червоний автомобіль	$5(x+5)$	$x+5$	$4+1=5$
Жовтий автомобіль	$4x$	x	4

За умовою відстань між автомобілями на початку руху 40 км, в кінці 660 км. Складаємо та розв'язуємо рівняння:

$$5(x+5) + 4x - 40 = 660;$$

$$5x + 25 + 4x - 40 = 660;$$

$$9x - 15 = 660;$$

$$9x = 660 + 15;$$

$$9x = 675;$$

$$x = 75.$$

Отже, швидкість жовтого автомобіля 75 км/год, тоді швидкість червоного автомобіля $75 + 5 = 80$ км/год.

Відповідь: 75 км/год; 80 км/год.

Задача №4: Літак виконав рейс між містами зі швидкістю 180 км/год. Якби він збільшив швидкість на 20 км/год, то міг би виконати рейс на 30 хвилин швидше. Знайти відстань між містами.

Розв'язання:

Нехай x год, час за який літак здійснив політ.

	S , км	v , км/год	t , год
Фактично	$180x$	180	x
При збільшені швидкості	$200(x - 0,5)$	$180 + 20 = 200$	$x - 0,5$

Складаємо та розв'язуємо рівняння:

$$200(x - 0,5) = 180x;$$

$$200x - 100 = 180x;$$

$$200x - 180x = 100;$$

$$20x = 100;$$

$$x = 5.$$

Отже, літак здійснив політ за 5 годин. Тоді, відстань між містами

$$180 \cdot 5 = 900 \text{ (км)}$$

Відповідь: 900 км.

Задача №5: Човен плыв 1,8 год за течією та 1,4 год проти. Шлях, який проплив човен за течією, виявився на 12,4 км більшим від шляху, який він проплив проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо швидкість човна в стоячій воді становить 15 км/год.

Розв'язання:

Нехай x км/год – швидкість течії. За умовою задачі шлях за течією на 12,4 км більший, ніж проти течії.

	S , км	v , км/год	t , год
За течією	$1,8(15 + x)$	$15 + x$	1,8
Проти течії	$1,4(15 - x)$	$15 - x$	1,4

Складаємо та розв'язуємо рівняння:

$$1,8(15 + x) - 1,4(15 - x) = 12,4;$$

$$27 + 1,8x - 21 + 1,4x = 12,4;$$

$$1,8x + 1,4x = 12,4 - 27 + 21;$$

$$3,2x = 6,4;$$

$$x = 6,4 : 3,2;$$

$$x = 2.$$

Отже, швидкість течії річки 2 км/год.

Відповідь: 2 км/год.

Задача №6: Турист пройшов дві ділянки шляху протягом 12 годин. На одній з ділянок він ішов зі швидкістю 4 км/год, а на іншій 5 км/год. Знайдіть довжину кожної ділянки, якщо середня швидкість туриста склала 4,75 км/год.

Розв'язання:

Нехай x год, час за який турист пройшов I ділянку. Середня швидкість туриста на всьому шляху склала 4,75 км/год.

$4,75 \cdot 12 = 57$ (км) – загальна відстань, яку пройшов турист.

	S, км	v, км/год	t, год
I ділянка	$4x$	4	x
II ділянка	$5(12 - x)$	5	$12 - x$

Складаємо та розв'язуємо рівняння:

$$4x + 5(12 - x) = 57;$$

$$4x + 60 - 5x = 57;$$

$$x = 3.$$

Отже, за 3 год турист пройшов I ділянку. Тоді

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ (км)} - \text{довжина I ділянки};$$

$$5(12 - 3) = 45 \text{ (км)} - \text{довжина II ділянки}.$$

Відповідь: 12 км; 45 км.

Задача №7: Велосипедист проїхав ділянку шосе зі швидкістю 18 км/год і ділянку ґрунтової дороги зі швидкістю 12 км/год. Усього він проїхав 78 км. Скільки часу велосипедист витратив на весь шлях, якщо по дорозі він їхав на 0,5 годин більше ніж по шосе?

Розв'язання:

Нехай x год, час який їхав велосипедист шосе. За умовою задачі весь шлях 78 км.

	S, км	v, км/год	t, год
шосе	$18x$	18	x
ґрунтівка	$12(x + 0,5)$	12	$x + 0,5$

Складаємо та розв'язуємо рівняння:

$$18x + 12(x + 0,5) = 78;$$

$$18x + 12x + 6 = 78;$$

$$30x = 72;$$

$$x = 2,4.$$

Отже, велосипедист їхав по шосе 2,4 години.

$2,4 + 0,5 = 2,9$ (год) – час, який велосипедист їхав по ґрунтівці

$2,9 + 2,4 = 5,3$ (год) – час, який витратив велосипедист на весь шлях

Відповідь: 5,3 години.

Задача №8: Автомобіль їхав 2 години зі швидкістю 66 км/год. Після цього йому залишилося проїхати відстань у 3 рази більшу, ніж та, що він уже проїхав. Яку відстань мав проїхати автомобіль?

Задача №9: Човен пройшов 1 км зі швидкістю 100 м/хв. За цей час плавець проплив 400 м. З якою швидкістю рухався плавець?

Задача №10: З двох селищ назустріч один одному виїхали два автобуси. Один автобус їхав зі швидкістю 45 км/год, а другий – 50 км/год. На якій відстані один від одного будуть автобуси через 1 годину? 3 години? 6 годин?

2.1.2. Задачі на відсотковій розрахунки

Відсотком (процентом) називають соту частину $\left(\frac{1}{100}\right)$ будь-якого числа (або числового значення величини).

Слово «процент» походить від латинського «*per cent*», що означає «на сто».

Для позначення відсотка (процента) використовують знак %:

$$1\% = \left(\frac{1}{100}\right) = 0,01$$

Знайти 1% від числа – значить знайти одну соту від числа.

Щоб перетворити відсотки у десятковий дріб, потрібно поділити число процентів на 100. А для того, щоб перетворити десятковий дріб у відсотки, треба його помножити на 100.

Розглядають три основних типи задач на відсотки:

- ◆ знаходження відсотків від числа

числа $m\%$ від числа a дорівнює $\frac{m \times a}{100\%}$;

- ◆ знаходження числа за відсотками

якщо $m\%$ від числа c дорівнює a , то число $C = \frac{a \times 100\%}{m}$;

- ◆ знаходження відсоткового відношення двох чисел m та n :

$$\frac{m}{n} \times 100\%.$$

Для прикладу розглянемо такі задачі:

Задача №1: Молоко містить 4% жиру. Скільки жиру містить 800 кг молока?

I спосіб

1) $800 : 100 = 8$ (кг) – 1% від загальної кількості молока

2) $8 \cdot 4 = 32$ (кг) – міститься жиру у 800 кг молока

Відповідь: 32 кг.

II спосіб

4% це $4 : 100$, тоді

$800 \cdot 4 : 100 = 32$ (кг) – міститься жиру у 800 кг молока

Відповідь: 32 кг.

Задача №2: Маса гуски 3 кг 200 г, що складає 40% від маси лебедя, а маса чайки 9% маси лебедя і 60% маси качки крякви. Визначити масу цих птахів.

Розв'язання:

3 кг 200 г = 3,2 кг;

40% = 0,4; 9% = 0,09; 60% = 0,6.

1) $3,2 : 0,4 = 8$ (кг) – маса лебедя

2) $8 \cdot 0,09 = 0,72$ (кг) – маса чайки

3) $0,72 : 0,6 = 1,2$ (кг) – маса качки крякви

Відповідь: 8 кг маса лебедя, 0,72 кг маса чайки та 1,2 кг маса качки крякви.

Задача №3: Руда містить 56% заліза. Скільки треба переробити руди, щоб одержати 28 тонн заліза?

Розв'язання:

1) $56 : 100 = 0,56$ (т) – міститься заліза в 1 тонні руди

2) $28 : 0,56 = 50$ (т) – руди необхідно переробити

Відповідь: 50 т.

Задача №4: Фермер минулого року збирав у середньому по 30 ц зернових з 1 га, а в цьому році – по 32 ц. На скільки відсотків зросла урожайність зернових у цьому році порівняно з минулим роком?

Розв'язання:

Фермер почав збирати на $32 - 30 = 2$ (ц) більше зернових.

30 ц – 100%

2 ц – x%

Складаємо пропорцію:

$$\frac{30}{2} = \frac{100}{x};$$

$$x = \frac{2 \cdot 100}{30} = 6 \frac{2}{3}$$

Відповідь: $6 \frac{2}{3} \%$

Задача №5: Бджоли за день принесли до вулика 2 кг меду. Наступного дня вони працювали краще і зібрали 2,5 кг меду. На скільки відсотків більше зібрали меду бджоли на другий день?

Розв'язання:

Нехай x – кількість відсотків, на яку збільшилася маса меду.

I день: 2 кг – 100%

II день: 2,5 кг – $(100 + x)\%$

Складаємо пропорцію:

$$\frac{2}{2,5} = \frac{100}{100 + x};$$

$$100 + x = \frac{2,5 \cdot 100}{2};$$

$$x = 125 - 100;$$

$$x = 25.$$

Отже, за другий день бджоли зібрали меду на 25% більше.

Відповідь: 25%.

Задача №6: Дівчинка сплела вінок з лісових квітів. У вінку було 15 дзвіночків, що становило 30% всіх квітів, а решта – ромашки. Скільки ромашок у вінку?

Розв'язання:

I спосіб

$$1) 30 : 100 = 0,3$$

$$2) 15 : 0,3 = 50$$

$$3) 50 - 15 = 35$$

Відповідь: 35 ромашок було у вінку.

