Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:
ЗНО з математики: порівняльний аналіз

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,
групи М-М-П-21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Гуранець Наталія Анатоліївна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри математики
з методикою викладання
Генсіцька-Антонюк Наталія Олександрівна

Рецензент: канд. техн. наук, доц. кафедри вищої
математики РДГУ
Присяжнюк Ігор Михайлович

Рівне – 2020 року

ЗМІСТ

Вступ……………………………………………………………………………3

Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ З МАТЕМАТИКИ

1.1. Досвід проведення ЗНО з математики в Україні……………………………..7

1.2. Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики …………..13

1.3. Структура та зміст сертифікаційної роботи з математики…………………20

1.4. Критерії оцінювання відкритих завдань з розгорнутою відповіддю……….29

1.5. Порівняльна характеристика сертифікаційних робіт ЗНО з математики за 2006, 2012 та 2018 роки…………………………………………………………….32

Висновки до 1 розділу………………………………………………………….36

Розділ 2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ ТЕСТІВ ЗНО З МАТЕМАТИКИ ЗА 2006, 2012 ТА 2018 РОКИ

2.1. Числа і вирази…………………………………………………………………38

2.2. Функції та їх графіки…………………………………………………………..43

2.3. Рівняння та системи рівнянь…………………………………………………51

2.4. Нерівності та системи нерівностей…………………………………………...58

2.5. Текстові задачі…………………………………………………………………62

2.6. Елементи математичного аналізу……………………………………………65

2.7. Планіметрія……………………………………………………………………70

2.8. Стереометрія…………………………………………………………………...80

2.9. Координати і вектори…………………………………………………………89

2.10. Елементи статистики…………………………………………………………91

Висновки до 2 розділу…………………………………………………………94

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ…………………………………………………………96

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……………….….……..…………98

ДОДАТКИ……………………………….……………………………………..104

ВСТУП

Актуальність проблеми. В умовах сучасної освітньої моделі в Україні одним із основних елементів перевірки якості освіти є зовнішнє незалежне оцінювання (надалі — ЗНО). Це одна з найпоширеніших у світі та ефективних систем моніторингу навчальних успіхів учнів, що дає змогу організувати як підсумкову атестацію в школах, так і відбір студентів для ВНЗ.

Завданням ЗНО як складової забезпечення ефективності системи освіти є виконання трьох функцій: об'єктивного вимірювання навчальних досягнень випускників загальноосвітніх навчальних закладів; оптимізації відбору абітурієнтів до ВНЗ на основі ефективних, демократичних і прозорих процедур; моніторингу якості освіти на національному рівні.

Технологія організації та проведення ЗНО подібна в усіх країнах, а найбільші відмінності полягають лише в самому змісті тестів. В умовах сучасної освіти Україна намагається виробити власну модель зовнішнього незалежного оцінювання. Запровадження процесу ЗНО спонукає фахівців у галузі освіти досліджувати цей процес[58].

Сьогодні освітяни, вивчаючи досвід тестування в інших країнах, розробляють свою структуру проведення підбиття підсумків навчання у випускників середніх навчальних закладів.

Необхідність введення зовнішнього незалежного оцінювання як складової української освіти розглядали такі українські науковці: В. Темненков, Л. Гриневич, Ю. Ковальчук, О. Ляшенко, та ін [50].

У науково-педагогічній літературі проблема запровадження моніторингових досліджень, у тому числі освітньої перевірки як одного з основних засобів визначення її якості, активно розглядалась зарубіжними та українськими вченими. Серед яких варто відзначити І. Аннєнкову, Л. Бабинець, С. Шишова, А. Вілохіну, А. Ісаєву, Т. Краснову, Н. Максимчук, Дж. Уілмс, В. Кальней, Л. Мойсеєву, Г. Сігеєву, М. Поташник [69].

Т. Вакуленко, В. Горох, А. Забуліоніс, А. Миляник, С. Раков досліджували світовий досвід проведення стандартизованих зовнішніх оцінювань з огляду на перспективу створення власної системи дослідження якості освіти в Україні [50].

Питання підготовки і проведення ЗНО розглядали у своїх роботах такі відомі фахівці, як Н.В. Бєскова, Т.Г. Гільберг, Н.В. Муніч, О.М. Топузов, О.Є. Шматько та ін. У працях науковців досить конкретно висвітлені завдання тестових технологій та характеристика тестів, які використовуються на даному етапі становлення освітньої системи [52]. Аналіз завдань тестів різних років з математики, які пропонуються учасникам зовнішнього незалежного оцінювання, дозволяє зробити висновок, що з року в рік вони все більше задовольняють вимоги вітчизняного Державного стандарту загальної середньої освіти щодо рівня освітньої підготовки учнів у галузі «Математика». В останні роки завдання ЗНО дають можливість перевірити в учасників не тільки знання, але й сформованість більшості предметних компетентностей, на формування яких і спрямована сучасна система освіти [19].

Проте освітні технології з часом змінюються, внаслідок чого їх окремі складові потребують удосконалення. Це стосується і методики перевірки навчальних досягнень учнів, зокрема і зовнішнього незалежного оцінювання знань із математики. Наявність не доопрацьованих аспектів даного питання та недостатнє вивчення з боку науковців і зумовили вибір теми магістерської роботи **«ЗНО з математики: порівняльний аналіз».**

Об’єкт дослідження: процес викладання математики в шкільному курсі.

Предмет дослідження: завдання тестів ЗНО з математики 2006, 2012 та 2018 років.

Гіпотеза нашого дослідження полягає в тому, що зміни структури та наповнення сертифікаційної роботи ЗНО з математики сприяють отриманню кращих результатів серед абітурієнтів при складанні тесту.

Мета: передбачає наукове вивчення і системний аналіз педагогічної та наукової літератури з питань зовнішнього незалежного оцінювання та розкриття методики виконання завдань з математики різної форми та рівнів складності.

Відповідно до мети визначені такі **завдання дослідження:**

1. Ознайомитись із науково-мотодичною літературою з теми дослідження
2. Проаналізувати основні аспекти запровадження зовнішнього незалежного оцінювання з математики в Україні
3. Розкрити та порівняти особливості сертифікаційних робіт з математики за 2006, 2012 та 2018 роки
4. Обґрунтувати методику виконання завдань тесту ЗНО з математики 2006, 2012 та 2018 років

Для виконання поставлених завдань було використано такі **методи**:

- ✓ системний аналіз психологічної, педагогічної, наукової літератури, навчально-методичної документації з питань ЗНО;
- ✓ вивчення педагогічного досвіду;
- ✓ порівняння сертифікаційних робіт різних років;
- ✓ класифікація завдань за темами;
- ✓ узагальнення отриманих відомостей

Теоретична значущість дослідження полягає у тому, що на основі вивчення багатьох науково-методичних джерел детально досліджено структуру тестів ЗНО з математики різних років, розкрито методику виконання завдань, які відрізняються за формою та рівнем складності, що стане в нагоді для всіх абітурієнтів, котрі складатимуть зовнішнє незалежне оцінювання з математики. Це забезпечить їм більш ґрунтовну підготовку до складання тесту і, відповідно, вищі рейтингові бали.

Практична значущість дослідження : результати магістерського дослідження можуть бути використані для розробки курсу лекцій, практичних та семінарських занять з «Елементарної математики», «Практикуму з розв'язування математичних задач» для студентів педагогічних навчальних закладів. Розроблені практичні рекомендації можуть стати в нагоді для творчого використання під час підготовки учнів до ДПА та ЗНО з математики.

Апробація дослідження здійснювалась на лекційних і семінарських заняття з «Елементарної математики», «Практикуму з розв'язування математичних задач». Результати дослідження доповідались на XIII Міжнародній науково-практичній конференції здобувачів освіти «Наука, освіта, суспільство очима молодих» і розкриті у статті «Типові помилки абітурієнтів при розв'язуванні деяких видів рівнянь і нерівностей під час проходження ЗНО з математики».

Структура та обсяг роботи: робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що включає 76 найменувань, додатків. Загальний обсяг роботи 108 сторінок комп'ютерного тексту.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ З МАТЕМАТИКИ

1.1. Досвід проведення ЗНО з математики в Україні

Зовнішнє незалежне оцінювання — сукупність тестувальних процедур спрямованих на визначення рівня навчальних досягнень випускників шкільних при їхньому вступі до ВНЗ. ЗНО пройшло довгий шлях становлення аби набути того вигляду, який воно має на сьогодні. Початок 1993 року ознаменувався спробою створити перші тестування в українських школах, але, на жаль, вона виявилася невдалою. Наступне десятиліття ця ідея була відкладеною на полицю. Про неї згадали аж 2002 року, коли провели 200 пілотних тестувань, у котрих брали участь студенти перших курсів кількох ВУЗів України. Друга спроба виявилась більш успішною і це ознаменувало початок історії ЗНО [24].

Перше тестування з математики та історії у 2003 році склали 3 тис. випускників ЗОШ зі всієї України, а 4 ВНЗ врахували отримані абітурієнтами бали як результати вступних тестів. Наступного року число, тих хто хотів пройти тестування збільшилося на тисячу. Натомість, вищі навчальні заклади прийняли наказ враховувати отримані бали за зовнішнє незалежне оцінювання при вступі.

Президентом В. Ющенком 2005 року було видано наказ МОН України виконати перехід до організації вступу у ВНЗ через проходження ЗНО протягом 2005─2006 років. У грудні цього ж року Кабінетом Міністрів було створено Український центр оцінювання якості освіти і на офіційному рівні дозволено абітурієнтам здійснювати вступ до вищих навчальних закладів на основі результатів. Наслідок такого рішення залишив слів на всіх тогочасних випускниках [31].

2006 рік можна по-праву вважати офіційним роком народження незалежного тестування, оскільки у Державному бюджеті України вперше були передбачені фінанси для його запровадження і моніторингу освіти. Починає свою діяльність Український центр якості освіти, створюється 9 його регіональних центрів. Проводиться тестування 41 818 випускників, де були задіяні 6 300 інструкторів та 700 екзаменаторів.

У 2007 році всі освітні заклади, підпорядковані Міністерству освіти, зараховували абітурієнтів за сертифікатами ЗНО. Тестування проводилося лише з української мови, математики, історії. ЗНО з хімії, біології, фізики проводилося лише для випускників шкіл Харківської області. Першого червня 2007 р. всі учасники тестування отримали сертифікати з результатами в індивідуальних конвертах. Для одного учасника середня вартість тестування з розрахунку на один предмет становила 38,5 гривень [24].

Після приходу І. Вакарчука на посаду міністра освіти українська мова стала єдиною мовою, якою можна було складати ЗНО. Тим, хто навчався мовами інших національних меншин, були видані словники з перекладами термінів українською мовою. Це викликало обурення в учнів нацменшин, зокрема угорців і росіян. У Криму пройшли масові протести за право складати тест російською. Голова Верховної Ради Криму А.Гриценко відправив листа до Міністерства освіти України з вимогою задовольнити бажання протестуючих, адже більше 95% кримських школярів навчаються саме російською мовою. Рішення було прийняте і у 2008 році тести переклали вищезазначеними мовами.

1 листопада 2008 року оголосили перелік сертифікатів ЗНО, потрібних для вступу на окремі спеціальності. Кількість предметів була скорочена до восьми, скасувавши тест зі всесвітньої історії, зарубіжної літератури, основ економіки й основ правознавства. Натомість було введено тести на складання іноземних мов: німецьку, англійську, французьку, іспанську. Випускники могли вибрати для складання вже не три, а п’ять предметів. Тестування з української мови та літератури залишалося обов’язковим для вступу на всі напрями [26].

З 2009 року подання заяв до ВНЗ можна було відслідковувати он-лайн на сайті vstup.info. Також залишилась можливість складати тести мовами шести нацменшин України, а підготовчі курси більше не дають можливості позаконкурсного вступу для їх учасників. У 2009 р. використовувалася традиційна інформаційна схема супроводу учасника в пункті тестування:

1) персональне запрошення;

2) алфавітні списки учасників зовнішнього оцінювання, що розміщувалися на вході до пункту тестування;

3) аудиторний список учасників, що розміщувався на вході до аудиторії тестування;

4) аудиторний протокол проведення зовнішнього оцінювання;

5) індивідуальна паперова інформаційна наліпка на робочому місці учасника, де були зазначені номер його місця в аудиторії (протоколі), прізвище, ім'я, по батькові, номер запрошення для участі в зовнішньому оцінюванні та мова тестування [25].

У 2010 році закінчується перехідний період, протягом якого тестування можна було здати однією з семи мов. Було видано укази, які стосувалися покращення системи навчання української мови у школах нацменшин, тому ЗНО проводиться виключно українською мовою. Вступника знову доводиться використовувати словники для перекладу термінів для національних меншин. Верховна Рада Криму надсилає лист Міністерству освіти у Київ на оскарження таких дій, але рішення залишається незмінним. ЗНО у 2010 році проводилося з 2 червня до 3 липня. Воно мало деякі відмінності від 2009. Його результати зараховувалися лише для участі в конкурсі на право навчатися у вищому начальному закладі країни. Відбулося й запровадження обов'язкових предметів для складання: української мови та літератури або математики й історії на вибір. Абітурієнти 2010 першими могли реєструватися на ЗНО через інтернет і самостійно обирати пункт тестування. Проведення тестування з української мови та літератури, математики, історії України вперше відбувалося впродовж кількох сесій через велику кількість бажаючих.

У 2010 році збільшилася кількість абітурієнтів, які проживають в сільській місцевості. Серед предметів за вибором найбільшою популярністю користувалися історія України та математика. Пробне тестування проводилося за кошти фізичних осіб вартістю від 59 до 65 грн. залежно від специфічних особливостей кожного регіону. Усього в 2010 році для проведення зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень абітурієнтів було створено 5685 пунктів тестування, що функціонували на базі 1179 закладів освіти. Порівнюючи з попередніми роками, у 2010 р. зафіксовано збільшення кількості абітурієнтів, які зареєструвалися для участі в зовнішньому оцінюванні [31].

У 2011 році тестування складали з 2 червня по 5 липня. З історії, математики, фізики, хімії, географії, біології абітурієнти мали змогу тестуватися мовою нацменшин. Основне тогочасне нововведення – надання можливості самостійно сформувати заяву-реєстраційну картку за допомогою спеціальної комп’ютерної програми, створеної фахівцями Українського центру оцінювання якості освіти. Час на складання тестів з історії та географії було збільшено до 150 хв замість 140. Серед предметів найбільшою популярністю користувалися українська мова і література, історія України, математика. Під час реєстрації абітурієнти мали змогу здійснювати вибір мови для складання тестів. Згідно з кошторисом, затвердженим директором Українського центру оцінювання якості освіти, вартість тестування в усіх регіонах України становила 84 грн. [30]

У 2012 році для участі в зовнішньому незалежному оцінюванні, яке тривало з 15 травня до 22 червня, зареєструвалася 328 941 особа. Саме цим було зумовлено проведення тестувань із найбільш масових предметів — української мови і літератури, математики та історії України — у дві сесії. Збільшення кількості пунктів тестування, створених на базі вищих навчальних закладів надало змогу дотриматися більшості вимог щодо організації та проведення процедур зовнішнього незалежного оцінювання, що сприяло об’єктивному та неупередженому оцінюванню знань. У зв’язку з активним використанням сучасних інформаційних технологій, нагальною потребою під час проведення зовнішнього незалежного оцінювання 2012 року стало застосування в пунктах тестування металодетекторів та відеоспостереження. У 2012 році кожному абітурієнтові було надано право скласти тести не більше, як із чотирьох предметів [52].

У 2013 році тестування проводилися у дві сесії: основна сесія — з 3 до 27 червня, додаткова сесія — з 4 до 11 липня 2013 року. Було ведено додатковий предмет — світову літературу. Усього для проходження зовнішнього незалежного оцінювання було зареєстровано близько 322 тисяч абітурієнтів. У 2013 році абітурієнти мали право скласти тести не більше, ніж із чотирьох предметів. Найбільшою популярністю серед предметів (окрім української мови і літератури) користувалися математика, історія України.

Аби згладити різницю рівня викладання та вимог у школах 2014 року вагу шкільного атестата при вступі до вузів було знижено з 200 до 60 балів. ЗНО у Луганській та Донецькій областях через військові дії на території цих областей було перенесено на додаткову сесію, яка проходила з 1 по 15 липня.

2015 року вступаючи до закладу вищої освіти абітурієнти могли подати сертифікати ЗНО виключно цього року. Складати тести учасникам зовнішнього оцінювання дозволяли максимум з чотирьох навчальних предметів з визначеного переліку. Випускникам ЗОШ результати ЗНО з української мови та літератури зараховувалися як результати ДПА. Вони визначатимуться на основі кількості балів, набраних за виконання завдань лише з української мови. Для визначення результатів ЗНО-2015 з кожного предмета буде встановлено «пороговий бал». Це ті бали, які може набрати не дуже підготовлений абітурієнт. Ті учасники котрі не змогли подолати це обмеження, не змогли використати результат ЗНО з цього предмета для вступу до ЗВО. Усі абітурієнти, результати яких будуть не нижчими від «порогового бала», отримають оцінку за шкалою 100—200 балів та матимуть право брати участь в конкурсному відборі при вступі до обраного вищого навчального закладу на навчання [24].

У 2017 році МОН України прийняло рішення розробити оптимальні умови для того, щоб ЗНО стало більш доступним для учнів з особливими потребами. Також у 2017 році як оцінки за державну підсумкову атестацію зарахують тестування з трьох предметів ЗНО. Українська мова та література стали першим і обов’язковим предметом для складання всіма випускниками. Обираючи другий обов’язковий предмет оцінювання вступники мали змогу обрати між історією України та математикою. Для вибору третього предмету надавався список дисциплін, за якими проводили тестування. Тобто, обираючи предмет, абітурієнт користується власними знаннями та вподобаннями, а також необхідністю його при вступі до закладу вищої освіти на бажану спеціальність. Право вибору належить випускнику, а не школі чи її дирекції [31].

