Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

бакалавр

на тему

Методика вивчення трикутників в курсі математики 5–9 класів

Виконала: студентка 4 курсу
групи МІ-42
напряму підготовки 6.040201 «Математика»
Кокора Марія Миколаївна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри
математики з методикою викладання
Генсіцька–Антонюк Н. О.

Рецензент: канд. пед. наук, доц.
Харченко Н. Б.

Рівне – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Становлення наукового світогляду людини неможливе без ознайомлення із специфікою математичних методів пізнання, формування уявлень про математичне моделювання, розуміння зв’язку геометрії з дійсністю, використання у навчанні фактів історії науки.

Геометрія для учнів основної загальноосвітньої школи є обов’язковою дисципліною, і ті можливості, які вона надає для формування наукового стилю мислення та розвитку творчих здібностей учнів, повинні повною мірою використовуватися в навчально-виховному процесі.

Вивчення геометрії сприяє розвитку в учнів раціонального стилю мислення з характерними для нього рисами обґрунтованості, критичності, раціональності, алгоритмічності. Разом з тим, геометрична освіта має велике значення для розвитку уявлення, уяви, інтуїції, які є основою творчої діяльності особистості. Як свідчить практичний досвід роботи в школі, випускні екзамени, вступні випробування у вузах, курс геометрії базової школи закладає основу для вивчення стереометрії у 10–11 класах та геометрії і окремих технічних дисциплін у вузах. Покращення геометричної підготовки учнів основної школи є актуальною проблемою в період реформування загальної середньої освіти, що передбачає реалізацію сучасних принципів освітньої діяльності, методологічну переорієнтацію процесу навчання з інформативних повідомлень на розвиток особистості учня. В основу модернізації традиційної системи навчання мають бути покладені психологічні принципи індивідуалізації та диференціації, особистісно орієнтований підхід до організації діяльності школяра.

На сучасному етапі розвитку загальноосвітньої школи головні її завдання полягають у тому, щоб дати учням глибокі знання основних наук, удосконалювати їх діалектико–матеріалістичний світогляд, розвивати творчі здібності і трудові навички, прищеплювати бажання і вміння самостійно здобувати і поглиблювати свої знання. Вирішення цих завдань потребує всілякої активності їх навчальної діяльності, осмисленого вивчення матеріалу.

Уявлення учнів про взаємозв'язок математики і навколишнього світу досягається поєднанням теоретичного і сучасних прикладних аспектів шкільного курсу математики. Цьому сприяє й той факт, що в програмі та навчальних посібниках відображені внутрішньо–предметні та міжпредметні зв'язки. На уроках математики, як правило, готується весь апарат, необхідний для вивчення суміжних предметів на достатньо високому рівні. Великий інтерес представляють ті поняття, які знаходять застосування у кількох шкільних предметах.

Трикутник є найважливішою фігурою планіметрії, і тому в першу чергу вивчають властивості цієї фігури. З ним пов'язано багато методів, які використовуються при розв'язуванні різних геометричних задач. Будь–який багатокутник може бути розділений на трикутники, а вивчення властивостей цього багатокутника, зводиться до вивчення складових його трикутників. Фактично в шкільному курсі геометрії, все що вивчається – це геометрія трикутника. Тому дуже важливо знати методику викладання цієї теми в різних навчальних посібниках для правильної побудови курсу та уникнення методичних помилок.

Саме важливість та актуальність проблеми обумовило вибір теми дослідження «***Методика вивчення трикутників в курсі математики 5–9 класів***».

Об'єкт дослідження – процес навчання геометрії в загальноосвітній школі.

Предметом дослідження є трикутники в курсі математики 5–9 класів.

Мета дослідження – дослідження теоретико-методичних основ вивчення трикутників в 5-9 класах та формування інформаційно-цифрової компетентності з використанням пакету програм GRAN–2D.

Відповідно до мети дослідження нами були поставлені такі **завдання**:

1) проаналізувати науково–методичну, психолого–педагогічну літературу з проблеми дослідження;

2) визначити місце задач з теми «Трикутники» у навчальному процесі;

3) узагальнити та систематизувати теоретико-методичні матеріали;

4) проаналізувати прийоми розв’язування олімпіадних задач з досліджуваної теми;

5) розробити систему задач з теми «Трикутники» та впровадити методику застосування пакету програм GRAN–2D до їх розв’язування в навчальний процес;

6) дослідити вміння учнів розв’язувати задачі з даної теми.

Для реалізації визначених задач були використані такі **методи дослідження**:

– *загальнонаукові (аналіз, синтез, узагальнення),* що дали змогу узагальнити та систематизувати погляди вітчизняних і зарубіжних педагогів на проблему дослідження;

– *пошуково-бібліографічний* (вивчення джерел, матеріалів періодичних видань з проблеми дослідження), що дав підстави для наукових узагальнень;

– *метод термінологічного аналізу* уможливив за допомогою виявлення та уточнення значень і смислів основоположних понять актуалізувати категорійно-поняттєвий апарат дослідження;

– *історіографічний* допоміг критично проаналізувати опубліковану з порушеної проблеми педагогічну літературу;

– *педагогічний експеримент* (анкетування).

Джерельна база дослідження охоплює *п’ять* основних груп:

– *джерела нормативно-правового характеру*;

– *періодичні видання*, на сторінках яких представлена ґенеза досліджуваної проблеми;

– *навчальні плани, навчальні програми, шкільні підручники та методична література для вчителів* з математичних дисциплін;

– *інтерпретаційні джерела* – монографії, брошури, статті, присвячені досліджуваній темі або дотичні до неї;

– *довідкова література, сучасні підручники й посібники* для вищої школи.

Теоретичне значення дослідження полягає в тому, що:

1) запропонована система задач з теми «Трикутники» у шкільному курсі математики;

2) запропоновані методи та способи розв’язування олімпіадних задач з даної теми;

3) запропонована методика розв’язування задач з теми «Трикутники» з використанням пакету програм GRAN–2D, встановлена ефективність використання новітніх інформаційних технологій при вивченні математики.

Практичне значення роботи полягає в тому, що розроблений зміст і методика може бути використана вчителями шкіл при організації навчання математики на уроках та факультативних заняттях для активізації їх пізнавальної діяльності, підвищення якості засвоєння сприйнятого матеріалу, створення творчої атмосфери в колективі учнів.

Результати дослідження ***упроваджено*** в навчально-виховний процес Рівненського навчально-виховного комплексу «Колегіум» Рівненської міської ради**.**

Структура і обсяг. Бакалаврська робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (38 джерел) та додатків і розкривається на 89 сторінках.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТРИКУТНИКІВ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 5–9 КЛАСІВ

1.1 Аналіз програми з математики 5–9 класів з теми дослідження

Вивчення математики у 5–6 класах здійснюється з переважанням індуктивних міркувань в основному на наочно–індуктивному рівні із залученням практичного досвіду учнів і прикладів із довкілля. Відбувається поступове збільшення теоретичного матеріалу, який вимагає обґрунтування тверджень, що вивчаються. Це готує учнів до широкого використання дедуктивних методів на наступному етапі вивчення математики.

Зміст навчального матеріалу 5–6 класів передбачає уявлення про окремі геометричні фігури на площині і в просторі, зокрема уявлення про трикутник, його класифікацію та периметр [32].

Вивчення геометричних фігур має передбачати використання наочних ілюстрацій, прикладів із довкілля, життєвого досвіду учнів, виконання побудов і сприяти виробленню вмінь виділяти форму і розміри як основні властивості геометричних фігур. Закріплення понять супроводжується їх класифікацією (кутів, трикутників, взаємного розміщення прямих на площині). Властивості геометричних фігур спочатку обґрунтовуються дослідно–індуктивно, потім застосовуються в конкретних ситуаціях, що сприяє виробленню в учнів умінь доказово міркувати.

В курсі геометрії 7 класу вивчається тема ***«Трикутники. Ознаки рівності трикутників»***. На дану тему відводиться 22 години.

Зміст навчального матеріалу курсу включає в себе такі параграфи:

- Трикутник і його елементи. Висота, бісектриса і медіана трикутника.
- Рівність геометричних фігур. Ознаки рівності трикутників.
- Види трикутників.
- Рівнобедрений трикутник, його властивості та ознаки.

- Нерівність трикутника.
- Сума кутів трикутника.
- Зовнішній кут трикутника та його властивості.
- Властивості прямокутних трикутників [24].

У 7 класі учні ознайомлюються з основами геометричної науки – означеннями, теоремами, основними методами доведення теорем, основними задачами на побудову. Поглиблюються і систематизуються відомості про геометричні величини: довжину і градусну міру кута 25].

В курсі геометрії 8 класу вивчаються такі теми: ***«Подібність трикутників»***, на яку відводиться 10 годин та ***«Розв'язування прямокутних трикутників»*** – 14 годин.

Зміст навчального матеріалу курсу включає в себе такі параграфи:

- Узагальнена теорема Фалеса.
- Подібні трикутники.
- Ознаки подібності трикутників.
- Властивість медіани та бісектриси трикутника.
- Синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника.
- Теорема Піфагора.
- Перпендикуляр і похила, їх властивості.
- Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.
- Значення синуса, косинуса, тангенса деяких кутів.

Однією з основних задач, що вивчається в курсі геометрії, є розв'язування трикутників. У 8 класі розглядається задача розв'язування прямокутного трикутника. Для цього вводиться поняття косинуса, синуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, доводиться теорема Піфагора. Дана тема продовжується в 9 класі — розв'язуються довільні трикутники. Це потребує введення формул для знаходження синуса і косинуса тупого кута та доведення теорем косинусів і синусів [24].

В курсі геометрії 9 класу вивчається тема ***«Розв'язування трикутників»***. На дану тему відводиться 10 годин. Зміст навчального матеріалу курсу включає в себе такі параграфи:

- Теореми косинусів і синусів.
- Формули для знаходження площі трикутника[32].

1.2 Методика вивчення трикутників в основній школі

Особливо слід відзначити роль трикутника в курсі планіметрії. Трикутник просторово локальний, замкнутий і конструктивно простий. Це найекономніший вид многокутників. Для його завдання досить вказати його вершини – або три попарно пересічні прямі.

Тому він зручний у використанні для вивчення властивостей реального простору.

Вчителю слід ясно представити всю систему знань про трикутники для того, щоб добитися повного і осмисленого засвоєння їх. Вивчення трикутників розподілене практично по всіх класах основної школи. Курс 7 класу – це, по суті, геометрія трикутника.

У 7 класі дається означення трикутника. У попередніх класах трикутник розглядається як частина площини. Це було зручно для практичних занять з вирізанням фігур з паперу. Але в системному курсі геометрії протягом тривалого часу (до 9 класу) не потрібна внутрішність трикутника, вона знадобиться в 9 класі при визначенні поняття площ [32].

Трикутником називається фігура що складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно сполучають ці точки. В означенні слід звернути увагу учнів на те, що три точки, які є вершинами трикутника, не лежать на одній прямій, продемонструвавши 2 малюнки і каркасні моделі трикутників.

При введенні поняття рівності трикутників можна дати коротше формулювання: трикутники рівні, якщо у них відповідні елементи рівні. Взагалі таке визначення відрізняється від традиційного, де рівними називаються трикутники, що суміщаються при накладанні. Але поняття руху визначається пізніше, оскільки воно складне. Відповідність елементів встановлюється автоматично самим записом. Матеріал про ознаки займає центральне місце в обох навчальних посібниках. По–перше, він знайомить учнів з дедуктивними обґрунтуваннями, по–друге, використання ознак стає основним методом доведення теорем і розв'язання задач в подальшому курсі.

У діючих навчальних посібниках ознаки строго доводяться спираючись на аксіоми і теореми рівності трикутників. При доведенні необхідно використовувати серію малюнків, які відображають динаміку доведення, окремі його етапи [10].

Починаючи вивчення ознак рівності трикутників, вчитель відзначає, що не обов'язково знати про наявність у них шести пар відповідних рівних елементів, достатньо три пари. Які це пари, ми дізнаємося після розгляду трьох теорем, які називають ознаками рівності трикутників.

Слід врахувати що ці теореми, які вивчаються на самому початку систематичного курсу для семикласників представляють значну трудність. Тому відтворення повних доведень можна вимагати тільки від сильних учнів, останні повинні усвідомлювати хід доведення і зміст використовуваних в них міркувань. Засвоєння теорем повинне відбуватися в процесі розв'язання задач.

В курсі геометрії 8 класу ширше вивчаються подібні трикутники, їх властивості й ознаки; що таке пропорційні відрізки, як їх знаходити; які середні пропорційні відрізки є в прямокутному трикутнику; як застосовувати подібність трикутників на практиці та під час розв'язування задач. У наступних розділах ми дізнаємося про: визначну теорему геометрії — теорему Піфагора та наслідки з неї; що таке синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника та про співвідношення між його сторонами; про алгоритми знаходження за однією зі сторін прямокутного трикутника і гострим кутом двох інших сторін, а за двома сторонами трикутника — гострих кутів; як застосовувати вивчені алгоритми до розв’язування геометричних задач і задач практичного змісту.

В курсі геометрії 9 класу ми дізнаємося про теорему косинусів і теорему синусів; про існування різних формул для знаходження площ трикутника і паралелограма; навчаємося розв’язувати трикутники і прикладні задачі; знаходити площі трикутника, паралелограма, ромба, використовуючи різні формули [1].

Вивчення ознак рівності трикутників. Відношення рівності трикутників є окремим випадком відношення рівності фігур. Означення рівності геометричних фігур у шкільному курсі вводять у зв’язку з вивченням у 8 класі рухів. Означення рівних трикутників і ознаки їх рівності вивчають у 7 класі на початку курсу, оскільки вони традиційно є основним аргументом під час доведення теорем, розв’язування задач і вивчення інших тем.

Основною метою вивчення теми «Рівність трикутників» є ознайомити учнів з ознаками рівності трикутників і навчити застосовувати їх до розв’язання задач. Вміння застосовувати ознаки рівності трикутників потрібно звести до рівня, що забезпечує учням можливість самостійно розв’язувати задачі, які потребують застосування цього апарату. Під час вивчення цієї теми посилюються можливості розвитку логічного мислення, усвідомлення учнями ідеї дедуктивної побудови геометрії.

Доведення ознак рівності трикутників потребує обґрунтування кожного із тверджень, які містять доведення, посиланням на відповідні аксіоми, означення, вміння застосовувати метод від супротивного. Ці доведення непрості для сприймання всіма учнями, тому було б неправомірним на рівні обов’язкових результатів навчання вимагати від усіх школярів уміння відтворювати доведення. Тут вперше виникає можливість пояснити учням відмінність між твердженням, яке є значенням певних фігур, і твердженнями, які є ознаками рівності цих фігур (означення і ознаки рівності трикутників, означення рівнобедреного трикутника і ознака такого трикутника) [14].

Використання відомих і формування нових понять теми. У зв’язку з вивченням ознак рівності трикутників і пов’язаного з ними навчального матеріалу використовується багато вже відомих понять та їх означень: відрізок, довжина відрізка, рівні відрізки, кут, кутова міра, рівні кути, трикутник, рівні трикутники, перпендикуляр, проведений до прямої, та ін.

Отже, слід подбати про своєчасну актуалізацію потрібних знань, повторення необхідних означень понять. Особливо уважно слід повторити означення рівних трикутників і відповідну символіку. Специфіка підручників потребує від учнів уважного ставлення до позначення буквами відповідних сторін і кутів у двох рівних трикутниках.

У цій темі вводять шість нових понять: рівнобедрений трикутник, рівносторонній трикутник, теорема, обернена до даної, висота трикутника, опущена з даної вершини, бісектриса трикутника, проведена з даної вершини, медіана трикутника, проведена з даної вершини.

Всі значення доцільніше запровадити абстрактно-дедуктивним методом і проілюструвати конкретними прикладами. Важливо спеціально підкреслити істотні властивості цих понять і протиставити їм неістотні. Наприклад, означення бісектриси трикутника, проведеної з даної вершини, містить дві істотні властивості: 1) це – відрізок бісектриси кута трикутника; 2) він сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні. Неістотними у цьому означенні є вид трикутника, розміщення вершин на площині.

В означенні рівнобедреного трикутника є лише одна істотна ознака – рівність двох сторін. Неістотними є розміщення цього трикутника на площині. Зокрема, основа рівнобедреного трикутника необов’язково має бути горизонтальною, як це здебільшого зображено в підручниках [4].

Вводячи поняття висоти трикутника, не слід обмежуватися лише формулюванням означення. Учні мають виконати практичні вправи на проведення висот з різних вершин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників.

Під час введення поняття оберненої теореми доцільно запропонувати учням сформулювати твердження, обернені до відомих з курсу математики 5 – 6 класів, і з’ясувати, чи правильні вони [1].

Доведення теорем. Усі теореми, які вивчають у цій темі, належить до основних теорем курсу геометрії, оскільки їх широко використовують під час доведення теорем і розв’язування задач. Найскладнішими з них для сприймання учнів є доведення ознак рівності трикутників. Перш ніж приступати до вивчення першої ознаки, потрібно звернути увагу учнів на відмінності між термінами «означення» рівності трикутників. Означення відповідає на запитання «Що це таке?», тобто розкриває зміст поняття. Ознака – це теорема, в якій наведено умови, за яких об’єкт належатиме до поняття, про яке йдеться в означенні. Доведення двох перших ознак рівності трикутників доцільно організувати на трьох рівнях строгості, або скорочено – «в три проходи».

Перший прохід вчитель виконує сам. Його мета – ознайомити учнів зі структурою доведення в цілому. За рисунком вчитель пояснює основну ідею доведення, називає основні твердження, які воно містить, без потрібних обґрунтувань.

Під час виконання другого проходу доведення відтворюють з усіма потрібними обґрунтуваннями. В цьому разі доцільно заздалегідь заготувати таблицю з двох стовпчиків. У лівому стовпчику слід записати всі твердження, які містить доведення, в правому – обґрунтування кожного з них. Правий стовпчик під час другого проходу спочатку закривають і відкривають після відповідей учнів на запитання «Чому?».

Під час третього проходу вводять домовленість пропускати обґрунтування деяких, інтуїтивно і наочно найзрозуміліших тверджень для скорочення доведення. З метою закріплення доведення вчитель ще раз повторює його в скороченому варіанті. Фактично – це доведення, наведене в підручниках [32].

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТРИКУТНИКІВ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 5–9 КЛАСІВ

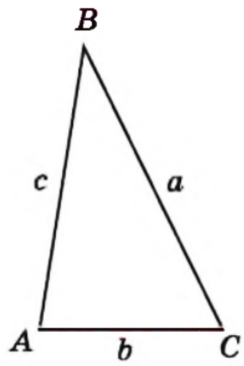
2.1 Трикутник і його елементи. Види трикутників

З усіх многокутників ***трикутники*** мають найменшу кількість сторін.

Позначимо три точки *A*, *B* і *C*, які не лежать на одній прямій, і сполучимо їх відрізками (мал. 2.1.1) [13].

Трикутником називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.

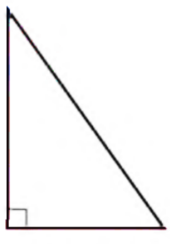
Точки називають ***вершинами*** трикутника, а відрізки – його ***сторонами***. На мал. 2.1.1 зображено трикутник *ABC*. Його вершинами є точки *A*, *B* і *C*, а сторонами — відрізки *AB*, *BC* і *CA*. Замість слова «трикутник» в математиці можна вживати символ Δ, тоді запис Δ *ABC* читають так: «трикутник *ABC*». Назва трикутника складається з букв, якими позначено його вершини, і записувати їх можна в будь-якому порядку: Δ *ACB*; Δ *BCA*; Δ *CAB* тощо.



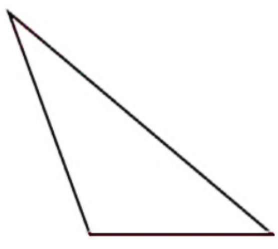
Мал. 2.1.1

Кутами трикутника *ABC* називають кути *BAC*, *ABC* і *BCA*. Якщо з вершини трикутника не проведено жодних інших ліній, окрім його сторін, то кути трикутника можна називати лише їх вершиною: однією буквою ∠ *A*, ∠ *B* і ∠ *C*. Сторони трикутника також можна позначати малими буквами латинського алфавіту *a*, *b* і *c* відповідно до позначення протилежних їм вершин [22].

Мал. 2.1.2



Мал. 2.1.3



Мал. 2.1.4

Кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути, які ще називають ***елементами трикутника*** [5].

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його ***периметром***. Периметр позначають буквою *P*, наприклад, периметр трикутника *ABC* можна позначити так: $P_{\Delta ABC}$. Маємо:

$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA.$$

З а д а ч а. Одна зі сторін трикутника на 7 см менша за другу і вдвічі менша за третю. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 47 см.

Р о з в ’ я з а н н я. Нехай довжина найменшої сторони трикутника дорівнює x см, тоді довжина другої — $(x + 7)$ см, а третьої — $2x$ см. Оскільки $P_{\Delta} = 47$см, маємо рівняння:

$$x + (x + 7) + 2x = 47.$$

Розв’язавши це рівняння, отримаємо $x = 10$ (см).

Отже, довжина однієї сторони трикутника дорівнює 10 см, другої — 17 см, третьої — 20 см.

В і д п о в і д ь. 10 см, 17 см, 20 см [37].

Залежно від величини кутів розрізняють такі види трикутників: ***гострокутні, прямокутні, тупокутні.*** Гострокутні трикутники — це ті, у яких усі кути гострі (мал. 2.1.2), прямокутні — це ті, що мають прямий кут (мал. 2.1.3), тупокутні — це ті, що мають тупий кут (мал. 2.1.4).

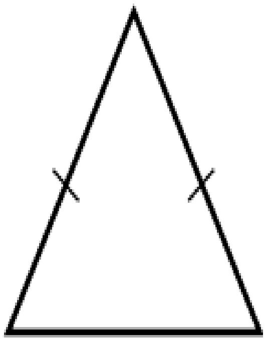
Трикутники можна класифікувати не тільки за величиною кутів, а й за кількістю рівних сторін.

