Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Дипломна робота

бакалавр

на тему

Методика вивчення похідної в курсі старшої школи

Виконала: студентка 4 курсу
групи МЕІ-41
напряму підготовки 6.040201 «Математика»
Цимбалюк (Стельмах) Тетяна Петрівна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри
математики з методикою викладання
Генсіцька–Антонюк Н. О.

Рецензент:
канд. пед. наук, доц. кафедри
природничо - математичної освіти
Харченко Н. П.

Рівне – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. У період стрімкого розвитку суспільства, постає необхідність зміни традиційної парадигми освіти і розроблення єдиної стратегії, що орієнтована на формування і розвиток у підростаючого покоління необхідних навичок життя. Інформаційне суспільство потребує людей здатних до пошуку, самоосвіти упродовж життя, творчого використання отриманих знань, умінь та навичок, самостійності при прийнятті рішень.

Один зі шляхів оновлення змісту сучасної школи є її орієнтація на компетентнісний підхід. Проблему вдосконалення системи освіти шляхом впровадження компетентнісного підходу активно підтримує переважна більшість педагогів-науковців і освітян-практиків. У своїх працях аспекти окресленої проблеми розкривають такі науковці як: Н. М. Бібік , Г. Ф. Звєрєва, О. О. Клименко, О. В. Овчарук, С. А. Раков та інші.

Компетентнісний підхід необхідно реалізовувати на всіх рівнях навчання учнів, при вивченні ними всіх навчальних предметів. В реаліях сьогодення для продуктивної діяльності в інформаційному світі потрібна ґрунтовна математична підготовка, оскільки, немає жодної області в математиці, яку не можна застосувати до явищ дійсного світу. Тому необхідно приділяти особливу увагу формуванню у учнів математичної компетентності.

Математична компетентність – вміння бачити і застосовувати математику в реальному житті, а для будь-якого спеціаліста це необхідний елемент його загальної культури.

При профільному рівні вивченні математики є широкі можливості забезпечити не тільки міцне та свідоме оволодіння системою математичних знань та умінь учнями, а й формувати навички та уміння, потрібні у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності.

Розділ алгебри та початків аналізу «Похідна та її застосування» займає значне місце у шкільному курсі математики та на профільному рівні його вивчення дає змогу розвивати в учнів просторове та логічне мислення, алгоритмічну, інформаційну та математичну культуру, формує такі позитивні якості учня, як наполегливість, культура думки і поведінки, обґрунтованість суджень тощо. Дана тема має широке застосування в практичній діяльності, а тому займає важливе місце в формуванні математичної компетентності учнів. За її допомогою можна вирішувати завдання з біології, хімії, фізики, техніки, економіки та багатьох інших галузей. Тому незалежно від того, яку професію школярі оберуть в подальшому житті, вони повинні засвоїти базові знання з даної теми, якими будуть користуватися в майбутньому і, при необхідності, поглиблювати.

Проблемою вивчення похідної в шкільному курсі математики займалися такі педагоги-математики, як Т. В. Думанська, Л. С. Капкаєва, О. Е. Корнійчук, В. Д. Погребний, З. І. Слєпкань та інші, всі вони дотримуються думки, що дана тема має велике значення у розвитку учня.

Важливість та актуальність проблеми обумовило вибір **теми** дослідження «**Методика вивчення похідної в курсі старшої школи**»

Об'єкт дослідження – процес навчання алгебри і початків аналізів в старшій школі профільного навчання.

Предмет дослідження – похідна та її застосування.

Мета дослідження – дослідити методику вивчення похідної в курсі алгебри 10 класу та встановити міжпредметні зв'язки під час її вивчення.

Мета реалізовується через поставлені нами **завдання**:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну, методичну та навчальну літературу з теми дослідження.
2. Провести логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування».
3. Дослідити можливості застосування похідної в природничих науках, технологіях та інших галузях знань.

4. Розробити систему завдань, орієнтованих на формування предметної математичної компетентності старшокласників при вивченні теми «Похідна та її застосування».

Для розв’язання поставлених у дослідженні завдань використано комплекс взаємопов’язаних **методів дослідження**:

– *теоретичні* – аналіз психолого-педагогічної, методичної, наукової та навчальної літератури з окресленої проблеми;

– *емпіричні* – аналіз досвіду роботи вчителів і результатів навчання учнів з огляду на предмет дослідження;

– *пошуково-бібліографічний* (вивчення джерел, матеріалів періодичних видань з проблеми дослідження), що дав підстави для наукових узагальнень;

– *метод термінологічного аналізу* уможливив за допомогою виявлення та уточнення значень і смислів основоположних понять актуалізувати категорійно-поняттєвий апарат дослідження;

– *історіографічний* допоміг критично проаналізувати опубліковану з порушеної проблеми педагогічну літературу;

– *педагогічний експеримент* (анкетування).

– **Джерельна база дослідження** охоплює *п’ять* основних груп:

– – *джерела нормативно-правового характеру*;

– – *періодичні видання*, на сторінках яких представлена ґенеза досліджуваної проблеми;

– – *навчальні плани, навчальні програми, шкільні підручники та методична література для вчителів* з математичних дисциплін;

– – *інтерпретаційні джерела* – монографії, брошури, статті, присвячені досліджуваній темі або дотичні до неї;

– – *довідкова література, сучасні підручники й посібники* для вищої школи.

Теоретичне значення дослідження полягає в тому, що:

1) Систематизовано теоретико-методичні матеріали з теми «Похідна та її застосування»;
2) Запропоновано методи та способи розв’язування задач;
3) Запропоновано методику застосування похідної при розв’язуванні прикладних задач.

Практичне значення дослідження. Матеріали кваліфікаційної роботи можуть бути корисними для вчителів математики в питаннях реалізації компетентнісного підходу до навчання теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні в курсі алгебри та початків аналізу, для студентів – майбутніх вчителів математики під час проходження педагогічної практики.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновку, списку використаних джерел (38 найменувань) та додатків і розкривається на 94 сторінках.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ

1.1 Аналіз програми з алгебри для 10 класу з теми дослідження

В курсі алгебри старшої школи вивчається тема «Похідна та її застосування». На дану тему профільного рівня, відводиться 48 години. Зміст навчального матеріалу курсу включає в себе такі параграфи:

- Задачі, які приводять до поняття похідної.
- Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила обчислення похідних. Складена функція. Похідна складеної функції.
- Похідні степеневої та тригонометричних функцій.
- Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
- Застосування похідної для розв’язування рівнянь та доведення нерівностей.
- Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.
- Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.
- Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків.

При вивченні теми вчитель повинен обрати правильну мотивацію для учнів, яка безперечно буде викликати інтерес і спонукати дітей до активної праці на уроці та вдома. Такою мотивацією також може стати інформація про те, що вміння «працювати» з похідною знадобиться на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) і може принести учнювелику кількість балів.

Сумарний тестовий бал визначає місце абітурієнта в рейтингу вступників, а значить, надає можливість навчатись за державним замовленням.

Коли учні переходять до старшої школи, перед ними постає питання про майбутні іспити. Учні, які навчаються за математичним профілем скоріш за все будуть обирати у вищих навчальних закладах спеціальності пов’язані з математикою, і їм доведеться здавати ЗНО з цієї дисципліни. Тому вчителя на уроках повинні особливо приділяти увагу вправам, які можуть зустрітись в зовнішньому незалежному оцінюванні.

Учень після вивчення цієї теми повинен:

- ✓ **формулювати** означення похідної та **пояснювати** її геометричний і фізичний зміст;
- ✓ **знаходити** кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції;
- ✓ **знаходити** похідні функцій;
- ✓ **застосовувати** похідну до знаходження проміжків монотонності та екстремумів функції;
- ✓ **знаходити** найбільше і найменше значення функції на проміжку;
- ✓ **розв’язувати** прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень;
- ✓ **застосовувати** результати дослідження функції за допомогою похідної до розв’язування рівнянь і нерівностей та доведення тотожностей і нерівностей;
- ✓ **описувати** поняття опуклості функції та точок перегину;
- ✓ **застосовувати** другу похідну до знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину;
- ✓ **досліджувати** функції за допомогою першої та другої похідних і використовує одержані результати для побудови графіків функції.

З історії розвитку математичного аналізу відомо, що до відкриття похідної прийшли незалежно один від одного Г. Лейбніц та І. Ньютон: перший – розв'язуючи геометричну задачу про знаходження положення дотичної до кривої у певній точці, другий – розв'язуючи задачу механіки про визначення миттєвої швидкості.

У шкільному курсі через обмеженість часу найчастіше докладно розглядають одну з цих задач. Перевагу слід віддати задачі про миттєву швидкість, оскільки з нею учні вже ознайомились з курсу фізики, а на цьому етапі навчання доцільно оформити її розв'язування в термінах і символах математичного аналізу (приріст аргументу, приріст функції, границя функції). При цьому в процесі розв'язування потрібно чітко назвати чотири кроки, які розкривають зміст похідної, та зауважити, що їх доцільно виконувати надалі під час виведення формул і доведення основних теорем про похідні [31].

Розглядаючи задачу про миттєву швидкість, потрібно звернути увагу учнів на те, що середня швидкість нерівномірного прямолінійного руху певною мірою характеризує його, проте вона часто не задовольняє потреб практики. Наприклад, диспетчерові автобусної станції досить знати середню швидкість, з якою автобус рухається від станції відправлення до кінцевого пункту, а автоінспекторові, який стежить за безпекою руху, важливо знати швидкість автобуса в момент перетину ним залізничного переїзду, де не можна перевищувати певної швидкості.

Отже, виникає потреба вміти визначати швидкість у деякий момент часу t_0.

Щоб учні неформально сприйняли означення миттєвої швидкості, слід на прикладі конкретної задачі з числовими даними показати, що значення середньої швидкості прямує до певної границі, яку природно вважати числовим значенням швидкості в деякий момент часу, тобто значенням миттєвої швидкості.

Аналізуючи отримані результаті, учні зауважують, що за $\triangle t \to 0$ $\triangle s(t_0) \to 0$. Однак відношення $\frac{\triangle s(t_0)}{\triangle t}$, тобто середня швидкість, зменшуючись, прямує до числа 40, яке природно взяти за швидкість тіла, що вільно падає, в момент часу $t_0 = 4c$. Число 40 є границею середньої швидкості за $\triangle t \to 0$. Після цього вчитель формує означення миттєвої швидкості як границі середньої швидкості і вводить позначення $v = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s(t_0)}{\triangle t}$.

Зауважимо, що для вибраного значення t_0 у разі виконання граничного переходу в четвертому кроці змінною є лише $\triangle t$, але значення границі залежить від вибору t_0. Справді, якщо $t_0 = 4c,$ то $v = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s(t_0)}{\triangle t} = 40\text{м/с}$, якщо $t_1 = 5{,}2\text{с}$, то $v = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s(t_1)}{\triangle t} = 52\text{м/с}$.

Можна запропонувати учням узагальнити розв'язання задачі про миттєву швидкість на будь-який момент часу t, внаслідок чого після виконання чотирьох кроків вони дістануть відому з курсу фізики формулу швидкості тіла, що вільно падає, $v = gt$.

Потрібно звернути увагу учнів на те, що такими самими чотирма кроками розв'язується задачі фізики, хімії, та інших галузей, якщо є потреба визначити швидкість зміни деякої функції. Наприклад, у хімії швидкість розчинення певної речовини в іншій (наприклад, солі у воді) визначають як границю $\lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle Q}{\triangle t} = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{Q(t+\triangle t)-Q(t)}{\triangle t}$, де $Q -$ кількість речовини, що розчиняється, $t -$ час розчинення; у фізиці швидкість зміни температури тіла під час нагрівання в будь-який момент часу t обчислюють за формулою $\lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \theta}{\triangle t}$, де $\theta -$ температура тіла, $t -$ час; силу струму – за формулою $I = \lim\limits_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle q}{\triangle t}$, де $q -$ кількість електрики, $t -$ час.

Ці самі чотири кроки виконують і під час розв'язування задачі про знаходження положення дотичної в точці до кривої, що є графіком деякої функції.

Узагальнюючи спосіб розв'язування всіх згаданих задач, приходять до поняття похідної. Нехай функція $y = f(x)$ задана на деякому проміжку $(\alpha; b)$ і x_0 – точка, яка належить цьому проміжку. Виконаємо ті самі чотири кроки, що й для розв'язування задачі про миттєву швидкість:

1) надамо значенню x_0 довільного приросту $\triangle x$ (число $\triangle x$ може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб число $x_0 + \triangle x$ належало проміжку $(\alpha; b)$;

2) обчислимо в точці x_0 приріст функції

$$\triangle y = \triangle f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0);$$

3) складемо відношення

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle f(x_0)}{\triangle x} = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x};$$

4) знайдемо границю цього відношення за $\triangle t \to 0$, тобто

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Якщо така границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$ або y'.

Означення 1. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю відношення приросту $\triangle y$ функції до приросту $\triangle x$ аргументу за умови, що приріст $\triangle x$ аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Зауважимо, що перш ніж вводити поняття похідної, слід привчити учнів до використання трьох різних символів, що стосуються приросту функції та відношення її до приросту аргументу. Кроки $1) - 4)$ фактично задають правило відшукання похідної.

Після введення означення доцільно за допомогою, виконуючи чотири кроки, знайти похідні функції $y = x^2, y = \frac{1}{x}, y = c,$ де $c -$ стала. Однак перед цим важливо зауважити, що коли похідну шукають у деякій точці x_0, то вона як границя є певним числом. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $\boldsymbol{x}$ проміжку $(\alpha; b)$, то кожному значенню $\boldsymbol{x}$ відповідає певне значення похідної. Доцільно нагадати учням, що в задачі про миттєву швидкість двом різним значення часу $t_0 = 4c$ і $t_1 = 5{,}2c$ відповідали різні значення миттєвої швидкості $t_0 = 40$м / c і $v_1 = 52$м$/c$.

Отже, в такому разі похідна функції $y = f(x)$ на проміжку $(a; b)$ є також функцією, яку позначають символом f' або $y' = f'(x)$. Якщо функцію задано формулою, наприклад, $y = x^2$, то похідну можна позначити символом $(x^2)'$. Наприклад, для розглянутої функції $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ похідна $s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt$ є лінійною функцією аргументу t.

Для глибшого усвідомлення учнями означення похідної доцільно відразу з'ясувати її механічний і геометричний зміст. Механічний зміст похідної випливає з розглянутої задачі про миттєву швидкість. Учні самі здатні зробити висновок, що похідна дорівнює миттєвій швидкості нерівномірного руху. Цим самим з'ясовується механічний зміст похідної.

Геометричний зміст похідної випливає із задачі про дотичну до кривої у певній точці: похідна в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої з додатним напрямком осі x у точці з абсцисою x_0.

З метою закріплення означення й алгоритму відшукання похідної за означенням (послідовним виконанням чотирьох кроків) потрібно запропонувати учням у класі і як домашнє завдання обчислити похідні функцій $y = 5x^2 - 2x,\ y = x,\ y = \frac{k}{x},\ y = cx$ у загальному вигляді та за певних значень аргументу x.

Основні теореми про похідні. Ними є теореми: 1) про неперервність диференційовної в точці функції; 2) про похідну суми функцій; 3) про похідну добутку функцій; 4) про похідну частки двох функцій; 5) про похідну степеневої функції; 6) про похідну складної функції.

Остання теорема дає можливість розширити системи вправ на обчислення похідних і застосування похідної до різноманітних задач.

Перша із зазначених теорем стверджує достатню умову неперервності функції в точці, її використовують для доведення теорем про похідну добутку і частки двох функцій.

Теорема 1. Якщо функція f має похідну в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Доведення. Нехай в точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$. Знайдемо границю приросту функції в цій точці $\triangle f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$. За умови $\triangle x \to 0$ матимемо

$$\lim_{\triangle t \to 0} \triangle f(x_0) = \lim_{\triangle t \to 0} \left(\frac{\triangle f(x_0)}{\triangle x} \triangle x \right) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle f(x_0)}{\triangle x} * \lim_{\triangle t \to 0} \triangle x = f'(x_0)$$
$$= 0.$$

Отже, функція f неперервна в точці x_0 за другим означення неперервності.

Важливо зауважити, що умова диференційовності функції f у точці x_0 є достатньою умовою неперервності функції в зазначеній точці. Проте неперервність функції f у точці x_0 є лише необхідною, але недостатньою умовою диференційовності функції в цій точці. Доцільно на уроці навести приклад доведення відсутності похідної, неперервної в точці $x_0 = 0$, функції $y = |x|$, а як домашнє завдання запропонувати учням довести, що неперервна в точці $x = 1$ функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{за } x \leq 1, \\ x, \text{за } x > 1 \end{cases}$$

не має похідної у цій точці.

Досвід доводить, що логічну схему доведення теорем $2) - 4)$ учні сприймають легше, якщо послідовно виконують всі чотири кроки алгоритму знаходження похідної за означенням. Зауважимо, що в процесі доведення згаданих трьох теорем частина учнів формально переносить правила тотожних перетворень добутку одночлена на многочлен на перетворення, пов'язані з функціональною символікою. Пов'язано це з тим, що в навчальному посібнику [1] буквами u і v позначено як залежні змінні, так і відповідності між змінними. Тому учні, наприклад, перетворюючи вираз $\triangle (uv) = u(x_0 + \triangle x)v(x_0 + \triangle x) - u(x_0)v(x_0)$, записують: $(ux_0 + u \triangle x)(vx_0 + v \triangle x) - \cdots$.

Щоб уникнути таких помилок, функції потрібно позначити $u = f_1(x)$, $v = f_2(x)$, а, наприклад, добуток їх записувати як $y = f_1(x)f_2(x)$.

Письмове оформлення доведення, наприклад теореми про похідну частки двох функцій, може мати такий вигляд.

Теорема 2. Якщо функції $u = f_1(x)$, і $v = f_2(x)$ у точці x мають похідні і $f_2(x) \neq 0$, то в цій точці функція $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ також має похідну

$$y' = f'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

Доведення. 1. Надамо аргументу x приросту $\triangle\, x$ і запишемо нові значення функції u, v і y:

$$f_1(x + \triangle\, x) = f_1(x) + \triangle\, f_1(x);$$

$$f_2(x + \triangle\, x) = f_2(x) + \triangle\, f_2(x);$$

$$f(x + \triangle\, x) = \frac{f_1(x + \triangle\, x)}{f_2(x + \triangle\, x)} = \frac{f_1(x) + \triangle\, f_1(x)}{f_2(x) + \triangle\, f_2(x)}.$$

2. Знайдемо прирости функцій u, v і y:

$$\triangle\, u = f_1(x + \triangle\, x) - f_1(x) = \triangle\, f_1(x);$$

$$\triangle\, v = f_2(x + \triangle\, x) - f_2(x) = \triangle\, f_2(x);$$

$$\triangle\, y = \frac{f_1(x + \triangle\, x)}{f_2(x + \triangle\, x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} =$$

$$= f(x + \triangle\, x) = \frac{f_1(x)f_2(x) + f_2(x) \triangle\, f_1(x) - f_1(x)f_2(x) - f_1(x) \triangle\, f_2(x)}{f_2(x + \triangle\, x)f_2(x)} =$$

$$= \frac{f_2(x) \triangle\, f_1(x) - f_1(x)f_2(x)}{(f_2(x))^2 + f_2(x) \triangle\, f_2(x)}.$$

3. Знайдемо відношення

$$\frac{\triangle\, y}{\triangle\, x} = \frac{\frac{\triangle\, f_1(x)}{\triangle\, x}\, f_2(x) - f_1(x)\frac{\triangle\, f_2(x)}{\triangle\, x}}{(f_2(x))^2 + f_2(x) \triangle\, f_2(x)}.$$

4. Знайдемо границю відношення $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ за умови $\triangle\, x \to 0$, використовуючи теореми про границю частки, границю добутку сталої на функцію:

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f_1(x)}{\triangle x}f_2(x)-f_1(x)\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f_2(x)}{\triangle x}}{\lim\limits_{\triangle x\to 0}(f_2(x))^2+f_2(x)\lim\limits_{\triangle x\to 0}\triangle f_2(x)}=$$

$$=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

Оскільки $f_1(x)$ і $f_2(x)$ не залежать від $\triangle x$,

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f_1(x)}{\triangle x}=f_1'(x),\quad \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f_2(x)}{\triangle x}=f_2'(x),$$

$$\lim_{\triangle x\to 0}\triangle f_2(x)=0,$$

адже функція $f_2(x)$ диференційовна в точці x, отже, неперервна в цій точці. Теорему доведено. Формулу похідної частки зручно записати у вигляді $\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ і сформулювати словесно.

