Форма № Н-9.02


Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання


Дипломна робота

бакалавр

на тему

# Методика навчання учнів розв’язуванню ірраціональних рівнянь та нерівностей у класах профільного рівня


Виконала: студентка 4 курсу
групи МЕІ-41
напряму підготовки 6.040201 «Математика»
Жабчик Аліна Миколаївна

Керівник: канд. пед. наук, проф.
кафедри математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: канд. фіз.- мат. наук, доц.
Сяський Василь Олексійович


Рівне – 2019 року

ЗМІСТ

# ВСТУП

Сучасний етап розвитку математичної освіти України характеризується спрямованістю на побудову особистісно-орієнтованої системи навчання, впровадженням компетентністного підходу до організації математичної підготовки учнів, що цілком відповідає сучасним світовим тенденціям. Модернізація національної української школи потребує підвищення активності та самостійності учнів, формування в них умінь опрацьовувати та плідно використовувати освітню інформацію, що у свою чергу передбачає комп'ютеризацію освіти.

Ірраціональні числа виникли в геометрії при вивченні довжин. Геометричне ірраціональне число виражає собою довжину відрізка, неспівмірного з відрізком одиничної довжини. Остаточного розвитку теорія ірраціональних чисел набула тільки в другій половині XIX ст. у працях німецьких математиків Дедекінда, Кантора і Вейєрштрасса, а П'єр Ферма (1601–1665) в середині XVII ст. запропонував загальний метод розв'язування ірраціональних рівнянь, зводячи їх до системи цілих алгебраїчних рівнянь. Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет, який розвиває аналітичне і логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість. Основними завданнями курсу алгебри є вдосконалення обчислювальних навичок школярів, формування формально-оперативних умінь, достатніх для вільного їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також у процесі розгляду різноманітних практичних застосувань математичного знання. Рівняння і нерівності складають одну із основних ліній шкільного курсу алгебри. Вони є засобом розширення, поглиблення і закріплення теоретичних знань учнів. Апарат рівнянь широко використовується при розв’язуванні математичних задач, наприклад, при знаходженні області визначення, при побудові графіків функцій, при розв’язуванні геометричних задач.

Однією з основних змістовно - методичних ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу є лінія ірраціональних рівнянь і нерівностей, яка має розгалужену систему внутрішньо-предметних зв’язків з іншими лініями курсу. Рівняння і нерівності широко представлені в завданнях державної підсумкової атестації з математики, в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання, хоча результати виконання цих завдань в останні роки суттєво погіршилися. Це зумовило актуальність проблеми дослідження і обґрунтування можливості вдосконалення методики вивчення ірраціональних рівнянь, нерівностей у курсі алгебри і початків аналізу.

У роботі показані розв’язання ірраціональних рівнянь як стандартного методу, так і не стандартного методу розв’язання. Нестандартні методи розв’язання задач є одним із ефективних засобів підготовки учнів до життя у сучасному суспільстві, а володіння широким арсеналом таких методів є важливою задачею математичної освіти. Сучасне технізоване суспільство вимагає від людини не лише швидкого опанування технологіями, а й насамперед нестандартного мислення. Одним із способів розв’язування нестандартних рівнянь є метод мажорант (спосіб оцінки), який застосовують, якщо неможливо розв’язати рівняння стандартним способом.

Матеріал, пов’язаний з рівняннями і нерівностями, становить значну частину шкільного курсу математики. Одним із складних розділів алгебри, які вивчаються в шкільній програмі, є ірраціональні рівняння і нерівності, так як у школі на вивчення цих тем виділяють досить мало часу.

**Об'єкт дослідження -** процес навчання алгебри і початків аналізу в класах профільного рівня.

**Предмет дослідження –** методи розв'язування різних видів ірраціональних рівнянь і нерівностей.

**Мета бакалаврської роботи** полягає в розробці методики вивчення теми «Ірраціональні рівняння і нерівності» в шкільному курсі математики, формуванні в учнів уміння застосовувати різні способи розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.

**Гіпотеза дослідження:** якщо формувати в учнів уміння розрізняти основні види ірраціональних рівнянь і нерівностей, вміння застосовувати необхідні прийоми та способи їх розв'язування, то учні будуть свідомо вибирати найраціональніший спосіб розв'язування, а це сприятиме розвитку особистості учня та формуватиме стійкий інтерес до предмету.

Виділимо такі основні **завдання:**

1. Здійснити огляд навчально-методичної літератури з теми «Ірраціональні рівняння та нерівності».
2. Дослідити методику вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей.
3. Проаналізувати підручники з алгебри та початків аналізу.
4. Підібрати приклади розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.

Для успішного вирішення поставленої мети та розв'язання визначених завдань використовувались такі методи дослідження: теоретичного пошуку (теоретичний аналіз науково – педагогічної та методичної літератури, класифікація, систематизація та узагальнення теоретичних та емпіричних даних, конкретизація теоретичних знань); емпіричні (вивчення та узагальнення методичного досвіду вчителів з даної проблеми, аналіз продуктів діяльності тощо).

# РОЗДІЛ 1. НАУКОВО – ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

## 1.1.З історії виникнення ірраціональних рівнянь та нерівностей

Однією із важливих причин появи математичних теорій було відкриття ірраціональності. Термін «раціональне» (число) походить від латиноамериканського слова ratio – відношення, яке є перекладом грецького слова "логос". На відміну від раціональних чисел, числа, що виражають відношення несумірних величин, були названі ще в старовину ірраціональними, тобто нераціональними (по-грецьки "алогос"). Правда, спочатку терміни "раціональний" і "ірраціональний" відносилися не до чисел, а до сумірних і відповідно не сумірних величин, які піфагорійці називали вираженими і невираженими, Теодор Киренський же симетричними і асиметричними. У V-VI століттях римські автори Капела і Касіодор переклали ці терміни на латинь словами rationalis i irrationalis.

Старогрецькі математики класичної епохи користувалися тільки раціональними числами (вірніше цілими, дробами і додатними). У своїх «Початках» Евклід подає вчення про ірраціональності чисто геометрично. Ймовірно, найпершою ірраціональністю, відкритою старогрецькими математиками, було число $\pi$. Можна з упевненістю вважати, що початковим пунктом цього відкриття були спроби знайти загальну міру за допомогою алгоритму поперемінного віднімання, відомого зараз як алгоритм Евкліда. Можливо також, що деяку роль зіграло завдання математичної теорії музики: ділення октави, що приводить до пропорції $1:n = n:2$. Не останню роль зіграв і характерний для піфагорійської школи загальний інтерес до теоретико - числових проблем.

Багато учених країн Середнього Сходу в своїх працях вживали ірраціональні числа як повноправні об'єкти алгебри. Більш того, коментуючи «Початки» Евкліда і досліджуючи загальну теорію відношення Евдокса, Омар Хайям вже на початку XII ст. теоретично розширює поняття числа до додатного дійсного числа.

У сучасних навчальних посібниках основа визначення ірраціонального числа спирається на ідеї ал-Каши, Стевіна і Декарта про вимірювання відрізків і про необмежене наближення до шуканого числа за допомогою нескінченних десяткових дробів. Проте обґрунтування властивостей дійсних чисел і повна теорія їх була розроблена лише в XIXст.

Значення відкриття ірраціональності в математиці важко переоцінити. У математику, мало не вперше, увійшла складна теоретична абстракція, що не має аналога в донауковому загальнолюдському досвіді. Теодор з Кирени ( V ст. до н.е.) встановив ірраціональність квадратного кореня з чисел 3,5,6,17, які не є повним квадратом, Теетет (410-369 до н.е.) дав одну з перших класифікацій ірраціональностей. З появою ірраціональностей в старогрецькій математиці виникли серйозні труднощі як в теоретико - числовому, так і в геометричному плані.

На початку XIX ст. були розв’язані основні завдання, що стояли перед алгеброю в першому тисячолітті її розвитку. Були розроблені правила буквеного числення для раціональних і ірраціональних виразів, з'ясовано питання про розв’язування рівнянь в радикалах і побудована строга теорія комплексних чисел. Поверхневому спостерігачеві могло здатися, що тепер математики розв'язуватимуть нові і нові класи рівнянь алгебри, доводитимуть нову тотожність алгебри і так далі. Проте розвиток алгебри пішов іншим шляхом: з науки про буквене числення і рівняння вона перетворилася на загальну науку про операції і їх властивості. Наприклад, ірраціональні рівняння і нерівності можна розглянути як над полем комплексних чисел, так і над полем дійсних чисел. [30]

На сучасному етапі розвитку людства поняття «ірраціональність» витлумачується по-різному і має широке застосування. Можна стверджувати, що цей термін уперше був досліджений у філософському вченні, а саме — при вивченні мислення як прерогативи людського існування. У філософії з'ясовується можливість визначення змісту поняття «ірраціональне», однією з головних рис якого є прагнення до універсальності.

Ірраціоналізм (лат. irrationalis — несвідоме, нерозумне) — напрям у філософії, що проголошує верховенство почуттєвого начала і робить його основною характеристикою як самого світу, так і світосприйняття, визнаючи дійсність такою, що не може бути вираженою у логічних поняттях.

Ірраціональність у гуманітарному вченні. Значення поняття «ірраціональне» розглянуто у гуманітарному знанні, точніше — в психології, в якій під терміном «ірраціональна» розуміють настанову людини, якщо вона породжує її неадекватну поведінку в якомусь конкретному випадку.

Ірраціональність у мистецтві. Розчарування в силі розуму пізнати дійсність було однією з головних причин виникнення ірраціоналізму, що став основою культурного розвитку кінця XIX – початку XX ст. — так, наприклад, ірраціональні засади символізму, романтизму та неоромантизму особливо помітні в поезії, живописі, театральному мистецтві тощо.

Ірраціональність у математиці. Ірраціональні числа виникли в геометрії при вивченні довжин. Геометричне ірраціональне число виражає собою довжину відрізка, неспівмірного з відрізком одиничної довжини. За легендою, піфагорійці відкрили несумірність деяких геометричних величин, але оскільки це суперечило їхній філософії, цілком побудованій на натуральних числах, вони тримали це відкриття у найсуворішій таємниці і навіть покарали на смерть одного з членів свого братства, який (за різними джерелами) перший знайшов або розголосив цей факт.

Остаточного розвитку теорія ірраціональних чисел набула тільки в другій половині XIX ст. у працях німецьких математиків Дедекінда, Кантора і Вейєрштрасса, а П'єр Ферма (1601–1665) в середині XVII ст. запропонував загальний метод розв'язування ірраціональних рівнянь, зводячи їх до системи цілих алгебраїчних рівнянь.[4]

## 1.2. Поняття про ірраціональне рівняння та нерівність: основні означення, твердження

Ірраціональним алгебраїчним рівнянням називається рівняння, яке містить ірраціональні алгебраїчні функції, в яких невідоме може знаходитись під знаком радикала (або в дробовому степені).

Ірраціональні рівняння розв'язуються в області дійсних чисел, тому всі корені парного степеня потрібно розглядати як арифметичні. Умова невід'ємності підкореневого виразу в радикалах парного степеня є основним при встановленні ОДЗ (області допустимих значень) рівняння.

Розглянемо наступні теореми.

*Теорема 1.* Якщо $n$ – натуральне число, то в області дійсних чисел рівняння

$$[f(x)]^{2n} = [\varphi(x)]^{2n} \qquad (1)$$

рівносильне сукупності рівнянь

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{і} \quad f(x) = -\varphi(x) \qquad (2)$$

*Доведення.* Очевидно, кожний корінь будь-якого з рівнянь сукупності (2) є коренем рівняння (1). Доведемо тепер, що кожний корінь рівняння (1) є коренем принаймні одного з рівнянь сукупності (2).

Нехай $x = a$ є довільний корінь рівняння (1). Тоді маємо тотожність

$$[f(a)]^{2n} = [\varphi(a)]^{2n}. \qquad (3)$$

Якщо $f(a) = 0$ і $\varphi(a) = 0$, то $f(a) = \pm\varphi(a)$ і $x = a$ є коренем сукупності рівнянь (2). Тому розглянемо випадок, коли $f(a) \neq 0$ і $\varphi(a) \neq 0$.

Позначаючи числа $f(a)$ і $\varphi(a)$ буквами $f$ і $\varphi$, з тотожності (3) дістанемо:

$f^{2n} - \varphi^{2n} = 0$, або $(f^2)^n - (\varphi^2)^n = 0$,

звідки

$$(f^2 - \varphi^2)(f^{2n-2} + f^{2n-4}\varphi^2 + f^{2n-5}\varphi^4 + \cdots + \varphi^{2n-2}) = 0. \qquad (4)$$

Оскільки при $f \neq 0$ і $\varphi \neq 0$ $f^{2n-2} + f^{2n-4}\varphi^2 + f^{2n-5}\varphi^4 + \cdots + \varphi^{2n-2} > 0$, то з тотожності (4) дістанемо: $f^2 - \varphi^2 = 0$ і, отже, $f(a) = \varphi(a)$ або $f(a) = -\varphi(a)$, звідки виходить, що $x = a$ є коренем одного з рівнянь сукупності (2). Теорема доведена.

Із теореми 1 випливає, що в області дійсних чисел рівняння (1) є наслідком рівняння

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (5)$$

Зазначимо, що рівняння (1) і (5) можуть бути рівносильними. Це буде тоді, коли рівняння $f(x) = -\varphi(x)$, або немає коренів, або коли усі корені цього рівняння є коренем рівняння (5).

*Теорема 2.* Якщо $n$ – натуральне число, то в області дійсних чисел рівняння

$$[f(x)]^{2n-1} = [\varphi(x)]^{2n-1} \qquad (6)$$

рівносильне рівнянню:

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (7)$$

*Доведення.* Очевидно, кожний корінь будь-якого з рівнянь сукупності (7) є коренем рівняння (6). Доведемо тепер, що кожний корінь рівняння (6) є коренем принаймні одного з рівнянь сукупності (7).

Нехай – $x = a$ довільний корінь рівняння (6). Тоді маємо тотожність

$$[f(a)]^m = [\varphi(a)]^m, \qquad (8)$$

де $m = 2n - 1$.

Перетворимо тотожність (8), позначаючи числа $f(a)$ і $\varphi(a)$ буквами $f$ і $\varphi$. Маємо:

$$f^m - \varphi^m = 0, \text{ або } (f-\varphi)(f^{m-1} + f^{m-2}\varphi + f^{m-3}\varphi^2 + \dots + \varphi^{m-1}) = 0. \quad (9)$$

Оскільки $m$ – непарне натуральне число, то з тотожності (8) виходить, що $f$ і $\varphi$ дорівнюють 0 або мають однакові знаки.

Якщо $f = 0$ і $\varphi = 0$, то $f(a) = \varphi(a)$ і, отже $x = a$ є коренем рівняння (7).

Якщо $f$ і $\varphi$ – числа однакових знаків, то при непарному $m$ $f^{m-1} + f^{m-2}\varphi + f^{m-3}\varphi^2 + \dots + \varphi^{m-1} > 0$ і з тотожності (9) виходить, що $f(a) - \varphi(a) = 0$, тобто $f(a) = \varphi(a)$.

Отже, $x = a$ є коренем рівняння (7).

Теорема доведена.

Із Теореми 2 дістаємо, що коли при розв'язуванні ірраціонального рівняння обидві частини підносилися до непарного степеня, то від цього не могли з'явитися сторонні корені.

Рівняння

$$\sqrt[n]{f(x)} = a, \quad (10)$$

де $f(x)$ – раціональна функція, $a$ – константа, $n$ – натуральне число, $n \geq 2$, називатимемо *найпростішим ірраціональним рівнянням.*

Якщо $n$ – парне число, а $a < 0$, то рівняння (10) немає коренів (оскільки при будь-якому допустимому значенні $x$ його ліва частина невід'ємна).