II спосіб

Нехай у вінку було x ромашок, і за умовою вони становили 70 % усіх квітів у вінку, тоді запишемо умову:

$$x - 70\%$$

$$15 - 30\%$$

Складаємо пропорцію:

$$\frac{x}{15} = \frac{70}{30};$$

$$x = \frac{15 \cdot 70}{30} = 35$$

Відповідь: 35 ромашок було у вінку.

Задача №7: Перший сміттевоз вивіз 32 % сміття, другий – 35 %, а третій – решту 2,64 т. Скільки тонн сміття вивіз перший сміттевоз і скільки другий?

Розв'язання:

- 1) $100 - (32 + 35) = 33\%$ – вивіз третій сміттевоз
- 2) $2,64 : 0,33 = 8$ (т) – загальна маса вивезеного сміття
- 3) $8 \cdot 0,32 = 2,56$ (т) – вивіз перший сміттевоз
- 4) $8 \cdot 0,35 = 2,8$ (т) – вивіз другий сміттевоз

Відповідь: 2,56 т вивіз перший сміттевоз, 2,8 т – другий.

Задача №8: Сплав олова та свинцю містить 58 % олова. Скільки потрібно взяти олова, щоб виготовити сплав, який міститиме 3,36 кг свинцю?

Задача №9: Свіжі гриби містять 90 % води. Для сушіння взяли 12 кг грибів. Через деякий час вміст води в них складав 70 %. Якою стала маса грибів?

Задача №10: Сума трьох чисел становить 460, причому друге число складає 50 % від першого, а третє – 80 % від першого. Знайди ці числа.

2.1.3. Задачі на суміші, розчини та сплави

Задачі на суміші, розчини й сплави називають ще задачами на процентний вміст або концентрацію. Введемо основні поняття. Говорячи про суміші, розчини й сплави, будемо вживати термін «суміш» незалежно від її виду (тверда, рідка, газоподібна). Суміш складається з «чистої речовини» й «домішки».

Часткою a чистої речовини в суміші називається відношення кількості чистої речовини m у суміші до загальної кількості M суміші за умови, що вони виміряні однією й тією ж одиницею маси або об'єму: $a = m/M$. Звідси одержуємо $m = a \cdot M$, $M = m/a$.

Для прикладу розглянемо такі задачі:

Задача №1: Із свіжих груш виходить 18 % сушених. Скільки було взяти свіжих, щоб отримати 45 кг сушених?

Розв'язання:

- 1) Нехай 100 % становить вага свіжих груш
- 2) $45 : 18 \cdot 100 = 250$ (кг) – свіжих груш треба взяти

Відповідь : 250 кг

Задача №2: Свіжі гриби містять 90 % води, а сушені – 12 % води. Скільки сушених грибів отримають із 20 кг свіжих?

Розв'язання:

Свіжі та сушені гриби містять воду та суху речовину (мікроелементи, клітковина, білки, жири, вуглеводи та інше).

Нехай свіжих грибів взяли 100%, що становить 20 кг за умовою задачі. Тоді сухої речовини вони містять

$$100 - 90 = 10 (\%), \text{ або } 20 : 100 \cdot 10 = 2 (\text{кг}).$$

При висиханні свіжі гриби втрачають вологу, а зміст сухої речовини не змінюється. Отже нехай тепер 100% становить вага сушених грибів, із яких 12% - це вода, тоді

$$100 - 12 = 88 (\%) \text{ це – суха речовина грибів.}$$

Знайдемо вагу сушених грибів :

$$2: 88 \cdot 100 = 2 \text{ кг}$$

Відповідь : 2 кг.

Задача №3: Сплав містить 83% алюмінію, 10% цинку і 7% олова, причому цинку на 2,7г більше ніж олова. Чому дорівнює маса сплаву?

Розв'язання:

I спосіб

Нехай 1% становить x грам ($x > 0$), тоді в сплаві цинку – $10x$ грам, олова – $7x$ грам.

За умовою цинку було більше, ніж олова на $(10x - 7x)$ г або на 2,7 г.

Складаємо і розв'язуємо рівняння:

$$10x - 7x = 2,7;$$

$$x = 0,9$$

Отже, 1% становить 0,9г, а маса всього сплаву 100%.

$$0,9 \cdot 100 = 90\text{г} - \text{маса сплаву.}$$

Відповідь: 90 грам.

II спосіб

1) Знайдемо, на скільки відсотків більше у сплаві цинку ніж олова.

$$10\% - 7\% = 3\%$$

Отже, 3% становить 2,7г.

2) $2,7:0,3 = 90\text{г} - \text{маса сплаву.}$

Відповідь: 90 грам.

Задача №4: У воді розчинили 180г солі й одержали 12-відсотковий розчин солі. Скільки грамів води використали для приготування розчину?

Розв'язання:

I спосіб

180г солі становлять 12%;

$180:12 = 15\text{г} - \text{становить } 1\%.$

Маса всього розчину – 100%, $15 \cdot 100 = 1500\text{г}$ – маса всього розчину,
 $1500 - 180 = 1320\text{г}$ – маса води.

Відповідь: 1320 г

II спосіб

180 – 12%

x – 100%

Складемо пропорцію:

$$\frac{180}{x} = \frac{12}{100},$$

$$x = 1500,$$

$$1500 - 180 = 1320 \text{ (г)} - \text{ маса води}$$

Відповідь: 1320 г

Задача №5: Скільки грамів 45-відсоткового розчину солі можна дістати із 300г рідини, що містить 30% солі?

Розв'язання:

$300 \cdot 0,3 = 90 \text{ (г)}$ – маса солі у 30-ти відсотковому розчині.

Частина рідини випаровується, а маса солі залишається такою ж, тобто в новому розчині 90г солі становлять 45%, тоді

$90:45 \cdot 100 = 200 \text{ (г)}$ – маса 45-ти відсоткового розчину.

Відповідь: 200 г

Задача №6: У 800 г розчину міститься 50 г солі. Скільки солі в 240 г розчину?

Розв'язання:

Складаємо пропорцію:

800 г розчину – 50 г солі,

240 г розчину – x г солі.

У цій пропорції дві величини знаходяться у прямо пропорційній залежності, тобто із збільшенням однієї величини збільшується і друга величина.

Складаємо та розв'язуємо рівняння:

$$800 : 240 = 50 : x;$$

$$800x = 240 \cdot 50,$$

$$x = 12\,000 : 800,$$

$$x = 15.$$

Відповідь: 15 г солі.

Задача №7: 26 кг рису містять 19,5 кг крохмалю. Знайти відсотковий вміст крохмалю в рисі.

Розв'язання:

Складаємо відсоткову пропорцію:

$$26 \text{ кг рису} - 100 \%,$$

$$19,5 \text{ кг крохмалю} - x \%.$$

Складаємо та розв'язуємо рівняння:

$$26 : 19,5 = 100 : x,$$

$$26x = 19,5 \cdot 100,$$

$$x = 1950 : 26,$$

$$x = 75.$$

Відповідь: 75 %.

Задача №8: Із 150 кг свіжих вишень одержали 36 кг сушених. Скільки відсотків сушених вишень виходить із свіжих?

Розв'язання:

Складаємо відсоткову пропорцію:

$$150 \text{ кг свіжих вишень} - 100 \%,$$

$$36 \text{ кг сушених вишень} - x \%.$$

Складаємо та розв'язуємо рівняння:

$$150:36=100:x,$$

$$150x = 36 \cdot 100,$$

$$x = 3600 : 150,$$

$$x = 24.$$

Відповідь: 24 %.

Задача №9: Скільки треба взяти картоплі, щоб отримати 100 кг крохмалю, якщо з 30 кг картоплі виходить 5,4 кг крохмалю.

Задача №10: У 85 кг залізної руди міститься 51 кг заліза. Скільки відсотків заліза міститься у залізній руді?

Задача №11: Яблука при сушінні втрачають 84% своєї маси. Скільки треба взяти свіжих яблук, щоб одержати 64 кг сушених.

2.1.4. Задачі на спільну роботу і продуктивність праці

У розв'язанні цих задач велику роль відіграють такі величини: частина всієї роботи, яку виконує робітник (бригада, машина) за одиницю часу; час, який було витрачено на роботу; частина роботи, яку було виконано.

Для прикладу розглянемо такі задачі:

Задача №1: Одна бригада виконує норму за 8 год, друга – за 6 год, третя за – за 5 год. Працюючи разом, бригади виконали 118 виробів. Скільки виробів виготовила кожна бригада?

Розв'язання:

Нехай перша, друга і третя бригади виготовили відповідно x , y , z виробів. Кількість виробів, виготовлених однією бригадою, обернено пропорційна кількості годин, за які вона виконує норму. Отже,

$$x = \frac{1}{8}t, \quad y = \frac{1}{6}t, \quad z = \frac{1}{5}t.$$

$$\frac{1}{8}t + \frac{1}{6}t + \frac{1}{5}t = 118,$$

$$t = 240,$$

$$x = \frac{1}{8} \cdot 240 = 30,$$

$$y = \frac{1}{6} \cdot 240 = 40,$$

$$z = \frac{1}{5} \cdot 240 = 48.$$

Відповідь: Перша бригада виконала 3, друга – 40, третя – 48 виробів.

Задача №2: Один трактор може зорати поле за 20 год, другий за 30 год. За скільки годин вони можуть зорати це поле працюючи разом.