Перш ніж вивчати теорему про похідну складної функції, потрібно з'ясувати, що таке складна функція. Зробити це зручніше на конкретному прикладі. Наприклад, функцію $y=\sqrt{x-5}=(x-5)^{\frac{1}{2}}=f(x)$ можна розглядати як степінь $\frac{1}{2}$ лінійної функції $u=x-5=h(x)$. Щоб обчислити значення функції y для заданого значення аргументу x, доведеться виконати дві операції:

1) Обчислити значення різниці $x-5$;
2) Добути арифметичний корінь із значення цієї різниці.

Першою операцією кожному x ставимо і відповідність певне число, тобто матимемо функцію $u=h(x)=x-5$. Другою операцією ставимо у відповідність знайденому значенню u деяке інше число. Отримаємо другу функцію $y=g(u)=\sqrt{u}=\sqrt{h(x)}=g\big(h(x)\big)=f(x)$.

Функцію $y=f(x)=g\big(h(x)\big)$ називають складеною функцією аргументу x. Змінну u називають проміжною змінною.

Областю визначення функції $u=h(x)=x-5$ є множина дійсних чисел, а областю визначення функції $y=g(u)=\sqrt{u}$ є множина невід'ємних значень u , тобто $u\geq 0$ або $x-5\geq 0$. Звідси $x\geq 5$.

Отже, областю визначення складної функції $y = f(x) = \sqrt{5 - x}$ є множина $(5; +\infty]$.

Щоб полегшити учням обчислення похідних складних функцій, слід привчити їх знаходити за формулою складної функції проміжну змінну, яка також є функцією. Наприклад, для функції $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ проміжною змінною є квадратична функція $u = x^2 - 5x + 6$. У цьому разі задану функцію можна записати у вигляді $y = \sqrt[3]{u}$.

Строге доведення теореми про похідну складної функції розглядається в курсі математичного аналізу старшої школи. У шкільному курсі алгебри і початків аналізу теорему доводять з певними обмеженнями, які спрощують доведення. Справді, нехай $y = f(x) -$ складна функція. В цьому разі
$u = h(x)$ проміжна змінна (функція), яка має похідну в точці x_0, а складна функція $y = g(x)$ має похідну за змінною u в точці $u_0 = \mathrm{h}(x_0)$. Це означає, що існують границі $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x}$ і $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle u}$.

Надамо значенню x_0 приросту $\triangle x$. Тоді змінна u набуде приросту $\triangle u$, який зумовить приріст$\triangle y$ функції $y = f(x) = g(u)$, де $u = h(x)$.

Щоб знайти похідну $y' = f'(x)$, потрібно обчислити $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$. Припустимо, що за досить малих $\triangle x \neq 0$ відповідне $\triangle u$ також не дорівнює нулю. Подамо відношення $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ у вигляді $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle u}\frac{\triangle u}{\triangle x}$.

Використовуючи теорему про границю добутку, дістанемо

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} = \lim_{\triangle u \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle u} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x},$$

оскільки $\triangle u \to 0$ за $\triangle x \to 0$. Справді, за умовою функція $u = h(x)$ диференційовна, а тому неперервна. Оскільки обидві границі правої частини рівності за умовою існують, то існує $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0)$.

Отже, $f'(x_0) = g'(u_0)h'(x_0)$. Позначивши $f(x) = y'_x$, $g'_x(u) = y'_u$ дістанемо формулу похідної складної функції у вигляді

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

тобто похідна складної функції $y = f(x)$ за змінною x дорівнює добутку похідної цієї функції за проміжною змінною u на похідну проміжної змінної u за змінною x.

Ілюструючи застосування виведеної формули до обчислення похідних різних складних функцій, для перших прикладів доцільно записати окремо проміжну змінну, а згодом цю операцію учні виконують усно.

1.2 Методичні особливості вивчення похідної та її застосування

Похідною як елементом математичного апарату широко послуговуються в різних науках. В алгебрі її здебільшого застосовують для дослідження функцій та побудови їх графіків, у геометрії – для знаходження рівняння дотичної. Похідну використовують у наближених обчисленнях, для наближеного розв'язування рівнянь, дослідження і відокремлення коренів рівнянь, спрощення виразів, доведення тотожностей і нерівностей, знаходження біноміальних коефіцієнтів і доведення формули бінома Ньютона. У фізиці за допомогою похідної обчислюють швидкість і прискорення, досліджуючи різні фізичні явища, наприклад явища резонансу.

Застосування похідної для знаходження найбільших і найменших значень функцій на певному відрізку $[a; b]$ дає змогу розв'язати широкий клас прикладних задач. У таких задачах функція не задається в готовому вигляді, а за умовою задачі потрібно скласти співвідношення, яке пов'язує функцію з тими змінними, від яких залежить її найбільше чи найменше значення.

У шкільному курсі алгебри і початків аналізу на рівні обов'язкових результатів навчання обмежуються застосуванням похідної для дослідження функцій і побудови графіків, в геометрії – знаходженням рівняння дотичної, прикладами застосування похідної у фізиці та розв'язанням певної кількості прикладних задач на знаходження найбільшого і найменшого значення функцій. Водночас на факультативних заняттях, у гуртках, у класах з поглибленим вивченням математики слід ознайомити учнів з іншими важливими застосуваннями похідної. Зокрема, використання похідної для наближених обчислень ефективніше здійснюється за умови попереднього розгляду поняття диференціала функції. Застосування похідної для виведення формули бінома Ньютона дає змогу ознайомити учнів з методом невизначених коефіцієнтів, який широко використовують в алгебрі, в математичному аналізі [1].

Застосування похідної для дослідження функцій. У курсах математичного аналізу вищої школи за допомогою похідної досліджують функції здебільшого на: 1) монотонність; 2) екстремум; 3) досягнення найбільших і найменших значень; 4) опуклість, угнутість та знаходження точок перегину.

У шкільному курсі алгебри і початків аналізу на рівні обов'язкових результатів навчання доцільно ознайомити учнів лише з першими трьома дослідженнями. До того під час дослідження функцій на екстремум досить обмежитися використанням лише першої похідної.

Дослідження функцій на монотонність. Шкільна практика доводить, що пояснення ознак зростання (спадання) функцій доцільно почати з графічних ілюстрацій відомих учням найпростіших функцій $y = x^2$ і $y = x^3$, властивості монотонності яких було доведено раніше на основі означень зростаючої та спадної функцій. Справді, з графіка параболи $y = x^2$ випливає, що на проміжку $(0; +\infty)$, де функція зростає, дотична до графіка в будь-якій точці утворює гострий кут з додатним напрямком осі x. Це означає, що похідна $f'(x)$ у цих точках додатна. На проміжку $(-\infty; 0)$, де функцій спадає, дотична до параболи утворює тупий кут з додатним напрямком осі x, тобто похідна $f'(x)$ на цьому проміжку від’ємна.

Функція $y = x^3$ зростає на всій області визначення, тобто на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Дотичні до графіка цієї функції в усіх точках, крім однієї (початок координат), утворює гострі кути з додатнім напрямком осі x. Це означає, що похідна цієї функції в усіх точках, крім $x = 0$, додатна. Лише за $x \neq 0$ вона дорівнює нулю. Справді, $f'(x) = 3x^2 > 0$ для всіх $x \neq 0$ і $f'(x) = 3x^2 = 0$ за $x = 0$.

На основі розглянутих прикладів слід задати учням запитання: як за допомогою похідної сформулювати достатні умови зростання і спадання функції, які дадуть змогу знайти, не знаючи графіка функції, проміжки зростання (спадання) функції та використати їх для побудови графіка? Учні самостійно сформулюють зазначені достатні умови. Потрібно звернути їхню увагу на те, що достатні умови є оберненими твердженнями щодо виявлених на графіках $y = x^2$ і $y = x^3$ властивостей функцій та їхніх похідних. Щодо доведення в шкільному курсі достатніх умов зростання і спадання функцій, то були спроби здійснити різні методичні підходи. Зокрема, в попередніх виданнях посібника [1] формулювалась і доводилась на основі означення границі функції за Коші теорема про зростання і спадання функції в точці x_0, а достатні умови зростання і спадання функції f на проміжку формулювались без доведення. Зазначалось, що таке доведення непередбачене програмою. У підручнику зв'язок між властивостями зростання і спадання функцій та знаком її похідної встановлюється за допомого механічного тлумачення похідної як швидкості руху матеріальний точки. У багатьох посібник для старшої школи, зокрема й у, без строгого доведення, геометричними міркуваннями запроваджується формула Лагранжа та на її основі доводяться достатні ознаки зростання і спадання функцій на проміжку I. Крім того, наочний зміст цих ознак пояснюється механічним тлумаченням похідної.

Важливо сформувати в учнів практичні навички застосування вивчених теорем для дослідження різних функцій на монотонність. Досвід свідчить, що така робота відбувається ефективніше, якщо на прикладі дослідження однієї-двох функцій сформулювали відповідний алгоритм.

Для того щоб знайти проміжки зростання (спадання) функції, потрібно:

1) знайти область визначення функції та точки розриву;

2) знайти похідну;

3) записати і розв'язати нерівність $f'(x) > 0$ і вибрати із множини її розв’язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками зростання функції;

4) записати нерівність $f'(x) < 0$ і вибрати із множини її розв'язків проміжки, на яких функція визначена. Знайдені проміжки є проміжками спадання функції.

Зауважимо, що коли функція неперервна в будь-якому з кінців проміжку зростання (спадання) функції, то такий кінець можна приєднати до цього проміжку.

Дослідження функцій на максимуми, мінімуми, найбільші та найменші значення. Спочатку потрібно ввести низку нових для учнів понять, які відразу використовуватимуться. Йдеться про поняття: точка максимуму функції, точка мінімуму функції, точка екстремуму, максимум функції, мінімум функції, екстремуми функції. Досвід доводить, що деякі учні плутають поняття «точка максимуму функції» та «максимум функції», «точки екстремуму функції» й «екстремум функції». Слід спеціально підкреслити, що коли йдеться про точки максимуму (мінімуму), точки екстремуму функції, то мається на увазі значення аргументу, а в разі використання понять максимум (мінімум), екстремум – йдеться про значення функції. Важливо також наголосити, що максимум і мінімум (екстремуми) характеризують поведінку функції в як завгодно малому околі точки x_0, а не на всій області визначення чи на її частині, де визначений максимум функції в певній точці може виявитись меншим від мінімуму в іншій точці. Вводячи поняття найбільшого і найменшого значень функції, потрібно ще раз підкреслити, що останні два поняття характеризують поведінку функції на певному відрізку $[a; b]$. Під час запровадження поняття «критичні точки функції» особливу увагу слід звернути на ті критичні точки, в яких похідна не існує, проілюструвавши їх відповідним графіком[9].

Принциповими в цій темі є три твердження, які виражають необхідну (теорема Ферма) і достатні умови існування екстремуму функції в точці.

Практика свідчить, що доведення зазначених теорем не спричинюють в учнів особливих труднощів. Можна дати обґрунтування достатніх умов екстремуму, послуговуючись механічним тлумаченням функції $y = f(x)$ як закону руху матеріальної точки, та похідної $f'(x)$ як швидкості руху [3].

Для розв'язування вправ на знаходження точок екстремуму функції стане в пригоді алгоритмічний підхід. Доцільно після вивчення достатніх ознак сформулювати алгоритм дослідження функцій на екстремум.

Для того щоб дослідити функцію на екстремум, потрібно:

1) знайти критичні точки: прирівняти до нуля похідну $f'(x)$, розв'язати отримане рівняння і приєднати до коренів рівняння $f'(x) = 0$ точки, в яких похідна не існує;

2) розмістити критичні точки на координатній прямій в порядку їх зростання;

3) дослідити знак похідної $f'(x)$ спочатку ліворуч, а потім праворуч від кожної критичної точки. Якщо з переходом x через критичну точку похідна змінює знак з «+» на «−», то в цій критичній точці функція $y = f(x)$ має максимум; якщо знак $f'(x)$ змінюється з «−» на «+», то в цій точці функція $y = f(x)$ має мінімум. Якщо з переходом x через критичну точку похідна $f'(x)$ не змінює знака, то в цій критичній точці функція не має ні максимуму, ні мінімуму;

4) обчислити максимуми та мінімуми функції, підставивши в формулу $y = f(x)$ значення точок максимуму і точок мінімуму.

Зауважимо, що коли x_1, x_2 − сусідні корені рівняння $f'(x) = 0$ і між цими коренями функція $y' = f'(x)$ неперервна, то вона зберігає знак на відрізку $[x_1, x_2]$. У зв'язку з цим зауваженням можна досліджувати функції на екстремум інакше. Якщо $f'(x)$ неперервна і має скінченну кількість коренів, то їх корені заносять до таблиці. У кожному проміжку між цими коренями вибирають контрольну точку $x = c$ і обчислюють значення $f'(c)$ в цій точці. Цей знак збігається зі знакам $f'(x)$ на всьому досліджувальному проміжку.

Якщо функція $f'(x)$ має точки розриву або не визначена в деяких точках, то їх також наводять у вигляді таблиці.

З цим способом можна ознайомити учнів, які цікавляться математикою і навчаються на рівні, вищому за обов'язковий.

Оскільки задачі на знаходження проміжків зростання (спадання) й екстремумів функцій пов'язані між собою, то можна сформулювати алгоритм одночасного розв'язування цих обох задач, який зручно використовувати під час загального дослідження функцій і побудови їх графіків.

Для того щоб знайти проміжки зростання (спадання) й екстремуми функції, потрібно:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти критичні точки функції, розмістити їх в порядку зростання і занести до таблиці разом із проміжками, на яких функція визначена;

3) за контрольними точками знайти знак похідної на кожному з отриманих проміжків;

4) визначити за знаком похідної характер зміни (зростання чи спадання) на кожному з проміжків;

5) виявити наявність екстремуму в кожній критичній точці та обчислити його.

Розв'язуючи вправи на відшукання найбільшого і найменшого значень функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$, потрібно враховувати таке: оскільки неперервна функція обов'язково набуває найбільшого (найменшого) значення і воно може досягатися тільки в стаціонарних точках і на кінцях відрізка, то немає потреби перевіряти достатні умови існування екстремуму функції в стаціонарних точках. Досить обчислити значення функції в цих точках і порівняти їх зі значеннями функції на кінцях відрізка. Тут також доцільно навести алгоритм, який складається з трьох кроків:

1) знайти всі критичні точки функції на відрізку $[a; b]$;

2) обчислити значення функції в усіх критичних точках і на кінцях a і b відрізка;

3) з отриманих чисел вибрати найбільше і найменше.

Розв'язування текстових задач на знаходження найбільших і найменших значень. Обчислюючи найбільші та найменші значення в практичних задачах, слід навести учням правило-орієнтир розв'язування таких задач:

1) проаналізувати формулювання задачі; з'ясувати, найбільше (найменше) значення якої величини потрібно знайти; вибрати незалежну змінну (аргумент) x і записати цю величину у вигляді формули, що задає відповідну функцію;

2) знайти найбільше та найменше значення цієї функції.

Часто в таких задачах може виявитися, що досліджувана величина залежить від двох змінних, наприклад x і t. У такому разі шукають співвідношення, яким пов'язані між собою ці змінні, і виражають одну змінну через іншу.

Слід звернути увагу учнів також на те, що в багатьох задачах уже за умовою можна визначити характер критичної точки, не досліджуючи знака похідної ліворуч і праворуч від неї. Проте в деяких задачах без такого дослідження обійтися неможливо. Доцільно розглянути задачі обох видів [11].

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ В ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ

2.1 Поняття похідної

Означення. *Похідною функції f у точці* x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля [10].

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f'(\,x_0)$ читають: « еф штрих від ікс нульового » або $y'\,(x_0)$.
Тоді можна записати:

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

або

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x}.$$

Похідну функції f у точці x_0 можна обчислити за такою схемою:

1) надавши в точці x_0 аргументу приріст $\triangle x$, знайти відповідний приріст $\triangle f$ функції:

$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0);$$

2) знайти відношення $\frac{\triangle f}{\triangle x}$;

3) з'ясувати, до якого числа прямує відношення $\frac{\triangle f}{\triangle x}$ при $\triangle x \to 0$, тобто знайти границю $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x}$.

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Дотримуючись вищенаведеної схеми, запишемо:

1) $\triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \triangle x} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1+\triangle x} - \frac{1}{1} = \frac{-\triangle x}{1+\triangle x}$;

2) $\frac{\triangle f}{\triangle x} = -\frac{1}{1+\triangle x}$;

3) при $\triangle x \to 0$ значення виразу $-\frac{1}{1+\triangle x}$ прямують до числа -1, тобто

$$f'(1) = \lim_{\triangle x \to 0}\left(-\frac{1}{1+\triangle x}\right) = -1.$$

Відповідь: -1.

Зазначимо, що, знайшовши значення $f'(1)$, ми тим самим знайшли кутовий коефіцієнт $k(x_0)$ дотичної, проведеної до графіка функції $f'(x) = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$. Він дорівнює -1, тобто $k(1) = -1$. Тоді, позначивши через α кут, утворений цією дотичною з додатним напрямом осі абсцис, можемо записати: $tg\ \alpha = -1$. Звідси $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Узагалі, можна зробити такий висновок: *кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою* x_0, *дорівнює похідній функції f у точці* x_0, тобто

$$k(x_0) = f'(x_0)$$

Ця рівність виражає **геометричний зміст похідної**.

Зважаючи на означення миттєвої швидкості, можна зробити такий висновок: *якщо* $y = s(t)$ *— закон руху матеріальної точки* по координатній прямій, *то її миттєва швидкість у момент часу* t_0 *дорівнює похідній функції* $y = s(t)$ *точці* t_0, тобто

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

Ця рівність виражає **механічний зміст похідної [11]**.

Якщо функція *f* має похідну в точці x_0, то цю функцію називають **диференційовною в точці** x_0.