Якщо $n$ – парне число, а $a \geq 0$, то рівняння (10) рівносильне рівнянню

$$f(x) = a. \quad (11)$$

Справді, за Теоремою 1 рівняння (11) рівносильне сукупності рівнянь (10) і рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = -a$. Але при $a > 0$ рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = -a$ немає розв'язків, а при $a = 0$ корені цього рівняння є коренями рівняння (10).

Якщо $n$ – непарне число, то за Теоремою 2 рівняння (10) при будь-якому $a$ рівносильне рівнянню (11).[16]

Ірраціональними називають нерівності, в яких змінна стоїть під знаком радикала нерівності.

Основним методом розв’язування ірраціональних нерівностей є метод зведення вихідної нерівності до рівносильної системи раціональних нерівностей або сукупності таких систем. Даний метод ґрунтується на чотирьох твердженнях:

1. Нерівність виду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), n \in N,$ є рівносильною системі нерівностей: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}. \end{cases}$

2. Нерівність виду $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$ є рівносильною нерівності $f(x) < (g(x))^{2n+1}$.

3. Нерівність виду $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ є рівносильною сукупності двох систем нерівностей: $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}. \end{cases}$ і $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

При цьому множина розв’язків початкової нерівності складається з об’єднання множин розв’язків цих систем.

4. Нерівність виду $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$ є рівносильною нерівності $f(x) > (g(x))^{2n+1}$.

Проте треба пам’ятати:

1. Піднесення обох частин нерівності до парного степеня із збереженням знака нерівності завжди є рівносильними перетвореннями.

2. Якщо обидві частини нерівності на деякій множині X визначені та набувають тільки додатних значень, то можна піднести обидві частини нерівності до квадрату або до іншого парного степеня із збереженням знака вихідної нерівності, оскільки отримаємо рівносильну вихідній на множині X.

3. Ірраціональні нерівності виду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, де $g(x) < 0$, підносити до парного степеня не можна.[3]

## 1.3.Особливості викладання даної теми у класах профільного рівня за діючою програмою та підручниками

У старшій школі вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма.

Організація навчання математики в класах математичного математичного профілю передбачає реалізацію особистісно-орієнтованої моделі навчання, першочергове завдання якої полягає в тому, щоб розпізнати та розвинути, конкретні здібності, схильності, особливості мислення, потенціал кожного учня.[21]

Навчання математики профільного рівня передбачає поглиблену, у порівнянні з академічним рівнем, підготовку учнів з математики в органічному поєднанні з вивченням усіх природничих предметів, міжпредметну інтеграцію на основі застосування математичних методів (зокрема, методу математичного моделювання). При цьому, математична та природничо-наукова підготовка в профільних математичних, фізичних і фізико-математичних класах має бути орієнтована як на обов’язкове засвоєння учнями конкретних знань, так і на формування умінь моделювання реальних процесів. Необхідно також враховувати, що при формуванні компетентностей в галузі природничих наук, частина загальнонаукових, загальнонавчальних та соціально-особистісних компетентностей формується за участі гуманітарних та соціально-економічних дисциплін.[19]

У природничих науках, особливо у фізиці, математика є не лише галуззю загальноосвітніх знань, а й методом наукового пізнання. Тому навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів вимагає більш поглибленого, у порівнянні з академічним, рівнем її вивчення. Разом з тим, курс математики для цих класів відрізняється від академічного не стільки обсягом знань, якими мають оволодіти учні, скільки рівнем його обґрунтованості, абстрактності, загальності, прикладної спрямованості. Це, з одного боку, сприятиме кращому розумінню учнями значення математики як науки, усвідомленню ними універсальності математичних знань, необхідності повнішого і свідомого володіння математичними методами, а з іншого — формуванню у школярів природничих знань як цілісної системи.

Широке і системне застосування методу математичного моделювання протягом вивчення усього курсу математики має стати потужним засобом формування в учнів навички повсякденного користування математикою при вивченні природничих предметів. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру прикладів та ілюстрацій, доведень, побудови системи вправ і завдань, визначення системи контролю. Такий підхід посилить прикладну спрямованість навчання математики, сприятиме формуванню в учнів стійких мотивів до оволодіння математичними знаннями.

Навчання в профільних класах передбачає істотне збільшення частки самостійної пізнавальної та практичної діяльності учнів. При цьому, основна функція вчителя полягатиме у педагогічному супроводі кожного учня в його пізнавальній діяльності, корекції його навчальних досягнень, допомозі школярам в актуалізації необхідних знань, отриманих ними раніше. Іншими словами, вчитель покликаний не стільки вчити школярів математиці, скільки створювати такі навчальні ситуації, в яких самі учні самостійно чи у співробітництві один з

одним (або з учителем) опановують систему математичних знань, умінь та навичок.

У 2018 – 2019 навчальному році для вивчення математики профільного рівня в 10 класі відводиться 315 годин (алгебра та початки аналізу: 6 год на тиждень, І семестр – 96 год, ІІ семестр – 114 год і геометрія: 3 год на тиждень, І семестр – 48 год, ІІ семестр – 57 год). [20]

Програма з математики у класах профільного рівня відводить на вивчення теми "Степенева функція" 30 години, з них 15 годин на тему «Ірраціональні рівняння та нерівності». Дана тема вивчається в 10 класі. Розв'язування ірраціональних рівнянь пов'язується з вивченням в 10 класі властивостей кореня степеня. В навчальній програмі передбачено ознайомити учнів зі способами розв'язування найпростіших ірраціональних рівнянь та нерівностей, до складу яких входять корені, як правило, другого і третього степенів. Основна мета при розв'язуванні таких рівнянь - звести ірраціональне рівняння до алгебраїчного методом перетворень, які дають можливість позбутися коренів. У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про ірраціональні рівняння та нерівності, поглиблюють навички та вміння розв’язувати рівняння та нерівності різних видів.

Знання різних методів розв’язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, безперечно, неабияк допоможе учням легше і швидше розв’язувати рівняння та нерівності, а також забезпечить можливість і вміння аналізувати використаний метод і сприятиме уникненню помилок при розв’язуванні. Використання різних способів розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей дозволить в окремих випадках замінити одне розв’язування іншим легшим, шукати більш ефективні методи навчання, творчо розв’язувати інші питання навчального процесу. Розв’язуючи одне і теж ірраціональне рівняння різними методами, можна краще зрозуміти специфіку того чи іншого методу, його переваги і недоліки в залежності від рівняння. Розв’язування таких рівнянь різними способами, сприятиме не тільки формуванню пізнавальної активності учнів, але й систематизації знань, вмінь та навичок з окремих розділів шкільної математики. Основна складність полягає в тому, щоб навчити школярів розв’язувати

ірраціональні рівняння та нерівності.

У шкільному курсі математики профільного рівня розглядають такі методи розв’язування ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин рівняння до одного степеня, метод заміни змінних, метод рівносильних перетворень, а також застосування властивостей функцій до розв’язування ірраціональних рівнянь (скінченна ОДЗ, оцінка значень лівої та правої частин рівняння, використання монотонності функцій). При вивченні ірраціональних нерівностей розглядають такі методи розв’язування: метод інтервалів (для нерівностей виду $f(x)0$, $f(x) < 0$), метод рівносильних перетворень ірраціональних нерівностей.

Розглядається розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами.

Перевагу слід надати основним методам розв’язування ірраціональних рівнянь і нерівностей. При цьому в процесі розв’язування потрібно чітко назвати кроки розв’язування ірраціональних рівнянь, які надалі спрощують розв’язання рівнянь даного типу. Під час підготовки до вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей потрібно повторити з учнями поняття корінь *n-го* степеня, арифметичний корінь *n-го* степеня, дії над коренями, перетворення коренів.[18]

При вивченні ірраціональних рівнянь та нерівностей в загальноосвітній школі до знань та вмінь учнів ставляться наступні вимоги:

1) учні повинні розуміти значення поняття ірраціональних рівнянь та нерівностей;

2) учні повинні вміти: розв’язувати різними методами ірраціональні рівняння та нерівності.

Тему «Ірраціональні рівняння і нерівності» не можна віднести до легко засвоюваної. Її традиційне вивчення зосереджене в рамках курсу VIII – XI класів, що дозволяє повноцінно враховувати вікові можливості учнів у формуванні ряду умін і навиків, але часу на вивчення теми відведено небагато. Перш за все, відмітимо, що при викладі даної теми реалізуються багато загальних методичних особливостей, характерних для курсу в цілому. У всіх підручниках при вивченні квадратного кореня і його властивостей (8 – 9 класів) розв’язуються прості ірраціональні рівняння. Основні ж методи розв’язання ірраціональних рівнянь і нерівностей розглянуті в підручниках 10 – 11 класів (академічного і профільного рівнів ).

Навчання математики у 10-х класах профільного рівня здійснюється *за підручниками:*

Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В. Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків : Гімназія, 2018. – 400 с. : іл.

Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. – 336 с.

Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 448с.

Підручник надає можливість кожному учню знаходити своє співвідношення між науковістю матеріалу, що вивчається, і його доступністю. Основний матеріал, який повинні засвоїти учні, структуровано у формі довідкових таблиць на початку параграфа, які містять систематизацію теоретичного матеріалу та способів діяльності із цим матеріалом у формі спеціальних орієнтирів по розв’язуванню завдань. У першу чергу учні повинні засвоїти матеріал, який міститься в таблицях. Тому при поясненні нового матеріалу доцільно використовувати роботу з підручником за відповідними таблицями та рисунками.

У розділі «Степенева функція» дається узагальнене поняття квадратного кореня – корінь n – го степеня та його властивості, наводяться приклади ірраціональних рівнянь і нерівностей. Також розглядаються методи розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей та застосування властивостей функції до розв’язування ірраціональних рівнянь.[13]

Алгебра і початки аналізу: проф.. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б.Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018, продовжує серію підручників з математики, створених цими авторами для 5-9 класів, розвиває закладені в цій серії методичні

підходи і принципи.

Відповідно до кількості тем, що вивчаються у 10 класі, підручник містить п`ять параграфів, які в свою чергу поділено на пункти.

У параграфі 2 «Степенева функція» розглядаються пункти: «Ірраціональні рівняння», «Різні прийоми розв’язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем» та «Ірраціональні нерівності». Дані пункти розпочинаються викладом теоретичного матеріалу. Наведено приклади розв’язування рівнянь та нерівностей, які підводять учнів до визначення ірраціонального рівняння та нерівності. Показано як використовувати метод заміни змінної при розв’язуванні ірраціональних рівнянь. Після викладу теоретичного матеріалу йдуть питання для перевірки знань.[12]

# РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

## 2.1.Методи розв’язування ірраціональних рівнянь

У роботі будемо дотримуватися наступного визначення ірраціонального рівняння:

*Ірраціональним рівнянням* називається рівняння, що містить невідоме під знаком кореня.

Перш ніж приступити до розв'язування складних рівнянь, учні повинні навчитися вирішувати найпростіші ірраціональні рівняння. До простих ірраціональних рівнянь відносяться рівняння виду: $\sqrt{\mathrm{A}(x)} = \mathrm{B}(x)$,$\sqrt{\mathrm{A}(x)} = \sqrt{\mathrm{B}(x)}$

Основна ідея розв'язання ірраціонального рівняння полягає у зведенні його до раціонального алгебраїчного рівняння, яке або рівносильне вихідному ірраціональному рівнянню, або є його наслідком.

Головний спосіб позбутися від кореня і отримати раціональне рівняння – зведення обох частин рівняння в одну й ту ж степінь, яку має корінь, що містить невідоме, і подальше «визволення» від радикала за формулою $(\sqrt[n]{\varphi(x)})^n = \varphi(x)$.

Якщо обидві частини ірраціонального рівняння звести в одну і ту ж непарну степінь і звільнити від радикалів, то вийде рівняння, рівносильне вихідному. [6]

При зведенні рівняння в парну степінь виходить рівняння, що є наслідком вихідного. Тому можлива поява сторонніх розв'язувань рівняння, але не можлива втрата коренів. Причина появи коренів полягає в тому, що при зведенні в парну степінь чисел, рівних за абсолютною величиною, але різних за знаком, виходить один і той самий результат.

Так як можуть з'явитися сторонні корені, то необхідно робити перевірку, підставляючи знайдені значення невідомої величини тільки в початкове рівняння, а не в якісь проміжні.

### 2.1.1.Метод піднесення обох частин рівняння до одного й того самого степеня

Використовуючи цей метод, потрібно пам'ятати, що при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня утворюється рівносильне йому рівняння, а при піднесенні до парного – рівняння-наслідок, в останньому випадку можуть з'явитися сторонні корені. Щоб вилучити сторонні корені роблять перевірку, тобто підставляють знайдені корені у задане рівняння.

Зауважимо, що у випадку рівняння $\sqrt[2n]{f(x)} = a, (a \geq 0)$ перевірку знайдених коренів робити необов'язково, оскільки при піднесенні до парного степеня $2n$ одержуємо рівняння $f(x) = a^{2n}$, рівносильне заданому. Розв'язуючи ірраціональне рівняння або роблячи перевірку знайдених коренів, потрібно пам'ятати, що в ірраціональному рівнянні корені парного степеня є арифметичними (тобто їх значення можуть бути лише невід'ємними числами ), а корені непарного степеня – алгебраїчними (їх значення можуть бути будь-якими дійсними числами).[24]

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння: $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$

**Розв'язання.** $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow x^3-5x^2+16x-5=(x-2)^3 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^3-5x^2+16x-5=x^3-6x^2+12x-8 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2+4x+3=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

**Відповідь:** -3; -1.

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння: $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$

**Розв'язання.** Для зручності подальших перетворень задане рівняння запишемо у вигляді: $\sqrt{x+7}=9-\sqrt{x-2}$ . Тоді $(\sqrt{x+7})^2=(9-\sqrt{x-2})^2$, $x+7=81--18\sqrt{x-2}+x-2$, $\sqrt{x-2}=4$, $x=18$.

Підставивши $x=18$ у задане рівняння, переконуємося, що це число є його коренем.

**Відповідь:** 18.

Розглянемо окремі види ірраціональних рівнянь та їх розв'язування.

**1.** $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geq 0 \text{ або } f(x)\geq 0 \end{cases}$

(з нерівностей $g(x)\geq 0$ або $f(x)\geq 0$ вибирають найпростішу).

**Приклад 3.** Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{x^2+3x-6}=\sqrt[4]{-2x}$

**Розв'язання.** $\sqrt[4]{x^2+3x-6}=\sqrt[4]{-2x} \leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-6=-2x, \\ -2x\geq 0, \end{cases} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6=0, \\ x\leq 0, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x\leq 0, \end{cases} \leftrightarrow x=-6.$$

**Відповідь:** -6 .

**2.** $$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

**Приклад 4.** Розв'язати рівняння $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$

**Розв'язання.** $$\sqrt{6-4x-x^2} = x+4 \leftrightarrow \begin{cases} 6-4x-x^2 = (x+4)^2, \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 6-4x-x^2 = x^2+8x+16, \\ x \geq -4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5 = 0, \\ x \geq -4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x \geq -4 \end{cases} \leftrightarrow x = -1.$$

**3.** $$f(x) \cdot \sqrt[2n]{g(x)} = 0 \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) - 0, \\ g(x) \geq 0, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \\ x \epsilon D(f). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

**Приклад 5.** Розв'язати рівняння $(x^2-9)\sqrt[6]{x+2}$=0

**Розв'язання.** $$(x^2-9)\sqrt[6]{x+2}=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-9=0, \\ x+2 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+2=0, \\ x \epsilon R \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3, \end{array}\right. \\ x \geq -2, \end{cases} \\ x=-2 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

**Відповідь:** -2; 3. [11]

### 2.1.2. Метод заміни

Часто при розв'язуванні ірраціональних рівнянь використовують метод заміни. Розглянемо приклади.

