Зміст

Вступ

Упровадження нової системи організації навчального процесу у вищих закладах освіти, посилення ролі самостійної роботи студентів та підвищення вимог до якості підготовки фахівців потребує пошуку більш ефективних засобів контролю, зростає необхідність забезпечення оптимальної організації та моніторингу якості навчального процесу. Саме дистанційні методи навчання, як сучасний засіб педагогічного впливу можуть покращити якість навчання студентів, удосконалити навчальну, методичну, виховну діяльність викладачів і управлінську діяльність адміністрації вищого навчального закладу.

Перехід усього людства від постіндустріального до інформаційного суспільства ставить перед освітнім середовищем глобальну проблему - підвищення якості навчального процесу при невеликій кількості часу, за який повинна бути засвоєна інформація, що передбачена програмою.

Одним із шляхів, що забезпечують часткове вирішення цього питання, є застосування дистанційних засобів навчання, як частини багатьох передових інновацій. У поєднанні з навчальними програмами дозволяють перейти до більш ефективної, проте менш вживаної форми організації навчального процесу в сучасних умовах навчання. У цьому й полягає ***актуальність*** даної теми.

Мета дослідження: теоретичне обґрунтування, виконання методичного забезпечення дистанційного навчання з теми «Похідна та її застосування», що забезпечить підвищення якості освіти, для осіб, які не можуть відвідувати навчальний заклад, а такою сприятиме індивідуалізації пізнавальної діяльності студентів.

Завдання дослідження:

- проаналізувати елементи технології дистанційного навчання;
- виявити методичні та дидактичні особливості дистанційної освіти;
- визначити вимоги до процесу дистанційного навчання;

- спираючись на аналіз психолого-педагогічної літератури з обраної проблематики, визначити теоретичні засади організації дистанційного навчання, ключові дефініції дослідження;
- розробити навчально-методичне забезпечення організації дистанційного навчання студентів;
- обґрунтувати актуальність впровадження технології дистанційного навчання при викладанні математики у системі вищих закладів освіти.

Об'єкт дослідження – процес вивчення похідної у курсі методики навчання математики.

Предмет дослідження – розробка методичного забезпечення з теми «Похідна та її застосування» для аудиторного та дистанційного навчання.

Гіпотеза дослідження ґрунтується на припущенні, що організація дистанційного навчання студентів вищих навчальних закладів буде ефективною за таких умов: гармонійного поєднання в процесі навчання технологій дистанційного навчання та професійної підготовки студентів до їх реалізації; оволодіння викладачами та майбутніми вчителями знаннями й навичками щодо розробки змісту дистанційних курсів та їх навчально-методичного забезпечення, адаптованого до умов самостійного вивчення з використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій; використання методів навчання, спрямованих на активізацію пізнавальної діяльності студентів, розвиток їхніх творчих здібностей, формування вмінь знаходити, аналізувати та використовувати нову інформацію для реалізації завдань професійної діяльності.

Розділ І. Науково-теоретичні основи дослідження теми

1.1. Історія розвитку дистанційного навчання

Вважається, що перша спроба створення дистанційної форми освіти була зроблена Яном Коменським 350 років тому, коли він ввів в широку освітню практику ілюстровані підручники. Він також створив базу для використання системного підходу в освіті, написавши свою «Велику дидактику». Багато дослідників визнають його родоначальником дистанційної освіти [26].

В кінці XIX століття з'явився прабатько дистанційної освіти - «кореспондентське» навчання. Тепер студент міг посилати вчителю свої письмові роботи, отримувати поштою коментарі викладача і нову порцію підручників. Ці зміни відбулися завдяки появі регулярної поштового зв'язку. Такий спосіб навчання дуже сподобався тим, хто жив далеко від великих міст і не міг навчатися в звичайних закладах, - для багатьох людей тоді це було єдиною можливістю отримати серйозну освіту [25].

Історія дистанційної освіти має радянське коріння. В ході контактів між країнами колишньої антигітлерівської коаліції, британських вчених зацікавив радянський досвід організації заочної освіти. У Британії було прийнято рішення про формування подібної системи освіти. Уряд Великобританії виділив під цей проект значні кошти. Були розроблені навчальні плани, програми, навчально-методичні посібники та освітні технології.

Проект першого в світі університету дистанційної освіти Open University взяв під особистий контроль прем'єр-міністр Харольд Уїлсон. Відкритий університет заснувала сама королева, а канцлером (ректором) призначили спікера палати громад. Було зроблено все, щоб університет став одночасно і масовим, і престижним [25].

На цій основі почав функціонувати Відкритий Університет Великобританії, який до цих пір є одним зі світових лідерів у цій галузі. У ньому щорічно навчається 200 тисяч осіб. Відкритий Університет Великобританії (Open University) був названий так, щоб показати його доступність за рахунок невисокої ціни і відсутності необхідності часто відвідувати аудиторні заняття.

Впровадивши у себе радянські ідеї, англійці спочатку забороняли вчитися по цій системі, приймаючи заяви на навчання тільки від громадян Сполученого Королівства. Минуло кілька років, і, не побачивши обурених протестів і позовів з боку Радянського Союзу, англійці почали приймати заяви на дистанційну форму навчання і від іноземців [16].

Прем'єр-міністр Харольд Уїлсон спочатку уявляв собі, що заклад, що займається дистанційною освітою, має називатися «ефірний університет». Телебачення і радіо повинні були «доставляти» викладачів додому до учня. Потім з'явилася думка використовувати для цього звичайну пошту. Наприкінці 90х років XX століття з'явилася можливість доставляти навчальні матеріали дешевшим і оперативним способом - по електронній пошті.

Заочна освіта виникла в результаті спроби поліпшення якості дистанційної освіти. В його основі лежить експеримент зі схрещування кореспондентського і очного навчання.

Французький національний центр дистанційного навчання (CEND) був заснований в 1969 році. Про розмах його діяльності свідчать наступні дані: кількість навчальних курсів - 2,5 тисячі, кількість користувачів - 350 тисяч, філії в 120 країнах світу, 5 тисяч викладачів беруть участь у розробці навчальних курсів та освітньої діяльності. Технічні засоби, що використовуються в організації роботи CEND, включають в себе супутникове телебачення, відео- і аудіокасети, електронну пошту, Internet, а також традиційні літературні джерела [25].

Інші старі центри дистанційної освіти в Європі - це Національний університет дистанційної освіти (UNED) в Іспанії (58 навчальних центрів у країні, 9 за кордоном) і Балтійський університет (BU) зі штаб-квартирою в Стокгольмі, який об'єднує 10 країн Балтійського регіону.

У 1989 р в США створена система публічного телемовлення (PBS TV), яка являє собою консорціум 1500 коледжів і телекомпанії. PBS TV включає в себе кілька навчальних програм, які передаються по чотирьох освітнім каналам. Особливе місце серед них займає програма навчання дорослих (PBS Adalt Learning Service), яка пропонує курси в різних областях науки, бізнесу, управління [25].

Одним з найбільш авторитетних в області дистанційної освіти сьогодні визнається Пенсільванський університет (Penn State University). Його досвід використовувався ЮНЕСКО при створенні концепції віртуального університету.

Дистанційні освітні бізнес-програми становлять 25% всіх дистанційних освітніх програм в Америці. Такі компанії як General Motors, JC Penny, Ford, Wal-Mart, Federal Express здійснюють підвищення кваліфікації персоналу через приватні корпоративні освітні мережі. Внутрішню супутникову освітню мережу використовує для цих цілей корпорація IBM [16].

Дослідження зростаючої популярності дистанційної освіти виділяють того чотири причини:

- Для навчання не потрібно залишати своє місце проживання, будинок, сім'ю, рідних, друзів, роботу, а також оплачувати пов'язані з цим грошові витрати на дорогу, на проживання та інше;
- Ця форма навчання унікальна для віддалених від центральних районів міст, де інші можливості навчання практично відсутні. Цей фактор часто має вирішальне значення для таких масштабних країн, як Росія чи Україна;
- Яскраво виражена практичність навчання. Вона досягається завдяки тому, що учням надається більше вибору в послідовності вивчення предметів, гнучкому темпі навчання, прямому спілкуванні з конкретним викладачем, якому можна задавати питання саме про те, що цікавить найбільше самого учня;
- Висока мобільність. Світовий досвід показує, що дистанційне навчання менш консервативно по відношенню до оплати напрямками діяльності людини, ніж очне [25].

1.2. Особливості організації навчального процесу за дистанційною формою навчання.

Дистанційне навчання — це добре організована й контрольована самоосвіта з використанням комп’ютерної техніки й комунікаційних мереж; індивідуалізований процес набуття знань, умінь, навичок і способів пізнавальної діяльності людини, який відбувається в основному за опосередкованої взаємодії віддалених один від одного учасників навчального процесу у спеціалізованому середовищі, яке функціонує на базі сучасних психолого-педагогічних та інформаційно-комунікаційних технологій.

Під дистанційною освітою мається на увазі комплекс освітніх послуг, що надаються віддаленим від навчального закладу студентам за допомогою спеціалізованого інформаційно-освітнього середовища, яке базується на засобах обміну навчальною інформацією за допомогою сучасних телекомунікаційних технологій. Дистанційна освіта в Україні регулюється Концепцією розвитку дистанційної освіти в Україні і Положенням про дистанційну освіту МОН України.

Дистанційне навчання – сукупність наступних заходів:

- надання учбового матеріалу студенту;
- контроль успішності студента;
- інтерактивна співпраця викладача і студента;
- можливість швидкого доповнення курсу новою інформацією, коригування помилок.

Навчатися дистанційно можуть особи, які мають середню (повну) освіту, середню професійну освіту, вищу неюридичну освіту, які здатні і мають можливість отримувати знання та виконувати навчальний план за допомогою дистанційних освітніх технологій [29].

Під дистанційним навчанням розуміється індивідуалізований процес набуття знань, умінь, навичок і способів пізнавальної діяльності людини, який відбувається в основному за опосередкованої взаємодії віддалених один від одного учасників навчального процесу у спеціалізованому середовищі, яке функціонує на базі сучасних психолого-педагогічних та інформаційно-комунікаційних технологій [26].

Метою дистанційного навчання є надання освітніх послуг шляхом застосування у навчанні сучасних інформаційно-комунікаційних технологій за певними освітніми або освітньо-кваліфікаційними рівнями відповідно до державних стандартів освіти; за програмами підготовки громадян до вступу у навчальні заклади, підготовки іноземців та підвищення кваліфікації працівників.

Завданням дистанційного навчання є забезпечення громадянам можливості реалізації конституційного права на здобуття освіти та професійної кваліфікації, підвищення кваліфікації незалежно від статі, раси, національності, соціального і майнового стану, роду та характеру занять, світоглядних переконань, належності до партій, ставлення до релігії, віросповідання, стану здоров’я, місця проживання відповідно до їх здібностей [26].

Особливості організації навчального процесу за дистанційною формою навчання:

Навчальний процес за дистанційною формою навчання здійснюється у таких формах: самостійна робота; навчальні заняття; практична підготовка (у ВНЗ); професійно-практична підготовка (у ПТНЗ); контрольні заходи.

Основними видами навчальних занять за дистанційною формою навчання є: лекція, семінар, урок, практичні заняття, лабораторні заняття, консультації та інші.

Лекція, консультація, семінар, урок проводяться зі студентами (учнями, слухачами) дистанційно у синхронному або асинхронному режимі відповідно до навчального плану.

Отримання навчальних матеріалів, спілкування між суб’єктами дистанційного навчання під час навчальних занять, що проводяться дистанційно, забезпечується передачею відео-, аудіо-, графічної та текстової інформації у синхронному або асинхронному режимі.

Практичне заняття, яке передбачає виконання практичних (контрольних) робіт, відбувається дистанційно в асинхронному режимі. Окремі практичні завдання можуть виконуватись у синхронному режимі, що визначається робочою програмою навчальної дисципліни [26].

Лабораторне заняття проводиться очно у спеціально обладнаних навчальних лабораторіях або дистанційно з використанням відповідних віртуальних тренажерів і лабораторій.

До інших видів навчальних занять при здійсненні навчального процесу можуть відноситись ділові ігри, виконання проектів у групах тощо. Ці види навчальних занять можуть проводитись очно або дистанційно у синхронному або асинхронному режимі, що визначається робочою програмою навчальної дисципліни [29].

Практична підготовка студентів (учнів, слухачів), які навчаються за дистанційною формою навчання, проводиться за окремо затвердженою навчальним закладом програмою.

У світі такий різновид навчання набув поширення досить давно, проте в Україні він існує років 10. Дехто уявляє інформаційні ресурси дистанційного навчання, як сукупність відсканованих підручників розміщених в Інтернеті, які потрібно прочитати, а потім переказати. Але це далеко не так. Звичайно, якісно створені мультимедійні підручники є частиною ресурсу дистанційного навчання, проте головний його аспект – це постійне інтерактивне спілкування студента з викладачем (у форумі, через електронну пошту чи програму SKYPE). Не менш важливою складовою дистанційного навчання є спілкування студентів між собою: виконання завдань у групах, проведення семінарів та дискусій у режимі он-лайн. Без усіх цих інтерактивних форм навчання й спілкування процес вивчення курсу на відстані стає статичним і недостатньо ефективним. Основною перевагою дистанційної форми навчання над очною є передусім її зручність: студент самостійно обирає час і місце для навчання, що дозволяє йому працювати чи паралельно вчитися на стаціонарі в іншому місті чи навіть країні. Окрім того, заміна конспектів електронними ресурсами та новітніми методами навчання, а також постійні консультації з викладачем надають цій формі самоосвіти додаткові переваги перед заочною.

Основою для роботи студента є доступ до комплекту необхідних навчальних матеріалів у вигляді електронних навчальних курсів з кожної дисципліни, в яких можна знайти всю необхідну інформацію для вивчення. Лекції та практичні заняття проводяться у форматі відеоконференцій зі зворотним зв'язком, що забезпечує діалог між викладачем та студентом. Студент має можливість спілкуватися з викладачем, ставити запитання відповідно до теми завдання і одразу отримувати на нього відповідь. Зазвичай такі заняття проходять у групі, до якої входять не більше 10 студентів. Дистанційне навчання також передбачає систему індивідуальних консультацій студента з викладачем у режимі off-line і on-line.

Іспити та заліки студенти дистанційної форми навчання також складають без особистої присутності у стінах Університету. Перевірка знань може бути проведення як у формі електронного тестування, так і у формі on-line співбесіди.

Дистанційна форма навчання має характерні риси і заочної, і денної форм. Наприклад, сесії проходять двічі на рік, але в міжсесійний період студент повинен виконувати індивідуальні завдання та проходити тестування, щоб отримати допуск до проходження підсумкового контролю.