Нехай функція *f* диференційовна в точці x_0. З геометричного змісту похідної випливає, що до графіка функції *f* у точці з абсцисою x_0 можна провести *невертикальну* дотичну (рис. 2.1.1). І навпаки, якщо до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну, то функція f є диференційовною в точці x_0.

На рисунку 2.1.2 зображено графіки функцій, які в точці x_0 мають розрив або «злом». До цих графіків у точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичну. Ці функції не диференційовні в точці x_0.

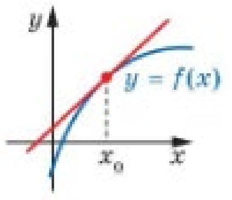


Рис. 2.1.1

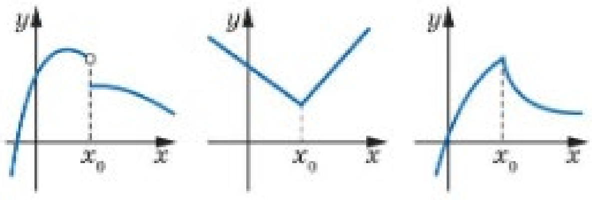


Рис. 2.1.2

На рисунку 2.1.3 зображено графіки функції, які в точці з абсцисою x_0 мають вертикальну дотичну. Отже, ці функції не диференційовні в точці x_0.

Рис. 2.1.3

Покажемо, наприклад, що функція $f(x) = |x|$, графік якої має «злом» у точці $x_0 = 0$, не є диференційовною в цій точці. Маємо:

1) $\triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = |x_0 + \triangle x| - |x_0| = |0 + \triangle x| - |0| =$
$$= |\Delta x|;$$

2) $\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{|\triangle x|}{\triangle x}$;

3) функція $f(x) = \frac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$; $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x}$, тобто функція f не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Теорема 1. Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці.

Доведення. Оскільки функція f диференційовна в точці x_0, то можна записати: $f'(x_0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x}$.

Маємо: $\Delta x = x - x_0$. Очевидно, що коли $\Delta x \to 0$, то $x \to x_0$. Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to x_0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Маємо:

$$\lim_{\triangle x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) = \lim_{\triangle x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot$$

$$\cdot \lim_{\triangle x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{\triangle x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$. Звідси $f(x) = f(x_0)$. Це означає, що функція f є неперервною в точці x_0.

Зазначимо, що не перервна в точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = |x|$ не є диференційовною в цій точці. Цей приклад показує, що неперервність функції в точці є необхідною, але не є достатньою умовою диференційовності функції в цій точці [38].

Нехай M – множина точок, у яких функція f диференційовна. Кожному ислу $x \epsilon M$ поставимо у відповідність число $f'(x)$. Таке правило задає функцію з області визначення M. Цю функцію називають **похідною функції** $y = f(x)$ і позначають f' або y'.

Якщо функція f диференційовна в кожній точці деякої множини M, то говорять, що вона **диференційовна на множині** M [12].

Якщо функція f диференційовна на $D(f)$, то її називають **диференційовною [37]**.

Знаходження похідної функції f називають **диференціюванням** функції f.

Приклад 2. Продиференціюйте функцію $f(x) = kx + b$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f точці x_0, де $x_0 -$ довільна точка області визначення функції f.

4) $\triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = (k(x_0 + \triangle x) + b) - (kx_0 + b) = k \triangle x$;

5) $\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{k \triangle x}{\triangle x} = k$;

6) за означенням похідної $f'(x_0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} k = k$.

Отже, $f'(x_0) = k$.

Оскільки x_0 довільна точка області визначення функції *f*, то остання рівність означає, що для будь-якого $x \epsilon R$ виконується рівність $f'(x_0) = k$.

Висновок про те, що похідна лінійної функції $f(x) = kx + b$ дорівнює k, також прийнято записувати таким чином:

$$(\boldsymbol{kx} + \boldsymbol{b})' = \boldsymbol{k} \qquad (1)$$

Якщо у формулу (1) підставити $k = 1$ і $b = 0$, то отримаємо

$$(\boldsymbol{x})' = \mathbf{1}$$

Якщо ж у формулі (1) покласти $k = 0$, то отримаємо

$$(\boldsymbol{b})' = \mathbf{0}$$

Остання рівність означає, що похідна функції, яка є константою, у кожній точці дорівнює нулю [16].

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції *f* у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції *f*.

1) $\triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2 = 2x_0^2 \triangle x + \triangle x^2$;
2) $\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{2x_0 \triangle x + \triangle x^2}{\triangle x} = 2x_0 + \triangle x$;
3) якщо $\triangle x \to 0$, то при будь-якому $x_0 \epsilon R$ значення виразу $2x_0 + \triangle x$ прямують до числа $2x_0$. Отже, $f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0}(2x_0 + \triangle x) = 2x_0$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2$, то для будь-якого $x \epsilon R$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x.$$

Останню рівність також прийнято записувати у вигляді

$$(\boldsymbol{x^2})' = \boldsymbol{2x} \qquad (2)$$

Формули (2) і є окремим випадком більш загальної формули:

$$(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{nx^{n-1}}, \boldsymbol{n \epsilon N}, \boldsymbol{n} > \mathbf{1} \qquad (3)$$

Формула (3) залишається справедливою для будь-якого $n \epsilon Z$ і $x \neq 0$, тобто

$$(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{nx^{n-1}}, \boldsymbol{n \epsilon Z} \tag{4}$$

Наприклад, скористаємося формулою (4) для знаходження похідної функції $f(x) = \frac{1}{x}$. Маємо:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1}) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Отже, для будь-якого $x \neq 0$ виконується рівність $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, або

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Формулу (4) також можна узагальнити для будь-якого $r \epsilon Q$ і $x > 0$:

$$(\boldsymbol{x^r})' = \boldsymbol{rx^{r-1}}, \boldsymbol{n \epsilon Q} \tag{5}$$

Наприклад, знайдемо похідну функції $f(x) = \sqrt{x}$, скориставшись формулою (5). Маємо:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Отже, для $x > 0$ можна записати: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ або

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Узагалі, похідну функції $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \epsilon N$, $n > 1$, можна знаходити за формулою

$$\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}\right)' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{x^{n-1}}}} \tag{6}$$

Якщо n — непарне натуральне число, то формула (6) дозволяє знаходити похідну функції f у всіх точках x таких, що $x \neq 0$.

Якщо n — непарне натуральне число, то формула (6) дозволяє знаходити похідну функції f для всіх додатніх значень x.

Звернемося до тригонометричних функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Ці функції є диференційовними і їх похідні знаходять за такими формулами:

$$(\boldsymbol{\sin x})' = \boldsymbol{\cos x},$$

$$(\boldsymbol{\cos x})' = -\boldsymbol{\sin x}.$$

2.2 Правила обчислення похідних

Теорема 1 (похідна суми). У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}).$$

Коротко говорять: *похідна суми дорівнює сумі похідних* [17].

Також прийнято такий спрощений запис:

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'.$$

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка, у якій функція f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0. Маємо:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) = \big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) + \big(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)\big) = \Delta f + \Delta g.$$

Запишемо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}\right)$.

Оскільки функція f і g є диференційовними у точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Звідси отримуємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, функція $y = f(x) + g(x)$ є диференційовною в точці x_0, причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x_0) + g'(x_0)$.

Теорему можна узагальнити для будь-якої скінченної кількості доданків:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'.$$

Наведені нижче теореми, також спрощують знаходження похідної [12].

Теорема 2 (похідна добутку). У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x)g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Також прийнято використовувати такий спрощений запис:

$$(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}'\boldsymbol{f}.$$

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка, у якій функція f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x)g(x)$ у точці x_0. Ураховуючи рівності $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, маємо:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) = \big(f(x_0) + \Delta f\big)(g(x_0) +$
$+\Delta g) - f(x_0)g(x_0)\big) = f(x_0)g(x_0) + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g -$
$-f(x_0)g(x_0) = \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g.$

Запишемо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x\right).$

Оскільки функція f і g є диференційовними в цій точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Тепер можна записати:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$

$$= (x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot 0 = f'(x_0)g(x_0) \cdot g'(x_0)f(x_0).$$

Таким чином, функція $y = f(x)g(x)$ є диференційовною в точці x_0, причому її похідна в цій точці дорівнює

$$f'(x_0)g(x_0) \cdot g'(x_0)f(x_0).$$

Наслідок 1. У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k — деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(\boldsymbol{k}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))' = \boldsymbol{k}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}).$$

Коротко говорять: постійний множник можна виносити за знак похідної.

Також прийнято такий скорочений запис:

$$(\boldsymbol{k}\boldsymbol{f})' = \boldsymbol{k}\boldsymbol{f}'.$$

Доведення. Оскільки функція $y = k$ диференційовна в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати:

$$(kf(x))' = (k)'(x)f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x).$$

Наслідок 2. У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) - g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$\boldsymbol{(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)}.$$

Доведення. Маємо:

$$\big(f(x) - g(x)\big)' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1)g(x))' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Теорема 3 (похідна частки). У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційовними і значення функції g не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції: $y = \frac{2x^2+1}{3x-2}$

За теоремою про похідну добутку отримуємо:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2) - (3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x(3x-2) - 3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x-2)^2}.$$

Використовуючи теорему про похідну частки, легко довести, що:

$$\boldsymbol{(tg\, x)' = \frac{1}{cos^2 x}}$$

$$(\boldsymbol{ctg\ x})' = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{sin^2 x}}.$$

Теорема 4 (похідна складеної функції). Якщо функція $t = g(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y = f(x)$ диференційовна в точці t_0, де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $h(x) = f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0, причому

$$\boldsymbol{h'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0)}.$$

Приклад 2. Знайдіть значення похідної функції в точці x_0.

1) $y = \sin\frac{x}{2}, \ \ x_0 = \pi;$

2) $y = tg^3 5x, \ x_0 = \frac{\pi}{15}.$

Розв'язання:

1) $y' = \left(\sin\frac{x}{2}\right)' = \cos\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}; \ \ y'(\pi) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$

2) $y' = (tg^3 5x)' = 3tg^2 5x \cdot (tg5x)' = 3tg^2 5x \cdot \frac{(5x)'}{cos^2 5x} = \frac{15tg^2 5x}{cos^2 5x};$

$$y'\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15tg^2\frac{\pi}{3}}{cos^2\frac{\pi}{3}} = \frac{15 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 45 \cdot 4 = 180.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 180.

2.3 Рівняння дотичної

Нехай функція *f* диференційовна в точці x_0. Тоді до графіка функції *f* у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (рис.2.3.1).

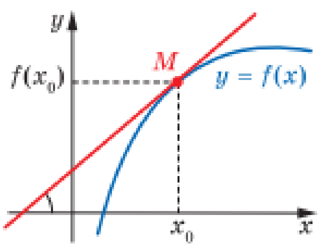


Рис. 2.3.1.

Зважаючи на геометричний зміст похідної, отримуємо $k = f'(x_0)$. Тоді рівняння дотичної можна записати так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Ця пряма проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$. Отже, координати цієї точки задовольняють рівняння (1). Маємо:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Підставимо знайдене значення b у рівняння (1):

$$y = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Перетворивши праву частину отриманої рівності, можна зробити висновок: якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то **рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $\boldsymbol{f}$ у точці з абсцисою $\boldsymbol{x_0}$**, має вигляд:

$$\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}.$$

Приклад 1. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2 - -4x - 3x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

Розв'язання. Маємо:

$$f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2; \quad f'(x) = -4 - 6x;$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8.$$

Підставивши знайдені числові значення в рівняння дотичної, отримуємо: $y = 8(x + 2)$ тобто $y = 8x + 14$.

Відповідь: $y = 8x + 14$.

Приклад 2. Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, у якій проведена до нього дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°.

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x - 1}} \cdot (2x - 1)' = \frac{2}{2\sqrt{2x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}.$$

Оскільки дотична утворює кут 45° з додатним напрямом осі абсцис, то її кутовий коефіцієнт k дорівнює $tg45°$, тобто $k = 1$. Нехай x_0 − абсциса точки дотику. Тоді $f'(x_0)$.

Отримуємо $\frac{1}{\sqrt{2x_0-1}} = 1.$ Звідси $\sqrt{2x_0 - 1} = 1;\ 2x_0 - 1 = 1;\ \ x_0 = 1.$

Відповідь: 1.

2.4 Ознаки зростання і спадання функції

Теорема 1 (ознака сталості функції). Якщо для всіх х з проміжку *I* виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.

На рисунку 1 зображено графік деякої функції *f*, яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Цей графік має таку властивість: будь-яка дотична до графіка утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис [4].

Оскільки тангенс гострого кута є додатним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є додатним. Тоді, виходячи з геометричного змісту похідної, можна зробити такий висновок: для будь-якого $x\epsilon[a; b]$ виконується нерівність $f'(x) > 0$.

З рисунка 2.4.1 видно, що функція *f* зростає на розглядуваному проміжку.

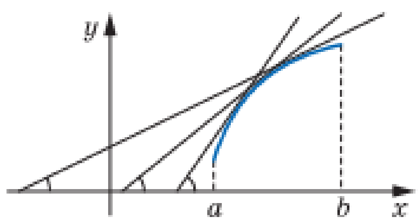


Рис. 2.4.1.

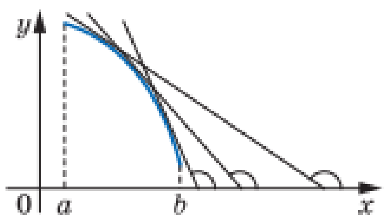


Рис. 2.42.

На рисунку 2.4.2 зображено графік деякої функції *f*, яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Будь-яка дотична до графіка утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис [38].

Оскільки тангенс тупого кута є від’ємним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є від’ємним. Тоді для будь-якого $x\epsilon[a; b]$ виконується нерівність $f'(x) < 0$.

З рисунка 2.4.2 видно, що функція f спадає на розглядуваному проміжку. Ці приклади показують, що знак похідної функції на деякому проміжку I впливає на те, чи є ця функція зрос таючою (спадною) на проміжку I [32].

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням функції можна побачити і за допомогою механічної інтерпретації. Справді, якщо швидкість, тобто похідна функції $y = s(t)$, є додатною, то точка на координатній прямій рухається вправо (рис. 2.4.3). Це означає, що з нерівності $t_1 < t_2$ випливає нерівність $s(t_1) < s(t_2)$, тобто функція $y = s(t)$ є зростаючою. Аналогічно, якщо швидкість є від'ємною, то точка рухається вліво, тобто функція $y = s(t)$ є спадною.

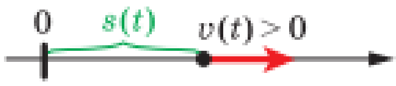


Рис. 2.4.3.

Цей зв'язок установлюють такі дві теореми.

Теорема 2. (ознака зростання функції). Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку [1].

Теорема 3. (ознака спадання функції). Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Приклад 1. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x - 100$ зростає на множині дійсних чисел.

Розв'язання. Маємо: $f' = x^4 + x^2 + 1$. Оскільки $x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всіх $x \epsilon R$, то функція f зростає на множині дійсних чисел.

2.5 Точки екстремуму функції

Означення 1. Інтервал $(a; b)$, який містить точку x_0, називають околом точки x_0 [36].

Зрозуміло, що будь-яка точка має безліч околів. Наприклад, проміжок $(-1; 3) -$ один з околів точки 2,5. Разом з тим цей проміжок не є околом точки

3.

На рисунку 1 зображено графіки чотирьох функцій. Усі ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

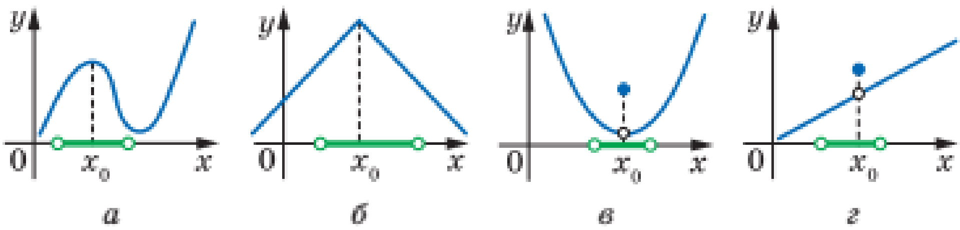


Рис. 2.5.1.

Означення 2. Точку x_0 називають точкою максимуму функції *f*, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх *x* з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є точкою максимуму функції $y = \sin x$ (рис. 2.5.2). Пишуть $x_{max} = \frac{\pi}{2}$.

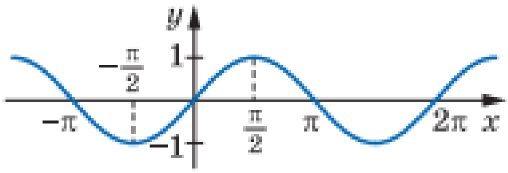


Рис. 2.5.2.

Означення 3. Точку x_0 називають точкою мінімуму функції *f*, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх *x* з цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ є точкою мінімуму функції $y = \sin x$ (рис.2.5.2). Пишуть $x_{min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 3 зображено графіки функцій, для яких x_0 є точкою мінімуму, тобто $x_{min} = x_0$.

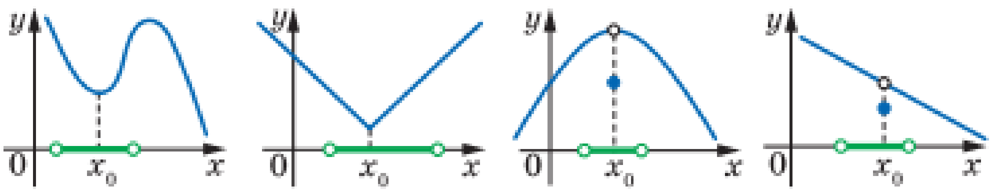


Рис. 2.5.3.

Точки максимуму і мінімуму мають спільну назву: їх називають **точками екстремуму** функції (від латинського *extremum* — крайній). На рисунку 2.5.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 x_6 є точками екстремуму [5].

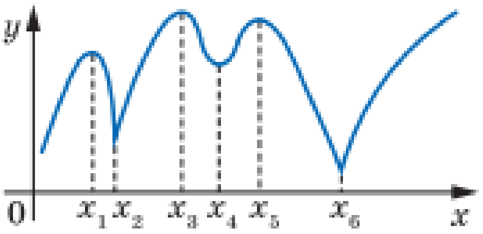


Рис. 2.5.4.

Теорема 1. Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційовною в точці x_0.

Означення 4. Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають **критичними точками функції.**

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є критичною точкою хфункцій $y = x^3$і $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є критичною точкою функції $y = \sin x$.

Із сказаного вище випливає, що кожна точка екстремуму функції є її критичною точкою, проте не кожна критична точка є точкою екстремуму. Іншими словами, точки екстремуму слід шукати серед критичних точок [11].

Теорема 2 (ознака точки максимуму функції). Нехай функція f є диференційовною на інтервалі $(a; b)$ і x_0 — деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх $x \epsilon (a; x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, а для всіх виконується нерівність , то точка x_0 є точкою максимуму функції f.

Теорема 3 (ознака точки мінімуму функції). Нехай функція f є диференційовною на інтервалі $(a;b)$ і x_0 — деяка точка цього інтервалу. Якщо для всіх $x\epsilon(a;x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, а для всіх $x\epsilon[x_0;b)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, то точка x_0є точкою мінімуму функції f.