Якщо дві сторони трикутника рівні, то його називають рівнобедреним трикутником (мал. 2.1.5)**.**

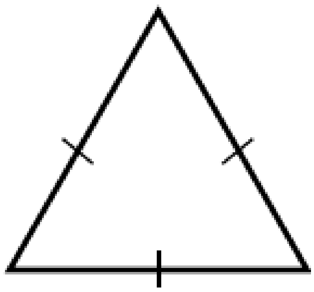
Якщо три сторони трикутника рівні, то його називають рівностороннім трикутником (мал. 2.1.6)**.**

Якщо три сторони трикутника мають різні довжини, то його називають різностороннім трикутником (мал. 2.1.7)**.**

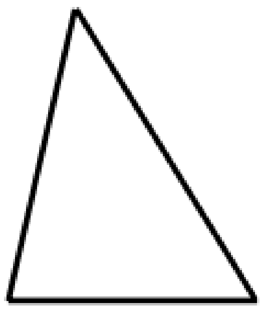
Як правило, на рисунках, рівні сторони трикутника позначають однаковою кількістю штрихів [29].



Мал. 2.1.5



Мал. 2.1.6



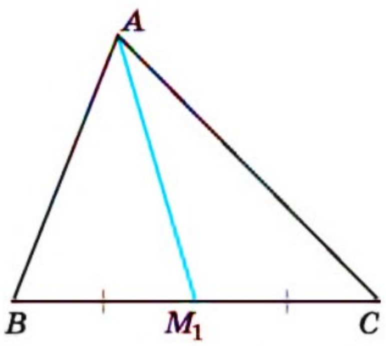
Мал. 2.1.7

2.2 Медіана, бісектриса, висота та серединні перпендикуляри трикутника

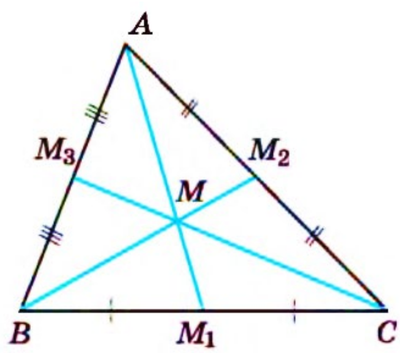
У кожному трикутнику можна провести кілька відрізків, які мають спеціальні назви.

Медіаною трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

На малюнку 2.2.1 відрізок AM_1— медіана трикутника ABC. Точку M_1 називають основою медіани AM_1. Будь-який трикутник має три медіани. На малюнку 2.2.2 відрізки AM_1, BM_2, CM_3 — медіани трикутника ABC. Медіани трикутника мають цікаву властивість.



Мал. 2.2.1



Мал. 2.2.2

У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (її називають центроїдом трикутника) і діляться цією точкою у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

На малюнку 2.2.2 точка M — центроїд трикутника ABC.

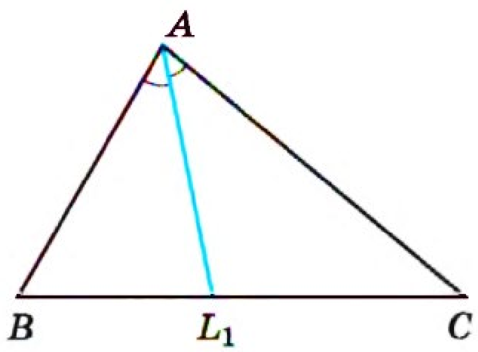
Цю властивість буде доведено у старших класах [2].

Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два рівнобедрених трикутника, оскільки медіана дорівнює половині гіпотенузи.

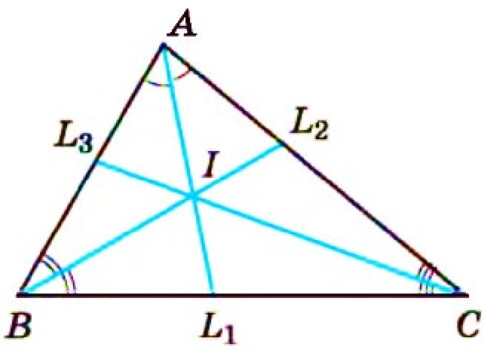
Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.

На малюнку 2.2.3 відрізок AL_1 — бісектриса трикутника ABC. Точку L_1 називають основою бісектриси AL_1. Будь-який трикутник має три бісектриси. На малюнку 2.2.4 відрізки AL_1, BL_2, CL_3 — бісектриси трикутника ABC.

В будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці (її називають ***інцентпром****)*. На малюнку 2.2.4 точка I — інцентр трикутника ABC.



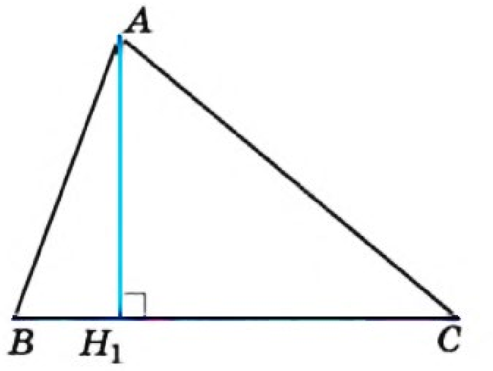
Мал. 2.2.3



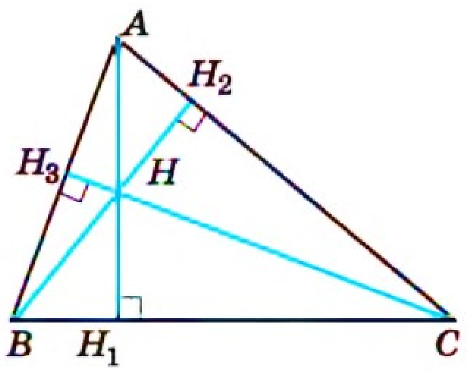
Мал. 2.2.4

Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

На малюнку 2.2.5 відрізок AH_1 — висота трикутника ABC. Точку H_1 називають основою висоти AH_1. Будь-який трикутник має три висоти. На малюнку 2.2.6 відрізки AH_1, BH_2, CH_3 — висоти гострокутного трикутника ABC, на малюнку 2.2.7 ці відрізки — висоти прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C, а на малюнку 2.2.8 ці відрізки — висоти тупокутного трикутника ABC з тупим кутом A [7].



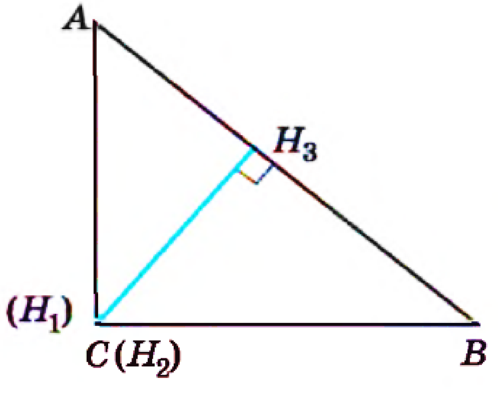
Мал. 2.2.5



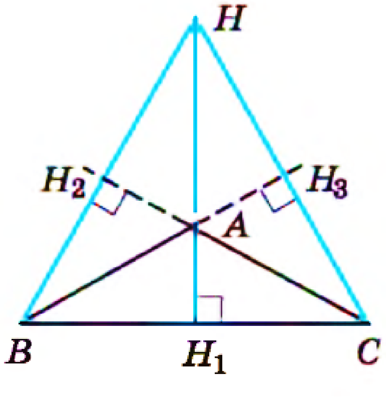
Мал. 2.2.6

В будь-якому трикутнику три висоти або їх продовження перетинаються в одній точці (її називають ***ортоцентром*** *трикутника).*

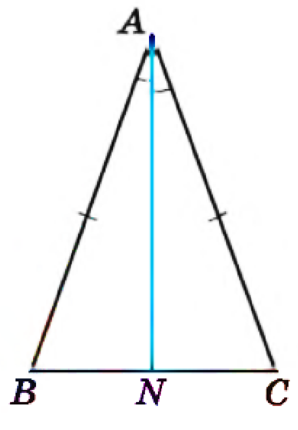
На малюнках 2.2.6 і 2.2.8 точка H — ортоцентр трикутника ABC, на малюнку 2.2.7 ортоцентр трикутника збігається з точкою C — вершиною прямого кута трикутника ABC.



Мал. 2.2.7



Мал. 2.2.8



Мал. 2.2.9

Розглянемо ще одну важливу властивість рівнобедреного трикутника.

Т е о р е м а 1 *(властивість бісектриси рівнобедреного трикутника)*. ***У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.***

Д о в е д е н н я. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою BC, AN — його бісектриса (мал. 2.2.9). Доведемо, що AN є також медіаною і висотою.

1) Оскільки $AB = AC$, і тому $\angle BAN = \angle CAN$, а відрізок AN є спільною стороною трикутників BAN і CAN, то $\Delta BAN = \Delta CAN$ (за першою ознакою).

2) Тому $BN = NC$. Отже, AN — медіана трикутника.

3) Також маємо $\angle BNA = \angle CNA$. Оскільки ці кути суміжні і рівні, то $\angle BNA = \angle CNA = 90°$. Отже, AN є також висотою. Теорему доведено [19].

Т е о р е м а про бісектрису. Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам, тобто $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

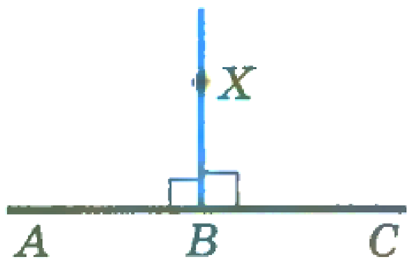
Оскільки бісектриса, медіана і висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то справедливими є такі наслідки з теореми.

Н а с л і д о к 1. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є висотою і бісектрисою.

Н а с л і д о к 2. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою [5].

Т е о р е м а 2. Кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.

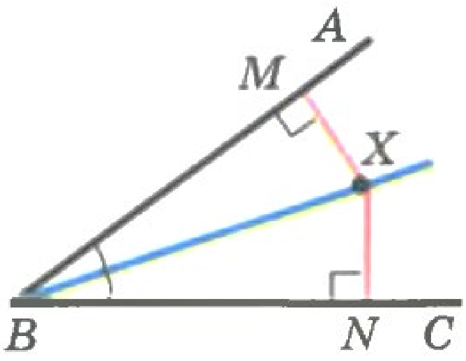
Д о в е д е н н я. Очевидно, що вершина кута має властивість, яку треба довести.



Мал. 2.2.10

Кожна точка X бісектриси розгорнутого кута рівновіддалена від його сторін. Справді, відстані від точки X до сторін BA і BC розгорнутого кута ABC дорівнюють відстані від точки X до прямої AB (мал. 2.2.10).

Розглянемо кут ABC, відмінний від розгорнутого, і довільну точку X, яка не збігається з вершиною цього кута й належить його бісектрисі. Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на сторони BA і BC (мал. 2.2.11). Треба довести, що $XM = XN$.



Мал. 2.2.11

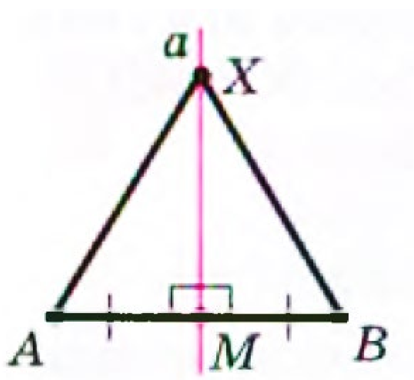
У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX – спільна, $\angle MBX = \angle NBX$ оскільки BX – бісектриса кута ABC. Отже, трикутники BXM і BXN рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $XM = XN$.

Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.

Т е о р е м а 2. Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.

Д о в е д е н н я. Нехай X – довільна точка серединного перпендикуляра a відрізка AB. Треба довести, що $XA = XB$.

Нехай точка M – середина відрізка AB. Якщо точка X збігається з точкою M (а це можливо, оскільки X – довільна точка прямої a), то $XA = XB$.



Мал. 2.2.12

Якщо точки X і M не збігаються, то розглянемо трикутники AXM і BXM (мал. 2.2.12). У цих трикутниках $AM = MB$, оскільки точка M – середина відрізка AB, сторона XM – спільна, $\angle AMX = \angle BXM = 90^\circ$. Отже, трикутники AXM і BXM рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. Тоді відрізки XA і XB рівні як відповідні сторони рівних трикутників.

2.3 Сума кутів трикутника

Трикутник – ключова фігура планіметрії. Світ трикутників різноманітний. Проте всім їм притаманна властивість, яку розкриває така теорема.

Т е о р е м а 1. Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний трикутник . Треба довести, що $\angle A + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = 180°$.

Через вершину B проведемо пряму a, паралельну прямій AC (мал. 2.3.1). Маємо: $\angle A$ і $\angle 1$ рівні як різносторонні при паралельних прямих a і AC та січній AB. Аналогічно доводимо, що $\angle \mathrm{C} = \angle 3$. Але кути 1, 2, 3 складають розгорнутий кут з вершиною B.

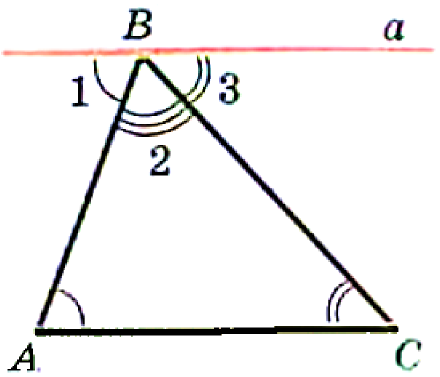
Отже, $\angle A + \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{C} = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ [20].

Н а с л і д о к. Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.

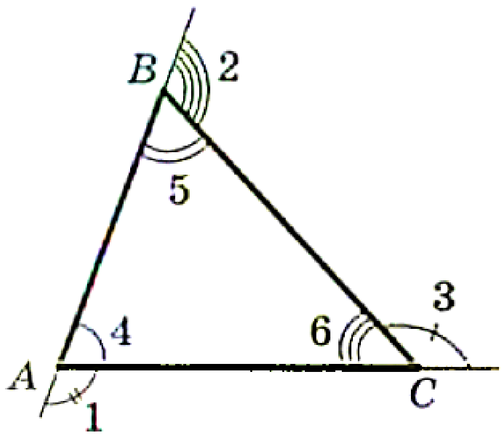
Із цього наслідку випливає, що кут при основі рівнобедреного трикутника завжди є гострим.

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.

На малюнку 2.3.2 кути 1, 2, 3 є зовнішніми кутами трикутника ABC.



Мал. 2.3.1



Мал. 2.3.2

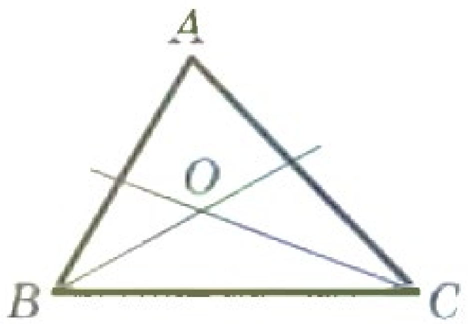
Т е о р е м а 2. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Д о в е д е н н я. На малюнку 2.3.2 кути 1, 2 і 3 – зовнішні кути трикутника *ABC*. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Доведемо, наприклад, першу із цих трьох рівностей (решту рівностей доводяться аналогічно).

За властивість суміжних кутів $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. За теоремою про суму кутів трикутника $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$. Тоді $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, звідки $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$ [18].

Н а с л і д о к. Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.



Мал. 2.3.3

З а д а ч а 1. У трикутнику *ABC* відомо, що $\angle A = \alpha$. Бісектриси кутів *B* і *C* перетинаються в точці *O*. Доведіть, що $\angle BOC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Р о з в ’ я з а н н я. Для трикутника *ABC* маємо: $\angle A + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = 180^{\circ}$. Тоді $\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = 180^{\circ} - \alpha$. Оскільки промені *BO* і *CO* – бісектриси відповідно кутів *ABC* і *ACB* (мал. 2.3.3), то $\angle \mathrm{OBC} + \angle \mathrm{OCB} = \frac{1}{2}(180^{\circ} - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

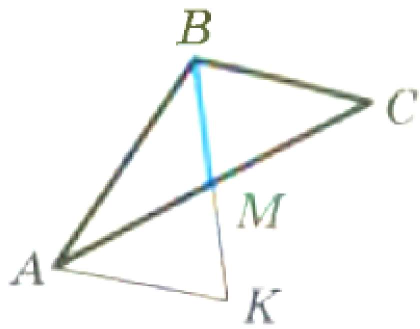
Для трикутника *BOC* маємо: $\angle \mathrm{OBC} + \angle \mathrm{OCB} + \angle \mathrm{BOC} = 180°$. Тоді:

$$\angle \mathrm{BOC} = 180° - (\angle \mathrm{OBC} + \angle \mathrm{OCB}) = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

З а д а ч а 2. Відрізок *BM* – медіана трикутника *ABC*. Відомо, що $\angle ABM = 40^{\circ}$. і $AB = 2BM$. Знайдіть кут *ABC*.

Р о з в ’ я з а н н я. На продовженні відрізка *BM* за точку *M* позначимо точку *K* так, що *BM=MK*. З’єднаємо точки *A* і *K* (мал. 2.3.4).

Оскільки *BK=2BM*, то *AB=BK.* Отже, трикутник *ABK* рівнобедрений і *∠BAK=∠BKA*. Маємо: $\angle BAK + \angle BKA = 180^{\circ} - \angle ABK = 180^{\circ} - 40^{\circ} = 140^{\circ}$. Тоді $\angle BAK = \angle BKA = 70^{\circ}$.



Мал. 2.3.4

Легко показати, що трикутники *AMK* і *CMB* рівні за першою ознакою рівності трикутників. Отже, $\angle AKM = \angle CBM$ як відповідні кути рівних трикутників. Отримуємо: $\angle CBM = 70^\circ$. Тоді $\angle ABC = 110^\circ$.

В і д п о в і д ь: 110°.

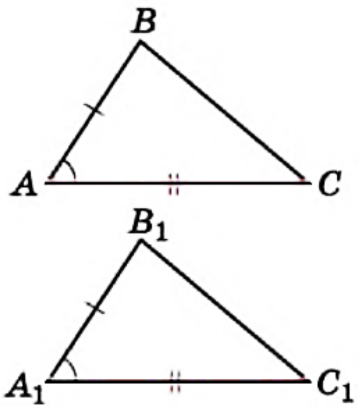
2.4 Ознаки рівності трикутників

Перша та друга ознаки рівності трикутників. Рівність двох трикутників можна встановити, не накладаючи один трикутник на другий, а порівнюючи лише деякі їх елементи. Це важливо для практики, наприклад для встановлення рівності двох земельних ділянок трикутної форми, які не можна накласти одна на одну [20].

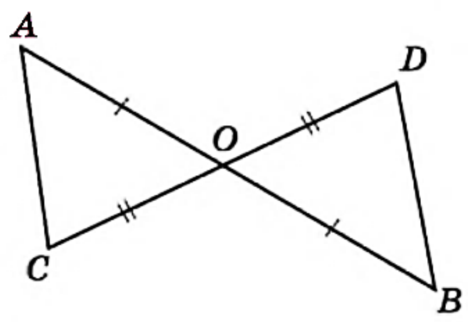
Під час розв'язування багатьох теоретичних і практичних задач зручно використовувати *ознаки рівності трикутників*.

Т е о р е м а 1 *(перша ознака рівності трикутників)****. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$, у яких AB $= A_1B_1$, AC $= A_1C_1$ і $\angle A = \angle A_1$ (мал. 2.4.1).



Мал. 2.4.1



Мал. 2.4.2

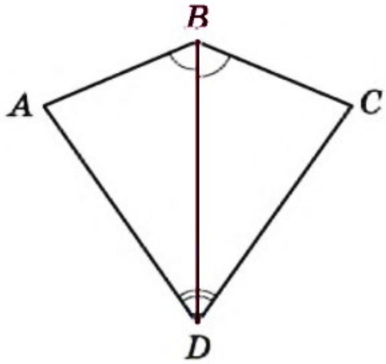
Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то трикутник ABC можна накласти на трикутник $A_1B_1C_1$ так, що вершина A суміститься з вершиною A_1 сторона AB накладеться на промінь A_1B_1, а сторона AC — на промінь A_1C_1. Оскільки АВ $= A_1B_1$ і АС $= A_1C_1$ то сумістяться точки B і B_1, C і C_1. У результаті три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника$A_1B_1C_1$.

Отже, після накладання трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ збігатимуться. Тому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорему доведено [2].

З а д а ч а 1. Відрізки *AB* і *CD* перетинаються в точці *O* так, що точка *O* є серединою кожного з них. Довести, що $\Delta\, AOC = \Delta BOD$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо мал. 2.4.2. За умовою *AO* = *OB* і *CO* = *OD*. Окрім того, $\angle\ AOC = \angle$ BOD (як вертикальні). Тому за першою ознакою рівності трикутників $\Delta\, AOC = \Delta\, BOD$ [15].

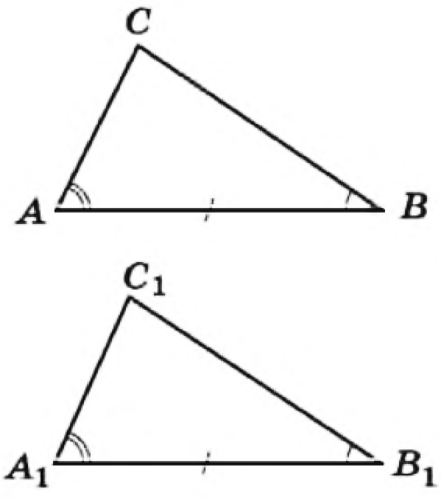
Т е о р е м а 2 *(друга ознака рівності трикутників)****. Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.***



Мал. 2.4.3

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких АВ $= A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (мал. 2.4.3). Оскільки АВ $= A_1B_1$, то $\Delta\ ABC$ можна накласти на $\Delta\, A_1B_1C_1$ так, що вершина A збігатиметься з вершиною A_1, вершина B — з вершиною B_1, а вершини C і C_1 лежатимуть по один бік від прямої A_1B_1. Але $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$, тому при накладанні промінь AC накладеться на промінь A_1C_1, а промінь BC — на промінь B_1C_1. Тоді точка C — спільна точка променів AC і BC — збігатиметься з точкою C_1 — спільною точкою променів A_1C_1 і B_1C_1. Отже, три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$; трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістилися. Тому $\Delta\ ABC = = \Delta\ A_1B_1C_1$. Теорему доведено.

