Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та методики викладання математики

Дипломна робота

бакалавр

на тему «Методика навчання учнів розв’язувати тригонометричні рівняння»

Виконала: студентка IV курсу, групи МЕФ - 41
напряму підготовки
0402 «Фізико-математичні науки»,
6.040201 «Математика»
Юрковець Анастасія Вікторівна

Керівник: ст. викл. Клекоць Г. Я.

Рецензент: докт. техніч. наук, проф.
Турбал Ю. В.

Рівне – 2018 року

Зміст

ВСТУП

Актуальність дослідження. Бакалаврська робота присвячена актуальній тематиці з точки зору як математики, так і методики викладання математики. Сучасна старша школа стрімко розвивається. Диференціація – одна з ключових проблем організації сучасної школи. У старшій школі вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Оскільки за рівнем стандарту у школах на вивчення даної теми виділяють 2 години, розглядатимемо програму профільного рівня.

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. Оскільки за рівнем стандарту у школах на вивчення даної теми виділяють 2 години, ми розглядатимемо також програми профільного рівня.

Програма академічного рівня задає дещо ширший зміст і вищі вимоги до його засвоєння у порівнянні з рівнем стандарту. Вивчення математики на академічному рівні передбачається передусім у тих випадках, коли вона тісно пов'язана з профільними предметами і забезпечує їх ефективне засвоєння. Крім того, за цією програмою здійснюється математична підготовка старшокласників, які не визначилися щодо напряму спеціалізації.

Програма поглибленого вивчення математики розрахована на вивчення математики у 8-11 класах, та передбачає поглиблене вивчення предмету.

Програма профільного рівня передбачає вивчення предмета з орієнтацією на майбутню професію, безпосередньо пов'язану з математикою або її застосуваннями.

Вивчення властивостей тригонометричних функцій і залежностей між ними віднесено до шкільного курсу алгебри та початків аналізу.

Дослідженнями тригонометричних рівнянь і їх систем займалися такі відомі математики як Брадіс В.М., Бевз Г.П., Слепкань З.І. та багато інших.

Розв'язування тригонометричних рівнянь та їх систем для учнів дається важко, рівень знань по даній темі дуже низький.

Аналіз психолого-педагогічної та науково-методичної літератури показав, що методичні розробки по навчанню учнів потребують подальшої розробки з врахуванням змін, які відбуваються в сучасній школі. Практична необхідність, недостатня розробленість та соціальна значимість цієї проблеми зумовили вибір теми дослідження.

Тема дослідження – «Методика навчання учнів розв'язувати тригонометричні рівняння».

Метою дослідження є: вдосконалення методики навчання даної теми учнів школи. Розробка і теоретичне обґрунтування методики розв'язування тригонометричних рівнянь та їх систем.

Об'єкт дослідження – процес навчання учнів тригонометричних рівнянь та їх систем.

Предмет дослідження –зміст і методиканавчання учнів теми «Тригонометричні рівняння».

Основні завдання:

- проаналізувати різні методи і прийоми викладання теми «Тригонометричні рівняння» та ефективність використання їх на практиці, визначити основні недоліки і шляхи їх усунення;
- розробити методичні рекомендації щодо навчання учнів розв'язування тригонометричних рівнянь та їх систем.

Гіпотеза дослідження: організація навчально-виховного процесу на основі розробленої методики розв'язування тригонометричних рівнянь дозволить покращити рівень знань, вміння та навички учнів в порівнянні з традиційною методикою математики.

Методичною основою дослідження стали підручники для учнів старшої школи про викладання теми «Тригонометричні рівняння», про використання різних методів і прийомів вивчення даної теми.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому, що дані методичні твердження та висновки можна використовувати для вдосконалення знань, вмінь та навичок учнів.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідження доповідалися і були схвалені на звітній науковій конференції викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету.

Бакалаврська робота складається з вступу, двох основних розділів, висновків та списку використаних джерел.

Перший розділ присвячено науковому дослідженню проблеми. У ньому подані теоретичні основи даного дослідження.

В другому розділі розглядаються науково – теоретичні особливості навчання розв’язувати тригонометричні рівняння. Розглядаються тригонометричні функції, тригонометричні тотожності, методи розв’язання рівнянь та систем.

РОЗДІЛ І. ПСИХОЛОГО – ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ»

1.1. Педагогічні засади вивчення тригонометричних рівнянь

Тригонометричними рівняннями називаються рівняння, у яких невідома (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції.

Тригонометричні рівняння, які містять більш-менш складні тригонометричні вирази, є складовою частиною багатьох іспитів, зокрема, зовнішнього незалежного оцінювання. Як відомо не існує єдиного методу, слідуючи якому вдалося б розв’язати будь-яке тригонометричне рівняння чи тригонометричну нерівність. Але загальна мета полягає в перетворені даних в рівнянні тригонометричних виразів так, щоб дане рівняння звелося до простого, або «розпалося» на декілька простих.

У кожному конкретному прикладі необхідно знайти свій спосіб перетворення даного рівняння. Іноді доводиться перебирати різні перетворення, випробовувати різні ідеї, перш ніж вдасться знайти той шлях, який приводить до мети. Успіх тут можна забезпечити лише хороше знання тригонометричних формул і вміння гармонічно проводити тригонометричні перетворення, що виробляється тільки достатньою практикою .

У роботізазначені основні методи розв’язування тригонометричних рівнянь з функціями одного аргументу та з функціями різних аргументів:спосіб зведення до одного аргументу, розкладання на множники, спосіб розв’язання однорідного рівняння, спосіб введення допоміжного кута, спосіб піднесення до квадрату, графічний спосіб.

Знання різних методів розв’язування тригонометричних рівнянь безперечно допоможе учням легше і швидше розв’язувати рівняння, однак можливість і вміння аналізувати використаний метод краще сприятиме не допущенню помилок при розв’язувані рівнянь.

1.2. Психологічні погляди на вивчення теми «Тригонометричні рівняння»

Для кращого розв'язування тригонометричних рівнянь потрібно дивитися на «задачу» з психологічної точки зору.

В психологічній і педагогічній літературі немає єдиного пояснення терміну «задача». Різні автори по-різному підходять до питання про співвідношення між суб'єктом і задачею.

Процес розв'язування задачі, як процес розумової діяльності суб'єкта, досліджується психологією.

Можна виділити такі найважливіші функції задач в навчальному процесі:

- навчальна – на задачах навчаються учні, зокрема підводять до вивчення теорії, пов'язують теорію з практикою і т.д.;
- виховна – на задачах виховують кмітливість, культуру мови, графічну культуру, наполегливість тощо;
- розвивальна – на задачах розвивають логічне мислення, просторову уяву, раціоналізаторські здібності;
- контролююча – в контрольних і екзаменаційних роботах найчастіше пропонують задачі [9,с.243-245].

Процес розв'язання задачі повинен складатися з наступних етапів:

1) аналіз умов задачі;
2) пошук плану розв'язання;
3) реалізація знайденого плану, перевірка і доведення того, що отриманий розв'язок задовольняє умови задачі;
4) аналіз отриманих результатів.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

2.1. З історії тригонометрії

Термін «тригонометрія», який походить від грецьких слів «тригон» – трикутник і «метрео» – вимірюю і означає у перекладі «вимірювання трикутників», був запропонований у 1595р. німецьким математиком В.Б.Пітіском(1561-1613).

Тригонометрія, як астрономія і географія, зародилася та розвивалася у Вавилоні, Єгипті, Китаї, Індії та інших країнах. Значного розвитку тригонометрія як частина астрономії набула у Стародавній Греції. Греки першими почали розв'язувати прямокутні трикутники, у зв'язку з чим склали тригонометричні таблиці. У цих таблицях містилися довжини хорд, що відповідали центральним кутам круга сталого радіуса. Фактично це були таблиці синусів, оскільки лінія синусів дорівнює половині хорди.

Перші тригонометричні таблицібуло складено давньогрецьким астрономом: математиком Гіппархом(біля 150р. до н.е.). Він увів також географічні координати – широту і довготу. Таблиці синусів складали також індійські астрономи, які розглядали і косинус.

Тригонометричні таблиці високої точності було складено у XV ст. Середньоазіатським учнем ал – Каші(XIV–XVст.) та німецьким астрономом і математиком Регіомонтаном(1436–1476).

У Росії перші тригонометричні таблиці, в складанні яких брав участь Л.Ф.Магницький(1669–1739), було видано у 1703році.

Вчення про тригонометричні функції почало розвиватися ще у IV–Vст. у працях індійських вчених. Термін «sinus» хоч і було введено латинською мовою у XIIст., але переклали цього з індійської «архадживе», що означає «половину хорди».

Регіомонтан (латинізоване ім'я німецького астронома і математика Йоганна Мюллера (1436-1476)) склав також детальні тригонометричні таблиці, завдяки його працям плоска і сферична тригонометрія стала самостійною дисципліною і в Європі.

У IX–Хст. Середньоазіатські вчені ввели поняття тангенса, котангенса, секанса (величини, оберненої до косинуса) і косеканса (величини, оберненої до синуса). Термін «тангенс» було введено у 1583р. німецьким математиком Т.Фінком(1561–1656). Латинське слово «tangent» означає «той, що дотикається.

Подальший розвиток тригонометрія отримала в працях видатних астрономів Миколи Коперника (1473-1543), Тихо Браге (1546-1601) і Йогана Кеплера (1571-1630), а також у роботах математика Франсуа Вієта (1540-1603), який повністю розв'язав задачу про визначення всіх елементів плоского або сферичного трикутника за трьома даними.

Довгий час тригонометрія носила чисто геометричний характер. Такою вона була ще в середні століття, хоча іноді в ній використовувалися і аналітичні методи, особливо після появи логарифмів. Поступово тригонометрія органічно увійшла в математичний аналіз, механіку, фізику.

Починаючи з XVII ст., Тригонометричні функції почали застосовувати до розв’язання рівнянь, задач механіки, оптики, електрики, радіотехніки, для опису коливальних процесів і т. д. Тому тригонометричні функції всебічно і глибоко досліджувалися і набули важливого значення для всієї математики.Аналітична теорія тригонометричних функцій в основному була створена видатним математиком XVIII ст. Леонардом Ейлером (1707-1783) членом Петербурзької Академії наук.

Таким чином, тригонометрія, що виникла як наука про розв’язання трикутників, з часом розвинулася і в науку про тригонометричні функції.Пізніше частина тригонометрії, яка вивчає властивості тригонометричних функцій і залежності між ними, почали називати гоніометрія. Термін гоніометрія останнім часом практично не вживається.

Вивчення властивостей тригонометричних функцій і залежностей між ними віднесено до шкільного курсу алгебри, а розв’язання трикутників - до курсу геометрії.

2.2. Загальні вказівки до розв’язання тригонометричних рівнянь

Тригонометричним рівнянням називається рівняння, в якому невідоме міститься під знаком тригонометричних функцій. Розв’язати тригонометричне рівняння – означає знайти всі значення невідомого, при яких рівняння перетворюється на тотожність. Такі значення невідомого називаються його розв’язками, або коренями. Тригонометричні рівняння виду $\sin x = m, \cos x = m, \operatorname{tg} x = m, \operatorname{ctg} x = m$ називаються найпростішими рівняннями. До них також відносять рівняння більш загального вигляду $\sin(ax + b) = m$, $\cos(ax + b) = m$, $\operatorname{tg}(ax + b) = m$, $\operatorname{ctg}(ax + b) = m$, де $a \neq 0$. Після застосування формул для розв’язання найпростіших рівнянь кожне з цих рівнянь зводиться до лінійного алгебраїчного рівняння відносно x. Так розв’язуючи рівняння $\operatorname{tg}(ax + b) = m$, дістанемо:

$$ax + b = \operatorname{arctg} m + k\pi,$$

звідки

$$ax = \operatorname{arctg} m - b + k\pi,$$

і, отже,

$$x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} m - \frac{b}{a} + \frac{k\pi}{a},$$

де k– довільне ціле число.

Отже, процес аналітичного розв’язування тригонометричного рівняння полягає у зведені його до одного або кількох найпростіших рівнянь і їх розв’язання.

Зазначимо, що розв’язуючи тригонометричне рівняння, внаслідок деяких перетворень можна дістати рівняння, не еквівалентне даному рівнянню.

З курсу алгебри відомі такі найбільш поширені випадки порушення еквівалентності рівнянь:

1. Множення обох частин рівнянняна многочлен від невідомого може привести до появи сторонніх коренів. Стороннім коренем можуть бути ті значення невідомого, при яких цей многочлен дорівнює нулеві.