**Приклад 6.** Розв'язати рівняння $x^2-4x-6 = \sqrt{2x^2-8x+12}$

**Розв'язання.** Введемо заміну: $\sqrt{2x^2-8x+12} = t$. Тоді $2x^2-8x+12 = t^2$ $x^2-4x+6 = \frac{t^2}{2}, x^2-4x-6 = \frac{t^2}{2} - 12$ і задане рівняння набирає вигляду $\frac{t^2}{2} - 12$ =t, звідки $t^2-2t-24 = 0$, $\left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=6. \end{array}\right.$

З урахуванням уведеної заміни маємо: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-8x+12} = -4, \\ \sqrt{2x^2-8x+12} = 6 \end{array}\right. \leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x \epsilon \emptyset, \\ 2x^2-8x+12 = 36 \end{array}\right. \leftrightarrow x^2-4x-12 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Іноді при розв'язуванні ірраціональних рівнянь доцільно вводити не одну, а кілька замін. Проілюструємо це на прикладі.

**Приклад 7.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2+5} = 4x$

**Розв'язання.** Нехай $\sqrt{x^2-4x+5}=a$ і $\sqrt{x^2+5}=b$ за змістом замін: $a>0$ $i$ $b>0$. Одержуємо таку систему рівнянь: $\begin{cases} a+b=4x, \\ a^2-b^2=-4x. \end{cases}$

Додавши обидві частини рівнянь системи одержимо: $a+b+a^2-b^2=0 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow (a+b)(a-b+1)=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0, \\ a-b+1=0. \end{array}\right.$$

Випадок $a+b=0$ неможливий, оскільки $a>0$ і $b>0$. Тоді $a-b=-1$. Віднімемо ліві і праві частини рівнянь $a+b=4x$ і $a-b=-1.$ Одержимо: $2b=4x+1 \leftrightarrow 2\sqrt{x^2+5}=4x+1 \leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2+5)=(4x+1)^{2,} \\ 4x+1\geq 0, \end{cases} \leftrightarrow$

$$\begin{cases} 12x^2+8x-19=0 \\ x\geq -\frac{1}{4}, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{-2-\sqrt{61}}{6}, \\ x=\frac{-2+\sqrt{61}}{6}, \end{array}\right. \\ x\geq -\frac{1}{4}, \end{cases} \leftrightarrow x=\frac{-2+\sqrt{61}}{6}.$$

**Відповідь:** $\frac{-2+\sqrt{61}}{6}$. [5]

### 2.1.3. Метод розкладання на множники

При розв'язуванні рівнянь, зокрема ірраціональних, також використовують метод розкладання на множники. Застосовуючи цей метод, усі члени рівняння переносять у ліву частину і утворений вираз подають у вигляді добутку. У результаті одержують рівняння вигляду $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_n(x)=0$, (1) яке рівносильне системі $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \quad\vdots \\ f_n(x)=0, \end{array}\right. \\ x\epsilon\text{ОДЗ}, \end{cases}$

де ОДЗ – область допустимих значень невідомого заданого рівняння.

Для того, щоб спеціально не знаходити ОДЗ заданого рівняння (адже це додаткове розв'язування нерівностей), можна вчинити так: розв'язати кожне із рівнянь: $f_1(x)=0, f_2(x)=0,\ldots, f_n(x)=0$, після чого зробити перевірку знайдених коренів шляхом підстановки їх у задане рівняння.

Якщо ОДЗ заданого рівняння – множина R усіх дійсних чисел, то рівняння (1) рівносильне сукупності: $\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \quad\vdots \\ f_n(x)=0. \end{array}\right.$ [23]

**Приклад 8.** Розв'язати рівняння $(x-3)\cdot\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$

**Розв'язання.**

$$(x-3)\cdot\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6 \leftrightarrow (x-3)\cdot\sqrt{x^2-5x+4}-2\cdot(x-3)=0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5x+4}-2\right)=0 \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} x-3=0, \\ \sqrt{x^2-5x+4}-2=0, \end{array}\right. \\ x\epsilon\text{ОДЗ} \end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} x-3=0, \\ x^2-5x+4=4 \end{array}\right. \\ x^2-5x+4\geq 0, \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=0, \\ x=5, \end{array}\right. \\ x\epsilon(-\infty;1]\cup[4;+\infty), \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=5. \end{array}\right.$$

**Відповідь:** 0; 5.

**Приклад 9.** Розв'язати рівняння $(x^2-16)\cdot\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}=0$

**Розв'язання.** Задане рівняння рівносильне системі:

$$\left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (x^2-16=0, \\ \sqrt{x+3}=0, \\ \sqrt{x-1}=0, \end{array}\right. \\ x\epsilon\text{ОДЗ} \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} x=-4, \\ x=4, \\ x=-3, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x\epsilon\text{ОДЗ} \end{array}\right.$$

Для того, щоб не знаходити ОДЗ заданого рівняння, зробимо перевірку знайдених коренів, підставивши їх у задане рівняння. Перевіркою встановлюємо, що лише $x=1$ і $x=4$ - корені заданого рівняння.

**Відповідь:** 1;4.

### 2.1.4. Використання монотонності функції

**Означення.** Функція $y=f(x)$ називається *зростаючою (спадною)* на множині X, якщо більшому значенню аргументу $x(x\epsilon X)$ відповідає більше (менше) значення функції $y=f(x)$.

З означення випливають твердження:

а) сума зростаючих (спадних) на множині Х функцій також зростаюча (спадна) функція;

б) якщо функція у $= f(x)$зростає (спадає) на множині Х, то й функція у $=$ $f(x) + $ c, де c $\epsilon R$, також зростає (спадає) на Х;

в) якщо функції у $= f(x)$ і у $= g(x)$ зростають (спадають) на множині Х і набувають на цій множині невід'ємних значень, то функція у $= f(x) \cdot g(x)$ також зростає (спадає) на Х;

г) якщо функція у $= f(x)$ зростає (спадає) на множині Х і набуває на цій множині невід'ємних значень, то функція у $= (f(x))^{\alpha}$, де $\alpha \epsilon (0; +\infty)$, також зростає (спадає) на Х;

д) якщо функція у $= f(x)$ зростає (спадає) на множині Х, а функція у $= g(x)$ зростає (спадає) на множині Е($f(x)$), то складена функція $y = g(f(x))$ зростає на множині Х;

е) якщо функція у $= f(x)$ зростає (спадає) на множині Х, а функція у $= g(x)$ спадає (зростає) на множині Е($f(x)$), то складена функція $y = g(f(x))$

спадає на множині Х.

**Лема.** Якщо функція у $= f(x)$ зростає (спадає) на множині Х, то рівняння $f(x) = a,$ де $a \epsilon R$, має на Х не більш ніж один корінь.

Розглянемо на прикладах застосування леми до розв'язування ірраціональних рівнянь. [16]

**Приклад 10.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} =$

$$= 4 - 2x$$

**Розв'язання.**

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} + 2x = 4$$

Розглянемо функцію $f_1(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} + 2x$ . Її область визначення D($f_1$) $= [1; +\infty)$. Оскільки функції у $= \sqrt{x-1}$, у $= \sqrt{x+3}$ і у= $x$ зростають на D($f_1$), то й функція у=$f_1(x)$ монотонно зростає. Отже, рівняння має не більш ніж один корінь, який у цьому випадку неважко підібрати: $x = 1$.

**Відповідь:** 1.

**Приклад 11.** Розв'язати рівняння $\sqrt{\sqrt{2x}+36+2\sqrt{2x+49}}+\sqrt{x+17+3\sqrt{2x+25}}=9\sqrt{2}$

**Розв'язання.**

Розглянемо функцію: $f_2(x)=\sqrt{\sqrt{2x}+36+2\sqrt{2x+49}}+\sqrt{x+17+3\sqrt{2x+25}}$

D($f_2$) $= [-12{,}5; +\infty)$. Функція у=$f_2(x)$, як сума зростаючих на D($f_2$) функцій, зростає на всій області визначення, тому це рівняння має не більш ніж один корінь, яким є $x = 0$.

**Відповідь:** 0. [22]

### 2.1.5. Метод мажорант

*Метод мажорант* – метод оцінки лівої та правої частин рівняння або нерівності. Назва методу мажорант походить від французьких слів *majorer* – оцінити зверху та *minorer* – оцінити знизу.

Мажорантою функції $f(x)$на множині Р називається таке число М, що/або $f(x) \leq$ M для всіх $x\epsilon P$, або $f(x) \geq$ M для всіх $x\epsilon P$.

Якщо завданням є розв'язати рівняння виду $f(x) = g(x)$, у якому для будь-якого $x$ із області визначення виконуються умови: $\begin{cases} f(x) \geq \text{M}; \\ g(x) \geq \text{M}, \end{cases}$

то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = \text{M}; \\ g(x) = \text{M}. \end{cases}$

Часто визначну роль під час розв'язування рівнянь і нерівностей відіграє властивість обмеженості знизу або зверху функції на деякій множині.

Саме метод мажорант сприяє розвитку абстрактних здібностей учнів, виявляє й активізує навички аналізу та узагальнень. Розв'язування рівнянь прискорює мисленнєві процеси й розвиває логічне мислення та пам'ять.

Алгоритм розв'язування рівнянь методом мажорант:

- Оцінка лівої частини рівняння.
- Оцінка правої частини рівняння.
- Складаємо систему рівнянь.
- Знаходимо спільні розв'язки.
- Враховуємо ОДЗ. [7]

**Приклад 12.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{(x-2y+1)^2+1}+\sqrt{(3x-y-2)^2+25}=6$$

**Розв'язання .**

ОДЗ: $x\epsilon R, y\epsilon R$.

$$f(x)=\sqrt{(x-2y+1)^2+1};$$

$$(x-2y+1)^2+1\geq 1;$$

$$\sqrt{(x-2y+1)^2+1}\geq 1;$$

$$g(x)=\sqrt{(3x-y-2)^2+25};$$

$$(3x-y-2)^2+25\geq 25;$$

$$\sqrt{(3x-y-2)^2+25}\geq 5.$$

Якщо $(x-2y+1)^2=0,$ то $\sqrt{(x-2y+1)^2+1}=1,$

Якщо $(3x-y-2)^2=0,$ то $\sqrt{(3x-y-2)^2+25}=5.$

Тому $f(x)+g(x)=6$ , якщо $\begin{cases}(x-2y+1)^2=0;\\(3x-y-2)^2=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x-2y=-1;\\6x-2y=4,\end{cases}$

$$\begin{cases}x-2y=-1;\\3x-y=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$$

**Відповідь:** 1;1.

**Приклад 13.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x+\frac{4}{x}}+\sqrt{4y+\frac{1}{y})}=4$

**Розв'язання.**

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0; \\ y > 0. \end{cases}$ $\sqrt{2\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{2(2y+\frac{1}{2y}}=4;$ $f(x)=\sqrt{2\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right);}$

$x>0,$ тому $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\geq 2;$ $2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)\geq 4;$ $\sqrt{2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)}\geq 2;$ $g(y)=\sqrt{2\left(2y+\dfrac{1}{2y}\right)};$

$y>0,$ тому $2y+\dfrac{1}{2y}\geq 2;$ $2\left(2y+\dfrac{1}{2y}\right)\geq 4;$ $\sqrt{2\left(2y+\dfrac{1}{2y}\right)}\geq 2.$

Якщо $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=2; \\ 2y+\frac{1}{2y}=2, \end{cases}$ то $f(x)+g(x)=4;$ $\begin{cases} \frac{x}{2}=1; \\ 2y=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2; \\ y=0{,}5. \end{cases}$

**Відповідь:** 2; 0,5. [24]

**Приклад 14.** Розв'язати рівняння $\sqrt{16-(5x+2)^2}=4+cos^2\frac{15\pi x}{4}$

**Розв'язання.**

ОДЗ: $x\epsilon[-1{,}2;0{,}4]$.

$$f(x)=\sqrt{16-(5x+2)^2};$$

$$16-(5x+2)^2\leq 16;$$

$$0\leq\sqrt{16-(5x+2)^2}\leq 4;$$

$$0\leq f(x)\leq 4;$$

$$g(x)=4+cos^2\frac{15\pi x}{4};$$

$$0\leq cos^2\frac{15\pi x}{4}\leq 1;$$

$$4\leq cos^2\frac{15\pi x}{4}+4\leq 5;$$

$$4\leq g(x)\leq 5.$$

$$\begin{cases} f(x)=4; \\ g(x)=4; \end{cases}\quad \begin{cases} \sqrt{16-(5x+2)^2}=4; \\ 4+cos^2\dfrac{15\pi x}{4}=4; \end{cases}\quad \begin{cases} (5x+2)^2=0; \\ cos^2\dfrac{15\pi x}{4}=0; \end{cases}\quad \begin{cases} (5x+2)^2=0; \\ \dfrac{1+cos\dfrac{15\pi x}{2}}{2}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-0{,}4; \\ cos\dfrac{15\pi x}{2}=-1; \end{cases}\quad \begin{cases} x=-0{,}4; \\ x=\dfrac{2}{15}+\dfrac{4}{15}n, \qquad n\epsilon Z. \end{cases}$$

Якщо n=-2, то x=-0,4.

**Відповідь:** -0,4.

## 2.2. Методи розв'язування ірраціональних нерівностей

### 2.2.1. Метод зведення до еквівалентної системи або сукупності раціональних нерівностей

Основним методом розв'язування ірраціональних нерівностей є зведення вихідної нерівності до рівносильної системи або сукупності систем раціональних нерівностей. [25]

Найбільш прості ірраціональні нерівності мають вигляд:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x) \textit{або} \sqrt{A(x)} \leq B(x)$;

2) $\sqrt{A(x)} > B(x) \textit{або} \sqrt{A(x)} \geq B(x)$;

3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ *або* $\sqrt{A(x)} \geq \sqrt{B(x)}$.

Ірраціональна нерівність $\sqrt{A(x)} < B(x)$ *або* $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ рівносильна системі нерівностей : $\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$ або $\begin{cases} A(x) \leq B^2(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$ (1)

Перша нерівність у системі (1) є результатом зведення вихідної нерівності в степінь, друга нерівність є умова існування кореня у вихідній нерівності, а третя нерівність системи висловлює умові, при якій цю нерівність можна зводити в квадрат. Ірраціональна нерівність $\sqrt{A(x)} > B(x)$ або $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$ рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) \geq B^2(x), \\ B(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2)$$

Звернемося до першої системи схеми (2). Перша нерівність цієї системи є результатом зведення вихідної нерівності в квадрат, друга – умова, при якій це можна робити. Друга система схеми (2) відповідає випадку, коли права частина негативна, і зводити в квадрат не можна. Але в цьому й немає необхідності: ліва частина вихідної нерівності – арифметичний корінь – не є негативною при всіх $x$, при яких існує ліва частина. Перша нерівність другої системи і є умова існування лівої частини.

Ірраціональна нерівність $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ *або* $\sqrt{A(x)} \geq \sqrt{B(x)}$ рівносильна системі нерівностей: $\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$ *або* $\begin{cases} A(x) \geq B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$ (3)

Оскільки обидві частини вихідної нерівності не негативні при всіх *x,* при яких вони визначенні, тому його можна звести в квадрат. Перша нерівність у системі (3) є результатом зведення вихідної нерівності в степінь. Друга нерівність є умова існування кореня у вихідній нерівності, зрозуміло, що нерівність $A(x) \geq 0$ виконується при цьому автоматично.