Інколи зручно користуватися спрощеними формулюваннями цих двох теорем: якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 — точка максимуму; якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 − точка мінімуму. Для функції f точки екстремуму можна шукати за такою схемою:

1) Знайти $f'(x)$.

2) Дослідити знак похідної в околах критичних точок.

3) Користуючись відповідними теоремами, стосовно кожної критичної точки з'ясувати, чи є вона точкою екстремуму.

Приклад 1. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$;

2) $f(x) = 2x^2 - x^4$;

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12x = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + +1)(x - 2).$$

Методом інтервалів дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1, x_2 = 2$ (рис. 2.5.5). Отримуємо, що $x_{max} = -1, x_{min} = 2$

2)$f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x + 1)(x - 1)$. Дослідивши знак похідної (рис. 2.5.6), отримаємо: $x_{max} = -1, x_{min} = 0$ і $x_{max} = 1$.

Рис. 2.5.5

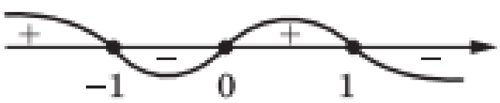


Рис. 2.5.6

Приклад 2. Дослідити функцію на зростання (спадання) та екстремуму:

$$v(x) = \frac{16}{x(4 - x^2)}.$$

Розв'язання. 1. Функція має область визначення $D(v) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

x	$(-\infty; -2)$	$\left(-2; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$	$\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right)$	$(2; +\infty)$
$v'(x)$ $v(x)$	+ ↗	+ ↗	0 $v_{max} =$ $= -3\sqrt{3}$	- ↘	- ↘	0 $v_{min} =$ $= -3\sqrt{3}$	+ ↗	+ ↗

2. $v'(x) = \frac{-16(4-3x^2)}{x^2(4-x^2)^2} = \frac{16(3x^2-4)}{x^2(4-x^2)^2}$; $\quad v'(x) = 0$; $\quad \frac{16(3x^2-4)}{x^2(4-x^2)^2} = 0$;

$$3x^2 - 4 = 0; \quad x_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad x_2 = +\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

3. Контрольні точки: $x = -3$; $x = -1{,}2$; $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$.

4. Характер зміни функції показано в таблиці стрілками.

5. Оскільки в критичній точці $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ знак похідної змінюється з $\ll + \gg$ на $\ll - \gg$, то в ній функція досягає максимуму, причому $v_{max} = v\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = = 3\sqrt{3}$. У критичній точці $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ похідна змінює знак $\ll - \gg$ на $\ll + \gg$, тому в цій точці функція досягає мінімуму, причому $v_{min} = v\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 3\sqrt{3}$.

Приклад 3. Вартість утримання баржі за 1 год складається з вартості палива, яка пропорційна піднесеній до третього степеня швидкості біржі, і вартості амортизації баржі (заробітна плата команди, вартість обладнання тощо). Отже, загальна вартість утримання баржі за 1 год виражається формулою $S = av^3 + b$, де v швидкість судна в кілометрах за годину; a і bкоефіцієнти, задані для кожного судна [3].

За якої швидкості загальна сума утримання на 1 км шляху буде найменшою, якщо $a = 0{,}005,\ b = 40$.

Розв'язання. Баржа долає 1 км шляху за $\frac{1}{v}$ год. Тому загальна сума утримання 1 км шляху становитиме

$$p = (0{,}005v^3 + 40)\frac{1}{v} = 0{,}005v^2 + \frac{40}{v}.$$

Отже, потрібно знайти $v(0 < v < \infty)$, за якої функція $p = f(x)$ набуватиме найменшого значення.

$$p' = 0{,}01v - \frac{40}{v^2} = \frac{v^3 - 4000}{100v^2};\ \ \frac{v^3 - 4000}{100v^2} = 0;$$

$$v^3 - 4000 = 0;\ \ v = \sqrt[3]{4000} \approx 16.$$

Візьмемо до уваги, що в разі $v \to 0$ і $v \to \infty$ матимемо . Це означає, що дуже мала і дуже велика швидкості не приводять до найменшої суми утримання судна на 1 км шляху, оскільки за малої швидкості витрачається багато часу, отже, підвищується вартість утримання команди, а за дуже великої витрачається багато палива. Похідна перетворюється на нуль лише за одного значення аргументу $\sqrt[3]{4000}$, тому за цього значення функція набуває найменшого значення.

Отже, найраціональнішою є швидкість $v \approx 16$ км/год.

Приклад 4. Визначити розміри циліндричної закритої консервної банки заданого об'єму V см^3, за яких її повна площа поверхні буде найменшою, тобто щоб витрати на її виготовлення були найменшими [6].

Розв'язання. Нехай $x -$ діаметр основи банки, $h -$ її висота. Тоді повна площа поверхні банки

$$S = 2\frac{1}{4}\pi x^2 + \pi x h.$$

Оскільки об'єм банки відомий, то, використовуючи формулу об'єму циліндра $V = \frac{1}{4}\pi x^2 h$, виразимо висоту h через x і V:

$$h = \frac{4V}{\pi x^2}.$$

Тоді величину S подамо через одну змінну x:

$$S = \frac{1}{2}\pi x^2 + \pi x \frac{4V}{\pi x^2} = \frac{\pi x^3 + 8V}{2x}, \text{ де } x > 0.$$

Задача зводиться до визначення найменшого значення функції $S = f(x)$ на проміжку $0 < x < +\infty$.

Знайдемо похідну і критичні точки:

$$S' = \frac{1}{2}\frac{(\pi x^3 + 8V)'x - x(\pi x^3 + 8V)}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{3\pi x^3 - \pi x^3 - 8V}{x^2} = \frac{\pi x^3 - 4V}{x^2} = 0;$$

$$\pi x^3 - 4V = 0; \quad x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Тут не можна порівняти значення функції в критичній точці з її значеннями на кінцях проміжку, оскільки проміжок не має право кінця. Тому потрібно дослідити знак похідної ліворуч і праворуч від критичної точки. Оскільки, $S'_{x<\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}} < 0$ а $S'_{x>\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}} > 0$, то в точці $x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ матимемо мінімум, який збігається з найменшим значення. У цьому разі $h = \frac{4V}{\pi\sqrt[3]{(\frac{4V}{\pi})^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, тобто якщо висота дорівнює діаметру основи (осьовий переріз має форму квадрата), на виготовлення циліндричної банки заданого об'єму потрібно найменше жерсті [4].

2.6 Найбільше і найменше значення на проміжку

Точка, у якій функція набуває свого найменшого значення, не обов'язково є точкою мінімуму. Наприклад на рисунку 2.6.1, $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, а точок мінімуму функція f не має. Також точка мінімуму не обов'язково є точкою, у якій функція набуває найменшого значення.

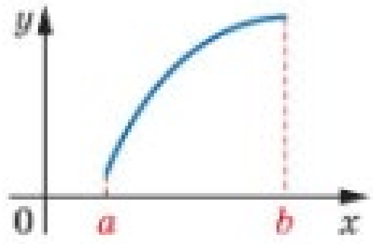


Рис. 2.6.1

Аналогічно стосується і точок максимуму та точок, у яких функція набуває найбільшого значення.

Тут важливо зрозуміти, що властивість функції мати точку екстремуму x_0 означає таке: функція набуває в точці x_0 найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями функції в сіх точок деякого, можливого, дуже малого околу точки x_0. Тому, якщо хочуть наголосити на цьому факті, то точки екстремуму ще називають **точками локального максимуму** або **точками локального мінімуму [17].**

То для такої функції пошук найменших і найбільших значень на відрізку $[a; b]$ можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти критичні точки функції f, які належать відрізку $[a; b]$.
2. Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розгляданого відрізку.
3. З усіх знайдених значень обрати найменше і найбільше.

Зрозуміло, що цей алгоритм можна реалізувати лише тоді, коли розглядувана функція f має скінченну кількість критичних точок на відрізку $[a; b]$.

Зазначимо, що коли визначити, які з критичних точок є точками екстремуму, то кількість точок, у яких слід шукати значення функції, може бути зменшена. Проте виявлення точок екстремуму, як правило, потребує більшої технічної роботи, ніж пошук значень функції в критичних точках.

Приклад 1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$f(x) = 4\sin 2x - 2\sin 4x$ на проміжку $[0;\ \pi]$.

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x) = 8\cos 2x - 8\cos 4x = 8(\cos 2x - \cos 4x) == 16\sin 3x \sin x.$$

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$\sin 3x \sin x = 0$$

$$\sin 3x = 0 \text{ або } \sin x = 0;$$

$$x = \frac{\pi k}{3} \text{ або } x = \pi k, k\epsilon Z.$$

Звідси $x = \frac{\pi k}{3}, k\epsilon Z.$

Отже, точки виду $x = \frac{\pi k}{3}$ є критичними точками функції f, з них проміжку $[0;\ \pi]$ належить чотири точки: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π.

Обчислюємо:

$$f(0) = f(\pi) = 0, \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}, \qquad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Таким чином,

$$\max_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}\,, \qquad \min_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}$.

Приклад 2. Подайте число 8 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб сума куба першого числа і квадрата другого була найменшою [25].

Розв'язання. Нехай перше число дорівнює x, тоді друге дорівнює $8 - x$. З умови випливає, що $0 \leq x \leq 8$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$, визначену на відрізку $[0; 8]$, і знайдемо, при якому значенні x вона набуває найменшого значення.

Маємо: $f'(x) = x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 + 2x - 16$. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{8}{3}.$$

Серед знайдених чисел проміжку [0; 8] належить тільки число 2. Обчислюємо:

$$f(2) = 44, f(0) = 64, f(8) = 512.$$

Отже, функція f набуває найменшого значення при $x = 2$.

Відповідь: $8 = 2 + 6$.

2.7 Друга похідна. Поняття опуклості функції

Нехай матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$ по координатній прямій. Тоді миттєву швидкість $v(t)$ в момент часу t визначають за формулою

$$v(t) = s'(t).$$

Розглядаючи функцію $y = v(t)$. Її похідну в момент часу t називають прискоренням руху та позначають $a(t)$, тобто

$$a(t) = v'(t).$$

Таким чином, функція прискорення руху – це похідна функції швидкість руху, яка у свою чергу є похідною функції закон руху, тобто

$$a(t) = v'(t) = \left(s'(t)\right)'.$$

У таких випадках говорять, що функція прискорення руху $y = a(t)$ є **другою похідною функції** $y = s(t)$. Записують:

$$a(t) = s''(t).$$

(запис $s''(t)$ читають: «ес два штрихи від те»).

Розглянемо функцію $y = f(x)$, диференційовну на деякій множині M. Тоді її похідна також є деякою функцією, заданою на цій множині. Якщо функція f' є диференційовною в деякій точці $x_0 \epsilon M$, то похідну функції f' у точці x_0 називають **другою похідною функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ у точці $\boldsymbol{x_0}$** і позначають $f''(x_0)$ або $y''(x_0)$. Саму функцію називають **двічі диференційовною в точці $\boldsymbol{x_0}$**.

Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''(x_0)$, називають **другою похідною функції** $y = f(x)$ і позначають f'' або y''.

Якщо функція f є двічі диференційовною в кожній точці множини M, то її називають **двічі диференційовною на множині $\boldsymbol{M}$**. Якщо функція f двічі диференційовна на $D(f)$, то її називають **двічі диференційовною [26].**

Знаючи, що функцію характеризують такі властивості, як парність (непарність), періодичність, зростання (спадання) тощо. Ще однією важливою характеристикою функції є опуклість угору і опуклість вниз.

Нехай функція f диференційовна на проміжку I. Тоді в будь-якій точці її графіка з абсцисою $x\epsilon I$ можна провести невертикальну дотичну. Якщо при цьому графік функції на проміжку I розміщений не вище будь-якої такої дотичної (рис. 2.7.1), то функцію f називають **опуклою вгору на проміжку I;** якщо ж графік на проміжку I розміщено не нижче від кожної такої дотичної (рис.2.7.2) – **опуклою вниз на проміжку I.**

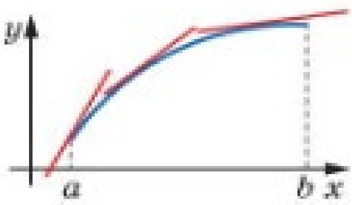


Рис. 2.7.1

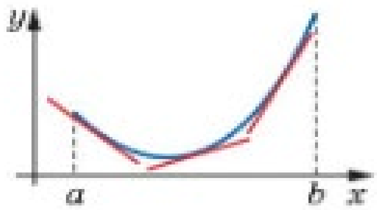


Рис. 2.7.2

Для двічі диференційовної на проміжку I функції f зростання (спадання) функції f' визначається знаком другої похідної функції f на проміжку I. Таким чи, характер опуклості двічі диференційовної функції пов'язаний зі знаком її другої похідної.

Цей зв'язок установлює такі дві теореми.

Теорема 1 (ознака опуклості функції вниз). Якщо для всіх $x \epsilon I$ використовується нерівність $f''(x) \geq 0$, то функція f є опуклою вниз на проміжку I.

Теорема 2 (ознака опуклості функції вгору). Якщо для всіх $x \epsilon I$ використовується нерівність $f''(x) \leq 0$, то функція f є опуклою вгору на проміжку I.

Приклад 1. Дослідіть на опуклість функцію $f(x) = tg\ x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв’язання. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$.

Звідси $f''(x) = \left(\frac{1}{cos^2 x}\right)' = (cos^{-2}x)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2\sin x}{cos^3 x}$.

Нерівність $f''(x) \geq 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Отже, функція $f(x) = tg\ x$ є опуклою вниз на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 2.7.3).

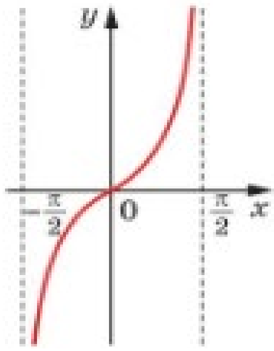
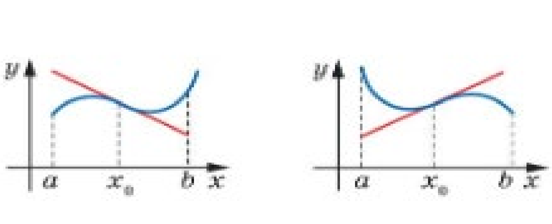


Рис. 2.7.3

Нерівність $f''(x) \leq 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$. Таким чином, функція $y = tg\ x$ є опуклою вгору на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (рис. 2.7.4).

На рисунку 2.7.5 зображені графіки функцій і дотичні, проведені до них у точках з абсцисою x_0. Кожна з наведених функцій на проміжках $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$ має різний характер опуклості. Отже, на цих проміжках графік функції розташований у різних півплощинах відносно дотичної. У такому разі говорять, що точки x_0 є точку перегину функції.



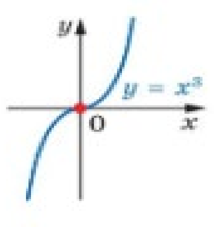


Рис. 2.7.4 Рис. 2.7.5

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є точкою перегину функції $y = x^3$ (рис. 2.7.5); точки виду $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, є точками перегину функції $y = \cos x$ (рис. 2.7.6).

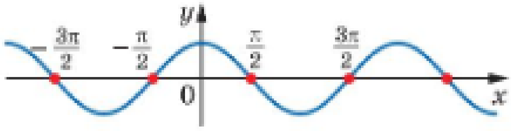


Рис. 2.7.6

Приклад 2. Дослідіть характер опуклості та знайдіть точки перегину функції $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12}$.

Розвязання. Маємо: $f'^{(x)} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$; $f''^{(x)} = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.

Використовуючи метод інтегралів, дослідимо знак функції $y = f''(x)$ (рис. 2.7.8). Отримуємо, що функція f є опуклою вгору на проміжку $(-\infty; 1]$ та опуклою вниз на проміжку $[1; +\infty)$.

Рис. 2.7.8

Функція f на проміжках $(-\infty; 1]$ і $[1; +\infty)$ має різний характер опуклості. Уточці з абсцисою $x_0 = 1$ до графіка функції f можна провести дотичну. Отже, $x_0 = 1$ є точкою перегину функції f.

2.8 Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їхніх графіків

Дослідження властивостей функції проводиться за таким планом:

1. Знайти область визначення функції $y = f(x)$.
2. Дослітi функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки знакосталості функції.
5. Знайти проміжки зростання і спадання функцій.
6. Знайти проміжки кстремуму та значення функції в точках екстремуму.
7. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

Приклад 1. Дослідити функцію $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$ та побудувати її графік [32].

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині дійсних чисел, тобто: $D(f) = R$.

2. Маємо: $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4}(-x)^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$. Звідси $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$, тобто функція $y = f(-x)$ не збігається ні з функцією $y = f(x)$, ні з функцією $y = -f(x)$. Таким чином, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3–4. Маємо: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x^2}{4}(6 - x)$. Число 0 і 6 є нулями функції f. Застосувавши метод інтервалів (рис. 2.8.1), знаходимо проміжки знакосталості функції f, а саме: установлюємо, що $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$ і $f(x) < 0$ при $x \in (6; +\infty)$.

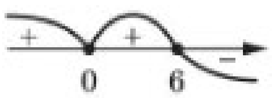


Рис. 2.8.1

Рис. 2.8.2

Рис. 2.8.3

5–6. Маємо: $f'(x) = 3x - \frac{3x^2}{4} = \frac{3x}{4}(4 - x)$. Дослідивши знак похідної (рис. 2), доходимо висновку, що функція f зростає на проміжку $[0; 4]$, спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$ і $[4; +\infty)$. Отже, $x_{max} = 4, x_{min} = 0$. Отримуємо: $f(4) = 8, f(0) = 0$.

7. Маємо: $f''(x) = 3 - \frac{3x}{2}$. Дослідити знак другої похідної (рис. 2.8.3), робимо висновок, що функція f є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; 2]$, опуклою вгору на проміжку $[2; +\infty), x_0 = 2$ є точкою перегину $f(2) = 4$. Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 2.8.4).

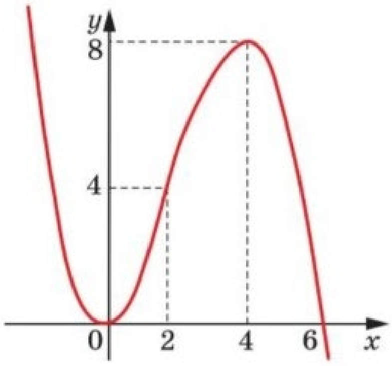


Рис. 2.8.4

Приклад 2. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2}$ і побудуйте її графік [34].

Розв’язання. 1. Функція визначена на множині $\left(-\infty; \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$.

2. Функція не є ні парною, ні непарною.

3. Розв’язавши рівняння $\frac{x^4}{x^3-2} = 0$, устанавлюємо, що $x = 0$ єдиний нуль даної функції.

4. $f(x) > 0$ при $x\epsilon\left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$, $f(x) < 0$ при $x\epsilon(-\infty; 0) \cup \left(0; \sqrt[3]{2}\right)$.

5–6. Маємо: $f'(x) = \frac{x^6-8x^3}{(x^3-2)^2} = \frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$.