ЗНО у 2018 році проводилося з 22 травня по 14 липня. Цього року із предметів було виключено російську мову. Але в той же час прийнято 11 пунктів: українська мова і література; математика, історія України, фізика, біологія, хімія, географія, англійська, німецька, іспанська, а також французька мови. Отримані бали із 3 дисциплін: української мови та літератури, математики або історії України та одного з предметів, котрі обиралися за власний смак, зараховувалися як результати ДПА випускників шкіл [25].

У 2019 році ЗНО проводилося з 21 травня по 13 червня, а додаткова сесія відбувалася з 26 червня по 10 липня. Серед предметів із яких можна було пройти тестуваття виокремлюють: українську мову і літературу; історію України; математику, хімію, біологію, фізику, географію та 4 іноземні мови. Результати ЗНО з трьох навчальних предметів — української мови та літератури, математики або історії України та одного з предметів, зазначених у переліку — зараховані, як результати державної підсумкової атестації за освітній рівень повної загальної середньої освіти [62].

Точні дати проведення зовнішнього незалежного оцінювання 2020 року ще не відомі, але серед предметів, з яких буде можливість пройти тестування є: українська мова і література; історія України; математика; біологія, географія, фізика, хімія; англійська мова, іспанська мова, німецька та французька мови. Результати ЗНО з трьох навчальних предметів — української мови та літератури, математики або історії України та одного з предметів, зазначених у переліку — будуть зараховані, як результати державної підсумкової атестації за освітній рівень повної загальної середньої освіти для усіх випускників закладів загальної середньої освіти, професійної (професійно-технічної), вищої освіти, які в 2020 році завершують здобуття повної загальної середньої освіти) [26].

1.2.Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики

Знати програму незалежного тестування з математики абітурієнтам необхідно для того, щоб знати перелік тем, до яких необхідно готуватися, оскільки за мету ЗНО з математики ставить оцінку ступеня підготовленості учасників тестування з метою конкурсного відбору для навчання у ВНЗ України. Суть усіх завдань сертифікаційної роботи з математики полягає у тому, щоб виявити та оцінити знання і вміння учасників, а саме:

- вміння будувати математичні моделі реальних об’єктів, процесів і явищ та досліджувати ці моделі засобами математики;
- виконувати математичні розрахунки;
- виконувати перетворення виразів;
- будувати й аналізувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їхні властивості;
- розв’язувати рівняння, нерівності та їхні системи, текстові задачі за допомогою рівнянь, нерівностей та їхніх систем;
- зображати та знаходити на рисунках геометричні фігури, встановлювати їхні властивості й виконувати геометричні побудови;
- знаходити кількісні характеристики геометричних фігур;
- обчислювати ймовірності випадкових подій та розв’язувати найпростіші комбінаторні задачі;
- аналізувати інформацію, котра подана в таблицях, графіках, діаграмах,

схемах, малюнках [67].

Таблиця 1.1

Програма ЗНО з математики

Назва розділу, теми	Знання	Уміння та навчички
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ		
Розділ:Цілі числа і вирази		
Раціональні та ірраціональні числа, їх порівняння та дії над ними	– правила дій над цілими і раціональними числами; – правила порівняння дійсних чисел; – ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10; – означення кореня n-го степеня та арифметичного кореня n-го степеня; – властивості коренів; – означення степеня з натуральним, цілим та раціональним показниками.	– розрізняти види чисел; – порівнювати дійсні числа, значення числових виразів, зокрема таких, що містять арифметичні квадратні корені; – виконувати арифметичні дії над дійсними числами; – виконувати дії над степенями з раціональним показником;
Відсотки. Основні задачі на відсотки	– означення відсотка; – правила виконання відсоткових розрахунків; – формули простих і складних відсотків	– знаходити відношення чисел у вигляді відсотка, відсоток від числа, число за значенням його відсотка; – розв’язувати задачі на

		відсоткові розрахунки.
Раціональні, ірраціональні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні вирази та їх тотожні перетворення	– означення області допустимих значень змінних виразу зі змінними; – означення одночлена і многочлена; – формули скороченого множення; – означення і властивості логарифма, десятковий і натуральний логарифми; – означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса числового аргументу;	– виконувати тотожні перетворення многочленів, алгебраїчних дробів, виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні й тригонометричні функції та знаходити їх числове значення; – спрощувати вирази; – виконувати перетворення виразів, що містять корені; – доводити тотожності
Розділ: Рівняння і нерівності		
Лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, нерівності та їхні системи	– означення рівняння з однією змінною, кореня (розв’язку) рівняння з однією змінною; – означення нерівності з однією змінною, розв’язку нерівності з однією змінною; – методи розв’язування систем лінійних рівнянь; – методи розв’язування	– розв’язувати рівняння, нерівності та системи першого та другого степенів, а також рівняння і нерівності, що зводяться до них; – розв’язувати рівняння і нерівності, що містять степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні

	раціональних, ірраціональних і трансцендентних рівнянь, нерівностей та їхніх систем	функції; – розв’язувати ірраціональні рівняння; – доводити нерівності;
Розділ: Функції		
Лінійні, квадратичні, степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції, їх основні властивості. Числові послідовності	– означення функції; – способи задання функцій, основні властивості та графіки функцій, вказаних у назві теми; – означення функції, оберненої до заданої; – означення арифметичної і геометричної прогресій; – формули n-го члена арифметичної і геометричної прогресій; – формули суми n перших членів арифметичної і геометричної прогресій; – формула суми всіх членів нескінченної геометричної прогресії із знаменником $\|q\| < 1$	– знаходити область визначення, область значень функції; – визначати парність (непарність), періодичність функції; – будувати графіки елементарних функцій, вказаних у назві теми; – установлювати властивості числових функцій за їх графіками чи формулами; – застосовувати геометричні перетворення при побудові графіків функцій; – розв’язувати задачі на арифметичну і геометричну прогресії
Похідна функції, її	– означення похідної	– знаходити похідні

геометричний та механічний зміст. Похідні елементарних функцій. Похідна суми, добутку й частки функцій. Похідна складеної функції	функції в точці; – механічний та геометричний зміст похідної; – таблиця похідних елементарних функцій; – правила знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій; – правило знаходження похідної складеної функції	елементарних функцій; – знаходити числове значення похідної функції для заданого значення аргументу; – знаходити похідну суми, добутку і частки функції; – знаходити похідну складеної функції;
Первісна та визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ та об’ємів	– означення первісної функції, визначеного інтеграла, криволінійної трапеції; – таблиця первісних елементарних функцій; – правила знаходження первісних; – формула Ньютона – Лейбніца	– знаходити первісну з використанням таблиці первісних та правил знаходження первісних; – застосовувати формулу Ньютона – Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла;
Розділ: ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ		

Перестановки, розміщення та їх кількість. Комбінації, кількість комбінацій. Біном Ньютона. Поняття ймовірності випадкової події. Поняття про статистику.	– формули для обчислення кількості кожного виду сполук без повторень; – формула бінома Ньютона; – класичне означення ймовірності події, – означення статистичних характеристик рядів даних	– обчислювати кількість перестановок, розміщень, комбінацій; – застосовувати правила обчислення ймовірностей суми та добутку подій у процесі розв’язування нескладних задач.
ГЕОМЕТРІЯ		
Розділ: Планіметрія		
Геометричні фігури та їхні властивості. Аксіоми планіметрії. Трикутники, чотирикутники, многокутники, коло і круг. Геометричні перетворення фігур	– аксіоми планіметрії; – властивості трикутників, чотирикутників і правильних многокутників; – властивості хорд і дотичних; – види геометричних перетворень	– застосовувати означення, властивості та ознаки зазначених у назві теми геометричних фігур у процесі розв’язування задач на доведення, обчислення, дослідження та побудову;
Геометричні величини та їх вимірювання. Площі фігур	– міри довжини, площі геометричних фігур; – величина кута, вимірювання кутів; – формули для	– знаходити довжини відрізків, градусні міри кутів, площі геометричних фігур; – обчислювати довжину

	обчислення площ основних геометричних фігур	кола та його дуг, площу круга, сектора
Координати та вектори на площині	– рівняння прямої та кола; – формула для обчислення відстані між двома точками та формула для обчислення координат середини відрізка	– виконувати дії над векторами; – застосовувати вектори та координати в процесі розв’язування геометричних та прикладних задач
Розділ: Стереометрія		
Геометричні фігури. Аксіоми стереометрії. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Многогранники і тіла обертання, їх види та властивості. Побудови в просторі	– аксіоми і теореми стереометрії; – означення геометричних фігур у просторі та їхні властивості; – взаємне розміщення прямих і площин у просторі	– зображати геометричні фігури та їхні елементи на площині; – використовувати правила паралельного проектування; – будувати перерізи многогранників і тіл обертання;
Геометричні величини. Відстані. Міри кутів між прямими й площинами. Площі поверхонь та об’єми	– означення відстані: від точки до площини, від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими;	– визначати відстані та градусні міри кутів у просторових фігурах; – застосовувати означення і властивості відстаней та кутів у процесі розв’язування

	– міри кутів між прямими й площинами; – формули площ поверхонь, об'ємів многогранників і тіл обертання	задач; – розв'язувати задачі на обчислення площ поверхонь та об'ємів геометричних фігур
Координати та вектори у просторі. Рівні вектори. Координати вектора. Додавання векторів. Множення вектора на число. Скалярний добуток векторів.	– прямокутну систему координат на площині, координати точки; – рівняння прямої та кола; – поняття вектора, –додавання, віднімання векторів, множення вектора на число.	– виконувати дії над векторами; – застосовувати вектори та координати в процесі розв'язування задач – складати рівняння прямої та рівняння кола; – виконувати дії з векторами [64, 67].

1.3. Структура та зміст сертифікаційної роботи з математики

Сертифікаційні роботи з математики змінювали свою структуру та ноповнення протягом усього періоду становлення ЗНО. Ми проаналізували роботи 2006, 2012 та 2018 років і виділили їх головні характеристики, які можуть мати вплив на рівень складання тесту серед абітурієнтів. Для проходження зовнішнього оцінювання з математики 2006 року зареєструвалося 17429 випускників середніх загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій із 27 регіонів України. З'явились на тестування 16196 учнів.

Воно мало на меті:

- Перевірити відповідність знань, умінь і навичок учнів програмовим вимогам.

- Оцінити рівень навчальних досягнень учнів.
- Оцінити ступінь підготовленості випускників загальноосвітніх навчальних закладів до подальшого навчання у вищих навчальних закладах.

Зовнішнє оцінювання з математики відбулося у письмовій формі і тривало 2 години 15 хвилин (135 хвилин). Кожна особа, яка проходила тестування, отримала індивідуальний екзаменаційний зошит «Математика», а також два бланка відповідей до тесту. Бланк А –для відповідей на завдання Частини 1 та Частини 2 тестового зошита і бланк Б – для відповідей на завдання Частини 3. Зошит містив три частини (Частина 1, Частина 2 і Частина 3), які відрізнялися формою тестових завдань. Відповідно до специфікації тесту він складався із 38 завдань, із них 30 – з алгебри і початків аналізу, 8 – з геометрії. Розподіл завдань тесту відповідно до програмових вимог наведено у табл. 1.2. У кожній частині зошита з математики вказано кількість завдань з відповідного розділу програмових вимог зовнішнього оцінювання з математики.

Таблиця 1.2

Розподіл завдань відповідно до розділів навчальної програми

Навчальний предмет	**Зміст**	**Кількість завдань**			
		Ч 1	**Ч 2**	**Ч 3**	**%**
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	6	3	1	25
	Рівняння і нерівності	4	6		27
	Функції	5	4		25
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	–	3
Геометрія	Планіметрія	2	1	1	9
	Стереометрія	2	2		11

Екзаменаційний тестовий зошит містив тестові завдання різної форми, а саме: завдання з вибором однієї правильної відповіді, завдання відкритої форми з короткою відповіддю та завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю.

У Частині 1 зошита з математики запропоновано завдання з вибором однієї правильної відповіді. Для кожного тестового завдання з вибором відповіді подано п’ять варіантів відповідей, з яких тільки одна правильна. Усі завдання Частини 2 – це завдання з короткою відповіддю. Правильність розв’язання завдань Частини 1 та 2 перевірялася способом комп’ютерної обробки заповнених учнями бланків відповідей А. Завдання Частини 3 – це відкриті завдання з розгорнутою відповіддю, розв’язання яких учасники тестування записували на бланку Б. Розв’язання завдань з розгорнутою відповіддю оцінювали екзаменатори з математики згідно з розробленими та затвердженими критеріями та схемами оцінювання.

Максимальна кількість балів, яку можна було набрати, правильно розв’язавши всі завдання зошита з математики, – 62. За кожне правильно виконане завдання Частини 1 учень одержував 1 бал, Частини 2 – 2 бали. За правильно виконане завдання з геометрії Частини 3 учень отримував 4 бали, з алгебри й початків аналізу – 6 балів.

Максимальна кількість балів, яку можна було набрати, правильно розв’язавши всі завдання зошита з алгебри і початків аналізу, – 48. Тестові завдання укладено відповідно до чинних нормативних документів – навчальної програми для середніх загальноосвітніх навчальних закладів і програми вступних випробувань до вищих навчальних закладів України та відповідно до програмових вимог зовнішнього оцінювання з математики.

На поданих діаграмах показано розподіл завдань ЗНО—2006 року з математики за складністю та розподільною здатністю

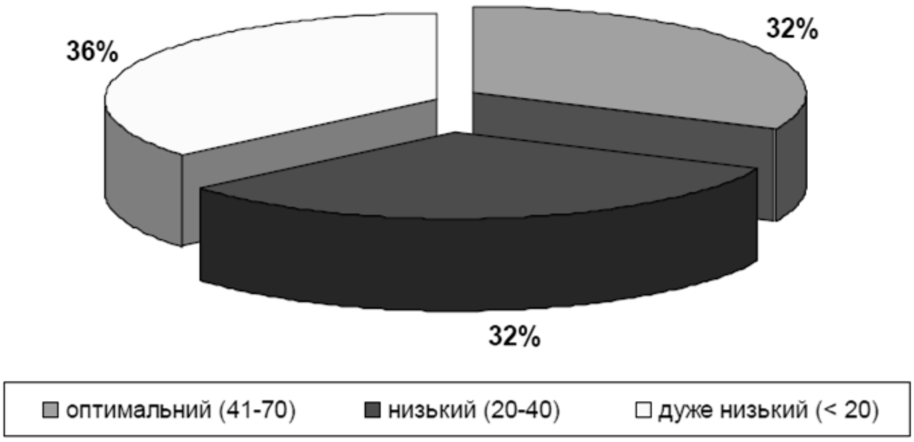


Рис.1.1.Розподіл тестових завдань з математики за складністю

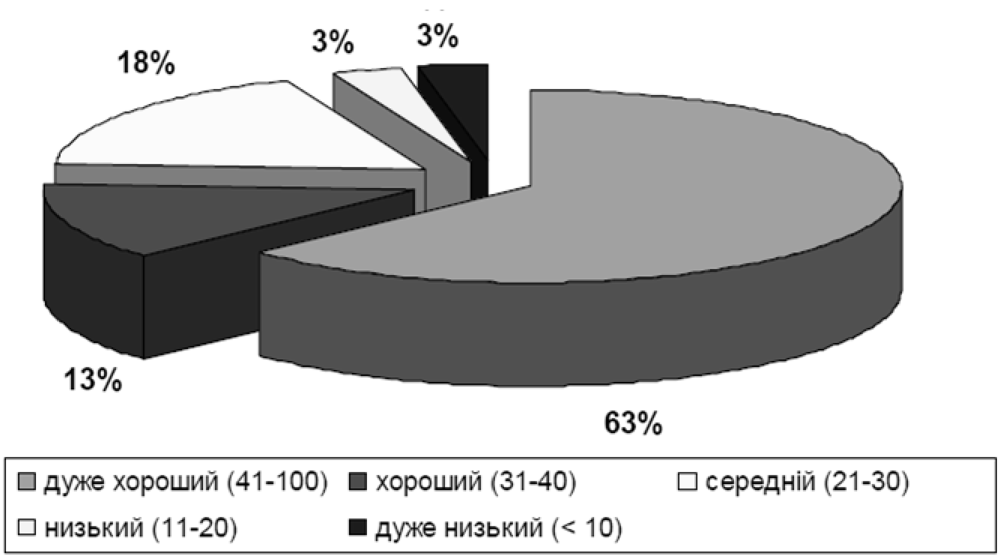


Рис.1.2. Розподіл тестових завдань з математики за розподільною здатністю

Результати тестування учні одержали такі:

♦ математики за шкалою оцінювання 100 – 200 балів та за 12-бальною шкалою оцінювання навчальних досягнень;

♦ алгебри і початків аналізу за 12-бальною шкалою оцінювання навчальних досягнень.

У сертифікаті результати зовнішнього сертифікаційного оцінювання з математики інтерпретовано для ВНЗ (математика) і для загальноосвітніх навчальних закладів (державна підсумкова атестація з алгебри і початків аналізу) [2].

Зовнішнє незалежне оцінювання з математики 2012 р проводилося 21 та 22 травня. У ньому взяли участь 187 504 осіб: перша сесія – 94 366 (близько 92% від загальної кількості зареєстрованих), друга сесія – 93 138 (92,7% від загальної кількості зареєстрованих). Час відведений на проходження тестування складав 150 хвилин. Кожен учасник тестування отримав індивідуальний комплект тестових матеріалів, що складався з тестового зошита та бланка відповідей А. Завдання тестубуло розроблено відповідно до Програми зовнішнього незалежного оцінювання з математики, затвердженої Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України (наказ від 14.07.2011 р., № 791).

Тест містив завдання трьох різних форм.

Завдання 1–20 – завдання з вибором однієї правильної відповіді. До кожного завдання цієї форми подано п’ять варіантів відповідей, серед яких лише один правильний. За виконання завдання цієї форми можна отримати 0 або 1 бал.