Схеми (1) – (3)- наш основний інструмент при розв'язанні ірраціональних нерівностей, до них зводиться розв'язання будь –якої задачі. [8]

**Приклад 15.** Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}$

**Розв'язання.** Згідно зі схемою (3), така нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x, \\ 2-3x \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ x \leq \dfrac{2}{3} \leftrightarrow \dfrac{1}{5} < x \leq \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

**Відповідь.** $\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$.

**Приклад 16.** Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} > 2$.

**Розв'язання.** Перенесемо другий радикал в праву частину, щоб обидві частини нерівності стали невід'ємними, і його можна було звести в квадрат:

$$\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-2} + 2 \leftrightarrow 2x+3 > x-2+4\sqrt{x-2}+4 \leftrightarrow x+1 > 4\sqrt{x-2}.$$

Ми прийшли до найпростішого стандарту нерівності , яке згідно зі схемою (1) рівносильне системі:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x+1 > 0, \\ 16(x-2) < x^2+2x+1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2-14x+33 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x > 11 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \leq x < 3, \\ x > 11. \end{array}\right.$$

**Відповідь.** $x \epsilon [2;3) \cup (11;+\infty)$.

### 2.2.2. Метод інтервалів

Метод інтервалів ґрунтується на наступному правилі: щоб розв’язати нерівність $f(x) > 0$ треба:

1. Знайти ОДЗ нерівності.

2. Розв’язати рівняння $f(x) = 0$.

3. Розбити за допомогою знайдених коренів ОДЗ нерівності на проміжки. (На кожному з цих проміжків функція $f(x)$ має постійний знак).

4. Визначити, який знак має функція $f(x)$ на кожному з цих проміжків. Ті проміжки, на яких $f(x) > 0$, охоплюють всі розв’язки даної нерівності.

З незначними змінами це правило можна використовувати і для розв’язування нерівностей $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$. [27]

**Приклад 17**. Розв’язати нерівність: $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$.

**Розв’язання.** Позначимо $f(x) = \sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$, нам потрібно розв’язати нерівність $f(x) > 0$.

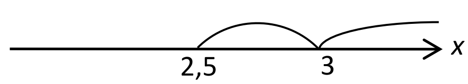
1. Знайдемо ОДЗ нерівності: $\begin{cases} x+6 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ 2x-5 \geq 0. \end{cases}$ $x \in [2{,}5; +\infty)$.

2. Розв’яжемо рівняння $\sqrt{x+6} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$, або

$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5},$ $\quad x + 6 - 2\sqrt{(x+6)(x+1)} = 2x - 5;$ $2\sqrt{x^2+7x+6} = 12;$ $\sqrt{x^2+7x+6} = 6;$ $x^2 + 7x - 30 = 0;$ $x_1 = 3$, $x_2 = -10$.

Перевірка показує, що $x = 3$ дійсно є коренем, а $x = -10$ – сторонній корінь рівняння.

3.




Точка 3 ділить ОДЗ $x \in [2{,}5; +\infty)$ на два проміжки:$[2{,}5; 3)$ і $(3; +\infty)$. Сама точка 3 не входить в жодний з проміжків тому, що $f(3) = 0$.

4. Визначимо знаки функції $f(x)$ на кожному проміжку:

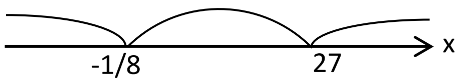
а) $x \in [2{,}5; 3)$. Оберемо деяку контрольну точку, наприклад $x = 2{,}5$, $f(2{,}5) = \sqrt{8{,}5} - \sqrt{3{,}5} > 0$. Отже $f(x) > 0$;

б) $x \in (3; +\infty)$. Оберемо $x = 4$, $f(4) = \sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{3} < 0$, $f(x) < 0$.

**Відповідь**: $x \in [2{,}5; 3)$.

**Приклад 18**. Розв'язати нерівність: $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} > 3$.

**Розв'язання.** ОДЗ нерівності: $(-\infty; +\infty)$. Розв'яжемо рівняння $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3$. Для цього зробимо заміну $\sqrt[3]{x} = y$; $2y^2 - 5y - 3 = 0$, $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Тоді $\sqrt[3]{x} = 3$, $x_1 = 27$, $\sqrt[3]{x} = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{8}$. Точки $27; -\frac{1}{8}$ розбивають ОДЗ на три проміжки: $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right), \left(-\frac{1}{8}; 27\right), (27; +\infty)$.




1) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right)$, контрольна точка $x = -1$. Маємо $2\sqrt[3]{1} - 5\sqrt[3]{-1} = 2 + 5 > 3$;

2) $x \in \left(-\frac{1}{8}; 27\right)$, контрольна точка $x = 0$, маємо $0 < 3$;

3) $x \in (27; +\infty)$, контрольна точка $x = 64$, тоді $2\sqrt[3]{64^2} - 5\sqrt[3]{64} = 2 \cdot 16 - 5 \cdot 4 = 32 - 20 > 3$;

**Відповідь:** $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right) \cup (27; +\infty)$.

Зауважимо, що розв'язуючи дану нерівність цим методом, ми одночасно розв'язали рівняння $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3$, ($x_1 = 27$; $x_2 = -\frac{1}{8}$) і нерівність $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} > 3$, $\left(x \in \left(-\frac{1}{8}; 27\right)\right)$. В цьому полягає особливість методу інтервалів.

Метод інтервалів часто називають *загальним методом* розв'язування нерівностей. Справа в тому, що цим методом можна розв'язувати не тільки ірраціональні нерівності, але і будь-які інші нерівності (раціональні, показникові, логарифмічні тощо).

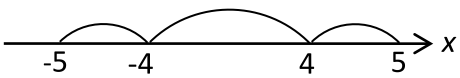
**Приклад19.** Розв'язати систему нерівностей: $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$

**Розв'язання.** Ми розв'яжемо спочатку кожну з нерівностей системи окремо, а потім знайдемо переріз одержаних проміжків.

1. $\sqrt{4x-7} < x$. ОДЗ: $x \in [\frac{7}{4}; +\infty)$. Рівняння $\sqrt{4x-7} = x$ зводимо до рівняння

$x^2 - 4x + 7 = 0$, яке немає розв'язків. Тому розглянемо проміжок $[\frac{7}{4}; +\infty)$. Контрольна точка $x = \frac{7}{4}$. Маємо $\sqrt{4 \cdot \frac{7}{4} - 7} = 0 < \frac{7}{4}$ задовольняє нерівності. Отже, розв'язком нерівності є проміжок $x \in [\frac{7}{4}; +\infty)$.

2. $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4$. ОДЗ: $x \in [-5; 5]$. Рівняння $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4$ має корені $x_1 = -4$; $x_2 = 4$. Вони розбивають ОДЗ на три проміжки:




$$[-5; -4), (-4; 4), (4; 5].$$

Перевірка за допомогою контрольних точок показує, що розв'язком нерівності є проміжок $x \in (-4; 4)$.

Тепер знаходимо $\left[\frac{7}{4}; +\infty\right) \cap (-4; 4) = (\frac{7}{4}; 4]$.

**Відповідь:** $x \in (\frac{7}{4}; 4]$. [17]

### 2.2.3. Метод введення нової змінної

Для розв'язання ірраціональних нерівностей, так само як і для розв'язання ірраціональних рівнянь, з успіхом може застосовуватися введення нової змінної.

Іноді вдається ірраціональну функцію, що входить у нерівність, замінити новою змінною таким чином, що щодо цієї змінної нерівність стає раціональною. [29]

**Приклад 20 .** Розв'язати нерівність $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$.

**Розв'язання .** Перепишемо вихідне рівняння $-9\sqrt[4]{x} + (\sqrt[4]{x})^2 + 18 \geq 0$

Зробимо заміну t=$\sqrt[4]{x}$, t≥0. Тоді отримаємо $\begin{cases} -9t + t^2 + 18 \geq 0, \\ t \geq 0, \end{cases} \leftrightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 6, \\ t \leq 3, \end{array}\right. \\ t \geq 0, \end{cases} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \geq 6, \\ 0 \leq t \leq 3. \end{array}\right.$ Таким чином, для визначення $x$ отримаємо сукупність нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} \geq 6, \\ 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3, \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 6^4, \\ 0 \leq x \leq 3^4, \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1296, \\ 0 \leq x \leq 81. \end{array}\right.$$

**Відповідь.** $x\epsilon[0; 81]\cup[1296; +\infty]$.

### 2.2.4. Множення обох частин нерівностей на функцію

Вирази $\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b}\ і\ \alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}$ називаються *сполученими один одному.* Зауважимо, що їхня твірна $\alpha^2 a - \beta^2 b$ вже не містить коренів з $a\ і\ b,$ тому в ряді завдань замість зведення в квадрат, що призводить до занадто громіздких виразів, розумніше помножити обидві частини нерівності на вираз, поєднане однією з них.

**Приклад 21.** Розв'язати нерівність $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+3} < 2x - 1.$

**Розв'язання .** Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases} 5x+1 \geq 0, \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}.$

Помножимо обидві частини даної нерівності на вираз, поєднаний його лівій частині і, очевидно, позитивне ОДЗ:

$$(5x+1) - (x+3) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3}\right) \leftrightarrow 2(2x-1 <$$

$$< (2x-1)(\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3})$$

Подальше розв'язання залежить, очевидно, від знаку загального множника лівої і правої частини отриманої нерівності $(2x-1).$ Якщо він менше нуля, тобто $-\frac{1}{5} \leq x\frac{1}{2}$ , скоротивши на цей негативний множник, переходимо до нерівності : $\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3} < 2,$ з якого знаходимо прямим зведенням в квадрат $-\frac{1}{5} \leq x\frac{4-\sqrt{19}}{2}$ . Після скорочення на нього отримуємо нерівність $\sqrt{5x+1} + +\sqrt{x+3} > 2,$ з якого прямим зведенням в квадрат отримуємо, що воно $x\frac{1}{2}.$

Залишилося вказати, що в третьому можливий випадок – якщо загальний множник дорівнює нулю , - нерівність не виконується: ми отримуємо тоді 0>0, що не так.

**Відповідь.** $\boldsymbol{x\epsilon}[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}; \frac{4-\sqrt{19}}{2}\Big) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$ [29]

### 2.3. Місце ірраціональних рівнянь та нерівностей у програмі ЗНО 2018-2019 навчального року

Зовнішнє незалежне оцінювання - процес визначення рівня навчальних досягнень випускників загальноосвітніх навчальних закладів (ЗНЗ) установами, що не залежать від загальноосвітніх та вищих навчальних закладів. В Україні такими установами є Український центр оцінювання якості освіти (УЦОЯО) та дев’ять регіональних центрів, включаючи Вінницький регіональний центр оцінювання якості освіти (ВРЦОЯО), організований у травні 2006 року.

Запровадження ЗНО відбувається з метою забезпечення конституційних прав громадян на рівний доступ до якісної освіти, утвердження справедливості в державі, сприяння інтеграції України в європейський освітній простір.

Дане оцінювання є:

• *зовнішнім,* оскільки процедура відбувається на базі спеціально підготовлених пунктів тестування і виключає можливість оцінювання навчальних досягнень учнів у своєму навчальному закладі;

• *незалежним,* бо здійснюється організацією, яка не залежить і не підпорядкована ЗНЗ і ВНЗ, хоч тісно співпрацює з ними;

• *об'єктивним,* оскільки ставить однакові вимоги та забезпечує рівні умови всім учасникам в Україні;

• *прозорим,* бо забезпечує можливість спостереження з боку громадськості за дотриманням усієї процедури;

• *шансом* для учнів при вступі до вищого навчального закладу.

Мета зовнішнього незалежного оцінювання з математики:

1) Виявити та оцінити рівень навчальних досягнень учасників зовнішнього незалежного оцінювання.

2) Оцінити ступінь підготовленості учасників тестування до подальшого навчання у вищих навчальних закладах.

Завдання зовнішнього незалежного оцінювання з математики полягає у тому, щоб оцінити знання та вміння учасників:

- будувати математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ та досліджувати ці моделі засобами математики;

- виконувати математичні розрахунки (виконувати дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, складати та розв'язувати задачі на пропорції, наближені обчислення тощо);

- виконувати перетворення виразів (розуміти змістове значення кожного елемента виразу, знаходити допустимі значення змінних, знаходити числові значення виразів при заданих значеннях змінних тощо);

- будувати й аналізувати графіки найпростіших функціональних залежностей, досліджувати їхні властивості;

- розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи, розв'язувати текстові задачі за допомогою рівнянь, нерівностей та їхніх систем;

- знаходити на рисунках геометричні фігури та встановлювати їхні властивості;

- знаходити кількісні характеристики геометричних фігур (довжини, величини кутів, площі, об'єми);

- розв'язувати найпростіші комбінаторні задачі та обчислювати ймовірності випадкових подій;

- аналізувати інформацію, що подана в графічній, табличній, текстовій та інших формах.

У 2019 році сертифікаційна робота з математики містить **33 завдання.** Максимальна кількість балів, яку можна набрати, правильно виконавши всі завдання, – **62.** На виконання сертифікаційної роботи відведено **180 хвилин**.

До складу сертифікаційних робіт ЗНО з математики обох рівнів входитимуть завдання чотирьох форм:

**1)Завдання з вибором однієї правильної відповіді** (№ 1–20). Завдання складається з основи та п’яти варіантів відповіді, з яких лише один правильний. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання вибрав і позначив відповідь у бланку відповідей ***А*****. Схема нарахування балів: 0** або **1** бал:**1** бал, якщо вказано правильну відповідь; **0** балів, якщо вказано неправильну відповідь, або вказано більше однієї відповіді, або відповіді на завдання не надано.

2) **Завдання на встановлення відповідності** («логічні пари») (№ 21–24). Завдання складається з основи та двох стовпчиків інформації, позначених цифрами (ліворуч) і буквами (праворуч). Виконання завдання передбачає

встановлення відповідності (утворення «логічних пар») між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання зробив позначки на перетинах рядків (цифри від 1 до 4) і колонок (букви від А до Д) у таблиці бланка відповідей ***А***. **Схема нарахування балів: 0, 1, 2, 3** або **4** бали: **1** бал – за кожну правильно встановлену відповідність («логічну пару»); **0** балів за будь-яку «логічну пару», якщо зроблено більше однієї позначки в рядку та/або колонці; **0** балів за завдання, якщо не вказано жодної правильної відповідності («логічної пари») або відповіді на завдання не надано.

3)**Завдання відкритої форми з короткою відповіддю** (№ 25–30):

– **структуроване завдання** (№ 25, 26) складається з основи та двох частин і передбачає розв’язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання, здійснивши відповідні числові розрахунки, записав, дотримуючись вимог і правил, відповіді до кожної з частин завдання в бланку відповідей ***А***;

– **неструктуроване завдання** (№ 27–30) складається з основи та передбачає розв’язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання, здійснивши відповідні числові розрахунки, записав, дотримуючись вимог і правил, кінцеву відповідь у бланку відповідей ***А***.

**Схема нарахування балів: структуроване завдання: 0, 1** або **2** бали: **1** бал – за кожну правильно вказану відповідь; **0** балів, якщо вказано обидві неправильні відповіді, або відповіді на завдання не надано; **неструктуроване завдання: 0** або **2** бали: **2** бали, якщо вказано правильну відповідь; **0** балів, якщо вказано неправильну відповідь, або відповіді не надано.

4) **Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю** (№ 31–33).

Завдання складається з основи та передбачає розв’язування задачі. Завдання вважають виконаним, якщо учасник зовнішнього незалежного оцінювання в бланку відповідей ***Б*** навів усі етапи розв’язання й обґрунтував їх, зробив посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження, проілюстрував розв’язання задачі рисунками, графіками тощо.

**Схема нарахування балів:** № 31, 32 оцінюються в **0, 1, 2, 3** або **4** бали; № 33 оцінюється в **0, 1, 2, 3, 4, 5** або **6** балів.

Результат виконання завдань 1–28, 31, 32 буде зараховано як результат державної підсумкової атестації за освітній рівень повної загальної середньої освіти для учнів (слухачів, студентів) закладів освіти, які в 2019 році завершують здобуття повної загальної середньої освіти.

Результат виконання всіх завдань сертифікаційної роботи буде використовуватися під час прийому до закладів вищої освіти.