Дослідивши знак f' (рис. 2.8.5), доходимо висновку, що функція f спадає на кожному з проміжків $\left[0; \sqrt[3]{2}\right)$ і $(\sqrt[3]{2}; 2]$, зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty), x_{min} = 2, f(2) = \frac{8}{3}, x_{max} = 0, f(0) = 0$.

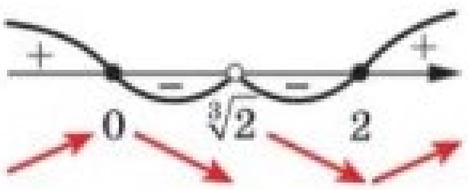


Рис. 2.8.5

7. Маємо: $f''(x) = \frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

Дослідивши знак f'' (рис. 2.8.6), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на кожному з проміжків $(-\infty; -\sqrt[3]{4}]$ і $(\sqrt[3]{2}; +\infty)$, опуклою вгору на проміжку $\left[-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$, $x = -\sqrt[3]{4}$ – точка перегину і $f\left(\sqrt[3]{4}\right) = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

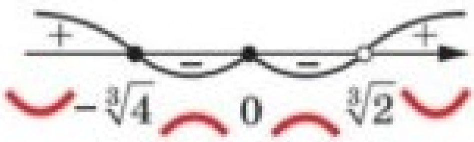


Рис. 2.8.6

Пряма $x = \sqrt[3]{2}$ – вертикальна асимптота графіка даної функції.

Маємо: $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2} = \frac{(x^4-2x)+2x}{x^3-2} = x + \frac{2x}{x^3-2}$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^3-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3-\frac{2}{x}} = 0$, то при $x \to +\infty$ відстані від точки графіка функції f до вілповідних точок прямої $y = x$ стають усе меншими й меншими та мають стати меншими від довільного наперед заданого додатного числа. У цьому разі пряму $y = x$ називають похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$. Також можна показати, що пряма $y = x$ похилою асимтотою графіка функції f при $x \to -\infty$.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 2.8.7).

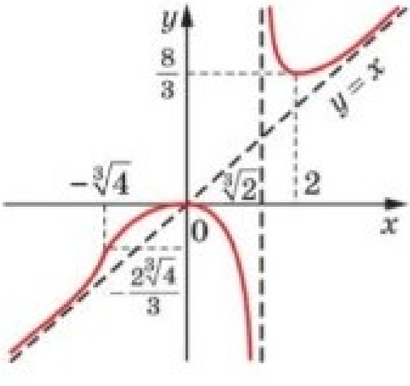


Рис. 2.8.7

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ПРИ РОЗ'ЯЗУВАННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

У школі урок залишається основною формою організації навчального процесу. Сучасний урок, зорієнтований на реалізацію компетентнісного підходу в навчанні, має вирішувати ряд завдань. Це зокрема:

- підвищеним рінння мотивації учнів;
- використання суб'єктивного досвіду набутого учнями;
- ефективне та творче застосування знань та досвіду на практиці;
- формування у учнів навичок отримувати, осмислювати та використовувати інформацію з різних джерел;
- здійснення організаційної чіткості та оптимізації кожного уроку;
- підвищення рівня самоосвітньої та творчої активності учнів;
- створення умов для інтенсифікації навчально-виховного процесу;
- наявність контролю, самоконтролю та взаємоконтролю за процесом навчання;
- формування моральних цінностей особистості; розвиток соціальних та комунікативних здібностей учнів.

В класах з профільним вивченням математики недостатньо обмежитися розглядом застосування похідної до розв'язування задач з алгебри. Доцільно розглянути використання похідної також в інших сферах людської діяльності, зокрема у фізиці, економіці, біології та хімії [11].

3.1 Застосування похідної в фізиці

Фізична величина	Формули
Швидкість	$v = \frac{d}{x} = x'$ $a) \; x = vt, v = (vt)' = v;$

	$b)\ x = v_0 t + \frac{at^2}{2},$ $v = v_0 t + (\frac{at^2}{2})' = v_0 + at$
Прискорення	$a = \frac{d}{v} = v' \ \ v = at, a = a$
Потужність	$P = \frac{dA}{dt} = A', dA = Fdx.$ $P = \frac{Fdx}{dt} = F\frac{dx}{dt} = Fv$
Сила	$F = ma, a = \frac{dv}{dt}$ $F = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$
Сила струму	$i = \frac{dq}{dt} = q'$
ЕРС індукції	$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi'$

Приклад 1. На якій відстані слід розмістити предмет від збиральної лінзи, щоб відстань від предмета до його дійсного зображення була найменшою? Розв'язання:

Використавши формулу лінзи $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$, знайдемо

$$f = \frac{Fd}{d-F},\ f + d = \frac{Fd}{d-F} + d = \frac{d^2}{d-F} \tag{1}$$

У нашому випадку $d > F$, оскільки зображення дійсне. Вираз у правій частині рівняння (1) перетворимо так:

$$f + d = \frac{d^2}{d-F} = \frac{((d-F)+F)^2}{d-F} = \frac{((d-F)-F)^2 + 4F(d-F)}{d-F} =$$

$$= \frac{(d-2F)'}{d-F} + 4. \tag{2}$$

Вираз у правій частині рівнянні (2), а отже, і відстань між предметом та його дійсним зображенням найменше тоді, коли $d = 2F$. Значно простіше розв'язується задача, якщо скористатися поняттям похідної для знаходження критичних значень функції. Оскільки $y = f + d = \frac{d^2}{d-F}$ є функцією однієї змінної d, то вона може мати екстремум. Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{2d(d-F) - d^2}{(d-F)^2} = \frac{d(d-2F)}{(d-F)^2}.$$

Функція має екстремум, якщо $y' = 0$. Отже, за $d = 0$ або

$d - 2F = 0$ функція набуває екстремальних значень. Умову задачі задовольняє значення $d = 2F$. Легко довести, що при цьому значення $y(d)$ набуває найменшого значення.

Приклад 2. Два учні граються м'ячем, кидаючи його один одному. Якої найбільшої висоти досягає м'яч, коли від одного гравця до другого він летить 2 сек.?

Розв'язання: Координата y змінюється за законом:

$$y = v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}.$$

Максимальне значення y знайдемо з умови: $y'(t) = 0, y'(t) = v_{0y} - gt$, тоді $v_{0y} = gt$. Отже, $y_{max} = gt \cdot t - \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}$.

Оскільки найбільшої висоти тіло досягає через 1 с., то $y_{max} = 4{,}9$ м.

Приклад 3.Два автомобілі їдуть рівномірно з одноковими за модулем швидкостями по дорогах, що перетинаються під кутом α. На яку мінімальну відстань наближаються автомобілі в русі, якщо спочатку вони знаходилися на відстанях l_1і l_2 від перехрестя доріг?

Розв'язання: Координати тіл змінюються за законом

$y = l_1 - vt, x = l_2 - vt$. За теоремою косинусів визначимо відстань s.

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{(l_2 - vt)^2 + (l_1 - vt)^2 - 2(l_2 - vt)(l_1 - vt)\cos\alpha}.$$

Найменшу відстань між тілами знайдемо для моменту часу t. При цьому $s'(t) = 0$.

$$s' = \frac{2[v(vt-l_2)+v(vt-l_1)-v(vt-l_2)+v(vt-l_1)\cos\alpha]}{2\sqrt{(l_2-vt)^2+(l_1-vt)^2-2(l_2-vt)(l_1-vt)\cos\alpha}}.$$

Виконавши спрощення й прирівнявши вираз до нуля, матимемо:

$$(l_1+l_2-2vt)(1-\cos\alpha)=0.$$

Звідси $t = \frac{l_1+l_2}{2v}$. Тоді

$$s_{min} = |l_2-l_1|\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Відповідь: $s_{min} = \left\{|l_2-l_1|\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right\}$.

Приклад 4. Батарея складається з $N = 600$ однакових елементів так, що n груп з'єднано послідовно і в кожній із них є m елементів, з'єднаних паралельно. ЕРС кожного елемента $\varepsilon = 2$В, його внутрішній опір $r_1 = 0{,}4$ Ом. За яких значень m і n батарея, якщо замкнути її на зовнішній опір $R = 0{,}6$ Ом, віддасть у зовнішнє коло максимальну потужність?

Розв'язання: Потужність, яку буде віддано в зовнішнє коло,

$$P = I^2R = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}R.$$

Споживана потужність буде максимальною, якщо $P\,'(R) = 0$.

$$P'(R) = \varepsilon^2\frac{(R+r)^2-(R+r)R}{(R+r)^4} = \varepsilon^2\frac{(R+r)(r-R)}{(R+r)^4} = \varepsilon^2\frac{(r-R)}{(R+r)^3}.$$

Отже, $r-R=0, r=R$, зовнішній опір дорівнюватиме внутрішньому. У цьому випадку споживана потужність буде максимальною. Оскільки

$r = n\frac{r_1}{m}$ і $N = mn,$ то $r = \frac{n^2r_1}{N}$. Тоді $\frac{n^2r_1}{N} = R$, звідси $n = \sqrt{\frac{RN}{r_1}}$. Отже, $m = 20;\ n = 30$.

Відповідь: $m = \{20\};\ n = \{30\}$.

Приклад 5. На абсолютно гладкій горизонтальній поверхні знаходяться два пружні бруски масами M. Скріплені пружиною довжиною l. Жорсткість пружини дорівнює k. На один із брусків, наприклад на лівий, налітає зі швидкістю v третій брусок, який має масу M. Показати, що скріплені бруски завжди будуть рухатися в одну сторону. Визначити швидкості брусків у той момент, коли пружина найбільш розтягнута.

Розв'язання: У результаті пружиного удару лівий брусок набуває швидкості v. Правий брусок у цей момент часу перебуває у стані спокою. Позначимо через u_1і u_2 швидкості лівого й правого бруска в довільній момент часу. На основі законів збереження імпульсу й енергії маємо:

$$M(u_1 + u_2) = Mv, \qquad \frac{Mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}.$$

Тоді $v = u_1 + u_2,\ kx^2 = M\big(v^2 - (u_1^2 + u_2^2)\big)$.

Отже, $u_1 \cdot u_2 = \frac{kx^2}{2M}$. З цього виразу можна зробити висновок, що u_1і u_2 матимуть той самий знак, бо права частина рівняння додатна. Отже, бруски рухатимуться в один бік.

Видовження пружини буде найбільшим, якщо добуток, $u_1 \cdot u_2$ буде максимальним. Але $u_1 \cdot u_2$= $u_1(v - u_1)$=$u_1 v - u_1^2$. Позначимо через y цей добуток: $y = u_1(v - u_1) = u_1 v - u_1^2$. Вираз набуває максимального значення, якщо $y'(u_1\ )\ =\ 0$.

$$y'(u_1\ ) = v - 2u_1;\ v - 2u_1 = 0; u_1 = \frac{v}{2}, u_2 = \frac{v}{2}.$$

Відповідь: $\left\{\frac{v}{2}\right\}$.

Приклад 6. Знайдіть швидкість і прискорення в момент часу t і в момент, коли $t = 1$с., для точки, що рухається прямолінійно за законом:

$$s\,'(t)\ =\ 2t^3 -\ 3t.$$

Розв'язання: Враховуючи механічний зміст похідної, отримаємо:

$$v(t)\ =\ s\,'\,(t)\ =\ 6t^2 -\ 3.$$

Якщо $t = 1,$то $v(1) = 6 \cdot 1 - 3 = 3$ (м/с).

Аналогічно: $a(t)$ = $v\,'\,(t)$ = $12t$. Якщо $t = 1,$то $a(1) = 12 \cdot 1 = 12\ (\text{м}/c^2)$.

Відповідь: $v = 3\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right);\ a = 12\ (\text{м}/c^2)$.

Приклад 7. Прямокутна рамка площею 500 см^2, яка складається з 200 витків дроту, рівномірно обертається в однорідному магнітному полі навкруги осі, що проходить через її центр, паралельно одній із її сторін, з частотою 10 с. При цьому в рамці індукується ЕРС, максимальне значення якої – 150 В. Визначити індукцію магнітного поля.

Розв'язання: За законом Фарадея, у рамці, яка складається з N витків та обертається в магнітному полі, виникає ЕРС індукції:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

де $\Phi = BS\,cos\,\omega t$ і $\omega = 2\pi\nu$.

Підставляючи ці вирази у формулу (1) й диференціюючи, отримаємо:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}BS\,cos 2\pi\nu = NBS2\pi\nu \sin 2\pi\nu t.$$

ЕРС індукції максимальна, коли $sin\,2\pi\nu t = 1$. $\varepsilon = \varepsilon_{max} = NBS2\pi\nu$, звідки

$$B = \frac{\varepsilon_{max}}{NS2\pi\nu}.$$

Підставивши значення отримаємо 0,24 Тл.

Відповідь: {0,24}.

3.2 Застосування похідної в економіці

Економічні знання допомагають нам правильно витрачати ресурси та кошти. Поняття граничних величин дозволили створити новий інструмент дослідження та опису економічних явищ, через що стало можливим розв'язувати наукові проблеми, які раніше мали незадовільні рішення. Похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) за часом або відносно іншого об'єкта дослідження. Саме поняття «похідна в економіці» тісно пов'язане з виробничими завданнями, граничними величинами та еластичністю функцій. В економіці дуже часто необхідно знайти значення показників, таких як гранична продуктивність праці, максимальний прибуток, максимальний обсяг випуску продукції, мінімальні витрати. Кожен показник є функцією від однієї або кількох змінних, знаходження яких зводиться до визначення похідної [25].

Розглянемо задачу про продуктивність праці. Нехай функція $u = u(t)$ відображає кількість виробленої продукції u за час t і необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0.

За період часу від t_0. до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$; тоді середня продуктивність праці за цей період часу $z_{\text{сер}} = \Delta u \, \Delta t$. Очевидно, що продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0).$$

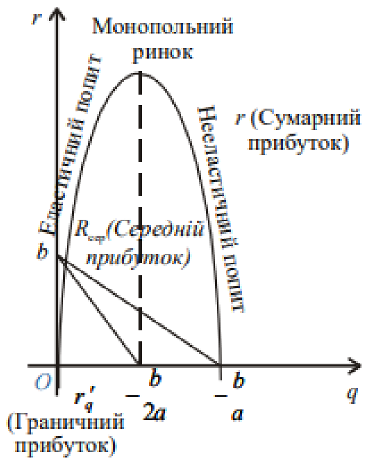
Таким чином, продуктивність праці є похідна від обсягу виробленої продукції по часу. Розглянемо ще одне поняття, яке ілюструє економічний зміст похідної. Витрати виробництва у будемо розглядати як функцію кількості продукції x, що виробляється. Нехай Δx – приріст продукції, тоді Δy – приріст витрат виробництва і $\Delta y \, \Delta x$ – середній приріст витрат виробництва продукції на одиницю продукції. Похідна $y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількість продукції, що випускається) х і визначаються не постійними виробничими затратами, а лише змінними (на сировину, паливо та ін.). Аналогічним чином можуть бути визначені гранична виручка, граничний дохід, граничний продукт, гранична корисність, гранична продуктивність та інші граничні величини.

Застосування диференціального числення для дослідження економічних об’єктів та процесів на основі аналізу цих граничних величин дістало назву граничного аналізу. Граничні величини характеризують не стан (як сумарна чи середня величини), а процес зміни економічного об'єкта. Таким чином, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) за часом або відносно іншого об'єкта дослідження. Але необхідно врахувати, що економіка не завжди має змогу використовувати граничні величини у зв'язку з неподільністю багатьох об'єктів економічних розрахунків та перервністю економічних показників у часі (наприклад, річних, квартальних, місячних та ін.). Водночас у деяких випадках можна знехтувати дискретністю показників і ефективно використовувати граничні величини. Розглянемо, наприклад, співвідношення між середнім та граничним доходом в умовах монопольного та конкурентного ринків.

Сумарний дохід (виручка) від реалізації продукції r можна визначити як добуток ціни одиниці продукції р на кількість продукції q, тобто $r = pq$. В умовах монополії одна або кілька фірм повністю контролюють пропозицію певної продукції, а отже, і її ціну. При цьому, як правило, зі збільшенням ціни попит на продукцію падає. Вважаємо, що цей процес проходить по прямій, тобто крива попиту $p\ (q)$є лінійна спадна функція $p = aq + b,$ де $a < 0,$
$b > 0.$ Звідси сумарний дохід від реалізованої продукції складає
$r = (aq + b)q = aq^2 + bq$ (див. рис. 3.2.1). У цьому разі середній дохід на одиницю продукції $r_{\text{сер}} = rq = aq + b$, а граничний прибуток, тобто додатковий дохід від реалізації одиниці додаткової продукції, складатиме $r'_q = 2aq + b$ (див. рис. 3.2.1). Звідси, в умовах монопольного ринку зі зростанням кількості реалізованої продукції граничний прибуток зменшується, внаслідок чого відбувається зменшення

В умовах досконалої конкуренції, коли на ринку функціонує велика кількість учасників і кожна фірма не здатна контролювати рівень цін, стабільна реалізація продукції можлива при домінуючій ринковій ціні, наприклад, р = b. При цьому сумарний прибуток становитиме $r = bq$ і відповідно середній прибуток $r_{\text{сер}} = \frac{r}{q} = b$; граничний прибуток $rq' = b$ (див. рис. 3.2.2). Таким чином, в умовах ринку вільної конкуренції, на відміну від монопольного ринку, середній та граничний прибутки збігаються. меншою швидкістю) середнього прибутку.



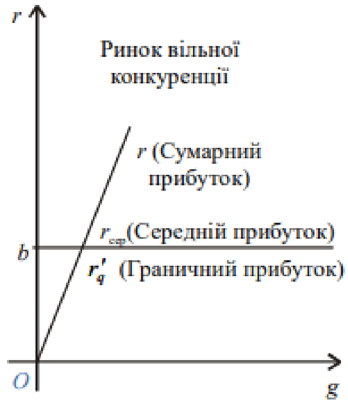


Рис. 3.2.1. Рис. 3.2.2.

Означення: Еластичністю функції $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) \;=\; \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y' \,. \qquad (1)$$

Еластичність функції наближено показує, на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної x на 1%.

Визначимо геометричний зміст еластичності функції. За означенням $E_x(y) = \frac{x}{y},\; y' = \frac{x}{y} tg\,\alpha,$ де $tg\,\alpha$ – тангенс кута нахилу дотичної в точці $M(x, y)$ (див. рис.3.2.3). Враховуючи, що з трикутника MBN $MN = x\,tg\,\alpha, MC = y,$ а з подібності трикутників MBN та AMC $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$ дістанемо $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$, тобто еластичність функції (за абсолютною величиною) дорівнює відношенню відстаней по дотичній від даної точки графіка функції до точок її перетину з осями Ox та Oy. Якщо точки перетину дотичної до графіка функції A і B містяться по один бік від точки M, то еластичність $E_x(y)$ додатна (див. рис. 3.2.3), якщо по різні боки, то $E_x(y)$від'ємна (див. рис. 3.2.4).