Розв'язання:

Оскільки розмір поля в задачі невідомий, тоді величину поля приймаємо за одиницю. Якщо перший трактор може зорати поле за 20 годин, то за одну годину він зоре у 20 разів менше, тобто $1:20=1/20$ частини поля. Другий трактор може зорати все поле за 30 годин, отже за одну годину він зоре в 30 разів менше, $1:30=1/30$ частини поля. А працюючи разом вони зорють за одну годину:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{3}{60} + \frac{2}{60} = \frac{1}{12}$$

частини поля. Щоб взнати за скільки годин вони зорють це поле працюючи разом треба

$$1 : \frac{1}{12} = 12 \text{ (год)}$$

Відповідь: 12 год.

Задача №3: У зв'язку з підвищенням продуктивності праці час, який потрібний для виконання певної роботи, зменшився на $28\frac{4}{7}\%$. На скільки відсотків підвищилась продуктивність праці?

Розв'язання:

Якщо прийняти час до його зменшення 100%, то після зменшення він становитиме:

$$100\% - 28\frac{4}{7}\% = 71\frac{3}{7}\%$$

Час виконання роботи	Продуктивність праці
100%	100%
$71\frac{3}{7}\%$	x

Продуктивність праці та час виконання певної роботи - величини обернено пропорційні: x буде у стільки разів більшим від 100, у скільки разів 100 більше від $71\frac{3}{7}$.

Складемо пропорцію:

$$x : 100 = 100 : 71\frac{3}{7},$$

$$x = \frac{100 \cdot 100 \cdot 7}{500} = 140$$

Отже, продуктивність праці збільшилась на 40%.

Задача №4: Перша друкарка може виконати всю роботу, працюючи сама, за 6 год., а друга – за 8 год. Спочатку 1 год. працювала друга, потім ще 2 год. вони працювали разом, після чого перша друкарка закінчувала роботу сама. Скільки часу перша друкарка закінчувала роботу?

Запис умови

Друкарка	Може виконати роботу, год.	Продуктивність праці	Працювали, год.	Зробили
I	6	$\frac{1}{6}$	$2+x$	$\frac{1}{6}(2+x)$
II	8	$\frac{1}{8}$	$1+x$	$\frac{1}{8} \cdot 3$

Розв'язання:

$$\frac{1}{6}(2+x) + \frac{3}{8} = 1,$$

$$\frac{1}{6}x = \frac{7}{24},$$

$$x = 1\frac{3}{4} \text{ (год.)}$$

Відповідь: 1 год. 45 хв

Задача №5: Комбайнер перевиконав завдання на 15% і зібрав зернові з площі 230 га. Скільки гектарів за планом йому треба було обробити?

Розв'язання:

1) Нехай 100 % – це план, тоді комбайнер виконав $100 + 15 = 115$ (%) від плану.

2) $230 : 115 \cdot 100 = 200$ (га) – треба було обробити за планом.

Відповідь: 200 га

Задача №6: Перший робітник може виготовити замовлену партію деталей за 10 год., а другий таку саму партію – за 8 год. Спочатку вони виготовили 20 деталей, а потім перший робітник 2 год. працював сам, після чого вони ще 3 год. працювали разом. Скільки деталей вони зробили?

Запис умови

Робітники	Може виконати всю роботу, год.	Продуктивність праці	Працювали, год.	Виготовили деталей
I	10	$\frac{1}{10}$	(2 + 3)	$20 + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{10}x \cdot 5 \\ \frac{1}{8}x \cdot 3 \end{array} \right\} x$
II	8	$\frac{1}{8}$	3	

Розв'язання:

$$20 + \frac{1}{10}x \cdot 5 + \frac{3}{8}x = x,$$

$$20 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x = x,$$

$$\frac{1}{8}x = 20,$$

$$x = 160 \text{ (деталей)}$$

Відповідь: 160 деталей виготовили робітники.

Задача №7: Учні трьох класів посадили 340 дерев. Учні одного класу посадили 25 % усіх дерев, учні другого класу посадили 35 % дерев, а учні третього класу - решту. Скільки дерев посадили учні третього класу?

Розв'язання:

1) Скільки відсотків дерев посадили учні двох класів?

$$25 \% + 35 \% = 60 \%$$

2) Скільки відсотків дерев посадили учні третього класу?

$$100 - 60 \% = 40 \%$$

3) Скільки дерев посадили учні третього класу?

$$40 \% = 0,4;$$

$$340 \cdot 0,4 = 136 \text{ (дер.)}$$

Відповідь. 136 дерев.

Задача №8: Один фонтан наповнює басейн за $2\frac{1}{2}$ год, а другий за $3\frac{3}{4}$

год. За який час наповняться басейн обидва фонтани разом?

Задача №9: За одну годину верстат-автомат виготовив 300 деталей. Після реконструкції він почав виготовляти за годину 375 таких самих деталей. На скільки відсотків підвищилась продуктивність праці?

Задача №10: Через першу трубу басейн може наповнюватися водою за 3 год., а через другу - за 6 год. Спочатку 2 год. була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн?

2.2. Методика навчання учнів 5 – 6 класів складати текстові задачі

У 5 – 6-х класах основним завданням на даному етапі навчання є формування вміння розв'язувати задачі без ускладнень такого типу як: складання аналогічних задач, складання обернених задач до даної, складання задач узагальнення та конкретизації.

Розв'язування задач з математики викликає труднощі у багатьох учнів. Одним із способів подолання даної проблеми є навчання учнів складати задачі. Останнім часом приділяється увага роботі над розв'язаною задачею. І.В. Шорніковою [52, с.21] пропонуються наступні види робіт:

1. Введення в умову задачі нових даних.
2. Зміна питання без зміни умови.
3. Зміна умови без зміни питання.
4. Зміна умови і питання.
5. Порівняння змісту і рішення цього завдання з утриманням та рішенням іншої задачі.
6. Дослідження рішення (Скільки способів вирішення має задача? За яких умов вона не мала б рішення? Чи можливі інші методи рішення?).
7. Обґрунтування правильності рішення (перевірка рішення задачі складанням оберненої задачі).

Деякі з перерахованих видів робіт передбачають вміння дітей складати задачі, іншими словами формулювати деякий новий текст.

Б.П. Ердієв [16, с.180] розглядає складання задач учнями, як один з основних шляхів розвитку творчого мислення учнів на заняттях з математики.

«Сам факт створення нової задачі, – пише С. Кожухов, – це, безсумнівно, акт творчості, який є потужним стимулом розвитку пізнавальної активності учнів». [23, с.4]

Побачити проблему і сформулювати її в питанні буває інколи важче, ніж її розв'язати.

Для складання задач, на думку Н.А. Матвєєвої [28, с.45] учню необхідно мати підставу, визначену установку на її складання.

Можливі установки для складання сюжетних задач:

- ◆ задача має бути по якомусь розділу або темі курсу математики, в ній має бути сюжет певного виду (на роботу, рух тощо), вона повинна бути простою або складною;
- ◆ задача має містити певний об'єкт, дані задачі повинні бути числами певного виду, вона повинна містити питання або співвідношення певного виду;
- ◆ задача повинна мати певний розв'язок або ж вона не має розв'язку, чи розв'язок задачі має бути нескінченним числом;
- ◆ задача має бути аналогічною до даної або оберненою.

Учитель, залучаючи учнів до самостійного складання задач, повинен провести роботу з підготовки школярів до нового виду діяльності.

Вправи зі складання та перетворення задач, зазначає П.М. Ерднієв [16, с.185], є надзвичайно ефективними для узагальнення способу їх вирішення:

- ✓ Організація роботи з готовими задачами: учні спостерігають і фіксують певні особливості побудови і мови задач, порівнюють задачі за їх суттєвими і несуттєвими елементами, знайомляться з задачами, що мають невизначені і перевизначені розв'язки.
- ✓ Організація роботи з перетворення готових задач.
- ✓ Складання елементів задачі, коли учні доповнюють текст задачі відсутніми елементами так, щоб задача мала певний розв'язок.
- ✓ Складання простих задач, коли залежність величин у складеній задачі виражається графічно, таблицею, рівнянням. Така робота допоможе в подальшому перейти до складання складних задач, коли суттєве значення має розчленування цього процесу на окремі етапи.

Види вправ зі складання та перетворення задач, на думку П. М. Ерднієв:

1. Постановка питання до даної умови задач або зміна даного питання. Такі вправи допомагають узагальненню знань про зв'язки між даними і потрібним, тому що при цьому діти встановлюють, що можна дізнатися за певними даними.
2. Складання умови задачі з даного питання. При виконанні таких вправ учні встановлюють, які дані треба мати, щоб знайти шукане, а це так само призводить до узагальнення знань зв'язків між даними і потрібним.
3. Підбір числових даних.
4. Складання аналогічних задач.
5. Складання обернених задач.
6. Складання задач по їхньому ілюстрацій. Вони допомагають дітям побачити задачу в даній конкретній ситуації.
7. Складання задач з даного розв'язку. Пропонуючи скласти задачі, треба спочатку проаналізувати даний розв'язок задачі. В окремих випадках доцільно підказати дітям сюжет або ж назвати величини

Вправи зі складання задач є надзвичайно ефективними для узагальнення способу їх розв'язування, а також сприяють логічному мисленню і зміцненню зв'язку навчання математики з життям.

2.2.1. Складання аналогічних задач

Аналогічними називаються задачі, що мають однакову математичну структуру. Аналогічні задачі треба складати після розв'язку даної готової задачі, пропонуючи при цьому, коли можливо, змінювати не тільки сюжет і числа, але і величини.