Завдання 21–24 – завдання на встановлення відповідності (утворення логічних пар). До кожного завдання цієї форми у двох колонках подано інформацію, яку позначено цифрами (ліворуч) і буквами (праворуч). Виконуючи завдання, необхідно встановити відповідність інформації, позначеної цифрами і буквами (утворити логічні пари). За кожну правильно позначену логічну пару можна отримати 1 бал. Максимальна кількість балів за повністю правильно виконане завдання становить 4 бали.

Завдання 25–32 – завдання відкритої форми з короткою відповіддю.

За виконання завдання цієї форми можна отримати 0 або 2 бали.

Максимальна кількість балів, яку можна було отримати, правильно розв’язавши всі завдання тесту з математики, – 52. Розподіл тестових завдань за змістовими лініями наведено в таблиці 1.3. Відповідно до специфікації тест складавсяіз32завдань:21–залгебриіпочатків аналізу, 11 – із геометрії.

Таблиця 1.3

Розподіл тестових завдань за змістовими лініями

Розділи	**Змістові лінії**	**Кількість завдань**			Частка від заг.кі-сті завдань (%)
		З вибором 1 правильної Відповіді	На встановлю відповідності	Відкр. форма з короткою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	4	1	2	21,88
	Рівняння і нерівності	3	1	2	18,75
	Функції	4	1	1	18,75
	Теорія ймовірностей та елементи статистики	1	–	1	6,25
Геометрія	Планіметрія	5	0	1	18,75
	Стереометрія	3	1	1	15,62
Усього		20	4	8	100

На поданих діаграмах показано розподіл завдань ЗНО—2012 року з математики за складністю та розподільною здатністю [55].

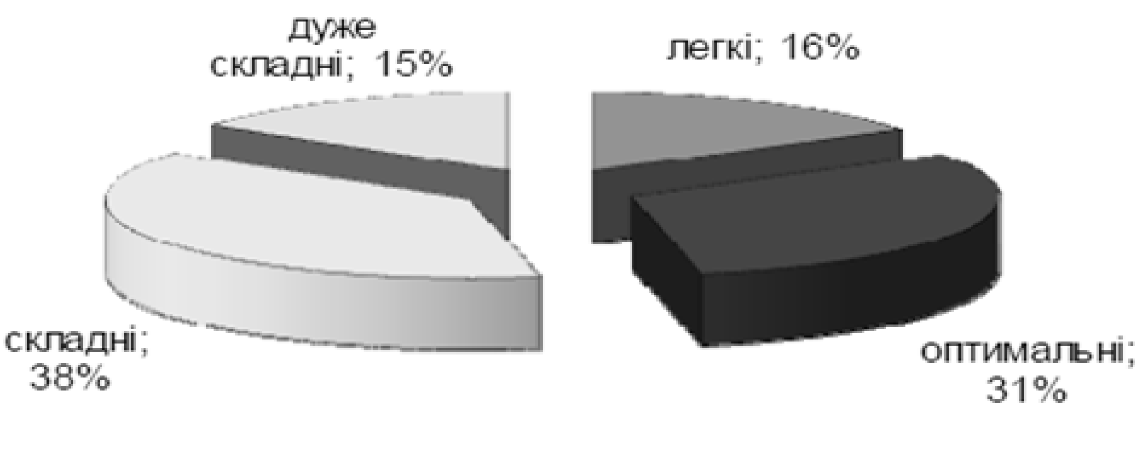


Рис.1.3. Розподіл тестових завдань з математики за складністю

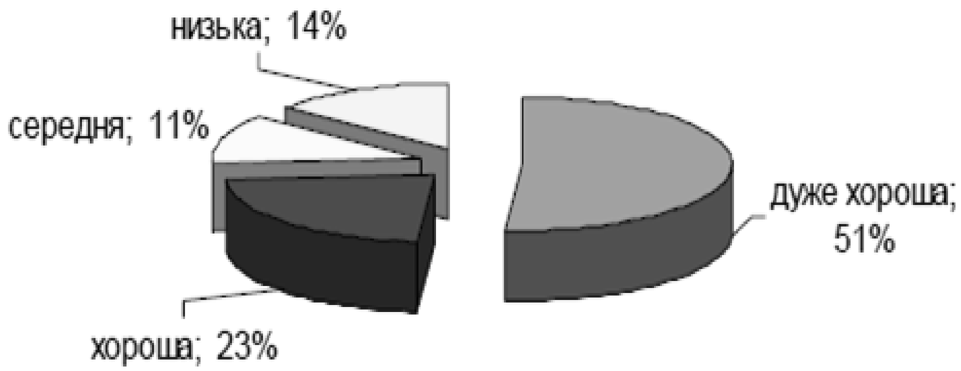


Рис.1.4. Розподіл тестових завдань з математики за розподільною здатністю

Зовнішнє незалежне оцінювання з математики проведено 22 травня 2018 року. У ньому взяли участь 106 483 особи. На виконання сертифікаційної роботи з математики відведено 180 хвилин. Кожен учасник отримав індивідуальний комплект тестових матеріалів – зошит із тестовими завданнями і бланки відповідей А і Б. Завдання для сертифікаційної роботи розроблено відповідно до затвердженої наказом МОН України програми.

Результат виконання завдань 1–28, 31, 32 сертифікаційної роботи зараховано як результат державної підсумкової атестації за освітній рівень повної загальної середньої освіти для учнів закладів освіти, які 2018 року завершили здобуття повної загальної середньої освіти. Результат виконання завдань можна було використати при подачі документів до ВНЗ. Кількісний розподіл завдань сертифікаційної роботи за змістовими блоками наведено в таблиці1.4.

Таблиця 1.4

Розподіл завдань сертифікаційної роботи за змістовими блоками

№ з/п	Змістовий блок	Кі-сть завдань	Частка завдань (%)
1	Алгебра і поч. аналізу	22	67
2	Геометрія	11	33
Усього		33	100

Сертифікаційна робота містила завдання різних форм.

Завдання 1–20 – завдання з вибором однієї правильної відповіді. До кожного завдання цієї форми наведено п’ять варіантів відповіді, поміж яких правильним був лише один. За правильне виконання завдання цієї форми учасник отримував 1 бал. Якщо ж він надавав неправильну відповідь або не надавав відповіді, – 0 балів.

Завдання 21–24 – завдання на встановлення відповідності. До кожного завдання цієї форми у двох колонках наведено інформацію, позначену цифрами (ліворуч) і літерами (праворуч). Під час виконання завдання учасник мав установити відповідність інформації, позначеної цифрами й літерами, тобто визначити «логічні пари» між довільно розташованими в різних колонках елементами. За кожну правильно визначену «логічну пару» учасник отримував 1 бал. Максимальна кількість балів за правильно виконане завдання на встановлення відповідності – 4. За неправильну відповідь або ненадання відповіді – 0 балів.

Завдання 25–30 – завдання відкритої форми з короткою відповіддю. Під час виконання їх до кожного структурованого завдання (25, 26) необхідно було записати проміжну та кінцеву відповіді, а до кожного неструктурованого (27–30) – лише кінцеву відповідь. За виконання завдання відкритої форми з короткою відповіддю можна отримати 0, 1 або 2 бали для структурованих завдань; 0 або 2 бали – для неструктурованих завдань.

Завдання 31–33 – завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю. Під час виконання цих завдань необхідно було навести пояснення всіх етапів розв’язання. За виконання завдання цієї форми можна отримати 0, 1, 2, 3 або 4 бали (завдання 31–32); 0, 1, 2, 3, 4, 5 або 6 балів (завдання 33).

Кількісний розподіл завдань сертифікаційної роботи за формами наведено в таблиці 1.5.

Таблиця 1.5

Розподіл завдань сертифікаційної роботи за формами

Розділи програми	Змістові лінії	Форма завдання				Усього
		з вибором однієї правильної відповіді	на встановлення відповідності	відкрита форма з короткою відповіддю	відкрита форма з розгорнутою відповіддю	
Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	5	1	1	–	7
	Рівняння і нерівності	4	–	1	1	6
	Функції	4	1	1	1	7
	Теорія ймовірностей та елементи статистики	1	–	1	–	2
Геометрія	Планіметрія	3	1	2	–	6
	Стереометрія	3	1	–	1	5
Разом		20	4	6	3	33

Максимальна кількість балів, яку можна отримати, правильно розв'язавши всі завдання сертифікаційної роботи з математики, – 62 бали [54].

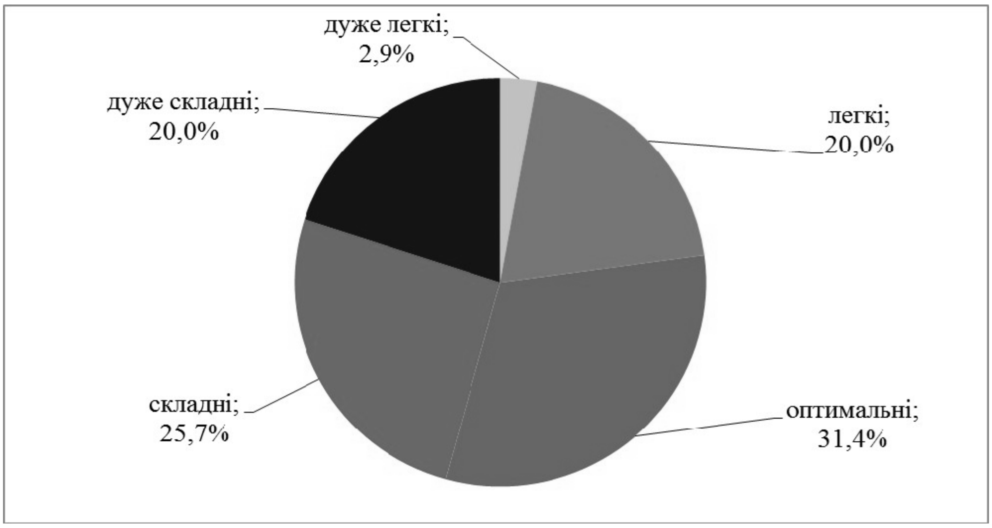


Рис.1.5. Розподіл тестових завдань з математики за складністю

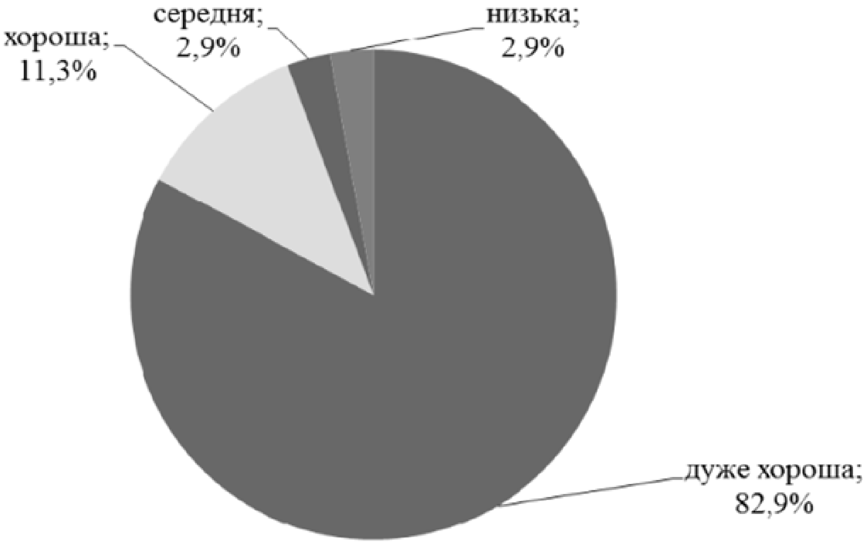


Рис.1.6. Розподіл тестових завдань з математики за розподільною здатністю

1.4. Критерії оцінювання відкритих завдань з розгорнутою відповіддю

Задля отримання високих балів за виконання завдань 31 (з алгебри і початків аналізу), 32 (з геометрії) і 33 (з алгебри і початків аналізу) відкритої форми з розгорнутою відповіддю при проходженні зовнішнього незалежного оцінювання з математики варто відмінно знати основні критерії оцінювання цих завдань та вимоги, які висуваються до повноти розв'язання та правильного запису відповідей.

Тому встановлені загальні вимоги до виконання відкритих завдань з розгорнутою відповіддю:

- розв'язання має бути математично грамотним і повним;
- методи розв'язання, форми його запису і форми запису відповіді можуть бути різними; якщо завдання можна розв'язати кількома способами, то достатньо навести розв'язання лише одним способом;
- за розв'язання завдання, у якому обґрунтовано отриману правильну відповідь, виставляється максимальна кількість балів;
- під час виконання завдання можна використовувати без доведення й посилань будь-які математичні факти та твердження, які містяться в

підручниках і навчальних посібниках, що входять до переліку підручників, рекомендованих (допущених) Міністерством освіти і науки України.

Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю з геометрії оцінюють за критеріями, як викладено в таблиці 1.6 [39].

Таблиця 1.6

Критерії оцінювання завдань відкритої форми з геометрії

Зміст оцінювання	**Бали**
Отримано правильну відповідь. Обґрунтовано всі ключові моменти розв'язування та зазначено всі необхідні для доведення теореми, аксіоми тощо. Наведено рисунок, який відповідає розв'язанню завдання.	**4**
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування обґрунтовано недостатньо / Рисунка немає / Можливі 1–2 негрубі помилки або описки в обчисленнях, перетвореннях, що не впливають на правильність подальшого ходу розв'язування / Отримана відповідь може бути неправильною.	**3**
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів обґрунтовано недостатньо або не обґрунтовано. Рисунка немає / Можливі 1–2 помилки в обчисленнях або перетвореннях, що впливають на правильність подальшого ходу розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною або неповною (розв'язано правильно лише частина завдання).	**2**
У правильній послідовності ходу розв'язування немає деяких етапів розв'язування. Ключові моменти розв'язування не обґрунтовано. Отримана відповідь неправильна або завдання розв'язане не повністю.	**1**

Учасник не приступив до розв'язування завдання або приступив до його розв'язування, але його записи не відповідають зазначеним вище критеріям [37].	**0**

Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю з алгебри і початків аналізу оцінюють за критеріями, як викладено в таблиці 1.7.

Таблиця 1.7

Критерії оцінювання завдань відкритої форми з алгебри і початків аналізу

Зміст оцінювання	**Бали**
Отримано правильну відповідь. Обґрунтовано всі ключові моменти розв'язування.	**6**
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування обґрунтовано недостатньо / Можливі описки в обчисленнях або перетвореннях, що не впливають на правильність відповіді / Отримана відповідь може бути неправильною або неповною.	**5**
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування можуть бути обґрунтовані недостатньо / Можливі 1–2 негрубі помилки або описки в обчисленнях, перетвореннях, що не впливають на правильність подальшого ходу розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною або неповною	**4**
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів обґрунтовано недостатньо. Можливі 1–2 помилки або описки в обчисленнях або перетвореннях, що незначно впливають на правильність подальшого ходу розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною або неповною (розв'язано правильно лише частину завдання).	**3**

Зміст оцінювання	Бали
У правильній послідовності ходу розв’язування немає деяких етапів. Ключові моменти розв’язування не обґрунтовано. Можливі помилки в обчисленнях або перетвореннях, що впливають на подальший хід розв’язування. Отримана відповідь може бути неповною або неправильною.	**2**
У послідовності ходу розв’язування є лише деякі етапи розв’язування.Ключові моменти розв’язування не обґрунтовано. Отримана відповідь неправильна або завдання розв’язане не повністю.	**1**
Учасник не приступив до розв’язування завдання або приступив до його розв’язування, але його записи не відповідають зазначеним вище критеріям.	**0**

Завдання, на яке надано правильну відповідь, але розв’язання **не наведено**, оцінюють у **0** балів. Завдання, розв’язання якого **не відповідає умові**, оцінюють у **0** балів. Такий раціональний підхід виключає можливість отримання балів за виконання завдання абітурієнтами, які могли відповісти навмання або списати відповідь [38].

1.5. Порівняльна характеристика сертифікаційних робіт ЗНО з математики за 2006, 2012 та 2018 роки

Детально проаналізувавши наповнення сертифікаційних робіт з математики від початку за 2006,2012 та 2018 років, ми з’ясували, що завдання тестів відрізняються за складністю:

- Легкі
- Оптимальні
- Складні

- Дуже складні.

Результати порівняння подані на рис.1.7.

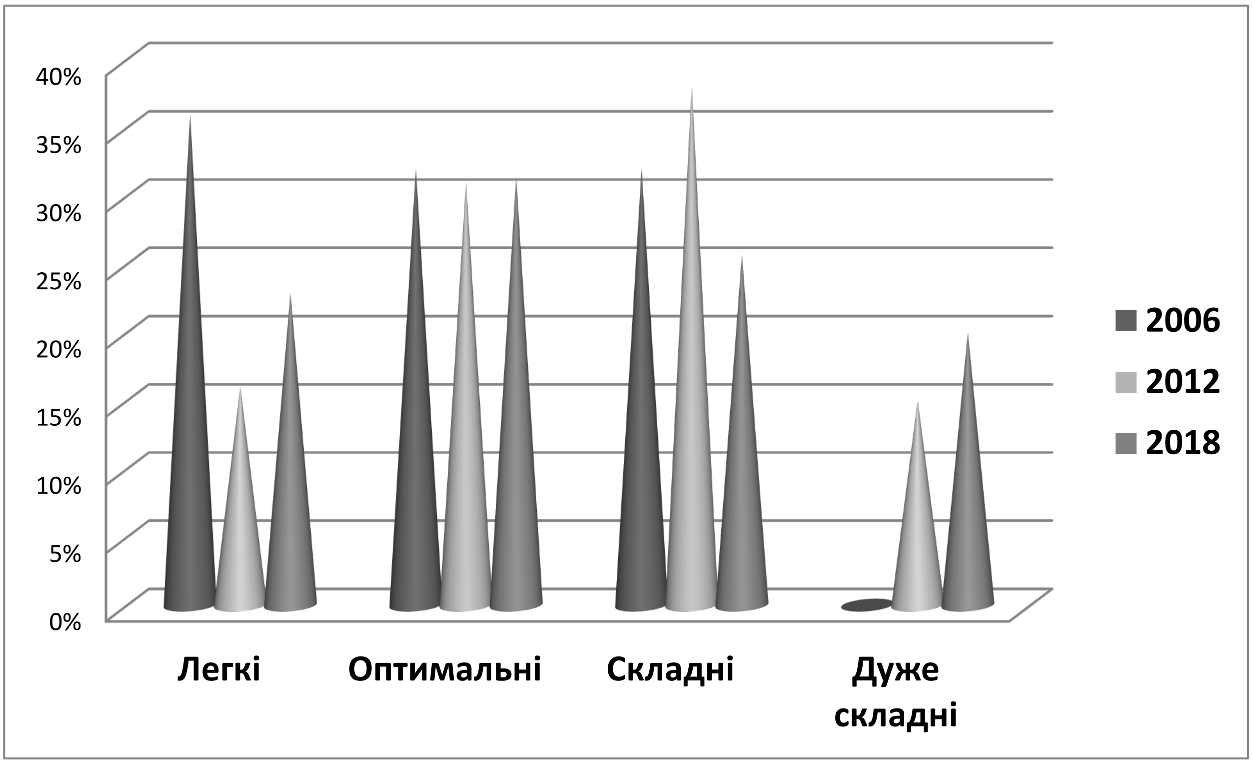


Рис.1.7.Розподіл завдань за складністю

Згідно з діаграмою, найбільший відсоток легких завдань був у роботі 2006 року, а найменший – у 2012 році. Тестів дуже складного рівня виявили найбільше у сертифікаційній роботі 2018 р., а найменше – у роботі 2006 року, їх там не було зовсім.