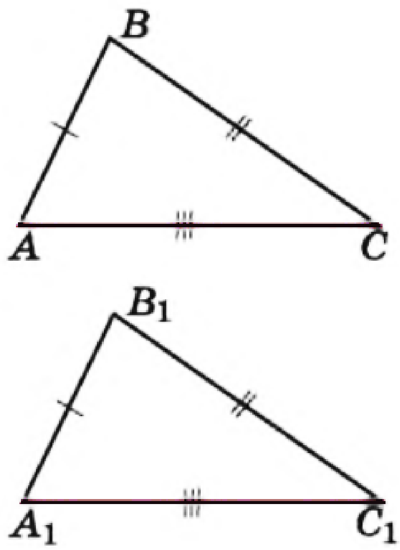
З а д а ч а 2. Довести рівність кутів A і C (мал. 2.4.4), якщо $\angle ADB = \angle$ CBD і $\angle ABD = \angle$CBD.



Мал. 2.4.4

Д о в е д е н н я. Сторона BD спільна для трикутників ABD і CBD. За умовою $\angle ADB = \angle$ CBD і $\angle ABD = \angle$CBD. Тому за другою ознакою рівності трикутників $\Delta\ ABD = \Delta\ CBD$. Рівними є всі відповідні елементи цих трикутників. Отже, $\angle A = \angle C$.

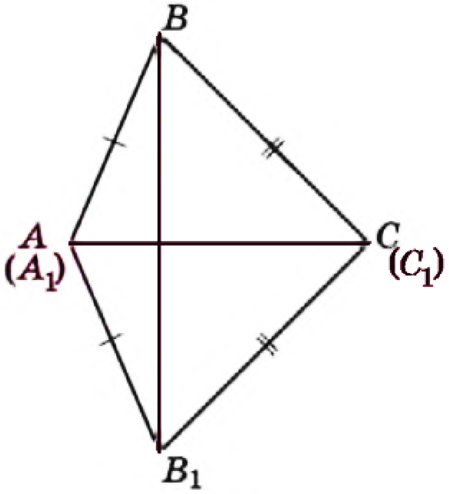
Третя ознака рівності трикутників. Ви вже знаєте дві ознаки рівності трикутників (за двома сторонами і кутом між ними та за стороною і двома прилеглими кутами). Розглянемо ще одну ознаку рівності трикутників — за трьома сторонами.



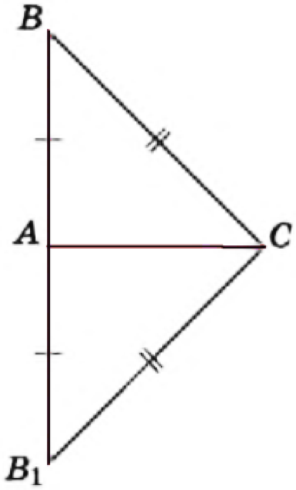
Мал. 2.4.5

Т е о р е м а 3 *(третя ознака рівності трикутників)**. Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.***

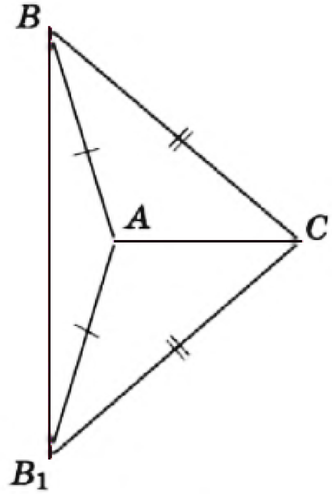
Д о в е д е н н я. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких AB $= A_1B_1$, AC $= A_1C_1$ (мал. 2.4.5). Доведемо, що $\Delta\ ABC = \Delta\, A_1B_1C_1$. Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A, вершина C_1 — з вершиною C, а вершини B_1 і B були по різні боки від прямої AC. Можливі три випадки: промінь BB_1 проходить всередині кута ABC (мал. 2.4.6), промінь BB_1 збігається з однією із сторін цього кута (мал. 2.4.7), промінь BB_1 проходить поза кутом ABC (мал. 2.4.8).



Мал. 2.4.6

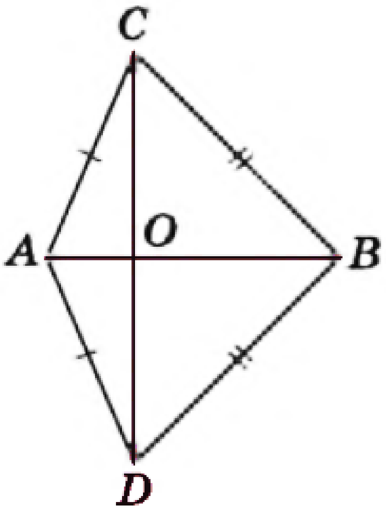


Мал. 2.4.7



Мал. 2.4.8

Розглянемо перший випадок. Оскільки за умовою $AB = A_1B_1$ 1 і $BC = B_1C_1$, то трикутники ABB_1 і CBB_1 — рівнобедрені з основою BB_1. Тоді$\angle$ AB$B_1 = \angle$AB_1B і $\angle$ CB$B_1 = \angle$CB_1B. Тому $\angle$ ABC $= \angle$A$_1B_1C_1$. Отже, $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, $\angle$ ABC $= \angle$A$_1B_1C_1$. Тому $\Delta\, ABC = \Delta\, A_1B_1C_1$ (за першою ознакою рівності трикутників). Теорему доведено [5].



Мал. 2.4.9

З а д а ч а 3. Дано: $AC = AD$, $BC = BD$ (мал. 2.4.9).

Довести: $CO = OD$.

Д о в е д е н н я.

1) Розглянемо $\Delta\, ABC$ і $\Delta\, ABD$. $AC = AD$, $BC = BD$ (за умовою), AB — спільна сторона. Тоді $\Delta\, ABC = \Delta\, ABD$ (за третьою ознакою рівності трикутників).

2) $\angle\, CAB = \angle DAB$ (як відповідні кути рівних трикутників), а тому AB — бісектриса кута CAD.

3) Тоді AO — бісектриса рівнобедреного трикутника ACD, проведена до основи, отже, за властивістю рівнобедреного трикутника AO є також і медіаною. Оскільки AO — медіана трикутника ACD, то $CO = OD$, що й треба було довести [13].

Ознаки прямокутного трикутника. На рисунку 2.4.10 зображено прямокутний трикутник ABC, у якому $\angle C = 90°$.

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають ***гіпотенузою***, а сторони, прилеглі до прямого кута, – ***катетами*** (мал. 2.4.10).

Для доведення рівності двох трикутників знаходять їхні рівні елементи. У будь-яких двох прямокутних трикутників такі елементи є завжди – це прямі кути. Тому для прямокутних трикутників можна сформулювати «персональні» ознаки рівності.

Т е о р е м а 4. (ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом). Якщо гіпотенуза та катет прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого то такі трикутники рівні.

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90°, AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$ (мал. 2.4.11). Треба довести, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

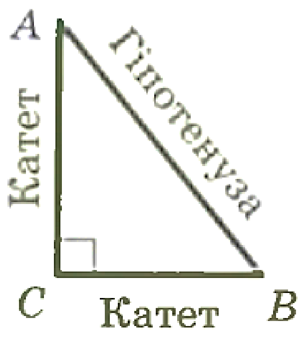
Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, вершина C – з вершиною C_1, а точки B і B_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої A_1C_1 (мал. 2.4.12).

Маємо: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90° + 90° = 180°$. Отже, кут BC_1B_1 розгорнутий, і тому точки B, C_1, B_1 лежать на одній прямій. Отримали рівнобедрений трикутник BA_1B_1 з бічними сторонами A_1B і A_1B_1 та висотою A_1C_1 (мал. 2.4.12). Тоді A_1C_1 – медіана цього трикутника, тобто $C_1B = C_1B_1$. Отже трикутники A_1BC_1 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників [20].

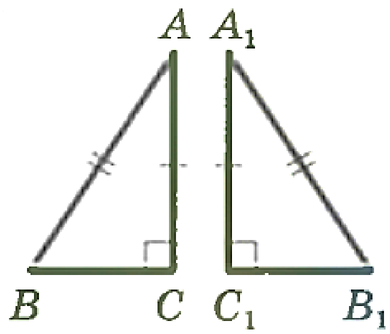
Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами. ***Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.***

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом. ***Якщо катет і прилеглий до нього кут одного прямокутного***

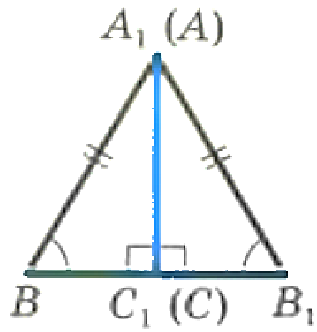
трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.



Мал. 2.4.10



Мал. 2.4.11

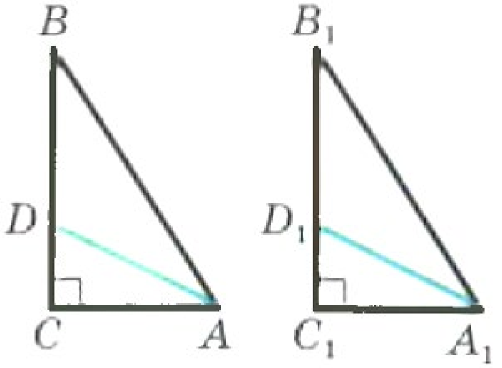


Мал. 2.4.12

Очевидно, що коли гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то рівні й два інших гострих кути. Скориставшись цим твердженням, перелік ознак рівності прямокутних трикутників можна доповнити ще двома.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом. ***Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.***

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом. ***Якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.***



Мал. 2.4.13

З а д а ч а 4. Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

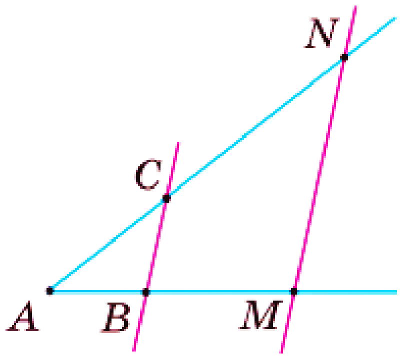
Р о з в ' я з а н н я. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 2.4.13) $\angle C = \angle C_1 = 90°, \angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, відрізки AD і A_1D_1 –

бісектриси, $AD = A_1D_1$.

Маємо: $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1$. Оскільки $AD = A_1D_1$, то прямокутні трикутники ACD і $A_1C_1D_1$ рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $AC = A_1C_1$, і оскільки $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за катетом і прилеглим гострим кутом.

2.5 Узагальнена теорема Фалеса. Середня лінія трикутника

У теоремі Фалеса стверджується, що паралельні прямі відтинають на сторонах кута відповідно рівні відрізки. Загальнішим є випадок, коли паралельні прямі відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки (мал. 2.5.1).

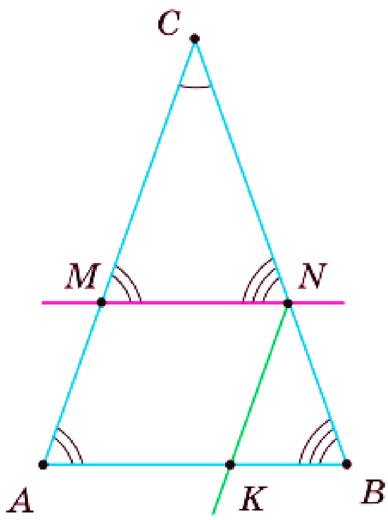


Мал. 2.5.1

Т е о р е м а 1 *(узагальнена теорема Фалеса)****. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.***

Узагальнену теорему Фалеса інакше називають ***теоремою про пропорційні відрізки***.

Н а с л і д о к. Пряма, що перетинає дві сторони трикутника й паралельна третій його стороні, відтинає від нього подібний трикутник.



Мал. 2.5.2

Справді, у трикутниках *ABC* і *MNC* (мал. 2.5.2) є спільний кут *C*. Його перетинають паралельні прямі *AB* і *MN*. Із січною *AC* вони утворюють рівні відповідні кути *CAB* і *CMN*. Треті кути трикутників також рівні. Доведемо пропорційність сторін трикутників. За узагальненою теоремою Фалеса, $\frac{AM}{MC} = \frac{BN}{NC}$, тому $\frac{AM+MC}{MC} = \frac{BN+NC}{NC}$, звідси $\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC}$. Провівши пряму $NK \parallel AC$, аналогічно одержимо: $\frac{BC}{NC} = \frac{BA}{KA}$. Але $KA = MN$, тому $\frac{BC}{NC} = \frac{BA}{MN}$.

Отже, у трикутниках ABC і MNC відповідні кути – рівні, а відповідні сторони – пропорційні: $\frac{AM}{MC} = \frac{BC}{NC} = \frac{BA}{MN}$.

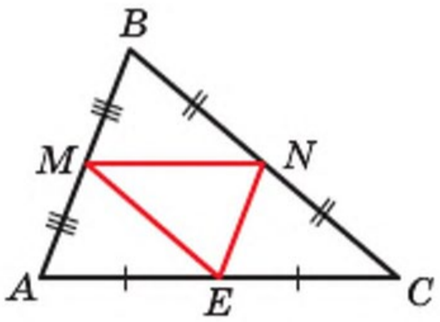
Дані трикутники подібні за означенням [2].

Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

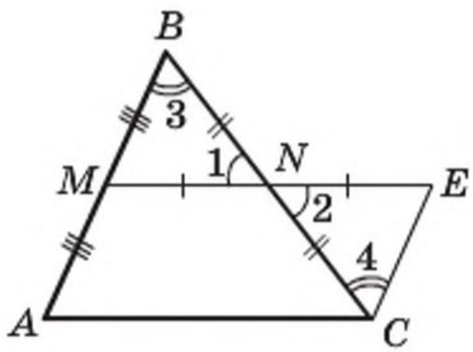
На малюнку 2.5.3 відрізки *MN, NE, EM* – середні лінії трикутника *ABC.*

Т е о р е м а 2. Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.

Д о в е д е н н я. Нехай *MN* – середня лінія трикутника *ABC* (мал.. 2.5.4). Доведемо, що $MN \parallel AC, MN = \frac{1}{2}AC$.



Мал. 2.5.3



Мал. 2.5.4

На прямій *MN* позначимо точку *E* так, що *MN*=*NE* (мал. 2.5.4). Сполучимо відрізком точки *E* і *C*. Оскільки точка *N* є серединою відрізка *BC*, то *BN*=*NC*. Кути 1 і 2 рівні як вертикальні. Отже, трикутники *MBN* і *ECN* рівні за першою ознакою трикутників. Звідси *MB*=*EC* і кути 3 та 4 рівні. Враховуючи, що

AM=*BM*, отримаємо: *EC*=*AM*. Кути 3 і 4 є різносторонніми при прямих *AB* і *EC* та січній *BC*. Тоді $AB \parallel EC$.

Таким чином, у чотирикутнику *AMEC* сторони *AM* і *EC* паралельні та рівні. Отже, чотирикутник *AMEC* є паралелограмом. Звідси $ME \parallel AC$, тобто $MN \parallel AC$.

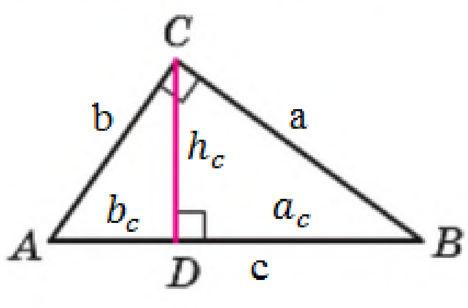
Також *ME*=*AC*. Оскільки, $MN = \frac{1}{2}ME$, то $MN = \frac{1}{2}AC$.

2.6 Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора

Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. На рисунку 2.6.1 відрізок *CD* – висота прямокутного трикутника *ABC* ($\angle ABC = 90°$).

Відрізки *AD* і *DB* називають проекціями катетів *AC* і *CB* відповідно на гіпотенузу.

Л е м а. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному трикутнику.



Мал. 2.6.1

Т е о р е м а 1. Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу. Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи та проекції цього катета на гіпотенузу.

Д о в е д е н н я. На рисунку 2.6.1 відрізок *CD* – висота прямокутного трикутника *ABC* ($\angle ABC = 90°$). Доведемо, що:

$$CD^2 = AD \cdot DB, AC^2 = AB \cdot AD, BC^2 = AB \cdot DB.$$

Оскільки $\Delta CBD \sim \Delta ACD$, то $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. Звідси $CD^2 = AD \cdot DB$.

Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, то $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$. Звідси $AC^2 = AB \cdot AD$.

Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, то $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}$. Звідси $BC^2 = AB \cdot DB$.

В іншому випадку записують так:

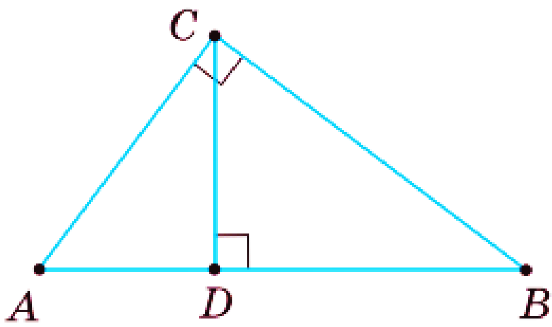
$$a^2 = c \cdot a_c,\ \ b^2 = c \cdot b_c,\ \ {h_c}^2 = a_c \cdot b_c.$$

Теорема Піфагора. Доведемо теорему, відкриття якої пов'язане з ім'ям давньогрецького вченого Піфагора (VI ст. до н. е.).

Т е о р е м а П і ф а г о р а. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Дано: $\Delta\, ABC$, $\angle\, C = 90°$ (мал. 2.6.2).

Довести: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.



Мал. 2.6.2

Д о в е д е н н я. З вершини прямого кута *C* проведемо висоту *CD*. Кожний катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним між гіпотенузою та його проекцією на гіпотенузу. Тому

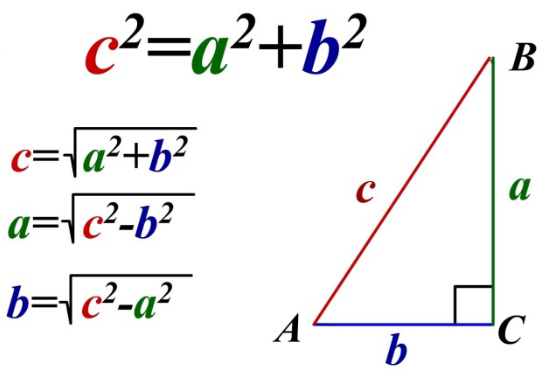
$$AC^2 = AB \cdot AD \text{ і } BC^2 = AB \cdot BD.$$

Додавши рівності почленно та врахувавши, що $AD + DB = AB$, одержимо:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB(AD + DB) = AB^2.$$

Отже, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Теорему доведено.

Якщо a, b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза, то з формули $c^2 = a^2 + b^2$ одержимо такі формули: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a^2 = b^2 - c^2$, або $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b^2 = c^2 - a^2$, або $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.



Мал. 2.6.3

Скориставшись цими формулами, за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника можна знайти його третю сторону (мал. 2.6.3) [12].

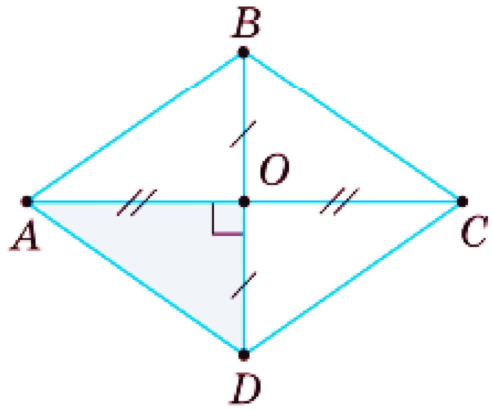
З а д а ч а. Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з його діагоналей — 16 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

Р о з в ’ я з а н н я. Нехай $ABCD$ — ромб (мал. 2.6.4), AC = 16 см, AD = = 10 см. Знайдемо діагональ BD. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом і в точці перетину діляться навпіл. Тому Δ AOD — прямокутний ($\angle O$ = 90°). У ньому: катет $AO = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (см), гіпотенуза AD = 10 см.

За теоремою Піфагора, $AD^2 = AO^2 + + OD^2$, звідси:

$OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = = \sqrt{36} = 6$ (см).

Тоді $BD = 2 \cdot OD = 2 \cdot 6 = 12$ (см) [30].



Мал. 2.6.4

2.7 Ознаки подібності трикутників

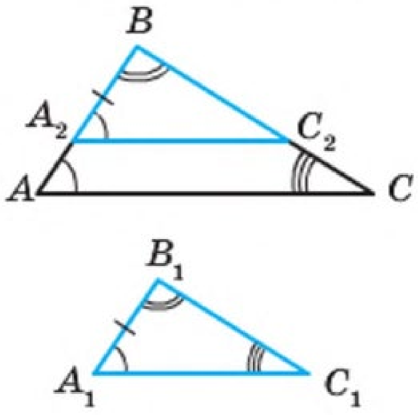
Два трикутники називають подібними, якщо їхні кути відповідно рівні та сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого трикутника.

Перша ознака подібності трикутників. Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються умови $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, то за означенням ці трикутники подібні [12].

Т е о р е м а 1(перша ознака подібності трикутників). Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $AB = A_1B_1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.



Мал. 2.7.1

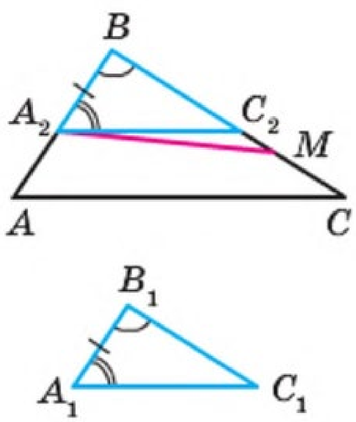
Нехай, наприклад, $AB > A_1B_1$. Відкладемо на стороні BA відрізок BA_2, який дорівнює стороні B_1A_1. Через точку A_2 проведемо пряму A_2C_2, паралельну стороні AC (мал. 2.7.1).

Кути A і BA_2C_2 є відповідними при паралельних прямих A_2C_2 і та січній AA_2. Звідси $\angle A = \angle BA_2C_2$. Але $\angle A = \angle A_1$. Отримуємо, що $\angle A_1 = \angle BA_2C_2$. Таким чином, трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників. Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ [18].

Друга та третя ознаки подібності трикутників.