Наприклад розглянемо такі задачі:

Задача 1. З двох селищ одночасно назустріч один одному виїхали велосипедист і пішохід. Пішохід рухався зі швидкістю 3 км/год, що в 4 рази

менше швидкості велосипедиста. Знайдіть відстань між селищами, якщо велосипедист і пішохід зустрілись через 3 год після початку руху.

Розв'язання

I спосіб

- 1) $3 \cdot 4 = 12$ (км/год) – швидкість велосипедиста;
- 2) $12 + 3 = 15$ (км/год) – швидкість наближення;
- 3) $15 \cdot 3 = 45$ (км) – відстань між селищами.

II спосіб

- 1) $3 \cdot 4 = 12$ (км/год) – швидкість велосипедиста;
- 2) $3 \cdot 3 = 9$ (км) – пройшов пішохід;
- 3) $12 \cdot 3 = 36$ (км) – проїхав велосипедист;
- 4) $36 + 9 = 45$ (км) – відстань між селищами.

Відповідь: 45 км.

Складемо і розв'яжемо аналогічну задачу:

Задача 2 (аналогічна): З двох селищ одночасно назустріч один одному виїхали велосипедист і пішохід. Пішохід рухався зі швидкістю 5 км/год, що в 2 рази менше швидкості велосипедиста. Знайдіть відстань між селищами, якщо велосипедист і пішохід зустрілись через 4 год після початку руху.

Розв'язання

I спосіб

- 4) $5 \cdot 2 = 10$ (км/год) – швидкість велосипедиста;
- 5) $10 + 5 = 15$ (км/год) – швидкість наближення;
- 6) $15 \cdot 4 = 60$ (км) – відстань між селищами.

II спосіб

- 5) $5 \cdot 2 = 10$ (км/год) – швидкість велосипедиста;
- 6) $5 \cdot 4 = 20$ (км) – пройшов пішохід;
- 7) $10 \cdot 4 = 40$ (км) – проїхав велосипедист;
- 8) $20 + 40 = 60$ (км) – відстань між селищами.

Відповідь: 60 км.

Задача 3: Під час сушіння сливи втрачають 88% своєї маси. Скільки треба взяти свіжих слив, щоб отримати 30 кг сушених?

Розв'язання

x кг – свіжих слив,

$0,88 \cdot x$ – втрачається під час сушіння слив.

$$x - 0,88x = 30$$

$$0,12x = 30$$

$$x = 30 \div 0,12$$

$$x = 250 \text{ (кг)}$$

Відповідь: 250 кг.

Задача 4 (аналогічна): Під час сушіння груш втрачають 60% своєї маси. Скільки треба взяти свіжих груш, щоб отримати 10 кг сушених?

Розв'язання

x кг – свіжих груш,

$0,6 \cdot x$ – втрачається під час сушіння груш.

$$x - 0,6x = 10$$

$$0,4x = 10$$

$$x = 10 \div 0,4$$

$$x = 25 \text{ (кг)}$$

Відповідь: 25 кг.

Задача 5: Один комбайнер скошив 30% пшеничного поля, другий – 40% решти, а третій – на 28 га більше ніж другий. Знайдіть площу всього поля.

Розв'язання

x га – площа всього поля,

$0,3 \cdot x$ (га) – скошив I комбайнер,

$x - 0,3x = 0,7x$ (га) – решта,

$0,4 \cdot 0,7x = 0,28x$ (га) – скошив II комбайнер,

$(0,28x + 28)$ (га) – скошив III комбайнер.

$$0,3x + 0,28x + 0,28x + 28 = x$$

$$0,86x - x + 28 = 0$$

$$-0,14x = -28$$

$$x = 200 \text{ (га)}$$

Відповідь: 200 га.

Задача 6 (аналогічна): Один трактор скошив 40% пшеничного поля, другий – 20% решти, а третій – на 12 га більше ніж перший. Знайдіть площу всього поля.

Розв'язання

x га – площа всього поля,

$0,4 \cdot x$ (га) – скошив I трактор,

$x - 0,4x = 0,6x$ (га) – решта,

$0,2 \cdot 0,6x = 0,12x$ (га) – скошив II трактор,

$(0,4x + 12)$ (га) – скошив III трактор.

$$0,4x + 0,12x + 0,4x + 12 = x$$

$$0,92x - x + 12 = 0$$

$$-0,08x = -12$$

$$x = 150 \text{ (га)}$$

Відповідь: 150 га.

Розв'яжіть та складіть аналогічну задачу:

Задача 1. Морська вода містить $3\frac{2}{5}\%$ солі. Скільки розчинено солі в 10 кг морської води?

Задача 2. Катер ішов $\frac{3}{5}$ год за течією і $1\frac{1}{2}$ год проти течії річки. Яку відстань він пройшов за весь цей час, якщо швидкість катера в стоячій воді $24\frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість течії $2\frac{1}{2}\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Задача 3. Бригада косарів за перший день скошила половину луки і ще 2 га, а за другий – 25% частини, що залишилися, і решту – 6 га. Знайдіть площу луки.

2.2.2. Складання обернених задач до даної

Складання обернених задач, тобто складання задач, в яких «за таких самих умовах одне з даних першої задачі служить шуканим у другій і шукане перший входить в число даних другій». При складанні обернених задач зв'язки між числовими даними не повинні змінюватися.

Розглянемо алгоритм складання оберненої задачі до даної:

- 1) сформулювати задачу в умовній формі;
- 2) виділити умову і вимогу задачі;
- 3) виділити роз'яснювальну частину і відокремити її від умови;
- 4) залишити роз'яснювальну частину на місці, а умову (частина умови) і вимога задачі поміняти місцями;
- 5) сформулювати отриману задачу.

Наприклад розглянемо такі задачі:

Задача 1: Дві бригади, працюючи разом, виконують певне завдання за 20 робочих днів, перша бригада – за 36 робочих днів. За який час це завдання могла б виконати друга бригада?

Розв'язання

Хай за x днів виконує роботу друга бригада, вся робота умовно – 1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{36} &= \frac{1}{20} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{20} - \frac{1}{36} \\ \frac{1}{x} &= \frac{4}{180} = \frac{1}{45} \\ x &= 45\end{aligned}$$

Відповідь: за 45 днів.

Задача 2 (обернена): Дві бригади, працюючи разом, виконують певне завдання за 20 робочих днів, друга бригада – за 45 робочих днів. За який час це завдання могла б виконати перша бригада?

Розв'язання

Хай за x днів виконує роботу перша бригада, вся робота умовно – 1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{45} &= \frac{1}{20} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{20} - \frac{1}{45} \\ \frac{1}{x} &= \frac{25}{900} = \frac{1}{36} \\ x &= 36\end{aligned}$$

Відповідь: за 36 днів.

Задача 3 (обернена): Дві бригади, працюючи разом, виконують певне завдання. Перша бригада виконала завдання – за 36 робочих днів, а друга – за 45 робочих днів. За який час це завдання могли б виконати дві бригади?

Розв'язання

Хай за x днів виконують роботу дві бригади, вся робота умовно – 1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{36} + \frac{1}{45} &= \frac{1}{x} \\ \frac{9}{180} &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{20} &= \frac{1}{x} \\ x &= 20\end{aligned}$$

Відповідь: за 20 днів.

Задача 4: З двох міст, відстань між якими 1008 км, виїхали назустріч одна одній дві машини і зустрілись через 8 год після початку руху. Швидкість однієї машини 70 км/год. Знайдіть швидкість другої.

Розв'язання

x км/год – швидкість другої машини.

$$(x + 70) \cdot 8 = 1008$$

$$8x + 560 = 1008$$

$$8x = 448$$

$$x = 56 \text{ км/год}$$

Відповідь: 56 км/год

Складаємо варіанти нових задач:

Задача 5: З двох міст вирушили назустріч одна одній дві машини зі швидкостями 70 км/год і 56 км/год. Знайдіть відстань між містами, якщо машини зустрілись через 8 год.

Розв'язання

$$1) 70 \cdot 8 = 560 \text{ (км)}$$

$$2) 56 \cdot 8 = 448 \text{ (км)}$$

$$3) 560 + 448 = 1008 \text{ (км)}$$

Відповідь: 1008 км.

Задача 6: З двох міст виїхали назустріч один одному 2 автомобілі зі швидкостями 70 км/год і 56 км/год. Через який час автомобілі зустрінуться, якщо відстань між містами 1008 км?

Розв'язання

Нехай через x год зустрінуться дві машини.

$$(56 + 70) \cdot x = 1008$$

$$126x = 1008$$

$$x = 1008 : 126$$

$$x = 8 \text{ (год)}$$

Відповідь: 8 год.

Задача 7: З двох міст, відстань між якими 1008 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі і зустрілись через 8 год. Знайдіть швидкості автомобілів, якщо швидкість одного з них на 14 км/год більша швидкості другого.

Розв'язання

x км/год – швидкість першої машини,

$x + 14$ км/год – швидкість другої машини.

$$1) (x + x + 14) \cdot 8 = 1008$$

$$(2x + 14) \cdot 8 = 1008$$

$$16x + 112 = 1008$$

$$16x = 1008 - 112$$

$$16x = 896$$

$$x = 896 : 16$$

$x = 56$ км/год – швидкість першої машини

2) $56 + 14 = 70$ км/год – швидкість другої машини

Відповідь: 56 км/год, 70 км/год.