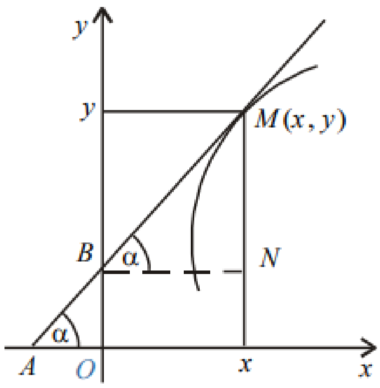


Рис. 3.2.3

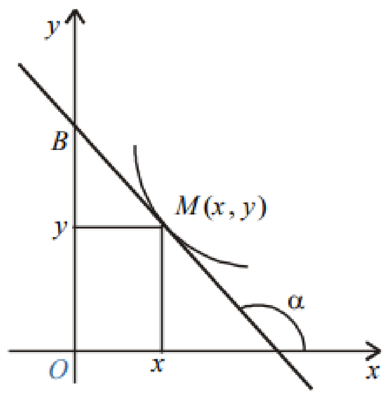


Рис. 3.2.4

Властивості еластичності функції.

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної на темп зміни функції T_y= (ln y)'=$\frac{y'}{y}$, тобто $E_x(y) = x \cdot T_y$.

2. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій:

$$E_x\ (uv) = E_x\ (u) + E_x(v), E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - \ E_x(v).$$

3. Еластичності взаємно обернених функцій – взаємно обернені величини:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \qquad (2)$$

Еластичність функції застосовується при аналізі попиту та пропозиції. Наприклад, еластичність попиту у відносно ціни x (або доходу x) — коефіцієнт, що визначається за формулою (1) і наближено показує, на скільки відсотків зміниться попит (обсяг пропозиції) при зміні ціни (або доходу) на 1%.

Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) $|E_x(y)| > 1$, то попит вважають еластичним, якщо $|E_x(y)| < 1$ — нееластичним відносно ціни (або доходу). Якщо $|E_x(y)| > 1$, то йдеться про попит з одиничною еластичністю.

Приклад 1. Залежність між собівартістю одиниці продукції у (тис. грош. од.) та випуском продукції x (млрд грош. од.) виражається функцією

$y = -0{,}5x + 80$. Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд грош. од.

Розв'язання: За формулою $E_x(y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'$,

Еластичність собівартості $E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x+80} = \frac{x}{x-160}$.

При $x = 60$ $E_{x=60}(y) = -0{,}6$, тобто при виробництві продукції в розмірі 60 млн грош. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%.

Приклад 2. За допомогою досліду були встановлені функції попиту $q = \frac{p+8}{p+2}$ та пропозиції $s = p + 0{,}5$, де q та s – кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, p – ціна товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язання: а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s$,

$\frac{p+8}{p+2} = p + 0{,}2$, звідки р $= 2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грош. од.

б) Знайдемо еластичності попиту та пропозиції за формулою:

$$E_p(q) = \frac{-6p}{(p+2)(p+8)}\ ;\ E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}\ .$$

Для рівноважної ціни $p = 2$ маємо $E_{p=2}(q) = -0{,}3$; $E_{p=2} = 0{,}8$.

Оскільки отримані значення еластичності за абсолютною величиною менші 1, то попит і пропозиція даного товару за рівноважної (ринкової) ціни нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції. Так, при збільшенні ціни p на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

в) При збільшенні ціни p на 5% від рівноважної попит зменшиться на $5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\%$, тобто прибуток зросте на 3,5%.

Приклад 3. Обсяг продукції в цеху протягом робочого дня є функцією $a\ = -x^3 - 6x^2 + 80x + 500$, де x − час. Знайти продуктивність праці через 2 години від початку роботи.

Розв'язання: Продуктивність праці – це показник трудової діяльності працівників. Характеризує кількість продукції, виробленої за одиницю часу, або витрати часу на виробництво одиниці продукції.

Продуктивність праці визначається похідною від часу $- a\,'(x)$. Тоді:

$$a'(x) = (-x^3 - 6x^2 + 80x + \ 500)' \ = -3x^2 - 12x \ + \ 80,$$

Знаходимо продуктивність праці в момент часу $x = 2$, тоді

$$a'(2) = 20{,}8 \text{ (од.)}.$$

Відповідь: $\{20{,}8\ \}$.

Приклад 4. Знайти об'єм виробництва, при якому фірма, що діє на ринку досконалої конкуренції, буде отримувати максимальний прибуток, якщо $p = \ 15,\ TC(q) = q\ ^3 + \ 3q.$ Розв'язання: Прибуток фірми, що діє на ринку досконалої конкуренції, максимізує при рівності граничної виручки і граничних витрат: $MR = MC.$ Оскільки при досконалої конкуренції спостерігається рівність ціни та граничної виручки: $P = MR,$ то можна стверджувати, що фірма максимізує прибуток при $P = MC.$ Знайдемо граничні витрати:

$$MC = TC' = \ 3q^2 + \ 3;$$

$$3q^2 + \ 3 = 15;$$

$$3q^2 = 12;$$

$$q = 2.$$

Отже, ми з'ясували, що при ціні $p = 15$ фірма запропонує на продаж 2 одиниці продукції.

Відповідь: $\{2\}$.

Приклад 5. Знайти оптимальний обсяг виробництва фірми, функція прибутку якої задана таким чином: $\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = q^2 - 8q + +10.$

Розв'язання: Знайдемо похідну даної функції:

$$\Pi' = TR'(g) - TC'(g) = 2g - 8.$$

Прирівняємо похідну до нуля і знайдемо точку екстремуму:

$$\Pi' = 2q - 8 = 0 \Rightarrow g_{extr} = 4$$

Чи є обсяг випуску, рівний чотирьом одиницям продукції, оптимальним для фірми? Щоб відповісти на це питання, треба проаналізувати характер зміни знака похідної при переході через точку екстремуму.

При $q < g_{extr} = 4 \ \rightarrow \ \Pi'^{(q)<0}$ і прибуток зростає.

При $q < g_{extr} = 4 \ \rightarrow \ \Pi'^{(q)>0}$ і прибуток зростає.

Як бачимо, при переході через точку екстремуму похідна змінює свій знак з мінуса на плюс. Отже, в точці екстремуму $g_{extr} = 4$ прибуток приймає мінімальне значення, і таким чином, цей обсяг виробництва не є оптимальним для фірми. Яким же все-таки буде оптимальний обсяг випуску для даної фірми? Відповідь на це питання залежить від додаткового дослідження виробничих можливостей фірми. Якщо фірма не може виробляти за аналізований період більше 8 одиниць продукції (П $(q = 8) =$ П $(q = 0) = 10$), то оптимальним рішенням для фірми буде взагалі нічого не виробляти, а отримувати дохід від здачі в оренду приміщень або обладнання. Якщо ж фірма здатна виробляти за аналізований період більше 8 одиниць продукції, то оптимальним рішенням для фірми буде випуск на межі своїх виробничих можливостей.

Приклад 6. Нехай $TC(q) = \frac{1}{2}g^2$ – витрати фірми-монополіста, $Q_D(p) = 40 - 2p$ - функція попиту. Знайти оптимальний для даної монополії обсяг виробництва і відповідну ціну одиниці продукції.

Розв'язання: Виразимо залежність ціни від кількості виробленої продукції:

$$p = \frac{40 - q}{2} \Rightarrow p = 20 - \frac{1}{2}q.$$

Тоді прибуток $\pi(q)$ буде дорівнює:

$$\pi(q) = \left(20 - \frac{1}{2}q\right)q - \frac{1}{2}q^2 = 20q - \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^2 = 20q - q^2.$$

У точці q_0 максимуму прибутку виконується рівність $\pi'(q_0) = 20 - 2q_0 = 0$. Звідси оптимальний для монополіста обсяг виробництва дорівнює $q_0 = 10$. Відповідна ціна буде:

$$p_0 = p_{q_0} = 2 - \frac{1}{2}q_0 = 20 - \frac{1}{2} \cdot 10 = 15.$$

При цьому граничні витрати $MC(q_0) = TC'(q_0) = 10$ Таким чином, ціна, найбільш вигідна для даної монополії, в півтора рази вище її граничних витрат.

Приклад 7. Обсяг продукції u цеху протягом робочого дня представляє функцію $u = -t^{3} - 5t^2 + 75t + 425$, де $t -$ час (год). Знайти продуктивність праці через 2 години після початку роботи.

Розв'язання: За період часу від $t_{0} = 2$ до $(t_0 + Dt)$ кількість виробленої продукції зміниться від $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + Du = u(t_0 + Dt)$. Середня продуктивність праці за цей період часу складе $Du \ Dt$. Отже, продуктивність праці в момент t_0 можна визначити, як граничне значення середньої продуктивності праці за період часу від t_0 до $(t_0 + Dt)$ при
$Dt = 0$, тобто

$$\Pi T = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t)\ .$$

$$u'(t) = -3t^2 - 10t + 75 \ \Rightarrow \ u(t_0) = -3 \cdot 22 - 10 \cdot 2 + 75 =$$

$$= -12 - 20 + 75 = 43.$$

Отже, продуктивність праці в момент часу через 2 години після початку роботи складе 43 одиниці продукції на годину.

Відповідь:{43}.

Приклад 8. Яка максимальна виручка монополіста, якщо попит аж до перетину з осями описується лінійною функцією $Q = b - ap$, де p - ціна товару, що випускається монополістом; a і b - коефіцієнти функції попиту?

Розв'язання: Виручка $TR = Qp = p(b - ap)$ досягне максимуму при рівності нулю похідної за ціною:

$$TR' = \left(p(b - ap)\right)' = 0.$$

$$TR' = p' \cdot (b - ap) + (b - ap)'p = b - ap - ap = b - 2ap = 0,\ p = \frac{b}{2a},$$

$$Q = b - ap = b - a\ \frac{b}{2a} = \frac{b}{2}.$$

При цьому максимум виручки складе

$$TR = Qp = \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2a} = \frac{b^2}{4a}.$$

Відповідь: $\left\{\frac{b^2}{4a}\right\}$.

3.3. Застосування похідної у хімії та біології

Функція	Приріст аргументу	Приріст функції	Середня швидкість зміни функції	Миттєва швидкість зміни функції
$C = C(t)$ – концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу t; [моль/л]	Δt	$\Delta C = C(t + \Delta t) - C(t)$	$v_c = \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{C(t\ +\ \Delta t - C(t)}{\Delta t}$	$v_p = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_c$ швидкість хімічної реакції
$P = P(t)$ – чисельність популяції в момент часу t; [особин]	Δt	$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$	$v_{cn} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t\ +\ \Delta t)\ -\ P(t)}{\Delta t}$	$v_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cm}$ швидкість зростання популяції

Приклад 1. Кількість бактерій N у деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 450 + 52t + 2t^2$. Скільки бактерій було у біомасі у початковий момент $t = 0$? Яка швидкість приросту кількості бактерій в момент часу 3,5 хв [11].

Розв'язання: Зрозуміло, що у початковий момент часу $t = 0$ у біомасі було 450 бактерій. Оскільки швидкість приросту кількості бактерій є похідною від чисельності популяції, тобто $v(t) = N'(t)$, то для відповіді на друге питання використаємо правило знаходження похідної.

1) Надамо t приросту Δt.

2) Знайдемо приріст залежної змінної ΔN:

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) =$$
$$= 450 + 52(t + \Delta t) + 2(t + \Delta t)^2 - (450 + 52t + 2t^2) =$$
$$= 52\Delta t + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 = \Delta t(52 + 4t + 2\Delta t).$$

3) Складемо відношення: $\frac{\Delta N(t)}{\Delta \mathrm{t}} \div \frac{\Delta N}{\Delta t} = 52 + 4t + 2\Delta t$.

4) Знайдемо границю цього відношення, якщо $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} (52 + 4t + 2\Delta t) = 52 + 4t.$$

Ця границя і є швидкістю приросту кількості бактерій в момент часу t. Тому коли t = 3,5 хв, то v = 66 бакт⁄хв.

Відповідь: 450 бактерій, 66 бакт⁄хв.

Приклад 2. Розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням $m = m_0 e^{-kt}$, де m_0 – початкова маса на момент часу $t = 0, m$ – нерозчинена маса на момент часу t; k – стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначте швидкість розчинення

Розв'язання: Масу лікарської речовини, що розчинилася в момент часу t, запишемо у вигляді $M = m_0 - m = m0\ (1 - e^{-kt})$. Використовуючи хімічний зміст похідної, визначимо швидкість розчинення:

$$M' = m_0(-e^{-kt})(-k) = km_0 e^{-kt} = km.$$

Відповідь: km – швидкість розчинення лікарської речовини.

Приклад 3. Чисельність популяції бактерій у момент часу t (у годинах) задається формулою $p(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Протягом якого часу популяція зростає? Починаючи з якого моменту часу її чисельність почне зменшуватися?

Розв'язання: Знайшовши похідну функції $p(t)$ і розв'язавши нерівність $10^4 - 2 \cdot 10^3 t > 0$, на основі ознаки зростання функції на проміжку робимо висновок про те, що протягом 5 год. Чисельність популяції збільшуватиметься. А оскільки $p'(t) < 0$ при $t > 5$, то на основі ознаки спадання функції стверджують, що після 5 години чисельність популяції почне зменшуватися .

Відповідь: Протягом 5 год чисельність популяції збільшуватиметься, а після 5-ої години чисельність популяції почне зменшуватись.

Приклад 4. Реакція організму на введені ліки може виявлятися підвищенням кров'яного тиску, зменшенням температури тіла, зміною пульсу чи іншими фізіологічними показниками. Припустимо, що через x позначено дозу призначених ліків. А ступінь реакції y визначається функцією $y = f(x) = x^2(a - x)$, де a − деяка додатна стала. При якому значенні x реакція максимальна?

Розв'язання: Знайшовши похідну функції. Яка є математичною моделлю наведеної задачі і розв'язавши рівняння $2ax - 3x^2 = 0$, з'ясуємо, що ця функція має єдину критичну точку $x_0 = \frac{2a}{3}$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з « $+$ » на « $-$ », то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $x_0 = \frac{2a}{3}$ є точкою максимуму функції y.

Відповідь: Реакція максимальна при $x = \frac{2a}{3}$.

Приклад 5. За якої кислотності сума концентрації гідроген-іонів H^+ і гідроксид-іонів OH^- в одиниці об'єму води буде найменшою?

Розв'язання: Введемо позначення: x – концентрації гідроген-іонів H^+; y – гідроксид-іонів OH^-. Пригадаємо хімічний закон: $xy = k$, де k – стала для води (при 25°C $k = 10^{-14}$). Задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $u = x + y = x + \frac{k}{x}$. Продиференціювавши функцію $u(x) = x + \frac{k}{x}$, знаходимо: $u'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}$, $u'(x) = 0$ при $x = \pm\sqrt{k}$.

Оскільки $x > 0$, то функція має єдину критичну точку на всій області визначення. Знайшовши другу похідну $u''(x) = \frac{2k}{x^3}$ а її значення в критичній точці $u''(\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$, на основі достатньої умови існування екстремуму функції робимо висновок, що точка $x = \sqrt{x}$ є точкою мінімуму. Завдяки єдиності стаціонарної точки функція $u(x)$ досягає в ній найменшого значення. За згаданим законом $x = \sqrt{x}$. Отже, сума концентрацій іонів води буде найменшою, якщо концентрація йонів H^+ і OH^- будуть рівні між собою, тобто за нейтральної реакції.

Відповідь: При $x = y = \sqrt{x}$ (за нейтральної реакції).

3.4 Застосування похідної у технологіях

Багато є задач пов'язані з виробничими процесами, які потребують математичних обгрунтувань за допомогою похідної [24].

Приклад 1. Яким слід зробити нахил насипу до мосту, щоб перехід з мосту на схил був плавним, при довжині мосту $l = 20$м і стріли провісу $f = 0{,}5$м?

Розв'язання. З точки зору математики міст має форму параболи, яку можна задати рівнянням $y = ax^2$. Якщо $l = 20$м, $f = 0{,}5$м, то координати кінцевих точокмосту будуть $(-10; 0{,}5)$; $(10; 0{,}5)$. Тоді $a = \frac{y}{x^2} = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}005$.

Знаходим похідну даної функції:

$$y = 0{,}005x^2$$

$$y' = 0{,}005 \cdot 2x = 0{,}01x$$

$$y'(10) = 0{,}1.$$

Згідно геометричного змісту похідної, $y'(x_0)$ є тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції, тобто тангенс кута нахелу насипу до мосту $tg\ \alpha = 0{,}1$.

За таблицею тангенсів $\alpha \approx 5^0 43'$.

Приклад 2. Якими за розмірами повинні бути сторони фризового прямокутника з периметром 10м, щоб кількість фризової плитки, яка є в наявності, обмежити найбільшу поверхню підлоги?

Розв'язання. Перш ніж почати обкладати підлогу плиткою слід нагадати, що малюнок підлоги вибирають з урахуванням розміру і призначення приміщення. Фон підлоги добре обмежується фризовими рядами, в які вкладають плитки більш темних кольорів або спеціальні фризові плитки.

Згідно умов, фризовий прямокутник має периметр $P = 10$м.

Нехай $AB = x, AD = y,$ тоді $P = 2(x + y)$,

$$2(x + y) = 10;$$

$$x + y = 5; \; y = 5 - x$$

$$S_{\text{пр}} = x \cdot y = x(5 - x) = 5x - x^2.$$

$$S'(x) = (5x - x^2)' = 5 - 2x.$$

Знаходимо критичні точки $5 - 2x = 0$

$$x = 2{,}5.$$

Визначаємо зміну знака функції у критичній точці

$$S'(2) = 5 - 2 \cdot 2 = 1 > 0 \quad (+)$$

$$S'(3) = 5 - 2 \cdot 3 = -1 < 0 \quad (-)$$

Отже, якщо $x = 2{,}5$ функція приймає найбільше значення

$$S_{\text{найб}} = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25.$$

Таким чином, при даних умовах фризову плитку економічне викласти у формі квадрата зі стороною 2,5м.

Приклад 3. Як можна розкроїти спідницю в шість клинів, щоб довжина спідниці була не менше трикратної ширини низу клину спідниці при напівобхваті талії 33см, розміру 88/96 і ширини тканини 90см.

Розв'язання. Створено математичну модель задачі.

Нехай $BM = 33:3 = 11\text{см.}, AN - x$ см., $BK - (3x)$см.,

$$S_{\text{тк}} = 90 \cdot 3x = 270x(\text{см}^2)$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK$$

$$AD = 2x + 11, BC = 11 \cdot 2 + x = 22 + x$$

$$S_{ABCD} = \frac{2x + 11 + 22 + x}{2} \cdot 3x = 4x^2 + 49{,}5x^2$$

$$S_{\text{зал тк}} = 270x - 4x^2 - 49{,}5x^2$$

$$270x - 4x^2 - 49{,}5x^2 = 220{,}5x - 4{,}5x^2(\text{см}^2)$$

$$S'(x) = 220{,}5 - 9x,\ S'(x) = 0, 9x = 220{,}5, x = 24{,}5.$$

Відповідь: Ширина в низу клину спідниці $- 24{,}5$см, довжина спідниці $24{,}5 \cdot 3 = 73{,}5$ см

Приклад 4. Під яким кутом слід збити три однакових дошки, щоб отримати жолоб для напування худоби з найбільшою місткістю?

Розв'язання. Найбільшу буде мати місткість жолоб з найбільшим поперечним перерізом. Поперечний переріз жолоба – рівнобічна трапеція. Якщо ширина дошок a $(AB = BC = CD = a)$ $\angle BAD = x$, то площа трапеції

$$S(x) = a^2(1 + \cos x)\sin x \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$S'(x) = a^2(1 + \cos x)(2\cos x - 1)$$

Знайдемо критичні точки $S'(x) = 0$.