Т е о р е м а 2 (друга ознака подібності трикутників). Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ і $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Мал. 2.7.2

Якщо $k = 1$, то $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, а отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$, тобто $AB > A_1B_1$ і $BC > B_1C_1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідні точки A_2 і C_2 так, що $BA_2 = A_1B_1$ і $BC_2 = B_1C_1$ (мал. 2.7.2). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$.

Покажемо, що $A_2C_2 \parallel AC$. Припустимо, що це не так. Тоді на стороні BC позначимо точку M таку, що $A_2M \parallel AC$. Маємо: $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$.

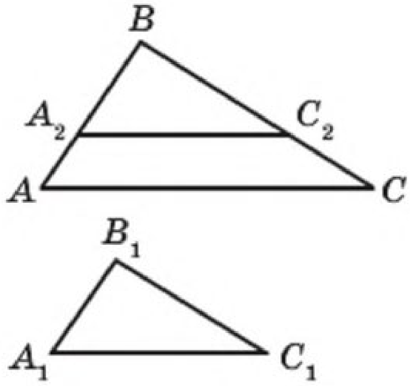
Але $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$, тоді $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$, тобто $BC_2 = BM$. Отже, буквами M і C_2 позначено одну й ту саму точку. Тоді $A_2C_2 \parallel AC$.

За лемою про подібні трикутники отримуємо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_2BC_2$. Трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ [20].

Т е о р е м а 3 (третя ознака подібності трикутників). Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$. Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $k = 1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.



Мал. 2.7.3

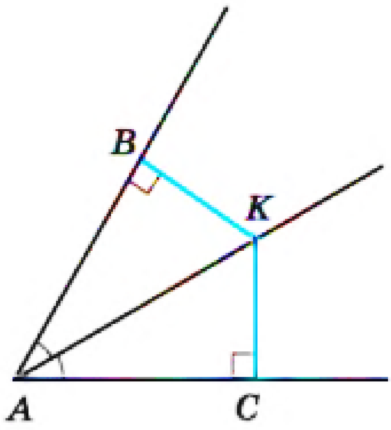
Нехай, наприклад, $k > 1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 такі, що $BA_2 = A_1B_1, BC_2 = B_1C_1$ (мал. 2.7.3). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. У трикутниках ABC і A_2BC_2 кут B спільний, прилеглі до нього сторони пропорційні. Отже, за другою ознакою подібності трикутників ці трикутники подібні, причому коефіцієнт подібності дорівнює k. Тоді $\frac{CA}{C_2A_2} = k$. Ураховуючи, що за умовою $\frac{CA}{C_1A_1} = k$, отримуємо: $A_1C_1 = A_2C_2$. Отже трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. З урахуванням того, що $\Delta ABC \sim \Delta A_2BC_2$, отримуємо: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ [18].

2.8 Коло, вписане в трикутник

Розглянемо важливу властивість бісектриси кута.

Т е о р е м а 1** (властивість бісектриси кута). **Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.

Д о в е д е н н я. Виберемо на бісектрисі кута *A* довільну точку *K* і проведемо з точки *K* перпендикуляри *K B* і *KC* до сторін кута (мал. 2.8.1). Тоді *KB* і *KC* — відстані від точки *K* до сторін кута *A*. Доведемо, що *KB* = *KC*.



Мал. 2.8.1

Розглянемо Δ *AKB* і Δ *AKC* (∠ *B* = ∠ C = = 90°). *AK* — їх спільна гіпотенуза, ∠ *BAK* = = ∠ *CAK* (бо *AK* — бісектриса).

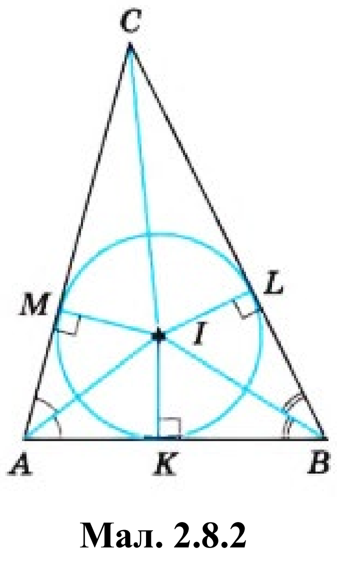
Отже, Δ *AKB* = Δ *AKC* (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому *KB* = *KC*. Теорему доведено.

Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх сторін цього трикутника.

При цьому трикутник називають ***описаним навколо кола***.

Т е о р е м а 2 (про коло, вписане в трикутник). У будь-який трикутник можна вписати коло.

Д о в е д е н н я. Розглянемо довільний Δ *ABC*. Нехай бісектриси кутів *A* і *B* цього трикутника перетинаються в точці *I* (мал. 2.8.2). Доведемо, що ця точка є центром вписаного у трикутник кола.



Мал. 2.8.2

1) Оскільки точка *I* лежить на бісектрисі кута *A*, то вона рівновіддалена від сторін *AB* і *AC* трикутника, тобто *IM* = *IK*, де *M* і *K* — основи перпендикулярів, проведених із точки *I* до сторін *AC* і *AB* відповідно.

2) Аналогічно *IK* = *IL*, де *L* — основа перпендикуляра, проведеного з точки *I* до сторони *BC*.

3) Отже, $IM = IK = IL$. Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, проходить через точки M, K і L . Сторони трикутника ABC дотикаються до цього кола в точках M, K і L, оскільки перпендикулярні до радіусів IM, IK і IL.

4) Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, є вписаним у $\Delta\ ABC$. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 1. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Д о в е д е н н я. За доведенням попередньої теореми точка I — точка перетину бісектрис кутів A і B трикутника ABC. Доведемо, що бісектриса кута C також проходить через точку I.

Розглянемо прямокутні трикутники CMI і CLI (мал. 2.8.2).

Оскільки $IM = IL$, а CI — спільна гіпотенуза цих трикутників, то $\Delta\ CMI = \Delta\ CLI$ (за катетом і гіпотенузою). Тоді $\angle\ MCI = \angle\ LCI$ (як відповідні кути рівних трикутників), а CI — бісектриса кута C трикутника ABC.

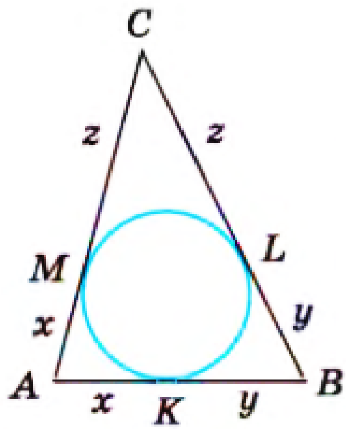
Отже, бісектриси всіх трьох кутів трикутника ABC проходять через точку I, тобто всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. Наслідок доведено.

Н а с л і д о к 2. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника [2]**.**

З а д а ч а. Коло, вписане у $\Delta\ ABC$, дотикається до сторони AB у точці K, до сторони BC — у точці L, а до сторони CA — у точці M. Доведіть, що:

$AK = AM = p - BC$; $BK = p - AC$; $CM = CL = p - AB$,

де $p = \frac{AB+AC+BC}{2}$ – півпериметр трикутника ABC.



Мал. 2.8.3

Д о в е д е н н я. За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки, маємо: $AM = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ (мал. 2.8.3).

Позначимо $AM = AK = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$.

Тоді $P_{ABC} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$.

Тому $p = x + y + z$, звідки $x = p - (y + z)$; тобто $x = p - BC$. Маємо: $AM = AK = p - BC$.

Аналогічно доводиться, що $BK = BL = p - AC$, $CM = CL = p - AB$ [7].

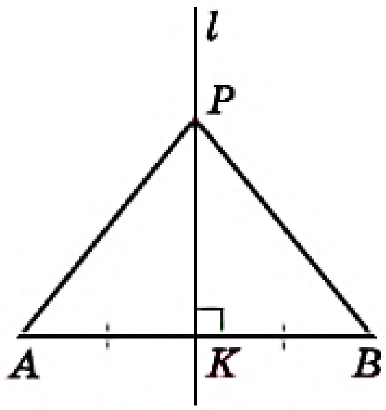
2.9 Коло, описане навколо трикутника

Серединним перпендикуляром до відрізка називають пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього.

На малюнку 2.9.1 пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB.

Т е о р е м а 1 *(властивість серединного перпендикуляра до відрізка)*. ***Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.***

Д о в е д е н н я. Нехай пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB, K — середина цього відрізка (мал. 2.9.1). Розглянемо довільну точку P серединного перпендикуляра і доведемо, що $PA = PB$.



Мал. 2.9.1

Якщо точка P збігається з K, то рівність $PA = PB$ очевидна. Якщо точка P відмінна від K, то прямокутні трикутники PKA і PKB рівні за двома катетами. Тому $PA = PB$. Теорему доведено.

Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.

При цьому трикутник називають ***вписаним у коло***.

Т е о р е м а 2 *(про коло, описане навколо трикутника)*. ***Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.***

Д о в е д е н н я. Розглянемо ΔABC. Нехай серединні перпендикуляри до сторін AB і AC цього трикутника перетинаються у точці O (мал. 2.9.2). Доведемо, що точка O є центром описаного навколо трикутника кола.

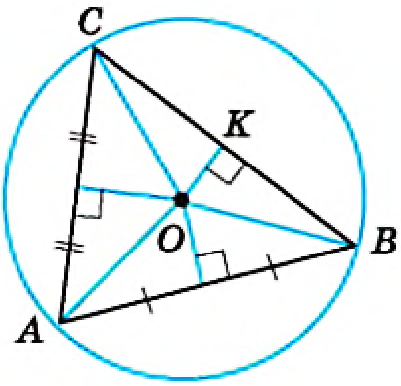
1) Точка *O* лежить на серединному перпендикулярі до *AB*, тому вона рівновіддалена від вершин *A* і *B*, тобто *OA* = *OB*.

2) Аналогічно *OA* = *OC*, оскільки точка *O* лежить на серединному перпендикулярі до *AC*.

3) Маємо: *OA* = *OB* = *OC*. Тому коло із центром у точці *O* проходить через вершини *A*, *B* і *C* трикутника *ABC*, а відрізки *OA*, *OB* і *OC* є його радіусами. Отже, це коло є описаним навколо трикутника *ABC*. Теорему доведено.

Н а с л і д о к 1. Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Д о в е д е н н я. Проведемо з точки *O* перпендикуляр *OK* до сторони *BC* (мал. 2.9.2). Цей перпендикуляр є висотою рівнобедреного трикутника *OBC*, що проведена до основи *BC*. Тому він також є і медіаною. Відрізок *OK* лежить на серединному перпендикулярі до сторони *BC*. Отже, усі три серединні перпендикуляри трикутника *ABC* проходять через точку *O*, тобто перетинаються в одній точці. Наслідок доведено.

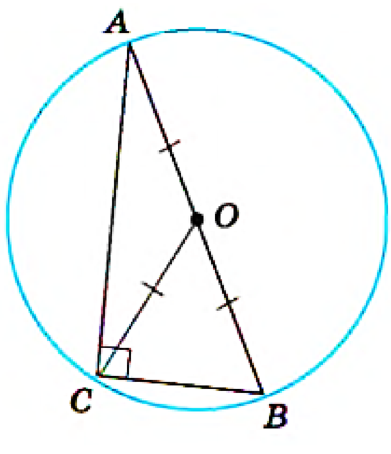


Мал. 2.9.2

Н а с л і д о к 2. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін **[7].**

З а д а ч а. Доведіть, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, а радіус цього кола дорівнює половині гіпотенузи.

Д о в е д е н н я. Нехай Δ *ABC* — прямокутний (*AC* = 90°), *CO* — його медіана (мал. 2.9.3). Оскільки медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи, то *CO* =



Мал. 2.9.3

$\frac{AB}{2}$. Але $AO = OB$. Тому $AO = = BO = CO$.

Отже, точка *O* рівновіддалена від вершин трикутника *ABC*. Тому коло, центром якого є точка *O*, а радіусом — *OA*, проходить через усі вершини трикутника *ABC*. Отже, коло, центром якого є середина гіпотенузи, а радіус дорівнює половині гіпотенузи, є описаним навколо прямокутного трикутника *ABC* [2].

2.10 Пряма Ейлера. Коло дев'яти точок

Точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника – це центр кола, описаного навколо трикутника. Позначимо цю точку буковою *O*.

Точка перетину бісектрис трикутника – це центр вписаного кола. Позначимо цю точку буквою *J*.

Точку перетину прямих, які містять висоти трикутника, називають ***ортоцентром*** трикутника. Позначимо цю точку буквою *H*.

Точку перетину медіан трикутника називають ***центроїдом*** трикутника. позначимо цю точку буквою *M*.

Точки *O, J, H, M* називають ***чудовими точками*** трикутника. Використання такого емоційного епітета цілком обґрунтовано. Адже цим точкам притаманна ціла низка красивих властивостей.

Розглянемо дві теореми про чудові точки трикутника [20].

Т е о р е м а 1. У будь-якому трикутнику центр описаного кола, центроїд і ортоцентр лежать на одній прямій.

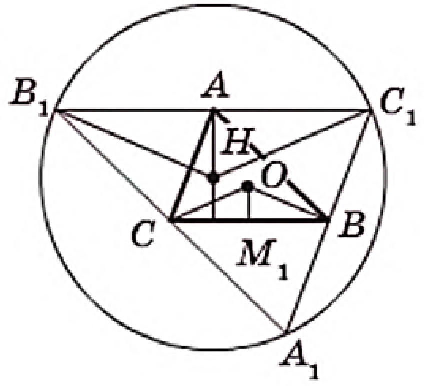
Цю пряму називають **прямою Ейлера.**

Д о в е д е н н я. Для рівнобедреного трикутника твердження, що доводиться, є очевидним.

Якщо даний трикутник *ABC* прямокутний, то його ортоцентр – це точка *C*, центр описаного кола – середина гіпотенузи *AB*. Тоді зрозуміло, що всі три точки, про які йдеться в теоремі, належать медіані, проведеній до гіпотенузи.

Доведемо теорему для гострокутного різностороннього трикутника.

Л е м а. Якщо Н – ортоцентр трикутника ABC, OM_1 – перпендикуляр, опущений із центра О описаного кола на сторону BC, то $AH = 2OM_1$ (мал. 2.10.1)**.**



Мал. 2.10.1

Д о в е д е н н я. Через кожну вершину трикутника ABC проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (мал. 2.10.1). У зазначеній теоремі було показано, що ортоцентр H трикутника ABC є центром описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. Для цього кола кут B_1HC_1 є центральним, а кут $B_1A_1C_1$ – вписаним. Оскільки обидва кути спираються на одну й ту саму дугу, то $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. Кути BAC і $B_1A_1C_1$ рівні як протилежні кути паралелограма ABA_1C, тому $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1HC_1$. Оскільки $B_1C_1 = 2BC$, то рівнобедрені трикутники B_1HC_1 і COB подібні з коефіцієнтом подібності 2. Оскільки відрізки AH і OM_1 – відповідні висоти подібних трикутників, то $AH = 2OM_1$.

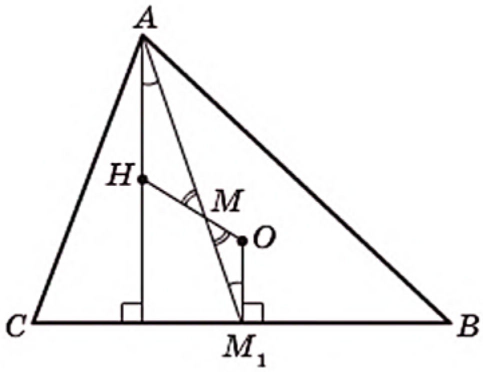
Доведемо тепер основну теорему.

Оскільки точка M_1 – середина сторони BC, то відрізок AM_1 – медіана трикутника ABC (мал. 2.10.2). Нехай M – точка перетину відрізків AM_1 і HO. Оскільки $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$. Кути AMH і M_1MO рівні як вертикальні. Отже, трикутники HAM і OM_1M подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Отже, точка M ділить медіану AM_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A. Звідси точка M – центроїд трикутника ABC.

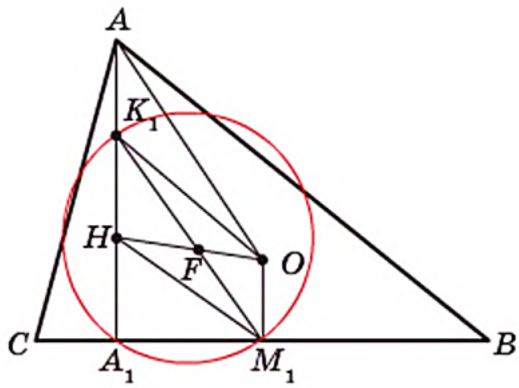
Звернемо увагу на те, що ми не лише встановили факт належності точок O, M, H одній прямій, а й довели рівність $HM = 2MO$, яка є ще однією властивість чудових точок трикутника [18].

Т е о р е м а 2. Середини сторін трикутника, основи його висот і середини відрізків, які сполучають вершини трикутника з його

ортоцентром, лежать на одному колі, радіус якого дорівнює $\frac{1}{2}R$, де R – радіус описаного кола даного трикутника.



Мал. 2.10.2



Мал. 2.10.3

Це коло називають **колом дев'яти точок**.

Д о в е д е н н я. У трикутнику ABC точка H – ортоцентр, точка O – центр описаного кола, точка A_1 – основа висоти, проведеної з вершини A, точка M_1 – середина сторони CB, точка K_1 – середина відрізка AH (мал. 2.10.3).

За лемою $OM_1 = \frac{1}{2}AH = K_1H$. Оскільки $HK_1 \parallel OM_1$, то чотирикутник HK_1OM_1 – паралелограм. Нехай діагоналі цього паралелограма перетинаються в точці F.

Зауважимо, що точка F – середина гіпотенузи K_1M_1 прямокутного трикутника $A_1K_1M_1$. Отже точки A_1, K_1 і M_1 лежать на колі радіуса FK_1 із центром у точці F.

Очевидно, що чотирикутник K_1AOM_1 – паралелограм. Звідси $K_1M_1 = OA$. Тоді $FK_1 = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$.

Отже, ми довели, що трійка точок – середина M_1 сторони CB, основа A_1 висоти AA_1 і середина K_1 відрізка HA – лежить на колі із центром у середині F відрізка HO та радіусом, який дорівнює $\frac{1}{2}R$ [20].

2.11 Теореми Менелая та Чеви

Теорема Менелая. Нагадаємо, що точки, які належать одній прямій, називають ***колінеарними***.

У цьому пункті ми дізнаємося про одну знамениту терему, яка слугує критерієм колінеарності трьох точок. Ця теорема носить ім’я давньогрецького математика й астронома Менелая Александрійського (I–II ст. н. е.).

Т е о р е м а (теорема Менелая). На сторонах AB і BC трикутника ABC означено відповідно точки C_1 і A_1, а на продовженні сторони AC – точку B_1. Для того щоб точки A_1, B_1, C_1 лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (*)$$

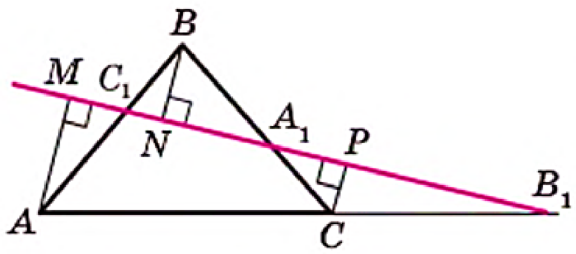
Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо необхідну умову колінеарності: якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій, то виконується рівність (*).

Із вершини трикутника ABC опустимо перпендикуляри AM, BN і CP на пряму C_1B_1 (мал. 2.11.1). Оскільки $\angle MC_1A = \angle NC_1B$, то трикутники AMC_1 і BNC_1 подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AM}{BN}$. Із подібності трикутників BNA_1 і CPA_1 отримуємо: $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{CP}$. Із подібності трикутників B_1CP і B_1AM випливає рівність $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$. Перемноживши почленно ліві та праві частини пропорцій $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AM}{BN}, \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{CP}, \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$ отримуємо рівність $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AM}{BN}\cdot\frac{BN}{CP}\cdot\frac{CP}{AM}=1$.

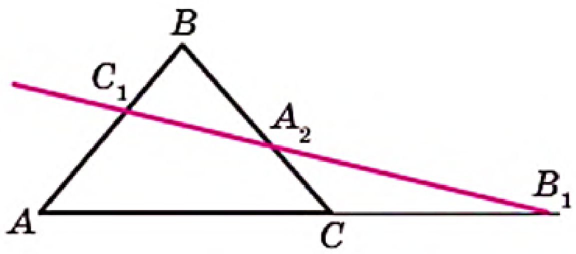
Тепер доведемо достатню умову колінеарності: якщо виконується рівність (*), то точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Нехай пряма C_1B_1 перетинає сторону BC трикутника ABC у деякій точці A_2 (мал. 2.11.2). Оскільки точки C_1, A_2, B_1 лежать на одній прямій, то з доведеного вище можна записати: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C}$, тобто точки A_2 і A_1 ділять відрізок BC в одному й тому самому відношенні, а отже ці точки збігаються. Звідси випливає, що пряма C_1B_1 перетинає сторону BC у точці A_1.

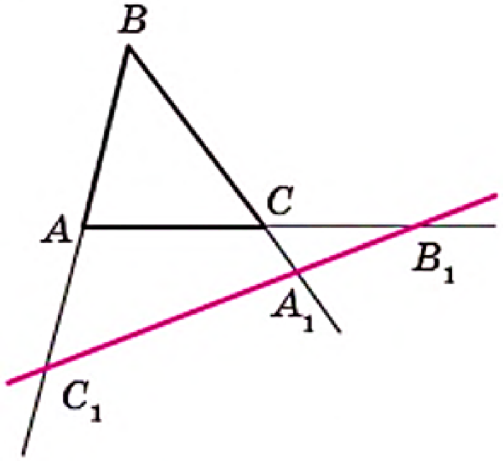


Мал. 2.11.1

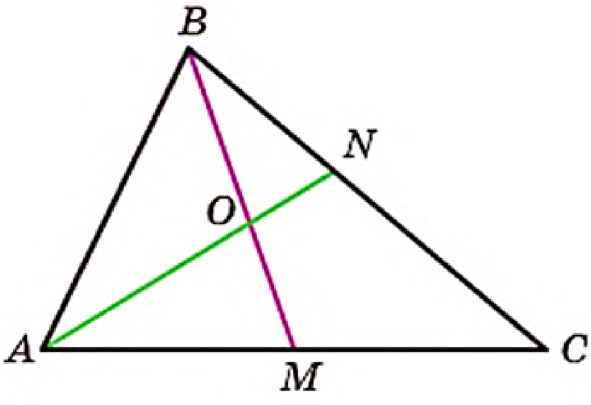


Мал. 2.11.2

Зауважимо, що теорема залишається справедливою і тоді, коли точки A_1, B_1, C_1 лежать не на сторонах трикутника ABC, а на їхніх продовженнях (мал. 2.11.3) [20].