Розв'яжіть та складіть обернену задачу:

Задача 1. З двох станцій, відстань між якими 320 км, виходять одночасно назустріч один одному два поїзди: один з швидкістю 60 км за годину, а другий з швидкістю 58 км за годину. На якій відстані один від одного будуть поїзди через 2 год після виходу?

Задача 2. З одного міста одночасно в протилежних напрямках виїхали автомобіль і автобус. Через 5 год після початку руху відстань між ними становила 595 км. Швидкість руху автомобіля була 65 км/год. З якою швидкістю рухався автобус?

Задача 3. Один кухар може зліпити 100 вареників за 40 хв, а другий – за 1 год. За який час можуть зліпити 100 вареників обидва кухара, працюючи разом?

Задача 4. Після того як учень витратив $\frac{2}{9}$ усіх своїх грошей, у нього залишилось 2.1 грн. Скільки грошей в учня було спочатку?

Задача 5. Після того, як тракторист зорав 12% усього поля, незораним залишилося 110 га. Знайдіть площу всього поля.

2.2.3. Складання задачі за допомогою узагальнення та конкретизації

Розглянемо алгоритми:

Складання задачі за допомогою конкретизації даної задачі:

- 1) визначити дані задачі;
- 2) ввести додаткові видові властивості даних;
- 3) з'ясувати, при введенні яких додаткових видових властивостей задача має розв'язок;
- 4) сформулювати і розв'язати задачу з введеними видовими властивостями.

Складання задачі за допомогою узагальнення даної задачі:

- 1) зафіксувати всі властивості і зв'язки об'єктів задачі;
- 2) відділити суттєві властивості і зв'язки об'єктів задачі від несуттєвих;
- 3) намагатись усунути властивості, але при цьому враховувати, що
 - а) при усуненні одних ознак задача може зовсім зникнути;
 - б) при усуненні других задача може ускладнитися;
 - в) при усуненні третіх може з'явитись більш проста задача;
- 4) сформулювати узагальнену задачу.

Наприклад розглянемо такі задачі:

Задача 1: Відстань між автомобілями 345 км. На якій відстані вони будуть знаходитися через дві години, якщо швидкість одного 72 км /год., а другого – 68 км /год, і вони одночасно виїдуть назустріч один одному?

Розв'язання

1 спосіб.

- 1) $72 \cdot 2 = 144$ (км) – відстань, яку проїде 1-й автомобіль за 2 години.
- 2) $68 \cdot 2 = 136$ (км) – відстань, яку проїде 2-й автомобіль за 2 години.

3) $144 + 136 = 280$ (км) – на таку відстань автомобілі наблизяться один до одного за 2 години.

4) $345 - 280 = 145$ (км) – відстань між автомобілями через 2 години.

Відповідь: 145 км.

2 спосіб.

1) $72 + 68 = 140$ (км/год) – швидкість зближення автомобілів.

2) $140 \cdot 2 = 280$ (км) – на таку відстань автомобілі наблизяться один до одного за 2 години.

3) $345 - 280 = 145$ (км) – на такій відстані один від одного будуть автомобілі через 2 години.

Відповідь: 145 км.

Це є задача конкретизації, складемо задачу узагальнення.

Задача 2 (узагальнення): Відстань між автомобілями S км. На якій відстані вони будуть знаходитися через дві години, якщо швидкість одного A км /год., а другого – B км /год, і вони одночасно виїдуть назустріч один одному?

Розв'язання

1 спосіб.

1) $A \cdot 2 = 2A$ (км) – відстань, яку проїде 1-й автомобіль за 2 години.

2) $B \cdot 2 = 2B$ (км) – відстань, яку проїде 2-й автомобіль за 2 години.

3) $2A + 2B = 2(A + B)$ (км) – на таку відстань автомобілі наблизяться один до одного за 2 години.

4) $S - 2(A + B)$ (км) – відстань між автомобілями через 2 години.

Відповідь: $S - 2(A + B)$ км.

2 спосіб.

1) $A + B$ (км/год) – швидкість зближення автомобілів.

2) $(A + B) \cdot 2$ (км) – на таку відстань автомобілі наблизяться один до одного за 2 години.

3) $S - 2(A+B)$ (км) – на такій відстані один від одного будуть автомобілі через 2 години.

Відповідь: $S - 2(A+B)$ км.

Задача 3: З двох міст, відстань між якими S км, виїхали назустріч два велосипедиста і зустрілись через t год після початку руху. Швидкість одного велосипедиста V км/год. Знайдіть швидкість другого.

Розв'язання

1) $S:t$ (км/год) – швидкість двох велосипедистів;

2) $\frac{S}{t} - V = \frac{S-tV}{t}$ (км/год) – швидкість другого велосипедиста.

Відповідь: $\frac{S-tV}{t}$ км/год

Це є задача узагальнення, складемо задачу конкретизації.

Задача 4 (конкретизації): З двох міст, відстань між якими 80 км, виїхали назустріч два велосипедиста і зустрілись через 4 год після початку руху. Швидкість одного велосипедиста 7 км/год. Знайдіть швидкість другого.

Розв'язання

1. Спосіб

x км/год – швидкість другого велосипедиста.

$$(x + 7) \cdot 4 = 80$$

$$x + 7 = 20$$

$$x = 20 - 7$$

$$x = 13 \text{ км/год}$$

Відповідь: 13 км/год

2. Спосіб

$$1) 80:4=20 \text{ (км/год)}$$

$$2) 20 - 7 = 13 \text{ (км/год)}$$

Відповідь: 13 км/год

Розв'яжіть та складіть задачі за допомогою узагальнення та конкретизації:

Задача 1. Автобус рухався з точки А в точку В зі швидкістю 40 км/год , а в зворотньому напрямку швидкість руху автобуса становила 50 км/год . Відстань між точками А і В дорівнює 200 км. Знайти середню швидкість автобуса.

Задача 2. З двох селищ одночасно назустріч один одному виїхали велосипедист і пішохід. Пішохід рухався зі швидкістю $A \text{ км/год}$, а швидкості велосипедиста $B \text{ км/год}$. Знайдіть відстань між селищами, якщо велосипедист і пішохід зустрілись через t год після початку руху.

2.3. Організація, проведення і результати педагогічного експерименту

Предметом педагогічного експерименту було вивчення ефективності методики розв'язування і складання математичних задач.

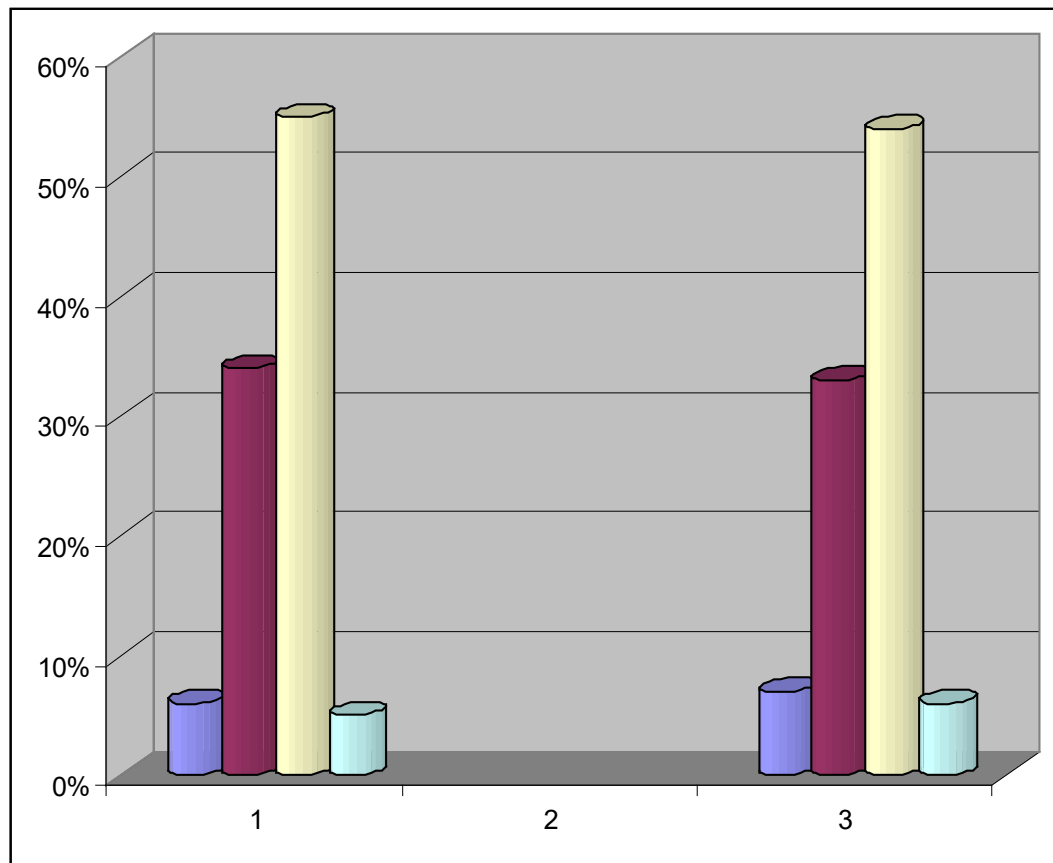
Педагогічний експеримент проводився під час проходження педагогічної практики. Для експерименту було обрано два паралельних класи: клас 6-А – експериментальний, а клас 6-Б – контрольний. В експериментальному класі запроваджувалась методика розв'язування і складання математичних задач, у контрольному класі навчання проводилось за традиційною методикою. Для учнів експериментального класу було проведено уроки, на яких більше уваги приділялося розв'язуванню текстових задач табличним способом, методика розв'язування яких подана вище. Задуми та ідеї, які потрібно було відобразити під час уроків, попередньо були обговорені з учителями математики та учителями інших предметів. На останньому уроці вивчення даної теми було проведено контрольний тест по темі «Розв'язування текстових задач у 6-му класі» (сам тест, вправи і відповіді до якого подані в Додатку 1.).