Якість дистанційної освіти досягається шляхом залучення найкращих педагогічних кадрів Університету, які мають значний досвід педагогічної та наукової роботи [27].

Дистанційна форма дозволяє гармонійно поєднувати навчання, професійну діяльність та повсякденне життя.

Після успішного закінчення навчання за дистанційною формою випускник отримує диплом про вищу освіту державного зразка.

Вважається, що дистанційне навчання (ДН) через Інтернет у сутності являє собою логічне продовження досвіду заочного навчання, але вже на якісно іншому, більш високому рівні. Та практика показала: єдине, що поєднує традиційне заочне навчання й класичну форму дистанційного навчання на основі Інтернет-технологій - це відсутність очного спілкування між викладачами й студентами.

Завдяки широким можливостям комунікації викладача зі студентами й студентів між собою, дистанційне навчання виявилося ефективним не тільки для заочної освіти. Воно вже завоювало своє місце серед викладання різних дисциплін на денних і заочних відділеннях вузів. Популярною стала методика так званого розподіленого навчання, що поєднає традиційні методи спілкування викладача й студентів на лекціях і семінарах в аудиторії, а також синхронні (одночасні) і асинхронні (із затримкою в часі) контакти через Інтернет.

Основою учбово-пізнавальної діяльності є психологічні процеси особистості. Тому в ході дистанційного навчання їх необхідно дотримуватися, враховуючи при цьому специфіку дистанційного навчання, що кардинально підвищує інтерактивність освітнього процесу. Але, як і будь-яка нова форма навчання, дистанційна, теж вимагає створення психологічної бази, без якої не можна говорити про якість навчального процесу [22].

Впровадження елементів дистанційного навчання показало важливість розробок курсів, з урахуванням ряду психологічних принципів, які впливають на якість дистанційного навчання.

Електронні версії підручників, що стали основою для створення дистанційних курсів, як і традиційні підручники, не вирішують проблеми самостійної діяльності студентів в одержанні знань. Ці програмні продукти тільки створюють так зване віртуальне навчальне середовище, в якому і проходить дистанційне навчання. Але тут уже виникають такі психологічні проблеми, як відсутність досвіду самостійної роботи (насамперед, для студентів першого курсу), недостатня вольова саморегуляція, вплив групових установок тощо [15].

Основні переваги дистанційних курсів:

- гнучкість – можливість викладення матеріалу курсу з урахуванням підготовки, здібностей студентів. Це досягається створенням альтернативних сайтів для одержання більш детальної або додаткової інформації з незрозумілих тем, а також низки питань –підказок тощо;

- актуальність – можливість упровадження новітніх педагогічних, психологічних, методичних розробок;
- зручність – можливість навчання у зручний час, у певному місці, здобуття освіти без відриву від основної роботи, відсутність обмежень у часі для засвоєння матеріалу;
- модульність – розбиття матеріалу на окремі функціонально завершені теми, які вивчаються у міру засвоєння і відповідають здібностям окремого студента або групи загалом;
- економічна ефективність – метод навчання дешевший, ніж традиційні, завдяки ефективному використанню навчальних приміщень, полегшеному коригуванню електронних навчальних матеріалів та мультидоступу до них;
- можливість одночасного використання великого обсягу навчальної інформації будь-якою кількістю студентів;
- інтерактивність – активне спілкування між студентами групи і викладачем, що значно посилює мотивацію до навчання, поліпшує засвоєння матеріалу;
- більші можливості контролю якості навчання, які передбачають проведення дискусій, чатів, використання самоконтролю, відсутність психологічних бар’єрів;
- відсутність географічних кордонів для здобуття освіти. Різні курси можна вивчати в різних навчальних закладах світу [5].

Навчання на курсах здійснюється у відповідності з навчально-тематичними планами. Для отримання сертифікатів про навчання студенти мають виконати низку контрольних завдань або проектів.

В середньому термін навчання становить:

- на базі середньої (повної) вищої освіти – 6 років;
- на базі середньої професійної освіти – 4,5 роки;

- на базі вищої неюридичної освіти – 3 роки [20].

На Заході ця форма з'явилася вже досить давно і має велику популярність серед студентів через її економічні показники і навчальну ефективність. Дистанційну форму навчання ще називають «освітою на протязі всього життя» через те, що більшість тих, хто навчається, - дорослі люди. Багато хто з них вже має вищу освіту, проте через необхідність підвищення кваліфікації або розширення сфери діяльності у багатьох виникає потреба швидко і якісно засвоїти нові знання і набути навички роботи. Саме тоді оптимальною формою може стати дистанційне навчання.

У системі дистанційного навчання виділені 4 типи суб'єкта:

1. Студент - той, хто навчається.
2. Тьютор - той, хто навчає.
3. Організатор - той, хто планує навчальну діяльність, розробляє програми навчання, займається розподіленням студентів за групами і навчальним навантаженням на тьюторів, вирішує різні організаційні питання.
4. Адміністратор - той, хто забезпечує стабільне функціонування системи, вирішує технічні питання, слідкує за статистикою роботи системи.

Важливим елементом дистанційного навчання є дистанційний курс (ДК). Ще до початку навчання тьютори розробляють ДК за своїми предметами. В процесі навчання курси можуть змінюватися і доповнюватися. Кожний викладач має змогу сам вирішувати, як буде виглядати ДК і які мультимедійні елементи в ньому будуть застосовуватися. Міра і спосіб використання комп'ютерних технологій при підготовці ДК значно впливає на ефективність його засвоєння. Світовий досвід показує, що використання динамічних об'єктів для створення наочних моделей процесів, адаптивне моделювання студента в багатьох випадках значно підвищує навчальний ефект.

Курс розбивається на розділи, які потрібно проходити у визначений час. За матеріалом розділів тьютори створюють і призначують тести і завдання, які також потрібно вчасно проходити. Тьютор має можливість призначувати спеціальні перевірочні (граничні) тести за відповідними розділами курсу.

Тьютор може призначувати завдання для підгруп студентів, тоді завдання вирішується колективно. Взаємодія між суб'єктами системи дистанційного навчання здійснюється за допомогою системи індивідуальних гостьових книг, форумів, чатів та електронної пошти [14].

Для організації дійсно ефективного навчального процесу дистанційного навчання необхідна систематична робота з оболонкою як студента, так і тьютора майже кожного дня на протязі всього терміну навчання. Дистанційні технології навчання можна розглядати як природний етап еволюції традиційної системи освіти від дошки з крейдою до електронної дошки й комп'ютерних навчальних систем, від книжкової бібліотеки до електронної, від звичайної аудиторії до віртуальної аудиторії. Це – «технологія отримання знань за допомогою телекомунікаційних засобів, коли взаємодія того, кого навчають і викладача проходить на відстані». Дистанційне навчання надає змогу особисто обирати час, місце та контент завдань для опрацювання. Саме така модель персонального, індивідуалізованого навчання, яке вибудовує траєкторію здобуття знань шляхом проблемно-пошукових, творчих завдань, та веде до особистісного зростання, розвитку, удосконалення, і знайшла своє вираження як компонент єдиного інформаційного простору закладу.

З розвитком інформаційних технологій все більш популярним стало застосування Інтернету в дистанційному навчанні. Це унікальний, універсальний засіб дозволяє доставляти інструкції викладача для віддалених студентів у будь-якій точці земної кулі. Причому мова йде про будь-який вид інформації, починаючи від простої текстової, і закінчуючи аудіо і відео інформацією [12].

Діалогові можливості мультимедіа в Інтернет залучають більшість організацій, що займаються дистанційною освітою. Доступність Інтернету також сприяє тому, що багато студентів готові обрати його в якості основного джерела отримання освітньої інформації. Навчальні матеріали можуть зберігатися в Інтернеті так, що студент може мати до них доступ в будь-який час.

У світовій практиці існує три традиційні форми навчальних закладів, які пропонують можливість дистанційного навчання:

- «натуральні» дистанційні університети;
- провайдери корпоративних тренінгів і/або курсів підвищення кваліфікації;
- традиційні університети, які пропонують навчання в режимі он-лайн.

Є декілька моделей дистанційного навчання:

- навчання за типом екстернату;
- університетське навчання;
- співпраця декількох навчальних закладів;
- автономні освітні установи;
- автономні навчальні системи;
- неформальне, інтегроване дистанційне навчання на основі мультимедійних програм.

Комп'ютерні телекомунікації зараз не тільки самий новий, але й найперспективніший вид телекомунікацій. Під телекомунікацією в міжнародній практиці розуміють «передачу будь-якої інформації на відстані за допомогою технічних засобів» (телефон, телеграф, радіо, телебачення, Інтернет і т. п.).

Проведені наукові дослідження показали, що дистанційне навчання характеризується:

- фізичною віддаленістю студентів від викладача;
- впливом навчального закладу;
- використанням технічних засобів для об'єднання викладача і студента;
- забезпеченням двосторонньої взаємодії між учасниками навчального процесу.

Технологія розробки дистанційного курсу навчання складається з послідовних етапів підготовки, створення, програмування, перевірки та редагування матеріалів. На етапі підготовки визначається контингент студентів, цілі та зміст навчання, технологія та технічні засоби, які використовуються. Зокрема, при розробці дистанційного курсу навчання включеного типу доцільно виходити із принципу взаємозв'язку змісту роботи студентів у дистанційному курсі з тематикою аудиторних практичних занять. По завершенню етапу укладання курсу треба скласти алгоритм курсу і здійснити його програмування. На етапі перевірки треба провести випробування курсу. На підставі виявлених під час випробування недоліків потрібно здійснити редагування курсу, виправлення помилок, налагодження ефективності зворотнього зв'язку тощо.

Специфічні риси дистанційного навчального середовища викликають зміни в характері взаємодії між студентом та викладачем, що, в свою чергу, призводить до нового розподілу їх функцій порівняно з традиційним навчанням. Студент у процесі дистанційного навчання опановує активну форму діяльності, отримує нові засоби доступу до інформації. В таких умовах набуває розвитку самостійність студента щодо керування процесом навчання і контролем за його результативністю. В умовах ослаблення керуючого впливу на діяльність студента в дистанційному навчанні викладач перетворюється на консультанта, організатора ефективного навчального середовища, здобуває більше можливостей для організації творчих проектів, стимулюючи самостійність мислення студента.

Аналіз вітчизняного досвіду організації та розвитку дистанційного навчання дозволяє зробити наступні узагальнення:

- більшість вітчизняних ВНЗ використовують для організації та технічного забезпечення дистанційного навчання відкриту освітню платформу Moodle;
- на бакалаврському та магістерському рівнях дистанційне навчання побудовано на основі поєднання очної та заочно-дистанційної форми, що реалізовано у двох варіантах: перший передбачає присутність студентів в аудиторії на початку семестру (для ознайомлення з організацією навчання та структури курсів) та наприкінці семестру (для

очного складання іспитів) та дистанційного навчання протягом семестру; другий варіант передбачає дистанційне навчання протягом семестру та очну присутність студентів лише на іспитах;

- для бізнес-освіти на короткострокових сертифікаційних програмах та програмах підвищення кваліфікації передбачено виключне дистанційне навчання із запровадженням фінального тестування у дистанційній формі;
- структурно навчальні курси побудовано у вигляді модульної системи та містять наступні елементи: теоретичний матеріал (тексти лекцій), практичні завдання (задачі, запитання, тести для самоперевірки) та завдання для перевірки знань (тести, віртуальні лабораторні та курсові роботи тощо), відеоролики (відеолекції);
- використовуються такі технології навчання: голосові (аудіо), відео (відеолекції, відеоконференції), електронні (електронна пошта, скайп, чати тощо) .

В Україні існує Українська Система дистанційного навчання - UDL System. UDL System - партнерська організація, яка об'єднує вищі навчальні заклади, науково-дослідні інституції, банки, корпорації та неприбуткові організації для створення нової якості за допомогою застосування новітніх інформаційних технологій в освіті [20].

1.3. Місце теми з шкільному курсі. Вимоги до знань і вмінь учнів

Програма з математики для загальноосвітньої школи відводить на вивчення теми “Похідна та її застосування” приблизно 24 години (загальноосвітньої школи), 48 годин (ліцеї і гімназії з поглибленим вивченням математики). Дана тема вивчається в 10 класі.

Відповідно до постанови Кабінету Міністрів України від 23.11.2011 № 1392 «Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти» та Типових навчальних планів для III ступеня закладів загальної середньої освіти у 2018/2019 навчальному році 10 класи закладів загальної середньої освіти будуть вивчати математику на рівні стандарту (3 години на тиждень) або на профільному рівні (9 годин на тиждень) [12].

Програма призначена для організації навчання математики в класах *математичного, фізичного та фізико-математичного профілів.* Вона розроблена на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти з урахуванням особливостей відповідних профілів навчання.

Мета навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації і достатньої для успішного вивчення фізики та інших, в першу чергу природничих, предметів, продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями, безпосередньо пов'язаними з математикою, або за спеціальностями, де математика відіграє роль апарату для вивчення й аналізу закономірностей реальних явищ і процесів.

Досягнення зазначеної мети забезпечується виконанням таких завдань:

1. формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, усвідомлення математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; стійкої позитивної мотивації до навчання;
2. оволодіння учнями мовою математики, системою математичних знань, навичок і вмінь, потрібних у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервності освіти;
3. інтелектуальний розвиток особистості, передусім розвиток в учнів логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції;
4. громадянське, екологічне, естетичне виховання та формування позитивних рис особистості;
5. формування соціально-ціннісних компетентностей учня.

Програма розрахована на 630 годин навчального часу, відведеного на вивчення математики для математичного, фізичного та фізико-математичного профілів навчання. Її матеріал розподілено за такими змістовими лініями: числа; вирази; рівняння і нерівності; функції; елементи комбінаторики; початки теорії ймовірностей та елементи математичної статистики; геометричні фігури; геометричні величини [27].

Зміст навчання математики структуровано за темами, що відповідають двом навчальним курсам «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія» із зазначенням послідовності тем та кількості годин на їх вивчення. Розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним. Учителям і авторам підручників надається право коригувати послідовність вивчення тем та змінювати розподіл годин на вивчення тем залежно від прийнятої методичної концепції та конкретних навчальних ситуацій. На основі орієнтовних тематичних планів учитель розробляє календарно-тематичний план, в якому конкретизується обсяг навчального матеріалу. У даній програмі розподіл годин по темам укладено у двох варіантах. Перший із розрахунку 5 годин на тиждень – алгебра і початки аналізу, 4 години на тиждень – геометрія, другий із розрахунку 6 годин на тиждень – алгебра і початки аналізу, 3 години на тиждень – геометрія. Вчитель вільний обирати схему, яка краще підходить для кожного класу. Також при можливості використати годину варіативної складової можливо виділити 6 годин на тиждень на алгебру і початки аналізу та 4 години на тиждень на геометрію.