Мал. 2.11.3



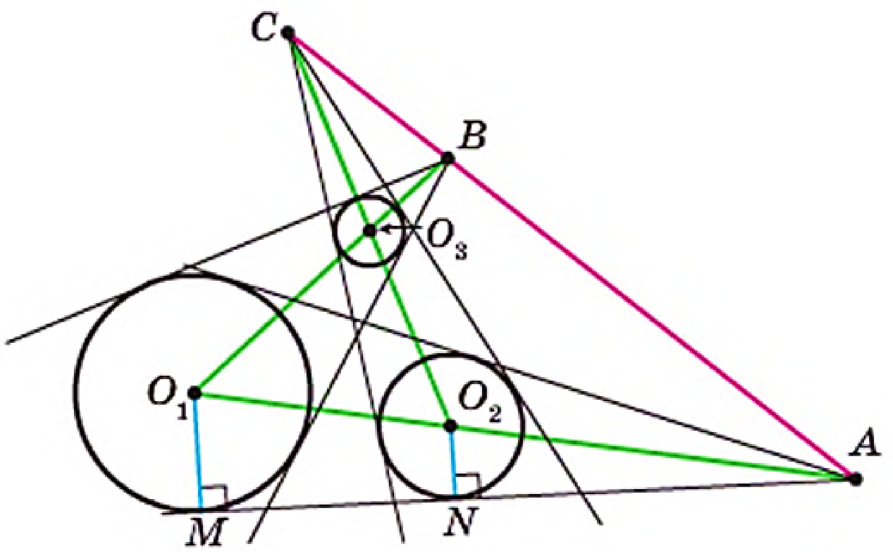
Мал. 2.11.4

З а д а ч а 1. На стороні BC трикутника ABC обрано точку N так, що $BN : NC = 2 : 3$. У якому відношенні медіана BM ділить відрізок AN?

Р о з в ' я з а н н я. Нехай відрізки AN і BM перетинаються в точці O (мал. 2.11.4). Пряма BM перетинає дві сторони трикутника ANC. Тоді за теоремою

Менелая можна записати $\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AO}{ON} \cdot \frac{NB}{BC} = 1$. Ураховуючи, що $\frac{CM}{MA} = 1$ і $\frac{NB}{BC} = \frac{2}{5}$ отримуємо $\frac{AO}{ON} \cdot \frac{2}{5} = 1$. Звідси $\frac{AO}{ON} = \frac{5}{2}$ [33].

З а д а ч а 2. Спільні зовнішні дотичні до трьох кіл перетинаються в точках A, B і C (мал. 2.11.5). Доведіть, що ці точки колінеарні.

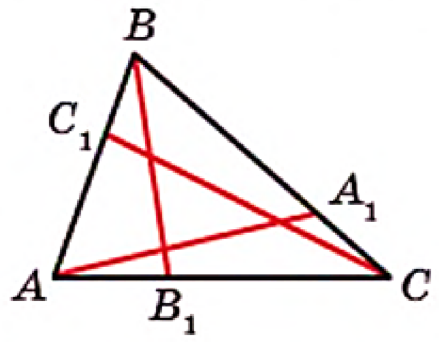


Мал. 2.11.5

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо радіуси кіл із центрами O_1, O_2 і O_3 відповідно r_1, r_2 і r_3. Відрізки O_1M і O_2N – радіуси, проведені в точки дотику (мал. 2.11.5).

Легко показати, що точки O_1, O_2 і A лежать на одній прямій.

Звідси $\Delta AO_1M \sim \Delta AO_2N$. Отримуємо: $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2}$. Аналогічно доводимо, що $\frac{BO_1}{BO_3} = \frac{r_1}{r_3}, \frac{CO_2}{CO_3} = \frac{r_2}{r_3}$.



Мал. 2.11.6

Для точок A, B і C, які лежать на продовженнях сторін трикутника $O_1O_2O_3$, розглянемо добуток трьох відношень $\frac{O_2A}{AO_1} \cdot \frac{O_1B}{BO_3} \cdot \frac{O_3C}{CO_2}$. Цей добуток дорівнює $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_2} = 1$. Отже, точки A, B і C лежать на одній прямій [38].

Теорема Чеви. На сторонах BC, CA і AB трикутника ABC візьмемо довільні точки A_1, B_1, C_1 (мал. 2.11.6). Кожен із відрізків AA_1, BB_1, CC_1 називають ***чевіаною*** трикутника ABC. Така назва пов'язана з ім'ям італійського інженера й математика Джованні Чеви (1648–1734), який відкрив дивовижну теорему.

Якщо очки A_1, B_1 і C_1 узято так, що чевіани є бісектрисами, або медіанами, або висотами, то ці чевіани перетинаються в одній точці.

Якщо три прямі перетинаються в одній точці, то їх називають конкурентними.

Теорема Чеви дає загальний критерій конкурентності трьох довільних чевіан.

Т е о р е м а (теорема Чеви). Для того щоб чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (**)$$

Д о в е д е н н я. Доведемо спочатку необхідну умову конкурентності: якщо чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці (мал. 2.11.7), то виконується рівність (**).

Застосуємо теорему Менелая до трикутників ABB_1, CBB_1 і прямих CC_1 і AA_1 відповідно:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1. \qquad (1)$$

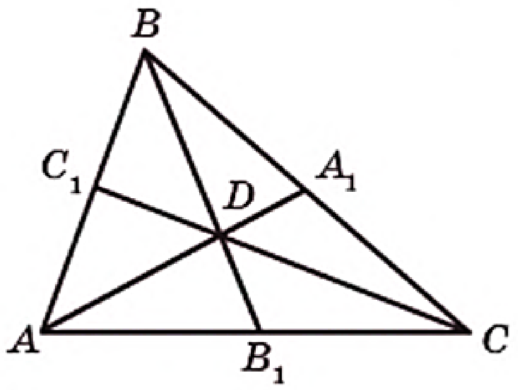
$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} = 1. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) отримуємо: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC}$.

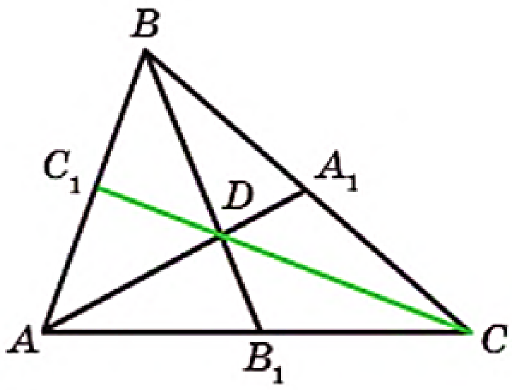
Звідси $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{1} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{1}$ або $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{CA_1} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1$.

Доведемо тепер достатню умову конкурентності: якщо виконується рівність (**), то чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці.

Нехай чевіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці D, а чевіана, яка проходить через вершину C і точку D, перетинає сторону AB у деякій точці C_2 (мал. 2.10.3). З доведеного вище можна записати: $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$



Мал. 2.11.7



Мал. 2.11.8

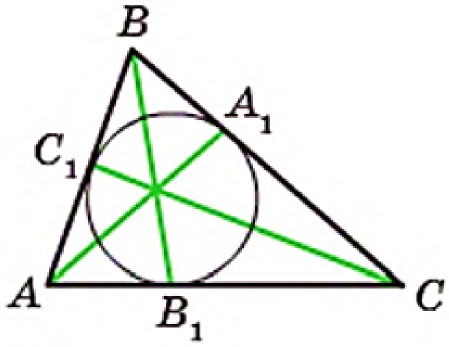
Зіставляючи цю рівність з рівність (**), доходимо висновку, що $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$, тобто точки C_1 і C_2 ділять відрізок AB в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Таким чином, пряма CD перетинає сторону AB у точці C_1 [20].

З а д а ч а 3. Вписане коло дотикається до сторін BC, AC, AB трикутника ABC у точках A_1, B_1, C_1 відповідно (мал. 2.11.9). Доведіть, що чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні.

Р о з в ’ я з а н н я. За властивістю дотичних маємо:

$AC_1 = AB_1, BC_1 = BA_1, CA_1 = CB_1.$

Для точок C_1, A_1 і B_1 розглянемо добуток трьох відношень $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}$. З урахуванням записаних вище рівностей цей добуток дорівнює 1. Отже, чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні [33].



Мал. 2.11.9

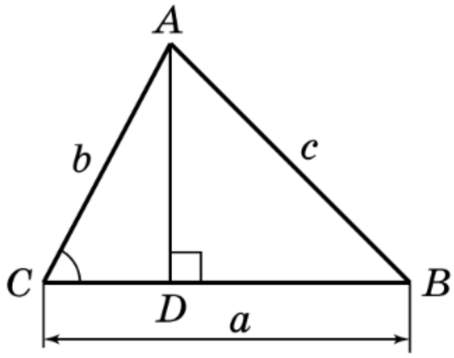
2.12 Теореми косинусів та синусів

Теорема косинусів. Доведемо одну з найважливіших теорем про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Теорема косинусів. Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

Доведення. Нехай у трикутнику *ABC* *AB* = *c*, *AC* = *b*, *BC* = *a* (мал. 2.12.1). Доведемо,що

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos C.$$



Мал. 2.12.1

Очевидно, що ∠ *C* може бути прямим, гострим або тупим. Розглянемо всі три випадки.

1) Нехай ∠ *C* – прямий. Тоді і формула, яку треба довести, набуває вигляду:

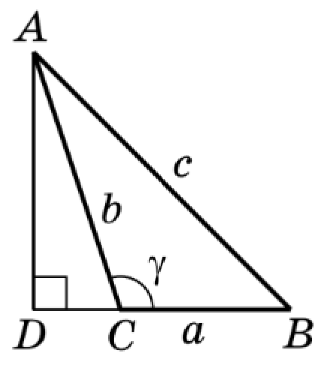
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

тобто маємо теорему Піфагора для трикутника *ABC*.

2) Нехай ∠ *C* – гострий. Тоді у трикутнику *ABC* є ще хоча б один гострий кут, нехай це буде ∠ *B*. Проведемо у трикутнику висоту *AD*. Оскільки кути *B* і *C* – гострі, то точка *D* належить стороні *BC*. Тоді у прямокутному трикутнику *ADC*: *AD* = *b sin C*, *CD* = *b cos C*, *BD* = *BC* – *CD* = *a* – *b cos C*.

У прямокутному трикутнику *ADB* (за теоремою Піфагора):

$$c^2 = AB^2 = AD^2 + DB^2 = (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2$$
$$= b^2 sin^2 C + a^2 -$$
$$-2ab\cos C + b^2 cos^2 C = a^2 + b^2(sin^2 C + cos^2 C) - 2ab\cos C.$$



Мал. 2.12.2

Але $sin^2 C + cos^2 C = 1$, тому $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

3) Нехай кут $\angle C$ – тупий (мал. 2.12.2). Позначимо $\angle ACB = \gamma$. Проведемо у трикутнику *ABC* висоту *AD*. У цьому випадку точка *D* лежатиме на продовженні променя *BC*, тому $\angle ACD = 180^\circ - \gamma$.

У прямокутному трикутнику *ADC*:

$AD = b \sin ACD = b \sin (180^\circ - \gamma) = b \sin \gamma;$

$DC = b \cos ACD = b \cos (180^\circ - \gamma) = -b \cos \gamma.$

Маємо: $BD = BC + CD = a - b \cos \gamma$. Далі доводимо так, як у випадку, коли $\angle C$ – гострий.

Зауважимо, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів для прямокутного трикутника, тому її інколи називають *узагальненою теоремою Піфагора*.

Отже, у довільному трикутнику виконуються рівності:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,}$$

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,}$$

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.}$$

За допомогою теореми косинусів можна, наприклад, знайти невідому сторону трикутника, якщо відомо дві його інші сторони й один з кутів [4].

З а д а ч а 1. Дано: $\Delta\, ABC$, $AC = 5$ см, ВС = 8 см, $\angle C = 60^\circ$.

Знайти: *AB*.

Р о з в’ я з а н н я. Нехай $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ (мал. 2.12.1).

За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Тоді:

$$\text{c} = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \text{сщі}\,60^\circ} = \sqrt{49 = 7}\,(\text{см}).$$

В і д п о в і д ь. 7 см [35].

З а д а ч а 2. Дано: $\Delta\, ABC$, $AB = 7$, $BC = 5$, $\angle C = 60^\circ$.

Знайти: *AB*.

Р о з в’ я з а н н я. Нехай $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ (мал. 2.12.2).

За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, тобто $7^2 = 5^2 + $ $+ b^2 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \cos 120°$.

Спростивши останню рівність, отримаємо квадратне рівняння $b^2 + 5b -$ $-24 = 0$, розв’язавши яке, матимемо: $b_1 = 3;\ b_2 = -8$.

Число –8 не задовольняє змісту задачі, оскільки $b > 0$.

Отже, $AC = 3$ см.

В і д п о в і д ь. 3 см [30].

Якщо відомо три сторони трикутника, то за теоремою косинусів можна знайти косинус будь-якого з його кутів, а отже, і сам кут.

Наприклад, косинус кута C можна знайти за формулою, виразивши $cos\ C$ з формули теореми косинусів:

$$\boldsymbol{cos\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}.$$

З а д а ч а 3. Знайти міру найбільшого з кутів трикутника, довжини сторін якого дорівнюють $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ і 4 см.

Р о з в’ я з н н я. Оскільки у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, то найбільшим кутом трикутника буде кут, що лежить проти сторони завдовжки 4 см.

Нехай $a = \sqrt{2}$ см, $b = \sqrt{8}$ см, $c = 4$ см.

Тоді за формулою косинуса кута маємо:

$$\cos C = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{3}{4}.$$

Використовуючи калькулятор (або таблиці), знайдемо, що $\angle\, C \approx 138°35'$.

В і д п о в і д ь. $138°35'$ [29].

Отже, теорема косинусів є зручною і для визначення виду трикутника. Щоб установити, гострокутним, прямокутним або тупокутним є трикутник, досить знайти знак косинуса його найбільшого кута. З формули косинуса кута зрозуміло, що знак косинуса кута залежить від знака чисельника дробу, оскільки знаменник завжди додатний. Тому знак виразу $a^2 + b^2 - c^2$ дозволяє визначити знак косинуса кута трикутника, а отже, і вид цього кута (гострий, прямий чи тупий).

Якщо c – найбільша сторона трикутника, то для з’ясування виду трикутника достатньо порівняти з нулем значення виразу $a^2 + b^2 - c^2$. Таким чином,

якщо c – найбільша сторона трикутника і

$\boldsymbol{a^2+b^2-c^2>0}$***, то*** $\angle$ ***C – гострий, а трикутник – гострокутний;***

$\boldsymbol{a^2+b^2-c^2=0}$***, то*** $\angle$ ***C – прямий, а трикутник – прямокутний;***

$\boldsymbol{a^2+b^2-c^2<0}$***, то*** $\angle$ ***C – тупий, а трикутник – тупокутний.***

З а д а ч а 4. Визначити вид трикутника зі сторонами a = 4 см, b =6 см, c = 7 см.

Р о з в’ я з а н н я. $a^2+b^2-c^2=4^2+6^2-7^2=3>0$, отже, трикутник гострокутний.

В і д п о в і д ь. Гострокутний [21].

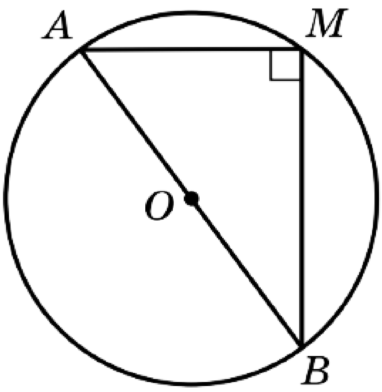
Теорема синусів.

Л е м а. Якщо AB – хорда кола, радіус, якого дорівнює R, а M – будь-яка точка кола, то

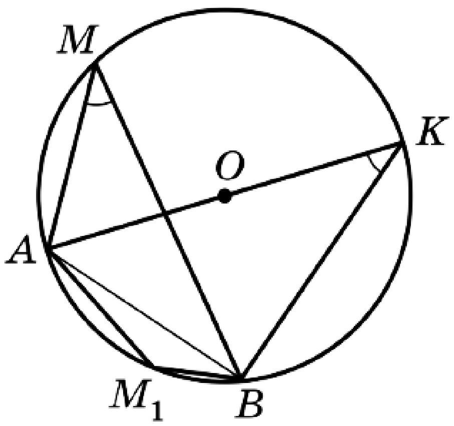
$$\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{sin\angle AMB}}=\boldsymbol{2R}.$$

Д о в е д е н н я. 1) Якщо $AB = 2R$ – діаметр кола (мал. 2.12.3), то $\angle AMB =$ $= 90^\circ$ при будь-якому розташуванні точки M на колі. Тоді, ураховуючи співвідношення у прямокутному трикутнику,

$$\frac{AB}{sin\angle AMB}=\frac{2R}{\sin 90^\circ}=2R.$$



Мал. 2.12.3



Мал. 2.12.4

2) Нехай AB – не є діаметром кола, а M – точка, що належить більшій дузі кола (мал. 2.12.4). Проведемо діаметр AK. Тоді $\angle AMB = \angle AKB$ (як вписані, що

спираються на одну й ту саму дугу). $\angle ABK = 90^\circ$ (як кут, що спирається на діаметр).

У трикутнику ABK ($\angle B = 90^\circ$) $\sin \angle AKB = \frac{AB}{AK}$, тому $\sin \angle AMB = \frac{AB}{2R}$, звідки $\frac{AB}{\sin \angle AMB} = 2R$.

3) Нехай – AB не є діаметром, а точка M_1 належить меншій дузі кола, тоді $\angle M + \angle M_1 = 180^\circ$. Маємо: $\angle AM_1B = 180^\circ - \angle AMB$, тому

$\sin \angle AM_1B = \sin (180^\circ - \angle AMB) = \sin \angle AMB$.

Отже, у цьому випадку також справджується рівність

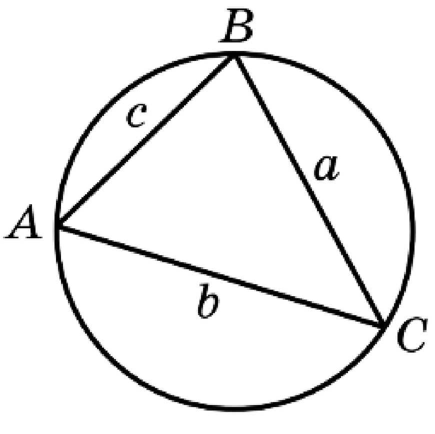
$$\frac{AB}{\sin \angle AMB} = 2R.$$

Тепер доведемо важливу теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Т е о р е м а   с и н у с і в. Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів.

Д о в е д е н н я. Нехай ABC – довільний трикутник, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 2.12.5). Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



Мал. 2.12.5

Опишемо коло радіуса R навколо даного трикутника. За доведеною лемою:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R; \frac{b}{\sin B} = 2R; \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Отже, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Н а с л і д о к. *(узагальнена теорема синусів)**. У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного їй кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:***

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = D.}$$

Скориставшись теоремою синусів, можна довести відоме з курсу геометрії 7 класу твердження:

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.

За допомогою теореми синусів можна розв’язувати трикутники. Наприклад, за двома даними кутами трикутника і стороною, що лежить проти одного з них, можна знайти сторону, що лежить проти другого кута [4].

З а д а ч а 5. Дано: ΔABC $BC = 7\sqrt{2}$ см; $\angle A = 45°$; $\angle B = 60°$.

Знайти: AC.

Р о з в’ я з а н н я. За теоремою синусів маємо (мал. 2.13.3):

$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$, тобто $\frac{7\sqrt{2}}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 60°}$;

Звідки $AC = \frac{7\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (см).

В і д п о в і д ь. $7\sqrt{3}$ см [8].

2.13 Формули для знаходження площі трикутника

Площу S трикутника зі сторонами a, b і c та висотами h_a, h_b, h_c можна обчислити за формулами

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \qquad S = \frac{1}{2}bh_b, \qquad S = \frac{1}{2}ch_c.$$

Т е о р е м а 1. Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін і синуса кута між ними.

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутник ABC, площа якого дорівнює S, такий, що $BC = a$, $AC = b$ і $\angle C = \gamma$. Доведемо, що

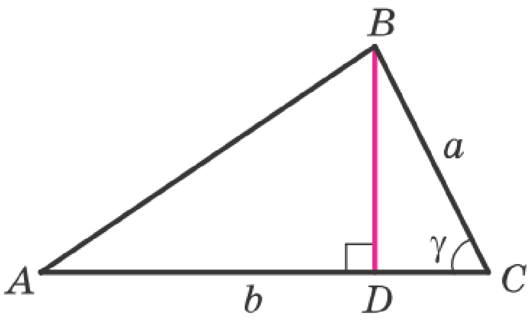
$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma}.$$

Можливі три випадки:

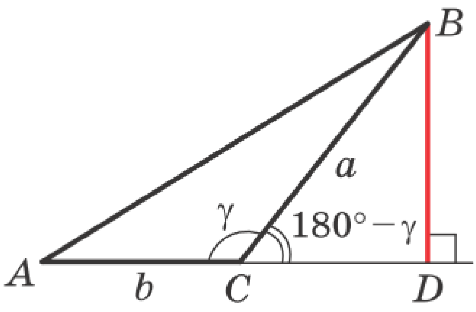
1) кут γ гострий (мал. 2.13.1);

2) кут γ тупий (мал. 2.13.2);

3) кут γ прямий.



Мал. 2.13.1



Мал. 2.13.2

На рисунках 2.13.1 і 2.13.2 проведемо висоту BD трикутника ABC.

Тоді $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot b$.