Порівняння експериментального та контрольного класів здійснювалось на основі тематичної атестації, яка була проведена в обох класах.

Таблиця 2.3.1.

Класи	Рівні засвоєння знань			
	високий	достатній	середній	низький
Експериментальний 6-А	6%	34%	55%	5%
Контрольний 6-Б	7%	33%	54%	6%

Для кращої наочності побудуємо гістограму.



Під час проведення уроків учні виявляли інтерес до матеріалу, намагались самостійно розв'язувати і складати задачі, опрацьовували додаткову літературу. Деякі учні зробили для себе відкриття, що вони можуть самостійно досягнути успіхів у навчанні при наполегливій праці над

собою і творчому підході до матеріалу. На останньому занятті було проведено контрольну роботу в обох класах (див. Додаток № 1: Тести).

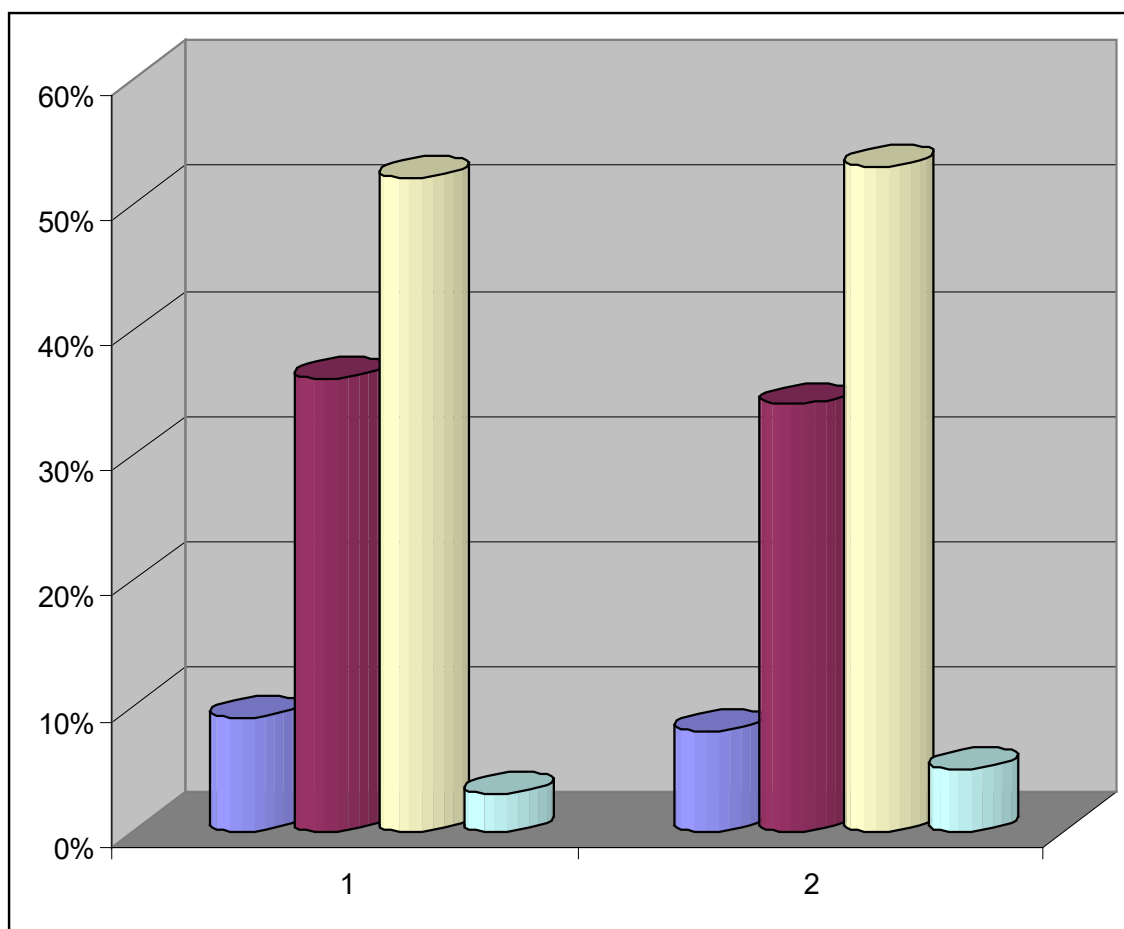
Результати експерименту:

Рівень знань учнів, які приймали участь в експерименті при проведенні уроків висвітлені в наступній таблиці.

Таблиця 2.3.2.

Класи	Рівні засвоєння знань			
	високий	достатній	середній	низький
Експериментальний	9%	36%	52%	3%
Контрольний	8%	34%	53%	5%

Побудуємо гістограму.



Якщо порівняти між собою результати до і після проведення експерименту, то з впевненістю можна сказати, що уроки у експериментальному класі не пройшли дарма, учні одержали глибокі знання по даній темі в порівнянні із знаннями, які в них були до проведення уроків. Наведені статистичні дані переконливо доводять ефективність методики реалізації міжпредметних зв'язків при викладанні математики в основній школі.

Здійснена нами експериментальна перевірка запропонованого змісту і методики проведення уроків, спостереження за діяльністю учнів, бесіди з вчителями та учнями дозволили зробити висновок про правильність обрання форм і методів, використаних під час проведення уроків.

ВИСНОВКИ

Математика має широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості, розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, формування вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, моделювати ситуації та ін.

Математика є засобом вивчення фізики, хімії, інформатики та обчислювальної техніки, астрономії, біології, загально-технічних і спеціальних дисциплін мовою техніки, а розвинене логічне мислення сприяє засвоєнню гуманітарних предметів. Практичні вміння і навички з математики необхідні для майбутньої діяльності школярів.

Важливу роль у навчанні математики відіграють задачі, які підвищують інтерес до вивчення математики.

Навчальні математичні задачі є ефективним та часто незамінним засобом засвоєння учнями понять і методів шкільного курсу математики, взагалі математичних теорій. Розв'язуючи математичну задачу учень пізнає багато нового: знайомиться з новою ситуацією, описаною в задачі, із застосуванням математичної теорії до її розв'язування, пізнає новий метод та нові теоретичні розділи математики. Інакше кажучи, під час розв'язування математичних задач учень набуває нових знань, підвищує свою математичну освіту, розвиває логічне мислення.

Отже, узагальнюючи зазначимо:

- вміння розв'язувати математичні задачі має бути синтезом певних знань про задачі та їх розв'язування (елементи задачі, структура задачі, типи задач, орієнтири щодо їх розв'язування) і навичок, що формують дане вміння (записувати у вигляді виразу словесно сформульовані залежності, складати рівності, виконувати тотожні перетворення виразів зі змінною тощо);
- учні повинні добре знати, що процес розв'язування задачі складається з певних етапів, а саме: засвоєння змісту задачі, виконання скороченого

(схематичного) запису умови задачі, вибору невідомих, пошуку та обґрунтування рівняння, розв'язування рівняння, здійснення перевірки відповідності знайдених коренів рівняння умові задачі. Учні варто ознайомити з певною системою орієнтирів, необхідних для виконання цих етапів. Перші задачі вчитель має розв'язати в класі сам, демонструючи учням процес засвоєння та усвідомлення змісту задачі, хід своїх міркувань у процесі пошуку та складання рівняння, перевірки відповідності знайдених коренів рівняння умові задачі;

- схеми пошуку рівняння вчитель має надати учням у вигляді зразка дій, демонструючи розв'язування задачі на основі цих схем. Учні можуть і самі складати план розв'язування під керівництвом учителя, аналізуючи колективно розв'язану задачу;
- на початковому етапі навчання розв'язуванню задач ефективною є фронтальна (колективна) форма роботи під керівництвом учителя, з використанням евристичної бесіди;
- не кількість розв'язаних задач за урок, а методичний підхід до їх розв'язування визначає дидактичний аспект. Водночас, варто пам'ятати, що має бути певна систематичність у їх розв'язуванні.

Але багато авторів і методистів приділяють багато уваги останньому етапу: роботі з задачами після її розв'язування. У методичній літературі даються різні види такої роботи, але як навчити дітей складати задачі не говориться. Складання задач сприяють закріпленню умінь розв'язувати задачі, формування математичних понять, розвитку мислення і зміцнення зв'язку навчання математики з життям. Способами навчання складання задач є: постановка питання до даної умови задачі або зміна даного питання; складання умови задачі з даного питання; підбір числових даних; складання задач за аналогією; складання обернених задач. Аналіз підручників показує, у програмах кількість завдань зі складання задач мінімальне. Складання задач – один з методів навчання молодших школярів розв'язувати задачі.

Складання задач сприяють закріпленню умінь розв'язувати задачі, формування математичних понять.

В подальшому навчання повинно бути диференційованим, і переважати має групова та індивідуальна форми роботи. Вчителю варто пам'ятати принцип, який обґрунтував відомий психолог Л. Виготський: задачі, які ставляться перед учнями у навчанні, мають випереджати вже досягнутий ними рівень на один крок. Учням доцільно пропонувати задачі доступного рівня складності, які вони можуть розв'язати, але такі, що потребують при цьому певного розумового напруження. При розв'язуванні задач з математики в учнів можуть виникати труднощі, а саме: вираження невідомих величин через відомі, бачення двох однакових величин виражених по різному, виконання тотожних перетворень виразів зі змінною.