Підбираючи вправи для ЗНО з математики укладачі звертають велику увагу на розподільну здатність (дискримінативність) тестового завдання *(D-index)* – здатність тестового завдання відділяти учасників тестування з різним рівнем навчальних досягнень. Дискримінативність завдання визначають як різницю складності завдання для сильної та слабкої (добре і погано підготовленої) груп учасників тестування. На рис.1.8. наведено порівняння інтервалів значень розподільної здатності та характеристику дискримінативності тестового завдання за 2006, 2012 та 2018 роки.

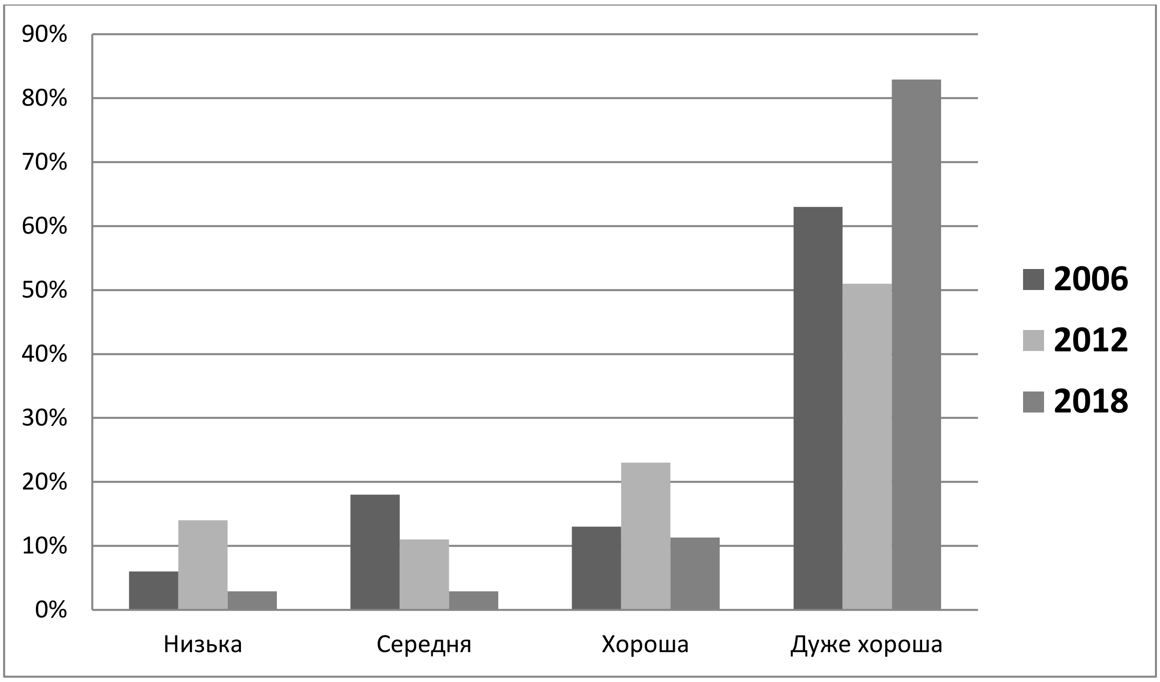


Рис.1.8.Розподіл завдань за індексом роздільної здатності

Згідно з даними діаграми, можна стверджувати, що наповнення сертифікаційних робіт з математики усіх проаналізованих років мали найбільший відсоток дуже хорошого рівня розподільної здатності, найвищий був у роботі 2018 року, а найнижчий – у завданнях 2012 року.

На основі опрацьованих нами тестів ЗНО з математики, наявні в них завдання нами було розподілено за 10 основними тематичними блоками, які вивчаються у шкільному курсі математики:

1. Числа і вирази

2.Функції та їх графіки

3. Рівняння та системи рівнянь

4.Нерівності та системи нерівностей

5.Текстові задачі

6. Елементи математичного аналізу

7. Планіметрія

8.Стереометрія

9.Координати і вектори

10. Елементи статистики

та визначено кількість завдань, що належать до кожного з блоків. Дані розподілу подані на рис.1.9.

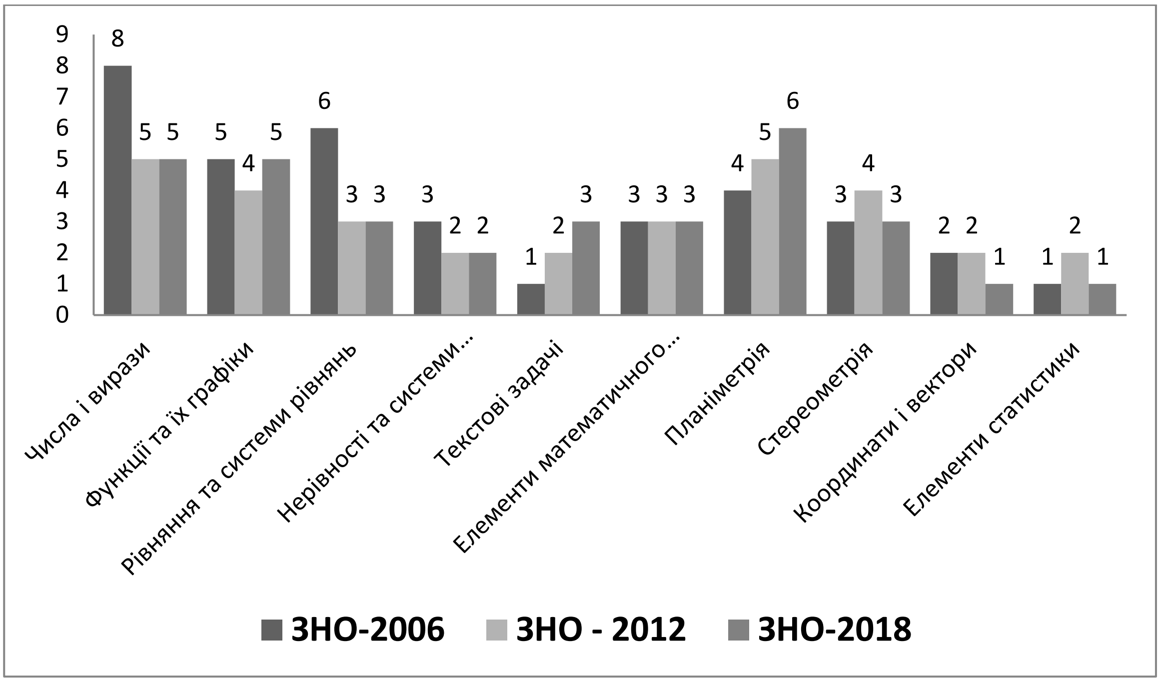


Рис.1.9.Розподіл завдань за тематичними блоками

З даної діаграми видно, що кількість завдань із тем «Числа і функції», «Рівняння та системи рівнянь» зменшилась на 3, із «Нерівності та їх системи» та «Координати і вектори» зменшилась на 1 завдання у 2018 році в порівнянні із 2006. В той же час, кількість текстових задач поступово зростала від 1 у 2006 році до 3 у 2018 та планіметричних від 4 до 6 відповідно. Завдання із «Стереометрії» та «Елементів статистики» збільшили своє число на 1 у 2012 році в порівнянні з 2006 р.,а у 2018 – знову зменшили теж на 1. Розділ «Елементи математичного аналізу» не зазнав жодних кількісних змін протягом усього періоду проведення ЗНО з математики. У темі «Функцій та їх графіки» зменшили кількість вправ із 5 до 4 у 2012 році, а вже у 2018 – знову повернули кількість у початковий стан до 5.

Також ми проаналізували відсоткове співвідношення завдань ЗНО з математики за їх приналежністю до алгебри чи геометрії. Отримані дані вказані на рис.1.10.

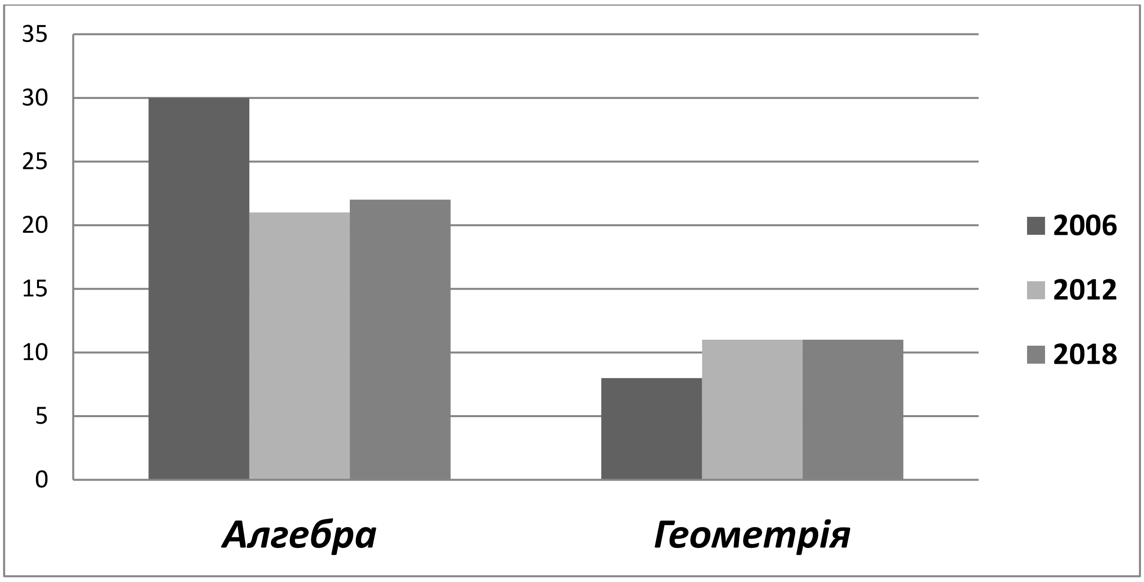


Рис.1.10.Розподіл завдань з алгебри та геометрії

З поданої діаграми легко встановити що кількість завдань з «Алгебри та початків аналізу» у 2006 році була майже в 4 рази більшою за кількість завдань з курсу «Геометрії»: 30 проти 8. У 2012 та 2018 число вправ з алгебри суттєво знизилось до 21 та 22 по роках відповідно, а із геометрії навпаки виросло до 11 завдань у сертифікаційній роботі: 22 проти 11. Такі зміни в розподілі завдань є дуже доречними оскільки в сучасній системі шкільної освіти вивченню геометрії також приділяється велика увага.

Висновки до першого розділу

Опрацювавши науково-методичну літературу з питань освіти, ми дійшли висновку, що на сьогоднішній день в Україні інструментом об'єктивного оцінювання навчальних досягнень є зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО). Хоч технологія організації і проведення ЗНО в усіх країн подібна між собою та Україна намагається виробити власну модель. В цьому процесі беруть участь освітяни та науковці,які вивчаючи досвід тестування в інших країнах, розробляють свою структуру проведення оцінювання навчальних досягнень випускників середніх навчальних закладів. Серед усіх навчальних предметів, з яких можна проходити тестування, вагоме місце відноситься саме математиці, яку абітурієнти мають змогу складати починаючи з 2003 року і до нині. Пройшовши такий довгий шлях формування ЗНО з математики зазнало багатьох змін як у організації його проведення так і у структурі та наповненні. Змінювалась кількість завдань тесту (2003 рік – 38, 2012 рік – 32, 2018 рік – 33) та розподіл їх за рівнями складності, кількість часу відведеного на проходження ЗНО, критерії оцінювання завдань та кількість максимально набраних балів. Особливістю тестування з математики є наявність у ньому завдання із розгорнутою відповіддю, які оцінюються аж по 6 балів та дають змогу виявити тих абітурієнтів, які дійсно мають знання на високому рівні, адже потрібно подати власну стратегію розв’язання, бо вибрати відповідь навмання або ж списати не вийде. Такі високі вимоги до структури тестів ЗНО та організації їх проведення і оцінювання обумовлені необхідністю виявити серед усіх, хто проходить тестування, тих хто має здібності і знання для демонстрації найкращих результатів, аби надалі стати студентом одного з ВНЗ України чи світу.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ ТЕСТІВ ЗНО З МАТЕМАТИКИ ЗА 2006, 2012 ТА 2018 РОКИ

2.1.Числа і вирази

Знайомство учнів із числами відбувається вже у початковій школі, де діти дізнаються про натуральні числа, оволодівають навиками рахунку та виконання основних арифметичних дій: додавання, віднімання, множення та ділення натуральних чисел. Розширення знань про числа відбувається починаючи з 5 класу: вводяться поняття цілих чисел, раціональних, ірраціональних та дійсних. А також діти знайомляться із простими та складеними числами, найбільшим спільним дільником, найменшим спільним кратним, звичайними та десятковими дробами і діями, які можна над ними виконувати.

Ще одним основним поняттям математики, яке закладається з молодших класів є числовий вираз. Числовий вираз – це запис, який складається з чисел, об'єднаних знаками арифметичних дій, і дужок. Виконуючи в числовому виразі зазначені дії, дотримуючись порядку виконання арифметичних дій, отримаємо число яке називають значенням числового виразу. Навчальною програмою передбачено вивчення цілих, дробово-раціональних, ірраціональних, логарифмічних, показникових та тригонометричних виразів. Поняття чисел і виразів пронизують увесь курс шкільної математики і відмінне їх оволодіння є міцною основою для подальшого вивчення тем алгебри та геометрії. Тому завдання з ними на обов'язковій основі виносять на ЗНО з математики.

ЗНО−2006 (Завдання 1). Обчисліть $\sqrt{125}\cdot\sqrt[5]{32}-5^{\frac{1}{2}}$ [44].

Розв'язання.

$$\sqrt{125}\cdot\sqrt[5]{32}-5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[2]{2^5}-5^{\frac{1}{2}}=5\sqrt{5}\cdot 2-\sqrt{5}=10\sqrt{5}-\sqrt{5}=9\sqrt{5}$$

Відповідь: $9\sqrt{5}$.

ЗНО−2006 (Завдання 2). Якщо $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, то $c=$ [44].

Розв'язання. Якщо $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, то $\frac{1}{c}=\frac{1}{b}=\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$, тоді $c=\frac{ab}{a-b}$.

Відповідь: $\frac{ab}{a-b}$.

ЗНО−2018 (Завдання 1). Спрости вираз $\frac{2\mathrm{a}+2}{2}=$ [68].

Розв'язання. $\frac{2a+2}{2}=\frac{2(a+1)}{2}=a+1$

Відповідь: $a+1$.

ЗНО−2018 (Завдання 10). Спростіть вираз $a(a+2b)-(a+b)^2$ [68].

Розв'язання. Розкриємо дужки

$a^2+2ab-a^2-2ab-b^2=-b^2$

Відповідь: $-b^2$

ЗНО−2006 (Завдання 3). Знайдіть вираз, тотожно рівний виразу x^4+x^3-x-1 [44].

Розв'язання.

$x^4+x^3-x-1=x^3(x-1)-(x+1)=(x^3-1)(x+1)=(x-1)(x^2++x+1)(x+1)=(x^2-1)(x^2+x+1)$.

Відповідь: $(x^2-1)(x^2+x+1)$.

ЗНО−2006 (Завдання 7). Обчисліть значення поданого виразу $\log_5 49+$ $+2\log_5\frac{5}{7}$ [44].

Розв'язання. $\log_5 49+2\log_5\frac{5}{7}=\log_5 7^2+2\log_5 7+2\log_5\frac{5}{7}=2(\log_5 7+$ $+\log_5\frac{5}{7})=2\log_5(7\cdot\frac{5}{7})=2\log_5 5=2$.

Відповідь: 2.

ЗНО−2012 (Завдання 8). Запишіть числа $\sqrt[3]{2}, 1, \sqrt[5]{3}$ в порядку зростання [27].

Розв'язання. $\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{32}$;

$1=\sqrt[15]{1^{15}}=\sqrt[15]{1}$; $\sqrt[5]{3}=\sqrt[15]{3^3}=\sqrt[15]{27}$;

Функція $y = \sqrt[15]{x}$ — монотонно зростаюча на всій області визначення, тому: $\sqrt[15]{1} < \sqrt[15]{27} < \sqrt[15]{32}$, отже, $1 < \sqrt[5]{3} < \sqrt[3]{2}$.

Відповідь: $1 < \sqrt[5]{3} < \sqrt[3]{2}$.

ЗНО−2006 (Завдання 23). Обчисліть значення виразу $\frac{53}{8-\sqrt{11}} + \frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{13}+2}$ [44].