**Вимоги програми ЗНО**

| **Учень повинен знати** | **Предметні вміння та способи навчальної діяльності** |
|---|---|
| - методи розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, а також їх системи | - розв'язувати ірраціональні рівняння і нерівності, а також їх системи;<br>- застосовувати загальні методи та прийоми (розкладання на множники, заміна змінної, застосування властивостей функцій) у процесі розв'язування рівнянь, нерівностей та їхніх систем;<br>- користуватися графічним методом розв'язування і дослідження рівнянь, нерівностей і систем;<br>- застосовувати рівняння, нерівності до розв'язування текстових задач;<br>- розв'язувати рівняння і нерівності, що містять змінну під знаком модуля;<br>- розв'язувати рівняння та нерівності з параметрами. |

Наведемо приклади тестів з теми «Ірраціональні рівняння і нерівності», які зустрічаються в ЗНО. [1]

*Завдання з вибором однієї правильної відповіді*

1. Укажіть проміжок, якому не належить корінь рівняння $\sqrt{2x+2} = x - 3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(6; 16]$ | $[3; 8]$ | $(2; +\infty]$ | $(-\infty; 3]$ | $[1; 10]$ |

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{12 - x} = x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $-4; 3$ | -4 | 3 | $\emptyset$ | -4;-3 |

3. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-1} \leq 3 - x$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $[0; 2]$ | $(-\infty; 2]$ | $[1; 2]$ | $[2; 3]$ | $[3; +\infty]$ |

4. Знайдіть усі значення $a$, за яких рівняння $\sqrt{(x-a)(x+1)} = 0$ та $(x+1)\sqrt{(x-a)} = 0$ рівносильні.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $a \leq -1$ | $a = -1$ | $a > -1$ | $a \geq -1$ | $a < -1$ |

5. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x} > -3$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | $\emptyset$ | $(9; +\infty)$ | $[0; +\infty)$ | $(0; +\infty)$ |

6. Знайти суму коренів рівнянь $\sqrt{x-1} = 2$ $і$ $\sqrt{-x} = 5$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 30 | $-20$ | 8 | $-7$ | $-24$ |

*Завдання на встановлення відповідності*

1.Установіть відповідність між рівняннями (1-4) і коренями (А – Д) цих рівнянь.

| | | |
|---|---|---|
| 1 $\sqrt{x-1} = 4$ | | А 27 |
| 2 $\sqrt[3]{x^2} = 9$ | | Б 17 |

3 $0{,}5\sqrt{x} = 3$ В 16

4 6+$\sqrt{x^3} = 70$ Г 25

Д 36

2.Установіть відповідність між нерівностями (1-4) та їхніми розв'язками (А – Д) .

1 $\sqrt{2x+3} < 5$ А $x > 1$

2 $\sqrt{x-1} + 7 > 1$ Б $1 \le x < 17$

3 $2\sqrt{x+3} > 4$ В $x > 37$

4 $\sqrt{x-1} < 4$ Г -1,5$\le x \le 11$

Д $x \ge 1$

*Завдання з короткою відповіддю (запишіть відповідь десятковим дробом):*

1. Задано рівняння $\sqrt{4x - x^2} = a + 1$. Знайдіть :

1) корінь цього рівняння, якщо $a$ =1;

2) найбільше від'ємне значення параметра $a$ , при якому рівняння не має розв'язку.

1. Знайдіть суму цілих додатних розв'язків нерівності $\frac{\sqrt{2-x}+x-3}{(|x-3|-3)^2} < 0$.

2. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}} - 2\sqrt{2x + 3 - 4\sqrt{2x-1}} + {}$ $+3\sqrt{2x + 8 - 6\sqrt{2x-1}} \le 4$. У відповідь запишіть довжину відрізка, що є розв'язком даної нерівності.

3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{x-2} = 2$. У відповідь запишіть суму раціональних коренів рівняння. [1]

**2.4. Використання програми GRAN 1 до розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей**

Сучасне суспільство ставить перед системою освіти нові завдання, пов'язані з розробленням педагогічної стратегії за умов комп’ютеризації та інформатизації всіх сфер життя суспільства.

Технології комп’ютерного навчання підтримують продуктивну діяльність учнів, сприяють індивідуалізації та диференціації процесу навчання, реалізації діяльнісного підходу, раціоналізують працю вчителя та учнів.

Найбільш придатними для підтримки вивчення курсу математики в середніх навчальних закладах є комплект програм *GRAN* (*GRAN1*, *Gran-2D*, *Gran-3D*). Названі програмні засоби прості у використанні, оснащені досить зручним інтерфейсом. Від користувача не вимагається значний обсяг спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, цілком доступних для учнів середніх класів[16].

При цьому вчителю не нав’язується ніяка методика подання навчального матеріалу, закріплення і контролю знань, конкретний зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання, співвідношення між самостійною роботою учнів і роботою разом із вчителем, між індивідуальними і колективними формами роботи та ін. Усе це вчитель повинен визначити сам з врахуванням своїх власних позицій і уподобань, специфіки умов, в яких перебігає навчальний процес, індивідуальних особливостей окремих учнів і класного колективу.

Програма GRAN1 призначена для графічного аналізу функцій, звідки і походить її назва (GRaphic ANalysis).

Перед тим, як почати розв’язувати рівняння за допомогою програми GRAN1, слід навчити учнів користуватись даною програмою. Оскільки розв'язування рівнянь потребує побудови графіків залежностей між змінними, то доцільно розглянути правила побудови графіків залежностей. Для побудови графіків залежностей між змінними і виконання деяких інших операцій над графічними побудовами призначено пункт «Графік».

Підпункт «Побудувати» використовується при необхідності побудувати графік залежності. Графік залежності, проти позначення яких стоїть знак ☑, буде побудований при звернені до послуги «Побудувати».

Якщо потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. При графічному поданні залежності $y = f(x)$ знайти розв'язок рівняння $f(x) = 0$ значить – знайти всі точки на графіку залежності $y = f(x)$, ординати яких дорівнюють нулю. Іншими словами, потрібно знайти точки, що належать одночасно графіку залежності $y = f(x)$ і осі абсцис $Ox$. Іноді рівняння $f(x) = 0$ зручно подати у вигляді: $f_1(x) - f_2(x) = 0$, де $f_1(x) = f_2(x)$. У такому випадку зручно побудувати графіки залежностей $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, після чого по черзі встановити курсор у точках перетину графіків та визначити координати точок, що належать обом графікам. Абсциси $x$ так, як знайдені точки і будуть розв'язками рівняння $f_1(x) = f_2(x)$. При знайдених значеннях $x$ значення $f_1(x)$ і $f_2(x)$ будуть рівні між собою.[8]

**Приклад.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = \sqrt{5-2x}$.

Побудувавши графіки залежностей $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x}$ і $y = \sqrt{5-2x}$, легко переконатися, що дане рівняння має єдиний розв'язок. Встановивши курсор в точку перетину графіків функцій, одержимо $x = -2$.

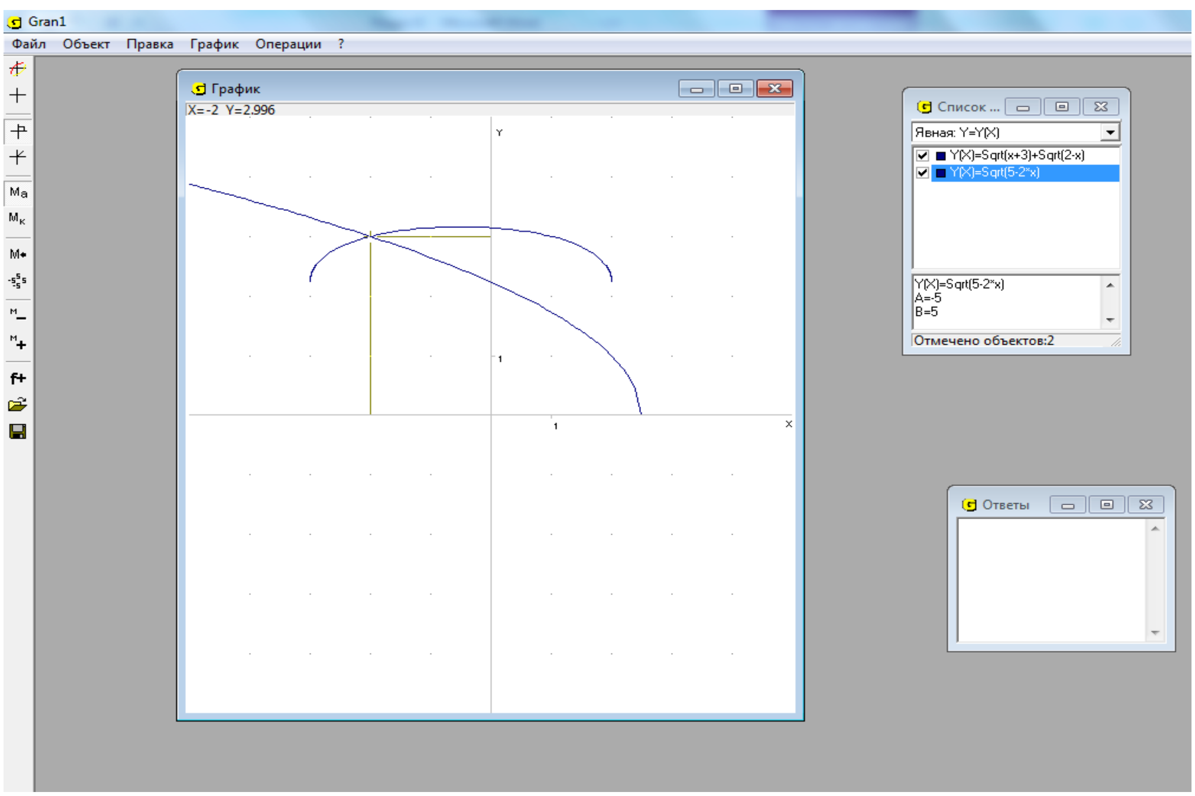



Рис.2.1

**Приклад.** Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x}$.

Побудувавши графіки залежностей $y = \sqrt{x+1}$ і $y = 1 + \sqrt{4-x}$, легко переконатися, що дане рівняння має єдиний розв'язок. Встановивши курсор в точку перетину графіків функцій, одержимо $x = 3$.

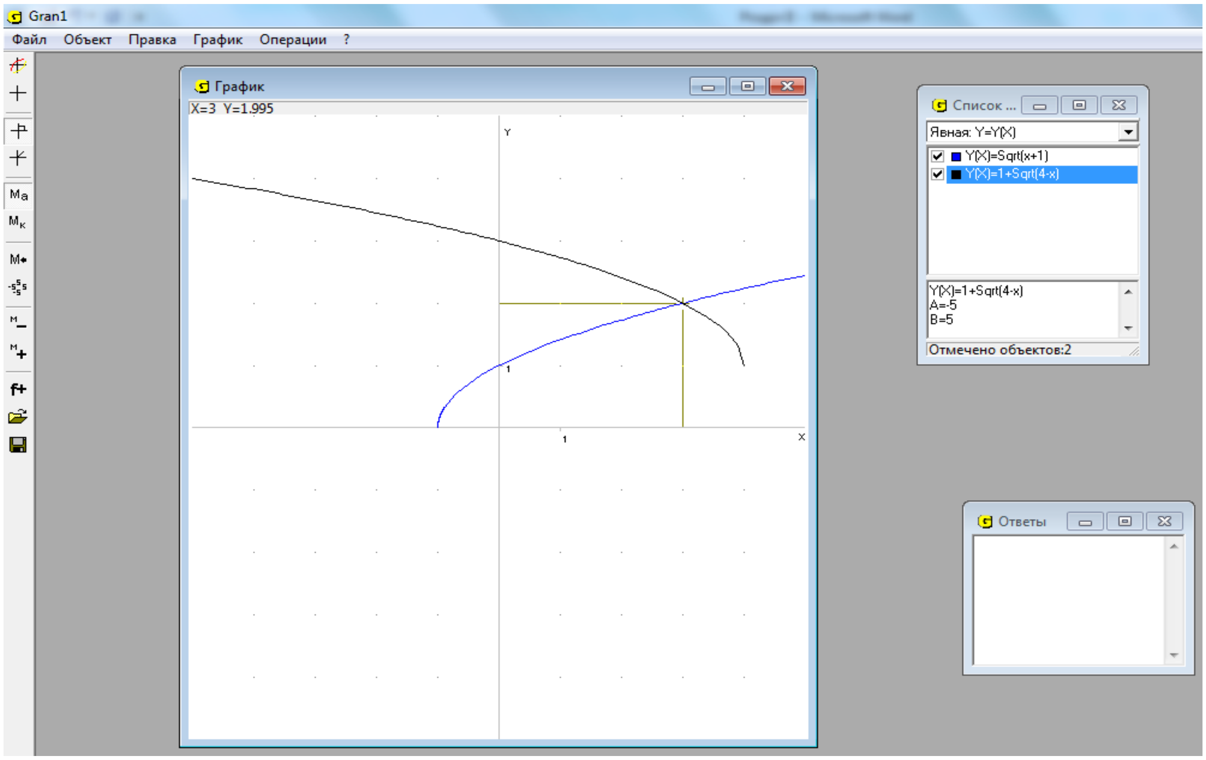



Рис.2.2

## 2.5. Педагогічний експеримент та статистична обробка результатів

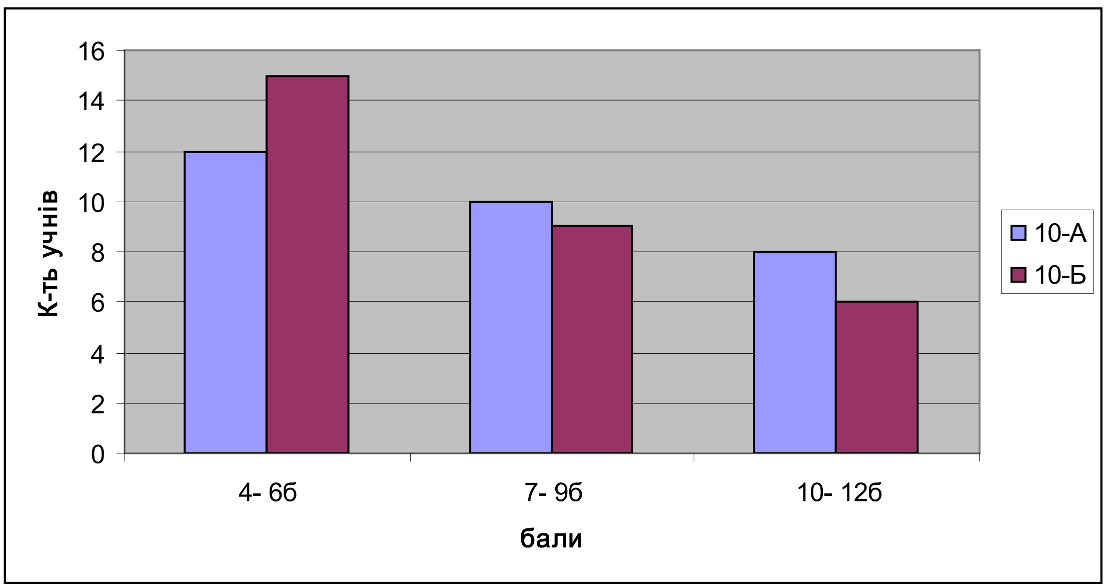
З метою підвищення рівня знань, умінь, навичок та рівня математичної культури, був проведений в школі педагогічний експеримент.

У ході його проведення слід було з'ясувати, яким чином використання інформаційних технологій на уроках алгебри сприяє розвитку розумового, логічного, абстрактного мислення.

Для експерименту було вибрано два класи 10-А і 10-Б, у яких рівень успішності з математики був однаковий. Порівняння експериментального та контрольного класів здійснювалось на основі контрольних робіт, які були проведені в обох класах.