При розв’язуванні рівняння, яке має невідоме в знаменнику дробу, доводиться обидві частини його множити на спільний знаменник, що може призвести до появи сторонніх коренів.

2. Піднесення обох частин рівняння до степеня з тим самим показником може призвести до появи сторонніх коренів.

3. Ділення обох частин рівняння на многочлен від невідомого може призвести до втрати коренів. Утраченими можуть бути тільки ті значення невідомого, при яких цей многочлен дорівнює нулеві.

4. Додавання до обох частин рівняння виразу, що має невідоме в знаменнику, може призвести до втрати коренів і до появи сторонніх коренів. Утраченими або сторонніми коренями можуть бути тільки ті значення невідомого, при яких знаменник цього виразу дорівнює нулеві.

При розв’язуванні тригонометричних рівнянь може порушитися еквівалентність не тільки внаслідок зазначених перетворень, але і внаслідок перетворень тригонометричних.

Розв’язуючи тригонометричні рівняння, слід не допускати втрати коренів і обов’язково перевіряти розв’язки тих рівнянь, при розв’язування яких могли виникнути сторонні корені. Перевірку треба виконувати, підставляючи всі корені в дане рівняння (яке не зазнало перетворень)

Наприклад, розв’язуючи рівняння$2\cos x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = \sin x,$

дістанемо

$2\sin x + 1 = \sin x, \sin x = -1$

звідки

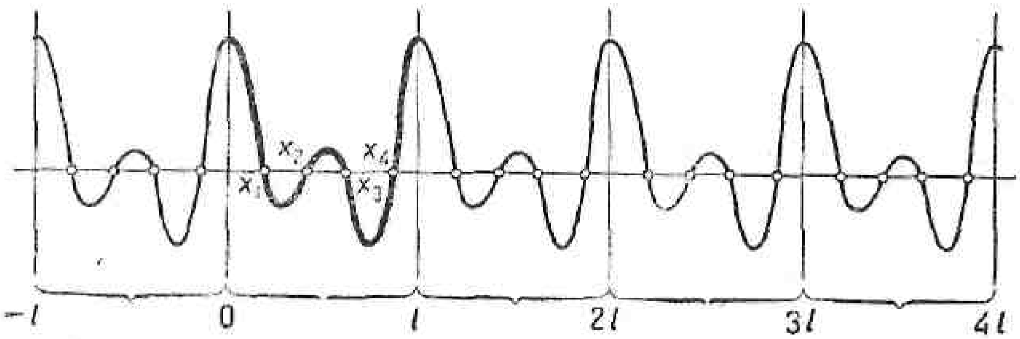
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Корені, що визначаються цією формулою, є сторонніми для даного рівняння, оскільки при $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ і ,отже, ліва частина даного рівняння, позбавлені смислу. Рівняння не має розв’язків.

2.3. Про завдання розв'язання тригонометричних рівнянь

Тригонометричні рівняння,як правило, мають нескінченну безліч розв'язків, причому зазвичай спільне розв'язки (тобто множина всіх рішень) задається однією або кількома формулами (серіями) з цілочисельними параметрами.

У звичайних шкільних вправах розглядаються тригонометричні рівняння виду$f(x) = 0$, де $f(x)$ – періодичнафункція.



Періодl цієї функції будемо називати періодом рівняння.Для розв'язання рівняння, що має періодом, досить знайти всі його розв'язки, що належать будь-якому півсегменту, наприклад ,$0 \leq x < l$ по довжині рівному періоду.Нехай $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$–множина всіх розв'язків даного рівняння, що належать проміжку $0 \leq x < l,$ тоді, з періодичності даного рівняння , множину всіх його розв'язків можна записати у вигляді двосторонніх арифметичних прогресій $x_1 + k_1 l, x_2 + k_2 l, \ldots, x_n + k_n l,$ (де $k_1, k_2, \ldots, k_n$- довільні цілі числа) з різницею, рівною $l.$ Так, першу серію в розгорнутому вигляді можна записати таким чином:

$$\ldots, x_1 - 2l, x_1 - l, x_1, x_1 + l, x_1 + 2l, \ldots$$

Ми вважаємо корисним, починаючи з першого жрівняння, пропонувати учням час від часу записувати спільний розв'язок в розгорнутому вигляді.Наприклад, для найпростішого рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$цей запис буде виглядати наступним чином:

$$\left.\begin{array}{r}\dots,\dfrac{\pi}{3}-4\pi,\dfrac{\pi}{3}-2\pi\,,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}+2\pi,\dfrac{\pi}{3}+4\pi,\dots\\ \dots,-\dfrac{\pi}{3}-4\pi,-\dfrac{\pi}{3}-2\pi\,,-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3}+2\pi,-\dfrac{\pi}{3}+4\pi,\dots\end{array}\right\}$$

Для рівняння $\sin 3\,x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ будемо мати:

$$3x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$$

звідки

$$x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2}{3}k\pi\\ \dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{2}{3}k\pi\end{cases}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{array}{r}\dots,\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{4}{3}k\pi,\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{2}{3}k\pi,\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2}{3}k\pi,\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{4}{3}k\pi,\dots\\ \dots,\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{4}{3}k\pi,\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}k\pi,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}k\pi,\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4}{3}k\pi,\dots\end{array}\right\}$$

Такий детальний запис дає можливість учням усвідомити множину рішень, які записано коротко у вигляді формули загального розв’язку.

Якщо загальний розв’язок тригонометричного рівняння задано декількома серіями, то не виключена можливість, що деякірозв’язки зустрічаються в декількох серіях. Такі розв’язки будемо називати повторюваними. На відміну від алгебраїчних рівнянь, для тригонометричних рівнянь (в елементарному викладі) поняття кратного кореня не вводиться, тому всякий корінь, що повторюється рахується один раз.

2.4. Про особливі розв’язки

Поняття кореня рівняння $f(x)=\varphi(x)$ може бути узагальнено в наступному напрямку: якщо число a не належить області визначення рівняння (хоча б одна з функцій $f(x)$ або$\varphi(x)$ при $x=a$ втрачає зміст), але$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=0$, то число a вважається коренем (особливим) даного рівняння.

Послідовне проведення в шкільному курсі зазначеної точки зору ми вважаємо нереальним, оскільки учні не володіють достатніми знаннями і навичками з теорії границь.Крім того, в рамках шкільного курсу введення поняття особливого розв’язку, засноване на принципі продовження функції по неперервності.

Зважаючи на викладене, в шкільному курсі математики слід відмовитись від поняття розв'язку рівняння в особливому випадку.

Будь-яке значення невідомого, при якому ліва або права частина (хоча б одна) рівняння, втрачає сенс, не повинно вважатися розв’язком рівняння.

При розв’язанні рівнянь елементарними методами дане рівняння піддається ряду послідовних перетворень, поки не вийде рівняння (або сукупність рівнянь), яке учні вміють розв’язувати. У цій послідовності (кінцевої) рівняння при переході до подальшого рівнянню може змінитися область визначення попереднього рівняння. У зв'язку зі зміною області визначення можливо як набуття сторонніх розв’язків (при розширенні області визначення), так і втрата розв’язків (при звуженні області визначення). Щоб врахувати зміни багатьох розв’язків рівняння, треба в процесі розв’язання рівняння стежити не тільки за самими перетвореннями, а й за послідовними змінами області визначення. Встановивши область визначення вихідного рівняння, треба встановлювати область визначення кожного рівняння отриманого упослідовності.

Рекомендація стежити за областю визначення рівняння на кожному кроці процесу розв’язання має наступну негативну сторону: вимога скрупульозно виписувати всі умови, при яких обидві частини кожного з розглянутих рівнянь мають сенс, подовжить весь процес розв’язання рівняння і може внести до нього значні ускладнення. Тому на практиці можна робити інакше. При спрощення аналітичних виразів та рівнянь лише в рідкісних випадках виконуються перетворення, що звужують область визначення; найбільш часто зустрічаються перетворення, як, наприклад, скорочення дробових виразів, "відкидання" спільного знаменника, скорочення взаємно протилежних доданків, почленні зведення рівняння до натурального степеня, не звужують область визначення, а можуть її розширити. Отже, при таких перетвореннях можливо лише поява сторонніх, але не втрата розв'язків; тому достатньо випробувати отримані значення невідомого шляхом підстановки у вихідне рівняння з метою усунення сторонніх розв'язків.

Приклад.Дано рівняння $\frac{1+\cos 2x}{2\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$ (1)

Перетворивши, отримаємо$\frac{\cos x(\sin x-1)}{\sin x} = 0,$ (2)

$\cos x = 0, \sin x = 1,$ (3)

і, нарешті,$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Простежимо за зміною області визначення.

Область визначення рівняння (1) така: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$і $x \neq k\pi$; вона знаходиться із умов$\cos 2x \neq 0, \cos 2x \neq 1$.

Значення x, що не належать області визначення, знаходяться із сукупності рівнянь $\cos 2x = 0, \cos 2x = 1$звідки $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$і $x = k\pi$.

Область визначення рівняння (2) така: $x \neq k\pi$; вона знаходиться із умови $\sin x \neq 0$.

Область визначення сукупності рівнянь (3) – множина всіх дійсних чисел.

При переході від рівняння (1) до рівняння (2) розширення області визначення відбулося через скорочення дробових виразів: відпадає умова $\cos x \neq 0$.

При переході від рівняння (2) до сукупності рівнянь (3) відпадає умова $\sin x \neq 0$.

У даному прикладі всі розв'язки виявилися сторонніми.

2.5. Про перевірку коренів

Перевірка коренів рівняння може переслідувати дві мети відповідно до наступних двох випадках:

- по-перше, в процесі розв'язання будується ланцюжок рівнянь, нееквівалентних між собою.

- по-друге, в процесі розв’язання будується ланцюжок рівнянь, еквівалентних між собою.

У першому випадку перевірка коренів є складовою частиною розв’язання.

У другому випадку з математичної точки зору ніякої перевірки коренів не потрібно, якщо, в процесі розв’язання не допущено помилок. Вимога виконати перевірку може мати лише дидактичні цілі (самоконтроль).

У всіх випадках учню повинна бути ясна мета перевірки – чи потрібна вона взагалі або чи є лише засобом контролю. Щоб відповісти на це питання, учень повинен чіткоусвідомити весь процес розв’язання рівняння. Ми вважаємо що є не правильним вимагати виконувати перевірку в усіх випадках. Звикнувши завжди робити перевірку, учні перестануть замислюватися, навіщо вони її робили.

Невиконання перевірки в першому випадку слід вважати як математичну помилку. Перевірка другого роду виконується лише в окремих випадках за спеціальним указом вчителя, а також у тих випадках, коли учень не впевнений у правильномурозв’язанні або сумнівається у правильності відповіді.

Перевірка коренів необхідна, якщо в процесі розв’язання рівняння застосовується звільнення від радикалів, скорочення дробових виразів на загальний функціональний множник чисельника і знаменника і звільнення від дробів.Перевірка також необхідна при розв’язанні рівняння $f(x) = 0$ способом розкладання на множники, якщо хоча б один із множників лівої частини при деяких значеннях невідомого втрачає сенс.

2.6. Основні тригонометричні формули

1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу.Якщо взяти значення всіх 6 тригонометричних функцій при одному значенні аргументу, то між ними виявляються залежності, які виражаються такою «системою основних співвідношень»:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

Цінність цих 5 основних співвідношень у тому, що вони дають можливість, вважаючи відомим значення якої-небудь однієї з 6 тригонометричних функцій, виразити залежно від нього значення 5 інших.

З 5 основних співвідношень корисно вивести (суто аналітично, не вдаючись до рисунка) ще кілька формул. Важливіші за інші формули

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha \qquad\qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha,$$

які легко дістати, подаючи $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ через$\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

2.Формули зведення.Формули зведення дають можливість, знаючи тригонометричні функції для будь-яких дуг I чверті, знаходити за допомогою дуже простого розрахунку їх значення для будь-яких дуг і відіграють велику роль у практичних застосуваннях тригонометрії; завдяки цьому навіть тригонометричні таблиці складаються лише для дуг I чверті. Формул цих багато, вони часто бувають потрібні, і завдання вчителя є не лише виведення, а й вказування способів швидкого їх відтворення. Формули зведення запишемо у вигляді таблиць:

Назва функції не змінюється					
x	$-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\cos x$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$

Назва функції змінюється				
x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$

Запам'ятати їх усі, зрозуміло, нелегко, а потреба в них зустрічається часто. Існує особливе *мнемонічне* правило, яке наводиться в різних варіантах у багатьох підручниках і зводиться до такого: якщо в лівій частині формули зведення фігурує дуга в ціле число півкіл (0, π, 2π), то в правій треба писати ту саму функцію, що ц у лівій; в інших випадках у правій частині записується *кофункція*, тобто якщо зліва синус, косинус, тангенс, то справа відповідно косинус, синус, тангенс і навпаки; перед знаком функції справа пишуть знак плюс або мінус залежно від того, чи має функція, записана зліва, додатне чи від'ємне значення у випадку, коли дуга α належить до дуги І чверті. Щоб це правило було застосоване до формул зведення від'ємних дуг, треба вважати, що –α= 0–α.