Сама по собі задача є цікавим і корисним математичним матеріалом, який вимагає володіння шкільним курсом математики, здатності логічно та чітко мислити, вміти знайти правильний хід розв'язку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александрова Э.И. Как учить решать тестовые задачи? / Э.И. Александрова // Начальная школа. – 1999. – №7. – С.103-104.
2. Артемов А.К. Формирование обобщенных умений решать задачи / А.К. Артемов // Начальная школа. – 1992. – №2. – С. 30 – 34
3. Артемов А.К. Теоретико-методические особенности поиска способов решения математических задач / А.К. Артемов // Начальная школа. – 1998. – №11-12. – С.48 – 54.
4. Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект / Г.А. Балл. – Москва: Педагогика, 1990. – 184 с.
5. Біла Н.С. Уроки повторення з математики в 6 класі / Н.С. Біла // Математика в школах України. – 2009. – № 10, 13-14. – С. 3 – 10
6. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Г.П. Бевз. Навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. – Київ: Вища шк., 1989 – 367 с.
7. Брушлинский А.В. К психологии творческого поиска / А.В. Брушлинский. – Москва: Наука, 1978. – 230 с.
8. Васильєва Д.В. Я дослідник. Математика. 5 клас: Розробки уроків та методичні рекомендації / Д.В. Васильєва. – Київ: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 48 с.
9. Васильєва Д.В. Я дослідник. Математика. 6 клас: Розробки уроків та методичні рекомендації / Д.В. Васильєва. – Київ: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 48 с.
10. Возна М.П. Про встановлення взаємоузгодженості програм математики та суміжних дисциплін / М.П. Возна, М.Г. Гром'як // Математика в школі. – 2003. – №6. – С. 8 – 11.
11. Глібова А.В. Текстові завдання з математики 5 – 6 класів / А.В. Глібова // Математика в школах України. – 2006. – №27. – С.169.
12. Громов М.В. Можливі напрямки розвитку математики в наступних десятиліттях / М.В. Громов // Математика. – 2001. – №7. – С. 1 – 8.

13. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я.И. Груденов. – Москва: Педагогика, 1987. – 160 с.
14. Гусев В.А. Внеклассная работа по математике в VI – VIII классах / В.А. Гусев, А.И. Орлов, В.Л. Розенталь. – Москва: Просвещение, 1994. – 147 с.
15. Епишева О.Б. Учить школьников учиться математике / О.Б. Епишева, В.И. Крупич. – Москва: Просвещение, 1990. – 129 с.
16. Ерднієв П. М. Теорія і методика навчання математики в початковій школі / П. М. Ерднієв. – Москва: Педагогіка, 1998. – 220 с.
17. Есаулов А.Ф. Психология решения задач / А.Ф. Есаулов. – Москва: Высшая школа, 1989. – 214 с.
18. Заолотня Л. Розв'язування текстових задач (5-6 класи) / Л. Заолотня // Математика в школі. – 2004. – №6. – С. 23 – 26.
19. Ісаєнко О.В. Математика. Вчимося розв'язувати задачі. 4 – 5 класи / О.В. Ісаєнко, А.І. Супрум. – Харків: ТОВ «Нова тема», 2010. – 368 с.
20. Істер О.С. Математика. 5 клас: підручник для закладів загальної середньої освіти / О.С. Істер. – 2-ге вид., доопрац. – Київ: Генеза, 2018. – 288 с.
21. Істер О.С. Математика: підруч. для 6-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. – Київ : Генеза, 2014. – 296 с. : іл.
22. Истомина Н.Б. Формирование умения решать задачи различными способами / Н.Б. Истомина, Р.Н. Шикова // Начальная школа. – 1985. – №9. – С. 50 – 54.
23. Кожухов С. Складання задач школярами / С. Кожухов // Математика в школі. – 1995. – № 2. – С. 4-6.
24. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике / Ю.М. Колягин. – Москва: Просвещение, 1977. – Ч.І. – 110 с.
25. Кузнецов В.И. К вопросу о решении математических задач / В.И. Кузнецов // Начальная школа. – 1999. – №5. – С. 27-33

26. Лук'янова С.М. Розв'язування текстових задач арифметичними способами в основній школі / С.М. Лук'янова // Дис. канд. пед. наук: 13.00.02. – Київ, 2005. – 236 с.
27. Людмилов Д.С. Складання і розв'язування текстових задач: Посібник для вчителів / Д.С. Людмилов. – Київ: Рад. Школа, 1990. – 289 с.
28. Матвєєва Н.А. Методичні прийоми навчання складання задач / Н.А. Матвєєва // Початкова школа. – 2003. – № 6. – С. 41.
29. Матюшкин А.М. Актуальные вопросы проблемного обучения / А.М. Матюшкин. – Москва: Просвещение, 1989. – 256 с.
30. Мельничук Т.Й. Моделювання прямих та обернених задач / Т.Й. Мельничук, Т.М. Хмара// Розв'язування математичних задач в початкових класах: Зб. Статей – Київ: Рад. шк., 1986. – С. 47 – 51.
31. Міністерство освіти і науки України. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. / М.І. Бурда, Б.В. Кудренко, О.Я. Білянїна, А.І. Азаренкова, О.І. Буковська, Т.С. Кіндюх, О.Є. Лисенко, А.В. Милянїк, Н.В. Панова, А.В. Паньков. – 2017. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/typovi-programu-2-11/20180420-tipov-osvitnya-programa-5-9-nmo-405.docx>
32. Никифоров Н.Н. К изучению темы «Решение задач с помощью уравнений» / Н.Н. Никифоров // Математика в школе. – 1994. – №2. – С. 20 – 21.
33. Нова українська школа [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola>
34. Оконь В. Основы проблемного обучения / В. Оконь. – Москва: Просвещение, 1978. – 157 с.
35. Осабчий Ю.К. Розв'язування задач за допомогою рівнянь // Математика в школі. – 2005. – № 37. – С. 5 – 7.
36. Петренко О.З. Як навчити учнів розв'язувати задачі на складання рівнянь / О.З Петренко // Математика в школах України. – 2007. - №3 – С. 5-8.

37. Пойа П.Н. Как решать задачу / П.Н. Пойа. – Москва: Учбедгиз, 1999. – 207 с.
38. Рейтман У.Р. Познание и мышление / У.Р. Рейтман. – Москва: Наука, 1970. – 150 с.
39. Рєпкін В.В. Розв'язування математичних задач / В.В Рєпкін. – Харків: Гімназія, 1999. – 128 с.
40. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе / Н.М. Рогановский. – Высшая школа, 1990. – 267 с.
41. Сілков В.В. Аналіз структури задачі / В.В. Сілков, А.П. Рибалко – Київ: Рад. шк., 1986. – С. 19 – 22.
42. Слепкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слепкань. – Київ: «Вища школа», 2006. – 386 с.
43. Слепкань З.И. Психолого – педагогические основы обучения математике / З.И. Слепкань – Киев: Рад. школа, 1993. – 256 с.
44. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике: Кн. для учащихся 5 – 7 кл. / А.В. Спивак. – Москва: Просвещение, 2002. – 453 с.
45. Старова О.О. Розглянемо задачу / О.О. Старова // Математика в школах України – 2016 – № 4-5 лютий – С. 18-21.
46. Тарасенкова Н.А. Математика. 5 кл.: підруч. для закладів загальної середньої освіти / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.П. Бочко, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. – Вид. 2-ге, доопр. – Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. – 240 с.
47. Тоом А. Текстовые задачи (5 – 11 кл.) / А. Тоом // Математика – 2004. – №47 – С. 2-5.
48. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – Москва: Просвещение, 1989. – 256 с.
49. Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике: История, теория, методика / Л.М. Фридман – Москва: Школьная Пресса, 2002. – 208 с.

50. Фридман Л.М. Психолого – педагогические основы обучения математики в школе. Учителю математики о пед.психологии / Л.М. Фридман. – Москва: Просвещение, 1983. – 105 с.
51. Шелехова Л.В. Сюжетні задачі по математиці / Л.В. Шелехова. – 2007. – 174 с.
52. Шорнікова І.В. Деякі види робіт по перетворенню задач / І.В. Шорнікова // Середня школа. – 1991. – № 11. – С. 21-23.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК 1

Тест

1. Перший велосипедист щохвилини проїжджає на 50 м менше за другого, тому на шлях довжиною 120 км він витрачає на 2 год більше, ніж другий. Знайти швидкість другого велосипедиста.

- а) 13 км/год.
- б) 15 км/год.
- в) 12 км/год.
- г) 10 км/год.

2. Насос може викачати з басейну — води за 15 хв. Попрацювавши 0,3 год, насос зупинився. Знайти місткість басейну, якщо після зупинки насоса в басейні ще залишилося 50 м^3 води.

- а) 250 м^3
- б) 300 м^3
- в) 280 м^3
- г) 200 м^3

3. Дві точки рівномірно обертаються за двома колами. Перша з них здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і тому встигає виконати за 1 хв на 2 оберти більше. Скільки обертів за 1 хв здійснює друга точка?

- а) 8 об/хв.
- б) 12 об/хв.
- в) 4 об/хв.
- г) 5 об/хв.

4. Села А і В розташовані на березі річки, причому село В розташоване нижче за течією. О 9 год ранку із села А до села В вирушає пліт. У цей самий момент із села В до села А вирушає човен, який зустрічається з плотом через 5 год. Дійшовши до села А, човен повертає і приходять до села

В одночасно з плотом. Чи встигнуть човен і пліт прийти до села В до 9 год вечора того самого дня?