Розв'язання. $\frac{53}{8-\sqrt{11}} + \frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} - \frac{9}{\sqrt{13}+2} = \frac{53\cdot(8+\sqrt{11})}{(8-\sqrt{11})(8+\sqrt{11})} + \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{(\sqrt{13}-\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})} - \frac{9(\sqrt{13}-2)}{(\sqrt{13}+2)(\sqrt{13}-2)} = \frac{53(\sqrt{11}+8)}{64-11} + \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{13-11} - \frac{9(\sqrt{13}-2)}{13-4} = \frac{53(\sqrt{11}+8)}{53} + \frac{2(\sqrt{13}-\sqrt{11})}{2} - \frac{9(\sqrt{13}-2)}{9} = 8 + \sqrt{11} + \sqrt{13} - \sqrt{11} - \sqrt{13} = 10.$

Відповідь: 10.

ЗНО−2018 (Завдання 13). $1 - sin\alpha\ ct\alpha\ cos\alpha =$ [68].

Розв'язання. $1 - sin\alpha\ ct\alpha\ cos\alpha = 1 - sin\alpha\ \frac{cos\alpha}{sin\alpha} cos\alpha = 1 - cos\alpha^2 = sin\ \alpha^2$.

Відповідь: $sin\ \alpha^2$.

ЗНО−2006 (Завдання 12). Обчисліть значення виразу $\sin\alpha + \sin\beta$, якщо $\alpha - \beta = 180°$ [44].

Розв'язання.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{180°}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos 90° =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 0 = 0$$

Відповідь: 0.

ЗНО−2012 (Завдання 13). Якому проміжку належить значення виразу $\sin 410°$? [27].

Розв'язання. Найменший додатній період функції $y = \sin x$ становить $360°$.

$\sin 410° = \sin(410° - 360°) = \sin 50°$.

На проміжку $(0°; 90°)$ функція $y = \sin x$ монотонно зростає. Тому: $\sin 45° < \sin 50° < \sin 60°$. Отже: $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 50° < \sin 60°$. Тобто: $\sin 410° \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Відповідь: $\sin 410° \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

ЗНО−2012 (Завдання 26). Скільки існує різних дробів $\frac{m}{n}$, якщо m набуває значень 1; 2 або 4, а n набуває значень 5; 7; 11; 13 або 17? [27].

Розв'язання. Число m можна записати трьома способами (1, 2 або 4); число n можна записати п'ятьма способами (5, 7, 11, 13 або 17); тоді кількість різних дробів $\frac{m}{n}$ можна знайти за правилом добутку: $3 \cdot 5 = 15$.

Відповідь: 15.

ЗНО−2006 (Завдання 25). Обчисліть значення виразу $\sin 2\alpha$, якщо $ctg\ \alpha = -\frac{1}{2}$. Відповідь запишіть десятковим дробом [44].

Розв'язання.

1) Якщо $ct\ \alpha = -\frac{1}{2}$, тобто $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{2}$, то $\sin\alpha = -2\cos\alpha$.

2) Якщо $ct\ \alpha = -\frac{1}{2}$, а $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, то $\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{4}{5}$. Тоді $\sin^2\alpha = \frac{4}{5} =$ $= 0{,}8$.

3) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -2\cos\alpha \cdot (-\sin\alpha) = -\sin^2\alpha = -0{,}8$.

Відповідь: $-0{,}8$.

ЗНО−2012 (Завдання 28). Обчисліть значення виразу $\log_a 500 -$ $-\log_a 4$, якщо $\log_5 a = \frac{1}{4}$ [27].

Розв'язання. $\log_a 500 - \log_a 4 = \log_a \frac{500}{4} = \log_a 125 = \log_a 5^3 = 3\log_a 5 ==$ $\frac{3}{\log_5 a}$.

Якщо $\log_5 a = \frac{1}{4}$, то $\frac{3}{\log_5 a} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$.

Відповідь: 12.

ЗНО−2018 (Завдання 16). Обчисліть значення виразу $\log_3 45 +$ $+\log_3 900 - \log_3 500$ [68].

Розв'язання. $\log_3 45 + \log_3 900 - \log_3 500 = \log_3 \frac{45\times 900}{500} = \log_3 81 = 4$.

Відповідь: 4.

ЗНО−2006 (Завдання 28). Обчисліть $\frac{1}{25}\cdot 9^{\log_a\sqrt{14}+0{,}5}$. Відповідь запишіть десятковим дробом [44].

Розв'язання.

$$\frac{1}{25}\cdot 9^{\log_a\sqrt{14}+0{,}5}=\frac{1}{25}\cdot 3^{2(\log_a\sqrt{14}+0{,}5)}=\frac{1}{25}\cdot 3^{2(\log_a\sqrt{14}+0{,}5)}=\frac{1}{25}\cdot 3^{\log_a 14+1}=$$

$$=\frac{1}{25}\cdot 3^{\log + a14}\cdot 3^1=\frac{3}{25}\cdot 14=\frac{42}{25}=\frac{168}{100}=1{,}68.$$

Відповідь: 1,68.

ЗНО−2012 (Завдання 21). До кожного виразу (1−4) при $\alpha>0$ доберіть тотожно йому рівний (А-Д) [27].

1) $\frac{2\alpha^5}{\alpha^6}$
2) $(2\alpha)^5\cdot\alpha^6$
3) $(2\alpha^6)^5$
4) $\sqrt[6]{64\alpha^5}$

А) $32\alpha^{11}$
Б) $2\alpha^{\frac{5}{6}}$
В) $2\alpha^{\frac{6}{5}}$
Г) $2\alpha^{-1}$
Д) $32\alpha^{30}$

Розв'язання.

1) $\frac{2a^5}{a^6}=\frac{2}{a}=2a^{-1}$.
2) $(2\alpha)^5\cdot\alpha^6=2^5\cdot a^5\cdot a^6=32a^{11}$.
3) $(2\alpha^6)^5=2^5\cdot a^{30}=32a^{30}$.
4) $\sqrt[6]{64\alpha^5}=\sqrt[6]{64}\cdot a^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^6}\cdot a^{\frac{5}{6}}=2a^{\frac{5}{6}}$

Відповідь: 1–Г, 2–А, 3–Д, 4–В.

ЗНО−2018 (Завдання 22). До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження, якщо $\alpha=-3$ [68].

Початок речення

1) Значення виразу α^0
2) Значення виразу α^2
3) Значення виразу $\frac{|\alpha|}{\alpha}$
4) Значення виразу $\sqrt[3]{a}$

Закінчення речення

А) більше за 1

Б) дорівнює 1

В) дорівнює 0

Г) дорівнює −1

Д) менше за −1

Розв'язання.

1) Значення виразу α^0 при $a = -3$, буде $(-3)^0 = 1$.

2) Значення виразу α^2 при $a = -3$, дорівнює $(-3)^2 = 9 > 1$.

3) Значення виразу $\frac{|\alpha|}{\alpha}$ при $a = -3$, буде $\frac{|-3|}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$.

4) Значення виразу $\sqrt[3]{a}$ при $a = -3$, дорівнює $\sqrt[3]{-3} \approx -1{,}4 < -1$.

Відповідь: 1−Б, 2−А, 3−Г, 4−Д

2.2. Функції та їх графіки

Введення поняття функції та відповідне означення передбачено навчальним матеріалом для учнів 8 класу. Хоча пропедевтичні завдання зустрічаються в підручниках математики вже з 1 класу: молодші школярі визначають залежність вартості товару від ціни, результат дій залежно від зміни компонентів, ораховують вирази. Учні 3-4 класів обраховують відстань залежно від часу та швидкості, визначають площу фігур залежно від довжин її сторін. У середній школі діти вчаться будувати діаграми, розв'язувати текстові задачі, дізнаються про координатну площину, малюють графіки залежностей, але не використовуючи термін «функція». В наступні роки навчання в школі діти ці знання розширюють та поглиблюють.

Першим видом функцій з якими знайомляться школярі є лінійна функція $y = kx + b$. Різновидом лінійної функції є пряма пропорційність. Її формулу $y = kx$ можна отримати з формули $y = kx + b$ за $b = 0$. Також курсом математики розглядаються відомості про квадратичну, степеневу, показникову, логарифмічну, тригонометричні та обернені тригонометричні функції, їх властивості та графіки. Оскільки функції займають важливе значення у шкільному курсі математики та повсякденному житті дітей, то цій темі відведено велику кількість різнопланових завдань у сертифікаційній роботі ЗНО з математики.

ЗНО−2006 (Завдання 5). З-поміж наведених графіків укажіть графік функції $y = -|x + 3|$ [44].

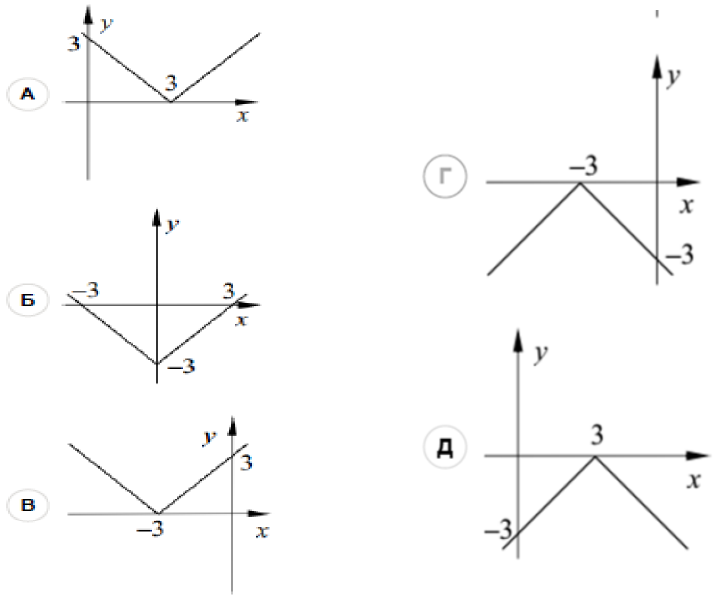


Рис.2.1.

Графік функції $y = -|x + 3|$ одержимо з графіка функції $y = -|x|$ паралельним перенесенням на 3 одиниці ліворуч вздовж осі Ох. Як результат маємо графік функції на малюнку Г.

Відповідь: Г.

ЗНО−2012 (Завдання 2). Знайдіть область визначення функції $y = 2 - \frac{1}{x}$ [27].

Розв'язання. Оскільки змінна х знаходиться в знаменнику дробу, то $x \neq 0$. Тобто: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

ЗНО−2018 (Завдання 8). Знайдіть область визначення даної функції $y = \frac{x+1}{x-2}$ [68].

Розв'язання. D(y): $x - 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 2$

Отже, $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

Відповідь: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

ЗНО−2012 (Завдання 5). На рис.2.2. зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку [−4; 4]. Знайдіть множину всіх значень x, для яких $f(x) \leq -2$ [27].

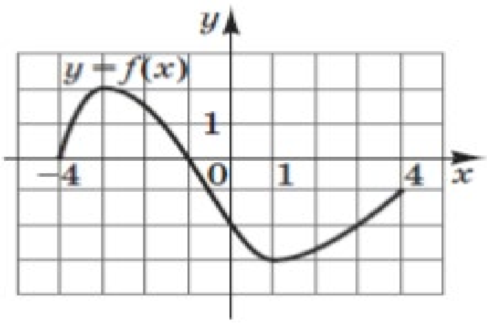


Рис.2.2.

Розв'язання. Якщо $f(x) \leq -2$, то до уваги беремо ті точки функції $y = f(x)$, ординати яких не більші від –2. Тобто, $x \in [0; 3]$.

Відповідь: $x \in [0; 3]$.

ЗНО−2018 (Завдання 4). На рис.2.3. зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку [−4;6]. Укажіть найбільше значення функції f на цьому проміжку [68].

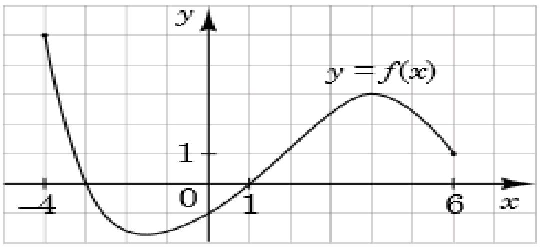


Рис.2.3.

Розв'язання. Найбільше значення, як видно з рисунку на даному відрізку дорівнює 5.

Відповідь: 5.

ЗНО−2018 (Завдання 17). На рис.2.4. зображено фрагмент графіка періодичної функції з періодом $T = 2\pi$, визначеної на множині дійсних чисел. Укажіть серед наведених точку, що належить цьому графіку [68].

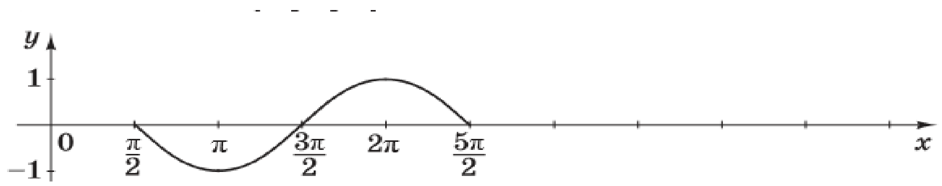


Рис.2.4.

Розв'язання. $y = \cos x$

$0 = \cos 5\pi = \cos \pi = -1$

Точка з координатами $(5\pi; -1)$ задовільняє умову.

Відповідь: $(5\pi; -1)$.

ЗНО−2012 (Завдання 10). На якому з наведених рисунків зображено ескіз графіка функції $y = 4 - (x-1)^2$? [27].

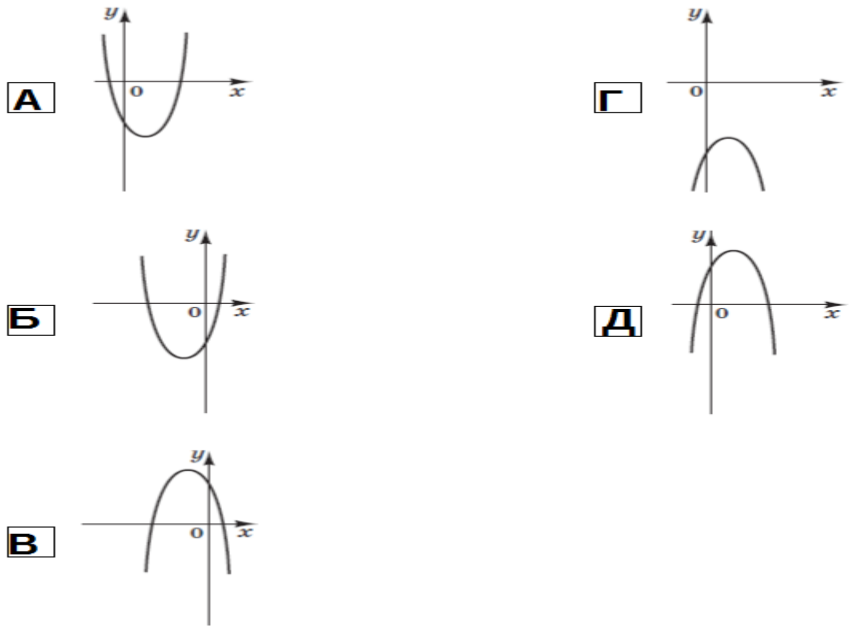


Рис.2.5.

Розв'язання. З графіка функції $y = x^2$ переміщенням на 1 одиницю праворуч взовж осі *Ox* одержимо графік функції $y = (x-1)^2$. Перемістивши його на 4 одиниці вгору взовж осі *Oy*, одержимо графік функції $y = 4 - (x-1)^2$. Це рисунок Д.

Відповідь: рисунок Д.

ЗНО−2012 (Завдання 22). Кожній точці (1−4) поставте у відповідність функцію (А−Д), графіку якої належить ця точка [27].

Точка	Функція
1) O(0; 0)	А) $y = 2x + 2$
2) M(0; −1)	Б) $y = ctgx$
3) N(−1; 0)	В) $y = tgx$
4) K(0; 1)	Г) $y = \sqrt{x} - 1$
	Д)$y = 2^x$

Розв'язання.

1) $tg\ 0 = 0$, тому точка O(0; 0) належить графіку фнкції $y = tgx$.

2) $\sqrt{0} - 1 = 0 - 1 = -1$, тому точка M(0; -1) належить графіку функції $y = \sqrt{x} - 1$.

3) $2 \cdot (-1) + 2 = -2 + 2 = 0$, тому точка $N(-1; 0)$ належить графіку функції $y = 2x + 2$.

4) $2^0 = 1$, тому точка $K(0; 1)$ належить графіку фнкції $y = 2^x$.

Відповідь: 1–В, 2–Г, 3–А, 4–Д.

ЗНО−2006 (Завдання 9). Знайдіть множину значень функції $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ [44].

$f(x) = (sinx + cosx)^2 = sin^2x + cos^2x + 2sinxcosx = 1 + sin2x.$

$-1 \leq sin2x \leq 1,$

тоді $0 \leq sin2x + 1 \leq 2.$

Отже, множиною значень функції *f(x)* є відрізок [0; 2].

Відповідь: $f(x) \in [0; 2]$.

ЗНО−2006 (Завдання 14). Укажіть непарну функцію [44].

Функція *f(x)* називається непарною, якщо для будь-якого *x* з області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Бачимо, що за такої умови область визначення повинна бути множиною, симетричною відносно початку координат. Областю визначення функції $y = \sqrt{x - 2}$ є проміжок [2; +∞). Це множина, яка не симетрична відносно початку координат. Тому функція $y = \sqrt{x - 2}$ не є парною.

У всіх решта заданих функцій областю визначення є множина дійсних чисел R. Ця множина симетрична відносно початку координат. Тепер перевіримо, для якої із функцій 1-3,5 виконується умова $f(-x) = -f(x)$.

1) $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x) \neq f(-x)$

2) $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x) \neq f(-x)$

3) $f(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1 = -(x^3 + 1) \neq -f(x)$

1) $f(-x) = (-x^3) - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$

Отже, функція $y = x^3 - x$ є непарною.

Відповідь: $y = x^3 - x$.

ЗНО−2006 (Завдання 15). Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{x+2}}{2^x-1}$ [44].