У зв'язку із перенесенням тем «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» та «Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі» до 10 класу на 2016/2017 навчальний рік укладено окрему таблицю із змістом навчального матеріалу для 11 класу.

За відсутністю можливості забезпечити учнів навчальними матеріалами з тем «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» та «Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі», ці теми можуть вивчатися в 11 класі (відповідно до таблиць для 2016/2017 *навчального року, вивільнені години в 10 класі розподіляються на розсуд вчителя).*

Програмою передбачено резерв навчального часу, а також години для повторення, узагальнення й систематизації вивченого матеріалу. Спосіб використання резервного часу вчитель може обрати самостійно: для повторення на початку навчального року матеріалу, який вивчався у попередніх класах, як додаткові години на вивчення окремих тем, якщо вони важко засвоюються учнями, для проведення інтегрованих з профільним або іншими предметами уроків тощо.

Основна складність полягає в тому, щоб навчити школярів застосувати похідну для дослідження функцій, розв'язання прикладних задач алгебри та геометрії. Показати алгоритми застосування похідної, що значно полегшує розв'язання багатьох типів задач [3].

У шкільному курсі математики через обмеженість часу для підведення учнів до означення похідної найчастіше докладно розглядають одну із задач, що приводить до поняття похідної: про знаходження положення дотичної до кривої у певній точці або про визначення миттєвої швидкості. Перевагу слід надати задачі про миттєву швидкість, оскільки з нею учні вже ознайомились з курсу фізики, а на цьому етапі навчання доцільно оформити її розв'язування в термінах і символах математичного аналізу (приріст аргументу, приріст функції, границя функції). При цьому в процесі розв'язування потрібно чітко назвати чотири кроки, які розкривають зміст похідної, та зауважити, що їх доцільно виконувати надалі під час виведення формул і доведення основних теорем про похідні [29].

Під час підготовки до вивчення похідної потрібно повторити з учнями поняття границі та неперервності функції, означення дотичної та січної.

При вивченні похідної в загальноосвітній школі до знань та вмінь учнів ставляться наступні вимоги:

1) учні повинні розуміти значення поняття похідної для опису реальних процесів, зокрема механічного руху;

2) учні повинні вміти: знаходити кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в даній точці; знаходити швидкість змінення величини в точці; наближено обчислювати значення і приріст функції в даній точці; диференціювати функції, використовуючи таблицю похідних і правила диференціювання; застосовувати похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції; знаходити найбільше і найменше значення функції; розв’язувати нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

Розділ II. Методика вивчення похідної у шкільному курсі алгебри і початків аналізу

2.1. Похідні елементарних функцій. Теореми про похідні алгебраїчної суми, добутку і частки функцій

Сам термін «похідна» уперше зустрічається у француза Луа Арбогаста – в його книзі «Обчислення похідних», опублікованої в Парижі в 1800 р. Цим терміном відразу ж став користуватися і Лагранж. Даний термін швидко ввійшов у загальний ужиток, а Коші, використовуючи початкову літеру цього терміна, став позначати похідну символом *Dy* або *Df(x)*.

Термінологія Ньютона (флюенти, флюксії) і його символи похідної утратили своє значення. Лише у фізиці і механіці в деяких випадках позначають крапками над літерами похідні за часом.

Перший друкований курс диференціального числення вийшов у світ в Парижі в 1696 р. під заголовком «Аналіз нескінченно малих». Його автор Г. Ф. де Лопіталь за основу цієї книги взяв рукопис Й. Бернуллі – одного з найближчих співробітників Лейбніца. Ось чому цей курс варто розглядати як типовий добуток школи Лейбніца.

У першій же главі своєї книги Лопіталь вимагає, «щоб величина, збільшена або зменшена на іншу нескінченно малу величину, могла бути розглянута як незмінна». Тут нескінченно мала розглядається як нуль, її можна відкидати. Це один з фундаментальних принципів вирахування нескінченно малих Лейбніца, відкинутий сучасною наукою. Цим принципом користувався Лопіталь і при установленні формул диференціювання [23].

У перший період розробки математичного аналізу основоположники цієї теорії не могли досить чітко і ясно обґрунтувати принципи цієї теорії і тому шукали підтвердження правильності теорії в узгодженості математичних висновків з досвідом і з практикою при вирішенні задач механіки й астрономії. Однак, проста перевірка гіпотези на практиці не дає абсолютної впевненості в її непогрішності. Досить одного факту, що не погодиться з даною гіпотезою, як вона буде спростована. Ось чому на наступних етапах перед математиками виникла проблема суворого математичного обґрунтування теорії математичного аналізу.

Похідні елементарних функцій

Похідна сталої функції y = c = const. Нехай на деякому проміжку <a,b> задано сталу функцію $y = c = const$. Тоді її значення в точках x і $x + \Delta x$ рівні між собою при будь-якому значенні x. тому приріст $\Delta y = 0$, а отже, й $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Перейшовши до границі в останній рівності при $\Delta x \to 0$, знайдемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Отже, границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ існує і дорівнює нулю. Тому існує і похідна цієї функції в довільній точці x, яка теж дорівнює нулю, тобто якщо $y = c = const$, то $y' = 0$.

Наприклад, $(5)' = 0$.

Похідна степеневої функції з цілим показником. Похідна степеневої функції $y = x^m$ з цілим показником існує і дорівнює показнику степеня, помноженому на цю функцію з показником, на одиницю меншим, тобто

$y' = mx^{m-1}$

(при $m < 0$ x не може дорівнювати нулю).

Наприклад,

$$(x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6;$$
$$б(x^{98})' = 98x^{98-1} = 98x^{97}.$$

Похідні тригонометричних функцій. Похідна функції $y = sinx$. Надамо x довільного приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді функція y набуде приросту

$$\Delta y = sin(x + \Delta x) - sinx = 2sin\frac{\Delta x}{x}cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Перейдемо у цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$. Внаслідок неперервності функції $cosx$

$$\lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = cos\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = cosx.$$

Для другого співмножника, позначивши $\frac{\Delta x}{2} = \alpha$, матимемо

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta \alpha \to 0}\frac{sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Тому

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) = cosx.$$

Отже, похідна функції $y = sinx$ існує у довільній точці $x \in (-\infty; +\infty)$ і дорівнює $cosx$, тобто

$(sinx)' = cosx.$

<u>Наприклад</u>, $(7sinx)' = 7(sinx)' = 7cosx.$

Похідна функції $y = cosx$. Аналогічно доводиться, що похідна функції $y = cosx$ існує у довільній точці $x \in (-\infty; +\infty)$ і дорівнює $-sinx$, тобто

$(cosx)' = -sinx.$

<u>Наприклад</u>, $(3cosx)' = 3(cosx)' = -3sinx.$

Похідна функції $y = tgx$. Візьмемо довільну точку $x \in$ (a,b), де (a,b) – область визначення функції tg *x*. Знайдемо приріст

$\Delta y = \frac{sin(x+\Delta x)}{cos\,(x+\Delta x)} - \frac{sinx}{cosx} = \frac{sin(x+\Delta x)cosx - sinxcos\,(x+\Delta x)}{cos(x+\Delta x)cosx} = \frac{sin\Delta x}{cos(x+\Delta x)cosx}$

і складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{sin\Delta x}{\Delta x}}{cos(x + \Delta x)cosx}.$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{sin\Delta x}{\Delta x}}{cos(x + \Delta x)cosx} = \frac{1}{cos^2 x}.$$

Отже, похідна функції $y = tgx$ існує і дорівнює

$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$ [28].

Наприклад, $(5tgx)' = 5(tgx)' = 5 \cdot \frac{1}{cos^2x} = \frac{5}{cos^2x}$.

Похідна функції $y = ctgx$. Аналогічно доводиться, що похідна функції $y = ctgx$ існує у довільній точці $x \in$ (a,b), де (a,b) – область визначення функції ctg x, і дорівнює $(ctgx)' = \frac{-1}{sin^2x}$.

Наприклад, $(7ctgx)' = 7(ctgx)' = 7\left(\frac{-1}{sin^2x}\right) = \frac{-7}{sin^2x}$.

Теореми про похідні алгебраїчної суми, добутку і частки функцій

Теорема 1. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці x мають похідні, то функція $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ у цій точці також має похідну, яка дорівнює

$y' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$.

Доведення. Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ матимуть прирости $\Delta f_1(x)$ і $\Delta f_2(x)$, а функція y матиме приріст

$\Delta y = \Delta f_1(x) \pm \Delta f_2(x)$.

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}.$$

Перейдемо у цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$. Оскільки $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці x за умовою теореми мають похідну,то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} = f_1'(x); \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_2'(x).$$

Тому

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}\right) = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_1'(x) \pm f_2'(x).$$

Отже, згідно із означенням похідної у точці x існує похідна функції y, яка дорівнює $y' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$.

Теорему 1 можна узагальнити для будь-якої скінченної суми функцій: похідна суми скінченного числа функцій дорівнює сумі похідних від цих функцій, якщо похідні даних функцій існують, тобто

$$\left(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\right)' = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x).$$

Теорема 2. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці x мають похідні, то в цій точці функція $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$ також має похідну, яка дорівнює

$$y' = f_1(x) \cdot f_2'(x) + f_1'(x) \cdot f_2(x).$$

Доведення. Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ матимуть прирости $\Delta f_1(x)$ і $\Delta f_2(x)$, а функція y матиме приріст

$$\Delta y = \big(f_1(x) + \Delta f_1(x)\big)\big(f_2(x) + \Delta f_2(x)\big) - f_1(x)f_2(x)$$
$$= f_1(x)\Delta f_2(x) + f_2(x)\Delta f_1(x) + \Delta f_1(x)\Delta f_2(x).$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f_1(x)\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} + f_2(x)\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta f_1(x)\Delta f_2(x)}{\Delta x}.$$

Перейдемо у цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$. За умовою теореми

$$\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_2'(x), \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} = f_1'(x),$$

а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f_2(x) = 0$, оскільки $f_2(x)$ в точці x неперервна.

Отже,

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\Delta x} = f_1(x) \cdot f_2'(x) + f_1'(x) \cdot f_2(x).$$

Слід зазначити, що коли один співмножник, наприклад $f_1(x) = c = const$, то $f_1'(x) = 0$ і в такому випадку $y = cf_2'(x)$.

Якщо в добутку один співмножник сталий, то похідна від такого добутку дорівнює сталому співмножнику, помноженому на похідну змінного співмножника.

Дану теорему можна узагальнити для випадку n співмножників [30].

Наприклад,

а) $\big((x+5)(x-8)\big)' = (x+5)'(x-8) + (x-8)'(x+5) =$
$= 1 \cdot (x-8) + 1 \cdot (x+5) = 2x - 3;$

б) $\big(x^2(2x-7)\big)' = (x^2)'(2x-7) + x^2(2x-7)' = 2x(2x-7) + 2x^2 =$
$= 6x^2 - 14x;$

в) $\left(\sqrt{x}(5-3x)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'(5-3x) + \sqrt{x}(5-3x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x) +$

$+\sqrt{x}(-3) = \dfrac{5-3x-6x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5-9x}{2\sqrt{x}}.$

Теорема 3. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці *x* мають похідні і $f_2(x) \neq 0$, то в цій точці функція $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ також має похідну, яка дорівнює

$$y' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}.$$

Доведення. Надамо *x* деякого приросту Δx. Тоді функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ матимуть прирости $\Delta f_1(x)$ і $\Delta f_2(x)$, а функція *y* матиме приріст

$$\Delta y = \frac{f_1(x) + \Delta f_1(x)}{f_2(x) + \Delta f_2(x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_2(x)\Delta f_1(x) - f_1(x)\Delta f_2(x)}{\left(f_2(x) + \Delta f_2(x)\right)f_2(x)}.$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x)\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} - f_1(x)\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}}{\left(f_2(x) + \Delta f_2(x)\right)f_2(x)}.$$

Перейдемо у цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$. За умовою теореми

$$\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_2'(x), \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} = f_1'(x).$$

Крім того $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f_2(x) = 0$, оскільки $f_2(x)$ в точці *x* неперервна. Тому

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{\left(f_2(x)\right)^2} \text{ [4]}.$$

Наприклад,

а) $\left(\dfrac{1+9x}{x+1}\right)' = \dfrac{(x+1)(1+9x)' - (1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)\cdot 9 - (1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2} =$

$= \frac{8}{(x+1)^2}$;

б) $\left(\frac{x^3}{4-x}\right)' = \frac{(4-x)(x^3)' - x^3(4-x)'}{(4-x)^2} = \frac{3x^2(4-x) - x^3(-1)}{(4-x)^2} =$

$= \frac{12x^2 - 2x^3}{(4-x)^2}$ [31].

Похідна складної функції. Функцію $y = f(x) = g(u) = g\big(h(x)\big)$ називають *складною функцією аргументу x*, а змінну *u – проміжною змінною.*

В шкільному курсі математики доведення теореми про похідну складної функції наводиться з певними обмеженнями, які його спрощують.

Теорема 4. Похідна складної функції $y = f(x) = g\big(h(x)\big)$ дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжній змінній *u* на похідну проміжної змінної *u* по змінній *x*, тобто

$$y' = y'_u \cdot u'_x.$$

Доведення. Нехай функція $u = h(x)$, де u – проміжна змінна для складної функції, має похідну в точціx_0, а функція $y = g(u)$ має похідну в точці $u_0 = h(x_0)$. Це означає, що існую границі $\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\Delta x}$ і$\frac{\lim\limits_{\Delta u \to 0} \Delta y}{\Delta u}$.

Надамо значенню x_0 приросту Δx. Тоді змінна *u* набуде приросту Δu, який, в свою чергу, зумовить приріст Δy функції $y = f(x) = g(u),$ де $u = h(x)$.

Щоб знайти похідну $y' = f'(x_0)$, треба обчислити $\frac{\lim\limits_{\Delta u \to 0} \Delta y}{\Delta x}$. Припустимо, що при досить малих $\Delta x \neq 0$ відповідне Δu також не дорівнює нулю. Подамо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

За теоремою про границю добутку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

оскільки $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Справді, функція $u = h(x)$ диференційовна, а тому неперервна.

Оскільки обидві границі, що стоять в правій частині рівності, за умовою існують, то існує границя $\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. $f'(x_0) = g'(x_0) \cdot h'(x_0)$.

