Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

бакалавр

на тему

Методика вивчення показникової та логарифмічної функцій в курсі старшої школи

Виконала: студентка 4 курсу
групи МІ-42
напряму підготовки 6.040201 «Математика»
Коробка Анна Вікторівна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри
математики з методикою викладання
Генсіцька–Антонюк Н. О.

Рецензент:
канд. пед. наук, доц. кафедри
природничо - математичної освіти
Харченко Н. П.

Рівне – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

До початку XVII ст. у математиці уникали вживання дробових та від'ємних показників степенів. Лише в кінці XVII ст. у зв'язку з ускладненням математичних задач виникла необхідність поширити область визначення показника степеня на всі дійсні числа. Узагальнення поняття степеня , де n - будь-яке дійсне число, дало змогу розглянути показникову функцію на множині дійсних чисел і степеневу функцію на множині додатних чисел. Питання, пов'язане з показниковою функцією, розробляв Леонард Ейлер. У двох розділах своєї праці «Вступ до аналізу» він описав «показникові і логарифмічні кількості». В ній, зокрема зазначено, що показникові кількості можуть бути різноманітними залежно від того, «чи буде змінною кількістю один лише показник степеня, чи, крім того, ще і кількість, яку підносять до степеня».

Винайдення логарифмів значною мірою прискорилось потребами удосконалення обчислень. Винайшли логарифми і майже одночасно почали їх застосовувати шотландський математик Джон Непер (1550-1617) і швейцарський математик, астроном і механік Йост Бюрги (1552-1632). Проте перший крок до спрощення обчислень зробив німецький математик Міхаель Штіфель (1487-1567), у якого поняття логарифма з'явилося в результаті зіставлення геометричної і арифметичної прогресій. Ця ідея бере свій початок у працях Архімеда (бл. 287-212 до н.е.).

Таблиці логарифмів дуже спрощували обчислення, дії другого ступеня (множення, ділення) звелися до дій першого ступення (додавання, віднімання) над відповідними логарифмами. При цьому довелося виконувати дії із значно меншими числами. Але у зв'язку з впровадженням сучасних ЕОМ обчислення за допомогою логарифмів втаратило своє значення.

Актуальність дослідження. Вивчення математики у 2019/2020 навчальному році має забезпечувати реалізацію «Національної доктрини розвитку освіти» та «Національної стратегії розвитку освіти в Україні на 2012–2021 роки». В сучасних умовах найважливішим для держави є виховання не лише людини інноваційного типу мислення та культури, а, в першу чергу, формування патріотичної особистості учня та її нових життєвих орієнтирів, в тому числі і засобами математики [1].

Матеріал пов'язаний із функціями, становить значну частину шкільного курсу математики. Одним із складних розділів що вивчаються у шкільній програмі, є показникова та логарифмічна функції. У процесі вивчення цієї теми учні систематизують, узагальнюють та поглиблюють знання про степені і корені та їх властивості, засвоюють поняття даних функцій, їх властивості та графік, навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів показникової та логарифмічної функцій.

Розв'язуванню задач,а точніше рівнянь або нерівностей показникових та логарифмічних, приділяється багато уваги, як в шкільному курсі математики так і на зовнішньому незалежному оцінюванні а також на вступних екзаменах до ВУЗів та інших навчальних закладах.

Саме ці міркування обумовили вибір теми та актуальність дипломної роботи: "Методика вивчення показникової та логарифмічної функції в курсі старшої школи".

Об'єкт дослідження – процес навчання алгебри і початків аналізу.

Предмет дослідження – показникова та логарифмічна функція.

Мета дослідження – систематизувати відомості про показникову та логарифмічну функцію в шкільному курсі алгебри старшої школи та дослідити їх застосування в інших галузях знань.

Для досягнення поставленої мети були визначені такі **задачі дослідження:**

1. З'ясувати місце показникової та логарифмічної функцій в діючій програмі з математики, конкретизувати вимоги до знань, умінь і навичок учнів.

2. Проаналізувати програму, сучасні діючі підручники з алгебри.

3. Систематизувати відомості про розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь й нерівностей в шкільному курсі алгебри старшої школи.

4. Подати приклади та методику розв’язування показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей різної складності.
5. Дослідити використання показникової та логарифмічної функції у природничих науках та технологіях.
6. Здійснити анкетування задля дослідження ефективності використання міжпредметних зв’язків при вивченні теми “показникова та логарифмічна функції”.

Для реалізації визначених задач були використані такі **методи дослідження**:

– *загальнонаукові (аналіз, синтез, узагальнення),* що дали змогу узагальнити та систематизувати погляди вітчизняних і зарубіжних педагогів на проблему дослідження;

– *пошуково-бібліографічний* (вивчення джерел, матеріалів періодичних видань з проблеми дослідження), що дав підстави для наукових узагальнень;

– *метод термінологічного аналізу* уможливив за допомогою виявлення та уточнення значень і смислів основоположних понять актуалізувати категорійно-поняттєвий апарат дослідження;

– *історіографічний* допоміг критично проаналізувати опубліковану з порушеної проблеми педагогічну літературу;

– *педагогічний експеримент* (анкетування).

Джерельна база дослідження охоплює *п’ять* основних груп:

– *джерела нормативно-правового характеру*;

– *періодичні видання*, на сторінках яких представлена ґенеза досліджуваної проблеми;

– *навчальні плани, навчальні програми, шкільні підручники та методична література для вчителів* з математичних дисциплін;

– *інтерпретаційні джерела* – монографії, брошури, статті, присвячені досліджуваній темі або дотичні до неї;

– *довідкова література, сучасні підручники й посібники* для вищої школи.

Теоретичне значення дослідження полягає в тому, що:

1) систематизовані теоретико-методичні основи вивчення досліджуваної теми;

2) запропоновані методи розв’язування показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей;

3) досліджено використання показникової та логарифмічної функцій в природничих науках та технологіях.

Практичне значення роботи полягає в тому, що розроблений зміст і методика може бути використана вчителями шкіл при організації навчання математики на уроках та факультативних заняттях задля формування математичної компетентності та активізації їх пізнавальної діяльності.

Результати дослідження ***упроваджено*** в навчально-виховний процес Рівненського навчально-виховного комплексу «Колегіум» Рівненської міської ради**.**

Структура і обсяг. Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (32 найменувань) та додатків. Обсяг даної роботи складає 88 сторінок.

РОЗДІЛ І. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ПОКАЗНИКОВОЇ ТА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЇ В КУРСІ СТАРШОЇ ШКОЛИ

У процесі вивчення цього розділу учні систематизують, узагальнюють і поглиблюють знання про степені і корені та їх властивості, засвоюють поняття показникової і логарифмічної функцій, їх властивості та графік, навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів показникової та логарифмічної функціями, розв'язувати показникові і логарифмічні рівняння й нерівності та їх системи [3].

На початку теми розглядають узагальнення поняття степеня, вводять поняття про степінь з ірраціональним показником, розв'язують ірраціональні рівняння та їх системи. У зв'язку з вивченням показникової та логарифмічної функцій передбачено узагальнення основних показникових тотожностей $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$ на будь-який дійсний показник, розгляд логарифмічних тотожностей, розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей. Ця тема охоплює похідні показникової, логарифмічної та степеневої функцій, поняття про диференціальне рівняння, зокрема диференціальні рівняння показникового зростання та гармонічних коливань [2].

1.1 Місце логарифмічної та показникової функції в курсі алгебри та початків аналізу 11 класу

У старшій школі вивчення математика здійснюється за чотирма рівнями: рівень стандарту, академічний, профільний та рівень поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма [4].

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що в майбутньому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов'язуватимуть з нею свою професійну діяльність.

Однією з головних змістовних ліній курсу «Математика» в старшій школі є функціональна лінія. Тому доцільно розпочинати вивчення курсу з теми «Функції, їх властивості та графіки».

В темах «Тригонометричні функції» і «Показникові та логарифмічні функції» вміння досліджувати функції, які сформовані в першій темі, закріплюються і застосовуються до моделювання закономірностей коливального руху, процесів зростання та вимірювання. В уявленні учнів характер фізичного процесу повинен асоціюватися із відповідною функцією, її графіком та властивостями.

На вивчення показникової та логарифмічної функції відводиться 16 годин. Цей розділ містить такі теми: властивості та графіки показникової функції, логарифми та їх властивості, властивості та графік логарифмічної функції, показникові та логарифмічні рівняння та нерівності.

Вимоги до знань та вмінь на рівні обов'язкових результатів учнів:

- розпізнає і будує графіки показникової та логарифмічної функцій;
- ілюструє властивості показникової та логарифмічної функцій за допомогою графіків;
- застосовує показникову та логарифмічну функції для опису руальних процесів;
- розв'язує найпростіші показникові та логарифмічні рівняння та нерівності.

Програма академічного рівня задає дещо ширший зміст і вищі вимоги до його засвоєння у порівнянні з рівнем стандарту. Методичні підходи до вивчення математики на академічному рівні добираються відповідно до особливостей розумової діяльності учнів і змісту навчального матеріалу[3].

Порівняно із рівнем стандарту суттєво підвищується теоретичний рівень навчання, зокрема, при вивченні всіх видів рівнянь, нерівностей та їх систем акцентується увага на основних поняттях: корінь, розв'язок, рівносильність , наслідок, можливість втрати та появи сторонніх коренів, перевірка як важлива складова процесу розв'язування.

Методика навчання характеризується інтенсивною самостійною діяльністю учнів, індивідуалізацією навчання, застосуванням проблемно-пошукових методів, таких математичних прийомів та засобів навчання, як математичне моделювання, логічне конструювання, паралельне вивчення схожих математичних об’єктів, синтетичні і комбіновані вправи тощо.

За програмою академічного рівня на вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції» відводиться 22 години. Цей розділ містить такі теми: [степінь з дійсним показником], властивості та графіки показникової функції, логарифми та їх властивості [натуральний логарифм], властивості та графік логарифмічної функції, показникові та логарифмічні рівняння і нерівності, похідні показникової та логарифмічної функцій. Частина навчального матеріалу, що подана у квадратних дужках, не є обов’язковою для вивчення і не виноситься для тематичного контролю.

Вимоги до знань та вмінь на рівні обов’язкових результатів учнів:

- формулює властивості логарифмів, показникової та логарифмічної функцій;
- будує графіки показникових та логарифмічних функцій;
- ілюструє властивості показникової та логарифмічної функцій за допомогою графіків;
- перетворює нескладні показникові та логарифмічні вирази;
- розв’язує нескладні показникові та логарифмічні рівняння та нерівності.

Програма профільного рівня передбачає вивчення предмета з орієнтацією на майбутню професію, безпосередньо пов’язану з математикою або її застосуваннями [3].

У пропонованих програмах з метою забезпечити для учнів можливість зміни рівня навчання математики в 10-11 класах, збережено ті ж самі теми та послідовність їх вивчення, що й у програмі рівня стандарту. Зміст навчального матеріалу доповнено, а перелік навчальних досягнень учнів конкретизовано та уточнено у відповідності до фізико-математичного та математичного профілів навчання.

На вивчення показникової та логарифмічної функції відводиться 40 годин. Цей розділ містить в собі такі теми: степінь з дійсним показником, показникова функція, логарифми та їх властивості, логарифмічна функції, показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами, похідні показникової та логарифмічної функцій.

Вимоги до знань та вмінь на рівні обов'язкових результатів учнів:

- формулює означення показникової та логарифмічної функції і їх властивості;
- формулює означення логарифма та властивості логарифмів;
- будує графіки показникових та логарифмічних функцій;
- перетворює вирази, які містять логарифми
- знаходить похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і застосовує їх до дослідження цих класів функцій;
- розв'язує показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами;
- застосовує показникову та логарифмічну функції до розв'язування прикладних задач.

Програма поглибленого вивчення математики розрахована на вивчення математики у 8-11 класах, та передбачає поглиблене вивчення предмету.

Зміст навчального матеріалу порівняно зі змістом загальноосвітнього курсу доповнено, а перелік навчальних досягнень учнів конкретизовано і уточнено у відповідності до вимог, що відповідають поглибленому рівню вивчення математики.

До поглибленого курсу включено кілька тем, які в загальноосвітньому курсі не вивчаються взагалі або вивчаються на рівні означень і найелементарніших понять. Ряд тем поглибленої програми звертає увагу на обґрунтування тих відомостей, які в загальноосвітньому курсі подаються як дане. Навчання в класі з поглибленим вивченням математики передбачає істотне збільшення частки самостійної пізнавальної та практичної діяльності учнів.

За програмою поглибленого рівня на вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції» відводиться 36 години. Цей розділ містить такі теми: степінь з дійсним показником, показникова функція, логарифми та їх властивості, логарифмічна функції, показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами, похідні показникової та логарифмічної функцій [нерівність Коші як наслідок нерівності Йєнсена], застосування показникової та та логарифмічної функцій у прикладних задачах [3].

Вимоги до знань та вмінь на рівні обов’язкових результатів учнів:

- формулює означення показникової та логарифмічної функції і їх властивості;
- формулює означення логарифма та властивості логарифмів;
- будує графіки показникових та логарифмічних функцій;
- перетворює вирази, які містять логарифми
- знаходить похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і застосовує їх до дослідження цих класів функцій;
- розв’язує показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами;

1.2 Методика вивчення показникової функції

Введення поняття показникової функції доцільно здійснювати за тією самою методичною схемою,за якою вивчалися всі попередні функції [7].

І. Етап мотивації: розглядаються приклади залежностей, які приводять до певного виду функцій.

ІІ. Формулювання означення функції, що впроваджується. Залежно від виду функції та підготовленості учнів означення можна ввести конкретноіндуктивним методом (за якого учні підводять до самостійного виокремлення істотних властивостей і формулювання означення) чи абстрактно-дедуктивним методом (за якого вчитель сам формулює означення і наводить приклади введеного виду функцій). На цьому етапі учні розв’язують усні вправи на підведення до поняття функції, що вивчається. Серед пропонованих функцій мають бути такі, що належать до розглядуваного виду.

III. Побудова по точках за заздалегідь заготовленою таблицею графіка функції та “читання” за ним властивостей функції.

IV. Застосування властивостей вивченої функції, зокрема, до розв’язування рівнянь, нерівностей та інших задач.

На етапі мотивації доцільно навести приклади залежностей, які виражають показниковою функцією [9].

Приклад 1. У процесі радіоактивного розпаду маса m речовини змінюється за часом t за законом $m = m_0 a^t$, де m – маса речовини *t* років пічля початку розпаду, m_0 – початкова маса речовини, a – стала для цієї речовини.

Приклад 2. Кількість мешканців міста з мільйонним населенням через *x* років за умови, що кожного року спостерігається приріст населення на 2 %, обчислюють за формулою $y = 1000000 \cdot 0{,}02^x$.

*Приклад 3***.** Температура *T* 100 г піску, нагрітого до 100°, змінюється за 0 ° залежно від часу *t* формулою $T = 100 \cdot 0{,}8^t$.

Приклад 4. У разі витікання рідини з циліндричної посудини через тонку трубку, яка розміщена в основі циліндра, висота h рівня рідини з часом t змінюється за формулою $h = h_0 a^t$, де h_0 – початковий рівень води, a – стала, що залежить від діаметра трубки.

У кожному з наведених прикладів формула задає функцію, для обчислення якої сталий множник доводиться множити на степінь сталої зі змінним показником, яка має цілком певне додатне значення. Найпростішим випадком таких залежностей є функція вигляду $y = a^x$, яку називають показниковою.

Означення. Показниковою функцією називають функцію $y = a^x$, де a - задане додатне число, що не дорівнює одиниці; *x* і *y* – змінні.

1.3 Методика вивчення логарифмічної функції

Перш ніж вводити логарифмічну функцію як функцію, обернену до показникової, доцільно розглянути означення логарифма числа b за основою a $(a > 0, a \neq 1)$ як показника степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб дістати число b, і запровадити символ $log_a b$. Слід звернути увагу учнів, що логарифмічна рівність $log_a b = x$ і показникові $a^x = b$ виражають те саме співвідношення між числами a, b і x. За ними можна знайти одне з цих трьох чисел [5].

Потрібно розв'язати кілька вправ на перехід від показникових до логарифмічних рівностей, обчислення значень виразів на зразок $5log_3 27 + 2log_2 \frac{1}{16}$, $log_2 64$, а потім навести основну логарифмічну тотожність і розв'язати кілька усних вправ на її застосування до обчислення значень виразів.

Основною до розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей, тотожних перетворень логарифмічних виразів є чотири теореми про основні властивості логарифмів і наслідки з них, а також деякі важливі логарифмічні тотожності.

Це тотожності:

$$log_a b = \frac{1}{log_a b}, log_a b = log_{a^k} b^k,$$

$$log_{a^n} b = \frac{1}{n} log_a b, log_a b = \frac{log_c b}{log_c b}.$$

Можна запропонувати учням самостійно знайти функцію, обернену до показникової функції $y = a^x$, скориставшись відомим їм алгоритмом відшукання формули функції, оберненої до даної, з яким вони могли ознайомитися раніше під час вивчення обернених тригонометричних функцій.

Учні самі доводять означення логарифмічної функції як оберненої до показникової, виконуючи три кроки.

1. Функція $y = a^x$ зростаюча за $a > 1$, спадна за $0 < a < 1$, тому вона є оберненою на всій області визначення. Врахувавши, що $x \in R$, $y \in (0; +\infty)$.

2. Розв'язанняо рівняння з двома невідомими $y = a^x$ стосовно невідомої x.

Оскільки x – показник степеня, то, за означенням логарифма, $x = log_a y = \varphi(x)$.

3. Помінявши позначення незалежної та залежної змінних. Дістанемо $y = log_a x$, де $x \in (0; +\infty), y \in R$.

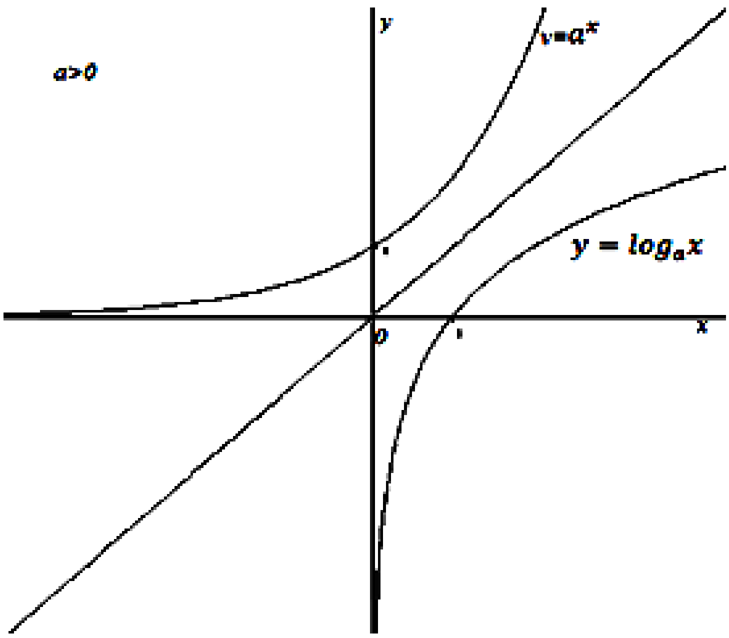


рис (1.3.1)

Означення. Функцію, обернену до показникової функції $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, називають логарифмічною і позначають $y = log_a x$.