Спочатку була проведена контрольна робота для перевірки знань учнів цих класів. Вона дала такі результати.

| Бали | Класи | |
|---|---|---|
| | 10-А<br>Експериментальний | 10-Б<br>Контрольний |
| | Кількість учнів | |
| | 30 | 30 |
| 4-6 | 12 | 15 |
| 7-9 | 10 | 9 |
| 10-12 | 8 | 6 |




Для проведення педагогічного експерименту було розроблено уроки по темі «Ірраціональні рівняння» для 10-А та 10-Б класів. Розроблені конспекти уроків для 10-А класу передбачають під час проведення уроків використання інформаційно-комунікаційних технологій.

Процес організації навчання школярів з використанням інформаційних технологій дозволив:

• зробити цей процес цікавим, з одного боку, за рахунок новизни й незвичності такої форми роботи учнів, а з іншого – більш захопливим і різноманітним за формою, використовуючи мультимедійні можливості сучасних ПК;

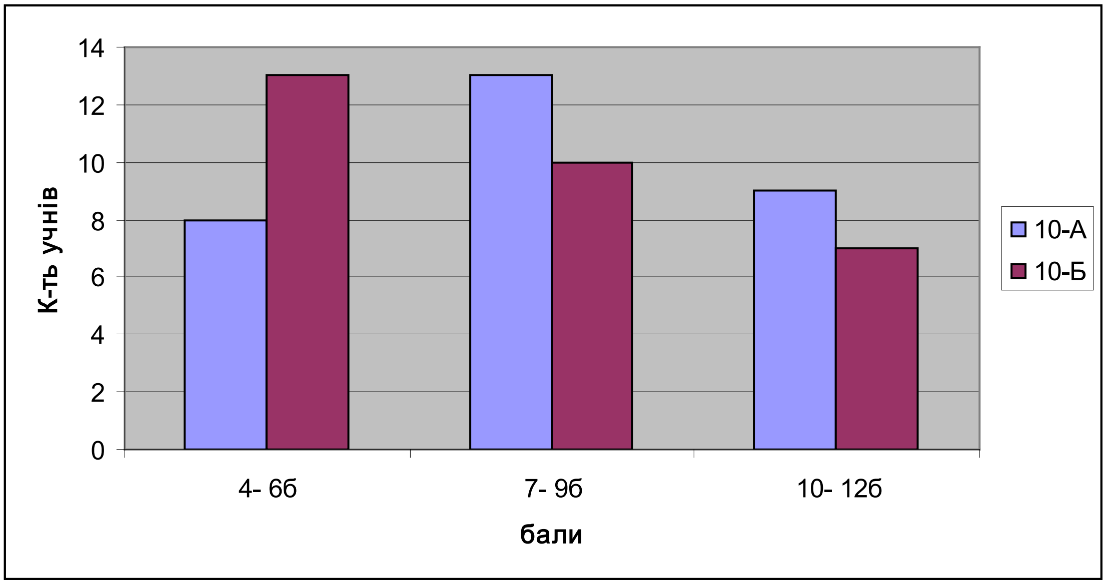
- ефективно розв’язати проблему наочності навчання, розширити візуалізацію навчального матеріалу, зробити його більш доступним для учнів;
- індивідуалізувати процес навчання за рахунок наявності різнорівневих завдань, використання навчального матеріалу і індивідуальному темпі самостійно, що дає для учнів позитивні емоції й створює навчальні мотиви;
- самостійно коригувати навчальну діяльність завдяки наявності зворотного зв’язку, тобто розвивати навички самоконтролю;
- розвивати в учнів дослідницьку діяльність і творчу активність (моделювання, розробка презентацій, публікацій, метод проектів тощо).

Використання інформаційних технологій дозволяє досягти свободи у творчості учасників педагогічного процесу – учня і вчителя. Педагог не тільки вчить, виховує, але й стимулює учня до розвитку його здібностей, виховує потребу в самостійній роботі. Спільна робота вчителя й учня робить урок інтерактивним.

Оскільки робота велась паралельно в двох класах, де на дану тему виділялась однакова кількість годин, то об'єм матеріалу відповідно був поданий однаковий, однак відрізнялись форми подання.

В кінці вивчення теми була проведена підсумкова контрольна робота у 10-А і 10-Б класах.

| Бали | Класи | |
|---|---|---|
| | 10-А Експериментальний | 10-Б Контрольний |
| | Кількість учнів | |
| | 30 | 30 |
| 4-6 | 8 | 13 |
| 7-9 | 13 | 10 |
| 10-12 | 9 | 7 |




Проаналізувавши результати контрольної роботи, рівень знань, умінь та навичок учнів обох класів, можна зробити висновок про доцільність використання на уроках математики інформаційно-комунікаційних технологій з метою ефективного розв’язання проблеми наочності навчання, розширення візуалізації навчального матеріалу, а також виховання в учнів самостійності, активності, наполегливості, розвитку логічного мислення учнів.

## ВИСНОВКИ

Основним завданням вивчення математики в освітньому закладі в класах профільного рівня є забезпечення міцного і свідомого оволодіння учнями системою математичних знань і умінь, формування рівня математичної культури, що є необхідним у продовженні освіти та майбутній трудовій діяльності.

Розв’язання рівняння займає досить серйозне місце у вивченні математики.

У роботі розглянуто один з видів рівнянь, які вивчають у школі – ірраціональні рівняння. Дана робота зорієнтована на розробку методики викладання теми «Ірраціональні рівняння та нерівності» в шкільному курсі математики, що сприяє розвитку особистості учня та формуватиме стійкий інтерес до предмету. Є різні способи розв’язування ірраціональних рівнянь, основними є метод заміни, метод розкладання на множники та метод піднесення обох частин рівняння до одного й того самого степення . Для учня важливо не тільки знати про існування методів розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, але й мати практичне розуміння того, який з методів є найбільш раціональним у даному випадку. Матеріал є складний і вимагає великої зосередженості та практичних навиків. Завдання для ЗНО містять ірраціональні рівняння та нерівності, тому потрібно приділяти особливу увагу на вивчення даної теми.

В розділі «Науково-теоретичні основи дослідження ірраціональних рівнянь та нерівностей розглянуто місце теми в процесі викладання математики згідно діючої програми та підручників  профільного рівня.

В роботі звернено увагу на ряд типових помилок, які учні допускають при розв’язуванні ірраціональних рівнянь. А саме: неправильно вказана або не вказана область допустимих значень; область допустимих значень не врахована при отриманні відповіді; не враховано, що квадратний арифметичний корінь – невід’ємна величина; при піднесенні рівняння до квадрату не враховані знаки обох його частин та ін.

В другому розділі розглянуто ряд завдань на розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, які можуть бути використанні вчителями математики на уроках в старшій школі.

В даній роботі описано п'ять методів розв'язування ірраціональних рівнянь:

- метод піднесення обох частин рівняння до одного й того самого степеня;
- метод заміни;
- метод розкладання на множники;
- використання монотонності функції;
- метод мажорант.

Чотири методи розв'язування ірраціональних нерівностей:

- метод зведення до еквівалентної системи або сукупності раціональних нерівностей;
- метод інтервалів;
- метод ведення нової змінної;
- множення обох частин нерівностей на функцію.

Описано, як на уроках використовувати комп'ютерну програму, що дозволяє розв'язувати рівняння і нерівності графічним способом. Наведено приклади ірраціональних рівнянь, які є у завданнях ЗНО. Здійснено педагогічний експеримент та проведено аналіз результатів.

Застосування комп'ютерних технологій при вивченні ірраціональних рівнянь та нерівностей дозволяє учням краще засвоїти матеріал із меншими затратами часу, дає можливість розв'язати більше завдань. Широке впровадження в навчальний процес нових інформаційних технологій відкриває широкі перспективи щодо поглиблення і розширення теоретичної бази знань, надання результатам практичного значення, активізації пізнавальної діяльності, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу учнів з урахуванням вікових особливостей, індивідуальних нахилів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Бевз В. Г. Матаматика: у 2 ч. Комплексне видання для підготовки до ЗНО та ДПА / В. Г. Бевз, О. І. Буковська. – Київ: Видавничий дім «Освіта», 2019. - 176 с.

2. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. – 336 с.

3. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз- К: Вища школа, 1989. – 397 с.

4. Белешко Д. Т. Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навч. пос. / Д. Т. Белешко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 80с.

5. Горделадзе Ш. Г. Збірник конкурсних задач з математики / Ш.Г.Горделадзе, М.М. Кухарчук, Ф.П. Яремчук. – Київ: Видавниче об'єднання «Вища школа», 1988 - 326 с.

6. Григор'єв А. М. Ірраціональні рівняння / А. М. Григор 'єв / / Квант. - 1972. - № 1. - С. 46-49.

7. Дунай С. Метод мажорант та його використання для розв'язування рівнянь / С. Дунай // Математика в рідній школі. – 2018. - №1. – С. 27 - 34.

8. Єгоров Г. Ірраціональні рівняння / А. Єгоров / / Математика. Перше вересня. - 2002. - № 5. - С. 9 - 13.

9. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики. / М. І. Жалдак – Київ: Техніка, 1997. – 48 с.

10. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 448с.

11. Корнієнко Т.Л. Алгебра 10 – 11 класи. Методи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем: розробки занять / Т. Л. Корнієнко, В.І.Фіготіна. – Харків: Ранок, 2009. – 336 с.

12. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 400 с. : іл.

13. Нелін Є. П.Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : профіл. рівень. / Є. П. Нелін. —Харків : Гімназія, 2010. - 416с.

14. Перехейда О. М. Розв'язування нерівностей. / О. М. Перехейда, Р. П. Ушаков– Харків, Вид. група «Основа», 2003. – 112 с. – (Серія «Бібліотека журналу «Математика в школах України»).

15. Прохорова О. Впровадження сучасних педагогічних технологій в практику роботи / О.Прохорова // Математика в школах України. – 2005. - № 31. – С. 11.

16. Сільвестрова І. А. Навчаємось розв'язувати рівняння та нерівності / І. А. Сільвестрова, М. С. Фурман. – Харків: Вид. група «Основа», 2004. – 272 с. – (Бібліотека журналу "Математика в школах України")

17. Скорохода А. В. Вибрані питання елементарної математики / А. В. Скорохода. – Київ: Вища школа, 1982. – 456с.

18. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – Київ: Вища школа, 2006. – 582с.

19. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З. І. Слєпкань. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.

20. Старова О. О. Календарне планування. Математика. 5 – 11 класи / О.О. Старова // – Харків: Вид. група «Основа», 2018. – 119 с. – ( Серія «Календарне планування»).

21. Строюк М. Б. Формування інтелектуальних умінь на уроках математики / М.Б. Строюк // Математика в школах України. - 2011. - Вересень №25. – С. 4 - 8.

22. Титаренко О.М. Математика: комплексний довідник / О. М. Титаренко, О. М. Роганін, О. Ю. Максименко, О. О. Тарасенко. – Харків:ТОРСІНГ ПЛЮС, 2009. – 320 с.

23. Токар Н. Г. Різні способи розв’язування ірраціональних рівнянь / Н. Г Токар, Д. О.Вельдбрехт //Математика в школах України . – 2006. - Січень №2. – С. 8 - 12.

24. Томащук О. Розв’язування ірраціональних рівнянь / О. Томащук, В. Репета, О. Лещинський // Математика в рідній школі. – 2018. - №5. – С. 11-19.

25. Черкасов О. Ю. Математика : довідник для старшокласників і вступників у вузи / О. Ю. Черкасов. - М.: АСТ-ПРЕСС, 2001. - 576 с.

26. Чудутов Ю. В. Ірраціональні алгебраїчні рівняння. Методи розв’язування / Ю.В. Чудутов. – Київ: 1997р. – 243 с.

27. Шарапа В. Розв'язування ірраціональних рівнянь, нерівностей та їх систем для учнів 10-11 класів // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 9. – С. 18 - 22 .

28. Шарапа В. Ірраціональні рівняння : розробка уроку / В. Шарапа // Математика в школі. – 2010. – №4. – С. 29 - 32 .

29. Шарова Л. І. Рівняння і нерівності : посібник для підготовчих відділень / Л. І. Шарова. - Київ: Вища школа, 1981. - 280 с.

30. Шкільна енциклопедія з алгебри / Авт.-уклад. Роєва Т. Г., Адруг Л.М., Карцан Л. П. – Х.: Країна мрій™ , 2008. – 464 с.

31. ЗАКОН УКРАЇНИ «Про освіту» (Відомості Верховної Ради (ВВР), 2017, №38-39, ст.. 380). - Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19.

**Додаток А**

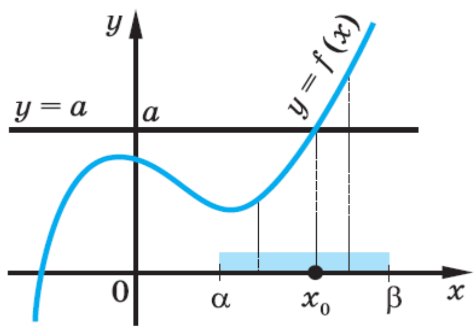
## Застосування методу введення допоміжного невідомого при розв'язуванні ірраціональних рівнянь

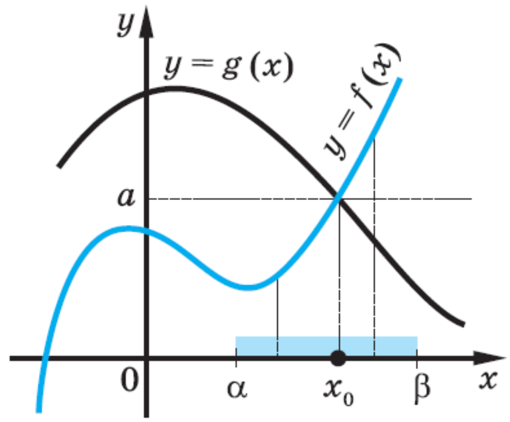
| | | | |
|---|---|---|---|
| | $ax^2+bx+c_1+$ $+k\sqrt{ax^2+bx+c_2}=$ | $\sqrt{ax^2+bx+c_2}=t,$ $t\geq 0$ | $t^2+kt+c_1-c_2=0$ |
| | $k_1\sqrt{ax^2+bx+c_2}+$ $+k_2\sqrt[4]{ax^2+bx+c_2}$ | $\sqrt[4]{ax^2+bx+c_2}=t,$ $t\geq 0$ | $k_1t^2+k_2t-c=0$ |
| | $k_1\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}+k_2\sqrt[n]{\frac{cx-d}{ax+b}}=c$ | $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t,$ $t\geq 0$, якщо $n=2k$ | $k_1t+\frac{k_2}{t}=c$ |
| | $k_1\sqrt{ax^2+bx+c}+$ $+\frac{k_2}{\sqrt[n]{ax^2+bx+c}}=c$ | $\sqrt[n]{ax^2+bx+c}=t,$ $t>0$, якщо $n=2k$ | $k_1t+\frac{k_2}{t}=c$ |
| | $k_1\sqrt[2n]{f(x)}+k_2\sqrt[n]{f(x)}=c$ | $\sqrt[n]{f(x)}=t$ | $k_1t^2+k_2t-c=0$ |
| | $k_1\sqrt[n]{\frac{f(x)}{\varphi(x)}}+k_2\sqrt[n]{\frac{\varphi(x)}{f(x)}}=c$ | $\sqrt[n]{\frac{f(x)}{\varphi(x)}}=t$ | $k_1t+\frac{k_2}{t}=c$ |
| | $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ | $x=\sin t$ $x=a\cos t$ $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$ $x=\frac{a}{\cos t}$ $x=\frac{a}{\sin t}$ | $t\epsilon\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], t\epsilon[0;\pi]$ $t\epsilon\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), t\epsilon(0;\pi)$ $t\epsilon\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], t\epsilon[0;\pi]$ |