Приклади. Якщо зліва $\cos(\pi+\alpha)$, справа пишемо $\cos\alpha$ із знаком мінус, бо при дузі a, яка належить І чверті, дуга $\pi+\alpha$ належить ІІІ чверті, а косинус в ІІІ чверті від'ємний; отже, $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. Якщо ж зліва $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)$, пишемо справа$\operatorname{ctg}\alpha$ із знаком плюс, бо при a в І чверті дуга $\frac{1}{2}\pi-\alpha$теж в І чверті, а тангенс в І чверті додатний.

Хоч це мнемонічне правило формулюється досить довго, учні легко його схоплюють і охоче застосовують. Давати яке-небудь доведення цього правила не потрібно: воно випливає з розгляду повного переліку формул зведення[4,с.357-360].

3.Формули додавання і віднімання.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$$

4. Формули подвійного аргументу. Це формули, які виражають функцію 2α через функції аргументу α.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

5.Формули половинного аргументу.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Ці три формули можна також розглядати як формули зниження степеня.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

6.Формули перетворення суми в добуток.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

7. Формули перетворення добутку на суму.

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

8.Універсальна тригонометрична підстановка (формули, що виражають $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$).

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Дані формули широко використовуються для спрощення виразів, доведення тотожностей, розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей та ін.

9.Формули потрійного кута.

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

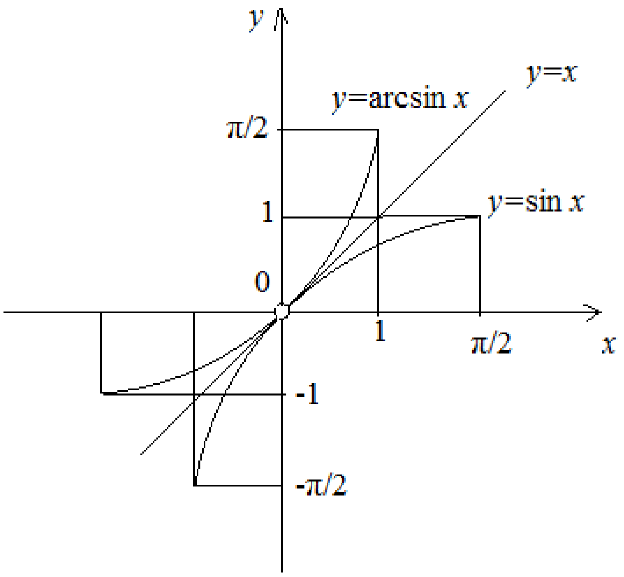
$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

2.7. Обернені тригонометричні функції

Функція, обернена до $y=\sin x$. Функція $y=\arcsin x$ є оберненою до функції $y=\sin x$, якщо $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Графік функції $y = \arcsin x$дістанемо з графіка функції $y = \sin x$,, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$.

Властивості функції $y = \arcsin x$:



1) Областю визначення функції є множина$[-1; 1]$, областю значень – множина $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При цьому, якщо $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$то$0 \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, а якщо$-1 \le x \le 0$, то $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le 0$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат (функція непарна), тобто $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю при $x = 0$.

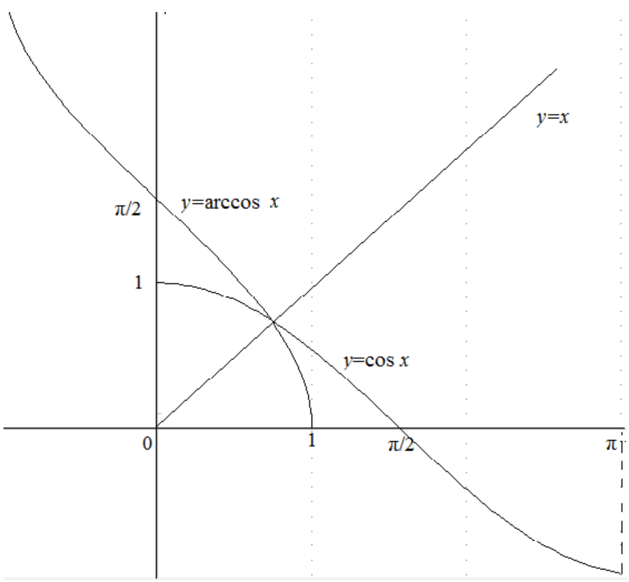
5) Зростаюча за теоремою про властивість оберненої функції.

6) Додатна при $x \in [0; 1]$ і від'ємна при $x \in [-1; 0]$.

7) Набуває найбільшого значення, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$, якщо $x = 1$, і найменшого$-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = -1$.

Функція, обернена до $y = \cos x$. Функція $y = \arccos x$ є оберненою до функції $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$.

Графік функції $y = \arccos x$дістанемо з графіка функції $y = \cos x$,, якщо $x \in [0; \pi]$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$.



Властивості функції $y = \arccos x$:

1) Областю визначення функції $y = \arccos x$є множина $[-1; 1]$, а областю значень –

множина $[0;\pi]$. Якщо $0 \le x \le 1$, то $0 \le \arccos x \le \frac{\pi}{2}$при $-1 \le x \le 0 \frac{\pi}{2} \le \arccos x \le \pi$.

2) Графік функції не симетричний ні відносно початку координат, ні відносно осі *Оу*. Це означає, що функція не є ні парною, ні непарною.

Для неї виконуєтьсярівністьarccos$(-x) = \pi - \arccos x$.

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 1$.

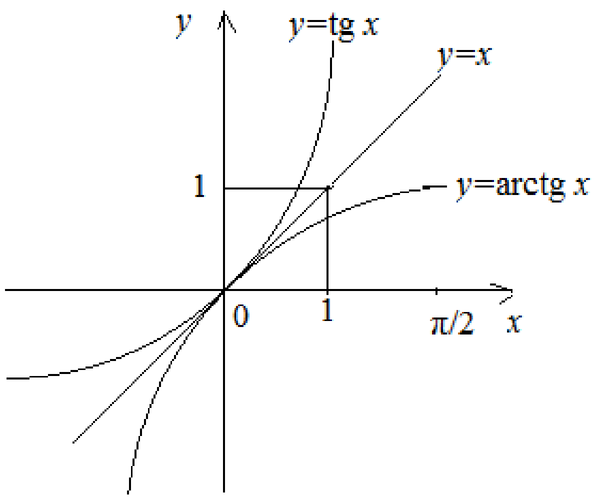
5) Функція спадна.

6) Додатна на всій області визначення.

7) Функція набуває найбільшого значення π, якщо x =-1 і найменшого 0, якщо $x = 1$.

Функція, обернена до $y = \mathrm{tg}\, x$. Функція $y = \mathrm{arctg}\, x$ є оберненою до функції $y = \mathrm{tg}\, x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Графік функції $y = \mathrm{arctg}\, x$дістанемо з графіка функції $y = \mathrm{tg}\, x$,якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$.



Властивості функції $y = \mathrm{arctg}\, x$:

1) Областю визначення функції $y = \mathrm{arctg}\, x$є множина $(-\infty; +\infty)$, а областю значень – множина $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо$0 \le x < +\infty$, то $0 \le \mathrm{arctg}\, x < \frac{\pi}{2}$, якщо $-\infty < x \le 0$, то $-\frac{\pi}{2} < arctg\, x \le 0$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат, це означає, що функція непарна, тобто $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\, x$.

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 0$.

5) Функція зростаюча.

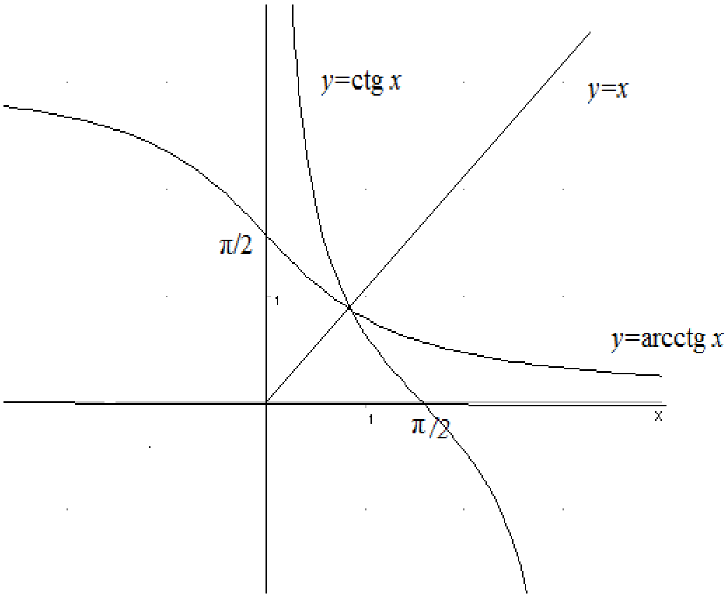
6) Додатна, якщо $0 \le x < +\infty$, і від'ємна, якщо – $-\infty < x \le 0$.

7) Функція не набуває найбільшого і найменшого значень [10,с.284-291].

Функція, обернена до $y = \operatorname{ctg} x$. Функція $y = \operatorname{arcctg} x$ є оберненою до функції $y = \operatorname{ctg} x$, якщо $x \in (0;\pi)$.

Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$дістанемо з графіка функції $y = \operatorname{tg} x$,якщо $x \in (0;\pi)$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$.

Властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$:



1) Областю визначення функції $y = \operatorname{arcctg} x$є множина $(-\infty;+\infty)$, а областю значень – множина $(0;\pi)$.

2) Графік функції не симетричний ні відносно початку координат, ні відносно осі *Oy*. Це означає, що функція не є ні парною, ні непарною.

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 1$.

5) Функція спадна.

6) Додатна при $x \in \left(-\infty;\frac{\pi}{2}\right)$ і від'ємна при $x \in \left(\frac{\pi}{2};+\infty\right)$.

7) Функція не набуває найбільшого і найменшого значень.

2.8. Тематичний план

Оскільки, за рівнем стандарту у школі, на вивчення теми«тригонометричні рівняння» виділяється лише 2 години, розглянемо тематичний план профільного рівня.

Тригонометричні рівняння і нерівності (28 год.)		
№ з\п	Тема уроку	Кількість годин
1	Обернені тригонометричні функції: y=arccos$x$, y=arcsin x (означення, властивості, графіки)	1
2	Обернені тригонометричні функції: y=arctg$x$, y=arcctg x (означення, властивості, графіки)	1
3	Розв'язування задач	1
4	Найпростіші тригонометричні рівняння. Рівняння cos$x$=a	1
5	Найпростіші тригонометричні рівняння. Рівняння sin$x$=a	1
6	Найпростіші тригонометричні рівняння. Рівняння tg$x$=aі ctg$x$=a	1
7	Розв'язування задач	1
8	Основні способи розв'язання тригонометричних рівнянь. Заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь	1
9, 10	Основні способи розв'язання тригонометричних рівнянь. Розв'язання тригонометричних рівнянь зведенням до однієї тригонометричної функції (з однаковим аргументом). Розв'язування задач	1
11, 12	Основні способи розв'язання тригонометричних рівнянь. Розв'язання однорідних тригонометричних рівнянь та зведення тригонометричних рівнянь до однорідного. Розв'язування задач	1
13,	Основні способи розв'язання тригонометричних рівнянь.	1

14	Розв’язання тригонометричних рівнянь виду $f(x)=0$ за допомогою розкладання на множники. Розв’язування задач	
15	Основні способи розв’язання тригонометричних рівнянь. Відбір коренів тригонометричних рівнянь	1
16	Контрольна робота № 1	1
17	Основні способи розв’язування систем тригонометричних рівнянь	1
18	Розв’язування задач	1
19	Розв’язування задач	1
20	Рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції	1
21	Розв’язування задач	1
22	Найпростіші тригонометричні нерівності	1
23	Розв’язування тригонометричних нерівностей	1
24	Розв’язування задач	1
25	Тригонометричні рівняння з параметрами	1
26	Розв’язування задач	1
27	Тригонометричні нерівності з параметрами	1
28	Контрольна робота № 2	1

2.9. Найпростіші тригонометричні рівняння і їх розв'язки

Означення 1. *Тригонометричними рівняннями* називаються рівняння, у яких невідома (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції. Наприклад, $\sin x - \cos x = 0$; $2\sin x + \cos x = \frac{3}{2}\sin^2 2x$; $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$; $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$ і т.д.