Побудувавши графік логарифмічної функції як кривої, симетричної графіку функції $y = a^x$ відносно прямої $y = x$ (рис.1..3.1), учні спочатку "прочитують" властивості цієї функції за графіком, а потім доводять їх аналітично, використовуючи теорему про властивості взаємно обернених функцій.

У зв'язку з вивченням логарифмічної функції достатню увагу потрібно приділити засвоєнню логарифмічних тотожностей та застосуванню їх до обчислення значень виразів, тотожних перетворень логарифмічних виразів, розв'язування логарифмічних рівнянь, нерівностей та їх систем.

РОЗДІЛ ІІ. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ І ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ В КУРСІ СТАРШОЇ ШКОЛИ

2.1 Показникова функція

Показникова функція $y = e^x$ в математиці і багатьох прикладних науках трапляється досить часто. Її називають експонентою (лат. *exponens* – виставляти напоказ) [16]. (рис.2.1.1)

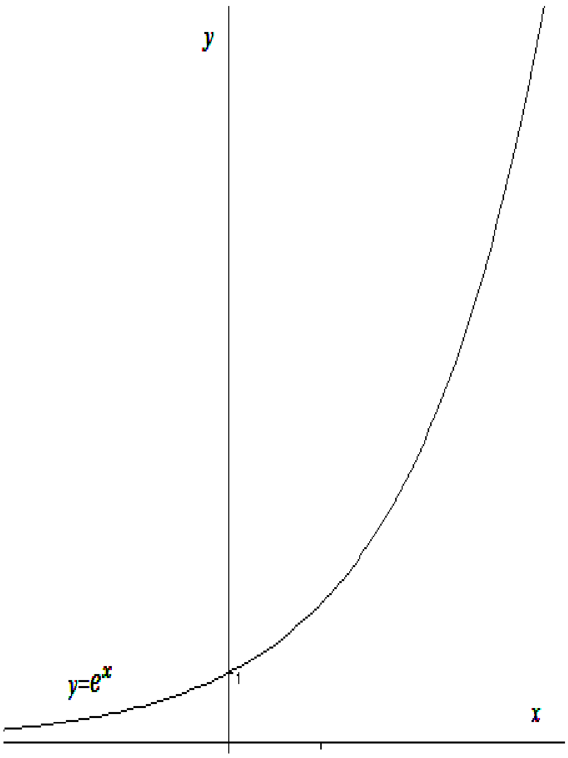


рис. 2.1.1

На багатьох мікрокалькуляторах є окрема клавіша для функції e^x. Ця функція і справді відрізняється з усіх інших функцій. За її допомогою описують закони природного зростання чи спадання.

Наприклад, процеси новоутворення та розпаду можна описати за формулою $P = P_0e^{kt}$. Тут Р – кількість новоутвореної речовини (або речовини, що розпалася) в момент часу; P_0 – початкова кількість речовини; k – стала, значення якої визначається для конкретної ситуації.

2.1.1 Степінь з довільним дійсним показником. Властивості показникової функції

Вираз a^αназивають степенем. Тут a – основа степеня, α – його показник. Показник степеня може бути будь-яким дійсним числом [7].

Наприклад:

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ $\qquad (a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a_{n-\text{разів}}}, a \in R, n \in N)$;

$4^1 = 4;\ 4^0 = 1$ $\qquad (a^1 = a;\ a^0 = 1, a \neq 0)$;

$4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ $\qquad (\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in N)$;

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ $\qquad (a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, n \in N, m \in Z, a > 0).$

Якщо показник степеня – число ірраціональне, значення степеня можна обчислювати, користуючись калькулятором або комп'ютером.

Якими б не були дійсні числа $a > 0$ і α, степінь a^{α} завжди має зміст, тобто дорівнює деякому дійсному числу. Для таких степенів справджуються властивості:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;
3) $(a^r)^s = a^{rs}$;
4) $(ab)^r = a^r b^r$;
5) $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Вирази з будь-якими дійсними показниками степенів і додатними основами можна перетворювати так само, як з раціональними показниками.

Зі степенями тісно пов'язані показникові функції.

Функція називається показниковою, якщо її можна задати формулою $y = a^x$, *де a – довільне додатне число, відмінне від 1* (рис. 2.1.1.1) або $y = a^x$,*де a – довільне дотне число, більше 0, але менше 1* (рис.2.1.1.2).

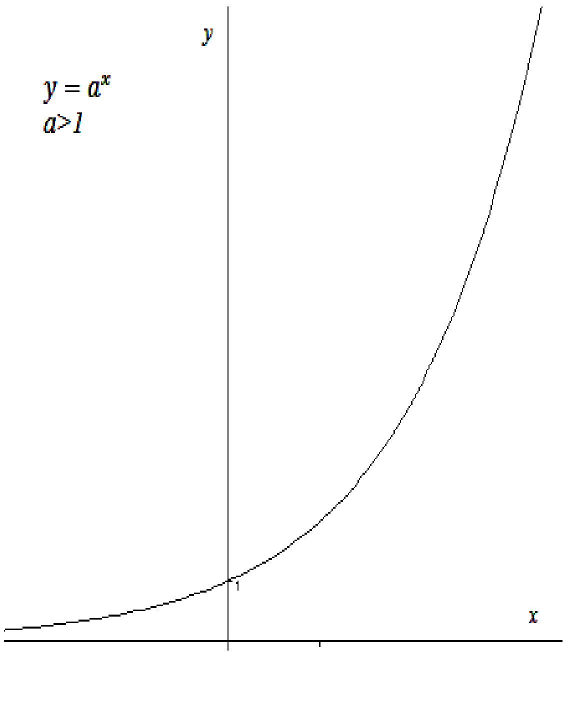


рис. 2.1.1.1

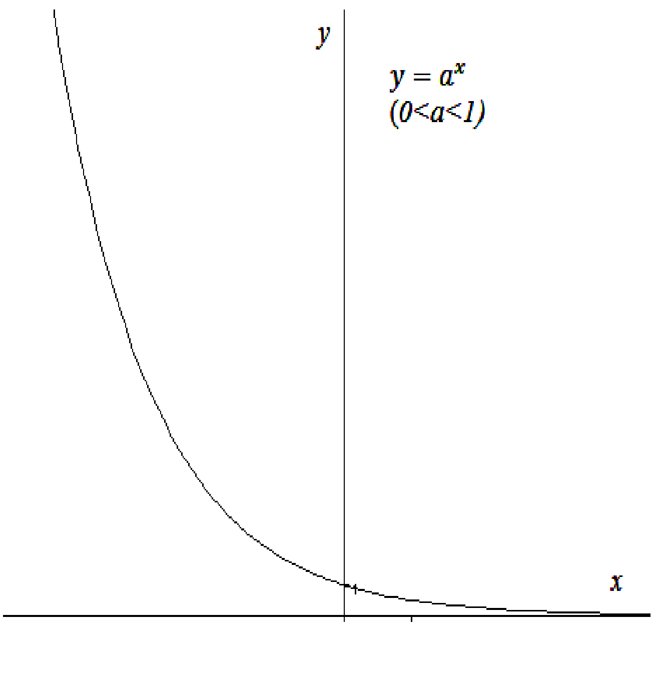


рис. 2.1.1.2

Приклади показникових функцій:

$$y = 2^x, \ \ y = 0{,}3^x, \ y = \left(\sqrt{2}\right)^x$$

Властивості показникової функції учні спочатку “читають” за графіком, а потім учитель доводить їх аналітично.

Властивість 1. Область визначення функції $y = a^x$є множина всіх дійсних чисел, оскільки вираз a^x за $a > 0$ визначений для будь-якого x.

Цю властивість можна розглянути на прикладі функції $y = 2^x$:

x	-2	$-1\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$y = 2^x$	0,25	0,30	0,35	0,42	0,50	0,59	0,71	0,84	1,00	1,19

Властивість 2. Показникова функція набуває лише додатних значень.

Доведення. Справді, $a > 0$ $x > 0$ вираз a^x додатний, а за $x < 0$ $a^x = \frac{1}{a^{-x}} > 0$ оскільки $-x > 0$ І $a^{-x} > 0$.

Властивість 3. Якщо $a > 1$ то за $x > 0$ $a^x > 1$, за $x < 0$ $0 < a^x < 1$, то навпаки, за $x > 0$ $0 < a^x < 1$, а за $x < 0$ $a^x > 1$.

Доведення. Нехай $a > 1$. Розглянемо значення показника x із різних числових множин.

1. Нехай x – додатне раціональне число, тобто $x = \frac{m}{n}$, де m і n – натуральні числа. Тоді $y = a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, оскільки за $a > 1$ і $a^m > 1$, І $\sqrt[n]{a^m} > 1$.
2. Нехай x – додатне ірраціональне число. Тоді існують додатні раціональні числа x' і x'', які є десятковим наближенням x, тобто $x' < x < x''$

   Вище було доведено, що $a^{\frac{m}{n}} > 1$ а при тому і $a^x > 1$.
3. Якщо $x < 0$ – будь-яке дійсне число, то $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$, де $-x > 0$. Тоді $a^{-x} > 1$, тому $a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1$.

Випадок, коли $0 < a < 1$, зводиться до попередніх. Учням можна запропонувати як домашнє завдання самостійно виконати доведення для цих значень a .

Властивість 4. Якщо $x = 0$, то за будь-якого $a > 0$ $y = a^x = 1$, що випливає з означення степеня з нульовим показником.

Властивість 5. Показникова функція за $a > 1$ зростаюча, а за $0 < a < 1$ – спадна.

Доведення. Нехай $a > 1$ і $x_2 > x_1$. Тоді і $x_2 = x_1 + d$, де $d > 0$.

Складемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1 = a^{x_2} - a^{x_1} = (a^{x_1+d} - a^{x_1}) = a^{x_1}(a^d - 1) > 0$, оскільки за другою властивістю показникової функції $a^{x_1} > 0$, а за третьою властивістю $a^d > 1$. Отже $a^{x_2} > a^{x_1}$.

Аналогічно доводиться властивість спадання показникової функції. На цьому етапі ґрунтується розв’язування показникових рівнянь і нерівностей.

Властивість 6. Якщо $a > 1$, то за $x \to +\infty$ значення $y \to +\infty$, а за $x \to -\infty$ значення $y \to 0$, залишаючись додатним. Враховуючи монотонність функції, можна стверджувати, що в цьому випадку функція монотонно зростає від 0 до +∞.

Якщо $0 < a < 1$, то за x $\to +\infty$ значення $y \to 0$, залишаючись додатним, а за $x \to -\infty$ значення $x \to +\infty$. Враховуючи монотонність , можна стверджувати, що в цьому випадку $y = a^x$ монотонно спадає від $+\infty$ до 0.

Властивість 7. Областю значень функції є множина всіх додатних чисел.

Незважаючи на те, що за довеленою властивістю 2 функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень, залишається нез’ясованим питання, чи не змінюється вона стрибкоподібно. Можна довести, що показникова функція є неперервною, але це не доводиться в курсі математичного аналізу вищої школи.

Твердження, які випливають із монотонності показникової функції:

1. Якщо $a > 0$ і $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$;
2. Якщо $a > 1$ і $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 > x_2$;
3. Якщо $0 < a < 1$ 0 і $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 < x_2$;

Приклад 1.

Спростіть вираз $(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}) : 5^{\sqrt{2}}$.

Розв'язання.

$(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}) : 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}}(1 - 5^{-1}) : 5^{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{5} = 0{,}8.$

Приклад 2.

Спростіть вираз $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$

Розв'язання.

$$3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}+1} : 3^{2\sqrt{2}} = 3^{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}} = 3^3 = 27$$

Приклад 3.

Функція $f(x) = 0{,}5^x$ задана на проміжку [-2;3]. Знайдіть її найменше та найбільше значення.

Розв'язання.

Оскільки 0,5 < 1, то дана функція спадна. Тому її найменшим і найбільшим значеннями будуть:

$f(3) = 0{,}5^3 = 0{,}125;$ $f(-2) = 0{,}5^{-2} = 4.$

Відповідь. 0,125 і 4.

Приклад 4.

Порівняйте з одиницею число:

а) $0{,}5^{1,5}$;

б) $(\sqrt{5})^{-0,2}$;

Розв'язання.

а) Подамо число 1 у вигляді степеня з основою 0,5. Маємо $1 = 0{,}5^0$. Оскільки функція $y = 0{,}5^x$ – спадна і 1,5 > 0, то $0{,}5^{1,5} < 0{,}5^0$, звідки $0{,}5^{1,5} < 1$.

б) Оскільки $1 = (\sqrt{5})^0; y = (\sqrt{5})^x$ – зростаюча функція і $-0{,}2 < 0$, то $(\sqrt{5})^{-0,2} < (\sqrt{5})^0$, звідки $(\sqrt{5})^{-0,2} < 1$.

2.1.2 Показникові рівняння

Рівняння називається показниковим, якщо його змінні входять лише до показників степенів при сталих основах [8].

Приклади:

$$9^x = \sqrt{3};\ 4^x + 2^{x+1} = 3;\ \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = 2.$$

Існує багато видів показникових рівнянь і різних підходів до їх розв'язування. Основні з них [21]:

I. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами;

II. Метод уведення нової змінної;

III. Метод розкладання рівняння на множники;

IV. Штучні методи розв'зання показникох рівнянь.

Розглянемо на конкретних прикладах кожен метод детальніше.

I. *Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами* стосується двочленних рівнянь, які можна звести до виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$.

Такі рівняння розв'язуються на основі монотонності показникової функції.

Теорема. Якщо $a > 0, a \neq 1$, *то рівняння* $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ *і* $f(x) = \varphi(x)$ – *рівносильні.*

Використання цієї теореми називають логарифмування рівняння

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$$

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння: а) $4^{x-5} = 8^{2x}$; б) $3^x = 7^x$ в) $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$.

Розв'язання.

а) Запишемо праву та ліву частини рівняння як степені числа 2: $(2^2)^{x-5} = (2^3)^{2x}$ або $2^{2x-10} = 2^{6x}$, звідки $2x - 10 = 6x,\ 4x = -10, x = -2{,}5$.

б) Оскільки $7^x > 0$, то можемо поділити обидві частини рівняння $3^x = 7^x$ на 7^x. Маємо: $\frac{3^x}{7^x} = 1$, або $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$. Запишемо число 1 у вигляді степеня. Тоді $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^0$, звідки $x = 0$.

в) Розпишемо 6^x як добуток чисел $2^x \cdot 3^x$, отримаємо

$3^{x-1} = 2^x \cdot 3^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$, звідси $3^{x-1} = 2^{x-x} \cdot 3^{x+x+1}$. Оскільки$2^{x-x} = 2^0 = 1$. То $3^{x-1} = 3^{2x+1} \cdot 1$, звідки $x - 1 = 2 \cdot x + 1, x = -2$.

Відповідь. а) -2,5; б) 0; в) -2 [21].

II. *Метод уведення нової змінної.*

Якщо показникові рівняння має вигляд $g\left(a^{f(x)}\right) = 0$, то потрібно ввести заміну: $y = a^{f(x)}$, де *y > 0*. Тоді дане рівняння зводиться до рівняння: $y_i = a^{f(x)}$, де y_i – корені рівняння *g(y) = 0*.

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння:

а) $4^x + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$;

б) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$

в) $\frac{9}{2^x - 1} - \frac{21}{2^x + 1} = 2$.

Розв'язання.

а) $(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$. Позначимо $2^x = y$. Дістанемо квадратне рівняння $y^2 + 4y - 32 = 0$, корені якого $y_1 = -8$ та $y_2 = 4$. Корінь y_1 – сторонній, бо $2^x \neq -8$. Розв'яжемо рівняння $2^x = 4$: $2^x = 2^2$, звідки $x = 2$.

б) Запишемо рівняння у вигляді $3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 75$, або

$3 \cdot 3^x - \frac{2}{9} \cdot 3^x = 75$. Позначимо $3^x = y$; дістанемо рівняння $3y - \frac{2}{9}y = 75$. Розв'яжемо його: $27y - 2y = 675, 25y = 675, y = 27$. Маємо: $3^x = 27$,

$3^x = 3^3$, звідки $x = 3$.

в) Зведемо ліву частину рівняння $\frac{9}{2^x-1}-\frac{21}{2^x+1}=2$ до спільного знаменника. Отримаємо $\frac{9(2^x+1)-21(2^x-1)}{(2^x-1)(2^x+1)}=2$. Розкриємо дужки та зведемо спільні доданки.

$$\frac{9\cdot 2^x+9-21\cdot 2^x+21}{2^{2x}-1}=2;\ \frac{30-12\cdot 2^x}{2^{2x}-1}-2=0.$$

Оскільки вихідне рівняння має зміст лише при $x\neq 0$ (бо інакше $2^0-1=0$), то можемо домножити обидві частини одержаного рівняння на $2^{2x}-1\neq 0$;

$$30-12\cdot 2^x-2\cdot 2^{2x}+2=0;$$

$$2\cdot 2^{2x}+12\cdot 2^x+32=0;$$

$$2^{2x}+6\cdot 2^x-16=0;$$

Позначивши $2^x=a$, маємо: $a^2+6a-16=0$, звідки $a_1=-1, a_2=2$.

$$2^x=-8, \text{дане рівняння розв}'\text{язків немає.}$$

$$2^x=2;\ 2^x=2^1; x=1.$$

Відповідь: а) 2; б) 3; в)1 [12].

Розв'язуючи друге рівняння, не обов'язково вводити нову змінну, а можна зразу виносити спільний множник 3^x за дужки. Саме тому такий спосіб називають ще способом винесення спільного множника за дужки.

III. Метод розкладання рівняння на множники;

Якщо в одній частині показникового рівняння стоїть число, а в іншій усі члени містять вираз виду a^{kx} (показники степенів відрізняються тільки вільними членами), то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь a.

Приклад 3.

Розв'яжіть рівняння:

а) $5^x+2\cdot 5^{x-2}=23$;

б)) $2^x-9\times 2^x-2\times 3^x+18=0$

Розв'язання.

а) $5^x+2\cdot 5^{x-2}=23$.