**Додаток Б**

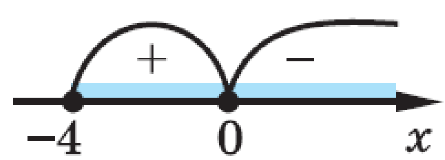
## Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь

<table>
<tr><td colspan="2">Скінченна ОДЗ</td></tr>
<tr><td>Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення.</td><td>$\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18$<br>ОДЗ: $\begin{cases} x-3\ge 0, \\ 6-2x\ge 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x\ge 3, \\ x\le 3. \end{cases}$<br>Отже, ОДЗ: $x=3$.<br>Перевірка: $x=3$ – корінь<br>($\sqrt{0}+18=\sqrt[4]{0}+18; 18=18$).<br>Інших коренів немає, оскільки до ОДЗ входить тільки одне число.<br>Відповідь: 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Оцінка значень лівої та правої частин рівняння</td></tr>
<tr><td>$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$<br>$f(x)\ge a$<br>$g(x)\le a$<br><br>Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\ge a, g(x)\le a$, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива лише у випадку, якщо $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють *a*.</td><td>$\sqrt{x^2-5x+6}=4x-x^2-4$<br>Запишемо задане рівняння так:<br>$\sqrt{x^2-5x+6}=-(x^2-4x+4)$,<br>$\sqrt{x^2-5x+6}=-(x-2)^2$,<br>$f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}\ge 0$,<br>$g(x)=-(x-2)^2\le 0$.<br>Отже, задане рівняння рівносильне системі<br>$\begin{cases} \sqrt{x^2-5x+6}=0, \\ -(x-2)^2=0. \end{cases}$<br>Із другого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє перше рівняння.<br>Відповідь: 2.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Використання монотонності функцій</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема розв'язування рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">•підбираємо один або декілька коренів рівняння.<br>•Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частини рівняння).</td></tr>
<tr><td></td><td>Теореми про корені рівняння<br>Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає(спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.<br>Приклад<br>Рівняння $\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} = 3$ має єдиний корінь<br>$x = 1$ $\left(\sqrt{1} + 2\sqrt[3]{1} = 3, \text{тобто } 3 = 3\right)$, оскільки функція $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$ зростає (на всій області визначення $x \geq 0$) як сума двох зростаючих функцій.</td></tr>
<tr><td></td><td>Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Приклад<br><br>Рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$ має єдиний корінь $x = 4$ $\left(\sqrt{4} = 6 - 4, 2 = 2\right)$, оскільки $f(x) = \sqrt{x}$ зростає (при $x \geq 0$), а $g(x) = 6 - x$ спадає.</td>
</tr>
</table>

**Розв’язування ірраціональних нерівностей**

<table>
<tr>
<td colspan="2">Метод інтервалів (для нерівностей виду $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$)</td>
</tr>
<tr>
<td>1) Знайти ОДЗ нерівності.<br><br>2) Знайти нулі функції f (x) (f (x) = 0).<br><br>3) Відмітити нулі функції на ОДЗ і знайти знак функції в кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.<br><br>4) Записати відповідь, враховуючи<br>знак нерівності.</td>
<td>Приклад<br><br>$$\sqrt{x + 4} > x + 2.$$<br>Задана нерівність рівносильна нерівності $\sqrt{x + 4} - x - 2 > 0$.<br><br>Позначимо $f(x) = \sqrt{x + 4} - x - 2$.<br><br>ОДЗ: $x + 4 \geq 0$, тобто $x \geq -4$.<br><br>Нулі $f(x)$: $\sqrt{x + 4} - x - 2 = 0$,<br>$\sqrt{x + 4} = x + 2$,<br>$$x + 4 = x^2 + 4x + 4,$$<br>$x^2 + 3x = 0$, $x_1 = 0$ – корінь, $x_2 = -3$ – сторонній корінь.<br><br>
<br>Відповідь:$[-4; 0)$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Рівносильні перетворення</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| 1) При піднесенні обох частин нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну даній (на ОДЗ даної). | $\sqrt[3]{x+2}<-1.$<br>ОДЗ: $x\epsilon R$.<br>Задане нерівність рівносильна нерівностям:<br>$\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3<(-1)^3, x+2<-1,$<br>$x<-3.$<br>Відповідь: $(-\infty;-3)$. |
| 2) Якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин нерівності до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну даній (на ОДЗ даної). | $\sqrt[4]{2x-6}<1.$<br>ОДЗ: $2x-6\geq 0$, тобто $x\geq 3.$ Обидві частини заданої нерівності невід'ємні, отже, вона рівносильна (на її ОДЗ) нерівностям:<br>$\left(\sqrt[4]{2x-6}\right)^4<1^4, 2x-6<1, x<\frac{7}{2}$<br>Враховуючи ОДЗ, одержуємо<br>$3\leq x<\frac{7}{2}.$<br>Відповідь: $\left[3;\frac{7}{2}\right)$ |
| 3) Якщо на ОДЗ заданої нерівності якась частина нерівності може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то, перш ніж підносити обидві частини нерівності до парного степеня, ці випадки доводиться розглядати окремо.<br>Наприклад,<br>$\sqrt[2k]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow$ | $\sqrt{x+4}>x+2.$<br>Задана нерівність рівносильна сукупності систем:<br>$\begin{cases} x+2\geq 0, \\ \left(\sqrt{x+4}\right)^2>(x+2)^2 \end{cases}$ або<br>$\begin{cases} x+4\geq 0, \\ x+2<0. \end{cases}$<br>Тоді $\begin{cases} x\geq -2, \\ x^2+3x<0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x\geq -4, \\ x<-2. \end{cases}$<br>Розв'язавши нерівність $x^2+$ |

<table>
<tr>
<td>$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$<br>$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x). \end{cases}$</td>
<td>$3x < 0$, маємо $-3 < x < 0$<br><br><br>Враховуючи нерівність $x \geq -2$, одержуємо розв'язок першої системи: $-2 \leq x < 0$. Розв'язок другої системи: $-4 \leq x < -2$. Об'єднуючи ці розв'язки, одержуємо відповідь.<br>Відповідь: $[-4; 0)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Поняття ірраціонального рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівняння, у яких змінна міститься під знаком кореня, називають ірраціональним. Для того щоб розв’язати задане ірраціональне рівняння, його найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою деяких перетворень.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розв’язування ірраціональних рівнянь</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. За допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня</td></tr>
<tr><td>При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ)</td><td>При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з’явитися сторонні корені, які відсіюють перевіркою</td></tr>
<tr><td>Приклад 1<br>Розв’яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-1} = 2$.<br>$(\sqrt[3]{x-1})^3 = 2^3$,<br>$x - 1 = 8$,<br>$x = 9$.<br>Відповідь: 9.</td><td>Приклад 2<br>Розв’яжіть рівняння $\sqrt{2x+3} = x$.<br>$(\sqrt{2x+3})^2 = x^2$<br>$x^2 - 2x - 3 = 0, x_1 = -1, x_2 = 3$.<br>Перевірка. При x=1 маємо:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$\sqrt{1} = -1$ - неправильна рівність, отже, $x$ = -1 – сторонній корінь.<br>При $x$= 3 маємо: $\sqrt{9} = 3$ – правильна рівність, отже, $x$= 3 – корінь заданого рівняння.<br>*Відповідь*: 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. За допомогою заміни змінних</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Якщо до рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною)**</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Приклад 3**<br>Розв’яжіть рівняння $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 2.$<br>Позначимо $\sqrt[3]{x} = t$. Тоді $\sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2 = t^2$.<br>Одержуємо рівняння: $t^2 + t = 2,\ t^2 + t - 2 = 0, t_1 = 1, t_2 = -2.$<br>Виконуємо обернену заміну: $\sqrt[3]{x} = 1$, тоді $x$ = *1* або $\sqrt[3]{x} = -2$, звідси $x$ = -8.<br>*Відповідь*: 1; -8.</td></tr>
</table>

**Додаток В**

## Контрольна робота з теми «Ірраціональні рівняння та нерівності»

## 10 клас (профільний рівень)

## І варіант

**Завдання 1.** Яка з наведених рівностей правильна?

А) $\sqrt[4]{16} = 4$; Б) $\sqrt[7]{-1} = -1$; В) $\sqrt[5]{3{,}2} = 0{,}2$; Г) $\sqrt[3]{2} = 8$;

**Завдання 2.** Вказати рівняння, яке не має коренів:

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt[3]{x+1} = -2$ | $\sqrt{x+1} = -2$ | $\sqrt{x+4} + \sqrt{x} = 2$ | $\sqrt{x+1} = 0$ | $-\sqrt{x+1} = -\sqrt{x}$ |

**Завдання 3.** Знайти корені рівняння $\sqrt{x} = -2$ та $\sqrt{x+4} = 5$.

**Завдання 4**.Сума коренів рівняння $x - 6 = \sqrt{3-x}$ дорівнює:

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 9 | рівняння не має коренів |

**Завдання 5.** Розв’яжіть ірраціональне рівняння $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2} = 4$;

**Завдання 6.** Розв’яжіть рівняння шляхом введення нової змінної

$$\sqrt{\frac{3-x}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} = 4\frac{1}{4};$$

**Завдання 7.** Розв’яжіть нерівність $\sqrt{x+4} > x + 2$.

**Завдання 8.** Розв’яжіть нерівність $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9$.

**Завдання 9.** Розв’яжіть рівняння $\sqrt{1-2x} + 11 = \sqrt{16 + x(x-8)}$.

**Завдання 10.** Розв’яжіть нерівність $\sqrt{\frac{x+5}{2x-1}} \geq 2$.

**Завдання 11.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-1} = 3$.

## II варіант

**Завдання 1.** Яка з наведених рівностей правильна?

А) $\sqrt[3]{27}=9$;   Б) $\sqrt[6]{6{,}4}=0{,}2$;   В) $\sqrt[5]{1}=1$;   Г) $\sqrt[4]{\frac{1}{625}}=\frac{1}{5}$;

**Завдання 2.** Вказати рівняння, яке не має коренів:

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt[5]{x-1}=-2$ | $1-\sqrt{x}=0$ | $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$ | $\sqrt{x-5}+\sqrt{4-x}=2$ | $-\sqrt{2x+1}=-\sqrt{x}$ |

**Завдання 3.** Знайти корені рівняння $\sqrt[3]{x}=-2$ та $\sqrt{1-x}=2$.

**Завдання 4**.Сума коренів рівняння $x-2=\sqrt[3]{x^2-8}$ дорівнює:

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

**Завдання 5.** Розв’яжіть ірраціональне рівняння $\sqrt{x^2-x-6}=\sqrt{-2x}$;

**Завдання 6.** Розв’яжіть рівняння шляхом введення нової змінної

$$\frac{\sqrt[3]{x}+1}{2}+\frac{9}{\sqrt[3]{x}+2}=4;$$

**Завдання 7.** Розв’яжіть нерівність $1+2x<\sqrt{x+1}$.

**Завдання 8.** Розв’яжіть нерівність $(x-1)\sqrt{x^2+1}\leq x^2-1$.

**Завдання 9.** Розв’яжіть рівняння $\sqrt{1-3x}+5=\sqrt{4+x(x-4)}$.

**Завдання 10.** Розв’яжіть нерівність $\sqrt{\frac{1-x}{2x-5}}<3$.

**Завдання 11.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$.

**Додаток Г**

**Тема**: Ірраціональні рівняння

**Мета:** сформувати поняття ірраціонального рівняння, вміння розв'язувати нескладні ірраціональні рівняння; познайомити учнів з новими способами розв'язування ірраціональних рівнянь; вміння застосовувати вивчений матеріал під час розв'язування ірраціональних рівнянь; сприяти розвитку просторової уяви, мислення, уваги; виховувати інтерес до математичних знань та прагнення бути активними в колективних творчих справах, розвивати культуру мислення.

**Тип уроку:** вивчення нового матеріалу.

**Обладнання та наочність:** ПК; проектор; програма GRAN1; підручник: Нелін Є. П.Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загально-освіт. навчальн. закладів : профільний рівень.

# Хід уроку

**І. Організаційний момент**

Організація учнів до уроку алгебри. Запис дати в зошитах. Проведення бесіди з техніки безпеки під час роботи за комп'ютером.

**ІІ. Перевірка домашнього завдання**

1. Перевірка завдання, заданого за підручником.

2. Виконання усних вправ:

1) Порівняйте числа:

$a)$ $\sqrt{0{,}8}$ $і$ $\sqrt{0{,}09}$ ; б) $\sqrt[5]{-1{,}6}$ $і$ $\sqrt[5]{-1{,}61}$; в) $\sqrt[100]{\frac{13}{14}}$ $і$ $\sqrt[100]{\frac{14}{15}}$

2) Чи належить графіку функції $y = \sqrt[6]{x}$ точка:

$a)$ A(18;3); б) B(64;2); в) C(-64;-2); г) Д(1;-1);

3)Чи належить графіку функції $y = \sqrt[5]{x}$ точка:

а) A(-32;2); б) B(-32;-2); в) C(-0,00001;0,1); г) Д(1;1);

4)Чи належить області визначення функції $y = \sqrt[5]{x^2 - 10}$ число:

а) 2,9; б) -4; в) 3,5; г) 3,18;

**III. Формулювання мети й завдання уроку. Мотивація навчальної діяльності**

На сьогоднішньому уроці ми вивчимо ірраціональні рівняння, різні способи їх розв’язування. Ознайомимося з програмою GRAN1 і на наступних уроках ви самостійно навчитесь користуватись цією програмою. В основному звернемо увагу на особливості розв’язування найпростіших ірраціональних рівнянь графічним способом за допомогою програми GRAN1. Тим самим будемо розвивати вашу уяву та мислення.

**IV. Актуалізація опорних знань, умінь та навичок**

Запитання до класу:

1. Які рівняння називаються ірраціональними?
2. Що таке область допустимих значень ірраціонального рівняння?
3. Яка дія є обов’язковою під час розв’язування ірраціональних рівнянь, якщо рівняння не розв’язувалися методом рівносильних перетворень?(Перевірка)
4. Що таке сторонній корінь?
5. Доведіть, що число -2 є стороннім коренем рівняння $\sqrt{x+6} = x$.
6. Що таке ОДЗ рівняння?
7. Які рівняння називаються рівносильними на деякій множині?

**V. Вивчення нового матеріалу**

Пригадаємо основні означення.

Рівняння, в яких під знаком кореня міститься змінна (невідома), називають ірраціональними.

Наприклад: $\sqrt[3]{x-2} + 3 = 0$, $\sqrt{x} = \sqrt{x} + x$ — ірраціональні рівняння.

Розв'язування ірраціональних рівнянь ґрунтується на приведенні їх за допомогою деяких перетворень до раціонального рівняння. Як правило, це досягається піднесенням обох частин ірраціонального рівняння до одного і того самого степеня (інколи декілька разів).

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня одержане рівняння може мати корені, що не задовольняють даному рівнянню. Такі корені називаються сторонніми для даного рівняння. (Це відбувається тому, що із рівності парних степенів двох чисел не слідує рівність цих чисел.

Наприклад: $(-5)^2 = 5^2$, але $(-5) \neq 5$.

Тому слід обов'язково робити перевірку одержаних коренів.

***Приклад 1.*** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} = -3$.

*Розв'язування*

Рівняння $\sqrt{x+1} = -3$ не має коренів, так як радикал с парним показником - $\sqrt{x+1}$ не може бути від'ємним.