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ 2^x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ 2^x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ 2^x \neq 2^0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Отже, маємо область визначення даної функції $[-2; 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Відповідь: $[-2; 0) \cup (0;\ +\infty)$.

ЗНО−2018 (Завдання 21). До кожного початку речення (1−4) доберіть його закінчення (А−Д) [68].

Початок речення	Закінчення речення
1) Пряма $y = 4{,}5x$	А) є паралельною прямій $y = 2x$
2) Пряма $y = -4$	Б) не має спільних точок з графіком функції $y = x^2 - 1$
3) Пряма $y = 2x + 4$	В) перетинає графік функції $y = 3^x$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$
4) Пряма $y = x$	Г) є паралельною осі y
	Д) є бісектрисою I і III координатних чвертей

Розв'язання.

1) Пряма $y = 4{,}5x$ перетинає графік функції $y = 3^x$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$: $y = 4{,}5 \cdot 2 = 9, 3^2 = 9$.

2) Пряма $y = -4$ не має спільних точок з графіком функції $y = x^2 - 1$, бо ця пряма паралельна осі Ох і проходить через точку з ординатою -4, а парабола $y = x^2 - 1$ направлена вгору і побудована паралельним перенесенням вздовж осі Оу на один одиничний відрізок вниз.

3) Пряма $y = 2x + 4$ є паралельною прямій $y = 2x$, бо кутові коефіцієнти при змінній х дорівнюють 2.

4) Пряма $y = x$ є бісектрисою I і III координатних чвертей, бо дана функція є прямою пропорційністю, де $k = 1$.

Відповідь: 1–В, 2–Б, 3–А, 4–Д.

ЗНО−2006 (Завдання 32). На рисунку зображено графік функції $f(x) = x^4 - x^2 + bx + c$. Визначте знаки параметрів b і c [44].

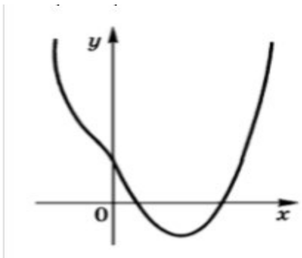


Рис.2.6.

У відповідь номер правильного варіанта з наведених нижче

1) $\begin{cases} b > 0, \\ c > 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b > 0, \\ c < 0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} b < 0, \\ c > 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} b < 0, \\ c < 0. \end{cases}$

1) Визначимо знак параметра c.

Графік функції $f(x) = x^4 - x^2 + bx + c$ перетинає вісь *Oy* в точці (0; c) (тобто, $f(0) = c$). Як видно з графіка, ордината точки перетину з віссю *Oy* додатна, тобто, $c > 0$

2) Визначимо знак параметра b.

$\mathrm{x} = 0$ належить проміжку, на якому функція спадає. Тобто, $f'(0) < 0$.

Обчислимо: $f'(x) = 4x^3 - 2x + b, f'(0) = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + b = b$

Значить, $b < 0$. Тому правильний варіант відповіді $\begin{cases} b < 0, \\ c > 0. \end{cases}$

Відповідь: 3.

ЗНО−2018 (Завдання 31). Задано функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = 4|x|$

1. Побудуйте графік функції f
2. Побудуйте графік функції g
3. Визначте абсциси точок перетину графіків функцій f і g
4. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій f і g [68].

Розв'язання. 1) Графіком функції $f(x) = x^3$ є кубічна парабола, яку можна побудувати за точками. Складемо для цього таблицю:

X	*0*	*1*	*2*	*-1*	*-2*
$f(x)$	*0*	*1*	*8*	*-1*	*-8*

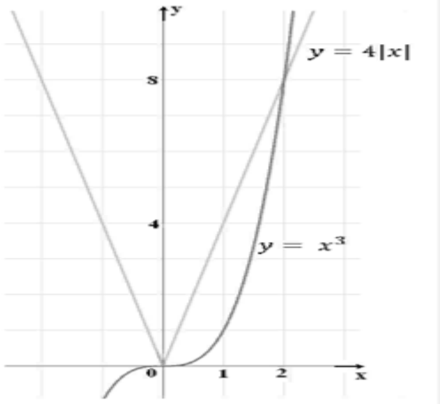


Рис.2.7.

2) Графік будуємо для невід'ємних значень *x,* тоді $g(x) = 4x$. Для від'ємних значень *x* симетрично відображаємо графік відносно осі *Oy.*

3) З рисунку видно, що абсциси точок перетину графіків функцій 0 і 2. Знайдемо ці значення алгебраїчним мотодом. Для цього розвяжемо рівняння:

$x^3 = 4|x|;\ x^3 - 4|x| = 0.$

$x \geq 0\colon x^3 - 4x = 0;\ x(x^2 - 4) = 0;\ x_1 = 0, x_2 = 2.$

Значення $x = -2 < 0$

$x < 0\colon x^3 + 4x = 0.$

Від'ємних коренів немає.

4) $s = \int_0^2 (4x - x^3)dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)$

$\Big|_0^2 = 2 \cdot 4 - \dfrac{16}{4} = 8 - 4 = 4.$

Відповідь: $x_1 = 0, x_2 = 2,\ S = 4.$

2.3. Рівняння та системи рівнянь

У математиці досить часто доводиться складати й розв'язувати рівняння, системи рівнянь, нерівностей. Рівнянням належить вагома роль в шкільному курсі математики тому, що вони широко застосовуються в різних розділах математики, в розв'язуванні текстових та прикладних задач. Рівняння – провідне поняття алгебри. У молодшій школі вивчаються деякі лінійні рівняння вигляду $6+x=10; x-3=5$. Число, яке необхідно дітям знайти вони визначають способом підбору, надалі − на основі правил визначення невідомого доданка чи множника. Поняття «рівняння» школярі вивчають у 3 класі. Надалі в 5 класі вивчаючи рівняння використовують ті ж прийоми, але заздалегідь знайомлячись із коренем рівняння. Наприкінці 6 класу дітям подається обґрунтований метод розв'язання рівнянь – перенесення доданків з однієї частини рівняння в іншу та множення і ділення обох частин рівняння. У підручниках 8 класу школярі зустрічаються із квадратними рівняннями різних видів. Паралельно із вивченням рівнянь учні знайомляться і з системами рівнянь та способами їх розв'язування: графічним, підстановки та додавання. Протягом усього курсу математики школярі вивчають, крім лінійних та квадратних, біквадратні, цілі раціональні, двочленні, рівняння з модулями та параметрами. Успішне оволодіння навичками розв'язування рівнянь різних видів та їх систем забезпечить правильне виконання завдань ЗНО з цих тем.

ЗНО−2018 (Завдання 7). Розв'яжіть рівняння $4\sqrt{x}=1$ [68].

Розв'язання.

$$\sqrt{x}=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{16}$$

Відповідь: $x=\frac{1}{16}$

ЗНО−2006 (Завдання 8). Розв'яжіть рівняння $\sin 3x=\frac{1}{2}$ [44].

$$\sin(3x)=\frac{1}{2} \Rightarrow 3x=(-1)^k arcsin\frac{1}{2}+\pi k, k\in Z;$$

$3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$

$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$

Відповідь: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$

ЗНО−2018 (Завдання 5). Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\log_4(x-1) = 3$? [68].

Розв'язання.

$x - 1 = 4^3 \Rightarrow x - 1 = 64 \Rightarrow x = 65$

Відповідь: $x = 65$.

ЗНО−2006 (Завдання 10). Укажіть серед заданих рівняння, яке не має коренів на множині дійсних чисел [44].

1) $\log_2 x - \log_2(x-2) = 1$

2) $\cos x = 1 - \sqrt{3}$

3) $|x+2| = -3$

4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\pi$

Розв'язання.

1) $\log_2 x - \log_2(x-2) = 1$

Знайдемо область допустимих значень змінної x: $\begin{cases} x > 0, \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$

Тепер задане рівняння запишемо у вигляді: $\log_2 \frac{4}{x-2} = 1 = \log_2 2$

Тоді $\frac{x}{x-2} = 2; \Rightarrow \frac{x}{x-2} = \frac{x-2x+4}{x-2} = \frac{4-x}{x-2} = 0,$

Звідки $x = 4$

Отже, задане рівняння має корінь на множині дійсних чисел.

2) $\cos x = 1 - \sqrt{3}$

$-1 \leq \cos x \leq 1,$

$-1 \leq 1 - \sqrt{3} < 0,$

Значить, дане рівняння має корені на множині дійсних чисел.

3) Значення модуля — величина невід'ємна, тому задане рівняння не має коренів на множині дійсних чисел.

4) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\pi$

$-1 \le \sin(x+\frac{\pi}{3}) \le 1,$

$-\pi < 1,$ тому дане рівняння не має коренів на множині дійсних чисел.

Відповідь: 3 і 4.

ЗНО−2006 (Завдання 26). Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2-x-6}=\sqrt{-2x}.$ Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівння має кілька коренів, запишіть у відповідь їх добуток [44].

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2-x-6=-2x, \\ -2x \ge 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x \le 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=2 \end{array}\right. \\ x \le 0 \end{cases}$$

Звідки, $x=-3.$

Відповідь: $x=-3.$

ЗНО−2018 (Завдання 14). Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} xy=-12 \\ x(2y-1)=-18 \end{cases}$ Якщо (x_0,y_0) — розв'язок системи, то x_0 =? [68].

Розв'язання.

$$\begin{cases} xy=-12 \\ 2xyx=-18 \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на −2.

$$\begin{cases} -2xy=24 \\ 2xy-x=-18 \end{cases}$$

Додамо перше і друге рівняння почастинно

$-x=6 \;\Rightarrow\; x=-6.$

Відповідь: $-6.$

ЗНО−2006 (Завдання 27). Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}2^x \cdot 3^y = 24 \\ 2^y \cdot 3^x = 54\end{cases}$

Запишіть у відповідь суму $x_0 + y_0$, якщо пара (x_0; y_0) є розв'язком системи рівнянь [44].

Оскільки $2^y \neq 0, 3^x \neq 0$, то поділимо перше рівняння системи на друге. Одержимо $\frac{2^x}{2^y} \cdot \frac{3^y}{3^x} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$,

$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{4}{9}$,

$\frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{4}{9}$.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Тоді $x - y = 2$, $x = 2 + y$. Наша система набуде вигляду:

$\begin{cases} x = 2 + y, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ 2^y \cdot 3^{2+y} = 54. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ 2^y \cdot 3^2 \cdot 3^y = 54. \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = 2 + y, \\ 9 \cdot 2^y \cdot 3^y = 54. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ 6^y = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ y = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$

Пара (3; 1) є розвязком даної системи рівнянь. Тоді шукана сума — $3 + 1 = 4$.

Відповідь: 4.

ЗНО−2012 (Завдання 23). Установи відповідність між кожним рівнянням (1–4) та кількістю його коренів на відрізку [–5; 5] [27].

Рівняння		Кількість коренів на відрізку [–5; 5]
1)	$\cos^2 x - sin^2 x = 1$	А) жодного
2)	$\log_3 x = -2$	Б) один
3)	$\frac{x^3-4x}{x^3+8} = 0$	В) два
		Г) три
4)	$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$	Д) чотири

Розв'язання.

1) $\cos^2 x - sin^2 x = 1, \cos 2x = 1$, $2x = 2\pi n, n \in z$; $x = \pi n, n \in z$.

На відрізку $[-5; 5]$ маємо три корені $-\pi; 0;\ \pi$.

2) $\log_3 x = -2$;

ОДЗ: $x > 0$. Отже, $x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

$\frac{1}{9} \in [-5; 5]$. Тому, маємо один корінь.

3) $\frac{x^3-4x}{x^3+8} = 0; \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x = 0; \\ x^3 + 8 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x(x-2)(x+2) = 0; \\ x^3 \neq -8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \pm 2, \end{array} \right. \\ x \neq -2. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 2. \end{array} \right.$

Маємо два корені на відрізку $[-5; 5]$.

4)$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$; Нехай $x^2 = a; a \geq 0$.

Тоді $a^2 + 5a + 4 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x = -4; \\ x = -1. \end{array} \right.$ що не задовільняє умову $a \geq 0$. Значить, рівняння $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ не має жодного кореня.

Відповідь: 1–Г, 2–Б, 3–В, 4–А.

ЗНО−2012 (Завдання 27). Розвяжіть систему рівнянь $\begin{cases} y - x = 9, \\ \frac{x+8}{2y-5} = 2 \end{cases}$. Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара $(x_0; y_0)$ є розвязком цієї системи рівнянь [27].

Розв'язання.

$$\begin{cases} y - x = 9, \\ \frac{x+8}{2y-5} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 9, \\ \frac{y-9+8}{2y-5} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 9, \\ \frac{y-1}{2y-5} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 9, \\ \frac{y-1}{2y-5} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 9, \\ \frac{y-1-2\cdot(2y-5)}{2y-5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 9, \\ \frac{y-1-4y+10}{2y-5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 9, \\ \frac{9-3y}{2y-5} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 9, \\ 9 - 3y = 0, \\ 2y - 5 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 9, \\ 3y = 9, \\ 2y \neq 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 9, \\ y = 3, \\ y \neq \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 9, \\ y = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 9, \\ y = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$$

Отже, розв'язками даної системи є пара $x_0 = -6, y_0 = 3$.

$x_0 \cdot y_0 = -6 \cdot 3 = -18$.

Відповідь: -18.

ЗНО−2012 (Завдання 32). При якому найменшому цілому значенні параметра a рівняння $\sqrt{2x+15}\cdot\left(\sqrt{x^2+18x+81}-\sqrt{x^2-10x+25}\right)=$ а$\sqrt{2x+15}$ має лише два різні корені? [27].

Розв'язання: $\sqrt{2x+15}\cdot\left(\sqrt{x^2+18x+81}-\sqrt{x^2-10x+25}\right)=$ а$\sqrt{2x+15}$.

$\sqrt{2x+15}\cdot\left(\sqrt{(x+9)^2}-\sqrt{(x-5)^2}\right)=$ а$\sqrt{2x+15}$.

1)Проаналізуємо, яких значень можуть набувати параметр a та змінна x. Очевидно, що параметр a може набувати довільного дійсного значення. Область допустимих значень змінної x:

$2x+15\geq 0;\ \Rightarrow\ 2x\geq -15;\ \Rightarrow\ x\geq -7{,}5.$

2)Повернемось до рівняння:

$\sqrt{2x+15}\cdot\left(\sqrt{x^2+18x+81}-\sqrt{x^2-10x+25}\right)=$ а$\sqrt{2x+15}$.

$\sqrt{2x+15}\cdot(|x+9|-|x-5|)=$ а$\sqrt{2x+15}$.

$\sqrt{2x+15}\cdot(|x+9|-|x-5|-a)=0.$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+15}=0;\\ |x+9|-|x-5|-a=0.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x+15=0,\\ |x+9|-|x-5|=a.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-7{,}5;\\ |x+9|=|x-5|+a\end{array}\right.$$

Бачимо, що $x=-7{,}5$ — корінь заданого в умові рівняння.

3)Розглянемо друге рівняння одержаної сукупності. Знайдемо найменше ціле а, при якому це рівняння має лише один корінь, і він відмінний від $-7{,}5$.

Зобразимо в прямокутній системі координат графіки функцій $y=|x+9|, y=|x-5|$.

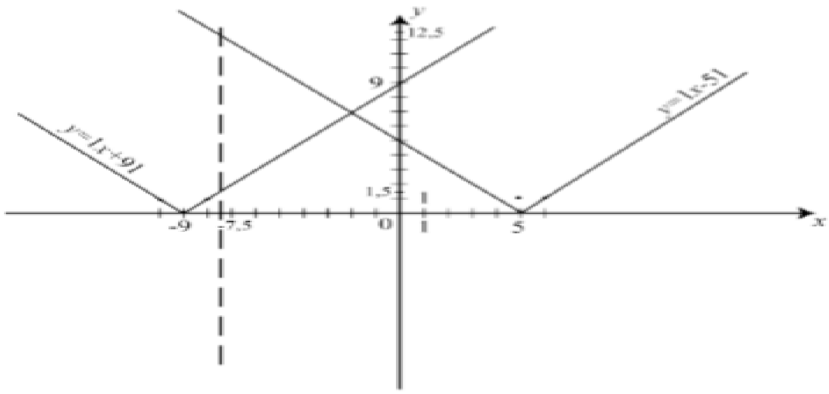


Рис.2.8.

Графік функції $y = |x - 5|$ +а одержуємо з графіка функції $y = |x - 5|$ зміщенням його вздовж осі Оу на а одиниць. Абсциса точки перетину графіків функцій $y = |x + 9|, y = |x - 5| + a$ з найменшою ординатою: $(-7{,}5; 1{,}5)$. Тоді: $a = -(12{,}5 - 1{,}5) = -11,\ x = -7{,}5$.

Але, оскільки умову задачі задовольняє другий корінь, відмінний від $-7{,}5$, то найменшим цілим а, при якому буде одна точка перетину графіків функцій $y = |x + 9|, y = |x - 5| + a$ є число -10.

Отже, найменшим цілим а, при якому вихідне рівняння має лише два різні корені, є число -10.

Відповідь: -10.

ЗНО−2006 (Завдання 31). Знайдіть найменше значення параметра α , при якому систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha^2 \\ (x-7)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, має єдиний розв’язок [44].

Розглянемо друге рівняння системи $(x - 7)^2 + y^2 = 1$.

Його графіком є коло з центром в точці (7; 0) і радіусом завдовжки 1. Розглянемо перше рівняння системи $x^2 + y^2 = \alpha^2$.

Якщо $a = 0$, то графіком цього рівняння є точка (0; 0).

Якщо $a \neq 0$, то графіком цього рівняння є коло з центром в точці (0; 0) і радіусом $|a|$.

Система матиме єдиний розв’язок, якщо ці кола дотикатимуться. Зобразимо схематично обидва кола, коли вони дотикаються.

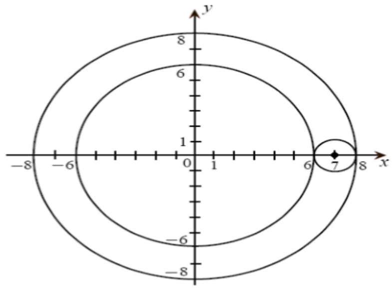


Рис.2.9.