$\left[\begin{array}{l} 1 + \cos x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 180^0 \\ x = 60^0 \end{array}\right.$ *не задовольняє умові задачі*

Тоді $I(0) = 0$ $S(90^0) = a^2$ $S(60^0) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$

Отже, найбільше значення функції буде коли $x = 60^0$,

$a = 180^0 - 60^0 = 120^0$.

Дошки однакової довжини для поїлки слід збити під кутом 120^0.

3.5 Організація, проведення та результати педагогічного експерименту

Методи педагогічних досліджень – це шляхи, способи пізнання педагогічної дійсності. За допомогою методів педагогіка здобуває інформацію про те чи інше явище, процес, аналізує і обробляє одержані дані, включає їх в систему відомих знань. Тому теми і рівень розвитку педагогічної теорії залежить від того, які методи дослідження вона використовує.

Особливості процесу виховання вивчити і розкрити нелегко. Педагогічні процеси мають неоднозначний характер. Результати навчання, виховання й освіти залежать від одночасного впливу багатьох причин. Достатньо змінити вплив одного фактора, щоб результати процесу суттєво відрізнялись один від одного. Для педагогічних процесів характерна неповторимість. Якщо дослідник природничих наук (хімії, фізиці) може кількаразово повторити експеримент, використовуючи ті самі матеріали, створюючи незмінні умови, то педагог-дослідник такої змоги не має: повторне дослідження пропонує вже інші умови праці, і як наслідок – інші результати. Ось чому «чистий» експеримент у педагогіці неможливий. Зважаючи на цю обставину, педагоги роблять свої висновки обережно і коректно, розуміючи відносність умов, в яких вони були отримані. Кількаразове повторення спостережень дає змогу в узагальненій формі формулювати висновки, визначати найхарактернішу тенденцію.

Важливим завданням педагогічного дослідження є виявлення порядку в процесі, що вивчається, тобто встановлення закономірності. Закономірність – це факт наявності постійного й необхідного взаємозв'язку між реальними феноменами процесу.

На основі емпіричних закономірностей процесу виховання розкриваються теоретичні закони. Закон строго зафіксована закономірність. Сучасна наука визначає його як необхідну, внутрі властиву природі явищ тенденцію зміни, руху, розвитку, яка характеризує загальні етапи і форми становлення явищ, процесів, систем, що розвиваються. Закони існують незалежно від того, як повно вони розкриті наукою. Пізнання закону дозволяє зрозуміти його дію і правильно використати в інтересах виховання.

Кінцевою метою педагогічного дослідження є виявлення закономірностей і законів.

У даний час педагогічні дослідження здійснюються за допомогою цілої системи різноманітних методів. До них належать і педагогічний експеремент.

Педагогічний експеримент (лат. Experimentum – проба, дослід). Суть експерименту як методу дослідження полягає у спеціальній організації педагогічної діяльності учителів і учнів, вихователів і вихованців з метою перевірки й обґрунтування наперед розроблених теоретичних припущень, або гіпотез. Якщо гіпотеза знаходить своє підтвердження в педагогічній практиці, дослідник робить відповідні теоретичні узагальнення і висновки.

Педагогічні експерименти класифікують за різними ознаками: спрямованістю, об'єктами дослідження, місцем і часом проведення та ін. Залежно від поставленої експериментом мети розрізняють:

а) констатуючий експеримент, що проводиться на початку дослідження і своїм завданням має вияснення стану справ у шкільній практиці з тієї чи іншої проблеми;

б) творчо-перетворюючий, коли вчений розробляє гіпотезу, теоретичні основи, здійснює конкретні практичні заходи щодо вирішення досліджуваної проблеми;

в) контрольний, суть якого полягає в застосуванні апробованої методики в роботі інших педагогів та шкіл.

Повернемось до педагогічного експеременту, який проводився в 10-му профільному класі з математичним спрямуванням.

Метою експерименту було перевірити навчальний матеріал учнів при розв'язуванні прикладних задач у різних галузях, побачити в якій з галузей учні хотіли б застосування математики і проаналізувати, які покращення учні запропонували до якості уроку в сучасних умовах.

Експеримент проводився у вигляді анкетування. (Зразок анкети див. додатку А)

Як показав експеримент, перед розв'язання прикладних задач, рівень знань учнів з теми «Похідна та її застосування» був досить низьким, загалом учні з високим рівнем успішності не могли правильно взяти похідну завдань середньої важкості, а учні з меншим рівнем успішності не могли правильно взяти похідну завдань низької важкості. Учні під час вивчення алгебри обмежувались лише поясненнями вчителя та вивчали шкільний підручник, а для високого рівня знань математики недостатньо цих джерел.

Цей вид анкети був запропонований учням після проведеного даного уроку. Результати показали, що вчитель не часто проводить уроки з використанням прикладних задач, що учням подобається розв'язувати прикладні задачі і він для них є більш зрозумілий, при цьому учні хотіли б побачити застосування математики у різних з галузей (трудове навчання, фізичне виховання, біологія, хімія та фізика). Успішність такого результату пояснюється тим, що збільшився рівень зацікавленості учнів до математики, також робота під час розв'язання прикладних задач дала для учнів більш яскравого пояснення.

Підсумовуючи результати педагогічного експерименту, можна сказати, що даний урок дає позитивні результати і може застосовуватися при вивчені наступних тем з алгебри в профільних класах.

ВИСНОВКИ

Одним з основних розділів шкільного курсу алгебри і початку аналізу є розділ «Похідна та її застосування». Ця тема займає вагоме місце у програмі з математики для 10 класу та в завданнях зовнішнього незалежного оцінювання. Тема «Похідна та її застосування» прослідковується в програмах не тільки загальноосвітніх шкіл, але й закладах професійної освіти, вищих навчальних закладах, та як вона має як систему внутрішньопредметних так і систему міжпредметних зв'язків. Тому така спрямованість навчання реалізується в процесі розв'язання задач.

Отже, при вивчені теми «Похідна та її застосування» у профільних класах розглядають:

- Задачі, які приводять до поняття похідної.
- Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила обчислення похідних. Складена функція. Похідна складеної функції.
- Похідні степеневої таригонометричних функцій.
- Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
- Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.
- Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.
- Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.
- Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків.

Вивчаються основні теореми:

1) про неперервність диференційовної в точці функції;
2) про похідну суми функцій;

3) про похідну добутку функцій;

4) про похідну частки двох функцій;

5) про похідну степеневої функції;

6) про похідну складної функції.

Для розв'язання задач на дослідження автори діючих підручників пропонують алгоритм розв'язання:

1. Знайти область визначення функції $y = f(x)$.
2. Досліти функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки знакосталості функції.
5. Знайти проміжки зростання і спадання функцій.
6. Знайти проміжки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.
7. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

З огляду на мету роботи, проведений логіко-математичний аналіз теми «Похідна та її застосування» з точки зору можливості формування математичної компетентності та компетентності у природніх науках і технологіях, можна зробити висновок, що:

1. До поняття похідної приводять багато задач природознавства, математики, техніки. Тому його доцільно вводили як узагальнення результатів розв'язання відповідних прикладних задач. Це одразу виділяє головний прикладний зміст поняття, робить його більш природним і доступнішим для сприймання.
2. При вивчені даної теми учні оволодівають системою математичних знань, навичками і вміннями, потрібними у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, достатніх для успішного оволодіння знаннями інших освітніх галузей і забезпечення мотивації потреби неперервності навчатися впродовж життя.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початку аналізу. Підруч. 10 ─ 11 кл. серед. шк. / А.М. Колмогоров, О.М. Дудніцин та ін.: [За ред А. М. Колмогорова]. – К.: Освіта, 1992. – 350 с.

2. Алгебра. Розв´язування задач та вправ / О. А. Гайштут та ін.. – К. : Магістр–8, 1997. – 256 с.

3. Алгебраїчний тренажер [Посібник для школярів та абітурієнтів] / Мерзляк А.Г. та ін. – Харків : Гімназія, Ранок, 1998. – 320 с.

4. Бабенко С.П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. ІІ семестр. Академічний рівень / С.П. Бабенко. ─ Харків: Основа, 2011. ─ 253 с.

5. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10 – 11 кл. сред. шк. 2-е изд. / М. И. Башмаков. – Просвещение, 1992. – 350 с.

6. Булах, Т. П. Застосування похідної в прикладах із математики та в задачах із фізики / Т. П. Булах, О. В. Назаренко // Все для вчителя. – 2013. – № 1. – С. 25–26.

7. Бурмистренко, Т. Похідна функції. Геометричний та механічний зміст похідної : 11 клас гуманітарного профілю / Т. Бурмистренко // Математика. Шкільний світ. – 2010. – № 2. – С. 16–19.

8. Вайнтрауб, М. Застосування похідної при розв'язуванні задач шкільного курсу : методика, досвід, пошук / М. Вайнтрауб, М. Каган, Л. Каган // Математика в школі. – 2006. – № 9. – С. 33–37.

9. Власенко О. Математична теорема і методика її викладання / О. Власенко. – К. : Рад. шк., 1969.

10. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу // Навчально-методичний посібник / Мерзляк А. та ін. – Тернопіль : Підруники і посібники, 2001. – 304с.

11. Євтодьєва, Т. Застосування похідної до розв'язування прикладних задач : алгебра та початки аналізу : 11 клас / Тетяна Євтодьєва // Математика. Шкільний світ. – 2013. – № 3. – С. 8–13.

12. Задачи по математике // Начала анализа: Справочное пособие / Вавилов В. и др. – М. : Наука, 1990. – 608 с.

13. Задачи по математике. Алгебра [Справочное пособие] / Вавилов В. В. и др. – М. : Наука, 1987. – 432 с.
14. Збірник задач для атестації з математики учнів 10-11 класів / Литвиненко М. та ін. – К. : ББН, 2000. – 164 с.
15. Збірник задач з математики з рішеннями / Ю. Л. Геворкян та ін. – Харків: Прапор, 1999. – 448 с.
16. Збірник конкурсних задач з математики // Посібник для вступників до вузів / Вишневський В. та ін. – К. : Либідь, 1990. – 328 с.
17. Збірник конкурсних задач з математики // Посібник для вступників до вузів / Горгеладзе Ш. и др. – К. : Вища школа, 1973. – 324 с.
18. Карпік, В. В. Застосування похідної до знаходження сум / В. В. Карпік // Математика в школах України. – 2009. – № 29. – С. 22–28.
19. Когаловский, С. Р. Производная и задачи элементарной математики / С. Р. Когаловский, В. В. Солдатова // Математика в школе. – 2012. – № 3. – С. 44.
20. Конкурсні задачі з математики / Вишенський В. та ін. – К. : Вища школа, 2001. – 432 с.
20. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. – М. : Просвещение, 1990. – 320 с.
21. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии / В. С. Крамор. – М. : Просвещение, 1992, - 416 с.
22. Кушнир И. Функции. Задачи и решения / И. Кушнир. – К. : Астрата, 1996. – 541 с.
23. Кушнир И. Шедевры школьной математики в двух книгах / И. Кушнир. – К. : Астарта, 1995.
24. Ляшенко М. Похідна та її застосування / М. Ляшенко. – К. : Рад. школа, 1985. – 152 с.
25. Матощук, Т. Б. Похідна. Застосування похідної: завдання на встановлення відповідності / Т. Б. Матощук // Математика в школах України. – 2013. – № 16/18. – С. 73–74.

26. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. Закладів 2-ге вид., виправл. і доп. / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. ─ Х.: Світ дитинства, 2006. ─ 416 с.
27. Практикум з розв'язання задач з математики / Михайловський В. та ін. – К. : Вища школа, 1978. – 478 с.
28. Поглиблене вивчення математики // Випускний екзамен / Тадеєв В. та ін. – Тернопіль : Підручники и посібники, 1997. – 128 с.
29. Руденко В.М. Застосування похідної до розв’язування задач / Математика в школах України / В.М. Руденко. ─ Харків: Основа, 2011. ─ № 29 (329) жовтень ─ С. 25.
30. Сборник конкурсних задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М.И. Сканави. – М. : Высшая школа, 1977. – 518 с.
31. Сліпкань З. І. Методика навчання математики 2-ге вид. допов. і переробл. / З. І. Сліпкань. – Київ: Вища шк., 2006. – 582 с.
32. Сипченко Т.М. Календарно-тематичний план з математики 5 ─ 11 класи 2-ге вид., перероб. і доп. / Т.М. Сипченко. ─ Х.: Видавництво "Ранок", 2011. ─ 128 с.
33. Титаренко О. М. 5770 задач з математики з відповідями. 2-ге вид. випр. / О.М. Титаренко. ─ Харків: ТОРГСІНГ ПЛЮС, 2007. ─ 336 с.
34. Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики: Навчальний посібник / О.М. Титаренко. ─ Х.: Торсінг, 2003. ─ 368 с.
35. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики. Навчальний посібник / Р. П. Ушаков. – К. : Техніка, 1999. – 504 с.
36. Фурман М.С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу 11 клас / М.С. Фурман. ‒ Х.: Вид. група "Основа", 2010. ─ 159 с.
37. Шкіль М.І. Алгебра та початки аналізу: Підручник для 11 кл. загальноосвітн. навч. Закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. ─ К.: ЗодіакЕКО, 2002. ─ 384 с..
38. Шунда Н. Функції та їх графіки: Задачі і вправи / Н. Шунда. – К. : Рад. школа, 1976. – 190 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Анкета

Шановні учні, просимо Вас відповісти на всі запитання анкети. Результати опитування будуть використані для аналізу вивчення теми «Похідна та її застосування».

П.І.П. опитуваного

____

1. Чи часто вчитель проводить уроки з використанням прикладних задач?
2. Чи сподобалися Вам уроки з використанням прикладних задач? Якщо «так», то чому?
3. З якими галузями були пов'язані задачі прикладного змісту?
4. Чи зрозумілий Вам навчальний матеріал при розв'язуванні прикладних задач?
5. Як часто Ви хотіли б, щоб на уроках алгебри використовувалися задачі прикладного змісту?
6. На яких етапах уроку, на Ваш погляд, доцільно використовувати задачі прикладного змісту (виберіть варіант з переліку або вкажіть свій).
А) пояснення нового матеріалу; В) на контрольній перевірці знань; **Б) розв'язання задач; Г) свій варіант.**

7. В якій з галузей ви б хотіли побачити застосування математики?
8. Ваші побажання щодо покращення якості уроку в сучасних умовах.

Додаток Б

Система прикладних задач при вивчені теми «Похідна та її застосування»

1. Точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^4 - t^3 + 2t - 2$ де t виражається в секундах, а $S -$ у метрах. Знайти швидкість та прискорення руху вкінці першої та третьої секунд.

2. Тіло масою 6 кг рухається прямолінійно за законом $S = \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t$ де t виражається в секундах, а $S -$ у метрах. Обчислити кінетичну енергію тіла $\frac{mV^2}{2}$ через три секунди.

3. Тіло масою 2 кг рухається прямолінійно за законом $S = t^2 + t + 1$. Координата вимірюється в метрах, час $t -$в секундах. Знайти:
а) діючу силу; б) кінетичну енергію тіла через 2 с після початку руху.

4. Кількість електрики, що протікає через провідник з моменту часу $t = 0$, задається законом $Q = 3t^2 + 2t + 3$ кулонів . Знайти силу струму в кінці десятої секунди.

5. Кусок дроту завдовжки 1,8 м згинають так, щоб утворився прямокутник. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

6. Колесо обертається за законом $y = 4 + 5t - t^3$. Визначити наприкінці першої секунди обертання кутову швидкість колеса, а також лінійну швидкість та повне прискорення точок, що лежать на ободі колеса. Радіус колеса – 2 см.

7. Юнак пливе зі швидкість в два рази меншою від швидкості течії річки. В якому напрямі він має пливти до другого берега, щоб його знесло течією річки якомога менше? На яку відстань S_{min} його знесе в цьому разі, якщо швидкість річки k=200 м.

8. Над центром круглого стола, радіус якого R, підвішена електрична лампа. Якою має бути відстань від лампи до стола, щоб освітленість на його краях була найбільшою?

9. Санки з вантажем загальною масою m треба зрушити з місця. Коефіцієнт тертя спокою по снігу μ. Яку найменшу силу треба прикласти для цього?

10. Залежність потенціальної енергії від координати x задається у вигляді: $W(x) = -5x^2 + 4x - 3$. Знайти координату точки, що відповідає положенню рівноваги цієї системи. Виявити характер рівноваги.

11. В електричному колі напруга на конденсаторі змінюється за законом $U_c = 0{,}01\, sin\, \omega t$. Знайти миттєве значення сили струму, а також миттєву напругу на конденсаторі й котушці через $\frac{1}{6}$ періоду, якщо ємність конденсатора – 0,02 мкФ, а а індуктивність котушки – 10 мГн.

12. Задана функція корисності від споживання пельменів
$TU = 130Q - \ 2{,}5Q^2$ Знайти точку насичення споживання.

13. Виробляючи праски, конкурентний виробник має такі функції загального виторгу і загальних витрат:

$$TR \ = -1{,}5Q^2 + 250Q;$$

$$TC = Q^2 + 1400 - 10Q,$$

де Q − кількість прасок.

1) Яка кількість прасок зробить максимальним прибуток фірми?

2) Яка ціна відповідає цій кількості?

14. Пасажир економ-класу і бізнес-класу летять рейсом «КиївДортмунд» авіакомпанією WIZZ-air, з'ясували, що перший заплатив за квиток майже вдвічі менше, ніж другий. Визначте:

1) Обсяги пасажирських перевезень авіакомпанії (тис. осіб), якщо попит на економ клас описується рівнянням $Q\,^D_1 = \ 10 \ - \ 2P_1$, а попит бізнесменів $Q^D_1 = 30 - 2 = P_2$, сукупні витрати авіакомпанії $TC = 20 + 2Q$.

2) Величину сукупного прибутку авіакомпанії.

3) Якими були б обсяги перевезень, якби вона встановлювала одну ціну за квитки.

15. На ринку досконалої конкуренції діють фірми, які мають однакові загальні витрати $TC = 0{,}1Q^3 - 4Q^2 + XQ$. Попит на продукцію галузі заданий рівнянням $O_Д = 680 - 5P$. Відомо, що в галузі залишається 24 фірми, Визначити параметр x.

16. Функція попиту на продукцію монополіста має вигляд $Q_Д = \frac{100}{P^3} + 1$, а функція загальних витрат $TC = 2Q$. Визначте оптимальний обсяг випуску й ціну монополіста.

17. Залежність між витратами виробництва k і обсягом продукції x, що випускається, виражається функцією $k = 50x - 0{,}05x^3$ (грошова од.). Визначити середній і граничні витрати при обсязі продукції 10 одиниць.

18. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. гривень) і випуском продукції x (тис. гривень) виражається функцією $y = -0{,}5x + 80$. Знайти еластичність собівартості при випуску продукції, що дорівнює 60 тис. гривень.

19. Дослідним шляхом встановлені функції попиту $g = \frac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 0{,}5$, де g і $s -$ кількість товару, відповідно купленого і пропонованого на продаж в одиницю часу, $p -$ ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція урівноважуються;

б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни;

в) зміну доходу при підвищені ціни на 5% від рівноважної.

20. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3% за кожну годину. Визначте масу дріжджів через t годин, якщо її початкове значення дорівнює 1г. Знайдіть швидкість зміни маси при: а) t = 1 год.;
б) t = 2 год.

21. Деяка інфекційна хвороба поширюється за законом

$p(t) = 0{,}005(15t^2 - t^3)$, де $t \epsilon [0;\ 15] p(t) -$ відсоток тих, хто захворів протягом t діб, від загального числа мешканців. Протягом скількох діб відсоток тих. Хто захворів. Зростатиме, а протягом скількох діб – спадатиме?

22. Швидкість зростання y популяції, чисельність якої в момент часу t (час виражено в днях) дорівнює $p(t)$, задана формулою $y = 0{,}001x(100 - x)$. При якій чисельності популяції ця швидкість максимальна? Скільки особин містить рівноважна популяція, для якої швидкості зростання дорівнює нулю?

23. Реакція організму на два вида ліків як функції часу t (час виражено в годинах) складають $r_1(t) = te^{-t}$ і $r_2(t) = t^2 e^{-t}$. У якого виду ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше?

24. У земляну суміш вводять популяцію з 1000 бактерій. Чисельність популяції зростає за законом: $p(t) = \frac{1000+1000t}{100+t^2}$, $t -$ час, в годинах. Знайти в який час буде максимальний розмір популяції.

25. Закон накопичення поживних речовин у цибулинах тюльпанів визначається рівнянням $y(x) = -0{,}0002x^2 + 0{,}006x$, де $x -$ кількість днів від появи зелених ростків до закінчення цвітіння. З'ясуйте через кілька днів накопичення поживних речовин в цибулині буде максимальним.

26. Кількість людей, які під час епідемії грипу захворюють за один день, обчислюється за формулою: $N(t) = 0{,}003t \cdot (50 - t)$ (швидкість поширення епідемії). На який день епідемія досягне максимуму? Через скільки днів епідемія згасне?

27. Залежність між кількістю речовини, що отримується в результаті деякої хімічної реакції і часом (в секундах) виражається рівнянням: $Q(t) = A \cdot (1 + e^t)$. Яка буде швидкість хімічної реакції в момент часу 3 секунди? А – молярна маса CO_2. Для задачі $Q(t) = 44 \cdot (1 + e^t)$.

28. При виверженні вулкану Везувій каміння гірської породи викидаються перпендикулярно вгору з початковою швидкістю 120 м/с. На якій безпечній висоті можуть літати гелікоптери для виконання екскурсій з краєвидами вулкана Везувія (висота вулкана 1281м.), якщо $h(t) = 120t - 0{,}5gt^2$.

Додаток В

План-конспект уроку з алгебри

Тема уроку. Застосування похідної для розв‘язування прикладних задач

Формування компетентності:

- **предметна компетентність:** повторити та узагальнити вивчені раніше відомості про похідну, формувати вміння застосовувати здобуті знання в нестандартних умовах.
- **ключові компетентності:**
  - спілкування державною мовою – розуміти, пояснювати і перетворювати тексти математичних задач;
  - уміння вчитися впродовж життя – визначити мету навчальної діяльності, відбирати і застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети.

Тип уроку. Урок узагальнення та систематизації знань.

Форма уроку. Урок-захист проектів.

Обладнання уроку. Плакати, підручник «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу (Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С.)

<u>Зміст завдань для груп</u>

1. Історичні відомості (учні готують інформацію про виникнення математичного аналізу та його розвиток, про біографію та праці її творців тощо).
2. Застосування похідної до розв'язування фізичних задач.
3. Застосування похідної до розв'язання прикладних геометричних задач.

Хід уроку.

I. Організаційний момент.

Учні сідають по групах, готуючись до проведення уроку (чотири групи по чотири учні).

II. Перевірка домашнього завдання.

Чергові на перерві записали розв’язки домашнього завдання дощці і в ході бесіди було проведене домашнє завдання.

III. Мотивація навчальної діяльності.

Вивчення всіх природничого циклу пов'язано з математикою. Математика дає учням систему знань і умінь, необхідних в повсякденному житті та трудовій діяльності, а також важливих для вивчення суміжних дисциплін (фізики, хімії, біології, технології та ін.).

Сьогодні на уроці ми навчимося використовувати поняття похідної, для дослідження фізичних законів та явищ, застосовувати метод диференціального числення та математичного моделювання для розв'язання прикладних задач.

IV. Повідомлення теми і мети уроку.

Тема нашого уроку розв'язання прикладних задач з використанням похідної. Розв'язуючи запропоновані задачі ви переконаєтеся що математика взаємопов'язана між собою з іншими галузями.

V. Актуалізація опорних знань.

Кожен учень першої групи задає питання одному з учнів другої групи. Потім кожен учень другої групи задає запитання одному з учнів третьої групи. І кожен учень третьої групи задає питання одному з учнів першої групи.

Запитання:

1. Сформулюйте означення похідної функції в точці.
2. У чому полягає геометричний зміст похідної?
3. Що таке кутовий коефіцієнт прямої?
4. У чому полягає механічний зміст похідної?
5. Як знайти похідну суми, частки, добутку, складеної функції?
6. Назвіть схему дослідження функції для побудови її графіка?
7. Як знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку?
8. В яких точках відрізках неперервна функція може набувати свого найбільшого і найменшого значення?
9. Сформулюйте алгоритм дослідження функції на екстремум?

Історичні відомості *(перша група)*

Наука, що на сьогодні називається математичним аналізом, виникла в працях багатьох видатних математиків **XVII** століття - спочатку у вигляді окремих теорем та методів розв'язування деяких задач. До кінця **XVII** століття основні положення цієї нової для того часу науки остаточно оформилися (причому одночасно) в роботах двох найвизначніших учених тієї епохи - англійського фізика та математика Ньютона та німецького математика і філософа Лейбніца.

Виникнення цієї математичної дисципліни не випадково припадає саме на XVII століття. У цю епоху розвиток науки та техніки дійшов тієї межі, коли для подальшого просування вперед необхідно було глибше проникнути у суть речей, вивчити закони природи та процеси, що відбуваються в навколишньому середовищі.

Всі процеси протікають з певною швидкістю, всі величини, що беруть участь у цих процесах, змінюються, причому вони взаємозв'язані. Тому постала необхідність у такому апараті, за допомогою якого можна було б вивчати змінні процеси. Саме такий апарат і був розроблений у математичному аналізі. Таким чином, виникнення математичного аналізу було історично неминучим: цього вимагали потреби механіки, фізики та техніки. У свою чергу, саме ці вимоги були визначені рівнем розвитку виробничих сил суспільства. Проте повне його обґрунтування було дано лише наприкінці XIX століття.

Ключовими поняттями математичного аналізу є поняття функції, границі, похідної та інтеграла.

Термін „функція" вперше запропонував у 1692 р. видатний німецький філософ і математик Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646-1716) для характеристики відношення відрізків, а перше означення функції, яке вже не було пов'язане з геометричними уявленнями, сформулював Йоган Бернуллі (1667-1748) у 1718 р. Уточнив це поняття Леонард Ейлер (1707-1783) і ввів символ функції $f(x)$.

Термін „границя" і відповідний символ ***lim*** вперше було введено англійським математиком і механіком Ісааком Ньютоном (1643 – 1727), а його строге означення сформулював у 1823 р. французький математик Огюстен Луї Коші (1789 – 1857).

Похідна – одне з фундаментальних понять математики. Відкриттю похідної та основ диференціального числення передували роботи французьких математиків П'єра Ферма (1601–1665), який у 1629 р. запропонував способи знаходження найбільших і найменших значень функцій, проведення дотичних до довільних кривих, що фактично спиралися на застосування похідних, а також Рене Декарта (1596 – 1650), який розробив метод координат і основи аналітичної геометрії. У 1670 – 1671 рр. англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1643 – 1727) і дещо пізніше у 1673 – 1675 рр. німецький філософ і математик Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646 – 1716) незалежно один від одного побудували теорію диференціального числення. І.Ньютон прийшов до поняття похідної, розв'язуючи задачі про миттєву швидкість, а Лейбніц – розглядаючи геометричну задачу про проведення дотичної до кривої. Термін «похідна» ввів у 1797 р. французький математик Жозеф Луї Лагранж (1736 – 1813). Він ввів і сучасні позначення для похідної у вигляді y' та f'. Сам термін «похідна» є перекладом відповідного французького слова ***derivee***, яке досить влучно пояснює зміст цього поняття: функція $f'(x)$ у певному розумінні походить від функції *f(x)*, тобто є похідною від неї. До Лагранжа похідну за пропозицією Лейбніца називали диференціальним коефіцієнтом і позначали $\frac{dy}{dx}$. Позначення Лейбніца чітко відображало саме походження похідної як границі відношення $\frac{dy}{dx}$. Тому його часто використовують і в сучасних курсах математичного аналізу. Ньютон, який у своїх підходах до обґрунтування математичного аналізу широко застосовував фізичні уявлення, похідну називав флюксією (дослівно з латини – «витіканням»), а саму функцію флюентною (дослівно «текучістю»). Ці терміни Ньютона не прижилися.

Терміни «диференціальний», «диференційована», «диференціювання» тощо відображають той аспект утворення поняття похідної, що пов'язаний із знаходженням різниць $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ та $x - x_0 = \Delta x$ (differentia в перекладі з латини означає «різниця»).

Велику роль у розвитку диференціального числення відіграв видатний математик, фізик, механік і астроном Леонард Ейлер, який написав підручник «Диференціальне числення» (1755 р.)

За допомогою диференціального числення було розв'язано багато задач теоретичної механіки, фізики та астрономії. Зокрема, використовуючи методи диференціального числення, вчені передбачили повернення комети Галлея, що стало тріумфом науки XVIII ст.

За допомогою цих методів математики у XVIII ст. вивчали властивості різних кривих, знайшли криву, по якій найшвидше падає матеріальна точка, навчилися знаходити кривину ліній.

І тепер поняття похідної широко застосовується у різних галузях науки та техніки.

Використання похідної до розв'язання фізичних задач *(друга група)*

Центральні поняття диференціального числення – похідна та диференціал. Операцію знаходження похідної називають диференціюванням.

Задача на знаходження миттєвої швидкості нерівномірного руху за відомою залежністю координати x від часу розв'язується так: похідною від координати є швидкість;

$v(t) = x'(t)$ – похідною від координати є швидкість;

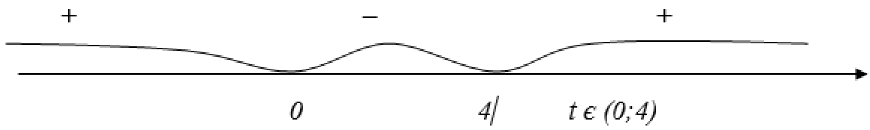
$a(t) = v'(t) = x''(t)$ – похідна від швидкості за часом є прискорення.

Задача 1. По прямій рухаються дві матеріальні точки за законами $x_1(t) = 6t^2 - 3$; $x_2(t) = t^3$.У якому проміжку часу швидкість першої точки більша від швидкості другої точки?

Розв 'язання:

Враховуючи те, що швидкість є похідною від координати (шляху), маємо такі залежності: $v_1(t) = x_1'(t) = (6t^2 - 3)' = 12t, v_2(t) = x_2'(t) = (t^3)' = 3t^2$.

За умовою $v_1 > v_2$ тобто $12t > 3t^2$; $12t - 3t^2 > 0$; $3t(t - 4) < 0$.



Відповідь: у проміжку часу $t\epsilon(0; 4с)$ швидкість першої точки буде більша за швидкість другої точки.

2. З точки зору фізики диференціювання – це визначення швидкості зміни змінної величини. $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'$ сила струму є величиною , яка похідна по часу від заряду $N = \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'$ потужність – величина, яка є похідною від роботи.

Задача 2. Заряд конденсатора ємністю 10 пФ коливального контуру при здійсненні вільних електромагнітних коливань змінюється за законом $q = 10 - 6 sin\ l05\pi t$. Знайти період коливань, амплітудне значення сили струму в котушці. Чому дорівнює енергія електричного поля конденсатора в момент, коли сила струму в котушці складає половину її амплітудного значення?

Розв‘язання

$q = Q_{max} \sin \omega t$. Тому за умовою маємо $Q_{max} = 10^{-6}$ Кл =1мкКл ; $\omega = 10^5 \pi$ Гц

Так як $T = \frac{2\pi}{\omega}$, то $T = \frac{2\pi}{10^5 \pi Гц} = 2 \cdot 10^{-5} c = 20 мкс$

За умовою задачі нас цікавить час, коли сила струму в котушці складає половину її амплітудного значення, тобто маємо $cos 10^5\ \pi t_1 = 0{,}5$, звідси значення синуса аналогічного аргументу становить $\sin 10^5\ \pi t_1 = \sqrt{1 - 0{,}5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, q(t_1) = Q_{max} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$W_{\text{ел}}(t_1) = \frac{q^2}{2C} = \frac{3Q_{\max}^2}{4\cdot 2C} = \frac{3Q_{\max}^2}{8C} = \frac{3\cdot\left(10^{-6}\,\text{Кл}\right)^2}{8\cdot 10^{-11}\,\Phi} = 37{,}5 * 10^{-3}\,Дж = 37{,}5\,мДж$$

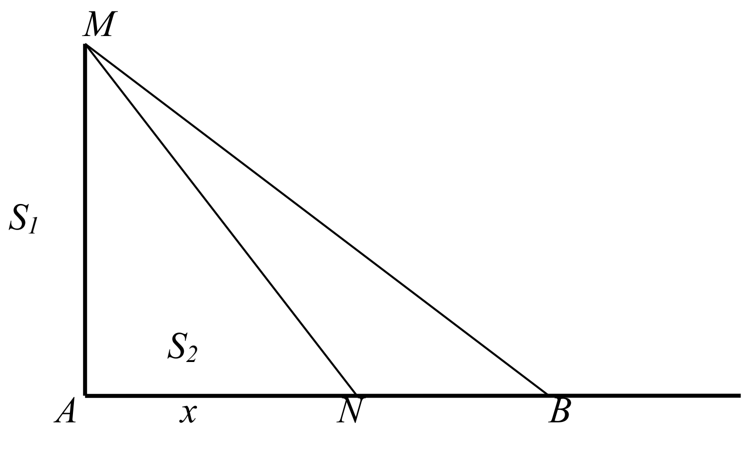
Відповідь: 20 *мкс*, 314 мА, 37,5 мДж.

Використання похідної до розв'язання в задачах на рух *(третя група)*

Розв'язання багатьох практичних задач зводяться до знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції, тобто знаходження екстремумів (демонструється таблиця–схема знаходження найбільшого і найменшого значення неперервної функції на відрізку). Загальний метод розв'язування задач на екстремум за допомогою похідної складається з трьох етапів:

1. формалізація (задача „перекладається" мовою функцій, для цього обирається зручний параметр x, через який шукану величину виражають як функцію $f(x)$;
2. розв'язання одержаної математичної задачі;
3. інтерпретація знайденого розв'язку („переклад" його з мови математики у терміни первинної задачі).

Задача 3. Човен знаходиться на озері на відстані 3 км від найближчої точки А берега. Пасажир човна має намір досягти села В, що розташоване на березі на відстані 5 км від А (ділянка АВ берега вважається прямолінійною). Човен рухається зі швидкістю 4 км/год, а пасажир, вийшовши з човна, може за годину пройти 5 км. До якої точки берега має дістатися човен, щоби пасажир досяг села у найкоротший термін?



Розв‘язання.

$S_1 = AM,\ S_2 = AB$. Нехай шукана точка $N. AN = x, 0 \le x \le S_2,\ BN = S_2 - x,$

$$MN = \sqrt{S_1^2 + x^2}, t_1 = \frac{MN}{v_1} = \frac{\sqrt{S_1^2 + x^2}}{v_1} = \frac{\sqrt{3^2 + x^2}}{4} = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4};$$

$$t_2 = \frac{BN}{v^2} = \frac{S_2 - x}{v^2} = \frac{5 - x}{5}; t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4} + \frac{5 - x}{5}.$$

Знайдемо найменше значення функції $t(x)$ на відрізку [0;5], знайшовши критичну точку для якої $t'(x) = 0$ і обчисливши значення функції в цій точці

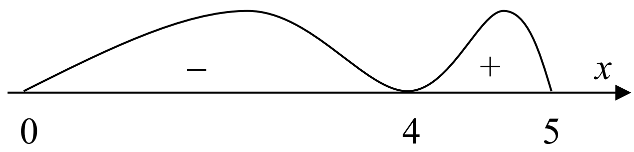
$$t^{/}(x) = \frac{2x}{4 \cdot 2\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{4\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{5} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{x}{4\sqrt{9 + x^2}} = \frac{1}{5}$$

Маємо: $5x = 4\sqrt{9 + x^2}$.

Піднесемо до квадрату почленно праву і ліву частини, одержимо:

$25x^2 = 144 + 16x^2;\ 9x^2 = 144, x^2 = 16.$

Звідси $x = x \pm 4. t(0) = 1{,}75\ c;\ t(5) = \frac{\sqrt{34}}{4} \approx 1{,}456(\text{с});\quad t(4) = 1{,}45\ c$



$t/(x) < 0$ на $(0; 4)$; $t/(x) > 0$ на $(4; 5)$. Точка $x = 4$ є точкою мінімуму функції. Отже, щоб досягти пункту В у найкоротший час пасажир має дістатися берега у точці N, що знаходиться на відстані 4 км від А, або на відстані 1 км від В.

Відповідь*:* на відстані 1 км від В.

Використання похідної в задачах з хімії *(четверта група)*

Виявили найхарактерніші задачі:

- швидкість зростання маси кристалів;
- швидкість зміни температури під час нагрівання.
- теплоємність – похідна від кількості тепла.

Задача 4. Під час нагрівання тіла його температура T за знаком T=$0{,}4t^2$, де T температура у градусах, час t у секундах. Знайдіть швидкість температури у момент $t = 5c$.

$v(t) = T'(t) = 0{,}4 \cdot 2t = 0{,}8t,\ v(5) = 0{,}8 \cdot 5 = 4$(град/с).

Відповідь: 4 град/с.

Задача 5. Маса кристалів у розчині за законом $5 = \sqrt{t^2 + 5t}$, де m маса кристалів у грамах, t час у годинах. Обчисліть швидкість росту маси кристалів за 4 години після початку кристалізації.

$$v(t) = m'(t) = \left(\sqrt{t^2 + 5t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 5t}} \cdot \left(\sqrt{t^2 + 5t}\right)' = \frac{2t + 5}{2\sqrt{t^2 + 5t}}.$$

$$v(t) = \frac{2 \cdot 4 + 5}{2 \cdot \sqrt{16 + 5 \cdot 4}} = \frac{13}{2\sqrt{36}} = \frac{13}{12}\left(\frac{\text{г}}{\text{год}}\right).$$

Відповідь: $\frac{13}{12}\left(\frac{\text{г}}{\text{год}}\right)$.

VI. Підсумок уроку. Домашнє завдання.

Вами була проароблена досить значна робота. Керівники груп подали відомості про те, який вклад в роботу групи вніс кожен учасник. Ви прослухали представлення. Тож оцінки з алгебри одержали…

Домашнім завданням будуть задачі № 6, та № 9 (с. 648 підручника «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу автори: Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С.).