Для графічного розв’язання рівняння в програмі GRAN1 вказати тип задання залежності «Явна: Y=Y(X)» у вікні «Список об’єктів» (на екрані вгорі праворуч). Потім слід звернутися до послуги «Об’єкт / Створити » або натиснути кнопку «**f+**» на панелі інструментів. В результаті з’являється допоміжне вікно «Введення виразу залежності». В рядок «Y(X)=» потрібно ввести вираз, що задає залежність. Тобто, в нашому випадку, це буде вираз: (x+1)^1/2+3. Після введення функції використовуючи послугу «Графік / Побудувати» програма будує графік відповідної функції:

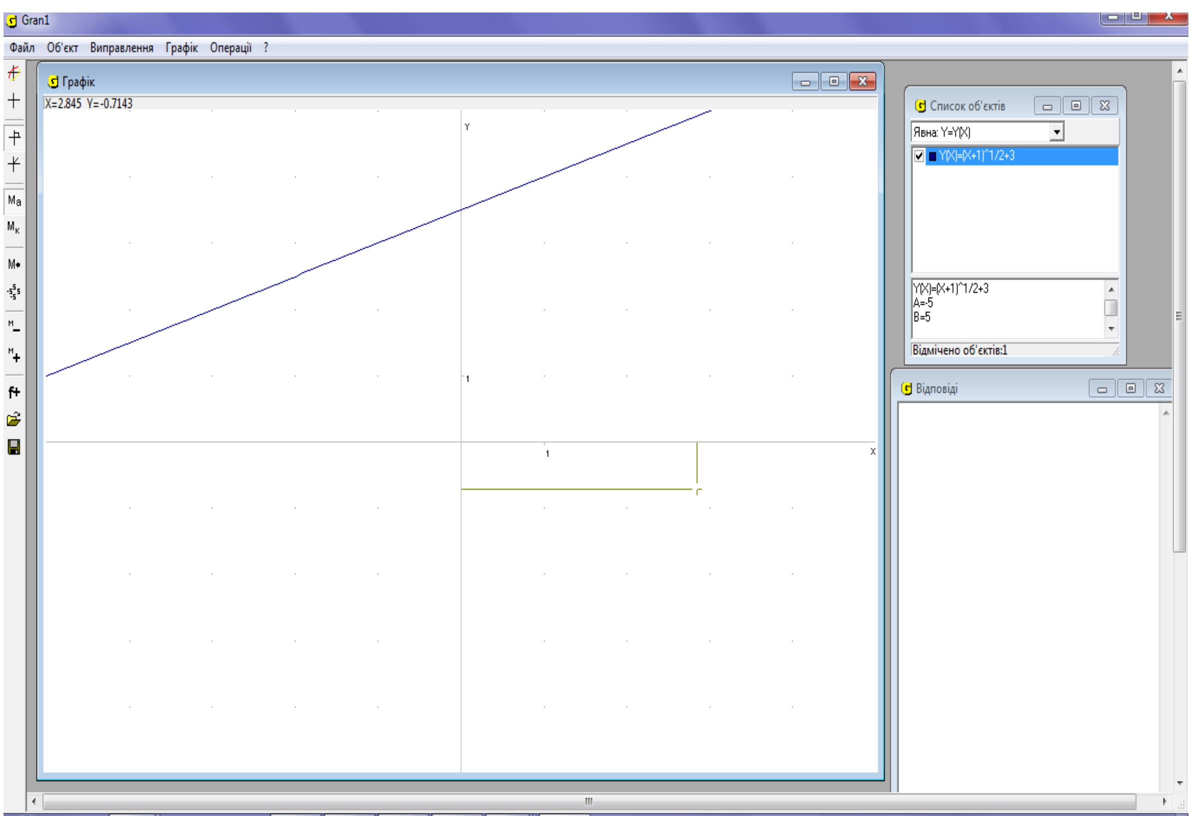


Рис.1

Так як графік не перетинає вісь ОХ, то відповідно рівняння не має розв'язку.

Відповідь: рівняння розв'язку не має.

***Приклад 2.*** Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2} = 2 - x$ .

Розв'язування:

$\sqrt{x-2}$=$2 - x$

ОДЗ: $x - 2 \geq 0, \quad x \geq 2.$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо:

$x - 2 = (2 - x)^2$

$x - 2 = 4 - 4x + x^2$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 3, \;\; x_2 = 2.$

Перевіримо правильність виконання завдання за допомогою програми GRAN1.

Використовуючи послугу «Об'єкт / Створити» введемо вираз: $(x - 2)^\wedge 1/2 - 2 + x$. Після введення функції використовуючи послугу «Графік / Побудувати» програма будує графік відповідної функції:

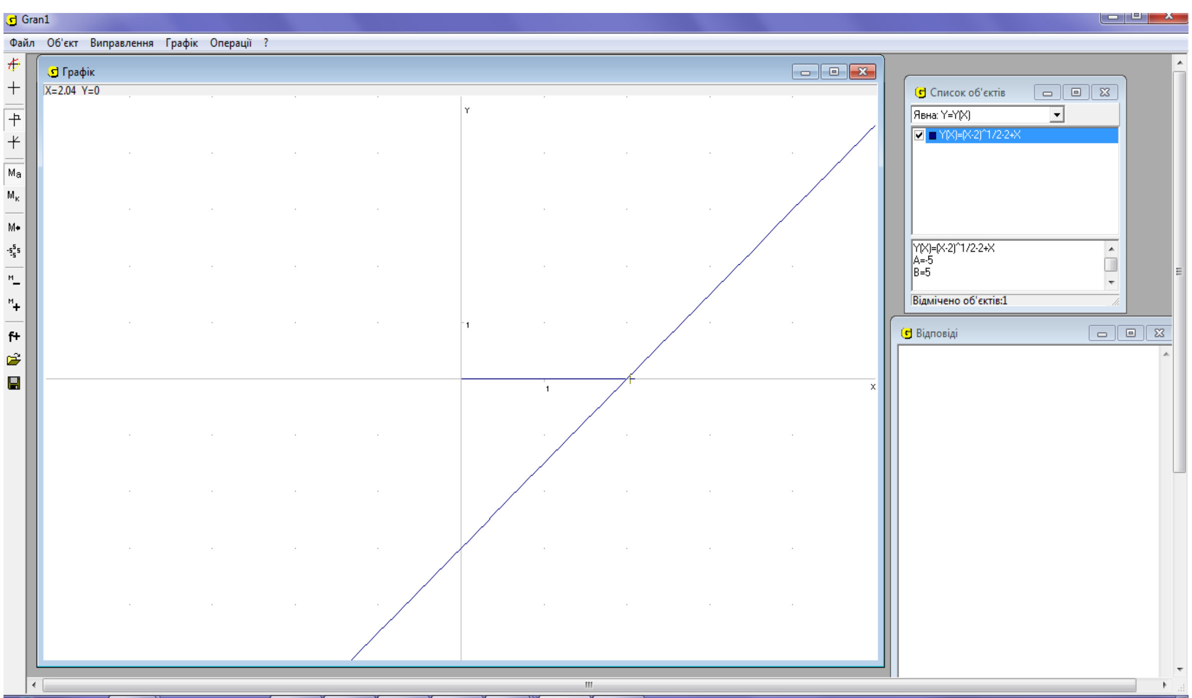



Рис. 2

Графік перетинає вісь OX в точці x=2, точку перетину визначаємо навівши курсор мишки на перетин графіка з віссю OX і на екрані вгорі ліворуч матимемо точку x=2.

*Перевірка:* 1) $\sqrt{2-2} = 2-2;$

2) $\sqrt{3-1} = 2-3;\ \ \sqrt{2} \neq -1.$

*Відповідь*: 2.

Спосіб виділення повного квадрата. Цим способом розв'язуються такі ірраціональні рівняння, в яких підкореневий вираз можна подати у вигляді повного квадрата.

Розв'яжемо рівняння $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6.$

ОДЗ: $x \geq -5$

При $x \geq -5$ маємо: $\sqrt{x+2\sqrt{x+5}+5+1}+\sqrt{x+5-2\sqrt{x+5}+1}=6;$

$$\sqrt{(\sqrt{x+5}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+5}-1)^2}=6$$

$$\left|\sqrt{x+5}+1\right|+\left|\sqrt{x+5}-1\right|=6.$$

Перший під модульний вираз є додатним при розглянутих значеннях $x$. розглянемо випадок, коли $\sqrt{x+5} \geq 1$. Рівняння набуде вигляду:

$\sqrt{x+5}+1+\sqrt{x+5}-1=6;$

$2\sqrt{x+5}=6;\ \ \sqrt{x+5}=3;\ \ \ x+5=9;\ \ \ x=4.$ Якщо ж $\sqrt{x+5}<1$, то маємо $\sqrt{x+5}+1+1-\sqrt{x+5}=6;$ отримане рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $x=4.$

Завдання для класу. Знайти помилку у висловлюваннях:

А) Ірраціональне рівняння – це рівняння, яке містить радикали.(правильно: невідоме під знаком радикала.)

Б) Значення кореня в ірраціональному рівнянні вважається арифметичним. (правильно: значення кореня парного степеня.)

В) За умови піднесення обох часин ірраціонального рівняння до парного степеня з'являються сторонні корені. (правильно: можуть з'являтися сторонні корені.)

Г) Рівняння $\sqrt[3]{x-3} = a$ має корені, якщо $a \geq 0$ (правильно: при будь-якому значенні а)

**VI. Закріплення нових знань та вмінь**

*Робота з підручником*

1) Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$.

Подивимось на задане рівняння як на правильну числову рівність і будемо виконувати перетворення цього рівняння так, щоб числова рівність залишалася правильною. А саме: якщо у правильній числовій рівності перенести член з однієї частини в іншу з протилежним знаком, то рівність не порушиться.

$$\sqrt{x+1} = 1 + 4\sqrt{4-x}$$

Якщо числа рівні, то і їх квадрати також рівні:

$$x+1 = (1+\sqrt{4-x})^2; \quad x+1 = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4 - x; \quad 2x - 4 = 2\sqrt{4-x}$$

$$x - 2 = \sqrt{4-x}$$

Якщо числа рівні, то і їхні квадрати також рівні: $(x-2)^2 = 4 - x$.

Розкриваючи дужки і переносячи всі члени в один бік, знову дістаємо правильну рівність. Звідки знаходимо корені неповного квадратного рівняння:

$$x^2 - 3x = 0; x(x-3) = 0; \quad x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Оскільки для розв'язування використано рівняння-наслідки, то до розв'язання входить також перевірка знайдених коренів підстановкою у початкове рівняння.

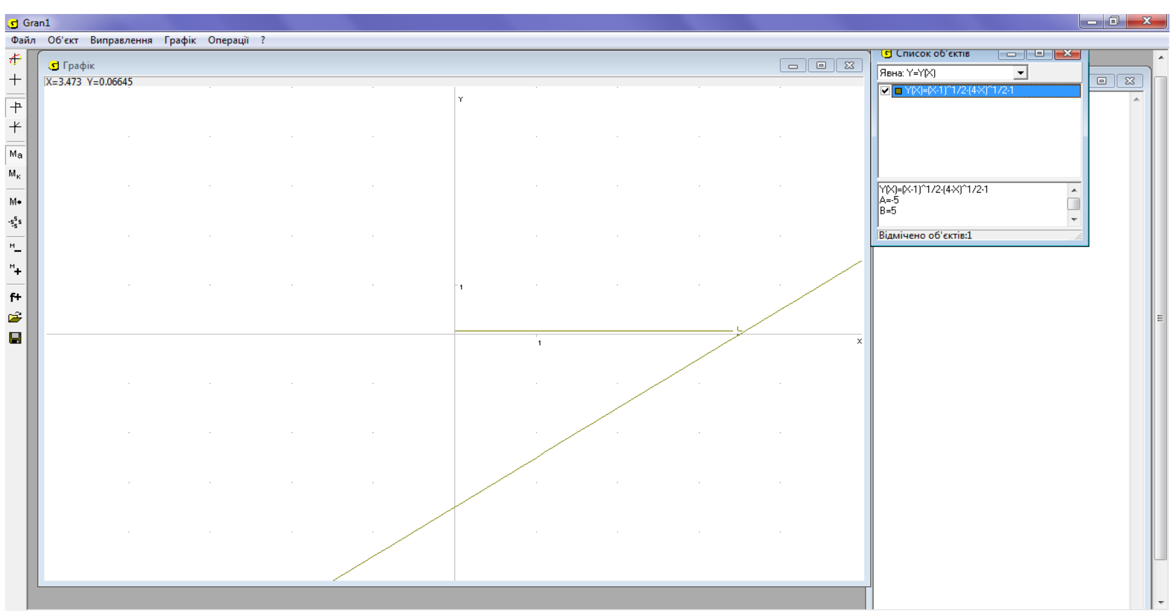


Рис.3

Отже, $x = 0$ – сторонній корінь

Відповідь: 3

2) Розв'язати рівняння $\sqrt{3x-2} + x = 4$

Розв'язування

$\sqrt{3x-2} = 4 - x$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата

$(\sqrt{3x-2})^2 = (4-x)^2$

$3x + 2 = 16 - 8x + x^2$

$x^2 - 11x + 18 = 0$

$x_1 = 9, \;\; x_2 = 2.$

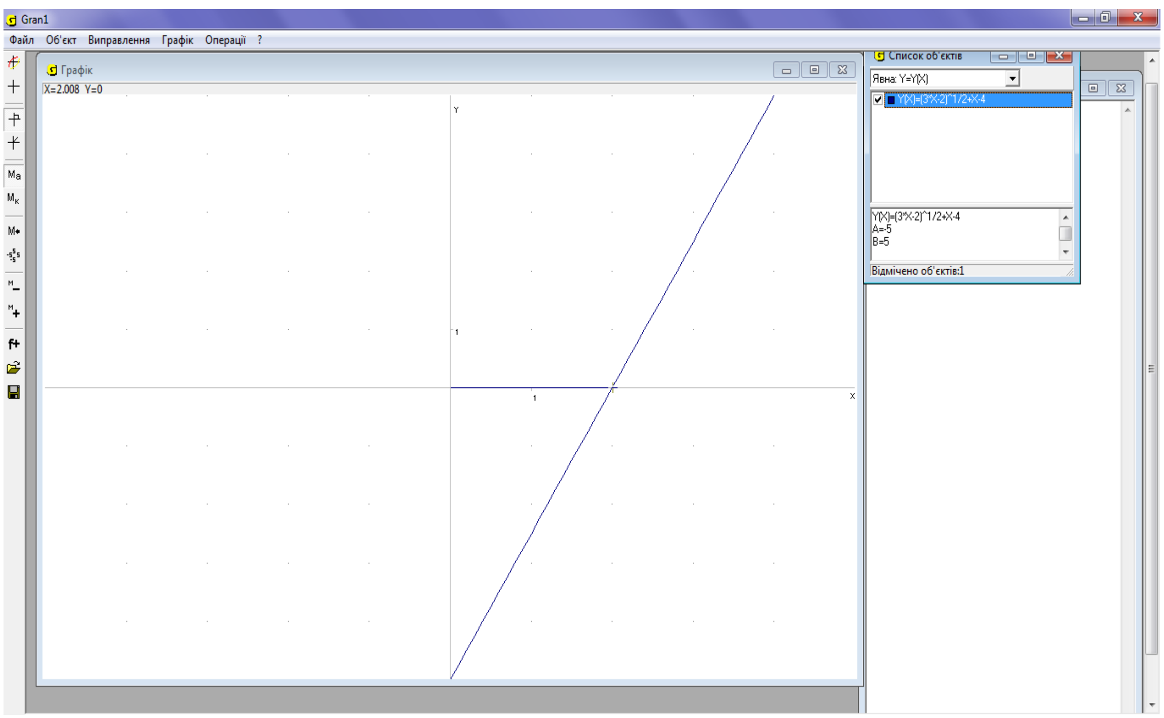



Рис.4

$x = 9$ – сторонній корінь.

Відповідь: 2

**VII. Підбиття підсумків уроку**

Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь.

Якими способами можна розв'язати кожне з наведених рівнянь?

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}=0; \quad \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}-3\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=4; \quad \sqrt[10]{x^6}-\sqrt[10]{x^3}=56$$

**VIII. Домашнє завдання**

1) Розв’язати рівняння $\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5$.

2) Розв’язати рівняння $2\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}=2$.

3) Розв’язати рівняння $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$.