$5^{x-2}(5^2-2)=23$

$5^{x-2} \cdot 23 = 23$

$5^{x-2} = 1$

$5^{x-2} = 5^0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

Відповідь: $x = 2$

Б) $2^x - 9 \times 2^x - 2 \times 3^x + 18 = 0$

Якщо попарно згрупувати члени в лівій частині рівняння і в кожній парі винести за дужки спільний множник, то одержимо:

$$2^x(3^x - 9) - 2(3^x - 9) = 0$$

Винесемо за дужки спільний множник $3^x - 9$:

$(3^x - 9)(2^x - 2) = 0$

Тоді $3^x - 9 = 0$ або $2^x - 2 = 0$

$3^x - 9 = 0,\ 3^x = 9,\ 3^x = 3^2,\ x = 2;$

$2^x - 2 = 0,\ 2^x = 2,\ 2^x = 2^1,\ x = 1\ ;$

Відповідь: $x = 2; x = 1$ [21].

IV. Штучні методи розв’зання показникових рівнянь.

Приклад 4.

Розв’яжіть рівняння а) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + 0{,}5^x$ б) $2^x = 3 - x$; в) $3^x + 4^x = 5^x$.

Розв'язання.

а) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + 0{,}5^x$

Графічно або методом спроб переконуємося, що $x = 1$ – корінь рівняння. Оскільки $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ - зростаюча функція (бо $\frac{3}{2} > 1$), а $y = 1 + 0{,}5^x$ - спадна

(0,5 < 1), то інших коренів рівняння не має.

б) $2^x = 3 - x$;

Очевидно, що $x = 1$ є коренем даного рівняння: $2^1 = 3 - 1 = 2$.Оскільки функція $y = 2^x$ зростаюча, а $y = 3 - x$ – спадна, то корінь $x = 1$ єдиний.

в) $3^x + 4^x = 5^x$

Легко помітити що $x = 2$ є коренем даного рівняння. Доведемо що він єдиний. Поділимо обидві частини рівняння на $5^x \neq 0$; Отримаємо:

$$(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1.$$

Функція $f(x) = (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x$ як сума двох спадних функцій є спадною, отже, кожного свого значення вона набуває лише один раз [12].

2.1.2.1 Показниково–степеневі рівняння

До показникових рівнянь належать показникові-степеневі рівняння. Це рівняння виду $[u(x)]^{f(x)} = u(x)]^{g(x)}$ [21].

Рівняння виду $[u(x)]^{f(x)} = u(x)]^{g(x)}$ з множиною допустимих значень, яка визначається умовою: $u(x) > 0$, розв'язується за допомогою теореми:

$$u(x)]^{f(x)} = u(x)]^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g), \end{cases} \\ \begin{cases} u(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Використання цієї теореми називають логарифмуванням рівняння.

Ця теорема враховує властивості функції $y = u(x)^{f(x)}$, яка називається складною експонентою. Область визначення цієї функції визначається нерівністю: $u(x) > 0$.

Якщо основа складної експоненти $u(x) > 0$, то рівність виду $[u(x)]^{f(x)} = u(x)]^{g(x)}$ можлива при рівності показників $f(x) = g(x)$.

Якщо основа $u(x) = 1$, то також виконується рівність $u(x)]^{f(x)} = u(x)]^{g(x)}$, але при цьому слід врахувати умову: $x \in D(f) \cap D(g)$, тобто корінь рівняння $u(x) = 1$ належить перетину множин областей визначення функцій $f(x)$ та $g(x)$.

Розв'язати рівняння: $|x-2|^{10x^2-1} = |x-2|^{3x}$

$$|x-2|^{10x^2-1} = |x-2|^{3x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 = 1, \\ x \in D(10x^2 - 1) \cap D(3x), \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 > 0 \\ 10x^2 - 1 = 3x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \neq 2 \\ x = -\frac{1}{5}, x = \frac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1,\ x = 3 \\ x \in R \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{5}, x = \frac{1}{2}, \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Відповідь. $-\frac{1}{5}$; 0,5; 1; 3 [21].

2.1.3 Показникові нерівності

Якщо в показниковому рівнянні знак рівності змінити на знак нерівності, то дістанемо показникову нерівність [2].

Нерівність називається показниковою, якщо її змінні входять лише до показників степенів при сталих основах.

До найпростіших показникових нерівностей належать нерівності: $a^x > b, a^x < b, a^x \geq b, a^x \leq b,$ де a і $b -$ деякі дійсні числа, $a > 0, a \neq 1, b \in R$.

Залежно від значень параметрів a і b множину розв'язків нерівності $a^x > b$ записують у вигляді:

1) при $a > 1, b > 0$ $x \in (log_a b; +\infty)$;
2) при $0 < a < 1, b > 0$ $x \in (-\infty; log_a b)$;
3) при $a > 0, b < 0$ $x \in R$.

Залежно від значень параметрів a і b множину розв'язків нерівності $a^x < b$ записують у вигляді:

1) при $a > 1, b > 0$ $x \in (-\infty; log_a b)$;
2) при $0 < a < 1, b > 0$ $x \in (log_a b; +\infty)$;
3) при $a > 0, b < 0$ $x \in \emptyset$.

Множина розв'язків нестрогих нерівностей $a^x \geq b, a^x \leq b$ знаходиться як об'єднання множин розв'язків відповідних строгих нерівностей і рівняння $a^x = b$.

При розв’язуванні показникових нерівностей виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, де $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$ *f(x)*, *g(x)* – деякі функції змінної *x*, використовуються дві теореми, подані нижче:

Теорема I. Якщо $a > 1$, то нерівність виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності *f(x)* > *g(x)*.

Теорема II. Якщо $0 < a < 1$, то нерівність виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності *f(x)* < *g(x)*.

Використання цих теорем називають логарифмуванням нерівності.

При розв’язуванні складніших показникових нерівностей використовують всі методи розв’зування відповідних показникових рівнянь.

Приклад 4.

Розв’яжіть нерівність:а) $2^x \cdot 3^x > 36$; б) $3 \cdot 7^{2x} - 2 \cdot 7^x - 1 < 0$;

в) $(\sin\frac{\pi}{6})^{x-0,5} > \sqrt{2}$; г) $(\frac{2}{3})^{\frac{4}{x}-3} \leq \frac{9}{4}$; д)$\frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leq 0$; е)$\frac{2^x - 1}{x - 1} > 0$

Розв’язання.

а) $2^x \cdot 3^x > 36$;

Подамо праву й ліву частини нерівності у вигляді степеня з основою 6: $6^x > 6^2$.

Оскільки $6 > 1$, то $x > 2$, або $x \in (2;\ \infty)$.

б) $3 \cdot 7^{2x} - 2 \cdot 7^x - 1 < 0$;

Нехай $7^x = y$, тоді $7^{2x} = y^2$. Підставимо *y* у дану нерівність. Маємо: $3y^2 - 2y - 1 < 0$. Оскільки квадратний тричлен $3y^2 - 2y - 1$ має корені $-\frac{1}{3}$ і 1, то множина розв’язків відповідної нерівності буде така:

$$-\frac{1}{3} < y < 1, \text{або } \begin{cases} y < 1, \\ y > -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Оскільки $y = 7^x > 0$, то умова $y > -\frac{1}{3}$ виконується завжди.

Якщо $y < 1$, то $7^x < 1$, або $7^x < 7^0$. Отже, $x < 0$, або $x \in (-\infty; 0)$.

в) $(\sin\frac{\pi}{6})^{x-0,5} > \sqrt{2}$;

Подамо праву й ліву частини нерівності у вигляді степеня з основою $\frac{1}{2}$:

$(\frac{1}{2})^{x-0,5} > (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$; $x - 0,5 < -0,5$; $x < 0$.

г) $(\frac{2}{3})^{\frac{4}{x}-3} \leq \frac{9}{4}$;

Подамо праву й ліву частини нерівності у вигляді степеня з основою $\frac{2}{3}$:

$(\frac{2}{3})^{\frac{4}{x}-3} \leq \frac{2}{3}^{-2}$; $\frac{4}{x} - 3 \geq -2$; $\frac{4}{x} - 1 \geq 0$; $\frac{4-x}{x} \geq 0$.

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4 - x \leq 0, \\ x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 4, \\ x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Друга система розв’язків немає, з першої випливає $0 \leq x \leq 4$.

д) $\frac{5^x-125}{x^2-4x+4} \leq 0$;

Ця нерівність рівносильна системі двох нерівностей:

$$\begin{cases} 5^x - 125 \leq 0, \\ x^2 - 4x + 4 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^x \leq 5^3, \\ (x-2)^2 > 0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x \leq 3, \\ x \neq 2. \end{array}\right.$$

е) $\frac{2^x-1}{x-1} > 0$;

Нерівність рівносильна системі двох нерівностей:

$$\begin{cases} 2^x - 1 > 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2^x - 1 < 0, \\ x - 1 < 0; \end{cases}$$

а) $\begin{cases} 2^x > 1, \\ x > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x > 2^0, \\ x > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x > 1; \end{cases}$ $x > 1$;

б) $\begin{cases} 2^x < 1, \\ x < 1; \end{cases}$ $\begin{array}{l} 2^x < 2^0, \\ x < 1; \end{array}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x < 1; \end{cases}$ $x < 0$;

Відповідь. а) $(2;\ \infty)$; б) $(-\infty; 0)$ в) $(-\infty; 0)$ г) $[0; 4]$ д)$(-\infty; 2) \cup (2; 3]$ е) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ [19].

Показникові рівняння та нерівності – це окремий вид трансцендентних (не алгебраїчних) рівнянь і нерівностей. Крім них, трансцендентними також є рівняння та нерівності, в яких поєднуються трансцендентні вирази з алгебраїчними:

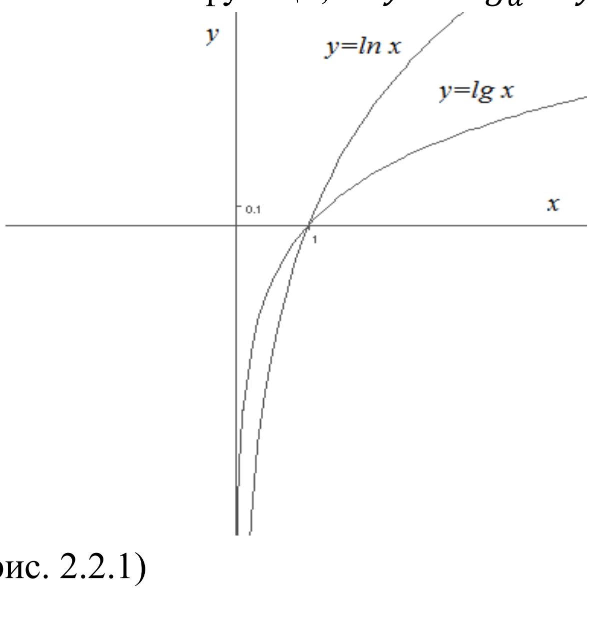
$5^{x+1} + 5x > 10;\ 2^x = \sqrt{x+2};\ \pi^x - 1 = \sin x.$

Тільки для деяких із подібних рівнянь можна вказати точні розв’язки. Їх наближені корені знаходять здебільшого графічним способом.

2.2 Логарифмічна функція

Функцію називають логарифмічною, якщо її можна задати формулою $y = log_a x$, де x – аргумент, a – додатне і відмінне від 1 дане дійсне число. Приклади логарифмічних функцій: $y = log_a x, y = log_{0,5} x$ [16].

Графіки логарифмічних функцій не обо’язково будувати за точками. Виявляється, що графік функції $y = log_a x$ симетричний графіку функції $y = a^x$відносно бісектриси першого координатного кута. Адже рівності $y = log_a x$ і $a^y = x$ виражають одну й ту саму залежність між змінними x і y. Якщо в другій із цих рівностей поміняти x на y, а y на x, то це рівнозначні заміні осі x віссю y і навпаки. Такі функції, як $y = log_a x$ і $y = a^x$називають оберненими.



Найчастіше розглядають логарифми з основами e і 10. Їх називають відповідно натуральними та десятковими логарифмами і позначають символами ln і lg (рис. 2.2.1).

(рис. 2.2.1)

Приклад 1 [18] .

Обчисліть. а) 3lg5 + 0,5lg64;

б) $25^{1-0,5log_5 10}$; в) $2^{1+\log_2 7}$.

Розв'язання.

а) 3lg5 + 0,5lg64 = $lg5^3 + lg64^{0,5} = \lg(125 \cdot 8) = lg1000 = 10$

$lg125 + lg8 = lg1000 = 3$;

б) $25^{1-0,5log_5 10} = 25 : (25)^{0,5^{log_5 10}} = 25 : 5^{log_5 10} = 25 : 10 = 2,5$;

в) $2^{1+\log_2 7} = 2 \cdot 2^{\log_2 7} = 2 \cdot 7 = 14$.

Приклад 2 [20].

а) знайдіть *x* за логарифмом: $log_{0,3}x = 0,5log_{0,3}a - 2log_{0,3}b + log_{0,3}c$;

б) знайти *x*, якщо $\log_x 125 = \frac{3}{2}$.

Розв'язання.

$$\text{а) } log_{0,3}x = 0,5log_{0,3}a - 2log_{0,3}b + log_{0,3}c =$$

$$= log_{0,3}a^{0,5} - log_{0,3}b^2 + log_{0,3}\mathrm{c} = log_{0,3}\frac{\sqrt{a}c}{b^2}.$$

Оскільки $log_{0,3}x = log_{0,3}\frac{\sqrt{a}c}{b^2}$, то $x = \frac{\sqrt{a}c}{b^2}$.

б) За означенням логарифму маємо $x^{\frac{2}{3}} = 125$. Піднесемо обидві частини до степеня $\frac{2}{3}$, і скористаємося властивостями степенів:

$$(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 125^{\frac{2}{3}};$$

$$x = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 5^2 = 25.$$

Приклад 3 [21].

Обчислити $\log_{13}(100^{\frac{1}{\log_7 10}} + 2^{\log_2 15 + 3})$;

Розв'язання.

$$\log_{13}(100^{\frac{1}{\log_7 10}} + 2^{\log_2 15+3}) = \log_{13}(100^{\frac{1}{\log_7 10}} + 2^{\log_2 15} \cdot 2^3)$$

$$= \log_{13}(10^{2\lg 7} + 15 \cdot 8 = \log_{13}(49 + 120) = \log_{13} 169 = 2;$$

Приклад 4 [14].

Порівняйте числа $log_{0,1}9$ і $log_{0,1}0,9$.

Розв'язання.

Функція $log_{0,1}x$ – спадна, бо 0,1< 1.

Оскільки 9 > 0,9, то $log_{0,1}9 < log_{0,1}0,9$.

2.2.1 Логарифм і його властивості. Властивості логарифмічної функції

Нехай число a додатне і відмінне від 1. Якщо рівність $a^{\alpha} = b$ правильна, то число a називають логарифмом числа b за основою a [19].

Тобто логарифмом числа b *за основою а називають показник степеня, до якого слід піднести число а, щоб дістати* b. Логарифм числа b за основою a позначають $log_a b$.

Приклади [19]:

$$log_2 8 = 3, 2^3 = 8;\ log_{0,5}16 = -4, \text{бо } 0{,}5^{-4} = 16.$$

$$\log_{\frac{1}{27}} 3 = -\frac{1}{3}, \text{оскільки } \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Основою логарифма може бути довільне додатне число a, крім 1. З рівності $a^{\alpha} = b$ випливає, що коли число a додатне, то і b додатне. Отже, якщо число b не додатне (від'ємне або дорівнює 0), то $log_a b$ не існує. Логарифм кожного додатного числа завжди існує.

Знаходження логарифма числа називають логарифмуванням. Ця операція обернена до операції піднесення до степеня з відповідною основою.

За означення логарифма, якщо $a^{\alpha} = b$, то $\alpha = log_a b$. Це різні записи тієї самої залежності. З них випливає рівність $a^{log_a b} = b$.

Цю рівність називають *основною логарифмічною тотожністю.* Вона правильна для будь-яких додатних a і b, $a \neq 1$.

Наприклад: $7 = 5^{log_5 7}$; $7 = 12^{log_{12} 7}$; $7 = 0{,}5^{log_{0,5} 7}$; $3^{-\log_3 7} = \frac{1}{3^{\log_3 7}} = \frac{1}{7}$; $4^{\log_2 7} = 2^{2\log_2 7} = (2^{\log_2 7})^2 = 7^2 = 49$ [8].

Для будь-яких додатних значень x, y, і $a \neq 1$ виконуються рівності:

$$log_a(xy) = log_a x + log_a y;\ log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y;\ log_a x^p = plog_a x.$$

Доведемо першу з цих рівностей. Нехай $log_a x = m$ і $log_a y = n$. Тоді $a^m = x$ і $a^n = y,$ звідки $a^m \cdot a^n = xy,$ або $a^{m+n} = xy.$

Тут m+n – логарифм числа xy за основою a, тобто $log_a(xy) = m + n = log_a x + log_a y$. А це й вимагалося довести.

Доведену властивість коротко формулюють так: логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників. Аналогічно можна довести й інші твердження про логарифм дробу і логарифм степеня. За допомогою цих тверджень і таблиць логарифмів упродовж кількох століть учені спрощували громіздкі обчислення. Адже логарифми дають можливість множення чисел замінити додаванням їх логарифмів, ділення – відніманням, піднесення до степеня – множенням тощо. Тільки в другій половині ХХ ст., коли з'явилися калькулятори та інші ЕОМ, потреба в логарифмічних обчисленнях відпала. Відійшли в історію також спеціальні логарифмічні лінійки, якими інженери та вчені колись користувалися для обчислень. Проте логарифмічні функції й тепер використовують досить часто.

Основні властивості логарифмічних функцій:

1) область визначення визначення функції $y = log_a x$ – проміжок (0;∞); рис. 2.5.1
2) область значень – множина R;
3) функція зростає на всій області визначення, якщо $a > 1$, і спадає, коли $0 < a < 1$;
4) функція ні парна, ні непарна, ні періодична;
5) графік кожної логарифмічної функції проходить через точку A(1;0).

Зверніть увагу на твердження, які випливають з монотонності логарифмічної функції $y = log_a x$ і виконуються для всіх x з її області визначення:

1) якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $log_a x_1 = log_a x_2$, то $x_1 = x_2$;
2) якщо $a > 1$ і $log_a x_1 > log_a x_2$, то $x_1 > x_2$;

3) якщо $0 < a < 1$ і $log_a x_1 > log_a x_2$, то $x_1 < x_2$.

Показникові та логарифмічні функції досить зручні для моделювання процесів пов'язаних зі зростанням населення, капіталу, розмноженням бактерій, змінною атмосферного тиску, радіоактивним розпадом і т. п. Тому їх часто використовують для розв'язування прикладних задач.

2.2.2 Логарифмічні рівняння

Рівняння називається логарифмічним, якщо його змінні входять дише під знак логарифмів [26].

Приклади: $log_3 x = 2$; $lgx + lg4 = 2$; $\ln(3x - 2) = 1 - lnx$.

Найпростішими логарифмічними рівняннями називають рівняння виду

$$log_a x = b, \text{де } a > 0, a \neq 1.$$

За означенням логарифма, при будь-якому дійсному b це рівняння має єдиний розв'язок: $x = a^b$.