Із прямокутного трикутника BDC у першому випадку (див. мал. 2.13.1) отримуємо: $BD = a\,sin\,\gamma$, а в другому (див. мал. 2.13.2): $BD = a\,sin(180° - \gamma) = a \sin\gamma$. Звідси для двох перших випадків маємо:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

Якщо кут C прямий, то $\sin\gamma = 1$. Для прямокутного трикутника ABC із катетами a і b маємо:

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin 90° = \frac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

***Т е о р е м а 2*. (формула Герона). Площу S трикутника зі сторонами a, b і c можна обчислити за формулою**

$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

де p — його півпериметр [21].

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутник ABC, площа якого дорівнює S, такий, що $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Доведемо, що

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Нехай $\angle C = \gamma$. Запишемо формулу площі трикутника:

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Звідси $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma$.

За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$.

Тоді $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Оскільки $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)$, то

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}(c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2) =$$

$$= \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2b}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2} \cdot \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Звідси $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ [10].

Т е о р е м а 3. Площу S трикутника зі сторонами a, b і c можна обчислити за формулою

$$\boldsymbol{S = \frac{abc}{4R},}$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.

Д о в е д е н н я. Розглянемо трикутник *ABC*, площа якого дорівнює *S*, такий, що *BC* = *a*, *AC* = *b*, *AB* = *c*. Доведемо, що $S = \frac{abc}{4R}$, де *R* — радіус описаного кола трикутника.

Нехай ∠*A* = *α*. Запишемо формулу площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

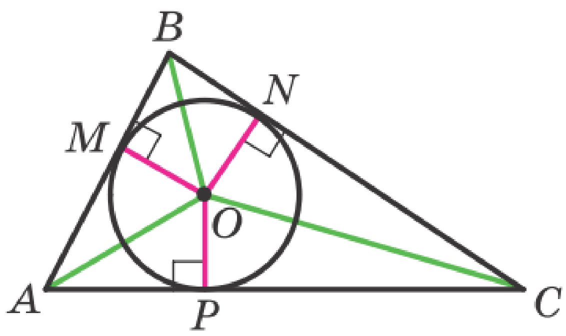
Із леми п. 2.12 випливає, що $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

Тоді $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

Зауважимо, що доведена теорема дає змогу знаходити радіус описаного кола трикутника за формулою:

$$\boldsymbol{R = \frac{abc}{4S}}.$$

Т е о р е м а 4. Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.



Мал. 2.13.3

Д о в е д е н н я. На рисунку 2.13.3 зображено трикутник *ABC*, у який вписано коло радіуса *r*. Доведемо, що

$$\boldsymbol{S = pr},$$

де S — площа даного трикутника, *p* — його півпериметр.

Нехай точка O — центр вписаного кола, яке дотикається до сторін трикутника *ABC* у точках *M*, *N* і *P*. Площа трикутника *ABC* дорівнює сумі площ трикутників *AOB, BOC, COA:*

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Проведемо радіуси в точки дотику. Отримуємо: $OM \perp AB, ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Звідси:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}ON \cdot BC = \frac{1}{2}r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}OP \cdot AC = \frac{1}{2}r \cdot AC.$$

Отже, $S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = r \cdot \frac{AB+BC+AC}{2} = pr$.

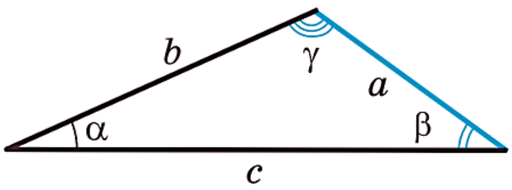
2.14 Розв’язування задач підвищеної складності

Розв’язати трикутник означає знайти невідомі його сторони та кути за відомими сторонами та кутами [10].

У 8 класі ми навчилися розв’язувати прямокутні трикутники. Теореми косинусів і синусів дають змогу розв’язати будь–який трикутник.

У наступних задачах значення тригонометричних функцій будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до сотих. Величини кутів будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до одиниць. Обчислюючи довжини сторін, результат будемо округлювати до десятих.

З а д а ч а 1. Розв’яжіть трикутник (мал. 2.14.1) за стороною $a = 12$ см і двома кутами $\beta = 36°, \gamma = 119°$.



Мал. 2.14.1

Р о з в ’ я з а н н я. Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°.$$

За теоремою синусів:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Звідси $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Маємо: $b = \frac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \frac{12 \cdot 0,59}{0,42} \approx 16,9$ (см).

Знову застосовуючи теорему синусів, запишемо: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Звідси $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Маємо: $c = \frac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \frac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \frac{12 \cdot 0,87}{0,42} \approx 24,9$ (см).

В і д п о в і д ь: $b \approx 16,9$ см, $c \approx 24,9$ см, $\alpha = 25°$ [33].

З а д а ч а 2. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами $\mathrm{a} = 14\text{ см}, \mathrm{b} = 8\text{ см}$ і кутом $\gamma = 38°$ між ними.

Р о з в ' я з а н н я. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Звідси $c^2 = 196 + 64 - 2 \cdot 14 \cdot 8\cos 38° \approx 260 - 224 \cdot 0{,}79 = 83{,}04; c \approx 9{,}1$ см.

Далі маємо: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$;

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \cos\alpha \approx \frac{8^2 + 9{,}1^2 - 14^2}{2 \cdot 8 \cdot 9{,}1} \approx -0{,}34.$$

Звідси $\alpha \approx 110°$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma);\ \ \beta \approx 180° - 148° = 32°.$$

В і д п о в і д ь: $\mathrm{c}\ \approx\ 9{,}1$ см, $\alpha \approx 110°$, $\beta \approx 32°$ [21].

З а д а ч а 3. Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами $\mathrm{a} = 7\text{ см}, \mathrm{b} = 2\text{ см}, \mathrm{c} = 8$ см.

Р о з в ' я з а н н я. За теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Звідси

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \cos\alpha = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0{,}59.$$

Отримуємо: $\alpha \approx 54°$.

За теоремою синусів $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

Звідси $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a};\ \sin\beta \approx \frac{2\sin 54°}{7} \approx \frac{2 \cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23$.

Оскільки b — довжина найменшої сторони даного трикутника, то кут βє гострим. Тоді знаходимо, що $\beta \approx 13°$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \ \gamma \approx 180° - 67° = 113°.$$

В і д п о в і д ь: $\alpha \approx 54°$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 113°$ [4].

З а д а ч а 4. У трикутнику *ABC AC* = 1 см, *AB* = 2 см, *O* — точка перетину бісектрис. Відрізок, який проходить через точку *O* і є паралельним до сторони *BC*, перетинає сторони *AC* і *AB* у точках *K* та *M* відповідно. Знайдіть периметр трикутника *AKM*.

Дано: $\triangle ABC$, $AC = 1$ см, $AB = 2$ см, O — точка перетину бісектрис, $K \in AC$, $M \in AB$, $O \in KM$, $KM || BC$.

Знайти: периметр $\triangle AKM$.

Р о з в ’ я з а н н я.

І спосіб

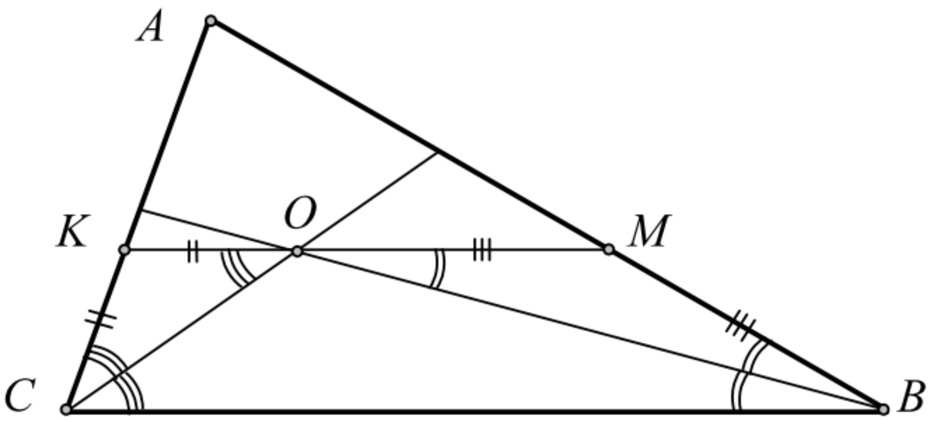


Рис. 2.14.2: до першого способу розв’язання задачі 1

1) За умовою $KM||BC$. Тому за властивістю паралельних KM, BC та січної CO кути KOC і OCB є рівними, як «внутрішні різносторонні». Оскільки CO — бісектриса кута ACB, то за визначенням $\angle KCO = \angle BCO$. І тому $\angle KCO = \angle KOC$. Отже, (за ознакою рівнобедреного трикутника) $\triangle CKO$ є рівнобедреним з основою CO. Звідки $KO = KC$.

2) Аналогічно $\angle CBO = \angle MOB$ як «внутрішні різносторонні» при паралельних KM, BC та січній CO. Оскільки BO — бісектриса кута ABC, то $\angle MBO = \angle CBO$. І тому $\angle MBO = \angle MOB$. Отже, $\triangle BMO$ є рівнобедреним з основою BO. Звідки $MO = MB$.

3) Таким чином $P_{\triangle AKM} = AK + KM + AM = AK + (KO + OM) + AM =$
$= AK + (KC + MB) + AM = (AK + KC) + (MB + AM) = AC + AB = 1 + 2 = 3.$

Отже, $P_{\triangle AKM} = 3$ см.

ІІ спосіб

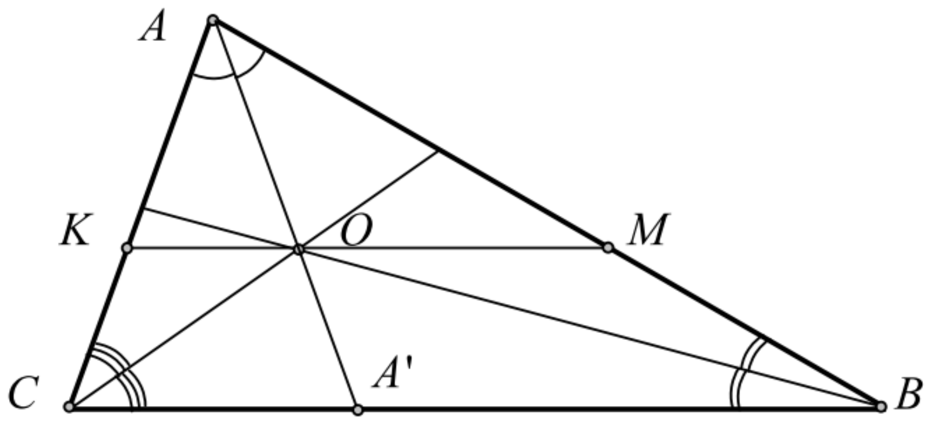


Рис. 2.14.3: до другого способу розв’язання задачі 1

Нехай AA' — бісектриса кута A трикутника ABC. Оскільки бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці, то $O \in AA'$.

За умовою $KM||BC$. Тому трикутники AKM і ACB є подібними за третьою ознакою подібності трикутників. Оскільки AO і AA' — відповідні лінійні елементи (бісектриси відповідних кутів трикутників) подібних трикутників AKM і ACB , то в якості коефіцієнта подібності цих трикутників можна обрати величину $k = \frac{AO}{OA'}$ $\left(\text{або ж } k' = \frac{1}{k} = \frac{AA'}{AO}\right)$.

За **властивістю точки перетину бісектрис трикутника** має місце рівність

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC + AB}{BC},$$

звідки $\frac{OA'}{AO} = \frac{BC}{AC+AB}, \frac{OA'}{AO} + 1 = \frac{BC}{AC+AB} + 1, \frac{AA'}{AO} = \frac{AC+AB+BC}{AC+AB} = \frac{P_{\triangle ABC}}{AC+AB}$.

І тому коефіцієнт подібності $k = \frac{AO}{AA'} = \frac{AC+AB}{P_{\triangle ABC}}$.

Але ж тоді

$$P_{\triangle AKM} = k \cdot P_{\triangle ABC} = \frac{AC + AB}{P_{\triangle ABC}} \cdot P_{\triangle ABC} = AC + AB.$$

Отже, периметр $\triangle AKM$ дорівнює $AC + AB = 1 + 2 = 3$ см.

Відповідь: 3 см [26].

З а д а ч а 5. У трикутнику *ABC* бісектриса з вершини *A*, висота з вершини *B* та серединний перпендикуляр до сторони *AB* перетинаються в одній точці. Знайдіть величину кута *A*.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай у трикутнику *ABC* бісектриса *AL* кута *A*, висота *BH* та серединний перпендикуляр до сторони *AB* в точці *M* перетинаються в точці *O* (рис. 2.17.3).

Тоді за властивістю бісектриси кута (трикутника) маємо, що $OH = OM$.

Звідки випливає, що прямокутні трикутники *AMO* і *AHO* рівні за катетом і гіпотенузою.

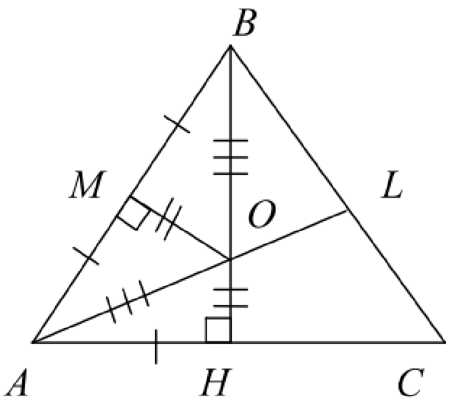


Рис. 2.14.4

Оскільки *OM* є одночасно і висотою, і медіаною трикутника *AOB*, то трикутник *AOB* є рівнобедреним з основою *AB*. Тому $\angle BAO = \angle ABO$.

Таким чином, з урахуванням рівності вказаних трикутників, маємо рівність відповідних кутів, а саме: $\angle HAO = \angle BAO = \angle ABO$.

Оскільки $\angle \mathrm{HAO} = \angle \mathrm{BAO} = \angle \mathrm{ABO} = 90^\circ$, то кожен з кутів $\angle \mathrm{HAO}$, $\angle \mathrm{BAO}$, $\angle \mathrm{ABO}$ дорівнює 30°. Тому $\angle \mathrm{A}=60^\circ$.

Відповідь: 60° [27].

З а д а ч а 6. На стороні *AB* трикутника *ABC* відмічено точку *K*. Відрізок *CK* перетинає медіану *AM* трикутника в точці *P* , причому $AK = AP$. Знайти відношення $BK : PM$.

Р о з в ' я з а н н я. На стороні *AB* трикутника *ABC* відмічено точку *K*. Відрізок *CK* перетинає медіану *AM* трикутника в точці *P*, причому $AK = AP$. Знайдемо відношення $BK : PM$.

І спосіб – «за допомогою теореми Фалеса та теореми про пропорційні відрізки»

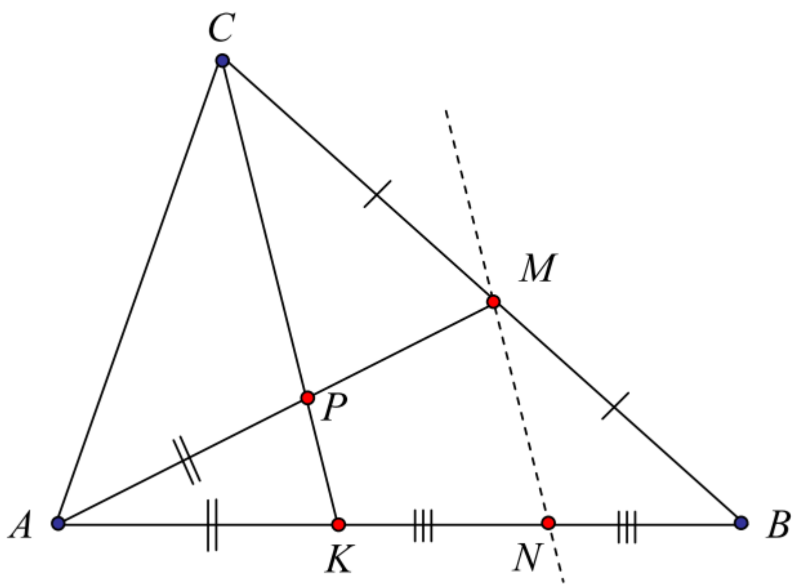


Рис. 2.14.5: до першого способу розв’язання задачі 3

1) Через точку *M* проведемо пряму паралельно до прямої *CK* і нехай вона перетинає пряму *AB* у точці *N*. Оскільки *CM* = *MB*, а паралельні прямі *CK* і *MN* перетинають сторони кута *CBA*, то за теоремою Фалеса *KN* = *NB*. Звідки *KB=2KN*.

2) Оскільки паралельні прямі *PK* і *MN* перетинають сторони кута *MAB* та відтинають на його сторонах відрізки *AP* і *PM* та *AK* і *KN* відповідно, то за «теоремою про пропорційні відрізки» має місце пропорція *AP* : *PM=AK* : *KN*, звідки (за властивістю пропорції) має місце пропорція виду $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AK}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{KN}}$. За умовою *AP* = *AK*. І тому справджується рівність $1 = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{KN}}$, звідки *PM=KN.*

3) З урахуванням пунктів 1 і 2, шукане відношення *BK* : *PM* становить

$$BK : PM = 2KN : KN = 2 : 1.$$

II спосіб – «за допомогою теореми Фалеса без застосування теореми про пропорційні відрізки»

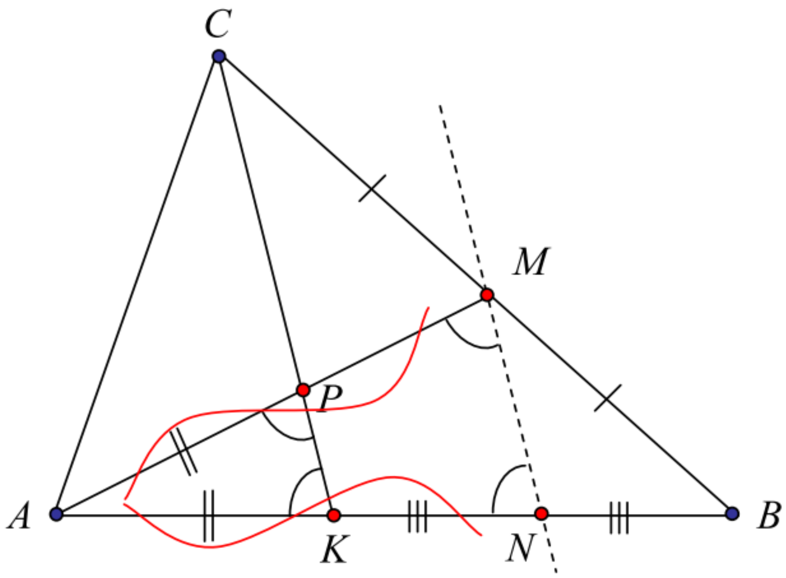


Рис. 2.14.6: до другого способу розв’язання задачі 3

1) Через точку M проведемо пряму паралельно до прямої CK і нехай вона перетинає пряму AB у точці N. Оскільки $CM = MB$, а паралельні прямі CK і MN перетинають сторони кута CBA, то за теоремою Фалеса $KN = NB$. Звідки $KB = 2KN$(*).

2) За умовою $AP{=}AK$. І тому $\triangle PAK$ є рівнобедреним з основою PK. Звідки $\angle APK = \angle AKP = \varphi$ (як кути при основі рівнобедреного трикутника).

3) $\angle AMN = \angle APK = \varphi$ як відповідні кути при паралельних прямих MN і PK та січній AM.

4) $\angle ANM = \angle AKP = \varphi$ як відповідні кути при паралельних прямих MN і PK та січній AB.

5) Оскільки $\angle AMN = \angle ANM = \varphi$, то за ознакою (рівнобедреного трикутника) AMN є рівнобедреним з основою MN. Звідки $AM = AN$.

6) Оскільки $AM = AN$, $AP = AK$, то $PM = AM{-}AP = AN{-}AK = KN$ (**).

7) З урахуванням (*) та (**), остаточно маємо, що $BK : PM = 2 : 1$.

III спосіб – «за допомогою теореми Фалеса без застосування теореми про пропорційні відрізки»

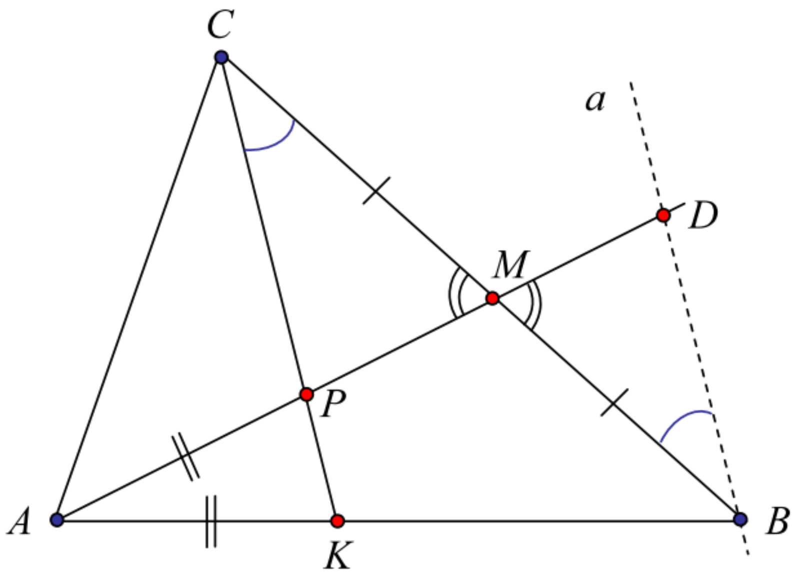


Рис. 2.14.7: до третього способу розв'язання задачі 3

1) Через точку *B* проведемо пряму а паралельно до прямої *CK* і нехай *a* перетинає пряму *AM* у точці *D*.

2) За умовою *AP* = *AK*. І тому *△PAK* є рівнобедреним з основою *PK*. Звідки ∠*APK* = ∠*AKP* = *φ*.

3) ∠*ADB* = ∠*APK*=*φ* як відповідні кути при паралельних прямих *a* і *PK* та січній *AD*; ∠*ABD* = ∠*AKP* = *φ* — як відповідні кути при паралельних прямих *a* і *PK* та січній *AB*.

4) Оскільки *PK* || *DB*, *DP* ∩ *BK* = *A*, ∠*PDB* = ∠*KBD* = *φ*, то чотирикутник *KPDB* є рівнобічною трапецією. Звідки *KB* = *PD* (***).