Означення 2. *Коренем* або *розв'язком* тригонометричного рівняння називаєтьсязначення *x*, при підстановці якого в рівняння отримаємо правильну числову рівність. Наприклад, $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $x = 3k\pi \pm \pi + \frac{\pi}{2}$ і т.д

Розв'язати тригонометричне рівняння означає знайти ці значення *x* або довести, що це рівняння не має коренів.

Тригонометричні рівняння, у яких змінна входить лише під знак тригонометричної функції, або зовсім не мають розв'язків, або мають здебільшого безліч їх внаслідок властивості періодичності тригонометричних функцій.

Означення 3. *Найпростішими* тригонометричними рівняннями називаються рівняння виду

$$\sin x = a,$$

$$\cos x = a,$$

$$\operatorname{tg} x = a,$$

$$\operatorname{ctg} x = a,$$

де *a* – деяке число.

Очевидно, рівняння $\sin x = a$ і $\cos x = a$ мають розв'язки лише при $|a| \leq 1$, а рівняння $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$ – при будь-яких значеннях *a*.

Розглянемо теореми, на підставі яких можна визначити розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь.

Теорема 1. *Якщо* $\sin x = a$, *де* $-1 < a < 1$, *то*

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a,$$

де k – довільне ціле число.

Доведення.Щоб визначити всі розв'язки рівняння $\sin x = a$ (–1 <a < 1), досить знайти його розв'язки, що належать довільному проміжку довжини періоду 2π, і далі періодично повторити ці розв'язки з періодом 2π.

Очевидно, одним із розв'язків рівняння $\sin x = a$є $x_1 = \arcsin a$. За умовою $|\mathrm{a}| < 1$, тому $x_1 \neq \pm\frac{\pi}{2}$, і рівняння $\sin x = a$ має ще один розв'язок $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \arcsin a$, який відрізняється від x_1менше, ніж на 2π.

На рис.1 графічно зображено розв'язки x_1 і x_2при $0 \leq a < 1$ і $-1 < a < 0$.

$0 \leq a < 1$.

Рис 1.

Крім розв'язків x_1 і x_2, рівняння $\sin x = a$ не має інших розв'язків, які б відрізнялися від x_1 і від x_2менше, ніж на 2π.Тому всі розв'язки рівняння $\sin x = a$ можна дістати за формулами

$$x = x_1 + 2n\pi = 2n\pi + \arcsin a,$$
$$x = x_2 + 2n\pi = 2n\pi + \pi - \arcsin a = (2n+1)\pi - \arcsin a,$$

де n – довільне ціле число.

Ці дві. формули можна записати у вигляді однієї формули так:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a,$$

де k – довільне ціле число.

Теорема 2. *Якщо* $\sin x = 1$, *то*

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

де k *– довільне ціле число.*

Доведення. Одним з розв'язків рівняння $\sin x = 1$ є $x = \frac{\pi}{2}$. Інших розв'язків, які б відрізнялися від $\frac{\pi}{2}$ менше, ніж на2π, немає. Тому всі розв'язки рівняння $\sin x = 1$ можна подати так:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

де k – довільне ціле число.

Так само можна довести і таку теорему.

Теорема 3. *Якщо* $\sin x = -1$,*то*

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

деk *– довільне ціле число.*

Наводимо теореми, на яких ґрунтується розв'язування рівняння $\cos x = a$.

Теорема 4.*Якщо* $\cos x = a$, *де* $-1 < a < 1$, *то*

$$x = 2k\pi \pm \arccos a,$$

де k *– довільне ціле число.*

Доведення. Одним із розв'язків рівняння $\cos x = a$є $x_1 = \arccos a$. Оскільки $|a|<1$, то $x_1 \neq 0$ і $x_1 \neq \pi$. Тому рівняння $\cos x = a$ має ще один розв'язок $x_2 = -x_1 = -\arccos a$, який відрізняється від x_1менше, ніж на 2π.

На рис. 2 зображено розв'язки x_1 і x_2при $0 < a < 1$ і $-1 < a < 0$.

Крім розв'язків x_1 і x_2,рівняння $\cos x = a$не має інших розв'язків, які б відрізнялися від x_1і від x_2менше, ніж на 2π. Тому всі розв'язки рівняння $\cos x = a$ можна дістати за формулами

$$x = x_1 + 2k\pi = 2k\pi + \arccos a,$$

$$x = x_2 + 2k\pi = 2k\pi - \arccos a,$$

тобто

$$x = 2k\pi \pm \arccos a,$$

де k – довільне ціле число.

Теорема 5.*Якщо* $\cos x = 1$, *то*

$$x = 2k\pi,$$

деk *– довільне ціле число.*

Доведення. Одним із розв'язків рівняння $\cos x = 1$ є $x = 0$. Інших розв'язків, які б відрізнялися від 0 менше, ніж на 2π, немає. Тому всі розв'язки рівняння $\cos x = 1$ можна подати так:

$$x = 2k\pi,$$

де k – довільне ціле число.

Так само можна довести ще й таку теорему.

Теорема 6.*Якщо* $\cos x = -1$, *то*

$$x = \pi + 2k\pi,$$

де k *– довільне ціле число.*

Зауваження. Оскільки a = 0 задовольняє умову – 1< a <1, то рівняння $\cos x = 0$ можна розв'язувати за формулою $x = 2k\pi \pm \arccos 0 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$.Проте це рівняння можна розв'язувати, користуючись простішою формулою

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

де k – довільне ціле число, яку неважко довести.

Теорема 7.*Якщо* $\operatorname{tg} x = a$, *то*

$$x = k\pi + \operatorname{arctg} a,$$

де k *– довільне ціле число.*

Доведення. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$має розв'язок $x = \operatorname{arctg} a$.Очевидно, це рівняння не має інших розв'язків, які б відрізнялися від $\operatorname{arctg} a$. менше, ніж на π, тому всі розв'язки рівняння $\operatorname{tg} x = a$ визначаються формулою

$$x = k\pi + \operatorname{arctg} a,$$

де k – довільне ціле число.

Аналогічно можна довести і таку теорему.

Теорема 8.*Якщо* $\operatorname{ctg} x = a$, *то*

$$x = k\pi + \operatorname{arcctg} a,$$

де k – довільне ціле число.

Зазначимо, що так само можна довести дещо загальніші теореми: якщо x_0 – будь – який розв'язок деякого з рівнянь

$$\sin x = a, (-1 < a < 1),$$

$$\cos x = a, (-1 < a < 1),$$

$$\operatorname{tg} x = a,$$

$$\operatorname{ctg} x = a,$$

то відповідно

$$x = k\pi + (-1)^k x_0,$$

$$x = 2k\pi \pm x_0,$$

$$x = k\pi + x_0,$$

$$x = k\pi + x_0,$$

де k – довільне ціле число [2,с.164-167].

Для систематизації знань можна подати таку таблицю,яка зручна у використанні і значно полегшує виконання завдань та сприяє кращому запам’ятовуванні.

a	sin*t*=*a*	cos*t*=*a*
a<-1	*Немає розв'язків*	*Немає розв'язків*
a=-1	$t=-\pi/2+2\pi k,\ k\in Z$	$t=\pi+2\pi k,\ k\in Z$
a=0	$t=-\pi k,\ k\in Z$	$t=\pi/2+\pi k,\ k\in Z$
a=1	$t=\pi/2+2\pi k,\ k\in Z$	$t=2\pi k,\ k\in Z$
0<│*a*│<1	$t=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z$	$t=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$
a>1	*Немає розв'язків*	*Немає розв'язків*
a	tg*t*=*a*	ctg*t*=*a*

$a \in R$	$t=\mathrm{arctg}\,a+\pi k,\ k \in Z$	$t=\mathrm{arcctg}\,a+\pi k,\ k \in Z$

Розглянемо приклади розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sin\left(30° - \frac{3x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Розв’язання. Подаючи це рівняння у вигляді

$$-\sin\left(\frac{3x}{2} - 30°\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

або

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - 30°\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

розв'язуємо його відносно $\frac{3x}{2} - 30°$. Дістанемо:

$$\frac{3x}{2} - 30° = 180°k + (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

звідки

$$\frac{3x}{2} - 30° = 180°k + (-1)^k \cdot 45°$$

і

$$x = 120°k - (-1)^k \cdot 30° + 20°,$$

де k – довільне ціле число.

У разі потреби, беручи k парним і непарним числом, формулу $x = 120°k - (-1)^k \cdot 30° + 20°$ можна подати у вигляді двох формул:

при $k = 2n$, $x = 120° \cdot 2n - (-1)^{2n} \cdot 30° + 20° = 240°n - 10°$;

при $k = 2n + 1$, $x = 120° \cdot (2n + 1) - (-1)^{2n+1} \cdot 30° + 20° = 240°n + 170°$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\cos\frac{\pi - 2x}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Розв’язання. Маємо:

$$\cos\frac{2x-\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

Розв’язуючи це рівняння відносно $\frac{2x-\pi}{3}$, знаходимо:

$$\frac{2x-\pi}{3}=2k\pi\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right).$$

$$\frac{2x-\pi}{3}=2k\pi\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{2x-\pi}{3}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},$$

звідки

$$x=3k\pi\pm\pi+\frac{\pi}{2},$$

де k – довільне ціле число.

Якщо це потрібно, формулу $x=3k\pi\pm\pi+\frac{\pi}{2}$

можна подати у вигляді двох формул:

$$x=3k\pi+\frac{3\pi}{2}\text{ і }x=3k\pi-\frac{\pi}{2}.$$

Приклад 3.Розв’язати рівняння

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$$

Розв’язання. Ліву частину даного рівняння перетворимо так:

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2}=\frac{1}{2},$$

звідки

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0\ ,$$

або

$$\sin 2x=0\ .$$

Отже,

$$2x=k\pi\ \text{ і }\ x=\frac{k\pi}{2},$$

де k – довільне число.

Приклад 4. Розв’язати рівняння

$$\cos\left(3\pi\cos\frac{\pi}{2}x\right) = -1.$$

Розв'язання. Розв'язуючи це рівняння відносно $3\pi\cos\frac{\pi}{2}x$, дістанемо:

$$3\pi\cos\frac{\pi}{2}x = \pi + 2k\pi,$$

або

$$\cos\frac{\pi}{2}x = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3},$$

де k – ціле число.

Оскільки $\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right| \leq 1$, то для k допустимі такі значення: k =0,1,-1,-2. Тому дане рівняння еквівалентне сукупності чотирьох рівнянь:

$\cos\frac{\pi}{2}x = \pm\frac{1}{3}$ і $\cos\frac{\pi}{2}x = \pm 1$.

Сукупність рівнянь $\cos\frac{\pi}{2}x = \pm\frac{1}{3}$ еквівалентна рівнянню

$$\cos^2\frac{\pi}{2}x = \frac{1}{9},$$

звідки

$$\frac{1-\cos\pi x}{2} = \frac{1}{9}$$

$$\cos\pi x = -\frac{7}{9}$$

$$\pi x = 2n\pi \pm \arccos\left(-\frac{7}{9}\right)$$

$$x = 2n \pm \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)$$

де n – довільне ціле число.

Далі розв'язуємо сукупність рівнянь $\cos\frac{\pi}{2}x = \pm 1$. Дістанемо:

$$\cos^2\frac{\pi}{2}x = 1,$$

звідки

$$\sin\frac{\pi}{2}x = 0,$$

$$\frac{\pi}{2}x = n\pi \text{ і } x = 2n,$$

де n – довільне ціле число.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\mathrm{tg}(3\mathrm{arctg}\,2x) = -1$$

Розв'язання. Маємо:

$$3\mathrm{arctg}\,2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{arctg}\,2x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$$

де k – ціле число.

Оскільки $0 < arc\mathrm{tg}\,2x < \pi$, то в останньому рівнянні для k допустимі такі значення: $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$.