Тоді $\left[\begin{array}{l}|a|=8,\\ |a|=6.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a=\pm 8,\\ a=\pm 6.\end{array}\right.$ Отже, при $a = \pm 6$ або $a = \pm 8$ кола дотикаються, тобто система має єдиний розязок.

Найменшим значення параметра a серед них є -8.

Відповідь: -8.

2.4.Нерівності та системи нерівностей

Нерівності займають вагоме місце в курсі математики, тому основи вивчення теми: «Числові нерівності» закладаються вже у початковій школі, коли учні вчаться порівнювати кількість предметів, чисел задля встановлення відносин «менше», «більше» та записувати результати своїх порівнянь використовуючи знаки $>, <$. Курс алгебри містить багато різноманітних видів нерівностей і їх систем виокремлюють декілька основних типів, серед яких виокремлюють: лінійні нерівності з одним невідомим, квадратні нерівності, найпростіші ірраціональні і трансцендентні нерівності. Вивченню цих класів нерівностей відводиться велика кількість часу, аби діти їх успішно засвоїли. Для розв’язування нерівностей або їх систем варто пам’ятати, що множина розв’язків, як правило, нескінченна, тому зробити перевірку її розв’язків неможливо. Отже учням треба навчитись проводити рівносильні перетворення. Основний метод для розв’язування нерівностей та їх систем в середній і старшій школах – метод інтервалів. Оскільки нерівності як і рівняння займають важливе місце в усьому шкільному курсі математики, то з завдань з ними доволі багато на ЗНО.

ЗНО−2006 (Завдання 4). Розв’яжіть нерівність $a^2 > a$ [44].

$a^2 - a > 0 \quad \Rightarrow \quad a(a-1) > 0$

Рис.2.10.

$a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь: $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

ЗНО−2006 (Завдання 13). Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{4}} 3 \cdot \log_4 x > 0$ [44].

Областю допустимих значень змінної х є проміжок (0; +∞).

$\log_{\frac{1}{4}} 3 = -\log_4 3 \quad \log_4 3 > 0,$ тому $-\log_4 3 < 0,$ тобто $\log_{\frac{1}{4}} 3 < 0$

Поділимо обидві сторони нерівності на $\log_{\frac{1}{4}} 3$

Одержимо $\log_4 x < 0 = \log_4 1$.

Тому $\log_4 x < \log_4 1$

Значить, $x < 1$.

Врахувавши область допустимих значень змінної х маємо:

$\begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 1)$

Відповідь: $x \in (0; 1)$.

ЗНО−2012 (Завдання 17). Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{4}{\pi}\right)^3$ [27].

Розв'язання. $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{4}{\pi}\right)^3$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-3}$.

Оскільки функція $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ монотонно спадна на своїй області визначення, то $x > -3,$ тобто, $x \in (-3;\ +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-3;\ +\infty)$.

ЗНО−2018 (Завдання 18). Розв'яжіть нерівність $2^x + 2^{x+3} \geq 144$ [68].

Розв'язання.

$2^x(1+2^3) \geq 144 \quad \Rightarrow$

$2^x(1+8) \geq 144 \quad \Rightarrow$

$2^x \times 9 \geq 144 \quad \Rightarrow$

$2^x \geq 16 \;\Rightarrow\; 2^x \geq 2^4$

$x \geq 4 \;\Rightarrow\; x \in [4; +\infty)$

Відповідь: $x \in [4; +\infty)$

ЗНО−2006 (Завдання 21). Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком неріності $\frac{x^2+2x-3}{|x+2|} < 0$ [44].

Розв'язання.

$$\frac{(x+3)(x-1)}{|x+2|} < 0$$

Рис.2.11.

Тоді найменшим цілим розв'язком неріності є число -1.

Відповідь: -1.

ЗНО−2012 (Завдання 19). Укажіть множину всіх значень α, при яких виконується рівність $|a^3-a^2| = a^3-a^2$ [27].

Розв'язання. Якщо $|a^3-a^2|$, то $a^3-a^2 \geq 0$. Тоді $a^2(a-1) \geq 0$. Скористаємось методом інтервалів:

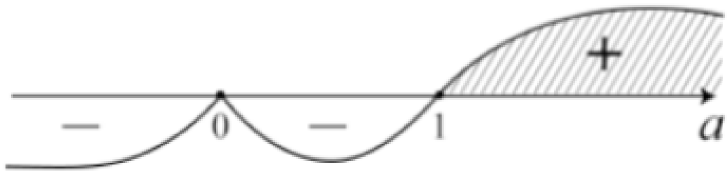


Рис.2.12.

Отже, $a \in \{0\} \cup [1;\ +\infty)$.

Відповідь: $a \in \{0\} \cup [1;\ +\infty)$.

ЗНО−2018 (Завдання 33). Розвяжіть нерівність $\frac{\log_a x}{x^2+(a-4)x+4-2a} \le 0$ залежно від значень параметра a [68].

Розв'язання.

$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$ отже $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

Область допустимих значень змінної x:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + (a-4)x + 4 - 2a \neq 0, \end{cases}$$

Знайдемо корені квадратного тричлена у знаменнику:

$D = (a-4)^2 - 4(4-2a) = a^2, \sqrt{D} = |a| = a,$

$$x_1 = \frac{-(a-4)-a}{2} = 2-a;\ , x_2 = \frac{-(a-4)+a}{2} = 2$$

Маємо такий висновок:

якщо $2 - a \le 0$, тобто $a \ge 2$, то $x \in (0;2) \cup (2;+\infty)$,

якщо $2 - a > 0$, тобто $a < 2$, то $x \in (0;2-a) \cup (2-a;2) \cup (2;+\infty)$.

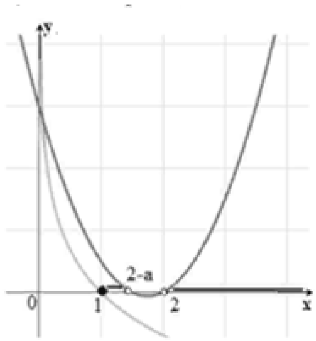
Розвязуємо нерівність методом інтервалів. $\log_a x\big(x-(2-a)\big)(x-2) \le 0$.

Розв'язки даної нерівності будуть рівносильними розв'язкам початкової нерівность на знайденій області визначення. На числовій осі нанесемо корені функції, а саме: $x \neq 0, x = 1, x = 2, x = 2-a$. В залежності від розміщення кореня $x = 2-a$ матимемо різні варіанти:

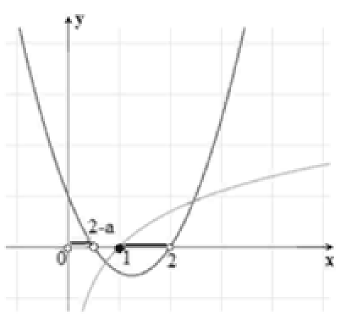
якщо $0 < a < 1$, то $x \in [1;2-a) \cup (2;+\infty)$.

2) $1 < a < 2$: $x_1 \in (0;1)$.

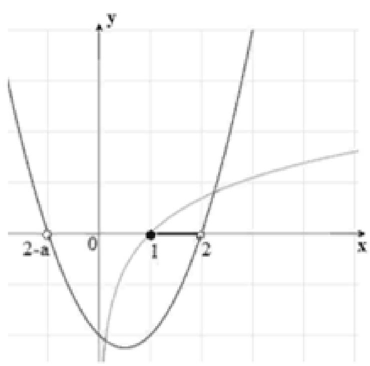
3) $a \ge 2$: $x_1 \le 0$



$0 < a < 1$



$1 < a < 2$



$a \ge 2$

Рис.2.13.

Відповідь: якщо $a \in (0;1)$, то $x \in [1; 2-a) \cup (2; +\infty)$; якщо $a \in (1;2)$, то $x \in (0; 2-a) \cup [1; 2)$; якщо $a \in [2; +\infty)$, то $x \in [1; 2)$.

2.5.Текстові задачі

Текстові задачі відіграють важливу роль для школярів, тому вивчаються вже з 5 класу. Виконуючи розв'язування задач, дитина вчиться підлаштовувати знання з математики до своїх життєвих потреб, до використання у практичній діяльності в дорослому житті. Ключові моменти розв'язування задач охоплюють знання основних етапів розв'язку, методів виконання обчислень, видів задач, вміння пояснювати алгоритм аналізу умови задачі. Для того аби впоратися із будь-якою задачею школяреві необхідне володіння математичними аспектами: основними поняттями, термінами й формулами, правилами розв'язування, логічними прийомами й операціями. Навчаючи дітей розв'язувати текстові задачі вчитель може застосовувати у своїй роботі як арифметичний так і алгебраїчний способів виконання дій . Учні покроково опановують навички проведення узагальнення і систематизації отриманого матеріалу із умови задачі, осмислюють вже наявні методи виконання обрахунків та знайомляться з новими, котрі вони зможуть застосовувати до кожної із задач, що їм зустрінуться в курсі математики. Також, для успішного оволодіння методикою розв'язування текстових задач, дітей з початкової школи привчають наводити пояснення своїх дій в процесі роботи над задачею, що значно покращить розвиток логічного мислення, збагатить математичний словниковий запас та сформує навичку чіткого та стислого висловлювання своїх думок.

ЗНО−2018 (Завдання 3). У буфеті друзі купили кілька однакових тістечок вартістю 10 грн. кожне і 5 однакових булочок вартістю х грн. кожна.

Яке з чисел може виражати загальну вартість цієї покупки (у грн.), якщо х – ціле число? [68].

Розв'язання. Оскільки числа 10 і 5 кратні 5. Тому і загальна сума покупки має бути кратною 5. Тому це буде число 35.

Відповідь: 35.

ЗНО−2006 (Завдання 6). Товар подешевшав на 20%. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту ж саму суму грошей? [44].

Розв'язання. Нехай до подешевшання товар коштував x грн. Після подешевшання на 20% він коштує $(0{,}8x)$ грн.

Далі задача переформулюється так: скільки відсотків становить x грн, якщо $(0{,}8x)$ грн становить 100%.

Одержимо:

$$\frac{x}{0{,}8x}\cdot 100\% = \frac{100\%}{0{,}8} = \frac{1000\%}{8} = 125\%$$

Отже, тепер можна купити на 25% більше товару.

Відповідь: на 25%.

ЗНО−2012 (Завдання 14). З міст А і В, відстань між якими по шосе становить 340 км. Одночасно назустріч один одному виїхали автобус і маршрутне таксі зі сталими швидкостями 65 км/год і 80 км/год відповідно. Автобус і маршрутне таксі рухаються без зупинок і ще не зустрілися. За якою формулою можна обчислити вдстань S (у км) між автобусом і маршрутним таксі по шосе через t годин після початку руху? [27].

Розв'язання. За час t атобус проїхав 65t кілометрів, маршрутне таксі проїхало 80t кілометрів. Разом вони проїхали $65t + 80t = 145t$ (км). Значить, відстань між ними у кілометрах: $S = 340 - 145t$.

Відповідь: $S = 340 - 145t$.

ЗНО−2012 (Завдання 6). Для фахівців розробили макет рекламного оголошення. За роботу вони отримали 5000 грн., розподіливши гроші таким чином: перший отримав четверт частину зароблених грошей, а другий – решту. Скільки гривень отримав за цю роботу другий фахівець? [27].

Розв'язання. Якщо перший фахівець отримав четверту частину грошей, то другий отримав три чверті зароблених грошей $5000 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5000 \cdot 3}{4} = 1250 \cdot 3 = 3750$ (грн).

Відповідь: 3750 (грн).

ЗНО−2018 (Завдання 28). У майстерні мали виготовити 240 стільців за n днів, причому щодня планували виробляти однакову кількість стільців. Однак, на прохання замовника, завдання виконали на 2 дні раніше запланованого терміну. Для цього довелося денну норму виготовлення збільшити на 4 стільці. Визначте n [68].

Розв'язання.

	Дні	Стільці	За день
План	N	240	$\frac{240}{n}$
Факт	n-2	240	$\frac{240}{\mathrm{n}-2}$

$>$ на 4 *ст*.

$$\frac{240}{n-2} - \frac{240}{n} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{240n - 240n + 480 - 4n^2 + 8n}{n(n-2)} = 0$$

$$-4n^2 + 8n + 480 = 0 \ \Rightarrow \quad n^2 - 2n - 120 = 0$$

За теоремою Вієтта: $n_1 n_2 = -120$; $n_1 + n_2 = 2 \ \Rightarrow \ n_1 = 12$, $n_2 = (-10)$ – сторонній корінь.

Відповідь: 12.

ЗНО−2018 (Завдання 25). Для визначення ширини автомагістралі $h_{маг}$ (у м), що має по 4 однакові смуги руху транспорту в обох напрямках (див.рисунок), використовують формулу $h_{маг} = 8\mathrm{b} + \mathrm{r} + 2\Delta$, де

b—ширина однієї смуги руху транспорту

r—ширина розділювальної смуги між напрямками туху транспорту;

Δ—ширина запобіжної смуги між крайньою смугою руху й бордюром [68].

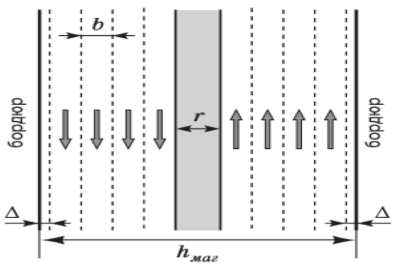


Рис.2.14.

Розв'язання.

1. Визначте ширину b однієї смуги, якщо $h_{маг}$=40,2 *м*, r=10 *м*, Δ=1,5 *м*.

$h_{маг} = 8b + r + 2\Delta \;\; \Rightarrow \;\; 40{,}2 = 8b + 10 + 3 \;\; \Rightarrow$

$8b = 40{,}2 - 13 \quad \Rightarrow \quad 8b = 27{,}2 \quad \Rightarrow \; b = 3{,}4 \; (м)$

2. Заплановано збільшити ширину кожної смуги руху транспорту на 10% за рахунок лише зменшення ширини розділювальної смуги. На скільки метрів потрібно зменшити ширину розділювальної смуги?

10% *від* $3{,}4 \, м{:}\, 3{,}4{:}\, 10 = 0{,}34 (м)$

$8 \cdot 0{,}34 = 2{,}72 \; (м).$

Відповідь: $2{,}72 \; (м).$

2.6. Елементи математичного аналізу

До елементів математичного аналізу в шкільному курсі математики відносять арифметичну та геометричну прогресії, похідну, первісну та інтеграл. Послідовністю називають функцію, задану на множині всіх натуральних чисел або на множині перших натуральних чисел. Відштовхуючись від цього означення учні 9 класу плавно переходять до вивчення арифметичної прогресії, кожен член якої, починаючи з другого, утворюють шляхом додаванням до попереднього члена одного і того ж самого числа. Після опанування арифметичної прогресії школярі знайомляться із геометричною.

Розділу алгебри та початків аналізу для 10 класу «Похідна та її застосування» відведено важливу роль у шкільному курсі математики через його прикладне значення. Опановуючи цю тему, учні засвоюють поняття похідної, розкривають її геометричний і механічний зміст. Школярі дізнаються як за допомогою диференціального числення можна досліджувати властивості всіх їм відомих функцій, будуються їхні графіки, знаходити найбільше й найменше значення змінних на певних проміжках, обраховувати площі й об'єми геометричних фігур та розширювати всі свої знання з математичних наук.

Настурний розділ про первісну та інтеграл навчальною програмою передбачено вивчати у 11 класі. Потреба вевчення даного матеріалу полягає розкритті взаємовідношень між первісною та інтегралом, операцією інтегрування як оберненою до операції диференціювання; використанні знань про інтеграл задля знаходження площі криволінійної трапеції та об'ємів найпростіших тіл обертання, які учні зустрінуть вивчаючи геометрію. Оскільки на ЗНО з математики зустрічаються завдання різного плану з елементів математичного аналізу, то учні мають володіти методикою розв'язування таких завдань.

ЗНО−2006 (Завдання 11). На рисунку зображено графік функції *y=f(x)* і дотичну до нього у точці з абсцисою x_0.Знайдіть значення $f'(x_0)$ [44].

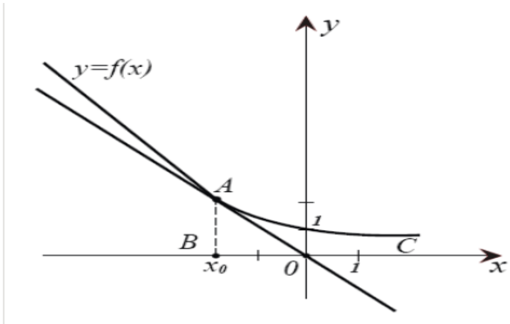


Рис.2.15.

Розв'язання. Похідна функції f(x) в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної, проведеної до графіка функції f(x) в точці з абсцисою x_0 , до дотатного напрямку осі Ох. Тобто $f'(x_0) = tg < AOC = tg(180° - < AOB) = -tg < AOB = -\frac{AB}{BO} = -\frac{2}{2} = -.1$

Відповідь: -1.

ЗНО−2018 (Завдання 19). Укажіть похідну даної функції $f(x) = x(x^3+1)$ [68].

Розв'язання.

$f(x) = x^4 + x \;\; \Rightarrow \;\; f^{'}(x) = 4x^3 + 1$

Відповідь: $f'(x) - 4x^3 + 1$.

ЗНО−2012 (Завдання 20). Функція $f(x)$ має в точці x_0 похідну $f'(x_0) = -4$. Визначте значення похідної функції $g(x) = 2 \cdot f(x) + 7x - 3$ в точці x_0 [27].

Розв'язання.

$g'(x) = 2 \cdot f'(x) + 7;\; g'(x_0) = 2 \cdot f'(x_0) + 7;\; g'(x_0) = 2 \cdot (-4) + 7 =$

$= -8 + 7 = -1.$

Відповідь: -1.