5) Розглянемо *△CMP* і *△BMD*. В них: *CM* = *MB* (за умовою); ∠*CMP* = ∠*BMD* (як вертикальні); ∠MCP = ∠MBD (як внутрішні різнозсторонні при паралельних прямих *CK* і *BD* та січній *CB*). І тому (за стороною і прилеглими кутами) *△CMP* = *△BMD* . Звідки *2PM* = *2MD* = *PD*.

Отже, з урахуванням (***), остаточно маємо, що *BK* : PM = 2 : 1.

Відповідь: 2 : 1 [28].

РОЗДІЛ 3. ВИКОРИСТАННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ GRAN–2D ПРИ РОЗВЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З ТЕМИ «ТРИКУТНИКИ»

Ефективність засвоєння знань учнями за умов широкого впровадження засобів нових інформаційних технологій навчання (НІТН) при вивченні геометрії в значній мірі залежить від педагогічних програмних засобів (ППЗ), що дозволяють поєднати високі обчислювальні можливості при дослідженні різноманітних геометричних об’єктів з унаочненням результатів на всіх етапах розв’язування задач [6].

Використання спеціалізованих програмних засобів надає можливість учневі розв’язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату (наприклад, обчислювати об’єми та площі поверхонь довільних многогранників, не знаючи формул для їх обчислення).

Одним з перших в Україні педагогічних програмних засобів був програмний комплекс для підтримки навчання математики GRAN. Його розробка розпочалася у 1989 році авторським колективом під керівництвом відомого українського вченого Мирослава Івановича Жалдака, академіка АНП України, доктора педагогічних наук, професора, завідувача кафедри теоретичних основ інформатики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова. Програмно–методичний комплекс GRAN, до складу якого входять педагогічні програмні засоби GRAN1, GRAN–2D, GRAN–3D, забезпечує підтримку вивчення математики (планіметрії, стереометрії, тригонометрії, алгебри й початків аналізу, початків теорії ймовірностей і математичної статистики), а також окремих розділів фізики в школі (7–11 класи).

3.1 Характеристика педагогічного програмного забезпечення GRAN–2D

У систематичному курсі геометрії 7–9 класів на дедуктивній основі розвиваються п’ять змістових ліній: геометричні фігури і їх властивості; геометричні побудови; геометричні перетворення; геометричні величини; координати і вектори. Розроблені педагогічні програмні засоби мають різні набори графічних операцій, тому по різному сприяють формуванню геометричних понять. Розглянемо можливість застосування програмних засобів, зокрема ППЗ GRAN–2D.

Програма GRAN–2D призначена для графічного аналізу систем геометричних об’єктів на площині, звідки і походить її назва (GRaphic Analysis 2–Dimension). Вона надає учням змогу оперувати моделями просторових об’єктів, що вивчаються в курсі стереометрії, а також забезпечує засобами аналізу та ефективного отримання відповідних числових характеристик різних об’єктів у тривимірному просторі. GRAN–2D може бути віднесений як до програм–розв’язувачів, так і до моделюючих програм, але перш за все дана програма призначена для розв’язування широкого класу задач шляхом моделювання об’єктів, що фігурують в умові задачі.

Програма проста в користуванні та не вимагає від користувача стійких вмінь роботи з комп’ютером, основ обчислювальної техніки чи програмування, а лише досить скромних знань в сфері роботи з персональним комп'ютером, що дозволяє з успіхом використовувати GRAN–2D в школі. Програма оснащена досить зручним і «люб'язним» україномовним інтерфейсом, розробленим з врахуванням сучасних вимог до педагогічних програмних засобів та є максимально наближеною до найбільш поширених програм загального призначення (систем опрацювання текстів, управління базами даних, електронних таблиць, графічних і музичних редакторів, операційних оболонок тощо) [23].

Використання пакету GRAN–2D надає можливість: створювати динамічні моделі геометричних фігур та їхніх комбінацій аналогічно класичним побудовам за допомогою циркуля та лінійки, а також використовуючи елементи аналітичної геометрії (систему координат, рівняння прямих і кіл, алгебраїчні залежності між частинами побудови, графіки функцій тощо); проводити вимірювання геометричних величин, досліджувати геометричні місця точок; аналізувати динамічні вирази, вписувати припущення, встановлювати закономірності; будувати графічні зображення, використовуючи коментарі, кнопки, підказки та гіперпосилання; експортувати рисунки у графічні формати для вбудовування їх у інші додатки і для створення геометричних ілюстрацій тощо [6].

ППЗ GRAN–2D дозволяє оперувати у площині моделями геометричних об’єктів шести базових типів: *Точка*, *Лінія*, *Ламана*, *Коло, Інтерполяційний поліном, Графік функції*. При цьому типи *Точка* та *Лінія* діляться на підтипи.

- *Точка*
  - *Вільна точка*
  - *Точка на об’єкті*
  - *Середня точка*
  - *Точка перетину об’єктів*
  - *Симетрична точка*
- *Лінія*
  - *Пряма*
  - *Паралельна пряма*
  - *Перпендикулярна пряма*
  - *Бісектриса кута*
  - *Дотична до кола*
- *Ламана*
- *Коло*
- *Інтерполяційний поліном*
- *Графік функції*

При створенні об’єктів усіх типів (крім типів *Вільна точка* та *Графік функції*) необхідно вказувати *опорні* об’єкти – тобто об’єкти, які визначають результуючий об’єкт.

За допомогою GRAN–2D зручно розв’язувати задачі на побудову на площині, спростовувати окремі припущення. Створивши динамічні моделі та аналізуючи динамічні вирази, можна проводити дослідження ГМТ, встановлювати екстремальні значення певних величин; шукати закономірності, послідовність яких може привести до доведення теорем тощо. Доцільно проводити спеціалізовані лабораторні роботи, у ході яких учні індивідуально або у складі групи розв’язують математичні задачі дослідницького типу у комп’ютерному класі.

Комплекс GRAN (1,2,3) - один з засобів візуалізації задачі та її розв'язання, який робить діалог учня зі вчителем більш доступним та евристичним. За допомогою цієї програми учні зможуть самостійно висувати гіпотези, робити припущення відносно закономірностей, які вони розглядають, експериментувати. Таким чином учень розуміє потребу доводити, знає з якою метою і навіщо він це робить. У зв'язку з цим, в нього формуються відповідні навчальні евристичні вміння [6].

Формуючи прийоми евристичної діяльності учнів в процесі навчання математики важливо не тільки правильно визначити обсяг навчального матеріалу, який після осмислення відповідає принципу рефлексії, а, в першу чергу, викликати в учнів високу мотивацію до створення власного навчального продукту діяльності. В цьому відношенні засобом формування такої діяльності може виступати програмний продукт GRAN [6].

Використання програм, подібних до GRAN дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул. Разом з тим, завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі, учень чітко і легко розв'язуватиме досить складні задачі, впевнено володітиме відповідною системою понять і правил. За допомогою GRAN окремі розділи і методи математики можна перетворити в «математику для всіх», що робить їх доступними зрозумілими, легкими і зручними для використання. Той, хто розв'язує задачу, стає користувачем математичних методів, можливо не володіючи їхньою будовою і обґрунтуванням, аналогічно до того, як він використовує різні комп'ютерні програми (текстові, графічні, музичні редактори, електроні таблиці, бази даних, електроні оболонки), не знаючи, як і за якими принципами вони побудовані, якими мовами програмування описані [23].

Такий підхід до вивчення математики дає наочні уявлення про поняття, розвиває образне мислення, просторову уяву. На передній план виступає з'ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної математичної моделі [5].

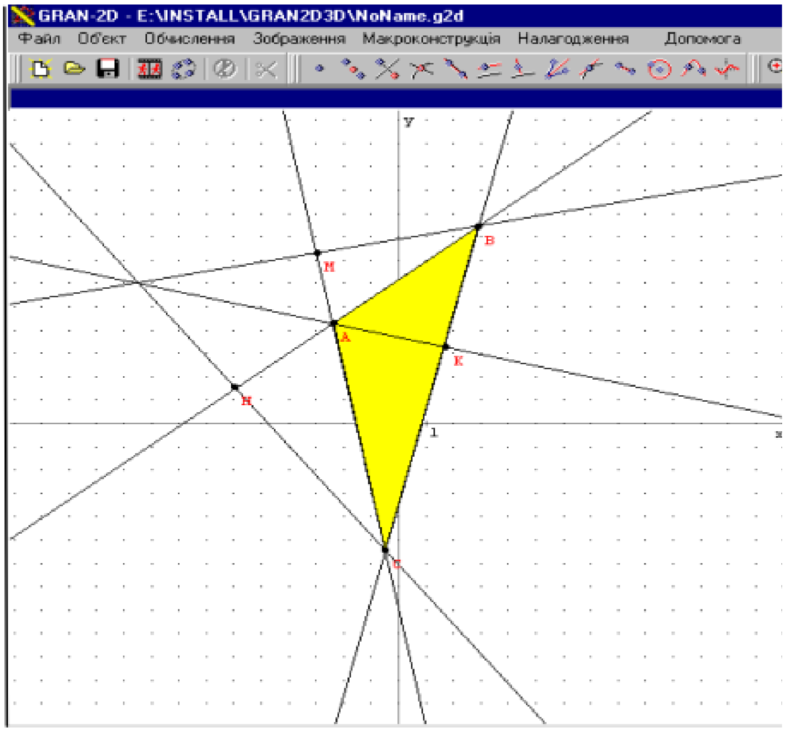
Щоб більш широко розкрити потенціал використання в навчальному процесі даного ППЗ, при його вивченні слід розглядати не тільки найпростіші задачі, але і більш складні, розв’язування яких завжди було проблемою для школярів та студентів. Звернемо увагу на використання даного ППЗ до розв’язування математичних задач в шкільному курсі математики.

3.2 Методика розв’язування задач з теми «Трикутники» з використанням ППЗ GRAN–2D

Використання програми GRAN–2D дає змогу розв’язувати задачі на знаходження елементів трикутника і площ, побудову трикутників та дозволяє учням працювати з динамічними геометричними моделями.

Наприклад, вводячи поняття висоти трикутника, не слід обмежуватися лише формулюванням означення. Учні повинні виконувати практичні дії на проведення висот з різних вершин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників. Треба мати на увазі, що попередній життєвий досвід учнів може гальмувати засвоєння поняття висоти трикутника. Як показує педагогічна практика навіть старшокласники припускаються помилок, проводячи висоту тупокутного трикутника. Саме тому при формуванні поняття висоти трикутника доцільно використовувати динамічні геометричні моделі, реалізацію яких забезпечує педагогічний програмний засіб GRAN–2D.

За допомогою відповідних послуг програмного засобу учні будують довільний трикутник ABC і його висоти AK, BH, CM (мал. 3.2.1). Оскільки дана модель динамічна, то, видозмінюючи трикутник (гострокутний, тупокутний, прямокутний), учні можуть спостерігати, як змінюються положення висот і відповідно сформулювати правильні висновки щодо розміщення основ висот.



Мал. 3.2.1

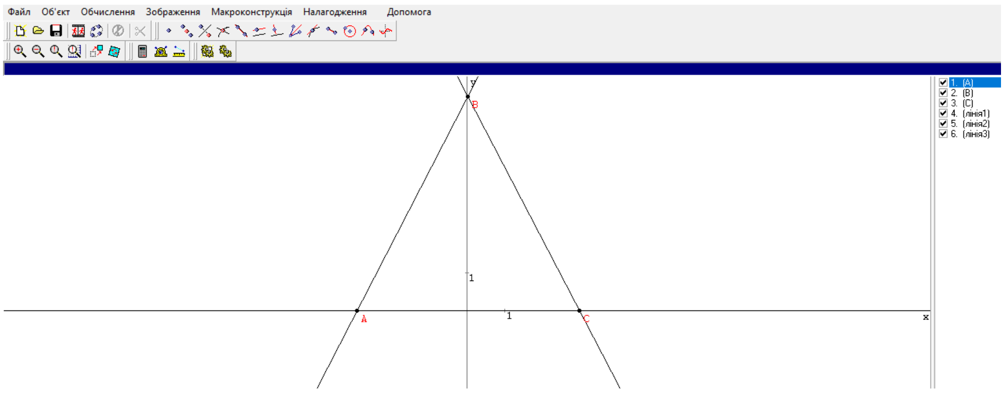
В процесі формування поняття висота трикутника учням необхідно також підкреслити суттєві ознаки і протиставити їм не суттєві. Суттєві: 1) це є перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить протилежну сторону трикутника; 2) вид трикутника; Несуттєві: 1) розташування вершин трикутника; 2) розміщення трикутника на площині.

Робота з динамічними моделями дозволяє попередити формування хибного враження, що основа висоти може лежати лише на стороні трикутника, а не на її продовженні. Використання педагогічних програмних засобів при формуванні понять планіметрії дає змогу вчителеві інтенсифікувати спілкування з учнями та учнів між собою; шляхом моделювання ефективніше підвести учнів до розуміння змісту понять; більше уваги приділити виявленню закономірностей досліджуваних процесів і явищ; підвищити рівень самостійності учнів у здобуванні нових знань [24].

Розглянемо більш детально процес розв’язування задач на прикладах.

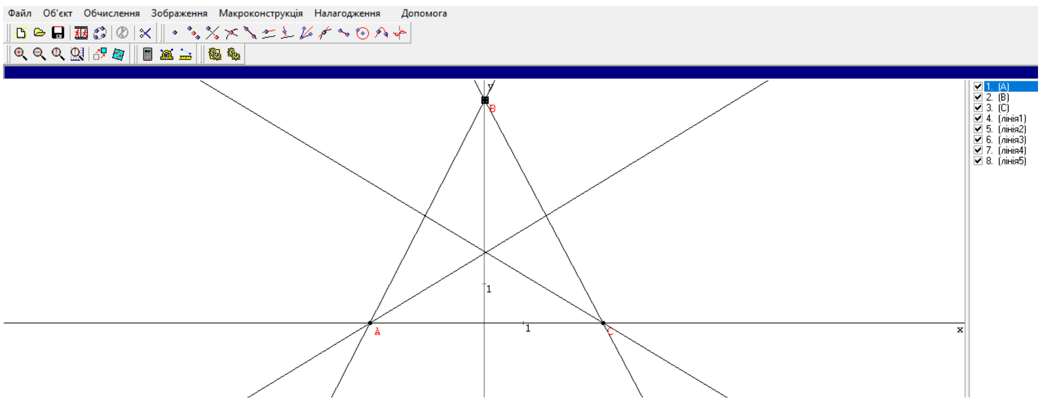
З а д а ч а 1. Перевірити за допомогою графічних побудов в програмі GRAN–2D, чи дійсно у рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні.

Р о з в ’ я з а н н я. Спочатку побудуємо рівнобедрений трикутник, використовуючи декартові координати (для зручності). Для цього потрібно позначити точки, та провести через них прямі (мал. 3.2.2).



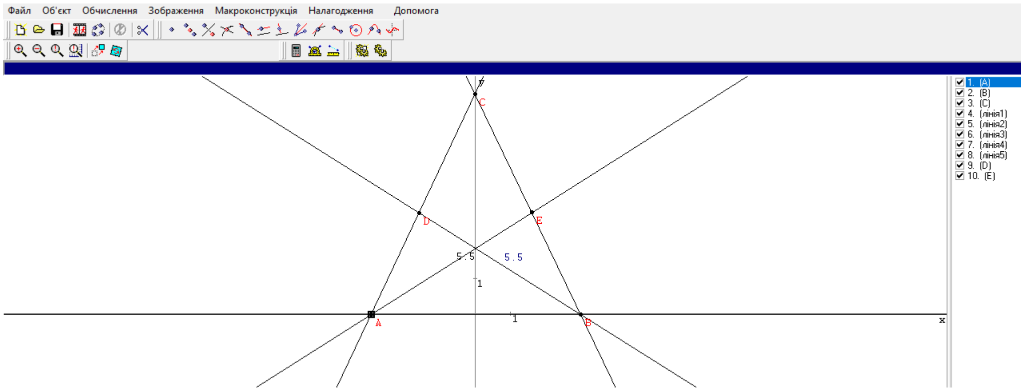
Мал. 3.2.2

Далі проводимо бісектриси кутів при основі (мал. 3.2.3).



Мал. 3.2.3

На бічних сторонах трикутника в перетині з бісектрисами ставимо точки та вимірюємо довжини бісектрис (мал. 3.2.4).

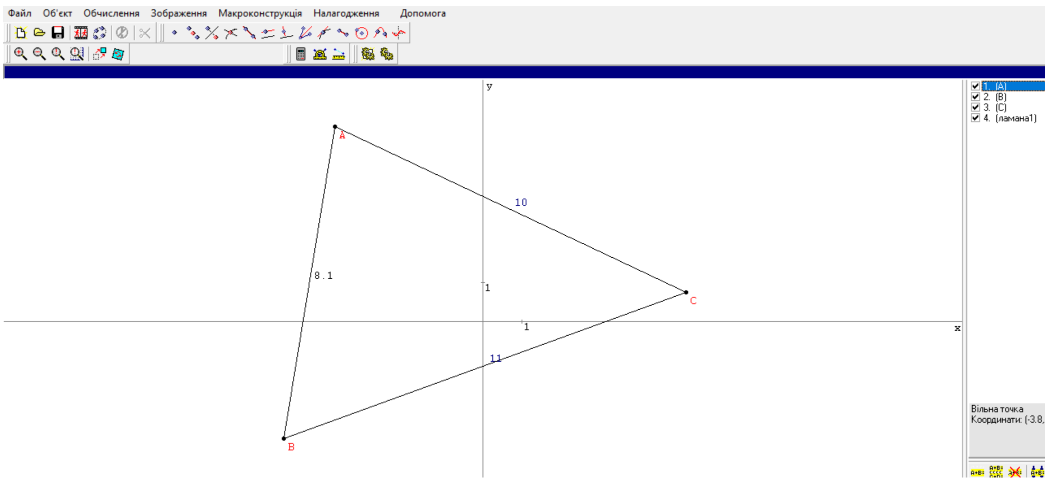


Мал. 3.2.4

Як бачимо, бісектриси трикутника рівні, а отже, ми дійсно переконалися, що у рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні [22].

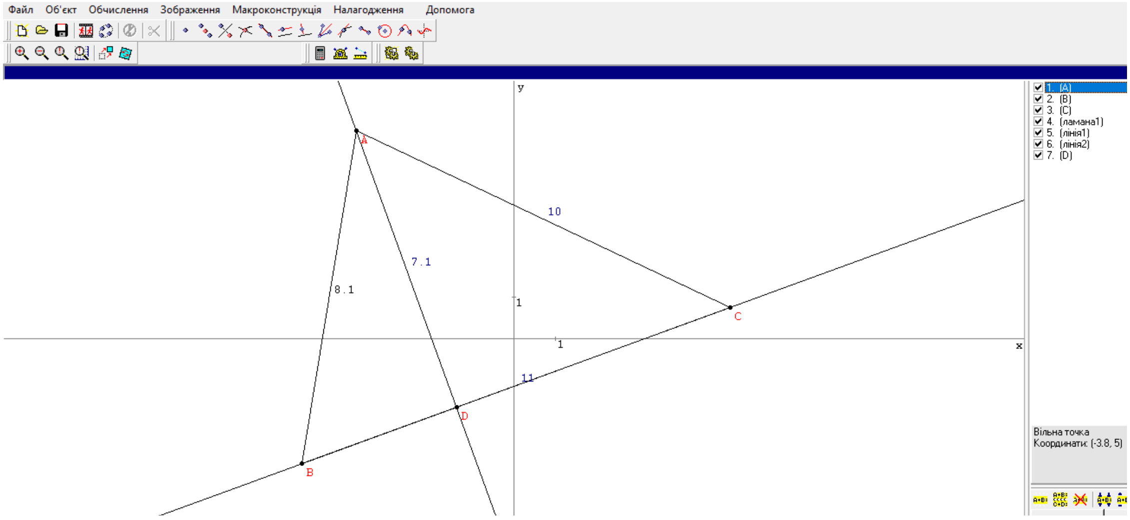
З а д а ч а 2. За допомогою програми GRAN–2D знайти радіуси описаного та вписаного кіл довільного трикутника, при цьому маючи лише зображення самого трикутника.

Р о з в ' я з а н н я. Щоб розв'язати дану задачу будуємо трикутник та вимірюємо його сторони (мал. 3.2.5).



Мал. 3.2.5

Для того, щоб знайти площу даного трикутника необхідно провести висоту та виміряти її довжину (мал. 3.2.6).



Мал. 3.2.6

Знаходимо площу трикутника. В нашому випадку:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 7{,}1 = 39{,}05.$$

Далі знаходимо радіуси вписаного та описаних кіл:

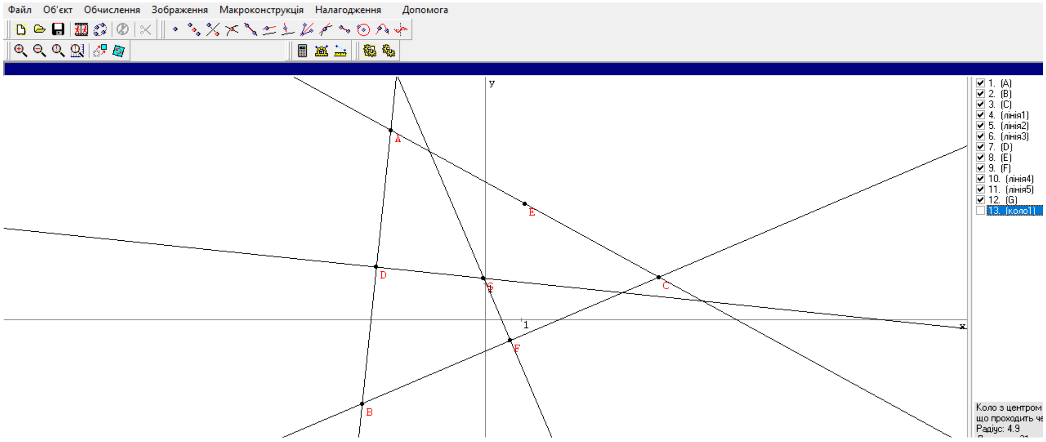
$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{8{,}1 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 39{,}05} = \frac{891}{156{,}2} \approx 5{,}7.$$

$$r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{2S}{AB + BC + AC} = \frac{2 \cdot 39{,}05}{8{,}1 + 11 + 10} = \frac{78{,}1}{29{,}1} \approx 2{,}7.$$

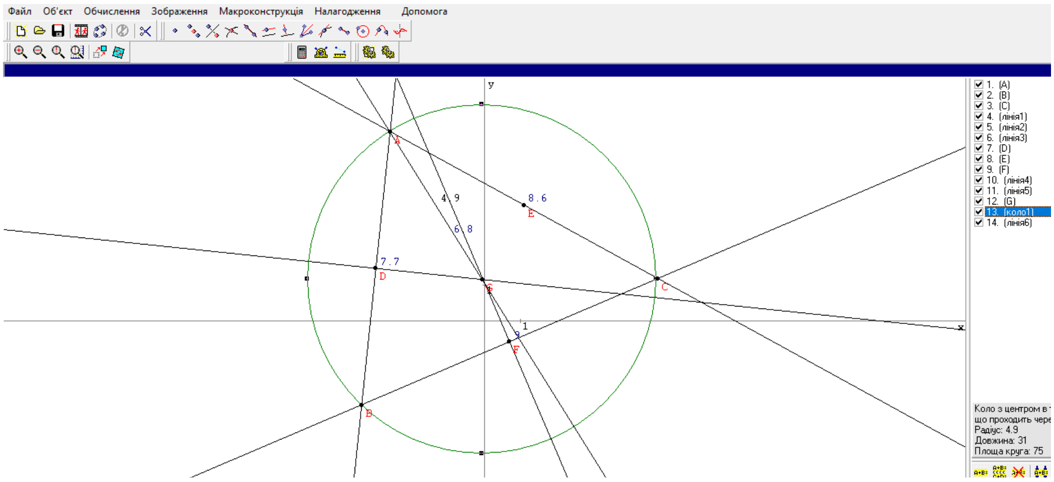
З а д а ч а 2. Побудувати трикутник і описати навколо нього коло. Виміряти радіус і експериментально перевірити чи справедлива формула $R = \frac{abc}{4S}$.