Отже дане рівняння еквівалентне сукупності трьох рівнянь:

$\mathrm{arctg}\,2x = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{arctg}\,2x = \frac{7\pi}{12}$, $\mathrm{arctg}\,2x = \frac{11\pi}{12}$

звідки

$2x = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$, $2x = \mathrm{ctg}\frac{7\pi}{12}$, $2x = \mathrm{ctg}\frac{11\pi}{12}$.

Тому

$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{12}$, $x_3 = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{12}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Розв'язання. Маємо:

$$\sqrt{x} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4},$$

де, оскільки $\sqrt{x} \geq 0, k = 0,1,2,3, \ldots$, причому, якщо $k = 0$, то у формулі слід зняти знак плюс. Тому

$$x = \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{4}\right)^2$$

де k – довільне натуральне число і, крім того, $x = \frac{\pi^2}{16}$.

2.10. Методи розв’язання тригонометричних рівнянь

Розглянемо окремо методи розв’язання деяких тригонометричних рівнянь на прикладах і обґрунтуємо доцільність використання кожного з них.

1. Спосіб зведення до однієї тригонометричної функції (алгебраїчний метод).Цим способом розв'язують рівняння, до складу яких входять різні тригонометричні функції одного і того самого аргументу. Використовуючи основні тригонометричні тотожності, всі функції виражають через одну функцію, а потім розв'язують алгебраїчне рівняння відносно цієї функції .

Розв’яжемо рівняння

$\sin x - \cos x = 0$ (1)

Переносимо $\cos x$ у праву частину і виражаємо його через

$\sin x \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$. Дістаємо

$\sin x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}(2)$

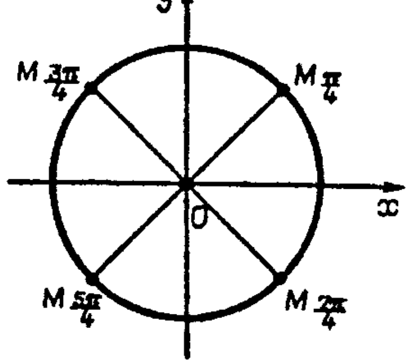
Підносимо обидві частини останнього рівняння до квадрата. Дістаємо $\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$, або $2\sin^2 x = 1$, звідки $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

Маємо два найпростіші тригонометричні рівняння:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi,$ або $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z,$

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi,$ або $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$

Оскільки ми виконували піднесення обох частин рівняння (2) до квадрата, то можливі порушення рівносильності, тобто рівняння $\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$, а отже, і $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, можуть матистороні розв'язки.



Щоб відкинути сторонні розв'язки, зробимо перевірку на відрізку завдовжки 2π, зокрема на$[0; 2\pi]$, враховуючи, що найменшим додатним періодом синуса і косинуса є число 2π. Для цього зручно використати одиничне коло.

Позначимо на одиничному колі всі точки, які відповідають числам, що містяться у знайдених серіях розв'язків.

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi \text{ і } x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Перша формула, якщо$k = 0, \pm 1, \pm 2,$, дає точки $P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{3\pi}{4}}$

Друга формула, якщо $k = 0, \pm 1, \pm 2,$, дає точки $P_{\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{5\pi}{4}}$

Підставимо кожне із здобутих чисел у дане рівняння:

якщо$x = \frac{\pi}{4}$то $\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, 0 = 0;$

якщо $x = \frac{3\pi}{4}$ то $\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 0;$

якщо $x = \frac{7\pi}{4}$ то $\sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq 0;$

якщо $x = \frac{5\pi}{4}$ то $\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, 0 = 0;$

Отже, дане рівняння задовольняють лише розв'язказ двох множин:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z \text{ і } x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z.$$

Їх можна записати однією формулою, якщо перетворити другу формулу так:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + \pi + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi$$

У першій серії до $\frac{\pi}{4}$ додають число $2n\pi$, а у другій – $(2n+1)\pi$. Парні і непарні числа утворюють множину цілих чисел. Тому об'єднана формула розв'язків матиме вигляд

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Способом зведення до однієї функції можна розв'язувати, наприклад, такі рівняння$6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0, \cos^2 x + \sin^2 x - \cos x = 0$та ін.

2. Спосіб розкладання на множники. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь цим способом усі члени рівняння переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток двох або кількох співмножників дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли принаймні один із співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають смислу [10,с.292-295].

Розв'яжемо рівняння

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$$

Розв’язання.

Маємо:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} = 2,$$

звідки після відповідних перетворень дістаємо:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0,$$

$$2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x \cos x = 8,$$

$$2\cos x\,(\cos 3x - \cos 7x) = 0,$$

$$4\cos x \cos 2x \cos 5x = 0.$$

Розв'язуючи сукупність рівнянь

$$\cos x = 0, \cos 2x = 0, \quad \cos 5x = 0,$$

знаходимо:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5},$$

це k – довільне ціле число.

Оскільки розв'язки $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ містяться у множинірозв'язків $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, то шукані значення x визначається такими двома формулами:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5},$$

де k – довільне ціле число.

При розв’язуванні рівняння за допомогою методу розкладання на множники воно не може бути рівносильним одержаній сукупності рівнянь, оскільки можлива поява сторонніх коренів. Щоб уникнути помилок у відповіді, треба виключити з одержаних значення невідомого ті, для яких задане рівняння не має смислу.

3. Спосіб розв'язання однорідних рівнянь. Цей спосіб застосовують під час розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь. Рівняння виду

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_3 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots + a_n \cos^n x = 0, \quad (3)$$

де n – натуральне число, $a, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – сталі коефіцієнти, називається *однорідним* рівнянням *n – го* степеня відносно$\sin x$ і $\cos x$.

Розв'яжемо рівняння

$$8\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 2.$$

Розв'язання.

Враховуючи, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ дане рівняння подаємо у вигляді

$$8\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

звідки

$$6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Це рівняння еквівалентне рівнянню

$$6\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0,$$

яке, у свою чергу, еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2} \text{ і } \mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{3},$$

звідки

$$x = k\pi + \mathrm{arctg}\frac{1}{2}, \text{ і } x = k\pi - \mathrm{arctg}\frac{1}{3},$$

де k – довільне ціле число

4. Спосіб введення допоміжного аргументу. Розв'яжемо рівняння

$$3\sin x + 3\cos x = \sqrt{8}.$$

Розв'язання.

$$3\sin x + 3\cos x = \sqrt{8}$$

Винесемо спільний множник за дужки:

$$3(\sin x + 1 \cdot \cos x) = \sqrt{8}$$

або

$$3\left(\sin x + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{8}$$

Помноживши обидві частини рівняння на $\cos\frac{\pi}{4}$ будемо мати:

$$3\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{8},$$

або

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3},$$

звідки

$$x=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4},$$

де k – довільне ціле число.

Спосіб уведення допоміжного аргументу застосовують під час розв’язування лінійних рівнянь виду $a\sin x+b\cos x=c$. Дане рівняння є окремим випадком лінійного [2,с.347].

5. Спосіб піднесення до квадрата.

Розв’яжемо рівняння

$$\sin x-\cos x=0$$

Розв’язання.

При піднесенні даного рівняння до квадрату, отримаємо:

$$(\sin x-\cos x)^2=0,$$

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=0,$$

$$1-\sin 2x=0,$$

$$\sin 2x=1,$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$$

У цьому разі піднесення до квадрату не спричиняє появу сторонніх коренів.

Порівнюючи розглянуті способи розв’язання рівнянь, неважко зробити висновок, що найменш раціональним є перший (алгебраїчний) спосіб, який призводить до появи сторонніх розв’язків і потребує перевірки [2,с.235-240].

6. Спосіб розв'язання тригонометричних рівнянь шляхом дослідження обох частин на екстремум.

Розв'яжемо рівняння

$$(4-\cos 2x)(2+3\sin y) = 12+13\sec^2 z$$

Розв'язання.

$$(4-\cos 2x)(2+3\sin y) = 12+13\sec^2 z$$

$$x, y \epsilon R, z \neq \frac{\pi}{2}+\pi p, p \epsilon Z.$$

Оцінимо значення виразів, що входить у дане рівняння

$$(4-\cos 2x)(2+3\sin y) = 12+13\sec^2 z$$

а) $4-\cos 2x \leq 5$

б) $2+3\sin y \leq 5$

в) $12+13\sec^2 z \geq 25$

Отже, рівність досягається у випадку, коли ліва і права частина рівняння дорівнюють по 25.

Маємо:

$$\left[\begin{array}{c} \cos 2x = -1 \\ \sin y = 1 \\ \sec^2 z = 1 \end{array}\right.$$

і

$$\left[\begin{array}{c} \cos 2x = -1 \\ \sin y = 1 \\ \left[\begin{array}{c} \sec z = 1 \\ \sec z = -1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

звідки

$$\left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2}+\pi k, k \epsilon Z \\ y = \frac{\pi}{2}+2\pi m, m \epsilon Z \\ \left[\begin{array}{c} z = 2\pi l, l \epsilon Z \\ z = \pi+2\pi n, n \epsilon Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}+\pi k, y = \frac{\pi}{2}+2\pi m,\ z = 2\pi l$ або $z = \pi+2\pi n, k, m, n, l\ \epsilon Z$

2.11. Графічні методи розв’язування тригонометричних рівнянь

Тригонометричні рівняння звичайно розв'язуються виключно *аналітичним* методом. Але дуже важливо і як засіб уникнення завдяки великій наочності багатьох помилок, і як засіб діставати в деяких випадках розв'язки, недоступні для аналітичного методу, застосування *графічного* методу з використанням обох способів геометричної інтерпретації тригонометричних функцій, тобто і тригонометричного круга, і графіків функцій в прямокутних координатах. В усякому разі корисно взяти за правило доводити до кінця розв'язування кожного тригонометричного рівняння, відмічаючи ті точки тригонометричного круга, в яких закінчуються шукані дуги, причому кожна точка круга вказує на нескінченну множину дуг, які закінчуються в ній.

Спосіб розв'язування тригонометричних рівнянь за графіками функцій є дуже корисним і цікавим.

Для розв’язання рівняння виду $F_1(x) = F_2(x)$, потрібно записати рівняння у вигляді $y = F_1(x)$ та $y = F_2(x)$. Побудувавши в одній системі координат графіки цих графіків, розв’язками рівняння будуть абсциси точок перетину графіків.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.

Розв’язати рівняння

$$\sin x - \cos x = 0$$

Розв’язання.

Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y = \sin x \text{ та } y = \cos x$$

Побудувавши в одній системі координат графіки цих графіків, знайдемо розв’язки рівняння як абсциси точок перетину графіків.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

Приклад 2.

Розв’язати рівняння

$$\cos 2x = 1 + \sin x$$

Розв’язання.

Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y = \cos 2x \text{ та } y = 1 + \sin x$$

Побудувавши в одній системі координат графіки цих графіків, знайдемо розв’язки рівняння як абсциси точок перетину графіків.

Відповідь: $x = k\pi, k \in Z.$

Графічний спосіб є досить наочним, але не зручність полягає в тому, що кожного разу (хоч і схематично) треба будувати графіки тригонометричних функцій.

2.12. Тригонометричні рівняння з параметрами

Розв’язання рівняння, що містить параметри, полягає в наступному: для кожної допустимої системи значень параметрів визначити множину всіх розв’язків даного рівняння. Таким чином, в процес розв’язання, в якості його складової частини, входить дослідження наступних питань: знаходження множини допустимих систем значень параметрів, визначення кількості розв’язків для кожної допустимої системи значень параметрів, встановлення тих систем значень параметрів, для яких застосовні отримані формули розв’язків. Дослідження всіх цих питань становить, як правило, значні труднощі нерідко доводиться розглядати нерівності і системи нерівностей, розв’язання яких перевищує можливості учнів середньої школи. З цієї причини в задачниках шкільного типу тригонометричні рівняння, що містять параметри, представлені лише невеликим числом прикладів. Ми вважаємо, що у шкільній практиці вчитель повинен обмежитися лише дуже малим числом рівнянь з параметрами, зате виконати розв’язки з належною повнотою, пам'ятаючи, що саме дослідження представляє найбільш цінну частину розв’язку з точки зору математичного розвитку учнів. Учитель повинен попередньо сам виконати розв’язки (з дослідженням) і переконатися в його доступності для учнів.

Розглянемо приклади розв'язування тригонометричних рівнянь з буквеними параметрами.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sin(x+\alpha)-\sin x=\sin\alpha \qquad (4)$$

відносно невідомого x

Розв’язання. Маємо:

$$\sin(x+\alpha)-\sin x-\sin\alpha=0,$$

$$2\sin\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2}-2\sin\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}=0,$$

$$\sin\frac{x+\alpha}{2}\left(\cos\frac{x+\alpha}{2}-\cos\frac{x-\alpha}{2}\right)=0,$$

звідки

$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x+\alpha}{2} = 0.$ (5)

Розглянемо два випадки.