Логарифмічні рівняння вважаються складними, оскільки логарифм має область визначення, про що не слід забувати. Вирази під знаками логарифмів можуть набувати будь-яких значень, тому при звільненні від логарифмів треба пам'ятати, що подані перетворення можуть бути нерівносильними. Нерівносильні перетворення призводять до втрати коренів або до появи сторонніх коренів. При розв'язуванні логарифмічних рівнянь потрібно робити рівносильні перетворення за допомогою відповідних теорем або виконувати перевірку знайдених коренів.

Елементарними логарифмічними рівняннями, для яких $a > 0$, $a \neq 1$, є такі рівняння [21]:

I. $log_a f(x) = 0 \leftrightarrow f(x) = 1$.

II. $log_a f(x) = b \leftrightarrow f(x) = a^b$.

Примітка. Рівносильні перетворення в рівняннях I і II виконуються при

$$f(x) > 0.$$

III. $log_a f(x) = log_a g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

IV. $f(log_a x) = 0 \leftrightarrow f(t) = 0,$ якщо $log_a x = t.$

V. $(log_a g(x)) = 0 \leftrightarrow f(y) = 0,$ якщо $log_a g(x) = y.$

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння $log_2(x^2 - 4x + 12) = 3.$

Розв'язання.

За означенням логарифма, $2^3 = x^2 - 4x + 12.$ Отже, $x^2 - 4x + 12 = 8,$ $x^2 - 4x + 4 = 0,$ звідки $(x-2)^2 = 0$ і *x = 2.*

Перевірка. $log_2(2^2 - 4 \cdot 2 + 12) = log_2 8 = 3.$

Відповідь. *x = 2* [21].

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння $log_2(x-3) + log_2(x-1) = 3 + log_2(x-4).$

Розв'язання.

Скористаємося властивостями логарифмів $3 = 3log_2 2 = log_2 2^3$, $log_2 a + log_2 b = log_2(ab)$ та запишемо рівняння у вигляді $\log_2\big((x-3)(x-1)\big) = \log_2 2^3(x-4).$ Використовуючи властивості логарифмічної функції, знаходимо: $(x-3)(x-1) = 8(x-4).$

Отже, $x^2 - 4x + 3 = 8x - 32,$ або $x^2 - 12x + 35 = 0,$ звідки

$x_1 = 5;\ x_2 = 7.$

Перевірка. Якщо $x = 5,$ то $\log_2(5-3) + \log_2(5-1) = 3 + \log_2(5-4),$ $\log_2 2 + \log_2 4 = 3 + \log_2 1, 1 + 2 = 3, 3 = 3.$

Якщо $x = 7,$ то $\log_2(7-3) + \log_2(7-1) = 3 + \log_2(7-4),$ $\log_2 4 + \log_2 6 = 3 + \log_2 3, \log_2 24 = \log_2(8 \cdot 3), 24 = 24.$

Відповідь. $x_1 = 5;\ x_2 = 7$ [26].

Приклад 3.

Розв'яжіть рівняння а) $(lgx - 6)^{-1} + 5(lgx + 2)^{-1} = 1;$

б) $\frac{1}{2}\log_{0,1}(2x+3) - \log_{0,1}(2x-3) = 0;$

в) $\log_{2x} 2 + 2\log_{4x} 8 = 4.$

Розв'язання.

а) $(lgx - 6)^{-1} + 5(lgx + 2)^{-1} = 1;$

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь використовують метод заміни . Якщо логарифмічне рівняння має вигляд: $f(\log_a x) = 0$, де f деяка функція, то заміною $\log_a x = t$ його можна звести до вигляду: $\log_a x = t_\text{i}$. При цьому t_i - корені рівняння $f(t) = 0$ [26].

Замінивши lg*x* на *y*, дістанемо рівняння

$$\frac{1}{y-6} + \frac{5}{y+2} = 1,$$

коренями якого є: $y_1 = 2$; $y_2 = 8$. Отже, $lgx_1 = 2$ або $lgx_2 = 8$, звідки $x_1 = 100;\ x_2 = 10^8$.

Перевірка показує, що обидва значення задовольняють рівняння.

Відповідь. $x_1 = 100;\ x_2 = 10^8$ [26].

б) $\frac{1}{2}\log_{0,1}(2x + 3) - \log_{0,1}(2x - 3) = 0;$

Розв'язання.

$\log_{0,1}\sqrt{(2x + 3)} - \log_{0,1}(2x - 3) = 0;$

Скористаємося властивостями логарифмів

$\log_{0,1}\frac{\sqrt{2x+3}}{2x-3} = 0;$ $\quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+3}}{2x-3} = 1, \\ 2x + 3 > 0, \\ 2x - 3 > 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sqrt{2x + 3} = 2x - 3, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 3 = 4x^2 - 12x + 9, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x^2 - 14x + 6 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 = 0 \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \quad x = 3, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$$

Відповідь. $x = 3.$

в) $\log_{2x} 2 + 2\log_{4x} 8 = 4$ [26].

Розв'язання.

Перейшовши до основи 2, одержуємо рівносильні рівняння

$$\frac{\log_2 2}{\log_2(2x)} + 2 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2(4x)} = 4;$$

$$\frac{1}{\log_2 2 + \log_2 x} + 2 \cdot \frac{3}{\log_2 4 + \log_2 x} = 4;$$

Заміна $\log_2 x = t,\ \frac{1}{1+t} + \frac{6}{2+t} = 4.$

Тоді $4t^2 + 5t = 0;\ t_1 = 0;\ t_2 = -\frac{5}{4};$

$$\log_2 x = 0; \quad x = 2^0 = 1;$$

$$\log_2 x = -\frac{5}{4}; \quad x = 2^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}};$$

Відповідь. $x_1 = 1;\ x_2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}.$

Приклад 4.

Розв’яжіть графічно рівняння $log_4 x = 3 - log_2 x.$

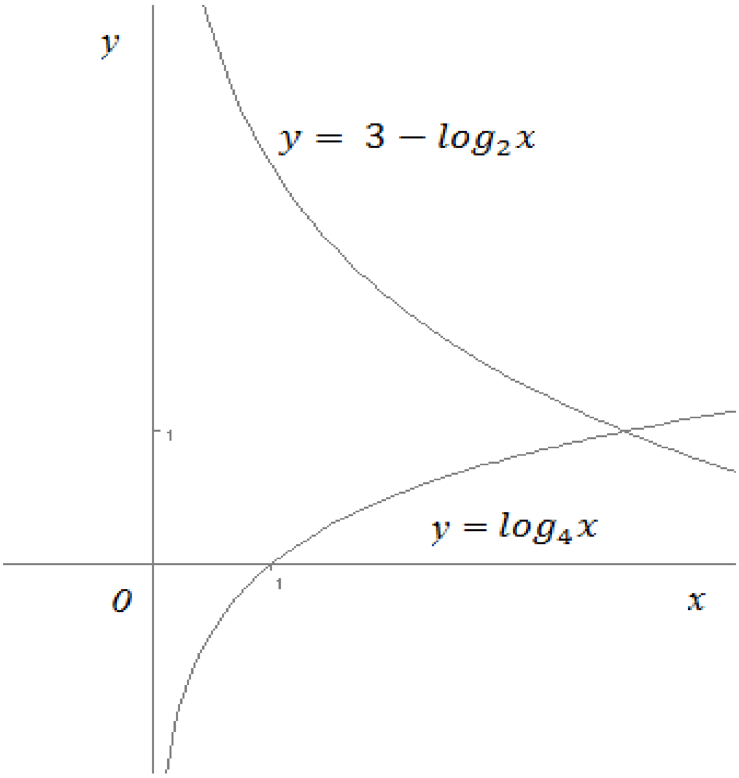


рис (2.2.2.1)

Розв’язання.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій: $y = log_4 x$ і $y = 3 - log_2 x$ (рис.2.2.2.1) . Як бачимо, графіки цих функцій перетинаються в точці з абсцисою *x* = 4. Щоб переконатися, що *x* = 4 – корінь даного рівняння, зробимо перевірку:

$$log_4 4 = 3 - log_2 4, 1 =$$
$$= 3 - 2 = 1.$$

Відповід. *x* = 4 [22].

Якщо в логарифмічному рівнянні знак рівності змінити на знак нерівності, то дістанемо логарифмічну нерівність.

2.2.2 Логарифмічні нерівності

Нерівність називається логарифмічною, якщо її змінні входять лише під знаки логарифмів [26].

Простіші логарифмічними нерівностями є нерівності виду:

$log_a x > b,\ \ log_a x < b,$ де a і $b -$ дійсні числа $a > 0, a \neq 1$

Множина розв'язків нерівності $log_a x > b$:

1) якщо $a > 1$ і $x \in (a^b; +\infty)$;

2) якщо $0 < a < 1$ $x \in (0; a^b)$.

Множина розв'язків нерівності $log_a x < b$:

1) якщо $a > 1$ і $x \in (0; a^b)$;

2) якщо $0 < a < 1$ $x \in (a^b; +\infty)$.

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей виду $log_a f(x) > log_a g(x)$, де $a > 0, a \neq 1,$ використовують подані нижче теореми.

Теорема. Нерівність виду $log_a f(x) > log_a g(x)$ *при a > 1 рівносильна системі*

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Теорема. Нерівність виду $log_a f(x) > log_a g(x)$ *при* $0 < a < 1$ *рівносильна системі* $\begin{matrix} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{matrix}$

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей використовуються всі властивості логарифмів. Використання властивостей логарифмів веде до зміни ОДЗ нерівності, тому ОДЗ потрібно визначити за початковою нерівністю.

Приклад 1.

Розв'язати нерівність:

а) $\log_5(2x) > \log_5(x-1)$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(2x) > \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$;

в)$\lg(2x^2 - 9x + 4) \leq 2\lg(x+2)$;

Розв'язання.

а) Оскільки $5 > 1$, то функція $y = \log_5 t$ – зростаюча і, враховуючи ОДЗ, одержуємо:

$$\begin{cases} 2x > x - 1, \\ x - 1 > 0. \end{cases} \text{звідси} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x > 1, \end{cases} \quad \text{тобто } x > 1.$$

Відповідь. $(1; +\infty)$ [26].

б) Оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функція $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ спадна і, враховуючи ОДЗ, одержуємо:

$$\begin{cases} 2x < x - 1, \\ 2x > 0. \end{cases} \text{звідси} \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases} - \text{розв'язків немає.}$$

Відповідь. розв'язків немає.

в) $\lg(2x^2 - 9x + 4) \le 2\lg(x + 2)$;

Використовуючи властивість логарифмів отримаємо:

$\lg(2x^2 - 9x + 4) \le \lg(x + 2)^2$;

$$\begin{cases} (2x^2 - 9x + 4) \le (x + 2)^2, \\ 2x^2 - 9x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 9x + 4 - x^2 - 4x - 4 \le 0, \\ 2x^2 - 9x + 4 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 13x \le 0, \\ 2x^2 - 9x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 13, \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1}{2}, \\ x > 4; \end{array} \right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 4 < x \le 13. \end{array} \right.$$

Відповідь. $\left[0; \frac{1}{2}\right) \cup (4; 13)$ [25].

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей використовують метод заміни.

Розв'язати нерівність: $(\log_2(x - 1)^2)^2 + 5 \cdot \log_{0,5}(x - 1) > -1$.

Розв'язання

Здійснимо перетворення:

$$\log_2(x - 1)^2 = 2\log_2|x - 1| = 2\log_2(x - 1), \text{оскільки ОДЗ } x > 1;$$

$$\log_{0,5}(x - 1) = \frac{\log_2(x - 1)}{\log_2 0,5} = -\log_2(x - 1).$$

Тоді нерівність набуде такого вигляду:

$$4\ (\log_2(x - 1)^2)^2 - 5\log_2(x - 1) + 1 > 0$$

Введемо заміну $\log_2(x - 1) = t \Leftrightarrow 4t^2 - 5t + 1 > 0$.

$$4t^2-5t+1=0$$

$D=25-16=9.\ \sqrt{D}=3.\quad t_1=1,\ \ t_2=\frac{1}{4}.$

$$t\in(-\infty;\frac{1}{4})\cup(1;+\infty)$$

Розв’язавши квадратну нерівність повертаємося до заміни.

Відповідь: $x\in\left(1;1+\sqrt[4]{2}\right)\cup(3;+\infty)$ [32].

Нерівність виду $\log_{\varphi(x)}f(x)>\log_{\varphi(x)}g(x)$ рівносильна сукупності двох систем $\begin{cases}\varphi(x)>1\\ f(x)>g(x)\\ g(x)>0\end{cases}$ або $\begin{cases}\varphi(x)>0\\ \varphi(x)<1\\ f(x)<g(x)\\ f(x)>0\end{cases}$

Розв’язати нерівність [32]: $\log_{x-2}(2x-3)>\log_{x-2}(24-6x)$.

Розв’язання.

$$\begin{cases}x-2>1\\ 2x-3>24-6x\\ 24-6x>0\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}x-2>0\\ x-2<1\\ 2x-3<24-6x\\ 2x-3>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>3\\ x>\dfrac{27}{8}\\ x<4\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}x>2\\ x<3\\ x<\dfrac{27}{8}\\ x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Відповідь: $(2;3)\cup(\frac{27}{8};4)$ [32].

При розв’язуванні нерівностей виду $f(x)\cdot g(x)<0$, $f(x)\cdot g(x)>0$, $\frac{f(x)}{g(x)}>0$, $\frac{f(x)}{g(x)}<0$, де $f(x)$ та $g(x)$ – вирази відносно змінної x використовують подані нижче теореми.

Теорема.

$$f(x)\cdot g(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0\\ g(x)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема.

$$f(x)\cdot g(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)<0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0\\ g(x)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

Для нерівностей $\boldsymbol{\frac{f(x)}{g(x)} > 0}$, $\boldsymbol{\frac{f(x)}{g(x)} < 0}$ аналогічно.

Розв'язати нерівність: $\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0.$

Розв'язання

Оскільки

$x^2+4>0$ при $x \in R,$ то ОДЗ нерівності – множина всіх дійсних чисел.

$$\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \begin{cases}3x^2-16x+21>0\\ \log_{0,3}(x^2+4)<0\end{cases}$$

Другу систему сукупності теореми непотрібно розв'язувати, оскільки $\log_{0,3}(x^2+4)<0$ при будь-яких R.

Відповідь. $\left(-\infty;\frac{7}{3}\right)\cup(3;+\infty)$ [20].

Логарифмічні нерівності можна розв'язувати методом інтервалів, для цього використовують такі теореми [21]:

Теорема.

Знак $\log_a f(x)$ збігається зі знаком добутку $(a-1)(f(x)-1)$ на ОДЗ нерівності.

$$\log_a f(x) > 0 \;\; (<0) \;\; \Leftrightarrow \begin{cases} a>0\\ f(x)>0\\ (a-1)(f(x)-1)>0 \;\; (<0)\end{cases}$$

Теорема.

Знак різниці $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ збігається зі знаком добутку $(a-1)(f(x)-g(x))$ на ОДЗ нерівності.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \;\; (<0) \;\; \Leftrightarrow \begin{cases} a>0\\ f(x)>0\\ g(x)>0\\ (a-1)(f(x)-g(x))>0 \;\; (<0)\end{cases}$$

Теорема.

Знак $\log_{a(x)} f(x)$ збігається зі знаком добутку $(a(x)-1)(f(x)-1)$ на ОДЗ нерівності.

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 \ (< 0) \ \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ f(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-1) > 0 \ (< 0) \end{cases}$$

Теорема.

Знак різниці $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ збігається зі знаком добутку $(a-1)(f(x)-g(x))$ на ОДЗ нерівності.

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \ \ (< 0) \ \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0 \ (< 0) \end{cases}$$

Теорема.

Знак різниці $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ збігається зі знаком добутку $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ на ОДЗ нерівності. За умови, що $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$, потрібно, щоб $a(x) \neq 1$.

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \ \ (< 0) \ \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ a > 0 \\ f(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0 \ (\leq 0) \end{cases}$$

Особливо ефективним є використання методу інтервалів при розв'язуванні складніших нерівностей.

Розв'язати нерівність: $\log_{(10-x^2)}\left(\frac{16x}{5} - x^2\right) < 1$.

Розв'язання.

$$\mathrm{Log}_{(10-x^2)}\left(\frac{16x}{5} - x^2\right) < 1 \ \Leftrightarrow \ \log_{(10-x^2)}\left(\frac{16x}{5} - x^2\right) < \log_{(10-x^2)}(10-x^2) \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 10 - x^2 > 0 \\ \dfrac{16x}{5} - x^2 > 0 \\ (10 - x^2 - 1)\left(\dfrac{16x}{5} - x^2 - 10 + x^2\right) < 0 \end{cases}$$

За методом інтервалів отримаємо $x \in (0; 3) \cup \left(\frac{25}{8}; \sqrt{10}\right)$.

Відповідь: $(0;3) \cup \left(\frac{25}{8};\sqrt{10}\right)$ [21]

2.3 Системи показникових та логарифмічних рівнянь

При розв'язуванні систем показникових та логарифмічних рівнянь використовують методи, аналогічні до методів розв'язування систем алгебраїчних рівнянь [21]. Для цього потрібно систему показникових або логарифмічних рівнянь звести до системи алгебраїчних рівнянь. При перетворенні показникових або логарифмічних рівнянь використовуються всі методи розв'язування відповідних рівнянь. Не слід забувати про ОДЗ логарифмічних рівнянь, показникових рівнянь, в яких є обмеження на невідомі.

Методи розв'язування систем алгебраїчних рівнянь:

1. Метод послідовного виключення невідомих (метод підстановки).
2. Метод заміни.
3. Метод частинної заміни.
4. Метод додавання, віднімання, множення, ділення рівнянь системи.
5. Використання однорідності та симетричності рівнянь системи.

Розв'язати систему:

а) $\begin{cases} 25^{2x} + 25^{2y} = 30 \\ 25^{x+y} = 5\sqrt{5} \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3 \\ 8(\sqrt{2})^{x-y} = 0{,}5^{y-3} \end{cases}$

Розв'язання.

а) Дана система зводиться до системи алгебраїчних рівнянь методом заміни.

Введемо заміну: $25^x = u > 0,\ 25^y = v > 0.$

Тоді система набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 30, \\ u \cdot v = 5\sqrt{5}. \end{cases}$$

Система є симетричною, тому використаємо симетричність при її розв’язуванні: $\begin{cases} u^2+v^2=30, \\ u \cdot v = 5\sqrt{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=5, \\ v=\sqrt{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} u=\sqrt{5} \\ v=5, \end{cases}, \\ \begin{cases} u=-5, \\ v=-\sqrt{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} u=-\sqrt{5}, \\ v=-5, \end{cases} \end{array} \right.$

Оскільки $u>0, v>0$, то вибираємо лише перші дві пари значень u і v.

Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 25^x=5, \\ 25^y=\sqrt{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} 25^x=\sqrt{5}, \\ 25^y=5, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases} \end{array} \right.$

Відповідь: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

б) ОДЗ системи визначається системою нерівностей $\begin{cases} 3x+2y>0, \\ x-2y>0. \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3, \\ 8(\sqrt{2})^{x-y}=0{,}5^{y-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-2y)(3x+2y)=3, \\ 2^{3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y}=2^{3-y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-2y)(3x+2y)=27, \\ 3+0{,}5x-0{,}5y=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3+2x)(3x-2x)=27, \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2=27, \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ y=-3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3, \\ y=3. \end{cases} \end{array} \right.$$

При підстановці знайдених пар чисел у систему нерівностей, яка визначає ОДЗ системи рівнянь, отримаємо, що пара чисел $(3;-3)$ задовільняє систему рівнянь.

Відповідь: $(3;-3)$ [21].

2.4 Похідна і первісна показникової, логарифмічної та степеневої функції

Фундаментальна константу – число $e = 2{,}718$, відіграє особливу роль не тільки у математиці, а й у фізиці, хімії, біології, економіці тощо [14].

Цю сталу було введено як спільну границю двох послідовностей із загальними членами $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ і $y_n = (1 + \frac{1}{n-1})^n$, $n > 1$.

Зокрема, було доведено, що для всіх $n > 1$ виконуються нерівності

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n-1})^n$$

Ці нерівності можна переписати так:

$$\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n-1}, 1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$$

Якщо покласти $\frac{1}{n} = x$, то отримаємо таке:

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1 - x}$$

Останні нерівності мають місце не лише для чисел x виду $\frac{1}{n}$, $n \in N, n > 1$, а й для всіх чисел x таких, що $0 < x < 1$.

Тепер можна записати

$$1 = \lim_{x \to 0+} 1 \leq \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \leq \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 - x} = 1$$

Звідси $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{1-x} = 1$

Разом з тим

$$\lim_{x \to 0-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot e^{-x} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \to 0+} e^{-x}$$

Оскільки функція $y = e^{-x}$ неперервна, то $\lim_{x \to 0+} e^{-x} = 1$. Тому $\lim_{x \to 0-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Таким чином, виконується рівність

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ця рівність виражає одну з багатьох чудових властивостей числа e. Зокрема, вона означає, що при малих значеннях x має місце наближена рівність $e^x \approx 1 + x$.

Теорема. Функція $f(x) = e^x$ є диференційовною, її похідну можна обчислити за формулою $(e^x)' = e^x$.

Доведення. Маємо $f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$.

Тепер можна записати:

$$(e^x)' = e^x$$

Функція $f(x) = e^x$ задовільнаяє рівність $f'(x) = f(x)$ для всіх $x \in R$.

Функці. $f(x) = e^x$ називають експонентою.

Виведемо формулу для знаходження похідної показникової функції $f(x) = a^x$.

Маємо: $a = e^{\log_e a}$. Тоді $a^x = e^{x \log_e a}$.

Користуючись правилом обчислення похідної складеної функції, запишемо: $(e^x)' = (e^{x \log_e a})' = e^{x \log_e a} \cdot (x \log_e a)' = a^x \log_e a$.

Тоді при $a > 0, a \neq 1$ можна записати:

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Розглянемо логарифмічну функцію $f(x) = \log_a x$. Обернена до неї функція $g(x) = a^x$ є диференційованою на R, причому $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in R$. Це означає, що до графіка функції g в кожній точці можна провести негоризонтальну дотичну. Тому і до графіка f у кожній точці можна провести невертикальну дотичну (рис.). Отже, логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є диференційовною.

Для будь-якого $x > 0$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Знайдемо похідну лівої і правої частин рівності.

Маємо

$$(a^{\log_e x})' = (x)'$$

$$a^{\log_a x} \cdot \ln a \cdot (\log_a x)' = 1$$
$$x \cdot \ln a \cdot (\log_a x)' = 1$$

Звідси

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

При $a = e$ отримуємо:$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Теорема. Функція $f(x) = x^{\alpha},\ D(f) = (0; +\infty), \alpha \in R,$ є диференційовною, і її похідну можна обчислити за формулою $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Доведення. Подамо функцію $f(x) = x^{\alpha}$ у вигляді складеної функції $f(x) = e^{\alpha \ln x}$. Оскільки функції $y = e^x$ і $y = \alpha \ln x$ є диференційованими, то функція f також є диференційовною. Маємо:

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Функція e^x є первісною для функції e^x на R. Фукція $\frac{a^x}{\ln a}$ є первісною для функції a^x на R.

$\ln a$ – стала. Тому $(\frac{a^x}{\ln a})' = \frac{1}{\ln a}(a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \ln a = a^x$ для будь-яких x. Цим доведено, що $\frac{a^x}{\ln a}$ є первісною для функції a^x на R.

З рівності $(e^x)' = e^x$ випливає, що e^x є первісною для функції e^x на R.

$f(x) = \ln x$ для будь-яких x встановлено, що $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Ця залежність показує, що для функції $\frac{1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$ будь-яку первісну можна записати у вигляді $\ln x + C$. Функція $\frac{1}{x}$ має первісну $\ln(-x)$ і на проміжку $(-\infty; 0)$. Справді, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Оскільки, $|x| = x$, якщо 0 і $|x| = -x$, якщо $x < 0$, то на будь-якому проміжку, який містить точку 0, первісною для функції $\frac{1}{x}$ є функція $\ln|x|$.

Якщо $\alpha \neq -1$, то первісною степеневої функції $f(x) = x^{\alpha}$ має загальний вигляд $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;

Якщо $\alpha = -1$, то первісною функції f є функція виду $\ln|x| + C$.

РОЗДІЛ ІІІ. ІНТЕГРАЦІЯ ПОКАЗНИКОВОЇ ТА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЙ В ІНШІ ГАЛУЗІ ЗНАНЬ

У концепції сучасної шкільної освіти інтеграція розглядається не як сума, механічне об’єднання окремих питань з різних шкільних предметів, а як їх органічне взаємопроникнення, яке дає якісно новий результат, нове системне і цілісне утворення.

3.1. Сутність поняття «міжпредметні зв’язки»

Інтеграція (від лат. integratio – поєднання, відновлення) – об’єднання в єдине ціле раніше розрізнених частин та елементів системи на основі їх взаємозалежності і взаємодоповнюваності. Результатом інтеграції є поява якісно нової, інтегративної властивості системи, яка не зводиться до суми властивостей об’єднаних елементів і забезпечує більш високу ефективність функціонування усієї цілісності [30].

У шкільному навчанні інтеграція – це природний взаємозв’язок навчальних предметів (розділів і тем різних навчальних предметів) на основі провідних наукових ідей та положень із послідовним, глибоким і багатогранним розкриттям процесів та явищ, що вивчаються.

У навчанні інтеграцію розглядають як процес встановлення зв’язків між структурними компонентами змісту освіти (досвід пізнавальної діяльності, зафіксований у формі знань; досвід виконання відомих способів діяльності – у формі умінь діяти за зразком; досвід творчої діяльності – у формі умінь приймати нестандартні рішення в нових ситуаціях; досвід ставлень до навколишньої дійсності – у формі ціннісних орієнтацій) з метою формування в кожного учня цілісного уявлення про світ, виховання орієнтованої на розвиток і саморозвиток особистості.

Основою інтеграції є реалізація в навчальному процесі міжпредметних зв’язків. Саме з їх допомогою можливе найбільш ефективне розв’язання завдань уточнення й збагачення конкретних уявлень учнів про навколишню дійсність, про людину, природу і суспільство. Врахування міжпредметних зв'язків при навчанні сприяє систематизації й поглибленню знань учнів, формуванню в них навичок і умінь самостійної пізнавальної діяльності, перенесенню знань, одержаних на попередніх ступенях навчання, на більш високі рівні освіти. Це особливо важливо для навчання математики, методи якої використовуються в багатьох галузях знань і людської діяльності.

У дидактичних дослідженнях були визначені основні принципи організації навчання на основі міжпредметних зв'язків [29]:

• встановлення зв'язків між шкільними навчальними предметами;

• усунення суперечностей у вживанні загальної термінології вчителями різних предметів;

• наступності (спадкоємності) у викладанні змісту окремих предметів;

• взаємопроникнення знань, набутих при вивченні різних предметів;

• зв'язку теоретичних знань із їх практичним застосуванням;

• спільної роботи вчителів з розвитку інтелектуальних здібностей учнів.

З наведеного випливає, що явище міжпредметних зв'язків – багатовимірне, що його сутність не може бути визначена однозначно. Впорядкування смислових значень поняття МПЗ, як і впорядкування видів міжпредметних зв'язків, можливе лише на основі системного підходу, спрямованого на розкриття багатоаспектності та поліфункціональності міжпредметних зв'язків у навчанні та заснованого на широкому використанні поелементного аналізу як структури змісту навчального предмета, так і структури процесу навчання (його мети, методів, засобів, форм організації).

Дидактичне поняття «міжпредметний зв'язок» як система має структуру, що складається з трьох елементів:

• знання (уміння) з однієї предметної області;

• знання (уміння) з іншої предметної області;

• зв'язки цих знань (умінь) в процесі навчання.

Кожний з цих елементів відрізняється варіативністю. Зв'язки охоплюють різні предметні області – суспільні, природничі, технічні науки. Синтез знань має в кожному конкретному випадку певну пізнавальну функцію – пояснення причинно-наслідкових зв’язків у загальних об’єктах, узагальнення й виведення нового узагальненого знання, конкретизації загальних понять, класифікації явищ і процесів, доведення (обґрунтування) узагальнених ідей тощо. У логічно завершеному вигляді міжпредметний зв’язок є вираженим у загальній формі, усвідомленим відношенням між елементами структури різних навчальних предметів.

Таким відношенням може бути нове знання, яке сформувалося завдяки засвоєнню зв’язків між знаннями з різних предметів. Це знання за своїм змістом і способом формування в навчальному пізнанні носить міжпредметний характер (наприклад, фізико-математичні, фізико-хімічні, біохімічні, історико-географічні, політико-економічні, літературно-історичні тощо поняття).

Таким відношенням може бути нове узагальнене уміння, сформоване в результаті засвоєння зв’язків між способами навчально-пізнавальної діяльності, які застосовуються при вивченні різних предметів. Нове уміння є міжпредметним, оскільки може використовуватися у вивченні різних навчальних предметів при оперуванні загальними для них міжпредметними знаннями (наприклад, уміння усного і письмового мовлення, розрахунково-вимірювальні, художньо-образотворчі, графічні уміння, узагальнені уміння розумової діяльності та ін.).

Для продуктивного засвоєння учнями знань, для їхнього інтелектуального розвитку засобами різних предметів шкільного курсу надзвичайно важливо встановити широкі зв’язки як між різними розділами курсів, що вивчаються, так і між різними предметами в цілому. При цьому цінність становлять зв’язки не лише із спорідненими за змістом предметами, а й міжциклові зв’язки. Велике значення інтеграції для розвитку інтелектуальних творчих здібностей учнів пояснюється тим, що в сучасній науці все більше посилюється тенденція до синтезу знань, до усвідомлення і розкриття спільності об’єктів пізнання і дана тенденція в майбутньому буде посилюватися [27].

Математика використовує елементи знань з інших предметів для демонстрації застосувань власних законів, теорій, методів. Елементи змісту інших навчальних предметів, що характеризують певний об’єкт реальної дійсності, також можна й потрібно реалізовувати на уроках математики для вивчення цього об’єкту з інакших позицій (наприклад, кількісних показників чи просторових відношень). Це дасть змогу істотно підвищити рівень розуміння, глибину вивчення учнями змісту інформатики, фізики, хімії, біології та ін. навчальних предметів. При організації та здійсненні міжпредметних зв’язків математики і предметів природничого циклу, створюються найбільш сприятливі умови для розвитку самостійного пошуково-творчого, інтегрованого образу мислення учнів, яке сприяє діалектичному аналізу всього, що відбувається в природі та суспільстві, цілісному сприйняттю картини світу. На цій основі в учнів формуються не лише уміння та навички з основ предмета, а й науковий світогляд, чим закладається міцний фундамент гармонійного розвитку особистості. Крім того, знижується навчальне навантаження, скорочуються недоречні, небажані та педагогічно не обґрунтовані повтори у вивченні окремих навчальних тем, що, своєю чергою, сприяє формуванню свідомого й відповідального ставлення учнів до навчання, пом’якшенню психологічного навантаження, посиленню мотивації та підтриманню постійного інтересу школярів до навчальної діяльності [30].

Формування загальної системи знань учнів про реальний світ, різні форми його прояву, що відображають взаємозв’язки, – одна з основних освітніх функцій міжпредметних зв’язків. Кожний навчальний предмет є джерелом тих або інших видів міжпредметних зв’язків, тож потрібно виділити ті з них, які можна використовувати в змісті математичної освіти, й ті, що йдуть від математики в інші навчальні предмети. При цьому слід враховувати, що зв’язки між окремими предметами мають свою специфіку, яка накладає відбиток на методику навчання. Наприклад, при навчанні математики слід звернути увагу на вдосконалення вивчення тих її розділів, які широко застосовуються в предметах природничого-наукового циклу (інформатики, фізики, хімії, біології, географії, економіки тощо). Необхідно також зміцнювати зв'язки математики з предметами гуманітарного циклу.

При цілеспрямованому й послідовному використанні МПЗ у процесі навчання забезпечується можливість наскрізного застосування знань, умінь, навичок, одержаних на уроках різних предметів. Навчальні предмети починають допомагати один одному. В результаті підвищується ефективність навчання і виховання. Отже, в послідовному здійсненні принципу міжпредметних зв'язків містяться важливі резерви подальшого вдосконалення навчально-виховного процесу. Виявлення та подальше здійснення міжпредметних зв'язків, необхідних і важливих для розкриття провідних положень навчальних тем, дає змогу:

• зосередити увагу вчителів і учнів на ключових аспектах навчальних тем різних предметів, які відіграють важливу роль у розкритті провідних наукових ідей;

• здійснювати поетапну організацію роботи зі встановлення міжпредметних зв'язків, поступово ускладнюючи пізнавальні завдання, розширюючи поле дії творчої ініціативи й пізнавальної самодіяльності школярів, застосовуючи все різноманіття дидактичних засобів для ефективного здійснення багатосторонніх міжпредметних зв'язків;

• формувати пізнавальні інтереси учнів засобами різних навчальних предметів в їх органічній єдності;

• здійснювати творчу співпрацю між учителями вчителями й учнями;

• вивчати найважливіші світоглядні проблеми та питання сьогодення засобами різних навчальних предметів і наук, пов'язуючи їх з життям.

Досягнення головної освітньої мети залежить від того, якою мірою учні навчені сприймати інформацію та використовувати її. Тому освоєння вчителями сучасних інформаційних технологій є об'єктивною необхідністю. Застосування вчителями-предметниками на уроках інформаційно-комунікаційних технологій дає простір для відпрацювання необхідних предметних прийомів і, водночас, сприяє виробленню в учнів навичок освоєння комп'ютерних технологій і застосування їх при розв'язуванні конкретних прикладних задач. Чим ширша сфера застосування комп'ютерних технологій, тим більше навичок з їх освоєння опанують учні, що дуже важливо у зв'язку з безперервною зміною технологій, особливо в царині програмних засобів.

Цілеспрямоване застосування інформаційно-комунікаційних технологій із залученням міжпредметних зв'язків у навчальній практиці забезпечує [27]:

• природну зміну видів навчальної діяльності в рамках одного уроку;

• розширення можливостей ілюстративного (прикладного) супроводу уроку;

• організацію самостійної і дослідницької діяльності учнів.

На основі міжпредметних зв'язків будується узгоджена діяльність вчительського колективу і скоординоване управління всім ходом навчально-виховної роботи. Крім того, МПЗ спонукають кожного вчителя до постійної самоосвіти, творчості й взаємодії з іншими вчителями-предметниками. Це сприяє підвищенню педагогічної майстерності й об'єднанню педагогічного колективу в розв'язанні єдиних завдань навчання. Узгодженість навчально-виховного процесу з усіх предметів дає змогу досягати більшого ефекту в загальному розвитку учнів, гармонійно розвивати всі сфери їхньої розумової, емоційної і фізичної діяльності [27].

Міжпредметні зв'язки є узгодженою конструкцією змісту навчального матеріалу двох або більше навчальних предметів, основними характеристиками якої є:

• смислове співвідношення елементів змісту, що входять до складу двох і більше навчальних предметів;

• адекватність методичних прийомів, а також форм організації навчальної діяльності предметам, між якими встановлюється зв'язок;

• забезпечення цілеспрямованого формування в учнів умінь і навичок комплексного використання знань при розв'язуванні навчальних задач.

Рушійною силою в здійсненні міжпредметних зв’язків є суперечність між проблемою, яка виникає, і неможливістю її вирішити на базі одного навчального предмета.

Призначення міжпредметних зв’язків полягає в тому, що вони:

• забезпечують формування в учнів наукової картини світу, визначаючи взаємозв’язок між різними формами руху матерії;

• здійснюють координацію навчального матеріалу, побудовану на принципах наступності, розвитку та системності;

• задають міжпредметний рівень засвоєння знань і розвитку мислення, що забезпечує широке перенесення знань, узагальнений характер сформованості пізнавальних умінь;

• передбачають єдине визначення загальнонаукових понять, координацію процесу їх формування.

Встановлення зв’язків між навчальним предметами – необхідна умова розвитку системи знань, оволодіння основами наук. Формування в учнів наукового світогляду спирається на наукову картину світу і вимагає встановлення органічних зв’язків між усіма складовими частинами змісту освіти. Узгодженість навчально-виховного процесу з усіх предметів дозволяє досягати більшого ефекту в загальному розвитку учнів, гармонійно розвивати всі сфери їхньої розумової, емоційної та фізичної діяльності. У результаті, навчання, виховання і розвитку, заснованих на цілеспрямованій реалізації міжпредметних зв’язків, формується здатність учнів цілісно сприймати навколишній світ, уміння самостійно встановлювати істотні причинно-наслідкові зв’язки між предметами і явищами. На основі міжпредметних зв’язків може будуватись узгоджена діяльність вчительського колективу і скоординоване управління всім ходом навчально-виховної роботи [29].

3.2 Міжпредметні зв'язки показникової функції у природничих науках та технологіях

Показникова функція допомогла людям описати такі процеси, як радіоактивний розпад, розмноження бактерій, утворення нейтронів у ланцюговій реакції. Без неї не були б розв'язані задачі про зміну атмосферного тиску, приріст деревини. І навіть сума вашого внеску до банку підлягає закону, який описується цією функцією [30].