а) так

б) ні

5. Два спортсмени бігають по кільцевій доріжці стадіону. Швидкість кожного постійна, і на пробіг всієї доріжки один витрачає на 5 с менше, ніж другий. Якщо вони почнуть біг з одного місця одночасно і в одному напрямку, то опиняться поруч через 30 с. Через який час вони зустрінуться, якщо почнуть біг з одного місця одночасно в протилежних напрямках?

а) 8 с.

б) 12 с.

в) 4 с.

г) 6 с.

6. Пішохід і велосипедист відправляються одночасно із пункту А в пункт В. У пункті В велосипедист повертає назад і зустрічає пішохода через 20 хв після початку руху. Не зупиняючись, велосипедист доїжджає до пункту А, повертає назад і наздоганяє пішохода через 10 хв після першої зустрічі. За який час пішохід пройде шлях від А до В?

а) за 1 год.

б) за 1,5 год.

в) за 3 год.

г) інша відповідь.

7. Купили декілька однакових книжок і однакових альбомів. За всі книжки сплачено 10 грн. 56 коп., за альбоми 56 коп. Книжок купили на 6 шт. більше, ніж альбомів. Скільки куплено книжок, якщо вартість однієї книжки більша за вартість одного альбому на 1 грн.?

а) 6

б) 8

в) 7

г) 4

8. У бібліотеці є книжки англійською, французькою та німецькою мовами. Книжки англійською складають 36% всіх книжок, французькою— 75 % англійських, а решта 185 книжок — німецькі. Скільки іноземних книжок у бібліотеці?

- а) 380
- б) 678
- в) 500
- г) 200

9. Сплав міді зі сріблом містить срібла на 1845 г більше, ніж міді. Якби до цього сплаву додати деяку кількість чистого срібла, що за масою дорівнює — маси чистого срібла, яке міститься у заданому сплаві, то утворився б новий сплав із вмістом срібла 83,5 %. Яка маса срібла у сплаві?

- а) 2234 л.
- б) 1345 л.
- в) 2505 л.
- г) 2000 л.

10. Є 500 кг руди, яка містить деяку кількість заліза. Після вилучення з руди 200 кг домішок, які містять у середньому 12,5 % заліза, у решті руди вміст заліза підвищився на 20 %. Яка кількість заліза була у руді?

- а) 200 кг.
- б) 222 кг.
- в) 345 кг.
- г) 212 кг.

11. Скільки кілограмів води треба випарувати з 0,25 т целюлозної маси, $\frac{17}{20}$ якої складає вода, щоб дістати масу з вмістом 75 % води?

- а) 210 кг.
- б) 100 кг.
- в) 145 кг.
- г) 211 кг.

12. При випаровуванні з 16 кг розсолу дістали 4 кг солі, яка містить 10% води. Скільки відсотків води містить розсіл?

- а) 13 %
- б) 19 %
- в) 77,5 %
- г) 20,6 %

Вправи §1

1. Перший велосипедист щохвилини проїжджає на 50 м менше за другого, тому на шлях довжиною 120 км він витрачає на 2 год більше, ніж другий. Знайти швидкість другого велосипедиста.

2. Села А і В розташовані на березі річки, причому село В розташоване нижче за течією. О 9 год ранку із села А до села В вирушає пліт. У цей самий момент із села В до села А вирушає човен, який зустрічається з плотом через 5 год. Дійшовши до села А, човен повертає і приходить до села В одночасно з плотом. Чи встигнуть човен і пліт прийти до села В до 9 год вечора того самого дня?

3. Пішохід і велосипедист відправляються одночасно із пункту А в пункт В. У пункті В велосипедист повертає назад і зустрічає пішохода через 20 хв після початку руху. Не зупиняючись, велосипедист доїжджає до пункту А, повертає назад і наздоганяє пішохода через 10 хв після першої зустрічі. За який час пішохід пройде шлях від А до В?

Вправи §2

1. Купили декілька однакових книжок і однакових альбомів. За всі книжки сплачено 10 грн. 56 коп., за альбоми 56 коп. Книжок купили на 6 шт. більше, ніж альбомів. Скільки куплено книжок, якщо вартість однієї книжки більша за вартість одного альбому на 1 грн.?

2. У бібліотеці є книжки англійською, французькою та німецькою мовами. Книжки англійською складають 36% всіх книжок, французькою –

75% англійських, а решта 185 книжок — німецькі. Скільки іноземних книжок у бібліотеці?

3. Сума трьох натуральних чисел більша, ніж їх добуток, а сума двох із них дорівнює 33. Знайти всі такі числа.

Вправи §3

1. Сплав міді зі сріблом містить срібла на 1845 г більше, ніж міді. Якби до цього сплаву додати деяку кількість чистого срібла, що за масою дорівнює — маси чистого срібла, яке міститься у заданому сплаві, то утворився б новий сплав із вмістом срібла 83,5 %. Яка маса срібла у сплаві?

2. Є 500 кг руди, яка містить деяку кількість заліза. Після вилучення з руди 200 кг домішок, які містять у середньому 12,5 % заліза, у решті руди вміст заліза підвищився на 20 %. Яка кількість заліза була у руді?

3. Скільки кілограмів води треба випарувати з 0,25 т целюлозної маси, $\frac{17}{20}$ якої складає вода, щоб дістати масу з вмістом 75 % води?

4. При випаровуванні з 16 кг розсолу дістали 4 кг солі, яка містить 10 % води. Скільки відсотків води містить розсіл?

Відповіді до вправ

§ 1. 15 км/год; Ні; За 1 год.

§ 2. 8; 500; 32,1,1.

§ 3. 2505 л; 212,5 кг; 100 кг; 77,5 %.

ДОДАТОК 2

Приклади практичних та пізнавальних задач

в курсі математики 5-6 класів

Екологічна ситуація, що склалася в світі, також потребує переосмислення пріоритетів розвитку нашого суспільства. Перенасиченість повітря, води та ґрунту шкідливими хімічними і радіоактивними речовинами спричинить невідворотній процес – знищення життя на землі. Тому задачі мають змусити учнів усвідомити ще й важливість проблеми охорони навколишнього середовища. Отже, задачі умовно можна розділити на три типи:

- задачі прикладного характеру, розв'язання яких підтверджує необхідність екологічного витрачення ресурсів та енергії в побуті;
- задачі, які висвітлюють глобальні проблеми людства, щодо збереження навколишнього середовища;
- задачі пізнавальні, що дають учням цікаву інформацію про тваринній та рослинний світи нашої планети, цікаві географічні відомості.

5 клас

Натуральні числа і дії над ними

Найбільшу у світі кількість зубів має садовий слимак, який живе в Америці. Його язик має 135 рядів по 105 зубів у кожному. Скільки всього зубів у цього слимака?

Африканська ріка Ніл - найдовша ріка світу. Довжина Нілу – 6671 км. Друга в світі за довжиною ріка – Амазонка в Південній Америці. Її довжина на 271 км коротша за Ніл. Яка довжина Амазонки?

Знаходження дробу від числа і числа за його дробом

Найменша в світі пташка - колибри. Вона важить всього близько 2 г. Її довжина не більше 60 мм. $\frac{1}{2}$ довжини колибри становлять дзьоб і хвіст. Яка довжина тулуба колибри?

Прийнято вважати, що орхідея найкрасивіша квітка на Землі. У світі існує біля 30000 видів орхідей, що становить $\frac{2}{5}$ усіх видів квіткових рослин у світі. Скільки видів квіткових рослин існує на Землі?

Множення десяткових дробів

Якщо з крана тече цівка води завдовжки з сирник, то за одну добу витікає 700 л води. Скільки коштує вода, що витече без потреби з такого крана за місяць, якщо 1 м води коштує 1,1 грн? (1л=1дм)

Ділення на десятковій дріб

Найвищі тварина на Землі – жирафи. Ці цікаві, граційні тварини живуть в Африці. Висота жирафи може сягати 5,5 м, вага – від 700 до 1200. До якого поверху багатоповерхового будинку може дістати жираф, якщо висота одного поверху становить близько 2,8 м?

Один гектар листяного лісу виробляє за добу близько 270 кг кисню. Людині на добу необхідно близько 270 г кисню. Скількох людей забезпечує киснем один гектар листяного лісу щодоби?

Знаходження числа за його відсотками

У 90-х роках в Україні викиди шкідливих речовин автотранспорту склали близько 5,5 млн. т на рік, що становить 39% усіх викидів шкідливих речовин у повітря. Скільки всього шкідливих речовин було викинуто в повітря в Україні у 90-х роках?

Задачі на рух

Лінивець трьохпалый живе у Південній Америці. Це найповільніший у світі ссавець. Він пересувається зі швидкістю 2 м/хв. Яку відстань може пройти лінивець за 1 годину?

6 клас

Відношення і пропорції. Відсоткові розрахунки

Людський організм на 65% складається з води. Яка маса води знаходиться в організмі людини вагою 40 кг?

Геометричні фігури. Довжина кола і площа круга

Найбільший у світі баобаб має діаметр стовбура 55 м. Скільки людей потрібно, щоб обхопити руками це дерево, якщо розмах рук однієї людини становить приблизно 1,5 м?

Діаметр листка Вікторії амазонської досягає 2,3 м. Яка площа поверхні такого листка? Відповідь округлити до десятих.

ДОДАТОК 3