а) Нехай $\alpha = 2k\pi$, де k – ціле число. Тоді $\frac{\alpha}{2} = k\pi$,$\sin\frac{\alpha}{2} = 0$і рівняння (5), а отже, і еквівалентне йому рівняння (4) справджуються при будь-якому значенні *x*.

б) Нехай $\alpha \neq 2k\pi$, де k – ціле число. Тоді $\frac{\alpha}{2} \neq k\pi$, $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$і з рівняння (5) виходить, що

$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x+\alpha}{2} = 0,$$

звідки

$$\sin\frac{x}{2} = 0 \text{ або } \sin\frac{x+\alpha}{2} = 0$$

і, отже,

$$x = 2n\pi \text{ і } x = 2n\pi - \alpha,$$

де *n* - будь-яке ціле число.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$\cos^2(x+\alpha) + \cos^2(x-\alpha) = \sin 2\alpha$ (6)

відносно невідомого *x*.

Р о з в ' я з а н н я . Дане рівняння перетворюємо так:

$$\frac{1+\cos(2x+2\alpha)}{2} + \frac{1+\cos(2x-2\alpha)}{2} = \sin 2\alpha,$$

$$\cos(2x+2\alpha) + \cos(2x-2\alpha) = -2(1-\sin 2\alpha),$$

$\cos 2\alpha \cos 2x = -(1-\sin 2\alpha)$ (7)

Розглянемо такі випадки.

а)Нехай $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k – ціле число. Тоді $2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ і рівняння (7) набирає вигляду

$$0 \cdot \cos 2x = 0.$$

Це рівняння, а отже, і рівняння (6) мають нескінченну множину розв'язків. Розв'язком є будь-яке число *x*.

б) Нехай $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, де k – ціле число. Тоді $2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ і рівняння (7) набирає вигляду

$$0 \cdot \cos 2x = -\,2.$$

Це рівняння, а отже, і рівняння (6) не мають розв'язків.

в) Нехай $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k – ціле число. Тоді $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\cos 2\alpha \neq 0$ і з рівняння (7) дістаємо:

$$\cos 2x = -\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha},$$

або, оскільки

$$\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

$$\cos 2x = \mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (8)$$

Рівняння (8) має розв'язки, якщо

$$-1 \leq \mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1,$$

звідки

$$-\frac{\pi}{4} + l\pi \leq \alpha - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + l\pi$$

і

$$l\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + l\pi,$$

де l – ціле число.

При цих значеннях α з рівняння (8) знаходимо:

$$x = n\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left[\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

де *n*- довільне ціле число.

Оскільки рівняння (8) еквівалентне рівнянню (6)лише при умові $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, то знайдені розв'язки рівняння (8) будуть коренями даного рівняння (4), якщо

$$l\pi \leq \alpha < \frac{\pi}{4} + l\pi \quad \text{і} \quad \frac{\pi}{4} + l\pi < \alpha \leq \frac{\pi}{2} + l\pi,$$

де l – ціле число.

Отже, якщо $k\pi \leq \alpha < \frac{\pi}{4} + k\pi$ або $\frac{\pi}{4} + k\pi < \alpha \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$, де k – ціле число, то $x = n\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left[\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$, де n - будь-яке ціле число; якщо $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k – будь-яке число, то x – будь-яке число. При всіх інших знаних α рівняння не має розв'язків.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(\alpha - x) = 2\operatorname{tg}\alpha$$

відносно невідомого x.

Розв’язання. Очевидно, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,, де k – ціле число.

Дане рівняння подамо у вигляді такого еквівалентного йому рівняння:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos x\cos(\alpha - x)} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (9)$$

Розглянемо два випадки.

а) Нехай $\alpha = k\pi$, де k – ціле число. Тоді $\sin\alpha = 0$рівняння (9) справджуватиметься при будь-яких значенняxx, при яких $\cos x \neq 0$ і $\cos(\alpha - x) \neq 0$.

Але $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$ і $\cos(\alpha - x) = 0$при $x = \frac{\pi}{2} + l\pi + k\pi = \frac{\pi}{2} + m\pi$, де m і l - цілі числа.

Отже, якщо $\alpha = k\pi$, то розв'язком рівняння (9) є будь-яке число, крім чисел $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$.

б) Нехай $\alpha \neq k\pi$ (і, крім того, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$), де k - ціле число. Тоді $\sin\alpha \neq 0$ і з рівняння (9) дістанемо:

$$2\cos x\cos(x - \alpha) = \cos\alpha,$$

або

$$\cos(2x - \alpha) + \cos\alpha = \cos\alpha$$

звідки

$$\cos(2x - \alpha) = 0$$

і

$$x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2},$$

де *n* - довільне ціле число.

Знайдені значення x будуть коренями рівняння (9), якщо $\cos x \neq 0$ і $\cos(\alpha - x) \neq 0$.

Доведемо, що при розглядуваних значеннях α і $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \cos x \neq 0$ і $\cos(\alpha - x) \neq 0$.

Справді, якби при $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ було б $\cos x = 0$, то

$$\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = s\pi + \frac{\pi}{2},$$

де *s* – ціле число. Тоді

$$\alpha = (2s - n)\pi + \frac{\pi}{2},$$

що суперечить умові $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Так само, якби при $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ було б $\cos(\alpha - x) = 0$, то

$$\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = s\pi + \frac{\pi}{2},$$

де *s* – ціле число. Тоді

$$\alpha = (n - 2s)\pi - \frac{\pi}{2},$$

що знов-таки суперечить умові $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Доведено, що при $\alpha \neq k\pi$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$формула $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ дає корені даного рівняння.

Отже, якщо $\alpha \neq k\pi$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, де *k* – ціле число, то $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$, де *n* - довільне ціле число; якщо ці $\alpha = k\pi$, де *k* – ціле число, то *x* – будь-яке число, крім чисел $\alpha = \frac{\pi}{2} + m\pi$, де m – довільне ціле число, і, нарешті, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, де *k* – ціле число, рівнянняне має розв'язків.

Приклад 4. Розв’язати рівняння

$$\alpha(\cos x - \sin x)^2 + b \cos 2x = 0$$

відносно невідомого x.

Розв'язання. Дане рівняння перетворюємо так:

$$\alpha(\cos x - \sin x)^2 + b(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)[(b-\alpha)\sin x + (b+\alpha)\cos x] = 0,$$

звідки

$$\cos x - \sin x = 0 \text{ або } (b-\alpha)\sin x + (b+\alpha)\cos x = 0.$$

Перше з цих рівнянь має такі корені: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k - довільне ціле число.

Розв'язуємо рівняння

$$(b-\alpha)\sin x + (b+\alpha)\cos x = 0.$$

Якщо $\alpha = b = 0$, то це рівняння справджується при ,будь-яких значеннях x.

Якщо $\alpha = b \neq 0$, то з останнього рівняння дістаємо:

$\cos x = 0$ і $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, де k - довільне ціле число.

Нарешті, якщо $\alpha \neq b$, то $\alpha - b \neq 0$ і

$$\operatorname{tg} x = \frac{b+\alpha}{b-\alpha},$$

звідки

$$x = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{b+\alpha}{b-\alpha},$$

де k – довільне ціле число.

Отже, залежно від значень a і b дане рівняння має такі розв'язки. Якщо $\alpha \neq b$, то $x = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{b+\alpha}{b-\alpha}$ і $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k — довільне ціле число; якщо $\alpha = b \neq 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ і $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k — довільне ціле число; якщо $\alpha = b = 0$, то x є будь-яке число.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$(a+1)\cos x - (a-1)\sin x = 2a$$

відносно невідомого x.

Розв’язання. У лівій частині рівняння $\cos x$ і $\sin x$виразимо через $\sin\frac{x}{2}$ і $\cos\frac{x}{2}$. Дістанемо:

$$(a+1)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)-2(a-1)\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2a\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right),$$

або

$$(3a+1)\sin^2\tfrac{x}{2}+2(a-1)\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}+(a-1)\cos^2\tfrac{x}{2}=0.\quad(10)$$

Розглянемо два випадки.

а) Нехай $a=-\frac{1}{3}$. Тоді рівняння (10) має вигляд

$$-\frac{8}{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{4}{3}\cos^2\frac{x}{2}=0,$$

або

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0,$$

звідки

$$\cos\frac{x}{2}=0 \text{ або } 2\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:

$$x=\pi+2k\pi \quad \text{і} \quad x=2k\pi-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

де k – довільне ціле число.

б) Нехай $a\neq-\frac{1}{3}$. Тоді $3a+1\neq 0$. Обидві частини рівняння (10) ділимо на $\cos^2\frac{x}{2}$. Дістанемо:

$$(3a+1)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2(a-1)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+(a-1)=0,$$

звідки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-a\pm\sqrt{2(1-a^2)}}{3a+1}\qquad(11)$$

Найпростіші рівняння (11)мають розв'язки, якщо

$$1-a^2\geq 0,$$

звідки

$$-1\leq a\leq 1.$$

Але $a\neq-\frac{1}{3}$. Тому

$$-1 \le a \le -\frac{1}{3} \text{ і } -\frac{1}{3} \le a \le 1.$$

При $a = -1$ і $a = 1$ $1 - a^2 = 0$і рівняння (11) будуть однаковими. Тому слід розглянути окремі випадки, коли $a = -1$ і $a = 1$.

При $a = -1$з (11) дістаємо: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$ і $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, де k – довільне ціле число.

При $a = 1$ з (11) дістаємо: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$ і $x = 2k\pi$, де k – довільне ціле число.

Якщо $-1 \le a \le -\frac{1}{3}$ або$-\frac{1}{3} \le a \le 1$, то рівняння (11) мають такі розв'язки:

$$x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1 - a \pm \sqrt{2(1 - a^2)}}{3a + 1},$$

де k – довільне ціле число.

Отже, якщо $a = 1$, то $x = 2k\pi$, де k – довільне ціле число; якщо $a = -1$, то $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, де k – довільне ціле число; якщо $a = -\frac{1}{3}$то $x = 2k\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$де k – довільне ціле число; якщо $-1 < a < -\frac{1}{3}$ або $-\frac{1}{3} < a < 1$, то $x = 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1-a\pm\sqrt{2(1-a^2)}}{3a+1}$, де k – довільне ціле число, і, нарешті, якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння не має розв'язків.

2.13. Системи тригонометричних рівнянь

Означення 1. Кілька рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \qquad (1)$$

де через $x_1, x_2, \dots, x_n$ позначені ті самі невідомі, називається *системою k рівнянь з n невідомими* $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Означення 2. Сукупність значень $x_1, x_2, \dots, x_n$, при яких ліва частина кожного з рівнянь системи (1) дорівнює його правій частині, називаються *розв'язком системи* (1).

Розв'язати систему рівнянь у даній числовій області – значить знайти всі її розв'язки, що належать цій області, або довести, що у цій області система рівнянь не має розв'язків.

Системами тригонометричних рівнянь звичайно прийнято називати такі системи, які утворено з рівнянь, що містять невідомі під знаками тригонометричних функцій, або з рівнянь з невідомими під знаками обернених тригонометричних функцій і алгебраїчних рівнянь відносно невідомих.

Для систем тригонометричних рівнянь, як і для будь-яких систем трансцендентних рівнянь, немає загальних методів точного аналітичного розв'язування їх. Отже, далі мова йтиме лише про окремі випадки таких систем, для яких вдається аналітично знайти їх розв'язки. В основному це стосується тих випадків, коли дану систему можна звести до системи алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо тригонометричних систем лише небагатьох типів і вкажемо найбільш споживані методи їх рішення, ґрунтуючись на загальній теорії систем рівнянь.