3.2.1 Застосування показникової функції в фізиці

Знання про показникову функцію є основою при вивченні таких тем, як "Похідна ", "Термодинаміка", "Електромагнетизм", "Коливання".[27]

Радіоактивний розпад. Під час радіоактивного розпаду маса m речовини змінюється на протязі часу t по закону: $m = m_0 a^{kx}$, де m — маса речовини через t років після початку розпаду; m_0 — початкова маса речовини; k и a — постійні величини для даної речовини.

Зміна температури. Температура T 100 г піску, нагрітого до 100ºC, зміняються при 0ºC в залежності від часу t за формулою: $T = 100 \cdot 0{,}8^{t}$.

Зміна рівня рідини. Під час витікання рідини з циліндричної посудини через тонку трубку, розміщену в основі циліндра, висота h рівня рідини із зміною часу t змінюється по формулі: $h = h_0 a^t$, де h_0 — початковий рівень рідини ; a — постійна, яка залежить від діаметра трубки.

Зміна атмосферного тиску. Атмосферний тиск змінюється в залежності від висоти h над рівнем моря за законом $p = p_0 a^h$, де p_0 — атмосферний тиск над рівнем моря; a — постійна величина.

При падінні тіл у безповітряному просторі їх швидкість рівномірно збільшується. Інакше відбувається падіння в повітрі. Вважаємо, що сила опору повітря пропорційна швидкості падіння, тобто $F = -kv$ (знак „ мінус" показує, що напрям сили опору повітря направлений вбік, протилежний напряму падіння). Через t секунд після початку падіння швидкість $v = \frac{mg}{k}(1 - e^{\frac{kt}{m}})$, де m – маса парашутиста. $0 < \frac{1}{e} < 1$ Коли t збільшується, то $e^{\frac{kt}{m}}$ зменшується і прямує до 0, вираз у дужках прямує до 1, $v \to -\frac{mg}{k}$, тобто падіння стане рівномірним; k залежить від густини повітря, площі поверхні тіла, що падає, тощо.

Наприклад, при падінні з парашутом цей коефіцієнт доволі великий, і тому швидкість приземлення парашутиста порівняно мала — 5 м/с. Ясно, що швидкість падіння пушинки буде меншою, ніж швидкість падіння свинцевої кульки, що має ту саму масу, бо пушинка має більшу площу поверхні і тому більше значення k. Саме тому пушинка так повільно опускається вниз і так легко підхоплюється потоком повітря. Аристотель у своїх міркуваннях не враховував опору повітря і вважав, що важкі тіла у стільки разів падають швидше за легкі, у скільки разів вони важчі за них. Галілей експериментально заперечив це твердження, кидаючи кулі з похилої Пізанської башти.

Розглянемо завдання про падіння парашутиста. Якщо вважати, що сила опору повітря пропорційна швидкості падіння парашутиста, тобто що $F = kv$, то через t секунд швидкість падіння дорівнюватиме:$v = \frac{mg}{k(1-e^{\frac{-kt}{m}})}$, де m - маса парашутиста. Через деякий проміжок часу $e^{\frac{-kt}{m}}$ стане дуже малим числом, і падіння стане майже рівномірним. Коефіцієнт пропорційності k залежить від розмірів парашута. Дана формула придатна не тільки для вивчення падіння парашутиста, але і для вивчення падіння краплі дощової води, пушинки і т.д.

Якщо при коливаннях маятника, гирі, що гойдається на пружині, не нехтувати опором повітря, то амплітуда коливань стає все менше, коливання затухають. Відхилення точки, що здійснює загасаючі коливання, виражається формулою:$s = Ae^{-kt\sin(xt+x)}$. Так як множник $e^{\frac{-kt}{m}}$зменшується з часом, то розмах коливань стає все менше і менше.

Радіоактивний розпад речовини задається формулою $m = m_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$, де m і m_0 маса радіоактивної речовини у момент часу t і в початковий момент часу $t = 0$; T - період напіврозпаду(проміжок часу, за який первинна кількість речовини зменшується удвічі). Коли радіоактивна речовина розпадається, його кількість зменшується. Через деякий час залишається половина первинної кількості речовини. Чим більше періоду напіврозпаду, тим повільніше розпадається речовина.

Завдання .

Радіоактивний розпад радію відбувається за законом $M = M_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$, де M_0 – початкова маса радію в міліграмах, M – маса радію в міліграмах через t (хв.) розпаду, T – період піврозпаду. Знайдіть період піврозпаду T, якщо $t =$ 6хв., $M_0 = 8$мг., $M = 2$мг.

Розв'язання.

$$2 = 8(\frac{1}{2})^{\frac{6}{T}}$$

$$2^1 = 2^3 \cdot 2^{-\frac{6}{T}}$$

$$2^1 = 2^{3-\frac{6}{T}}$$

$$1 = 3 - \frac{6}{T}$$

$$2 = \frac{6}{T}$$

$$T = 3$$

Відповідь: період піврозпаду дорівнює 3 [27].

Завдання

Період напіврозпаду плутонію T=140 добам. Якою стане маса m плутонію через 10 років, якщо його початкова маса $m_0 = 8$ г?

В даній задачі $t = 10 \cdot 365$ (враховуємо, що в році 365 днів), $\frac{t}{T} = \frac{365}{14}$. За формулою радіоактивного розпаду, за допомогою калькулятора знаходимо

$m = 8(\frac{1}{2})^{\frac{365}{14}} \approx 1{,}1345 \cdot 10^{-7}$.

Відповідь. Через 10 років маса плутонію стане $1{,}13 \cdot 10^{-7}$ г [30].

Завдання

При радіоактивному розпаді кількість деякої речовини зменшується вдвічі за добу. Скільки речовини залишиться від 250 г через : а) 1,5 діб; б) 3,5 діб?

а) $m_0 = 250$ г $\quad T = 1$ діб $\quad t = 1{,}5$ діб

$m = m_0(\frac{1}{2})^{1{,}5}$, де m – маса, m_0 – початкова маса.

$m = 250 \cdot 0{,}5^{1{,}5} = 250 \cdot \sqrt{0{,}5^3} = 250 \cdot \sqrt{125} \approx 88{,}4$ (г)

б) $m0 = 250$г $\quad T = 1$ діб $\quad t = 3,5$ діб

$m = m_0(\frac{1}{2})^{3{,}5}$, де m – маса, m_0 – початкова маса.

$m = 250 \cdot 0{,}5^{\frac{7}{2}} = 250 \cdot \sqrt{0{,}5^4} \cdot \sqrt{0{,}5^3} = 250 \cdot 0{,}25 \cdot \sqrt{125} \approx 22{,}1$ (г)

Відповідь: а) 88,4 (г), б) 22,1 (г) [16].

Явище радіоактивного розпаду використовується для визначення віку археологічних знахідок, наприклад, визначений зразковий вік Землі (близько 5,5 млрд. років).

Зміна атмосферного тиску p залежно від висоти h над рівнем моря описується формулою $p = p_0 \cdot a^k$, де p_0- атмосферний тиск над рівнем моря, a - деяка постійна.

При падінні тіл у безповітряному просторі швидкість їх безперервно зростає. При падінні тіл в повітрі швидкість падіння теж збільшується, але не може перевершити певної величини

Завдання

Площа перерізу тросу пов’язана з опором розриву також за показниковим законом [30].

Зараз багато морів та океанів борознять дослідницькі кораблі. У заздалегідь встановлених місцях вони зупиняються і опускають за борт трос, на кінці якого знаходяться прилади. Їх опускають на дно, а потім піднімають вгору і записують показники. Але іноді відбувається неприємна подія - трос розривається і всі цінні прилади опиняються назавжди на дні моря.

Здавалось, що цієї проблеми можна було б уникнути, якщо зробити трос товщим. Але тут виникає нове ускладнення – верхні частини троса повинні утримувати не тільки прилади, які занурюють, але й нижню частину троса, тому при потовщенні троса на верхню частину ляже дуже велике навантаження.

Тому доцільно робити нижню частину тросу тоншою, ніж верхню. Виникає питання: як повинна змінюватись товщина тросу для того, щоб в будь якому перерізі його на 1 $см^2$ приходилась одне й те ж саме навантаження?

Досліди цього питання показали, що площа перерізу тросу повинна змінюватись за законом: $S = S_0 e^{\frac{(\gamma-1)S_0 x}{P}}$, де

S_0 – площа нижнього перерізу,

S – площа перерізу на висоті x від нижнього перерізу,

γ – питома вага матеріалу, із якого зроблено трос,

P – вага в воді вантажу, який опускають.

Такий трос називають тросом рівного опору розриву. Він має найменшу масу, ніж трос постійного перерізу, який розрахований на таке ж навантаження.

Багато складних задач доводиться розв'язувати в теорії міжпланетних подорожей. Однією з них є задача про визначення кількості палива, необхідного для того, щоб надати ракеті швидкість υ_1, потрібну для досягнення Місяця, Венери, Марса або якоїсь іншої планети. Ця кількість залежить від маси m_0 самої ракети (без палива) і від швидкості υ_O, з якою продукти згоряння витікають із сопла ракетного двигуна.

Здання.

Швидкість руху матеріальної точки залежно від температури змінюється за законом $v = 1{,}01^t$, де t – температура, v – швидкість. За якої температури швидкість точки дорівню 1.

Розв'язання

$$1{,}01^{t} = 1$$

$$1{,}01^{t} = 1{,}01^{0}$$

$$t = 0$$

Відповідь: при температурі $t = 0$°С швидкість точки дорівнює 1 [31].

Завдання.

Метелик злітаючи з квітки, летить по траєкторії, яку можна описати рівнянням $s = \frac{1}{8\cdot 2^{1-4t}}$, де t - час . Через скільки секунд метелик пролетить відстань 64 см? 256см?

Розв'язання

а) $64 = \frac{1}{8\cdot 2^{1-4t}}$

$$2^{6} = \frac{1}{2^{3+1-4t}}$$

$$2^{6} = 2^{-3-1+4t}$$

$$6 = -4 + 4t$$

$$4t = 10$$

$t = 2{,}5$

Відповідь: Через $t = 2{,}5$ секунд метелик пролетить відстань 64 см.

б) $256 = \frac{1}{8\cdot 2^{1-4t}}$

$$2^{8} = \frac{1}{2^{3+1-4t}}$$

$$2^{8} = 2^{-3-1+4t}$$

$$8 = -4 + 4t$$

$$4t = 8$$

$$t = 2$$

Відповідь: Через $t = 2$ секунд метелик пролетить відстань 256 см.

Звдання..

Якщо під час радіоактивного розпаду кількість речовини за добу зменшиться удвічі, то після x діб від маси M_0 залишається маса

$M = M_0 \cdot (\frac{1}{2})^x$, *де* M_0 – початкова маса, M – маса, x – кількість діб.

Скориставшись цією формулою, знайдіть:

а) Скільки радіоактивної речовини залишиться через три доби?

б) Через скільки діб кількість речовини зменшиться у 128 разів?

Розв'язання

а) $\frac{M}{M_0} = (\frac{1}{2})^x$, оскільки $x = 3$, то $\frac{M}{M_0} = \frac{1}{8}$ і $M = \frac{1}{8} M_0$.

Відповідь: Через три доби залишиться $\frac{1}{8}$ початкової маси речовини.

б) $\frac{M}{M_0} = \frac{1}{128}$; $\frac{M}{M_0} = (\frac{1}{2})^7$; $(\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{2})^7$; $x = 7$.

Відповідь: Через сім діб [30].

3.2.2 Застосування показникової функції в економічній справі

Ще за стародавніх часів було широко поширене лихварство — віддавання грошей у позику під відсотки. Селянин у разі неврожаю, ремісник, майно якого знищила пожежа, розорений торгівець змушені були йти до лихваря, обіцяючи наступного року повернути суму значно більшу, ніж узята в позику. Наприклад, у Давньому Вавилоні лихварі брали по 20 % лихви на рік. При цьому, якщо боржник не міг повернути борг наступного року, йому треба було платити відсотки не тільки з позиченого капіталу, а й з відсотків, що виросли за рік. Тому через 2 роки слід було заплатити не 40 %, а 44 % лихви, адже $1{,}2^2 = 1{,}44$. За 5 років сума боргу збільшувалася в $1{,}2^5$ разів, тобто майже в 2,5 рази, а за 10 – років більш ніж у 6 разів. Зрозуміло, що більшість боржників були не в змозі повернути борг і, давно виплативши основну суму боргу, були змушені все життя працювати на те, щоб виплатити все зростаючі відсотки. Нарешті зубожілі боржники ставали рабами хижого лихваря [30].

У XIV—XV ст. у Західній Європі почали з'являтися банки — установи, які давали гроші в позику князям та купцям, фінансували за великі відсотки далекі мандрівки та завойовницькі походи. Щоб полегшити розрахунки складних відсотків, склали таблиці, за якими відразу можна було дізнатися, яку суму треба виплатити через n років, якщо була взята сума a під $p\%$ річних. Сума, яку треба заплатити, виражається формулою: $S = a(1 + \frac{p}{100})^n$

Якщо p — стала, то S є функцією від n. Такі таблиці давали значення показникової функції при різних значеннях основи $1 + \frac{p}{100}$ і натуральних значеннях n.

Останнє обмеження було не дуже зручним: іноді гроші бралися в борг не на ціле число років, а, наприклад, на 2 чи 6 місяців. Так виникла ідея степеня з дробовим показником. Ця ідея належала ще Архімеду, але вона не була зрозумілою його сучасникам. І лише через 1,5 тисячоліття почали розглядати піднесення чисел до степеня з дробовим показником.

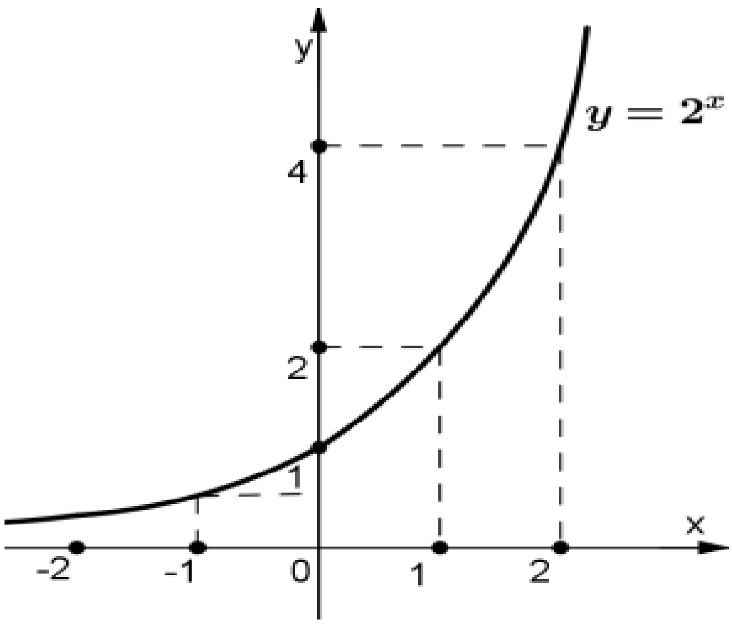


рис. 3.2.2.1

Нині багато говорять про інформаційний бум. Стверджують, що кількість інформації подвоюється кожні десять років. Зобразимо цей процес у вигляді графіка деякої функції (рис.3.2.2.1).

Візьмемо обсяг інформації в деякий початковий рік за 1. Удвічі більший відрізок поставимо над одиничною оцінкою, вважаючи, що оцінка відповідає першому десятку років. Удвічі більший відрізок відповідає другому десятку років, ще вдвічі більший — третьому і т.д. Обрані нами значення аргументу є елементами арифметичної прогресії: 1, 2, 3, ... У той самий час значення функції зростають за законом геометричної професії: 2, 4, 8, ... Подивимося, який був обсяг інформації до року, прийнятого за початковий. По осі абсцис уліво від початку координат відкладатимемо значення функції в порядку зменшення — у 2 рази менше з кожним кроком. Сполучимо всі побудовані точки плавною лінією. Перед нами графік показникової функції. Головна особливість графіка цієї функції — її крутизна. Показникова функція зустрічається в описі процесів, у яких швидкість зміни величини пропорційна до самої величини.

Завдання .

Вкладник поклав до банку на рахунок 1500грн. Яка сума буде в нього через 5 років, якщо відсоткова ставка 10% річних?

$1500 \cdot 0{,}1 = 150(\text{грн}) - 10\%$від суми на рахунку.

Через рік початкова сума 1500 грн збільшиться на 10%, тому нова сума складе 110% від початкової, таким чином початкова сума збільшиться в 1,1 рази. В наступному році сума теж збільшиться в 1,12 рази. Тому через 5 років на рахунку буде: $1{,}1^5 \cdot 1500 = 1{,}61051 \cdot 1500 = 2415{,}765(\text{грн})$.

Відповід: $2415{,}765(\text{грн})$ [30].

Завдання.

При оформленні кредиту в розмірі 10000 тис. грн на пів року під 10% річних були утримані комісійні в розмірі 1% від суми кредиту. Яка фактично використана сума кредиту і під який відсоток річних був фактично оформлений кредит?

$$10000 \cdot 0{,}1 = 100\text{тис. грн.} - \text{сума комісійних}$$

$10000\ \text{тис. грн} - 100\ \text{тис. грн} = 9\,900\ \text{тис. грн}$ – фактично використана сума кредиту.

$10000\ \text{тис. грн.} \cdot 0{,}05 = 500\ \text{тис. грн.}$ – за використання кредиту в розмірі 9900 тис. грн.

На протязі півроку нараховано відсотків :

$$9900\ \text{тис. грн.} - 100\%$$

$$500 \text{ тис. грн.} - x\%$$

Фактична ставка банківського відсотку за надання кредиту в розмірі 9900 тис. грн.. на півроку $5{,}05 \cdot 2 = 10{,}1\%$.

Відповідь: фактичний відсоток річних, під який був отриманий кредит 10,1% [12].

3.2.3 Застосування показникової функції в біології

Розглянемо, як зростає популяція бактерій у відповідності з простим життєвим циклом. При цьому час між моментом поділу материнської клітини (народження нової) і моментом, коли вона сама ділиться, називається періодом поділу, або часом генерації [30].

Нехай число бактерій у культурі становить A_0. За час однієї генерації всі ці A_0 бактерій поділяться навпіл і утвориться $2A_0$ бактерій. Через дві генерації їх стане $2 \cdot 2A_0$, через три — $2 \cdot 2 \cdot 2A_0$ і т.д. Через p генерацій $A = 2P \cdot A_0$.

Нехай час однієї генерації *T,* тоді $p = \frac{t}{T}$, де t час з початку розподілу.

$$A = 2^{\frac{t}{T}}$$

Популяція росте за показниковим законом, або, як кажуть, експоненціально (лат. *exponense* — той, хто показує).

Саме здатність бактерій до швидкого розмноження забезпечує їх кількісну перевагу серед живих форм. Якби не було природних причин, що заважали б вибухам кількості бактерій, сумарна маса яких становила б декілька десятків тисяч тонн, а за дві доби показникового зростання маса однієї бактерії перевищила б у декілька разів масу Земної кулі. Наша планета, проте, не перетворилася на суцільну масу мікробів. І це не тільки тому, що бактерії вичерпують поживні речовини, які підтримують їх зростання, а й тому, що при зростанні вони виділяють велику кількість продуктів, токсичних для них самих.