Позначимо $g'(u_0) = y'_u$, щоб підкреслити, що похідну функції g шукаємо по *u,*а $h'(x_0) = u'_x$, оскільки похідну функції h шукаємо по *x.* Тоді формулу похідної складної функції $y = f(x)$ запишемо скорочено у вигляді

$$y' = y'_u \cdot u'_x \quad [6].$$

Похідна показникової функції. Вивчаючи показникові функцію, учні мали змогу переконатися, що графіки показникових функцій мають вигляд гладких кривих (без зломів), до яких у кожній точці можна провести дотичну. Відомо також, що існування дотичної до графіка функції в точці рівносильне її диференційованості в цій точці. У вищій математиці доведено, зо показникові функція диференційована в кожній точці, і похідну показникової функції за основою e обчислюють дуже просто, а саме:

$$(e^x)' = e^x.$$

Нагадаємо, що $lnx = log_e x$.

За основною логарифмічною тотожністю для будь-якого додатного числа a виконується рівність $a = e^{lna}$.

Тому будь-яку показникові функцію можна записати у вигляді

$$a^x = e^{xlna}.$$

Для цього треба піднести до степеня x обидві частини рівності $a = e^{lna}$.

За допомогою формули $a^x = e^{xlna}$ і застосовуючи правило обчислення похідної складної функції, одержуємо формулу похідної будь-якої показникової функції для будь-якого показника x:

$$(a^x)' = (e^{xlna})' = e^{xlna}(xlna)' = a^x lna.$$

Отже,$(a^x)' = a^x lna$ [3].

<u>Наприклад</u>, $(7^x)' = 7^x ln7$.

Похідна логарифмічної функції. Розглянемо функцію $y = lnx$ і знайдемо її похідну. Доведемо, що при будь-якому $x > 0$ виконується рівність

$$ln'x = \frac{1}{x}.$$

За основною логарифмічною тотожністю $x = e^{lnx}$ при всіх додатних x у цій рівності ліворуч і праворуч стоїть одна й та сама функція (визначена на множині R_+) . тому похідні x і lnx рівні, тобто

$$x' = (e^{lnx})'.$$

Для знаходження похідної правої частини рівності скористаємось правилом знаходження похідної складної функції і тим, що показникові функція e^x диференційовна у кожній точці та $(e^x)' = e^x$. Переконаємось, що логарифмічна функція диференційовна в кожній точці. Справді, графіки функцій $y = log_a x$ і $y = a^x$ симетричні відносно прямої $y = x$.

Оскільки показникові функція диференційована в будь-якій точці, а її похідна не перетворюється в нуль, то графік показникової функції має негоризонтальну дотичну в кожній точці. Тому і графік логарифмічної функції має невертикальну дотичну в будь-якій точці, що рівносильно диференційованості логарифмічної функції на області її визначення [2].

Отже,

$$(e^{lnx})' = e^{lnx} ln' x = x ln' x.$$

Взявши до уваги, що $x' = 1$, та підставивши знайдений результат у рівність $x' = (e^{lnx})'$, одержимо $1 = x ln' x$, звідки

$$ln' x = \frac{1}{x}.$$

Розглянемо функцію $y = log_a x$ і доведемо, що $y' = \frac{1}{lna}\frac{1}{x}$.

Справді, оскільки $log_a x = \frac{lnx}{lna}$, то

$$(log_a x)' = \frac{1}{lna}(lnx)' = \frac{1}{lna}\frac{1}{x}.$$

Отже,

$$(log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{lna} \quad [1].$$

Похідна степеневої функції. Нехай $y = x^p$, де p – довільна стала. Відомо, що при будь-якому додатному x відповідає число x^p. Тим самим на проміжку (0, +∞) при фіксованому p визначена функція f, задана формулою $f(x) = x^p$. Вона називається *степеневою* (з показником степеня p).

Якщо $p > 0$, то степенева функція визначена і при $x = 0$, бо $0^p = 0$.

Якщо p – ціле число, то степенева функція визначена і для $x < 0$. При парних p це парна функція, а при непарних p – непарна. Тому дослідження степеневої функції досить виконати лише на проміжку (0; +∞).

Виведемо формулу для похідної функції при довільному дійсному показнику p.

Якщо подати x у вигляді $x = e^{lnx}$, то

$$f(x) = x^p = (e^{lnx})^p = e^{plnx}.$$

Знайдемо похідну здобутої складної функції:

$$f'(x) = (e^{plnx})' = e^{plnx}(plnx)' = x^p \cdot p \cdot \frac{1}{x} = px^{p-1}.$$

Отже,

$$(x^p)' = px^{p-1}.$$

При $p < 0$ степенева функція спадає на проміжку (0; +∞), тому що її похідна $px^{p-1} < 0$ на цьому проміжку.

Нагадаємо, що при $x = 0$ степенева функція дорівнює нулю і $x^p \to 0$ при $x \to 0$ і $x > 0$. Тому 0 приєднують до проміжку зростання, тобто при $p > 0$ степенева функція зростає на [0; +∞) [31].

2.2. Застосування похідної для розв'язування рівнянь

Похідна в окремих випадках може бути застосована до розв'язування рівнянь, а саме : для встановлення кількості коренів або їх відсутності, для їх знаходження.

Так, наприклад, якщо маємо рівняння $f(x) = a$, де f – зростаюча або спадна функція, то , зрозуміло, що рівняння не може мати більше одного кореня, причому можна з впевненістю сказати, що він буде, якщо a належить множині значень функції f. А для визначення строгої монотонності застосовується похідна.

Використовують і такий факт: якщо многочлен k-го степеня має k дійсних коренів, то його похідна має їх $k-1$.

Розглянемо застосування похідної до розв'язування рівнянь на конкретних прикладах [11].

Приклад 1. Яким умовам повинні задовольняти параметри p та q, щоб рівняння $x^3 + px + q = 0$ мало три різних дійсних корені?

Розв'язання. Розглянемо функцію

$f(x) = x^3 + px + q$.

Для того щоб дана функція мала три різні нулі, необхідно, щоб її похідна

$f'(x) = 3x^2 + p$

мала два різних нулі. А це буде тоді, коли $p < 0$. Звідси $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Отже, похідна має один додатний і один від'ємний корінь. Тоді функція f має обов'язково один від'ємний корінь. А це можливо за умови, що $q > 0$. Отже, $p < 0, q > o$ [31].

Приклад 2**.**Скільки дійсних коренів має рівняння

$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$?

Розв'язання. Розглянемо функцію

$f(x) = xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1$.

Знайдемо її похідну

$f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} - e^{-x} + x = x(1 - e^{-x)}$.

Нехай

а) x<0, тоді очевидно, $f'(x)$>0;

б) x=0, тоді $f'(0) = 0$;

в) x>0, тоді знову ж таки $f'(x)$>0.

Отже, похідна всюди додатна, за винятком однієї ізольованої точки x=0. це означає, що функція f зростає на всій числовій осі. Тому дане рівняння не може мати більше одного кореня. Оскільки $f'(0) = 0$, то нуль і є тим єдиним коренем.

Приклад 3.Розв'язати рівняння

$2x + \sin x = 0$.

Тривіальним коренем рівняння є x=0. доведемо, що інших коренів рівняння не має. Розглянемо функцію

$f(x) = 2x + \sin x$.

Знайдемо її похідну $f'(x) = 2 + \cos x > 0$ для будь-якого $x \in R$.

Отже, функція f зростає на всій числовій осі. Тому рівняння не має більше коренів.

Приклад 4.Розв'язати рівняння

$x^5 + x^3 + 5x - 7 = 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^5 + x^3 + 5x - 7$.

Вона диференційована на всій області визначення. Знайдемо її похідну

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 5$.

Очевидно, $f'(x) > 0$ для $\forall x \in R$.

А це означає, що рівняння має лише один корінь (найвищий показник степеня непарний). Тривіальним коренем є x=1.

Відповідь: 1 [4].

2.3. Використання комп'ютерних технологій при вивченні теми

Враховуючи, що сьогодні темп розвитку суспільства надзвичайно високий, звичайно, переконуємося, що треба встигати за змінами. Варто переробляти величезні масиви інформації, яка надходить з усіх точок земної кулі, відкривати широкі перспективи щодо гуманітаризації освіти і гуманізації навчального процесу. Це неможливо без поглиблення та розширення теоретичної бази знань і надання результатам практичного значення. Особливу роль слід відводити активізації пізнавальної діяльності, створенню умов для повного розкриття творчого потенціалу з урахуванням їхніх вікових особливостей і життєвого досвіду, індивідуальних нахилів людини, їх запитів і здібностей. На заняттях потрібно більш широко застосовувати програмні засоби, що дозволяють розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності.

Завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі, студент чітко і легко розв'язує досить складні задачі, впевнено володіє відповідною системою понять і правил. Використання подібних програм дає можливість у багатьох випадках зробити розв'язування задач настільки ж доступним, як і просте розглядання малюнків чи графічних зображень [32].

Такий підхід до вивчення математики дає наочні уявлення про поняття, що вивчаються, розвиває образне мислення, просторову уяву, дозволяє досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, неформально розв'язувати задачу.

Тому є ефективно та доцільно використовувати такі програмні засоби навчання: GRAN:

• побудова графіка функції і графіка її похідної на одній координатній площині на екрані комп'ютера. Дослідження залежності проміжків зростання, спадання функції від знака похідної ;

• зображення графіка функції, дотичної і нормалі в даній точці. Обгрунтування геометричного змісту похідної;

• побудова графіка функції і графіка другої похідної. Дослідження функції на увігнутість і опуклість у залежності від знака другої похідної;

• проведення повного аналітичного дослідження функції за допомогою похідної, побудова графіка функції в зошиті з наступним порівнянням його на екрані комп'ютера;

• дослідження точок максимуму, мінімуму, перегину на зміну знака в межах цих точок.

Приклад (дотична до графіка):

Написати рівняння дотичної до графіка функції у = $(x-1)^2 + 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$. Для розв'язування задачі будемо використовувати програму GRAN.

Алгоритм розв'язування задач.

1. Рівняння дотичної до графіка функції у точці A(x_0, f(x_0) в загальному випадку має вигляд: у =f(x_0)+ f′(x_0)(x - x_0). Це рівняння та значення $x_0 = 3$ записуємо у зошиті, залишилося знайти f(x_0) та f′(x_0) .

2. Будуємо графік функції у = $(x-1)^2 + 4$ за допомогою послуг Об'єкт\Нова функція та Графік\ Побудувати. В разі потреби змінюємо масштаб зображення.

3. Вибираємо послугу Операці\Дотична, вказуємо абсцису точки дотику x_0= 3.

4. У вікні, що з'явилося справа на екрані, вибираємо послугу Дотична.

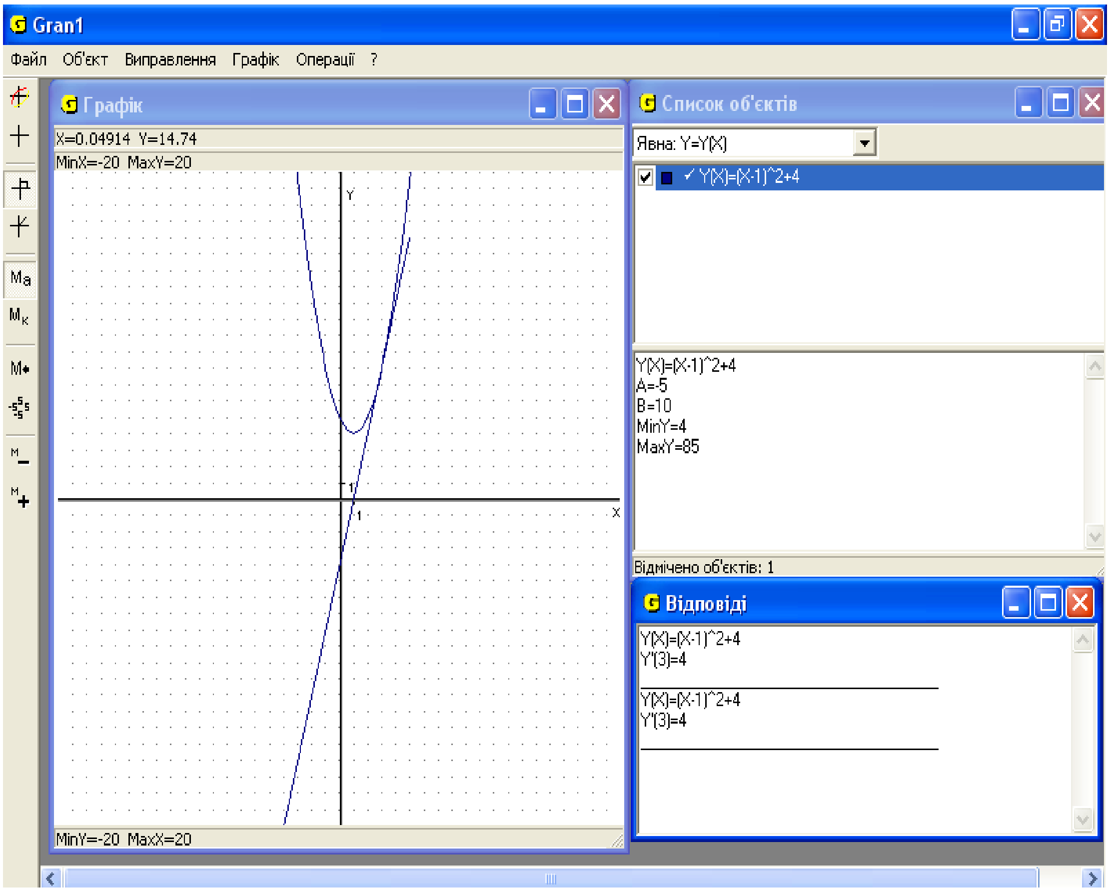
5. На екрані з'являється графік дотичної та значення похідної f′(x_0) у точці x_0=3. Записуємо у зошиті: f′(x_0) = 4.

6. Для знаходження f(x0) скористуємося послугою Інше\Калькулятор. Обчислимо значення виразу: $(3-1)^2$ - 4. Записуємо у зошиті: f(x_0) = 8.

7. Записуємо рівняння дотичної: y = 8 + 4(x — 3).

8. Спрощуємо рівняння, що отримали: y =4x - 4 = 4(x-1). Задача розв'язана.

9. Для перевірки можна ввести функцію: y = 4x - 4 та побудувати графік дотичної. Він має зливатися з графіком дотичної, який побудував комп'ютер на попередніх кроках.



Розділ III. Дидактичне забезпечення з теми «Похідна та її застосування» для студентів при дистанційному навчанні

3.1. Розробка лекцій

Лекційне заняття №1

Тема: Методика вивчення похідної та її застосування в курсі алгебри і початків аналізу.

Мета: Ознайомити студентів з вузловими питаннями методики вивчення похідної та її застосування у шкільному курсі. Навчити розв'язувати вправи на дослідження функції та побудова її графіків.