1. Системи виду

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = b. \end{cases} \qquad (2)$$

Додаючи і віднімаючи рівняння системи, отримуємо рівносильну систему

$$\begin{cases} \cos(x-y) = a+b, \\ \cos(x+y) = b-a. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3), а значить і система (2), має рішення в тому і лише у тому випадку, коли виконуються умови

$$|a+b| \le 1, |b-a| \le 1.$$

Якщо ці умови виконані, то

$$\begin{cases} x-y = \pm\arccos(a+b) + 2\pi k, \\ x+y = \pm\arccos(b-a) + 2\pi n, \end{cases} \qquad (4)$$

У формулах (4) k і n – будь – які цілі числа, а знаки вибираються, довільно. Таким чином, формули (4) визначають в загальному випадку чотири розв'язки. Вважаючи

$$\arccos(a+b)=\alpha, \arccos(b-a)=\beta,$$

отримуємо з (4)

$$\begin{cases} x-y=\alpha+2\pi k, \\ x+y=\beta+2\pi n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=-\alpha+2\pi k, \\ x+y=\beta+2\pi n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha+2\pi k, \\ x+y=-\beta+2\pi n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=-\alpha+2\pi k, \\ x+y=-\beta+2\pi n, \end{cases}$$

звідки знаходимо чотири пари розв'язки:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(n-k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(k+n), \\ y=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(n-k), \end{cases}$$

Аналогічно можна отримати розв'язок системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x\cos y=a, \\ \cos x\sin y=b. \end{cases} \qquad (5)$$

Приклад 1.Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \cos \pi x \cos \pi y = \dfrac{1}{4}, \\ \sin \pi x \sin \pi y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Розв’язання.

Праві і ліві частини рівнянь цієї останньої системи віднімемо і додамо. Матимемо:

$$\begin{cases} \cos \pi(x+y) = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos \pi(x-y) = 1, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \pi(x+y) = 2k\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}, \\ \pi(x-y) = 2n\pi, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x+y = 2k \pm \dfrac{2}{3}, \\ x-y = 2n, \end{cases}$$

де k і n – довільні цілі числа.

Далі, розв'язуючи дві системи лінійних рівнянь

$\begin{cases} x+y = 2k + \frac{2}{3}, \\ x-y = 2n, \end{cases}$ і $\begin{cases} x+y = 2k - \frac{2}{3}, \\ x-y = 2n, \end{cases}$

Знайдемо

$$x = k + n + \frac{1}{3}, \qquad y = k - n + \frac{1}{3}$$

і

$$x = k + n - \frac{1}{3}, \qquad y = k - n - \frac{1}{3}.$$

Зауваження. Слід звернути увагу на одну типову помилку, яку часто допускають учні (і що вступають до вузів) при вирішенні тригонометричних систем. Розглянемо для простоти викладу систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ \sin \pi y = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Дуже часто записують розв’язок у такому вигляді:

$x = n, y = n,$ де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (7)

Легко зрозуміти, що у формулах (7) містяться не всі розв'язки системи (6).

Для більшої наочності кожній парі чисел $(x_0; y_0)$, які складають розв'язок системи (6), поставимо у відповідність точку $\mathrm{M}(x_0; y_0)$площини *xOy.* Тоді у формулах (7) містяться лише такі рішення системи (6) яким відповідають точки (0, 0), (1, 1), (-1, -1) і т. д., тобто крапки з цілими координатами, лежачі на прямій у = *x.* Але початковій системі задовольняють всі можливі пари цілих чисел, які відповідають точкам перетину координатних ліній *x = 0, x=1, x=*.-1... і *y = 0, y= 1*, *y* = -1,…

Таким чином, розв'язок системи (6) слід записувати у вигляді:

x = n, *y = k,* де *n* = 0 ±1, ±2,…, *k = 0* ±l, ±2,..., тобто *n* і *k* «пробігають» (незалежно один від одного) всі цілі значення.

Системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b, ab \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

а також системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = b, ab \neq 0 \end{cases}$$

зводяться до систем вигляду (1). Наприклад, система (8), через умову $ab \neq 0$, рівносильна системі

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = \dfrac{a}{b}, ab \neq 0 \end{cases}$$

До систем вигляду (5) зводяться системи

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = b, ab \neq 0 \end{cases}$$

2. Системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b, \end{cases} \quad (9)$$

зводяться заміною невідомих $u = \sin x, v = \sin y$до алгебраїчної системи

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^2 + v^2 = b. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) рівносильна системі

$$\begin{cases} u + v = a, \\ uv = \dfrac{a^2 - b}{2}. \end{cases}$$

і має розв'язок (t_1, t_2), (t_2, t_1), де

$$t_1 = \frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}, t_2 = \frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2} \qquad (11)$$

Оскільки $u = \sin x, v = \sin y$, то система (20) має розв'язок в тому лише випадку, якщо виконуються умови:

а) $b \geq \frac{a^2}{2}$;

б) $|t_1| \leq 1, |t_2| \leq 1$

Якщо ці умови виконуються, то розв'язку (t_1, t_2)системи (10) відповідають рівняння $\sin x = t_1, \sin y = t_2$звідки

$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin t_1 + \pi n, \\ y = (-1)^k \arcsin t_2 + \pi k, \end{cases} \qquad (12)$$

де t_1 і t_2визначаються формулами (11).

Аналогічно, розв'язку (t_2, t_1)системи (10) відповідає наступна пара розв'язків початкової системи (9):

$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin t_2 + \pi n, \\ y = (-1)^k \arcsin t_1 + \pi k, \end{cases} \qquad (13)$$

(якщо $t_1 = t_2$, і $|t_1| \leq 1$, тобто $a^2 = 2b$ і $|a| \leq 2$, то пари розв'язків (12) і (13) співпадають).

До систем вигляду (9) зводяться системи

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = b, \end{cases}$$

Дійсно, якщо в другому рівнянні замінити$\cos^2 x$ і $\cos^2 y$ відповідно на $1 - \sin^2 x$ і $1 - \sin^2 y$, то отримаємо рівносильну систему

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 2 - b, \end{cases}$$

Аналогічно можна отримати розв'язок наступних систем:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b, \end{cases}$$

Ще простіше знайти розв'язок систем вигляду

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = b \end{cases}$$

І інших подібних систем. Дійсно, якщо $a \neq 0$, то ця система рівносильна системі

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin x - \sin y = \dfrac{b}{a}, \end{cases}$$

з якої легко знайти sin$x$ і sin$y$.

3. Системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \quad x + y = \alpha. \end{cases} \qquad (14)$$

Використовуючи формулу для суми синусів, запишемо перше рівняння системи (14) у вигляді

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$$

Оскільки $x + y = \alpha$,то початкова система рівносильна системі

$$\begin{cases} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a, \\ \quad x + y = \alpha \end{cases} \qquad (15)$$

Розглянемо два можливі випадки:

а) $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$(тобто $\alpha = 2\pi m$)

Тоді $y = 2\pi m - x$ (m - деяке ціле число), і з першого рівняння системи (14) отримуємо

$\sin x - \sin x = a$,тобто $a = 0$.

Отже, якщо $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$, то система можна розв'язати лише при $a = 0$ і зводиться до одного рівняння $x + y = \alpha$.

б)$\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$

Тодісистема (15) рівносильна системі

$$\begin{cases} \cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \\ \quad x + y = \alpha \end{cases} \qquad (16)$$

Якщо виконана умова

$$\left|\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \le 1, \qquad (17)$$

то з (16) отримаємо

$$\begin{cases} x - y = \pm 2\arccos\left(\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) + 4\pi n \\ x + y = \alpha, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} \pm \arccos\left(\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) + 2\pi n \\ y = \dfrac{\alpha}{2} \mp \arccos\left(\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) - 2\pi n \end{cases}$$

Якщо умова (17). не виконується, тобто $\left|\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right| > 1$, тосистема (14) розв'язків не має.

Аналогічно вирішуються системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = a, \\ x \pm y = \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a, \\ x \pm y = \alpha. \end{cases}$$

Досистеми вигляду (14) зводиться система

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = a, \\ x + y = \alpha. \end{cases}$$

Дійсно, вважаючи $\frac{\pi}{2} - y = t$отримаємо систему

$$\begin{cases} \sin x + \sin t = a \\ x - t = \alpha - \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Аналогічно можна розв'язати системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x \pm \cos y = a, \\ x \pm y = \alpha. \end{cases}$$

4. Системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ x + y = \alpha \end{cases} \qquad (18)$$

Цю систему замінимо наступною рівносильною системою:

$$\begin{cases}\cos(x-y)-\cos(x+y)=2a,\\ x+y=\alpha,\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}\cos(x-y)=2a+\cos\alpha\\ x+y=\alpha,\end{cases} \qquad (19)$$

Якщо | $2a+\cos\alpha$ | > 1, то система (19), а разом з нею і система (18), має рішення, причому

$$\begin{cases}x=\dfrac{\alpha}{2}\pm\dfrac{1}{2}\arccos(2a+\cos\alpha)+\pi n,\\ y=\dfrac{\alpha}{2}\mp\dfrac{1}{2}\arccos(2a+\cos\alpha)-\pi n\end{cases}$$

Аналогічно можна знайти розв'язки систем

$$\begin{cases}\cos x\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x-y=-30°,\\ \sin x\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\end{cases}$$

Розв'язання. Друге рівняння перетворюємо так:

$$\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

У це рівняння підставляємо значення $x-y$з першого рівняння. Дістанемо:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

звідки

$$\cos(x+y)=0$$

$$x+y=90°+180°k,$$

де k – довільне ціле число.

Дана система рівнянь еквівалентна системі двох лінійних рівнянь з параметром k:

$$\begin{cases} x + y = 180°k + 90°, \\ x - y = -30°, \end{cases}$$

звідки

$$x = 90°k + 30° \quad \text{і} \quad y = 90°k + 60°.$$

5. Системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \cos x \cos y = b, b \neq 0. \end{cases} \qquad (20)$$

Поділивши перше рівняння системи (31) на друге, отримуємо

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b} \qquad (21)$$

Рівняння (21) разом з другим (або першим) рівнянням системи (20) утворюють систему, рівносильну початковій.

З (21) знаходимо $x = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} + \pi n$, і, підставляючи в друге рівняння системи (20), отримуємо

$$\cos y = \frac{b}{\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b} + \pi n\right)}$$

Позначимо $\operatorname{arctg}\frac{a}{b} = \varphi$. Оскільки $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi > 0$. Нехай для визначеності $b > 0$. Тоді $\cos\varphi = \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ і $\cos y = (-1)^n\sqrt{a^2+b^2}$. Якщо $a^2 + b^2 \leq 1$, то $y = \pm\arccos\left[(-1)^n\sqrt{a^2+b^2}\right] + 2\pi k$.Отже, якщо $b \neq 0$і $a^2 + b^2 \leq 1$, то система (20) має наступні розв'язки ($b > 0$): $x = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} + \pi n, y = \pm\arccos\left[(-1)^n\sqrt{a^2+b^2}\right] + 2\pi k$.

Метод розв'язання системи (20) можна застосувати і до системи вигляду

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \sin x \sin y = b. \end{cases}$$

До систем вигляду (20) зводяться наступні системи:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b, \end{cases} \qquad (22)$$

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = a, \\ \cos x \pm \cos y = b, \end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x+\cos y=a,\\ \cos x+\sin y=b.\end{cases} (23)$$

Припускатимемо, що$ab\neq 0$.

Розглянемо систему (22). Ця система рівносильна наступній:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a}{2}\\ \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{b}{2}'\end{cases}$$

Вважаючи $\frac{x+y}{2}=u$,$\frac{x-y}{2}=v$, отримаємо систему вигляду (20):

$$\begin{cases}\sin u\cos v=\dfrac{a}{2},\\ \cos u\cos v=\dfrac{b}{2}.\end{cases}$$

Аналогічно, розглядається система (23).

Приклад 3.Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\cos\pi x-\cos\pi y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\pi x-\sin\pi y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{cases}-2\sin\dfrac{\pi x+\pi y}{2}\sin\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 2\cos\dfrac{\pi x+\pi y}{2}\sin\dfrac{\pi x-\pi y}{2}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Ділимо обидві частини першого рівняння на відповідні частини другого рівняння. Дістаємо:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x+\pi y}{2}=\sqrt{3},$$

звідки

$$\frac{\pi x+\pi y}{2}=k\pi+\frac{\pi}{3},$$

де *k* – довільне ціле число.

Розглянемо тепер два випадки, коли *k*= 2*n* і коли *k*= 2*n* + 1, де *k* – довільне ціле число.

а) Нехай $k = 2n$. Тоді рівняння $\frac{\pi x+\pi y}{2} = k\pi + \frac{\pi}{3}$, має вигляд

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}.$$

Підставляємо значення $\frac{\pi x+\pi y}{2}$з рівняння, наприклад, у рівняння $2\cos\frac{\pi x+\pi y}{2}\sin\frac{\pi x-\pi y}{2} = \frac{1}{2}$. Дістанемо:

$2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x-\pi y}{2} = \frac{1}{2}$,або $\sin\frac{\pi x-\pi y}{2} = \frac{1}{2}$,

звідки

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = l\pi + (-1)^l\frac{\pi}{6},$$

де l – довільне ціле число.