З відкриттям англійським мікробіологом Флемінгом пеніциліну і народженням нової промисловості знати кількість грибків, утворених у процесі розвитку, стало важливо і можливо при використанні виведеної раніше формули.

Звичайно, показниковий закон виконується дуже приблизно в біологічних системах, бо ми маємо тут справу з дуже складними системами.

За законом показникової функції розмножувалося б все живе на Землі, якби для цього були сприятливі умови, тобто не було природних ворогів і було вдосталь їжі. Доказ тому - поширення Австралії кроликів, яких там раніше не було. Досить було випустити пару особин, як через деякий час їх потомство стало національним лихом.

Якби всі макові зерна давали сходи, то через 5 років число "нащадків" однієї рослини дорівнювало б $243 \cdot 10^{15}$ або приблизно 2000 рослин на 1 м суші.

Потомство кімнатних мух за літо тільки від однієї самки може скласти $8 \cdot 10^{14}$. Ці мухи важили б кілька мільйонів тонн, а вибудувані в один ланцюжок, вони склали б відстань, більшу, ніж відстань від Землі до Сонця. Потомство пари мух за 2 роки мало б масу, що перевищує масу земної кулі. І тільки завдяки спільноті тварин і рослин, коли збільшення одного виду тягне за собою зростання кількості його ворогів, встановлюється динамічна рівновага в природі.

Завдання.

Прикладом швидкого розмноження бактерій є виготовлення дріжджів, під час якого по мірі ростуть бактерії проводиться відповідне додавання цукрової маси. Знайти масу дріжджів, якщо початкова маса складає 10 кг, а тривалість процесу 9 год.

Збільшення маси дріжджів виражається формулою показникової функції:

$$m = m_0 \cdot 1{,}2^t$$

де m_0 – початкова маса дріжджів,

$m -$ маса дріжджів в процесі бродіння,

t – час бродіння в годинах.

$$m = 10 \cdot 1{,}2^9 = 51{,}6 \text{ (кг)}$$

Відповідь: маса отриманих дріжджів 51,6(кг) [28].

3.2.4 Застосування показникової функції в медицині

Коли людина лякається, в кров виділяється адреналін, який потім руйнується, причому швидкість руйнування пропорційна кількості цієї речовини, що ще залишилася в крові.

При діагностиці хвороб нирок часто визначають здатність нирок виводити з крові радіоактивні ізотопи, причому їх кількість спадає за показниковим законом.

Швидкість зміни кількості ліків у організмі пропорційна їх кількості. Якщо $A(t)$ — кількість ліків у тілі через час t, R_0 -швидкість надходження ліків до організму (стала — відома величина), k — коефіцієнт пропорційності (стала, що характеризує швидкість виведення ліків з організму), то $A(t) = \frac{R_0}{k}(1 - e^{-kt})$

При відновленні концентрації гемоглобіну в крові донора або пораненого за показниковим законом спадає різниця між нормальним вмістом гемоглобіну та наявною кількістю цієї речовини. Як і при радіоактивному розпаді, лікарі розглядають період, за який розпадається або відновлюється половина речовини. Для адреналіну — частки секунди, для ізотопів — хвилини, для гемоглобіну — дні.

Звичайно, показниковий закон виконується дуже приблизно в біологічних системах, бо ми маємо тут справу з дуже складними системами.

3.2.5 Застосування показникової функції хімії

Тиск атмосфери, виражений в міліметрах ртутного стовпа міняється згідно із законом: $P = 760 \cdot e - \frac{h}{8000}$, де h - висота точки над рівнем моря (в метрах). Цю формулу використовують геодезисти для барометричного інвелірування, тобто для визначення різниці висот над рівнем моря двох точок на земній поверхні.

При проходженні світла через каламутне середовище кожен шар цього середовища поглинає строго певну частину світу, що падає на нього. Сила світла I визначається по формулі: $I = I_0 \cdot e^{-ks}$, де: s - товщина шару, k - деякий коефіцієнт, що характеризує каламутне середовище. Подібний же закон характеризуватиме процес поглинання газу відповідним середовищем, зміну швидкості вітру і тому подібне [29].

Закон охолодження. Нехай T_1 - температура тіла, T_0 - температура довкілля, де $T_1 > T_0$, Тоді температура тіла T мінятиметься згідно із законом: $\mathrm{T} = T_0 + (T_1 - T_0)\, e^{-kt}$, де k - деякий коефіцієнт, залежний від природи охолоджувального тіла. Приклад, процес охолодження розплавленого парафіну. Якщо коефіцієнт буде не відомий, то необхідно досвідченим шляхом упізнати температуру T_2 в який-небудь момент часу t_2. Тоді:

$T_2 = T_0 + (T_1 - T_0)\, e^{-kt}$, звідси знайдемо:

$e^{-kt} = (\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0})^{\frac{1}{t_1}}$. Тоді $T = T_0 + (T_1 - T_0)(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0})^{\frac{1}{t_1}}$.

Завдання.

Чому дорівнює маса йоду в кінці 4 діб з початку спостереженняя, якщо в початковий момент йогом аса складала 1г.

Розв'язання.

$$m = m_0 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}},$$

де m_0 - маса в початковий момент, m – кінцева маса.

$$m = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}7 \text{ г},$$

Відповідь: маса його дорівнює 0,7 г [28].

3.3 Міжпредметні зв'язки логарифмічної функції у природничих науках та технологіях

Логарифми відігравали роль засобу спрощення розрахунків. Вони швидко почали застосовуватися вченими та інженерами для пришвидшення виконання обчислень. При цьому використовувались логарифмічні лінійки та таблиці логарифмів. Перші таблиці логарифмів були складені швейцарським математиком Бюргі (1552-1623 рр.). Термін ”натуральний логарифм” був запропонований німецьким математиком Меркатору (1620-1687 рр.) [30].

3.3.1 Застосування логарифмічної функції в сейсмології

Логарифмічну функцію використовують для визначення величини землетрусу $R = \lg\frac{I}{I_0}$, де R - показання шкали Ріхтера, I - інтенсивність землетрусу, I_0 - мінімальна норма інтенсивності, яка визначається підземними виверженнями. В сейсмології використовується й інша величина – магнітуда землетрусу, що характеризує кількість енергії, яка виділилась у вогнищі землетрусу. $M = \frac{2}{3}(lgE - 11{,}8)$, де M - магнітуда землетрусу, E - енергія землетрусу в джоулях [30].

Завдання

Величина землетрусу R, який відбувся 19 вересня 1985 року в Мексиці, складала за шкалою Ріхтера 7,8 бала. У скільки разів інтенсивність землетрусу I перевищувала мінімальну норму інтенсивності I_0, зумовлену підземними виверженнями, коли відомо, що $R = lg\frac{I}{I_0}$?

Розв'язання

Поклавши $I = kI_0$, одержуємо рівняння $R = lg\, k$, звідки $k = 10^R$. За умовою задачі R = 7,8 , отже $k = 10^{7,8} \approx 63095734$(рази).

Відповідь: ≈ 63095734 рази [27].

3.3.2 Застосування логарифмічної функції в фізиці

У фізиці відома формула залежності інтенсивності звуку β від сили звуку I :$\beta = 10 \cdot lg\frac{I}{I_0}$, де I_0- сила звуку на порозі чутності (мінімальна інтенсивність, при якій людське вухо перестає сприймати звук) [27].

Завдання

Швидкість поширення телеграфного сигналу S визначається за формулою $S = (\frac{r}{t})^2 lg\frac{t}{r}$, де r – радіус жили кабелю, t – товщина покриваючої частини кабелю. Визначити S, якщо відомо, що $r = \frac{1}{20}$

Вважаючи, що радіус жили кабелю залишається сталим $r = \frac{1}{20}$, а товщина t покриття продовжує спадати, визначте її величину у випадку, коли швидкість поширення сигналу дорівнює нулю.

Розв'язання

Складемо рівняння, підставивши у формулу швидкості поширення телеграфного сигналу значення $r = \frac{1}{20}, S = 0$. $(\frac{1}{20t})^2 \cdot \lg 20t = 0$. Оскільки $t \neq 0$, то дане рівняння рівносильне рівнянню $lg\ 20t = 0$. За означенням логарифма одержуємо $20t = 1$, звідки $t = \frac{1}{20}$.

Відповідь. 0,05 [27].

Завдання

Один парашутист стрибнув з літака на 3 хв раніше, ніж другий. Залежність часу t , в хв, від відстані S , в метрах, яку пролетіли парашутисти, виражається формулами $t_1 = \log_5 S^2, t_2 = \log_{\sqrt{5}} S$. На якій відстані другий парашутист наздожене першого?

Розв'язання

За умовою задачі $t_1 - t_2 = 3$, звідси маємо рівняння $\log_5 S^2 - \log_{\sqrt{5}} S = 3$. Застосовуючи властивості логарифмів, одержуємо $(\log_5 S)^2 - \log_{\sqrt{5}} S - 3 = 0$.

Нехай $\log_5 S = t$, де $S > 0$.

Використовуючи заміну, одержуємо квадратне рівняння $t^2 - 2t - 3 = 0$. За теоремою Вієта визначаємо його корені:$t_1 = 3, t_2 = -1$.

Отже, $\log_5 S = 3$ або $\log_5 S = -1$. Звідки, маємо S =125 або $S = \frac{1}{5}$ (сторонній корінь). Відповідь. 125м [30].

3.3.3 Застосування логарифмічної функції музичних технологіях

Граючи на клавішах сучасного рояля, ми «граємо на логарифмах». Так звані «щаблі» темперованої хроматичної гами не розставлені на рівних відстанях ні стосовно частоти коливань, ні стосовно довжин хвиль відповідних звуків, а являють собою логарифми цих величин. Основа цих логарифмів дорівнює 2 [30].

Покладемо, що нота «до» найнижчої октави (будемо її називати нульовою октавою) визначена n коливаннями за секунду. Тоді «до» першої октави буде здійснювати 2n коливань за секунду, а «до» m-ої октави – $n \cdot 2^m$ коливань.

Позначимо всі ноти хроматичної гами номерами p, приймаючи основний тон «до» кожної октави за нульовий. Тоді, наприклад, тон «соль» буде 9-й; 12-й тон знову буде «до», тільки на октаву вище. Оскільки в темперованій хроматичній гамі кожний наступний тон визначається числом коливань в $\sqrt[12]{2}$ разів більше, ніж попередній, то число коливань будь-якого тону можна виразити формулою$N_{pm} = n \cdot 2^m \cdot (\sqrt[12]{2})^p$.

Логарифмуючи цю формулу, одержуємо:

$$lg(N_{pm}) = \lg n + mlg2 + \frac{p}{12} lg2 = lgn + \left(m + \frac{p}{12}\right) lg2 .$$

Приймаючи число коливань найнижчого «до» за одиницю (n=1) і зводячи всі логарифми до основи 2, маємо:

$$\log_2\left(N_{pm}\right) = m + \frac{p}{12}.$$

Номери клавіш рояля являють собою логарифми чисел коливань відповідних звуків, помножені на 12. Наприклад, у тоні «соль» третьої октави, тобто в числі $3 + \frac{7}{12} \approx 3{,}383$число 3 є характеристикою логарифма числа коливань цього тону, а $\frac{7}{12}$ – мантиса того самого логарифма за основою 2.

3.3.4 Застосування логарифмічної функції в біології

Логарифмічна спіраль у природі. Живі істоти звичайно зростають, зберігаючи загальні обриси своєї форми. При цьому найчастіше вони збільшуються за всіма показниками: доросла істота й вища, і товстіша за дитинча. Але, наприклад, мушлі деяких морських тварин можуть зростати лише в одному напрямку. Щоб не занадто витягатися в довжину, їм доводиться скручуватися, причому кожний наступний виток подібний до попереднього. Таке збільшення відбувається по логарифмічній спіралі або за деякими її просторовими аналогами. Тому мушлі багатьох молюсків, равликів, а також роги гірських козлів (архарів) закручені по логарифмічній спіралі. Можна сказати, що ця спіраль є математичним символом співвідношення форми й зростання. Великий німецький поет Йоганн Вольфганг Ґете вважав її навіть математичним символом життя й духовного розвитку.

Логарифмічною спіраллю окреслені на тільки мушлі. У соняшнику насіння розташовані по дугах, близьким до неї. Один із найпоширеніших павуків епейра сплітає павутиння, закручуючи нитки навколо центру по логарифмічних спіралях. По логарифмічних спіралях закручені й багато галактик.

Завдання.

Відомо, що відношення між вуглеводом C^{12} і його радіоактивним ізотопом C^{14} в живому організмі постійне. Період напіврозпаду вуглеводу C^{14} складає 5760 років. Визначте вік залишків мамонта, знайдених у вічній мерзлоті на Таймирі, якщо відносний склад в ізотопа C^{14} складає 26% від його кількості в живому організмі.

$m = q,\ t = 5760,\ p = \frac{1}{2},\ B = 0{,}26m,$ де t – вік, B – відсотковий вміст.

$$x = \frac{t \cdot (lgB - lgq)}{lgp} = \frac{5760 \cdot (\lg(0{,}26m) - lgm)}{lg\frac{1}{2}} = \frac{5760 \cdot lg0{,}26}{-lg2}$$

$$= -\frac{5760 \cdot (-0{,}5850)}{0{,}3010} \approx 11200$$

Відповідь: вік залишків мамонта складає приблизно 11200 років [29].

3.3.5 Застосування логарифмічної функції у техніці

У техніці часто застосовують обертові ножі. Сила, з якої вони тиснуть на матеріал, що розрізається, залежить від кута різання, тобто кута між лезом ножа й напрямом вектора швидкості обертання. Для постійного тиску необхідно, щоб кут різання зберігав постійне значення, а це буде в тому випадку, якщо леза ножів окреслені по дузі логарифмічної спіралі. Величина кута різання залежить від властивостей матеріалу, що обробляється.

У гідротехніці по логарифмічній спіралі згинають трубу, яка підводить потік води до лопатей турбіни. Завдяки такій формі труби втрати енергії на зміну напряму потоку в трубі виявляються мінімальними, і сила тиску води використовується з максимальною продуктивністю.

Пропорційність довжини дуги логарифмічної спіралі до різниці довжин радіус-векторів використовують при проектуванні зубчастих коліс зі змінним передаточним числом.

Завдання.

Збільшення діаметра об’єктива телескопа дозволяє бачити кількість зірок, які не можна розрізнити простим оком. При цьому гранична “зіркова величина” k зірок, які не можна побачити через телескоп, обчислюється за формулою $k = 7{,}5 + 5\lg D$, де D – діаметр об’єктива телескопа в см.

Розв’язання.

Якщо $D = 16$ см, то $k = 7{,}5 + 5\lg 16 \approx 13{,}5$ (см.)

Відповідь: гранична “зіркова величина” при діаметрі 16 см [30].

3.3.6 Застосування логарифмічної функції в астрономії

Шум і зірки можливо поєднати тому, що гучність шуму і яскравість зірок оцінюються однаковим способом: за логарифмічною шкалою [27].

Астрономи розподіляють зірки за ступенями видимої яскравості на світила першої величини, другої, третьої й т.д. Послідовні зоряні величини оком сприймаються як члени арифметичної прогресії. Але фізична яскравість їх змінюється за іншим законом: об’єктивні яскравості становлять геометричну прогресію зі знаменником 2,5. «Величина» зірки являє собою ні що інше, як логарифм її фізичної яскравості. Зірка, наприклад, третьої величини, яскравіша за зірку першої величини в $2{,}5^{3-1} = 6{,}25$ рази. Таким чином, астроном, оцінюючи видиму яскравість зірок, оперує з таблицею логарифмів за основою 2,5.

Подібним способом оцінюється й гучність шуму. Шкідливий вплив промислових шумів на здоров’я робітників і на продуктивність праці визначив потребу розробити прийоми точної числової оцінки його гучності. Одиницею гучності служить «бел», а на практиці використовується одиниця вимірювання «децибел», яка становить його десяту частину. Послідовні ступені гучності – 1 бел, 2 бела й т.д. (практично – 10 децибел, 20 децибел і т.д.) – становлять для нашого слуху арифметичну прогресію. Фізична ж «сила» цих шумів (точніше – енергія) становить геометричну прогресію зі знаменником 10. Різниці гучностей в 1 бел відповідає відношенню сили шумів 10. Отже, гучність шуму, виражена в белах, дорівнює десятковому логарифму його фізичної сили. Розглянемо кілька прикладів.

Тихе шелестіння листя оцінюється в 1 бел, голосна розмова – в 6,5 белів, ричання лева – в 8,7 біла. Звідси випливає, що за силою звуку розмовна мова перевищує шелестіння листя у $10^{6{,}5-1} = 10^{5{,}5} \approx 316000$ разів. Левине ричання гучніше голосної розмови приблизно в 158 разів.

Шум, гучність якого більше 8 бел, визнається шкідливим для людського організму.

Чи випадковість те, що і при оцінці видимої яскравості зірок, і при вимірюванні гучності шуму ми маємо справу з логарифмічною залежністю між величиною відчуття й величиною подразнення, що його породжує? Ні. І те, й інше – наслідок дії загального закону (психофізичного закону Фехнера), за яким величина відчуття пропорційна логарифму величини роздратування. Як бачимо, логарифми втручаються навіть в область психології.

Завдання.

Обчислити абсолютну зоряну величину Полярної зірки (Малої Ведмедиці), якщо її видима зоряна величина 2,1, а відстань до неї 650 ц.р.

Розв'язання.

$M = m + 5 - 5lg(D)$, де m - видима зоряна величина, M – абсолютна зоряна величина, D – відстань до зірки.

$$M = 2{,}1 + 5 - 5lg(2119) = 2{,}1 + 5 - 5 \cdot 3{,}26 = -9{,}53$$

Відповідь: абсолютна зоряна величина -9,53 [27].

3.3.7 Застосування логарифмічної функції в електротехніці

Причиною того, що наповнені газом лампи дають більш яскраве освітлення, ніж пустотні з металевою ниткою розжарювання з такого ж матеріалу, криється в різній температурі цієї нитки. За встановленим у фізиці правилом, загальна кількість світла, що випускається при білому розжаренні, зростає пропорційно 12 степеню абсолютної температури (за шкалою Кельвіна).

Завдання.

Визначити, у скільки разів «газова» лампа, температура нитки розжарення якої 2500^0 абсолютної шкали, випускає більше світла за «пустотну» з ниткою, розжареної до 2200^0 .

Розв'язання.

Позначивши шукане відношення через x, маємо рівняння

$x = (\frac{2500}{2200})^{12} = (\frac{25}{22})^{12}$.