План

1. Задачі, що проводять до поняття похідної.
2. Означення похідної.
3. Механічний та геометричний зміст похідної.
4. Односторонні похідні.
5. Нескінченні похідні.

1. Задачі, що проводять до поняття похідної

Задача про миттєву швидкість. Нехай матеріальна точка $\boldsymbol{M}$ рухається вздовж прямої. Позначимо відстань точки $\boldsymbol{M}$ до деякої початкової точки $\boldsymbol{O}$ даної прямої в момент часу $\boldsymbol{t}$ через $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$. Тоді в момент часу $\boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t}$, де $\Delta\boldsymbol{t}$ - приріст часу, точка $\boldsymbol{M}$ буде знаходитися на відстані від точки $\boldsymbol{O}$ рівній $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t})$. Різницю $\Delta\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ назвемо приростом шляху.

Відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ називається середньою швидкістю руху точки за проміжок часу $\Delta\boldsymbol{t}$.

Швидкістю руху точки в момент часу $\boldsymbol{t}$ або миттєвою швидкістю називається границя відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{0}$, тобто

$$\boldsymbol{v(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \ \textbf{[19].}$$

Приклад. Знайти миттєву швидкість рівномірно прискореного руху матеріальної точки з початковою швидкістю $\boldsymbol{v_0}$ і прискоренням $\boldsymbol{a}$.

Розв'язування. Залежність шляху $\boldsymbol{s}$ від часу $\boldsymbol{t}$ при рівно прискореному русі виражається формулою $\boldsymbol{s(t) = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}}$. Тоді

$$\boldsymbol{s(t+\Delta t) = v_0 \cdot (t+\Delta t) + \frac{a \cdot (t+\Delta t)^2}{2}}.$$

Отже,

$$\boldsymbol{\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = v_0 \cdot (t+\Delta t) + \frac{a \cdot (t+\Delta t)^2}{2} - v_0 \cdot (t) - \frac{a \cdot t^2}{2}}.$$

Після спрощення одержуємо

$$\boldsymbol{\Delta s = v_0 \cdot \Delta t + a \cdot t \cdot \Delta t + \frac{a \cdot (\Delta t)^2}{2}}.$$

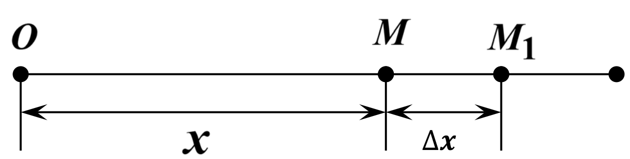
Таким чином

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v_0 \cdot \Delta t + a \cdot t \cdot \Delta t + \frac{a \cdot (\Delta t)^2}{2}}}{\boldsymbol{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\boldsymbol{v_0 + a \cdot t + \frac{a \cdot \Delta t}{2}}\right) = \boldsymbol{v_0 + a \cdot t}.$$

Задача про лінійну густину неоднорідного стержня. Нехай треба знайти густину неоднорідного прямолінійного стержня в точці $\boldsymbol{M}$, яка знаходиться на відстані $\boldsymbol{x}$ від початкової точки $\boldsymbol{O}$ (див. мал. 1).

Позначимо $\boldsymbol{m(x)}$ величину маси відрізка $\boldsymbol{OM}$. Візьмемо деяку точку $\boldsymbol{M_1}$, яка знаходиться на відстані $\boldsymbol{x + \Delta x}$ від початкової точки $\boldsymbol{O}$. Тоді маса відрізка $\boldsymbol{OM_1}$



Мал. 1

буде рівною $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})$. Отже, маса відрізка $\boldsymbol{MM_1}$, яку ми назвемо приростом маси в точці $\boldsymbol{M}$,

$$\Delta m = m(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - m(\boldsymbol{x}).$$

Відношення $\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}$ називається середньою густиною стержня на відрізку $\Delta\boldsymbol{x}$ і позначається $\boldsymbol{\rho_c}$.

Лінійною густиною стержня в точці $\boldsymbol{M}$ називається границя відношення $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ при $\Delta\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$, тобто

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{M}) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}.$$

Приклад. Нехай маса стержня довжини $\boldsymbol{x}$ задається формулою $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$, де $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ - сталі числа. Знайти лінійну густину в точці $\boldsymbol{M}$, яка знаходиться на відстані $\boldsymbol{x}$ від початку стержня.

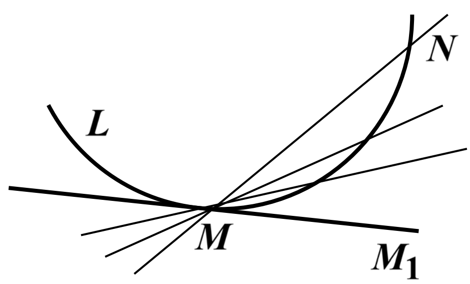
Розв'язування. Знайдемо приріст маси в точці $\boldsymbol{M}$

$\Delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{m} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{x}.$

Отже,

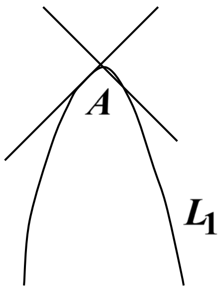
$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{M}) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\cdot\Delta x}{\Delta x} = \boldsymbol{a}.$$

Задача про дотичну до кривої. Дотичною до кривої $\boldsymbol{L}$ в точці $\boldsymbol{M}$ називається пряма $\boldsymbol{MM_1}$, з якою співпадає граничне положення січної $\boldsymbol{MN}$ за умови, що точка $\boldsymbol{N}$ по кривій $\boldsymbol{L}$ прямує до точки $\boldsymbol{M}$ (мал. 2).

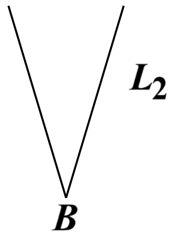


Мал. 2

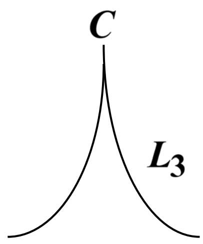
Зазначимо, що не в кожній точці крива може мати дотичну. В точках, яких крива зазнає зламу, дотична до кривої не існує. Так, наприклад, не існують дотичні у точці A кривої L_1 (мал. 3), точці B кривої L_2 (мал. 4), точці C кривої



Мал. 3



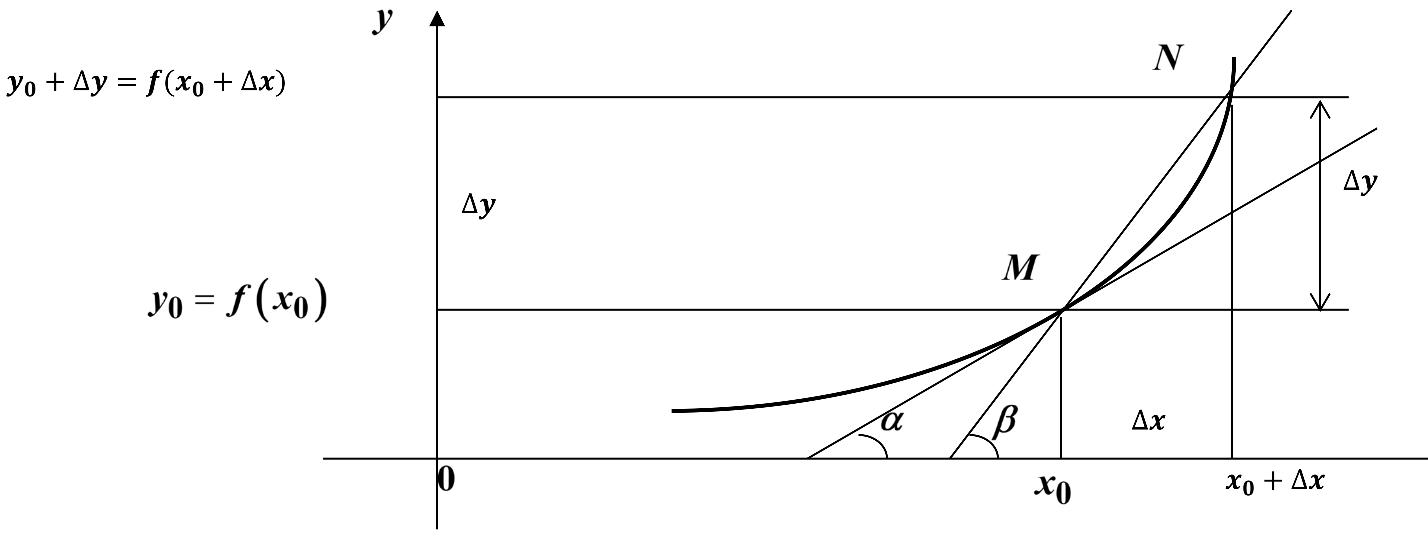
Мал. 4



Мал. 5

L_3 (мал. 5).

Розглянемо криву, яка задана в системі координат рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ неперервна функція, визначена на деякому проміжку X. Поставимо задачу: знайти кутовий коефіцієнт $tg\alpha$ дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$ (мал. 6) [17].



Мал. 6

Візьмемо на кривій $y=f\left(x\right)$ точку $N(\boldsymbol{x_0}+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y_0}+\Delta\boldsymbol{y})$. Через точки $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ проведемо січну. Нехай вона утворює з додатним напрямом осі $\boldsymbol{Ox}$ кут $\boldsymbol{\beta}$. Тоді $\boldsymbol{tg\beta}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Якщо точка N по кривій $y=f\left(x\right)$ наближатиметься до точки M, то координати точки N наближатимуться до координат точки M, тобто

$$\lim_{N\to M}(\boldsymbol{x_0}+\Delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x},\lim_{N\to M}(\boldsymbol{y_0}+\Delta\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}.$$

Звідси випливає, що коли точка $N\to M$, то $\Delta\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0},\Delta\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{0}$. З іншого боку, якщо $\Delta\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}$, то за неперервністю функції $y=f\left(x\right)$ маємо: $\Delta\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{0}$, тобто $N\to M$ і при цьому $\beta\to\alpha$. Таким чином

$$\boldsymbol{tg\alpha}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{y}}{\Delta\boldsymbol{x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\Delta\boldsymbol{x}}.$$

Розглянуті задачі різні за своїм змістом, але вони відрізняються одним і тим способом, якщо в кожній з цих задач незалежну змінну позначити через $\boldsymbol{x}$, а залежну змінну – через $\boldsymbol{y}$, то для знаходження розв'язку кожної із них потрібно знаходити границю відношення приросту функції до приросту аргументу, за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{y}}{\Delta\boldsymbol{x}}.$$

2. Означення похідної

Нехай в деякому проміжку X визначена функція $y=f\left(x\right)$. Виберемо довільну точку $\boldsymbol{x_0}\in X$ і надамо $\boldsymbol{x_0}$ приросту $\Delta\boldsymbol{x}$ такого, що $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$.

Зазначимо, що $\Delta\boldsymbol{x}$ може бути як додатним, так і від'ємним. При цьому функція одержить приріст $\Delta\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$. Нехай в точці $\boldsymbol{x_0}$ існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ [24].

Похідною функції $y=f\left(x\right)$ в точці $\boldsymbol{x_0}$ називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $y = f(x)$ в точці x_0 позначають так: $y'(x_0)$ або .

$f'(x_0)$ Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то похідна є функцією від x і в цьому випадку позначається так: $y'(x)$ або $f'(x)$ [17].

3. Механічний та геометричний зміст похідної

Механічний зміст похідної випливає із задачі про миттєву швидкість, а саме: похідна від пройденого шляху $s(t)$ по часу t дорівнює миттєвій швидкості $v(t)$ в момент часу t, тобто

$v(t) = s'(t)$.

Геометричний зміст похідної розкрито у задачі про дотичну: похідна $f'(x_0)$, якщо вона існує, дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з координатами x_0, $y_0 = f(x_0)$.

4. Односторонні похідні

Використовуючи означення правої і лівої границі, введемо поняття правої і лівої похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Правою (лівою) похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається права (ліва) границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ (за умови, що ця границя існує).

Права похідна позначається так: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, а ліва $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 має похідну, то вона має як праву, так і ліву похідну і ці похідні рівні між собою. Проте не в кожній точці x_0, у якій існують права і ліва похідні, існує похідна функції. Так, наприклад, функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ має праву похідну

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

І ліву

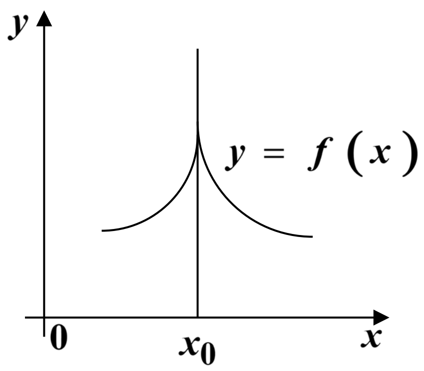
$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

але похідної в точці $x = 0$ функція $y = |x|$ не має, оскільки $f_{+}'(0) \neq f_{-}'(0)$.

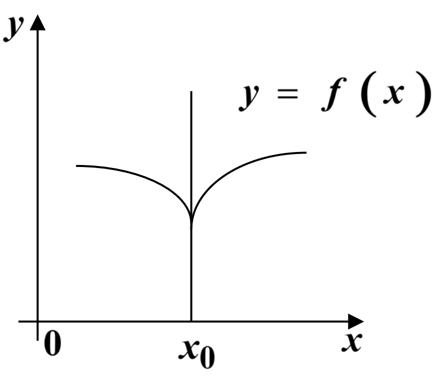
5. Нескінченні похідні

Якщо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ прямує до $+\infty$ або $-\infty$, то це невласне число називається нескінченою похідною.

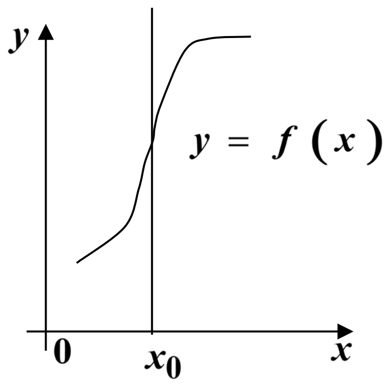
Геометричний зміст похідної як кутового коефіцієнта дотичної



Мал. 7



Мал. 8



Мал. 9

розповсюджується і на цей випадок. Тут дотична паралельна вісі Oy (мал. 7, 8, 9).

Аналогічно установлюється поняття односторонньої нескінченої похідної. У цьому випадку наявність в точці x_0 різних за знаком односторонніх нескінченних похідних забезпечує існування єдиної вертикальної дотичної [9].

Рекомендована література:

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Дидактичні матеріали з математики - К.: Вища школа., 2001. - 271 С. 31-34,66-70.

2. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – С. 53-60.

3. Лейфура В. Математика: Підручник для студентів вищ. навч. закладів 1-2-го рівнів акредитації / В.М. Лейфура, ГЛ. Голодницький, Й.І. Файст; за ред. В.М. Лейфури. - К.: Техніка, 2005 – *С.* 404-425.

4. Овчинников П. П. Вища математика : Підруч. для студ. вищ.техн. навч. закладів: У 2 ч. Ч.1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного. аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко ; За заг. ред. П.П.Овчинникова. – 2-е вид., стер. – К. : Техніка, 2000. – С. 591.

Лекційне заняття №2

Тема: Методика вивчення похідної та її застосування в курсі алгебри і початків аналізу.

Мета: Ознайомити студентів з вузловими питаннями методики вивчення похідної та її застосування у шкільному курсі. Навчити розв’язувати вправи на дослідження функції та побудова її графіків.

План

1. Диференційовність функції.
2. Похідні елементарних функцій.
3. Похідна оберненої функції.
4. Диференціал функції.
5. Похідні вищих порядків.
6. Формула Лейбніца для n-ної похідної добутку двох функцій.

1. Диференційовність функції

Функція $\boldsymbol{y=f(x)}$ називається диференційованою в точці $\boldsymbol{x_0}$, якщо її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \qquad (1)$$

де A - деяке число, не залежне від Δx, а $\alpha(\Delta x)$ - нескінчено мала функція при $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Зв'язок між диференційованістю функції $y = f(x)$ в точці x_0 і існуванням похідної даної функції в цій точці установлюється наступною теоремою.

Теорема. Для того, щоб функція функції $y = f(x)$ була диференційована в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці скінчену похідну.

Доведення. Необхідність. Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, тобто її приріст можна подати у вигляді (1). Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \big(A + \alpha(\Delta x)\big) = A.$$

Звідси випливає, що в точці x_0 існує похідна $f'(x) = A$.

Достатність. Нехай функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну $f'(x_0)$. За означенням похідної маємо $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0 = \alpha(\Delta x)$ є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$. Отже, $\Delta y - f'(x_0) \cdot \Delta x = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, тобто $\Delta y - f'(x_0) \cdot \Delta x = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, де $f'(x_0)$ – деяке число, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Зауваження. Вираз $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$ не визначений при $\Delta x \to 0$, а отже, за цієї умови не визначений вираз (1). Щоб позбутися цієї невизначеності достатньо покласти $\alpha(0) = 0$.

Зв'язок між диференційованістю і неперервністю функції розкривається в наступній теоремі.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Доведення. Так як функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то її приріст в цій точці можна подати у вигляді $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = A \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0 \ [32].$$

Отже, в точці x_0, де функція $y = f(x)$ диференційована, нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, а це означає, що в точці x_0 функція $y = f(x)$ неперервна.

Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ в кожній точці деякого проміжку має скінчену похідну, то на цьому проміжку вона неперервна.

Зауваження. Неперервність функції в даній точці не є достатньою умовою її диференційованості. Наприклад, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x = 0$, але в цій точці, як було показано в пункті 1.2. вона не диференційована.

2. Похідні елементарних функцій

Похідна сталої функції. Похідна функції $y = C$, де $C - const$ при $x \in X$ виражається формулою $y' = 0$.

Доведення.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Похідна степеневої функції $y = x^{\mu}$. Область визначення X цієї функції залежить від μ. Візьмемо довільну відмінну від нуля внутрішню точку x області визначення X. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{x^{\mu}}}{\frac{\Delta x}{x^{\mu}}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{1}{x^{\mu-1}}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1} \cdot \mu.$$

Зауваження. Якщо $\mu > 0$, то легко безпосередньо одержати значення похідної при $x = 0 : y'(0) = 0$. Отже, для будь-якої точки $x \in X$, де X - область визначення функції $y = x^{\mu}$, маємо: $y' = \mu \cdot x^{\mu - 1}$ [18].

Приклади. $\boldsymbol{y=x^5;}$ $\quad \boldsymbol{y'=5x^4;}$

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{x}=x^{-1};}\qquad \boldsymbol{y'=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2};\ y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}};}\qquad \boldsymbol{y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.}$$

Похідна показникової функції $\boldsymbol{y=a^x\left(a>0;a\neq 1\right),x\in\left(-\infty;+\infty\right)}$.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\cdot(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\cdot lna.$$

Приклади. $\boldsymbol{y=2^x;}$ $\quad \boldsymbol{y'=2^x\cdot ln2;}$ $\quad \boldsymbol{y=5^x;}$ $\quad \boldsymbol{y'=5^x\cdot ln5.}$

Похідна логарифмічної функції $\boldsymbol{y=log_a x\left(a>0;a\neq 1\right),x\in\left(0;+\infty\right)}$.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{x\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{x\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\log_a e.$$

Зокрема, якщо $\boldsymbol{y=ln\,x}$, то $\boldsymbol{y'=\frac{1}{x}}$ [19].

Похідні тригонометричних функцій.

Нехай $\boldsymbol{y=sin\,x,}\quad \boldsymbol{x\in\left(-\infty;+\infty\right)}$. Тоді

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin(x+\Delta x)-sin(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot cosx=$$

$$=cosx.$$

Аналогічно доводиться, що функція $\boldsymbol{y=cos\,x,}\quad \boldsymbol{x\in\left(-\infty;+\infty\right)}$ має похідну $\boldsymbol{y'=-sin\,x}$.

Якщо $y = tgx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right), k \in Z$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{tg(x + \Delta x) - tg(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{sin(x + \Delta x)}{cos(x + \Delta x)} - \frac{sinx}{cosx}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin(x + \Delta x) \cdot cosx - cos(x + \Delta x) \cdot sinx}{\Delta x \cdot cos(x + \Delta x) \cdot cosx} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\Delta x}{\Delta x \cdot cos(x + \Delta x) \cdot cosx} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{cos(x + \Delta x) \cdot cosx} = 1 \cdot \frac{1}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}.$$

Аналогічно доводиться, що функція

$y = ctgx, \quad x \in \left(\pi \cdot k; \pi \cdot (k+1)\right), k \in Z$ має похідну $y' = -\frac{1}{sin^2 x}$.

3. Похідна оберненої функції.

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє всі умови теореми про існування оберненої функції і в точці x_0 має похідну $f'(x_0) \neq 0$. Тоді обернена до неї функція $x = \varphi(y)$ у точці $y_0 = f(x_0)$ має похідну і

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доведення. Надамо значенню $y = y_0$ деякий приріст $\Delta y \neq 0$. Тоді функція $x = \varphi(y)$ одержить відповідний приріст Δx. Оскільки $\Delta y \neq 0$, то за однозначністю функції $y = f(x)$, $\Delta x \neq 0$. Отже, $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Якщо $\Delta y \to 0$, то за неперервністю функції $y = f(x)$ $\Delta x \to 0$. Звідси маємо

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Похідні обернених тригонометричних функцій. Нехай маємо функцію $y = arcsin\, x, x \in (-1;1)$. За означенням функції $y = arcsin\, x$

$x = sin\, y$ [32].

Згідно теореми про похідну оберненої функції

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\left(\sin y\right)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Зауваження. Тут враховано, що при $x \in (-1;1)$ виконуються співвідношення $-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$, тобто $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Отже, $\cos y > 0$, а тому $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$. Точки $x = \pm 1$ не розглядаються, так як $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}, \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ і $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Аналогічно одержуються похідні інших обернених тригонометричних функцій:

$$y = \arccos x, x \in (-1;1);\ y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y = arc\,tgx, x \in (-\infty;+\infty); \qquad y' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$y = arc\,ctgx, x \in (-\infty;+\infty); \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

4. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0. Тоді її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отже, доданок $A \cdot \Delta x$ є головною частиною приросту функції, яка лінійно залежить від Δx

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається головна частина приросту функції в цій точці, яка лінійно залежить від Δx

Диференціал функції позначається так:

$$dy = A \cdot \Delta x$$

Диференціалом незалежної змінної x називається її приріст: $dx = \Delta x$.

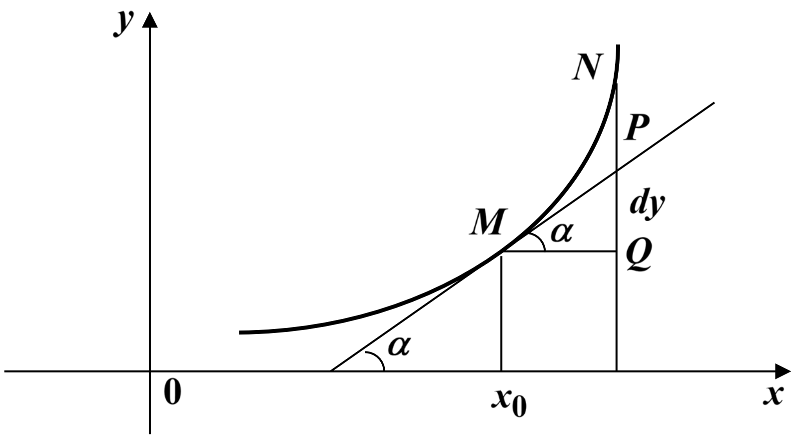
Отже,

$dy = f'(x_0) \cdot dx$ [24].

Із останньої формули випливає, що похідну $f'(x_0)$ можна обчислити як відношення диференціалів:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Диференціал функції має наступний геометричний зміст. Нехай точка M (мал. 1) на графіку функції $y = f(x)$ має координати (x_0, y_0), де $y_0 = f(x_0)$.



Мал. 1

Пряма MP - дотична до графіка функції в точці M. Тоді приріст Δy в точці x_0, який відповідає приросту Δx аргументу, рівний величині відрізка NQ Оскільки $tg\alpha = \frac{PQ}{MQ}$ і $f'(x_0) = tg\alpha$, то, враховуючи, що $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, маємо: диференціал dy функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0, тобто дорівнює величині відрізка PQ.

Оскільки диференціал dy функції $y = f(x)$ є головною частиною її приросту, то це дає можливість застосувати диференціал функції в наближених обчисленнях: із наближеної рівності ***y=dy.***

Якщо функції $u = u(x), v = v(x)$ диференційовані, то мають місце наступні формули:

$$d(Cu) = C \cdot du \qquad (C = const),$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

Нехай тепер маємо складену функцію $y = f(u),\ u = \varphi(x)$, де $f(u), \varphi(x)$ диференційовані функції в точках x_0 і $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді

$$dy = \left(f\left(\varphi(x_0)\right)\right)'_x dx.$$

Так як

$\left(f\left(\varphi(x_0)\right)\right)'_x = f'_u(u_0) \cdot u'_x$, то $dy = f'_u(u_0) \cdot u'_x dx$.

Оскільки $u'_x dx = du$, то маємо $dy = f'_u(u_0) \cdot du$.

Таким чином, якщо функція складена, то форма диференціалу не змінює свого виду. Цю властивість називають інваріантністю форми диференціалу.

5. Похідні й диференціали вищих порядків

Похідна $f'(x)$ функції $y = f(x)$ сама є деякою функцією аргументу x. Отже, можна ставити питання про існування похідної від функції $f'(x)$. Цю похідну називають похідною другого порядку, або другою похідною. Її позначають y'' або $f''(x)$. Отже, $y'' = (y')'$ [9].

Приклад. Знайти похідну другого порядку функції $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$.

Розв'язування.

$$y' = 6x^2 - 10x + 3,$$

$$y'' = 12x - 10.$$

Похідна першого порядку від похідної другого порядку називається третьою похідною, або похідною третього порядку і т. д.

Якщо визначена похідна $(n-1)$-го порядку функції $y=f(x)$, то похідною n-го порядку називається перша похідна похідної $(n-1)$-го порядку, тобто

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Похідні, починаючи з похідної другого порядку, називаються похідними вищих порядків.

Формули *n*-них похідних деяких функцій. Нехай маємо функцію $y=sin\,x$, тоді

$$y'=cos\,x=sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right);\ y''=-sin\,x=sin(\pi+k)=sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right),$$

$$y'''=-cos\,x=sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right);\dots;y^{(n)}=sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Отже, похідну n-го порядку функції $y=sin\,x$ можна знайти за формулою

$$(sin)^{(n)}=sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Аналогічно можна одержати формулу для обчислення n-ої похідної функції $y=cos\,x$

$$(cos)^{(n)}=cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Обчислимо n-ну похідну функції $y=x^{\alpha}\,(x>0)$.

$$y'=\alpha\cdot x^{\alpha-1};\qquad y''=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot x^{\alpha-2};\quad y'''=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)x^{\alpha-3};\dots;$$

$$y^{(n)}=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\cdot x^{\alpha-n}.$$

Нехай маємо показникову функцію $y=a^{x}\,(0<a,a\neq1)$. Послідовно диференціюючи цю функцію, одержуємо

$$y' = a^x \cdot \ln a; \qquad y'' = a^x \cdot \ln^2 a; \qquad y''' = a^x \cdot \ln^2 a; \quad ...; \qquad y^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a.$$

Зокрема, $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x.$

6. Формула Лейбніца для *n*-ної похідної добутку двох функцій.

Нехай $y = u \cdot v$, де $u = u(x), v = v(x)$ - функції, які мають похідні будь-якого порядку. Тоді

$$y' = u' \cdot v + v' \cdot u; \quad y'' = u'' \cdot v + u' \cdot v' + u' \cdot v' + v'' \cdot u = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + v'' \cdot u;$$

$$y^{(3)} = u^{(3)} \cdot v + u^{(2)} \cdot v' + 2u^{(2)} \cdot v' + 2u' \cdot v^{(2)} + u' \cdot v^{(2)} + v^{(3)} \cdot u =$$
$$= u^{(3)} \cdot v + 3u^{(2)} \cdot v' + 3u' \cdot v^{(2)} + v^{(3)} \cdot u.$$

Праві частини одержаних рівностей подібні на розвинення бінома $(u+v)^n$ Ньютона, але замість показників степенів стоять числа, які визначають порядок похідних. При цьому самі функції u, v розглядаються як "похідні нульового порядку", тобто $u = u^{(0)}, v = v^{(0)}$. Враховуючи це, одержуємо

$$y^{(n)} = (u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + \frac{n}{1!} \cdot u^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot u^{(n-2)} \cdot v^{(2)} + ... +$$
$$+ \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-1))}{k!} \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} + ... + u \cdot v^{(n)}.$$

Зауваження. Доведення викладених вище формул похідних проводиться методом математичної індукції [18].

Рекомендована література:

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Дидактичні матеріали з математики - К.: Вища школа., 2001. - 271 С. 31-34,66-70.

2. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – С. 53-60.