Нехай $l = 2m$, де m – довільне ціле число. Тоді з рівняння $\frac{\pi x-\pi y}{2} = l\pi + (-1)^l\frac{\pi}{6}$ дістаємо: $\frac{\pi x-\pi y}{2} = 2m\pi + \frac{\pi}{6}$.

Із цього рівняння і рівняння $\frac{\pi x+\pi y}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ утворюємо систему рівнянь. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{\pi x + \pi y}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = 2m\pi + \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Праві і ліві частини рівнянь цієї системи додамо і віднімемо. Дістанемо:

$$\begin{cases} \pi x = 2(n+m)\pi + \frac{\pi}{2}, \\ \pi y = 2(n-m)\pi + \frac{\pi}{6}, \end{cases}$$

звідки

$$x = 2(n+m) + \frac{1}{2} \text{ і } \quad y = 2(n-m) + \frac{1}{6},$$

де n і m – довільні цілі числа.

Нехай тепер $l = 2m + 1$, де m – довільне ціле число. Тоді з рівняння $\frac{\pi x-\pi y}{2} = l\pi + (-1)^l\frac{\pi}{6}$ дістаємо:

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = 2m\pi + \frac{5\pi}{6}.$$

Із цього рівняння і рівняння $\frac{\pi x+\pi y}{2}=2n\pi+\frac{\pi}{3}$ утворюємо систему рівнянь. Маємо:

$$\begin{cases}\dfrac{\pi x+\pi y}{2}=2n\pi+\dfrac{\pi}{3},\\ \dfrac{\pi x-\pi y}{2}=2m\pi+\dfrac{5\pi}{6},\end{cases}$$

звідки після додавання і віднімання правих і лівих частин рівнянь цієї системи знаходимо:

$$\begin{cases}\pi x=2(n+m)\pi+\dfrac{7\pi}{6},\\ \pi y=2(n-m)-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Отже,

$$x=2(n+m)+\frac{7}{6}\text{ і }\ y=2(n-m)-\frac{1}{2},$$

де n і m – довільні цілі числа.

б) Нехай $k=2n+1$. Тоді рівняння $\frac{\pi x+\pi y}{2}=k\pi+\frac{\pi}{3}$ має вигляд

$$\frac{\pi x+\pi y}{2}=2n\pi+\frac{4\pi}{3}.$$

Далі робимо так само, як і в попередньому випадку. Зрештою знайдемо ще і такі розв'язки даної системи:

$$x=2(n+m)+\frac{7}{6}\text{ і }\ y=2(n-m)+\frac{3}{2},$$

і

$$x=2(n+m)+\frac{5}{2}\text{ і }\ y=2(n-m)+\frac{1}{6},$$

де n і m – довільні цілі числа.

6. Системи вигляду

$$\begin{cases}a_1\sin x+b_1\sin y=c_{1,}\\ a_2\cos x+b_2\cos y000=c_{2,}\end{cases}(24)$$

є більш загальними, ніж системи (22). Викладений в пункт 5 метод розв’язання систем (22) в загальному випадку непридатний для розв’язання систем (24) [8].

Відмітимо спочатку, що система легко розв'язується, якщо будь-яке з чисел a_1, a_2, b_1, b_2рівне нулю. Нехай, наприклад, $a_1 = 0$. Тоді з першого рівняння знаходимо

$$\sin y = \frac{c_1}{b_1}$$

а потім з другого знаходимо $\cos x$.

Хай тепер $a_1 a_2 b_1 b_2 \neq 0$. Систему (24) природно розв'язувати методом виключення одного з невідомих, наприклад *x.* З цією метою замінимо систему (24) наступною рівносильною системою:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} \sin y \\ \cos x = \frac{c_2}{a_2} - \frac{b_2}{a_2} \cos y\,. \end{cases} \qquad (25)$$

Зводячи рівняння системи (25) в квадрат і складаючи, отримуємо рівняння вигляду

$$a \cos y + b \sin y + c \sin^2 y = d. \qquad (26)$$

Рівняння (26) підстановкою $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = t$зводиться до рівняння

вигляду

$$a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 = 0.$$

Таким чином, в загальному випадку знаходження розв'язку системи (24), не дивлячись на простоту цієї системи, є дуже важким завданням.

Якщо ж одне з чисел c_1, c_2рівне нулю, то в рівнянні (26) або а = 0, або b = *0,* і, отже, рівняння (26) зводиться до квадратного відносно $\sin y$ або $\cos y$.

Знаходячи $\sin y$(або $\cos y$) і підставляючи знайдене значення в систему (26), ми знайдемо з цієї системи $\sin y$ або $\cos y$.

Звернемо увагу на те , що рівняння (25) разом з одним з рівнянь системи (25) утворюють систему, що є наслідком початкової системи. Тому можлива поява стороннього коріння, яке виявляється перевіркою (підстановкою в початкову систему (24)).

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin y = 5\sin x & (27) \\ 3\cos x + \cos y = 2. & (28) \end{cases}$$

Розв'язання.

Виключимо з системи *y*. З цією метою друге рівняння запишемо у вигляді

$$\cos y = 2 - 3\cos x \tag{29}$$

а потім, звівши рівняння (27) і (29) в квадрат і складаючи, отримуємо

$$1 = 25\sin^2 x + 4 - 12\cos x + 9\cos^2 x,$$

$$16\cos^2 x + 12\cos x - 28 = 0 \qquad (30)$$

звідки $\cos x = 1,\ x = 2\pi n;\ \ \cos x = -\frac{7}{4}$ (немає коріння). З (28) знаходимо, $\cos y = -1,\ y = (2k+1)\pi$.Отже, система (28), (30), що є наслідком початкової системи, має наступні розв'язки:

$$x = 2\pi n, y = (2k+1)\pi.$$

Ці розв'язки задовольняють і початкову систему (27) (28).

Розглянемо ще декілька прикладів знаходження розв'язку тригонометричних систем.

2.14.Схема розв'язування тригонометричних рівнянь

Схема розв'язування тригонометричних рівнянь:

1. Намагаємося всі тригонометричні функції звести до одного аргументу;
2. Якщо не вдалося, намагаємося звести всі тригонометричні вирази до однієї тригонометричної функції;
3. Якщо до одного аргументу звести вдалося, а до однієї функції – ні, то пробуємо звести рівняння до однорідного;
4. В інших випадках всі члени рівняння в одну сторону і намагаємося дістати добуток або використовуємо спеціальні прийоми розв'язування.

Якщо в тригонометричне рівняння входить $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$, дріб, корінь парного степеня, то розв'язання рівняння починаємо з області визначення і слідкуємо за рівносильністю перетворень або використовуємо рівняння – наслідки. У такому випадку потрібна перевірка.

Розглянемо застосування даної схеми.

Приклад 1. Розв’язати рівняння

$$\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0.$$

Розв’язання. Зведемо дане рівняння до однієї тригонометричної функції, поділивши праву і ліву частини рівняння на $\cos^2 x$. Отримаємо:

$$\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 4 = 0,$$

розв’язавши дане рівняння, як квадратне відносно $\operatorname{tg} x$, отримаємо два розв’язки:

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ і } \operatorname{tg} x = -4,$$

звідки

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ і } x = k\pi - \operatorname{arctg} 4,$$

де k – довільне ціле число.

Приклад 2.Розв’язати рівняння

$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}.$$

Розв’язання. Ділимо обидві частини цього рівняння на 3. Дістанемо:

$$\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

або

$$\sin x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

помножимо дане рівняння на $\cos\frac{\pi}{6}$:

$$\sin x\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{6},$$

використовуючи формулу віднімання $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ будемо мати:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

звідки

$$x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6},$$

де k – довільне ціле число.

Приклад 3. Розв’язати рівняння

$$\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$$

Розв’язання.

$$\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, x \neq \pi k, k, m \in Z$$

Враховуючи, що $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, маємо

$$\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg} x} = 0$$

звідки

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0 \qquad \text{і} \qquad \operatorname{tg} x \neq 0, x \neq \pi l, l \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = 1, \operatorname{tg} x = 2$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, n, k \in Z$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, n, k \in Z$.

ВИСНОВКИ

Аналіз психолого-педагогічної та науково-методичної літератури показав, що методичні розробки по навчанню учнів потребують подальшої розробки з врахуванням змін, які відбуваються в сучасній школі.

У першому розділі викладені педагогічні засади і педагогічні погляди на вивчення «Тригонометричні рівняння».

В другому розділі було розглянуто методику навчання учнів розв’язувати тригонометричні рівняння. В процесі роботи булопроаналізовано різні способирозв’язування тригонометричних рівнянь,а саме:

- спосіб зведення до однієї тригонометричної функції (алгебраїчний метод);
- спосіб розкладання на множники;
- спосіб розв’язання однорідних рівнянь;
- спосіб введення допоміжного аргументу;
- спосіб піднесення до квадрата;
- спосіб розв’язання тригонометричних рівнянь шляхом дослідження обох частин на екстремум;
- графічний метод розв’язування тригонометричних рівнянь.

В бакалаврській роботі розглянута велика кількість різних прикладів розв’язання тригонометричних рівнянь та їх систем. Це дасть змогу ґрунтовно вивчити порушені питання. Увесь матеріал роботи можна використовувати на заняттях, в позакласній роботі і для індивідуальних завдань учнів. Робота містить багато методичних рекомендацій для вчителів і буде корисною, особливо, для вчителів, учнів та студентів педагогічних закладів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. Посібник / Г.П. Бевз. – К: Вища школа, 1989. – 366 с.

2. Брадіс В.М. Методика викладання математики в середній школі /Под ред. О.І.Маркушевича. Пер з 3–го рос. вид. Учбовий посібник для пед. Ін.-в та держ.ун-в. Вид 2-ге. К.: Рада школи.1954.– 483с.

3. Вороний О. М. Вибрані задачі шкільної математики / О. М. Вороний. – Кіровоград, 2004. – 232 с.

4. Груденов Я. И. Психолого – дидактические основи методики обучения математике / Я. И. Груденов. – М: Педагогика, 1987. – 159с.

5. Істер О.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики - 11 клас / О.С. Істер, О.І. Глобін, І.Є. Панкратова – К.: Центр навч.-метод. літератури,2011. – 112с.

6. Коваль В. В. Загальна методика викладання математики: Курс лекцій, практичні заняття, навчально -методичний посібник для студентів / В. В. Коваль, О. В. Крайчук, Г. Я. Клекоць. – Рівне, 2000. – 110с.

7. Збірник задач з математики для вступників до вузу / В.К. Єгерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемський та ін.; За ред. М.Л. Сканаві / Пер. з рос.: Є.В. Бондарчук, Ю.Ю. Костриця, Л.П. Оніщенко. – К.: Вища школа, 1994. – 445 с.

8. Кованцова Л. В. Тригонометрія / Л. В. Кованцова, І. Г. Малишев. – Київ: Вища школа, 1975. – 308 с.

9. Колесникова Л. В. Майстер-тест. Алгебра і початки аналізу 10 [Текст] : зошит для тестування / Л. В. Колесникова, Т. Г. Сердюкова. — К. : Видавництво «Майстер-клас», 2007-2008. — 104 с.

10. Корнієнко Т. Л. Алгебра і початки аналізу 10 клас. Профільний рівень Розробки уроків / Т. Л. Корнієнко, В. І. Фіготіна. – Харків: Ранок, 2011. – 496с. – (Профільна школа).

11. Математика у школах України. – №8. – С. 308.

12. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв'язувати задачі // А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір - К.: Генеза,2008. – 312с.

13. Новоселов С.И. Руководство по преподаванию тригонометрии. Пособие для учителей / С.И. Новоселов. – М: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1958. – 184с.

14. Сільвестрова І. А. Навчаємось розв’язувати рівняння і нерівності / І. А. Сільвестрова, М. С. Фурман – Х: Основа, 2005.- 271с.

15. Слепкань З. І. Методика навчання математики: Підручник для студ.мат.спец.вищ.пед.навч.зак. / З. І. Слепкань. – К: Вища школа, 2006. – 582с.

16. Шиманський Р. І. Тригонометрія. Посібник для вчителів / Р. І. Шиманський. – К: Радянська школа, 1961. – 208 с

17. Шкіль М.І. та інші. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 – 11 класів середніх закладів освіти / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак – ЕКО, 1998. – 608с.

18. Історія тригонометрії в формулах і аксіомах [Електронний ресурс]. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: http://reflist.su/besplatno/referat_qqqqwz/.