Звідки $\lg x = \lg(\frac{25}{12})^{12} = 12(\lg 25 - \lg 22) = x = 4{,}6$

Відповідь: наповнена газом лампа випускає світла в 4,6 рази більше, ніж пустотна [30].

3.4 Організація, проведення та результати експерименту

Предметом педагогічного експерименту було формування такої ключової математичної компетентності, як компетентність у природничих науках та технологіях.

А саме:

- *уміння:* розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі; будувати та досліджувати природні явища і процеси; послуговуватися технологічними пристроями;
- *ставлення:* усвідомлення важливості природничих наук як універсальної мови науки, техніки та технологій. усвідомлення ролі наукових ідей в сучасних інформаційних технологіях;
- *навчальні ресурси:* складання графіків та діаграм, які ілюструють функціональні залежності результатів впливу людської діяльності на природу;

Педагогічний експеримент проводився в Рівненському НВК “Колегіум” Рівненської міської ради. Для експерименту був обраний 11 клас з профільним вивченням математики. Для учнів експериментального класу було проведено ряд занять з використанням міжпредметних зв’язків при вивченні теми "Показникова та логарифмічна функції". Задуми та ідеї, які потрібно було відобразити під час занять були обговорені з вчителями математики та методистами.

Метою експерименту, з використанням міжпредметних зв’язків, були наступні пункти:

- формування в учнів загального уявлення про природу на основі діалектичної єдності всіх природничо-наукових знань;

• забезпечення системності знань через реалізацію внутрішньопредметних та міжпредметних зв’язків, що веде до свідомого і міцного їх засвоєння, сприяє розвитку наукового (цілісного) мислення і пам’яті;

• формування в школярів уміння встановлювати всебічні зв’язки між поняттями й теоріями, які відображають об’єктивно існуючі відношення в природі;

• розвиток логічного, творчого, практичного (це дуже важливо в сучасних умовах) мислення;

• формування цілісного уявлення про явища природи.

Дослідно-експериментальна робота щодо перевірки ефективності даного дослідження проводилась у три етапи.

Мета першого етапу – подання матеріалу необхідного при розв’язуванні задач прикладного характеру, розгляду літератури, аналізу психолого-педагогічних та методичних праць та підбиралися типи завдань та методи їх розв’язування, пошуковий експеримент метою якого було поліпшення вмінь та навиків розв’язувати прикладні задачі.

На другому етапі здійснювалося впровадження задач у навчальний процес.

На третьому етапі, за допомогою анкет (див. Додаток А), проводилося опитування, метою якого було виявити вплив використання міжпредметних зв’язків при розв’язуванні задач прикладного змісту.

Таким чином, анкетування дало змогу зробити такі висновки.

Міжпредметні зв’язки передбачають взаємну узгодженість змісту освіти з різних навчальних предметів, добір та побудову навчального матеріалу, які визначаються як загальними цілями освіти, так і врахуванням виховних завдань, зумовлених специфікою кожного навчального предмета. Розв’язуванню задач прикладного змісту вчителі приділяють мало часу, одиниці учнів можуть розв’язати задачі такого типу. Тоді як розв’язування задач з використанням міжпредметних зв’язків викликає зацікавленість і разом з тим більшість учнів, які навіть мали середній рівень знань, впорались із завданнями.

ВИСНОВКИ

В даній дипломній роботі було розглянуто логарифмічну та показникову функції. Ця тема займає досить важливе місце в шкільному курсі математики.

Метою даної роботи був розгляд особливостей методики вивчення показникової та логарифмічної функцій у шкільному курсі математики старшої школи.

Аналіз методичної літератури і підручників дав змогу стверджувати, що тема “Показникова та логарифмічна функції” займає значне місце у вивченні математики в загальноосвітній школі. На яку відводиться значна кількість годин залежно від профілю класу і є обов’язковим елементом на зовнішньому незалежному оцінюванні.

На основі наукових праць було виділено властивості показникової та логарифмічної функцій та методи розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем.

Сучасні вимоги до вивчення математики дали підставу до дослідження інтеграції показникової та логарифмічної функції в інші галузі знань: фізики, економічній справі, біології, медицині, хімії, сейсмології, музичних технологіях, техніці, астрономії та електротехніці.

Міжпредметні зв’язки передбачають взаємну узгодженість змісту освіти з різних навчальних предметів, добір та побудову навчального матеріалу, які визначаються як загальними цілями освіти, так і врахуванням виховних завдань, зумовлених специфікою кожного навчального предмета. Розв’язуванню задач прикладного змісту вчителі приділяють мало часу, одиниці учнів можуть розв’язати задачі такого типу. Тоді як розв’язування задач з використанням міжпредметних зв’язків викликає зацікавленість в учнів.

На основі проведених уроків з використанням міжпредметних зв’язків формували ключову математичну компетентність у природничих науках та технологіях.

Аналіз уроків та анкетування проведене у Рівненському НВК “Колегіум” Рівненської міської ради задля дослідження ефективності використання міжпредметних зв’язків при вивченні теми “показникова та логарифмічна функції” дав змогу стверджувати, що міжпредметні зв’язки передбачають взаємну узгодженість змісту освіти з різних навчальних предметів, добір та побудову навчального матеріалу, які визначаються як загальними цілями освіти, так і врахуванням виховних завдань, зумовлених специфікою кожного навчального предмета. Розв’язуванню задач прикладного змісту вчителі приділяють мало часу, одиниці учнів можуть розв’язати задачі такого типу. Тоді як розв’язування задач з використанням міжпредметних зв’язків викликає інтерес та зацікавленість в учнів.

Було досягнуто головних цілей експерименту:

1. формування в учнів загального уявлення про природу;
2. формування в школярів уміння встановлювати всебічні зв’язки між поняттями й теоріями;
3. розвиток логічного, творчого, практичного мислення;
4. формування цілісного уявлення про явища природи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Указ президента України : за станом на 25 червня 2013 р. / Верховна Рада України. – Офіц. вид. – К. : Парлам. вид-во, 2013.
2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів / З. І. Слєпкань. – Київ, 2006. – 582 с.
3. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів України + опис ключових змін. - Київ: Видавничий дім “Освіта” , - 2017. – 56 с.
4. Смалько О.А. Навчальні програми з математики / О.А. Смалько
5. Бевз Г. П. Методика викладання математики / Г.П. Бевз. – Київ: Вища школа, 1989. – 367 с.
6. Бевз Г. П. Математика: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Істер . – Київ: Генеза, 2011. – 320 с.
7. Афанасьєва О. М. Математика: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. М. Афанасьєва , Я. С. Бродський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 478 с.
8. Нелін Є. П. Алгебра: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Харків: Гімназія, 2011. – 445 с.
9. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський. – Харків: Гімназія, 2011. – 428 с.
10. Мерзляк А. Г. Алгебра: збірн. задач і контр. роб. / А. Г.Мерзляк, В. Б. Полонський. - Харків: Гімназія, 2011. – 98 с.
11. Титаренко О. М. 5770 задач з математики з відповідями. 2-ге вид. випр. / О. М. Титаренко. – Харків:ТОРГСІНГ ПЛЮС, 2007. - 336 с.
12. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу // Навчально-методичний посібник / Мерзляк А. та ін. – Тернопіль : Підруники і посібники, 2001. – 304 с.
13. Практикум з розв'язання задач з математики / Михайловський В. та ін. – К. : Вища школа, 1978. – 478 с.

14. Поглиблене вивчення математики // Випускний екзамен / Тадеєв В. та ін. – Тернопіль : Підручники и посібники, 1997. – 128 с.
15. Шунда Н. Функції та їх графіки: Задачі і вправи / Н. Шунда. – К. : Рад. школа, 1976. – 190 с.
16. Шунда Н. М.. Функції та їх графіки / Н. М. Шунда. – К. : Рад. шк., 1976. – 190 с.
17. Титаренко О. М. Форсований курс шкільної математики: Навчальний посібник / О. М. Титаренко. – Харків: Торсінг, 2003. – 368 с.
18. Фурман М. С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу 11 клас / М. С.Фурман. – Харків: Основа, 2010. – 159 с
19. Шкіль М. І. Алгебра та початки аналізу: підруч. Для 11 кл.загальноосвіт. навч. закл. / М .І. Шкіль, З. І. Слєпкань. – Київ: Зодіак ЕКО, 2002. – 384 с.
20. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики. Навчальний посібник / Р. П. Ушаков. – К. : Техніка, 1999. – 504 с.
21. Клочко І. Я. Посібник з математики для школярів та абітурієнтів / І. Я. Клочко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. – 224 с.
22. Сборник конкурсних задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М.И. Сканави. – М. : Высшая школа, 1977. – 518 с.
23. Клейнер Г. М. Математическая и научная картина мира / Г. М Клейнер Л. М. Клейнер / К..: Радянська школа, 1984.
24. Петрик М. Основи математичного моделювання та застосування математичних методів у наукових дослідженнях / М. Петрик ,М. Баб’юк — Тернопіль Підручники і посібники, 1998.
25. Толок В. О. Математика для вступників до вузів // Навчальний посібник / В. О. Толок. – Запоріжжя : Просвіта, 2000. – 656 с.
26. Іванко Г.І. Логарифмічні рівняння та нерівності. // Математика в школах України. – 2007 - №7. - С.16-22.
27. Тевлін Б. Математика на уроках фізики // Фізика та астрономія в школі. – 1999. – №4. – С.18-23.
28. Шевцов В. Я. Міжпредметні зв’язки при вивченні хімії в школі. – К.: Радянська школа, 1983. –80 с.

29.Радзиняк М. Міжпредметні зв'язки на уроках хімії під час розв'язання задач // Хімія. Біологія. - Перше вересня, 1999. – №45 - С 4-24

30.Глобін О.І.Міжпредметні зв'язки в умовах профільного навчання математики: Навчальний посібник / О.І.Глобін – Київ: Педагогічна думка, 2012. – 88 с.

31.Соколенко Л.О. Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій у курсі алгебри і початків аналізу // Математика в сучасній школі / Л.О.Соколенко, В.О. Швець,– 2013, №12.- С.32-41

32.Математика. Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання: Навчальний посібник / В.П.Павлович, Ю.П.Бабич, Г.М.Вартанян, та ін. – Харків: Веста, 2010. – 239 с

ДОДАТОК А

АНКЕТА

Шановні учні, Ви приймаєте участь в опитуванні, метою якого є дослідження переваг і недоліків використання міжпредметних зв’язків при вивченні курсу алгебри.

Просимо Вас відповісти на всі запитання анкети. Результати опитування будуть використані для аналізу перспектив розробки та впровадження методики вивчення курсу алгебри та початків аналізу з використанням міжпредметних зв’язків.

____

П.І.П опитуваного

1. Чи часто на уроках алгебри вам доводиться розв’язувати задачі прикладного змісту?
1. Чи відчуваєте труднощі при розв’язуванні задач прикладного змісту? І Які?
2. Чи часто і в якій формі використовуються міжпредметні зв’язки на уроках математики?
3. Чи виникали труднощі при розв’язуванні прикладних задач? Якщо «так», то в чому?

4. Чи відчуваєте впевненість у розв’язуванні прикладних задач?
5. Чи доцільно, на Вашу думку, були використанні міжпредметні зв’язки?
6. Чи варто систематично використовувати міжпредметні зв’язки на уроках алгебри? Чому?
7. Чи сподобалися Вам уроки з використанням міжпредметні зв’язки? Якщо «так», то чому?
8. Ваші побажання щодо покращення якості уроку в сучасних умовах.

ДОДАТОК В

План–конспект уроку з алгебри на тему:

«Застосування показникової функції та логарифмів до розв'язування задач»

Мета: Удосконалити вміння розв'язувати показникові і логарифмічні рівняння, застосовуючи властивості показникової і логарифмічної функцій. Формувати в учнів цілісну картину світу, шляхом використання міжпредметних зв'язків. Формувати в учнів інформаційні компетенції, (критично осмислювати і використовувати інформацію з різних галузей наук: фізики, біології, екології).

Розвивати комунікативні компетентності, компетентності саморозвитку і самоосвіти та продуктивної творчої діяльності.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

І. Організаційний момент

Серед всіх наук, які відкривають шлях до пізнання законів природи, найбільшої є математика. (С. Ковалевська)

1. Мотивація

Для планування розвитку міст, інших населених пунктів,будівництва житла, доріг, інших об'єктів проживання людей,необхідні розрахунки – прогнози на 5,10,20 років уперед. Сьогодні на уроці ми розглянемо, як в таких розрахунках застосовуються показникові функція та логарифми і розглянемо задачі, які мають безпосереднє відношення до понять та величин з фізики, біології, економіки. Практичне застосування логарифмів у цих науках пов'язано із можливістю описувати процеси, при яких зміна однієї величини в декілька разів приводить до зміни залежної величини на декілька разів. За такими законами відбуваються, наприклад, процеси розмноження мікроорганізмів, радіоактивний розпад, зміна швидкості хімічної реакці і т.п. Усі ці процеси отримали назву процесів органічного росту, оскільки математична модель, що їх описує,має одну й ту саму структуру.

2. Оголошення теми, мети, завдань уроку.

ІІ. Акуалізація опорних знань.

1. Робота в групах. (Узагальнення і систематизація матеріалу)

Відсійте зайві твердження. (Учні виконують завдання самостійно з наступним колективним обговоренням).

Завдання 1

Які з наведених функцій є показниковими?

1) $y = 3^x$
2) $y = 1^x$
3) $y = 9^{-x}$ (1,3,5,6,8)
4) $y = x^3$
5) $y = (-4)^x$
6) $y = e^x$ y=π^x
7) $y = x^{0,6}$

Завдання 3

З наведених функцій виберіть зростаючі:

1) $y = 2^x$
2) $y = (\frac{\pi}{3})^x$ (1,3,4,5,6)
3) $y = \sqrt{7}^x$
4) $y = 10^{0,5x}$
5) $y = \ log3x$
6) $y = ln\, x$
7) $\mathrm{y} = log0.3x$
8) $y = (\frac{5}{7})^x$

Завдання 4

З наведених рівнянь виберіть логарифмічні:

1) $log\ 2(x+3) = 8$
2) $xlgx = 100$ (1,4,6)
3) $2ln3\ +\ x3 = 10$
4) $(\log_2 x)^2\ + 2\ log2x = 0$

5) $lg100 + lg\,0{,}001 - (2x + 4) = 0$

6) $log3(x + 2) + log3(2x - 1) = log38$

Задача 1.

Швидкість руху матеріальної точки залежно від температури змінюється за законом $v = 1{,}01^{t}$, де t – температура, v – швидкість. За якої температури швидкість точки дорівню 1.

Розв'язання

$$1{,}01^{t} = 1$$

$$1{,}01^{t} = 1{,}01^{0}$$

$$t = 0$$

Відповідь: при температурі $t = 0$°С швидкість точки дорівнює 1.

Задача 2.

Метелик злітаючи з квітки, летить по траєкторії, яку можна описати рівнянням $s = \frac{1}{8\cdot 2^{1-4t}}$. Через скільки секунд метелик пролетить відстань 64 см? 256см?

Розв'язання

а) $64 = \frac{1}{8\cdot 2^{1-4t}}$

$$2^{6} = \frac{1}{2^{3+1-4t}}$$

$$2^{6} = 2^{-3-1+4t}$$

$$6 = -4 + 4t$$

$$4t = 10$$

$t = 2{,}5$

Відповідь: Через $t = 2{,}5$ секунд метелик пролетить відстань 64 см.

б) $256 = \frac{1}{8\cdot 2^{1-4t}}$

$$2^{8} = \frac{1}{2^{3+1-4t}}$$

$$2^{8} = 2^{-3-1+4t}$$

$$8 = -4 + 4t$$

$$4t = 8$$

$t = 2$

Відповідь: Через $t = 2$ секунд метелик пролетить відстань 256 см.

Задача 3.

Якщо під час радіоактивного розпаду кількість речовини за добу зменшиться удвічі, то після x діб від маси M_0 залишається маса

$$M = M_0 \cdot (\frac{1}{2})^x$$

Скориставшись цією формулою, знайдіть:

а) Скільки радіоактивної речовини залишиться через три доби?

б) Через скільки діб кількість речовини зменшиться у 128 разів?

Розв'язання

а) $\frac{M}{M_0} = (\frac{1}{2})^x$, оскільки $x = 3$, то $\frac{M}{M_0} = \frac{1}{8}$ і $M = \frac{1}{8} M_0$.

Відповідь: Через три доби залишиться $\frac{1}{8}$ початкової маси речовини.

б) $\frac{M}{M_0} = \frac{1}{128}$; $\frac{M}{M_0} = (\frac{1}{2})^7$; $(\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{2})^7$; $x = 7$.

Відповідь: Через сім діб.

Задача 4.

Ємність легенів людини виражається функцією $v(x) = \frac{110 \cdot (lnx - 2)}{x}$, де $v(x)$ – ємність легенів людини у літрах, x – вік людини в роках, $x > 10$. Обчисліть ємність легенів людини в 20 років. $(ln20 \approx 2,9)$

Розв'язання

$$v(x) = \frac{110 \cdot (ln20 - 2)}{20} = \frac{110 \cdot (2,9 - 2)}{20} = \frac{110 \cdot 0,9}{20} = \frac{99}{20} = 4,95 \text{ л.}$$

Відповідь: ємність легенів людини в 20 років 4,95 л.

Задача 5.

Дерево росте так, що кількість деревини збільшується з часом за законом:

$$y = y_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

де, y_0 – початкова кількість деревини. Через скільки років t обсяг деревини становитиме 8 $м^3$, якщо початкова кількість її становить $2м^3$.

Розв'язання

$$8 = 2 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

$$2^3 = 2^{\frac{t}{3}+1}$$

$$3 = 1 + \frac{t}{3}$$

$$2 = \frac{t}{3}$$

$$t = 6$$

Відповідь: Через $t = 6$ років обсяг деревини становитиме 8 $м^3$.

III. Підсумок уроку

1. Рефлексія

1) Сьогодні на уроці ми…
2) Найважливішим на уроці для мене було…
3) Найбільше зацікавило…
4) Найскладнішим для мене було…
5) Щоб усунути прогалини в знаннях, я маю…

2. Домашнє завдання

Задача 1.

Радіоактивний розпад радію відбувається за законом $M = M_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$, де M_0 – початкова маса радію в міліграмах, M – маса радію в міліграмах через t (хв.) розпаду, T – період піврозпаду. Знайдіть період піврозпаду T, якщо $t = 6хв.$, $M_0 = 8мг.$, $M = 2мг.$

Розв'язання.

$$2 = 8(\frac{1}{2})^{\frac{6}{T}}$$

$$2^1 = 2^3 \cdot 2^{-\frac{6}{T}}$$

$$2^1 = 2^{3-\frac{6}{T}}$$

$$1 = 3 - \frac{6}{T}$$

$$2 = \frac{6}{T}$$

$$T = 3$$

Відповідь: період піврозпаду дорівнює 3.