3. Лейфура В. Математика: Підручник для студентів вищ. навч. закладів 1-2-го рівнів акредитації / В.М. Лейфура, ГЛ. Голодницький, Й.І. Файст; за ред. В.М. Лейфури. - К.: Техніка, 2005 – *С.* 404-425.

4. Овчинников П. П. Вища математика : Підруч. для студ. вищ.техн. навч. закладів: У 2 ч. Ч.1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного. аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко ; За заг. ред. П.П.Овчинникова. – 2-е вид., стер. – К. : Техніка, 2000. – С. 591.

3.2. Розробка практичних занять

Практичне заняття №1

Тема: Методика вивчення похідної та її застосування в курсі алгебри і початків аналізу.

Мета: Ознайомити студентів з вузловими питаннями методики вивчення похідної та її застосування у шкільному курсі. Навчити розв'язувати вправи на дослідження функції та побудова її графіків.

Питання для самоперевірки

1. Що таке похідна функції?
2. Як знайти похідну за означенням (по кроках)?
3. Який геометричний зміст має похідна?
4. Який фізичний зміст має похідна?
5. Якщо функція неперервна в точці x_0 , то чи буде в цій точці функція мати похідну?
6. Яке значення має похідна сталої?
7. Яке значення має похідна частки?
8. За якою формулою обчислюється похідна оберненої функції?
9. За якою формулою обчислюється похідна складної функції?

10. Чим відрізняються похідні функцій $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$?

Методичні задачі

1. З'ясувати місце початків диференціального та інтегрального числення в діючій програмі шкільного курсу математики.

2. Охарактеризувати, зробивши огляд методичної літератури, можливі варіанти введення поняття похідної в школі. Який варіант прийнято в навчальному посібнику з алгебри і початків аналізу для 10 класу?

3. Досвід показує, що при доведенні теорем про похідну суми, добутку, частки двох функцій учні формально переносять правила тотожних перетворень одночленів і многочленів на перетворення, пов'язані з функціональною символікою, і допускають такі помилки:

$$\frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=\frac{ux+u\Delta x+vx+v\Delta x-u(x)-v(x)}{\Delta x}$$

Яка причина цих помилок? Як їх запобігти?

4. Чи потрібні учням вказівки алгоритмічного характеру при доведенні формул похідних елементарних функцій і основних теорем про похідні (суми, добутку, частки, складеної, оберненої функції)?

5. З якими труднощами зустрічаються учні під час доведення теорем про похідну показникової, оберненої, логарифмічної функцій? Як їх можна подолати?

6. Досвід показує,що на запитання «Чи буде дотична вісь OX у початку координат до графіків функцій $y=x^2, y=|x|$?» учні дають різні відповіді. Як пояснити їм правильну відповідь?

7. Які вказівки алгоритмічного характеру можна запропонувати учням під час дослідження функціййй на екстремум? Навести приклади.

Рекомендована література:

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Дидактичні матеріали з математики - К.: Вища школа., 2001. - 271 С. 31-34,66-70.

2. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – С. 53-60.

3. Лейфура В. Математика: Підручник для студентів вищ. навч. закладів 1-2-го рівнів акредитації / В.М. Лейфура, ГЛ. Голодницький, Й.І. Файст; за ред. В.М. Лейфури. - К.: Техніка, 2005 – *С.* 404-425.

4. Овчинников П. П. Вища математика : Підруч. для студ. вищ.техн. навч. закладів: У 2 ч. Ч.1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного. аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко ; За заг. ред. П.П.Овчинникова. – 2-е вид., стер. – К. : Техніка, 2000. – С. 591.

Практична заняття №2

Тема: Методика вивчення похідної та її застосування в курсі алгебри і початків аналізу.

Мета: Ознайомити студентів з вузловими питаннями методики вивчення похідної та її застосування у шкільному курсі. Навчити розв’язувати вправи на дослідження функції та побудова її графіків.

Запитання для самоперевірки

1) Що називається похідною функції однієї змінної?
2) Які правила знаходження похідної ви знаєте?
3) Як обчислити похідну складної функції?
4) Які функції називають складними?
5) Які формули диференціювання Ви знаєте?
6) Що називається диференціалом функції однієї змінної?
7) Чому дорівнює диференціал аргументу цієї функції?
8) Як обчислити диференціал функції?
9) В чому полягає геометричний зміст диференціалу функції?
10) За яких умов можна вважати, що приріст функції наближено дорівнює її диференціалу: $\Delta y \approx dy$?
11) Які Ви знаєте застосування до наближених обчислень?

12) Як виконати обчислення наближеного значення приросту функції?

13) Що називається приростом аргументу?

14) Що називається приростом функції?

Приклад 1 [28]. Знайти частинні похідні першого і другого порядків функції

$$z = e^{xy} + y\sin x$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + y\cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} + \sin x.$$

Потім знайдемо немішані похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} - y\sin x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$$

Для мішаних похідних маємо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) + \cos x = e^{xy} + xye^{xy} + \cos x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

і, отже, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \cos x$.

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = f(x;y)$, яка задовольняє рівняння

$$xz + ytgz = xy + 1.$$

Розв'язання. Продиференціюємо цю рівність по x, вважаючи змінну z функцією від x і y. В результаті дістанемо рівняння

$$z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial x} = y,$$

з якого маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(x + \frac{y}{\cos^2 z}\right) = y - z.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(y-z)\cos^2 z}{x\cos^2 z + y}.$$

Аналогічно знаходимо частинну похідну по y:

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + tgz + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\cos^2 z - \sin z\cos z}{y + x\cos^2 z}.$$

Приклад 3.

Визначити похідну складеної функції за аргументом *t,* якщо $z = x^{y+4}, \quad x = e^{t^2}, \quad y = t^2 - 3$.

Для розв`язування використовуємо формули:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = (y+4)x^{y+4-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{y+4}\ln x; \qquad \frac{dx}{dt} = e^{t^2}2t;$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t.$$

$$Тоді\ \frac{dz}{dt} = (y+4)x^{y+3}\cdot e^{t^2}\cdot 2t + x^{y+4}\ln x\cdot 2t =$$

$$= 2t\cdot x^{y+3}((y+4)e^{t^2} + x\ln x).$$

У цьому випадку можна одержати результат тільки через аргумент *t:*

$$\frac{dz}{dt} = 2t(e^{t^2})^{t^2}((t^2+1)e^{t^2} + e^{t^2}\ln e^{t^2}) =$$

$$= 2te^{t^4}((t^2+1)e^{t^2} + e^{t^2}t^2) = 2te^{t^4+t^2}(2t^2+1).$$

Приклад 4 [24]**.** Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні σ у точці M_0:

σ: $x^2+2xy+y^2-5x+3y+2z=0$, $\qquad M_o(2; 1;-1)$.

Рівняння дотичної площини має такий вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z-z_0) = 0,$$

де $F(x, y, z)=0$ – рівняння поверхні σ.

У нашому випадку:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y - 5; \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(M_0) = 4 + 2 - 5 = 1;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y + 3; \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) = 4 + 2 + 3 = 9;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2; \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 2.$$

Рівняння дотичної площини таке:

$$1(x-2)+9(y-1)+2(z+1)=0.$$

Рівняння нормалі в загальному вигляді:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)}.$$

Тоді для даної поверхні нормаль має рівняння

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{9}=\frac{z+1}{2}.$$

Приклад 5 [14].

Перевірити, чи є функція $z=f(x, y)$ розв`язком диференціального рівняння

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0; \quad z=\frac{x-y}{3x}.$$

Диференціюємо дану функцію:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{3x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{3x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2y}{3x^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{3x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Підставимо отримані похідні в диференціальне рівняння

$$x\left(-\frac{2y}{3x^3}\right)+2y\left(\frac{1}{3x^2}\right)+xy\cdot 0=-\frac{2y}{3x^2}+\frac{2y}{3x^2}=0.$$

Із цього випливає, що функція $z=\frac{x-y}{3x}$ є розв`язком даного диференціального рівняння.

Приклад 6 [20]**.**

Обчислити наближено: $1.02^{3,01}$

Розглянемо функцію $z=x^y$. Тоді $1.02^{3,01}=(x+\Delta x)^{y+\Delta y}$

Скористаємось формулою (28.7). $z\approx z(x_0\,,y_0)+dz(x_0,y_0)$

$$x=1.02\,;\ \ y=3.01$$

$$x_0=1\quad,\ \ y_0=\ 3$$

$$\Delta x=x-x_0=1.02-1=0.02$$

$$\Delta y=y-y_0=3.01-3=0.01$$

$$Z'x=yx^{y-1}\,;\qquad Z'x(1;3)=3*1^2=3$$

$Z'y=x^y*\ln x;\ \ Z'y(1;3)=1^3\ln 1=0$

$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$

$$dz(1,3) = \ 3 * 0.02 + 0 * 0.01 = 0.06$$

$$z(1,3) = \ 1^3 = 1$$

$$1.02^{3.01} \approx 1 + 0.06 = 1.06\,.$$

Для порівняння: точне значення $1{,}02^{3{,}01} \approx 1.061418168$

Приклад 7 [20].

Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = \ln(x^2 + y^2), x = u * v,\ y = \frac{u}{v}$

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2+y^2} * v + \frac{2y}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{v}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2x}{x^2+y^2} * u + \frac{2y}{x^2+y^2}\left(-\frac{u}{v^2}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\left(2xv + \frac{2y}{v}\right)}{x^2 + y^2} = 2\frac{\left(uv^2 + \frac{u}{v^2}\right)}{u^2v^2 + \frac{u^2}{v^2}} = 2\frac{uv^4 + u}{u^2v^4 + u^2} = 2\frac{v^4 + 1}{u(v^4 + 1)} = \frac{2}{u}$$

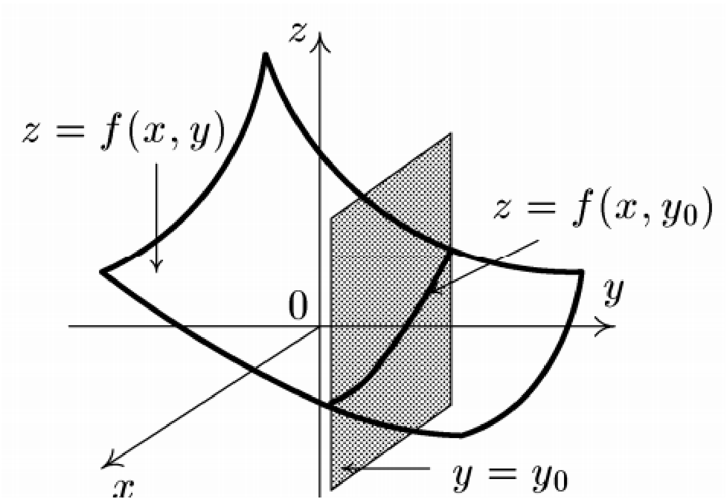
Приклад 8.

Знайти частинні похідні функції z, що задана неявно рівнянням: $e^z + z - x^2y + 1 = 0$

$$f(x;y;z) = \ e^z + z - x^2y + 1$$

$$f'_x = -2xy\,;\ \ f'_z = e^z + 1\ \Rightarrow\ \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z} = \frac{2xy}{e^z + 1}$$

$$f'_y = \ -2x\ \Rightarrow\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z} = \frac{2x}{e^z + 1}$$



Рекомендова література:

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Дидактичні матеріали з математики - К.: Вища школа., 2001. - 271 С. 31-34,66-70.

2. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – С. 53-60.

3. Лейфура В. Математика: Підручник для студентів вищ. навч. закладів 1-2-го рівнів акредитації / В.М. Лейфура, ГЛ. Голодницький, Й.І. Файст; за ред. В.М. Лейфури. - К.: Техніка, 2005 – *С.* 404-425.

4. Овчинников П. П. Вища математика : Підруч. для студ. вищ.техн. навч. закладів: У 2 ч. Ч.1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного. аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко ; За заг. ред. П.П.Овчинникова. – 2-е вид., стер. – К. : Техніка, 2000. – С. 591.

3.3. Розробка контрольної роботи

Надані функції. Обчислити:

1) похідні першого і другого порядку заданих елементарних та складних функцій однієї змінної x;

2) для другої функції (другий приклад) знайти диференціал функції.

Умови завдань для кожного варіанту занесені в таблицю:

Варіант №	Функції	Варіант №	Функції
1	$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$; $y=\arcsin(3\cos x)$ $y=e^{3x}(x^2-3x)$	6	$y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$; $y=x+ctg\frac{1}{x}$;

	при $x=1$;		$y=\frac{3}{x}\cdot\arcsin\frac{x}{3}$, $x=1$
2	$y=\frac{\sqrt[4]{x}}{x}$; $y=\frac{1}{2}\ln(x^3-3)$; $y=(x-3x^3)\sin 2x$, $x=\pi$	7	$y=\frac{x^2}{\sqrt[4]{x}}$; $y=\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}$; $y=\left(\frac{1-x^2}{2}\right)\cdot\cos 2x$, $x=\frac{\pi}{8}$
3	$y=\frac{x}{\sqrt{2x}}$; $y=2^{tgx}-2$; $y=(x^{-3}+3)\log_3 3x$, $x=3$	8	$y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2}$; $y=\frac{x}{3}+\arcsin^3 x$ $y=(x-4x^2)tg4x$, $x=\frac{\pi}{16}$.
4	$y=\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$; $y=1+ctg(-x-1)$; $y=(\sqrt{x}+0{,}5)\arcsin$, $x=0{,}25$.	9	$y=\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$; $y=\log_2(x^2+2^x)$ $y=x^{-2}\cdot 2^{1-2x}$, $x=1$.
5	$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$; $y=arctg(2\sqrt{x})$; $y=x^{-2}\cdot\cos 6x$; $x=\frac{\pi}{12}$.	10	$y=\frac{\sqrt{x}}{x^3}$; $y=3-\sin\frac{e^x}{e^x+e^3}$ $y=x^{-1}\cdot\ln 5x$, $x=0{,}2$.

Приклади розв'язання завдань:

1. Обчислити похідну першого порядку заданої елементарної функції однієї змінної x:

$$y=\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}};$$

За допомогою формул дії над степенями ($\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ і $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$) перетворюємо задану функцію до вигляду зручного для диференціювання.

$$y = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{2-\frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}}; \qquad y' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-\frac{4}{4}} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}.$$

Відповідь: $y' = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$.

2 Обчислити похідну другого порядку заданої елементарної функції однієї змінної x:

$$y'' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)'' = \frac{5}{4}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{5}{16}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{5}{16\sqrt[4]{x^3}}.$$

Відповідь: $y'' = \frac{5}{16\sqrt[4]{x^3}}$

3 Обчислити похідну першого порядку складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, однієї змінної x: $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$;

Застосовуємо формулу $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

$$y' = (\sqrt{x-\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}\cdot(x-\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}\cdot\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x\sqrt{x}-x}}.$$

Відповідь: $y' = \frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x\sqrt{x}-x}}$.