Р о з в ’ я з а н н я. Будуємо довільний трикутник. Ми вже знаємо, що центр описаного кола знаходиться на перетині серединних перпендикулярів. Нам достатньо побудувати лише два серединних перпендикуляри (мал. 3.2.7).

Будуємо коло, та проводимо радіус. Знаходимо довжини сторін трикутника, а також радіус даного кола (мал. 3.2.8).



Мал. 3.2.7



Мал. 3.2.8

Для того, щоб знайти довжину радіуса за формулою $R = \frac{abc}{4S}$, знайдемо площу трикутника:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6{,}8 = 30{,}6.$$

Тоді:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{7{,}7 \cdot 9 \cdot 8{,}6}{4 \cdot 30{,}6} = \frac{595{,}98}{122{,}4} \approx 4{,}9.$$

Як бачимо, експериментально радіуси рівні.

Інші задачі з покроковим розв’язанням див. додаток А.

3.3 Організація, проведення та результати педагогічного експерименту

Експеримент – метод педагогічних досліджень, під час якого відбувається активний вплив на педагогічні явища шляхом створення нових умов, що відповідають меті дослідження.

Педагогічний експеримент є певним комплексом методів дослідження, який забезпечує науково–об'єктивну та доказову перевірку правильності обґрунтованої на початку дослідження гіпотези. Він дозволяє глибше, ніж інші методи, перевірити ефективність тих чи інших нововведень у навчанні та вихованні, порівняти значення різних факторів у структурі педагогічного процесу й обрати найкращі їх поєднання для відповідної ситуації, виявити належні умови реалізації певних педагогічних завдань. Експеримент дає можливість відкриті усталені, повторюванні, істотні зв'язки між явищами, тобто вивчити закономірності, характерні для педагогічного процесу.

Основна мета експерименту – перевірка теоретичних положень та всебічне вивчення теми дослідження засобами ІКТ.

Суть експерименту полягає в тому, що він досліджуване явище ставить в певні умови, створює планомірно організаційні ситуації, виявляє факти, на основі яких встановлюється залежність між експериментальними діями та їх об'єктивними результатами [1].

Навчально–педагогічні заклади щорічно готують молодих спеціалістів–вчителів. Протягом кількох років вони опановують методику викладання того чи іншого предмету, при чому вагоме місце займає застосування засвоєних знань вже на практиці. Тут майбутні вчителі при проведенні уроків пізнають свої можливості. Під час проведення педагогічної практики вони, готуючись до проведення уроків, підбирають необхідний матеріал (газети, журнали, підручники, методичну літературу тощо) консультуючись з вчителем та методистом [6].

Предметом педагогічного експерименту було вивчення ефективності використання нових інформаційних технологій при розв'язуванні задач з теми «Трикутники».

Педагогічний експеримент проводився в Рівненському навчально-виховному комплексі «Колегіум» Рівненської міської ради. Для експерименту був обраний 9 клас з академічним рівнем вивчення математики. Для учнів експериментального класу було проведено ряд занять з використанням програми GRAN–2D. Задуми та ідеї, які потрібно було відобразити під час занять були обговорені з вчителями математики та методистами.

Завданнями експерименту, з використанням НІТ, були наступні пункти:

1. узагальнення і систематизація знань з теми дослідження;
2. формування інформаційно–цифрової компетентності;
3. активізація дослідницьких вмінь;
4. розвиток пізнавальної активності школярів;
5. залучення всіх учнів до розв'язування задач.

Дослідно–експериментальна робота щодо перевірки ефективності даного дослідження проводилась у три етапи.

Мета першого етапу – полягала у визначені рівня вмінь учнів розв'язувати задачі з курсу геометрії, а також у виявлені характеру залежності цього рівня від ступеню сформованості у школярів активної навчально–пізнавальної діяльності. На першому етапі визначались конкретні задачі дослідження та розроблявся план роботи. Особлива увага приділялася розгляду літератури, аналізу психолого-педагогічних та методичних праць. На цьому етапі проводились дискусії з вчителями та методистами, щодо методів навчання розв'язування задач з теми «Трикутники».

На другому етапі проводився пошуковий експеримент метою якого було поліпшення вмінь та навиків розв'язувати задачі з теми «Трикутники», використовуючи НІТ. У ході цього етапу здійснювалась цілеспрямована робота на активізацію пізнавальної діяльності та дослідницьких вмінь.

На цьому етапі експериментальної роботи уточнювалися та виявлялися можливості використання НІТ; визначалася технічна база, організаційні форми і методи навчання; розроблялися методичні рекомендації щодо використання; розроблялися методичні рекомендації щодо використання НІТ при розв'язуванні задач з теми «Трикутники»; можливості підвищення інтенсивності самостійної роботи; розробка більш ефективної методики контролю та управління навчально–пізнавальною діяльністю школярів з боку вчителя.

Для третього етапу експерименту – формуючого, характерним було те, що остаточно формувалися окремі компоненти комп'ютерно–орієнтованої методичної системи навчання геометрії та перевірялася гіпотеза щодо сприяння інтелектуального розвитку учнів, підвищення їх інтересу до математики як навчального предмета, розвиток дослідницьких умінь і загального рівня математичної підготовки при розв'язуванні задач з теми «Трикутники» з використанням НІТ.

На третьому етапі, за допомогою анкет (див. Додаток Б), здійснювалось опитування, метою якого було виявити вплив використання програмного засобу GRAN–2D на розвиток пізнавального інтересу учнів та вміння розв'язувати задачі.

Таким чином, анкетування дало змогу зробити наступні висновки. Розв'язування задач з теми «Трикутники», а саме з використанням програмного засобу GRAN–2D, викликало інтерес та захоплення в учнів до процесу розв'язування таких задач. Разом з тим більшість учнів, які навіть мали середній рівень знань, впорались із завданнями.

ВИСНОВКИ

В даній роботі я розглядала найпростішу прямолінійну геометричну фігуру – трикутник. Ця фігура займає досить важливе місце в шкільному курсі математики, оскільки на притаманних трикутнику властивостях базується подальше вивчення курсу геометрії. Зокрема, геометрія плоских прямолінійних фігур – многокутників, базується на застосуванні різноманітних властивостей трикутників подібно до того, як весь попередній матеріал (пряма, лінія і відрізки, кути) широко використовується при вивченні трикутників. Отже, тема, присвячена вивченню трикутників, займає особливо важливе місце в шкільному курсі геометрії і в загальному розвитку учнів.

Все це зумовило вибір теми дослідження «Методика вивчення трикутників в курсі математики 5–9 класів».

Метою даної роботи був розгляд особливостей методики вивчення теми «Трикутники» в курсі математики 5–9 класів. У зв'язку з чим були виконані наступні завдання: були розглянуті різні підходи до вивчення трикутника, його основних ознак і доведення основних теорем та проведений аналіз навчальної програми. Крім того, були розглянуті особливості вивчення теми в діючих підручниках різних класів. Також були розглянуті задачі та їх розв’язання, які можна використовувати на уроці при вивченні даної теми.

На початку курсу геометрії в 7 класі ґрунтовно вивчається трикутник як одна з основних фігур курсу планіметрії, властивості якого часто використовуються при вивченні многокутників та інших плоских фігур.

Спочатку вивчаються ознаки рівності трикутників, які разом з ознаками паралельності відрізків прямих є основним аргументом під час доведення теорем і розв’язування задач. Далі вивчення трикутників триває протягом усього курсу планіметрії (у 8 класі – теорема Піфагора і розв’язування прямокутних трикутників, в 9 класі – ознаки подібності трикутників, розв’язування трикутників, формула площі трикутника).

Таким чином, в даній роботі були розглянуті основні, загальні моменти вивчення трикутників у шкільному курсі геометрії. У наслідок чого подальші дослідження можуть проходити в напрямку більш детального вивчення окремих розділів даної теми, а також пропедевтичного введення трикутників у курсі математики молодшої школи.

Підвищення ефективності навчання на уроках і самоосвіта пов'язані з використанням інформаційних технологій у навчальному процесі. У роботі розглядалася методика застосування інформаційних технологій у навчальному, зокрема програми GRAN–2D.

Досвід показує, що використання інформаційних технологій на уроці здатне перетворити навчальний процес, зробивши його більш ефективним і привабливим для учнів. Навчання з використанням інформаційних технологій стає для дитини творчим пошуком, від якого можна отримати задоволення і завдяки якому можна самоствердитися.

Комп'ютерне навчання дозволяє активізувати пізнавальну діяльність учнів, диференціювати завдання з урахуванням індивідуальних можливостей, вибирати оптимальний темп навчання, підвищувати оперативність, об'єктивність контролю і оцінки результатів навчання, розвивати навички самоосвіти, формувати інформаційно–комунікаційну компетентність.

Результатами впровадження інформаційних технологій у навчальний процес є:

- Розширення можливостей учителя підготувати і провести урок на професійному рівні.
- Активізація пізнавальної діяльності учнів.
- Підвищення мотивації учнів до навчання і компетентного вибору професійної діяльності.
- Розвиток навичок оціночної (само оціночної) діяльності.
- Оволодіння учнями ключовими компетентностями.
- Сформованість науково–дослідницьких навичок.

- Активна участь учнів та учителів в проектній діяльності та творчих конкурсах.

Використання сучасних освітніх технологій відкриває нові можливості для реалізації потреб особистості в розвитку творчого потенціалу, сприяє формуванню ключових компетентностей.

Таким чином, з усього вище написаного можна зробити висновок: в сучасний навчальний процес інтенсивно впроваджуються нові методи навчання, які побудовані на принципі саморозвитку, активності особистості.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз. – Київ: Вища школа, 1989. – 367 с.
2. Бурда М. І. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – Київ: Видавничий дім "Освіта", 2015. – 208 с.
3. Бурда М. І. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – Київ: Оріон, 2016. – 224 с.
4. Боровик В. Н. Гармонія і естетика трикутника. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / В. Н. Боровик, І. В. Зайченко, Л. М. Кобко. – Київ: Освіта України, 2007. – 180 с.
5. Власенко О. Математична теорема і методика її викладання / О. Власенко. – К. : Рад. шк., 1969.
6. Жалдак М. І. Математика з комп’ютером. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К. : РННЦ “ДНІТ”. – 2004. – 255 с.
7. Збірник задач з математики для вступників до вищих навчальних закладів / за ред. М. І. Сканаві. – К. : Арій, 2011. – 608 с.
8. Збірник задач з математики з рішеннями / Ю. Л. Геворкян та ін. – Харків : Прапор, 1999. – 448 с.
9. Збірник конкурсних задач з математики // Посібник для вступників до вузів / Горгеладзе Ш. и др. – К. : Вища школа, 1973. – 324 с.
10. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2017. – 240 с.
11. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2015. – 184 с.
12. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2016. – 216 с.
13. Істер О. С. Математика 5 кл.: підручник для закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер. – Київ: Генеза, 2018. – 288 с.

14. Куланин Е. Федин С. 5000 конкурсних задач по математике / Е. Куланин, С. Федин. – М. : АСТ, 1999. – 720 с.

15. Кушнир И. Шедевры школьной математики в двух книгах / И. Кушнир. – К. : Астарта, 1995.

16. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2015. – 224 с.

17. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2017. – 240 с.

18. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2016. – 208 с.

19. Мерзляк А. Г. Геометрія: навчальний посібник для 7 класу з поглибл. вивч. математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2015. – 192 с.

20. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2016. – 224 с.

21. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2017. – 304 с.

22. Мерзляк А. Г. Математика 5 кл.: підруч. для закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2018. – 272 с.

23. Методика навчання математики [Електронний ресурс] / Режим доступу до ресурсу: http://ukped.com/matematyka/124-.html (дата звернення 05.12.2018) – Назва з екрана.

24. Навчальні програми для загальноосвітніх навчальних закладів України + опис ключових змін. // Видавничий дім "Освіта". – 2017. – С. 56.

25. Навчальні програми 5-9 класів [Електронний ресурс] / Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas (дата звернення 2.12.2018) – Назва з екрана.

26. Олімпіадні задачі: розв'язування задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики - 2014 / [О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, В. С. Сьомкін та ін.]. // навчальний посібник: ДДПУ. Слов’янськ, 2015. – С. 64.

27. Олімпіадні задачі: розв'язування задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики - 2010 / [О. А. Кадубовський, В. М. Кадубовська, В. С. Сьомкін та ін.]. // навчальний посібник. Слов’янськ, 2015. – С. 80.

28. Олімпіадні задачі: розв'язування задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики - 2016 / [О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, О. В. Чуйко та ін.]. // навчальний посібник: ДДПУ. Слов’янськ, 2017. – С. 100.

29. Практикум з розв'язання задач з математики / Михайловський В. та ін. – К. : Вища школа, 1978. – 478 с.

30. Практикум по решению математических задач. Геометрия / В. А. Гусев и др. – М. : Просвещение, 1985. – 223 с.

31. Роганін О. М. Математика за програмою основної і старшої школи + профільний рівень / О. М. Роганін, О. І. Каплун. – Харків: Видавничий дім "Весна", 2014. – 432 с. – ("Практичний довідник").

32. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – Київ: Вища школа, 2006. – 582 с.

33. Титаренко О. М. Форсований курс шкільної математики старшокласнику та абітурієнту / О. М. Титаренко. – Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2008. – 368 с.

34. Титаренко А. М. Форсированный курс школьной математики [Учебное пособие] / А. М. Титаренко. – Харьков : Каравелла. – 1996. – 384 с.

35. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики. Навчальний посібник / Р. П. Ушаков. – К. : Техніка, 1999. – 504 с.

36. Ципкін А. Т. Справочник по методам решения задач по математике / А. Т. Ципкін. – М. : Наука, 1989. – 576 с.

37. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометри // Стереометрия / И. Ф. Шарыгин. – М. : Наука, 1984. – 160 с.

38. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування / В. А. Ясінський. – Вінниця : ВДПУ, 1998. – 266 с.

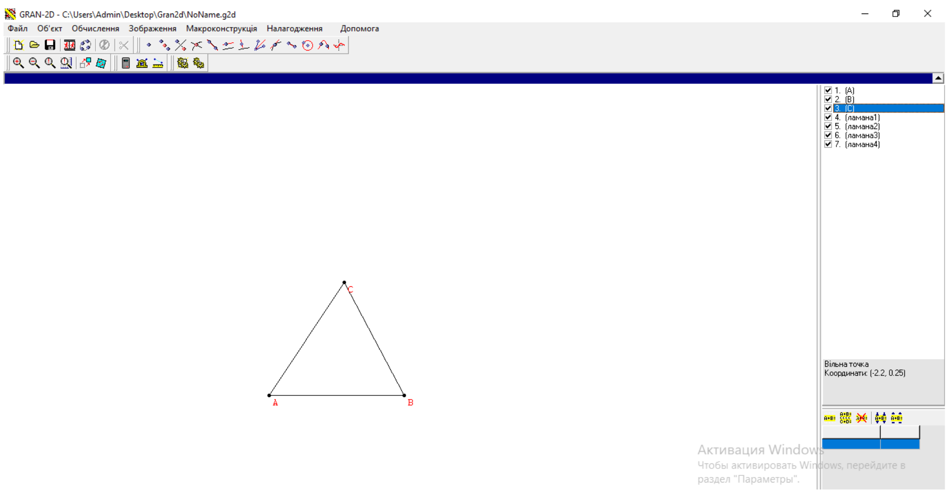
ДОДАТКИ

Додаток А

З а д а ч а 1. Пересвідчитися за допомогою геометричних побудов, що сума кутів трикутника дорівнює 180^o.

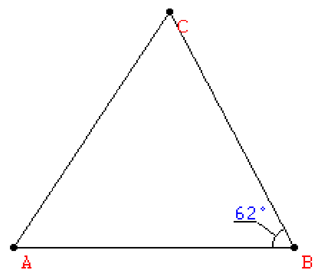
Р о з в ‘ я з а н н я.

1. Змоделюємо довільний трикутник. (Створити три точки, що будуть вершинами трикутника; сполучити вершини ламаною (послуга Об'єкт/ Створити з екрану / Ламана)).



2. Обчислимо кути трикутника. (Звернувшись до послуги Обчислення / Кут за запитом програми необхідно послідовно вказати на зображення точок, наприклад кут 1, кут 2, кут 3, після чого на екрані виводитиметься обчислене значення кутів).

3. Підрахувавши усно або письмово суму кутів, переконуємося, що сума кутів трикутника дорівнює 180^o.

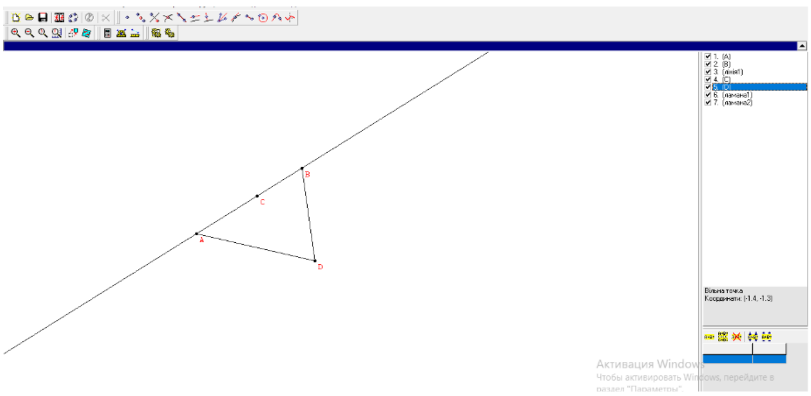


Не важко переконатися, що при зміні положення об'єктів точка 1, точка 2, точка 3 значення кутів може змінитися, але їх сума залишиться сталою (180^o).

З а д а ч а 2. Пересвідчитися за допомогою геометричних побудов, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

Р о з в ‘ я з а н н я.

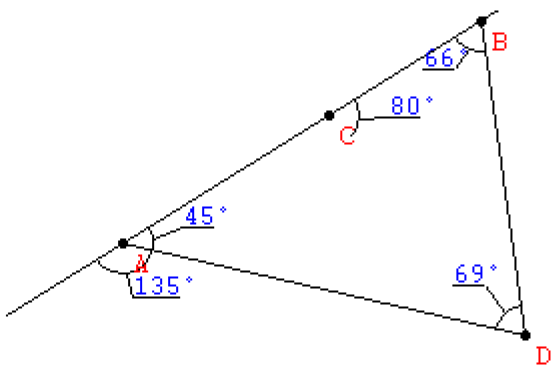
Змоделюємо необхідну модель. (Створити три точки, що лежать на одній прямій. Для цього створюємо промінь (на панелі інструментів вибираємо створення променя і задаємо дві точки *A* і *B*), потім створюємо на цьому промені третю точку *C* (на панелі інструментів вибираємо кнопку створити точку) і прикріплюємо її до об'єкту «промінь 1»; поза променем створюємо четверту точку *D* і сполучаємо її з точкам *A* і *B* (за допомогою послуги Об'єкт / Створити / Пряма)). В результаті отримаємо трикутник *ABD* з продовженою стороною *AB*.



З а д а ч а 3. Обчислити внутрішні кути трикутника і зовнішній кут.

Р о з в ‘ я з а н н я. (обчислення проводимо аналогічно до попереднього завдання).

Додавши кут *BAD* і кут *ADB*, переконаємося, що сума цих кутів дорівнює зовнішньому куту *DAC*.



Також за даним малюнком можна переконатися, що зовнішній кут трикутника більший від будь-якого кута не суміжного з ним.

Додаток Б

АНКЕТА

Шановні учні, Ви приймаєте участь в опитуванні, метою якого є дослідження переваг і недоліків використання НІТ (ППЗ GRAN–2D) при вивченні курсу геометрії.

Просимо Вас відповісти на всі запитання анкети. Результати опитування будуть використані для аналізу перспектив розробки та впровадження методики вивчення курсу алгебри та початків аналізу інтерактивних технологій навчання.

____

П.І.П опитуваного

1. Чи відчуваєте труднощі при розв’язуванні задач з трикутниками? І Які?
2. Чи сподобалися Вам уроки з використанням програми GRAN–2D? Якщо «так», то чому?
3. Чи спростилися ваші дії в процесі побудови і розв’язування, використовуючи програму GRAN–2D? Якщо «так», то в чому?

4. Чи переконалися в істинності формул, теорем в процесі використання НІТ?
5. Чи відчуваєте впевненість у розв’язуванні задач з використанням ППЗ GRAN–2D?
6. Чи викликали труднощі при роботі з ППЗ GRAN–2D? Якщо «так», то в чому?
7. Які нові форми організації Ви відкрили для себе при розв’язуванні задач?
8. Чи доцільно, на Вашу думку, були використанні НІТ?