4 Обчислити похідну другого порядку складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, однієї змінної x.

$$y'' = (\sqrt{x-\sqrt{x}})'' = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x\sqrt{x}-x}}\right)' = \frac{(2\sqrt{x}-1)'(4\sqrt{x\sqrt{x}-x}) - (4\sqrt{x\sqrt{x}-x})'(2\sqrt{x}-1)}{16x(\sqrt{x}-1)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(4\sqrt{x\sqrt{x}-x}) - \frac{4}{2\sqrt{x\sqrt{x}-x}}(x\sqrt{x}-x)'(2\sqrt{x}-1)}{16x(\sqrt{x}-1)} =$$

$$= \frac{(4\sqrt{x\sqrt{x}-x})\ \sqrt{x\sqrt{x}-x} - (x^{1+\frac{1}{2}}-x)'(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{16x(\sqrt{x}-1)\ \sqrt{x}\ \sqrt{x\sqrt{x}-x}} = \frac{4(x\sqrt{x}-x) - (\frac{3}{2}\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{16x^2(\sqrt{x}-1)\ \sqrt{\sqrt{x}-1}}$$

Відповідь: $y'' = \frac{-7x+2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}}{32x^2(\sqrt{x}-1)\ \sqrt{\sqrt{x}-1}}$

5 Обчислити похідну першого порядку функції однієї змінної x в точці $x = 3$.

$y = arctg\frac{x}{3} + \ln 2x$;

Застосовуємо формули $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$ і $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$.

$$y' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)' + \frac{1}{2x}\cdot(2x)' = \frac{9}{9+x^2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2x}\cdot 2 = \frac{3}{9+x^2} + \frac{1}{x}.$$

$y'(3) = \frac{3}{9+3^2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{18} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Відповідь: $y'(3) = \frac{1}{2}$.

Рекомендована література:

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Дидактичні матеріали з математики - К.: Вища школа., 2001. - 271 С. 31-34,66-70.

2. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – С. 53-60.

3. Лейфура В. Математика: Підручник для студентів вищ. навч. закладів 1-2-го рівнів акредитації / В.М. Лейфура, ГЛ. Голодницький, Й.І. Файст; за ред. В.М. Лейфури. - К.: Техніка, 2005 – *С.* 404-425.

4. Овчинников П. П. Вища математика : Підруч. для студ. вищ.техн. навч. закладів: У 2 ч. Ч.1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного. аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко ; За заг. ред. П.П.Овчинникова. – 2-е вид., стер. – К. : Техніка, 2000. – С. 591.

3.4. Практична перевірка ефективності методичного забезпечення

Результати роботи застосувалися при дистанційному навчанні студентів групи МІ-31. Анкетування і контрольні зрізи показали ефективність засвоєння матеріалу даної теми.

Для визначення ступеню готовності до введення дистанційної освіти серед студентів було проведено опитування:

1. Якщо б ви навчалися на дистанційних курсах з математики, то що для вас було б найголовнішим?

- сертифікат;
- знання;
- унікальна і ефективна методика;
- вартість навчання;
- акредитація навчального закладу;
- кваліфікація викладачів.

2. Які матеріали ви вважаєте потрібними на сайтах навчальних закладів?

- навчально-методичну літературу;
- навчальні програми;
- відео лекції;
- приклади розв’язання задач;
- інтерактивні тести.

3. Як Ви ставитеся до впровадження технологій дистанційної освіти з математики?

- підтримую;
- не підтримую;
- нейтрально.

4. Чи потрібен тьютор в дистанційній освіті з математики?

- обов'язково потрібен;
- іноді;
- не потрібен;
- не знаю хто такий тьютор.

5. Чи вважаєте ви використання дистанційних освітніх технологій з математики засобом, який сприяє підвищенню рівня ефективності навчальної діяльності?

- так;
- ні;
- важко відповісти.

6. Чи можливо отримати реальні знання в процесі дистанційної освіти математики?

- так;
- ні;
- важко відповісти.

7. Хотіли б ви навчатися на дистанційних курсах з математики?

- так;
- ні;
- вже навчаюся;
- маю сертифікати про закінчення таких курсів;
- не знаю.

8. Чи задоволені ви результатами вашого дистанційного навчання з математики?

- важко відповісти, не можу оцінити;
- задоволений;
- розчарований;
- ніколи не навчався дистанційно.

9. Визначте за ступенем важливості характерні риси дистанційної освіти:

- Гнучкість;
- Модульність;
- Паралельність;
- Велика аудиторія;
- Економічність;
- Технологічність;
- Соціальна рівність;
- Нова роль вчителя (викладача);
- Якість.

10. Від чого залежить ефективність дистанційного навчання?

- Від якості використаних матеріалів (навчальних курсів, методичних розробок);
- Майстерності педагогів та викладачів – тьюторів, що беруть участь у цьому процесі;
- Якості технічного забезпечення навчального процесу;
- Мотивації учня;
- Мотивації вчителя (викладача);
- Інше__________.

Зведені відповіді розподілилися наступним чином:

- консерватизм і непідготовленість науково-педагогічних кадрів;
- інерційність до нововведень;
- бюрократизм і проблема фінансування розроблення сучасних курсів;
- низький мотиваційний рівень викладачів (відсутність фінансової мотивації кваліфікованих викладачів для підготовки електронних навчальних матеріалів);
- низька автономія навчальних закладів;
- відсутність нормативно-регламентованих документів з боку держави, а також державної програми з розвитку дистанційної освіти, яка б враховувала міжнародний досвід;
- низька обізнаність населення про дистанційні курси з математики, і, як результат, відсутність їх підтримки і розвитку;
- не розроблені методичні основи застосування дистанційних курсів з математики;
- психологічний бар'єр як для викладачів, так і для студентів;
- проблема підготовки викладачів у новій якості – тьютора;
- відсутність норм часу розробку електронних навчальних видань та стандартизованих вимог до якості контенту;
- відсутність повноцінних методик об'єктивного контролю знань з математики при проходженні усіх видів електронного тестування;

- проблема визнання дипломів, отриманих в результаті проходження дистанційних курсів з математики;

Більшість студентів вважає, що дистанційне навчання потрібне в поєднанні з традиційним. Значна частина використовує наявні курси. Основними факторами, які зумовлюють недостатній рівень впровадження технологій дистанційного навчання можна вважати:

- недостатній рівень впровадження сучасних технологій;
- недостатній рівень вивчення світового досвіду запровадження дистанційного навчання;
- недостатня підготовка вчителів до розроблення курсів дистанційного навчання (як з математики, так і з інших дисциплін).

Висновки

Дистанційне навчання відіграє надзвичайно велике значення у навчанні студентів із вадами, інвалідів, сліпих, глухонімих, які не можуть навчатися за звичайною програмою. Та залишати їх без освіти не слід тільки через їхні вади, адже ці люди теж можуть працювати, приносити користь державі та суспільству. Така людина теж може бути генієм і зробити кращим свою країну.

У сучасному світі не можна обійтися і без постійного підвищення кваліфікації, адже все навколо нас постійно удосконалюється і науково – технічний прогрес іде вперед. І саме ця технологія забезпечить високу якість навчання, з одного боку, за рахунок залучення у якості викладачів спеціалістів високого класу і , з іншого, - корекції методик навчання залежно від рівня підготовки і психологічних особливостей учнів, які виявляються попереднім тестуванням, а з третього, – навчання здійснюється вдома за комп'ютером, у зручний для студента час.

Дистанційне навчання – це технологія майбутнього. Воно може застосовуватися в усіх системах освіти, здійснювати широке коло завдань освіти, навчання, виховання та розвитку особистості. Тому необхідно розробляти та впроваджувати нові розробки для дистанційних форм навчання. Можливо навіть, що така технологія зможе замінити реальні школи, університети та інші навчальні заклади у майбутньому.

Під час написання даної дипломної роботи згідно із поставленою метою було систематизовано теоретичний матеріал по темі «Похідна та її застосування», розглянуто методику вивчення даної теми в шкільному курсі математики а також дидактичне забезпечення для студентів при дистанційному навчанні. Дана курсова робота складається з двох розділів:

1) науково – теоретичні основи вивчення теми;
2) дидактичне забезпечення з теми «Похідна та її застосування» для студентів при дистанційному навчанні;

У першому розділі «Науково-теоретичні основи вивчення теми дослідження» зроблено аналіз літературних джерел, досліджено питання дистанційного навчання.

У другому розділі «Методика вивчення похідної у шкільному курсі алгебри в початків аналізу» розглянуто особливості методики вивчення даної теми, висвітлено можливість використання комп'ютерних технологій та наведено приклади.

У третьому розділі «Дидактичне забезпечення з теми «Похідна та її застосування» для студентів при дистанційному навчанні» висвітлено методичні розробки, які можуть бути використані викладачами і студентами вищих навчальних закладів.

Цінність роботи полягає в тому, що підготовлений матеріал може бути використаний викладачами і студентами при вивченні курсу методика навчання математики, а зокрема теми «Похідна та її застосування» при дистанційному навчанні.

Список використаних джерел

1.Авраменко М. І. Уроки алгебри і початків аналізу в 10 і 11 класах. / М. І. Авраменко – К.: Освіта, 1995. – 320 с.

2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Дидактичні матеріали з математики - К.: Вища школа., 2001. - 271 с.

3. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 – 11 кл. загальноосв. шкіл. / Г. П. Бевз. – К.: Освіта, 2006. – 350 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз – К.: [б. в.], 1977. – 486 с.

5. Биков В. Ю. Технологія розробки дистанційного курсу: навч. посіб. / За ред. В. Ю. Бикова та В. М. Кухаренка. – К.: Міленіум, 2012. – 324 с.

6. Валєєв К. Г. Вища математика: Навч. посібник: У 2 ч. Ч.1 / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова ; М-во освіти і науки України. КНЕУ. – К. : КНЕУ, 2001. – 546 с. – Бібліогр.: 527 с.

7. Вдосконалення змісту й технологій оцінювання якості підготовки майбутніх фахівців відповідно до вимог Європейської асоціації: Матеріали регіонального науково-практичного семінару / За ред. Г.В. Терещука. – Тернопіль: вид-во ТНПУ ім .В. Гнатюка, 2007. – 160 с.

8. Горлова Т. І. Похідна функції. Обчислення похідної елементарних функцій. Фізичний і геометричний зміст похідної. // Матаматика в школах України. - 2016. - № 27. – С. 11-14.

9. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. :– Х. : Веста, 2008. – 240 с.

10. Жалдак М.І. Гуманітарний потенціал інформатизації навчального процесу // Проблеми інформатизації освіти: зб. наук. праць. / М.І. Жалдак. - К.: УДПУ, 2005. – С 20.

11. Желтуха Т. В. Застосування похідної до розв'язування задач. Уроки алгебри та початків аналізу в 11 класі. Профільний рівень // Математика в школах України. – 2015. – № 1-2. – С 34-39.

12. Закон України «Про національну програму інформатизації» (дата набуття чинності 12 березня 1998 р.) [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/anot/74/98-%D0%B2%D1%80.

13. Калашник І.І. Стимулювання особистісного розвитку учнів на уроках математики за допомогою інтерактивного навчання. / І.І. Калашник. // Математика в школах України. – 2010. - №5. – С. 2-6.

14. Кушнір В.А. Лабораторний практикум з методики навчання математики: Навчальний посібник для студ. вищих навч. закл. / В.А. Кушнір, Р.Я. Ріжняк. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. – 224 с.

15. Колесник Т. Д. Похідна і задачі з параметрами в шкільному курсі математики / Т. Колесник, О. Тарасенко // Математика в рідній школі. – 2018. – № 10. – С. 33-38.

16. Концепція розвитку дистанційної освіти в Україні (затверджено Постановою МОН України 20 грудня 2014 р.) [Електронний ресурс]. Режим доступу: zakon.rada.gov.ua

17. Кравченко З. А. Застосування похідної та інтеграла в процесі розв'язування прикладних задач фізичного змісту /З. А. Кравченко // Математика в рідній школі. – 2015. – № 1-2. – С. 29-33.

18. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 536 с.

19. Лейфура В. Математика: Підручник для студентів вищ. навч. закладів 1-2-го рівнів акредитації / В.М. Лейфура, ГЛ. Голодницький, Й.І. Файст; за ред. В.М. Лейфури. - К.: Техніка, 2005 – 425 с.

20. Малафіїк І.В. Дидактика. Навчальний посібник / І.В. Малафіїк. – К.:Кондор, 2005. – 397с.

21. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: 10 кл. : Підручник для закладів загальної середньої освіти, профільний рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський. - Х. : Гімназія, 2018. – 281 с.

22. Навчальна програма з для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

23. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: навч. посіб. для 11 кл. / Є. П. Нелін, О.Є. Долгова. – Х.: Світ дитинства, 2007. – 416 с.

24. Овчинников П. П. Вища математика : Підруч. для студ. вищ.техн. навч. закладів: У 2 ч. Ч.1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного. аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко ; За заг. ред. П.П.Овчинникова. – 2-е вид., стер. – К. : Техніка, 2000. – 591 с.

25. Офіційний сайт з історії дистанційного навчання http:// istoriya-dystantsijnoho-navchannya

26. Офіційний сайт дистанційного навчання http://osvita.ua/legislation/Dist_osv/2999/

27. Про Державну національну програму «Освіта. Україна XXI століття» (затверджено Постановою від 3 листопада 2015 р.№ 896) [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/896-93-%D0%BF.

28. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник / З. І. Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.

29. Таланчук П. М. Створення дидактичних матеріалів з дистанційної форми навчання: Інформ. - метод. зб. / П. М. Таланчук, А. Г. Шевцов, В. Т. Бажан, В. М. Ген-ба. – К.: Ун-т "Україна", 2001. – 48 с.

30. Хазін А. П. Алгебраїчне введення поняття похідної в курсі математики старшої школи // Математика в школі. - 2009. - №11. – С. 25-29 .

31. Черкасов Р. С. Методика викладання математики в середній школі / Р. С. Черкасов, А. А. Столяр – Харків, 1992. – 320 с.

32. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: навчальний посібник для учнів проф.-тех. навч. закл. / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.: Техніка, 2002. – 544 с.

33. Ягодзінський А. Й. Оцінка знань студентів та якості підготовки фахівців (методичні та методологічні аспекти): навч. посіб. / А. Й. Ягодзінський, А.О. Муромцева, Л.В. Іванова та ін.; Одеський держ. економічний ун-т. – К., 2010. – 216 с.