ЗНО−2006 (Завдання 22). Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий – 20 [44].

Розв'язання. Нехай маємо арифметичну прогресію $(a)_n$, в якій $a_1 = 2, a_7 = 20$.

За формулою n-го члена арифметичної прогресії $a_7 = a_1 + d(7-1) = a_1 + 6d = 2 + 6d = 2 + 6d = 20$

Тоді $6d = 18, d = 3$ (d −різниця арифметичної прогресії). За формулою *n* перших членів арифметичної прогресії маємо:

$S_{20} = \frac{2a_1 + d(20-1)}{2} \cdot 20 = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 19}{2} \cdot 20 = \frac{61 \cdot 20}{2} = 61 \cdot 10 = 610.$

Відповідь: 610.

ЗНО−2012 (Завдання 11). У залі кінотеатру 18 рядів. У першому ряду знаходиться 7 місць, а в кожному наступному ряду на 2 місця більше, ніж у попередньому. Скільки всього місць у цьому залі? [27].

Розв'язання. Розглянемо арифметичну пргресію (a_n), в якій порядковий номер члена прогресії є номером ряду, а членами прогресії є кількість місць у ряду. Тоді: $a_1 = 7, d = 2$. Формула суми n перших членів арифметичної прогресії: $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Тоді $S_{18} = \frac{2\cdot7+2\cdot17}{2} \cdot 18 = \frac{2(7+17)}{2} \cdot 18 = 24 \vdots 18 = 432.$ Отже, в залі 432 місця.

Відповідь: 432 місця.

ЗНО−2018 (Завдання 29). В Оленки є 8 різних фотографій з її зображенням та 6 різних фотографій її класу. Скільки всього в неї є способів вибрати з них 3 фотографії зі своїм зображенням для персональної сторінки в соціальній мережі та 2 фотографії свого класу для сайту школи? [68].

Розв'язання.

8 власних фото	6 фото класу
Вибрати 3 власні	Вибрати 2 класу

$C_8^3 \cdot C_6^2 = \frac{8!}{5!\cdot3!} \cdot \frac{6!}{2!\cdot4!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot3\cdot2!} \cdot \frac{6\cdot5\cdot4!}{2!4!} = \frac{8\cdot7\cdot6!}{3\cdot2!} \cdot \frac{6\cdot5!}{2!} = 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 840.$

Відповідь: 840.

ЗНО−2018 (Завдання 27). Знаменник геометричної прогресії дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума чотирьох перших її членів дорівнює 65. Знайдіть перший член цієї прогресії [68].

Розв'язання.

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \;\Rightarrow\; 65 = \frac{b_1(1-(\frac{2}{3})^4)}{1-\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; 65 = \frac{b_1\left(1-\frac{16}{81}\right)}{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow$$

$$3b_1 \cdot \frac{65}{81} = 65 \quad\Rightarrow \frac{3\,b_1}{81} = 1 \quad\Rightarrow\quad 3b_1 = 81 \quad\Rightarrow\quad b_1 = 27$$

Відповідь: 27.

ЗНО−2012 (Завдання 30). Обчисліть $\frac{1}{\pi}\int_{-5}^{0}\sqrt{25-x^2}dx,$ використовуючи рівняння кола $x^2 + y^2 = 25,$ зображеного на рисунку [27].

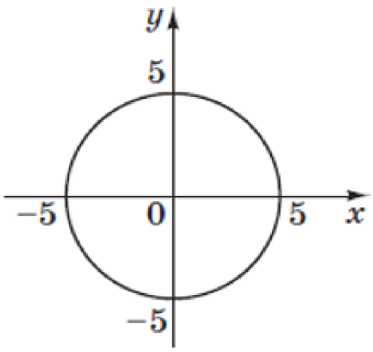


Рис.2.16.

Розв'язання. $\int_{-5}^{0}\sqrt{25-x^2}dx$ чисельно рівний чверті площі круга, обмеженого колом, рівняння якого $x^2+y^2=25$.

$$\int_{-5}^{0}\sqrt{25-x^2}dx=\frac{1}{4}\cdot S_{\text{круга}}=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 5^2=\frac{25\pi}{4}.$$

Тоді: $\frac{1}{\pi}\int_{-5}^{0}\sqrt{25-x^2}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{25\pi}{4}=\frac{25}{4}=6{,}25.$

ЗНО−2006 (Завдання 30). Річка тече лугом і двічі перетинає шосе, утворюючи криву $y=3x-x^2$. Яка площа лугу між шосе та річкою, якщо вважати, що лінія шосе збігається з віссю OX? Одиниця довжини – 1 км [44].

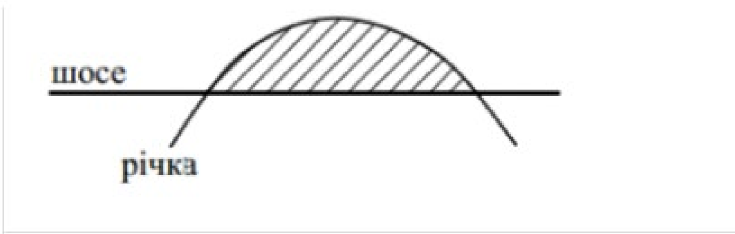


Рис.2.17.

Оскільки лінія шосе співпадає з віссю *Ox*, то шукана площа — це площа фігури, утвореної кривою $y=3x-x^2$ та віссю Ox.

1) Знайдемо абсцису точки перетину кривої $y=3x-x^2$ з віссю Ox. $3x-x^2=0,\ x(3-x)=0.\ \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=3.\end{array}\right.$

2) Тоді шукана площа дорівнює

$$\int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) = \frac{27 \cdot 3}{6} - \frac{27 \cdot 2}{6} = \frac{27 \cdot (3-2)}{6}$$
$$= \frac{27}{6} = 4{,}5$$

Відповідь: $4{,}5$ км^2.

2.7. Планіметрія

Розділ геометрії, в якому вивчаються властивості фігур на площині, називається планіметрією. Учні початкових класів отримують знання на пропедевтичних основах, задля їх підготовки до вивчення поглибленого матеріалу в класах основної школи, щоб сформувати навички застосовувати набуті на уроках знання під час вивчення інших навчальних предметів та використання у життєвих ситуаціях. Діти оволодівають навичками створення геометричних фігур на папері чи дошці від руки та користуючись простими інструментами для креслення: лінійкою, циркулем, косинцем. Вчителі допомагають сформувати уявлення та поняття про геометричні фігури на площині, їх істотні ознаки і властивості. Завдяки цьому школярі зможуть легко розпізнавати фігури та їх складові, знаходити схожі та відмінні риси з речами навколишньої дійсності. В середній школі ці знання поглиблюються. Учнів знайомлять із застосуванням елементів тригонометрії і алгебри, векторів і координат до розв’язування задач. Геометричні фігури пронизують весь шкільний курс математики, йому їх вивченню приділяється велика увага і тому вправи пов’язані з побудовою геометричних фігур виносяться на ЗНО.

ЗНО−2018 (Завдання 9). У просторі задано паралельні прямі m $і$ n . Які з наведених тверджень є правильними?

І. Існує площина, що містить обидві прямі m $і$ n

ІІ. Існує пряма, що перетинає обидві *прямі* m $і$ n

ІІІ. Існує точка, що належить обом прямим m і n [68].

Розв'язання. Оскільки паралельні прямі ніколи не перетинаються, то вони й не можуть мати спільної точки. Тому правильна відповідь: лише І та ІІ.

Відповідь: твердження І та ІІ.

ЗНО−2018 (Завдання 2). Три прямі, розміщені в одній площині, перетинаються в одній точці. Визначте градусну міру кута α [68].

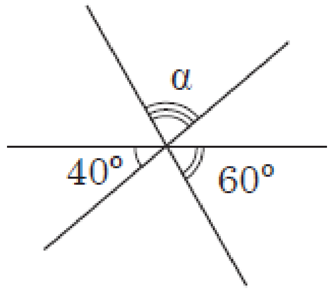


Рис.2.18.

Розв'язання.

$\alpha = 180° - (40° + 60°) = 80°$

Відповідь: 80°.

ЗНО−2006 (Завдання 17). Прямі m і n паралельні. Обчисліть величину кута x, зображеного на рисунку [44].

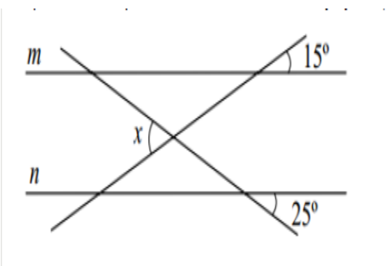


Рис.2.19.

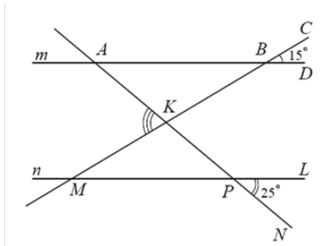


Рис.2.20.

1) $< KPM = 25°$ як вертикальний з $< NPL$.

2) $< KPM = 15°$ як відповідний $< CBD$ (ці відповідні кути утворені при перетині паралельних прямих m і n січною MB).

3) Сума кутів трикутника дорівнює $180°$. Тоді з ΔMKP маємо: $< MKP = 180° - < KMP = 180° - 25° - 15° = 180° - 40° = 140°$.

4) $< AKM$ суміжний з $< MKP$. Отже, $< AKM = 180° - 140° = 40°$

Відповідь: $40°$.

ЗНО−2012 (Завдання 1). Два кола з центрами в точках O і O_1, мають внутрішній дотик. Обчисліть відстань OO_1, якщо радіуси кіл дорівнюють 12 см і 8 см [27].

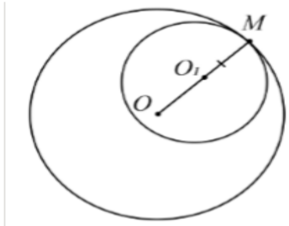


Рис.2.21.

Розв'язання. Позначимо точку дотику М. Тоді $OO_1 = O_1M = 12 - 8 = 4$ см.

Відповідь: 4 см.

ЗНО−2012 (Завдання 7). Пряма c перетинає паралельні прямі a i b. Які з наведених тверджень є правильними для кутів 1, 2, 3? [27].

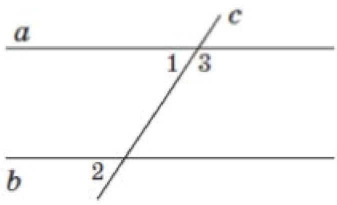


Рис.2.22.

1. $\angle 1$ i $\angle 3$ — суміжні.
2. $\angle 1 = \angle 2$.
3. $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Розв'язання.

1) $\angle 1$ i $\angle 3$ разом утворюють розгорнутий кут, отже они суміжні.

2) $\angle 1 \; і \; \angle 2$ — відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих a і b січною c; отже вони рівні.

3) $\angle 1 = \angle 2, \; \angle 1 + \angle 3 = 180°$ тому: $\angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 3 = 180°$

Відповідь: правильні усі три твердження.

ЗНО−2018 (Завдання 11). На рисунку зображено паралельні прямі $a \; і \; b$ та січну CD. Знайдіть відстань між прямими $a \; і \; b$, якщо CK=5 *см,* KD=2 *см*, а відстань від точки K до прямої a дорівнює 1 *см* [68].

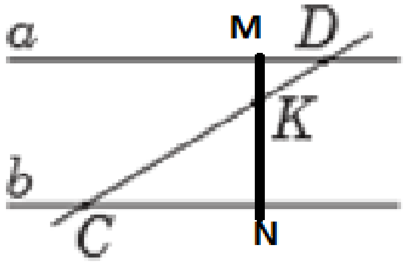


Рис.2.23.

Розв'язання.

Відстані від точки K до прямих – це перпендикуляри KM та KN. А перпендикуляр MN- спільний. $\Delta CKN \sim \Delta DKM$ подібні за I ознакою. Тому $\frac{5}{2} = \frac{x}{1}$

$2x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}5 \; (см)$

MN=1+2,5=3,5 (см)

Відповідь: 3,5 см.

ЗНО−2018 (Завдання 24). Установіть відповідність між геометричною фігурою (1-4) та її площею (А-Д) [68].

Геометрична фігура

1) Ромб зі стороною 6 см і тупим кутом $120°$

2) Квадрат, у який уписане коло радіуса 2 см

3) Парелелограм, одна сторона якого дорівнює 5 см, а висота, проведена з вершини тупого кута, ділить іншу сторону на відрізки завдовжки 4 см і 2 см.

4) Прямокутник, більша сторона якого дорівнює 6 см й утворює з діагоналлю кут $30°$

Площа геометричної фігури

А) 12 $см^2$

Б) 16 $см^2$

В) 18 $см^2$

Г) $12\sqrt{3}см^2$

Д) $18\sqrt{3}см^2$

Розв'язання.

1) $S_{\text{ромба}} = a^2 \cdot \sin\alpha = 6^2 \cdot \sin 120° = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}\ \text{см}^2.$

Якщо радіус вписаного в квадрат кола 2 *см*, то сторона квадрата дорівнює 4 *см*. $S_{\text{квадрата}} = a^2 = 4^2 = 16\ \text{см}^2.$

2) Якщо висота, проведена з вершини тупого кута, ділить іншу сторону на візрізки завдовжки 4 см і 2см. То ця сторона дорівнює $4 + 2 = 6$ см. З прямокутного трикутника знайдемо висоту паралелограма. З теореми про єгипетський трикутник вона дорівнює 3 см. $S_{\text{паралелограма}} = a \cdot h = 6 \cdot 3 = 18\ \text{см}^2.$

3) З прямокутного трикутника знайдемо ширину прямокутника за означенням тангенса: $tg30° = \frac{b}{6}, b = 6 \cdot\ tg30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ см, $S_{\text{прямокутника}} = a \cdot b = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\ \text{см}^2.$

Відповідь: 1–Д, 2–Б, 3–В, 4–Г.

ЗНО–2012 (Завдання 29). У трикутнику АВС основа висоти АК лежить на продовженны сторони ВС. $AK = 6,\ KB = 2\sqrt{3}$. Радіус описаного навколо трикутника АВС кола дорівнює $15\sqrt{3}$. Визначте довжину АС [27].

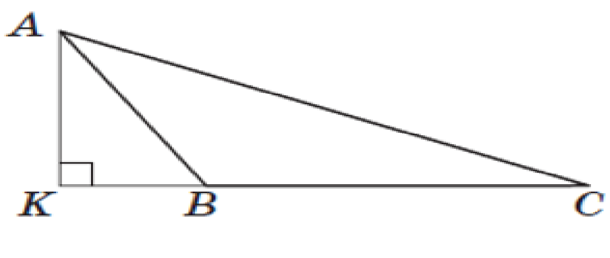


Рис.2.24.

Розв'язання. ΔАКВ прямокутний ($\angle K = 90°$). За теоремою Піфагора:

$$AB^2 = AK^2 + KB^2 \quad \Rightarrow \quad AB^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 = 36 + 12 = 48.$$

$$AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \sin\angle ABK = \frac{AK}{AB} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\sin\angle ABK = \sin\angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. За наслідком з теореми синусів у ΔABC:

$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$, тоді: $\frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\cdot 15\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$; $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 30\sqrt{3} = \frac{30\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{30\cdot 3}{2} =$

$= 15\cdot 3 = 45.$

Відповідь: 45.

ЗНО−2012 (Завдання 16). На рисунку зображено паралелограм ABCD, площа якого дорівнює 60 см^2. Точка M належить стороні BC. Визначте площу фігури, що складається з двох зафарбованих трикутників [27].

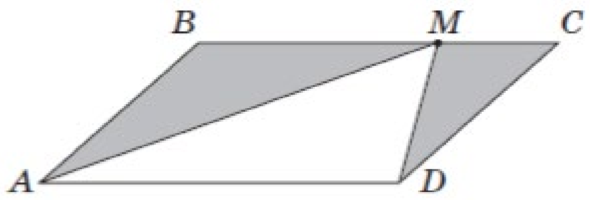


Рис.2.25.

Розв'язання. Нехай h — висота паралелограма, проведена до сторони AD. Тоді площа паралелограма: $S_{ABCD} = h\cdot AD = 60$ см^2. Площа трикутника AMD дорівнює половині площі паралелограма: $S_{AMD} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot AD = \frac{1}{2}\cdot 60 = 30$ (см^2). Тоді площа зафарбованих частин: $S = S_{ABCD} - S_{AMD} = 60 - 30 = 30$ (см^2).

Відповідь: 30 (см^2).

ЗНО−2006 (Завдання 18). У прямокутнику ABCD прямі m і n проходять через точку перетину діагоналей. Площа фігури, що складається з трьох зафарбованих трикутників, дорівнює 12 см^2. Обчисліть площу прямокутника ABCD [44].

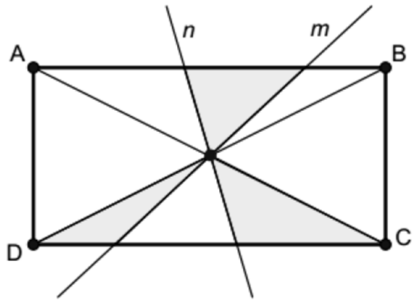


Рис.2.26.

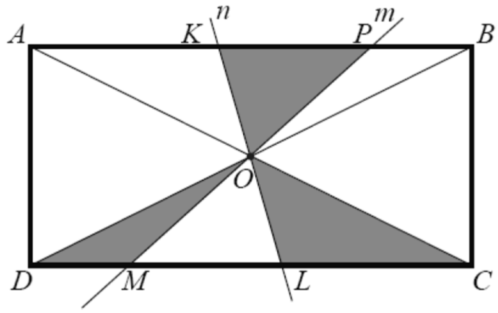


Рис.2.27.

1) Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл. Діагоналі прямокутника рівні. Отже, $AO = OC, DO = OB$.

2) $< KAO =< LCO, < PKO = MLO, < PBO =< MDO$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і DC та січних AC, KL, DB відповідно.

3) $< AOK =< COL, < KOP = LOM, < POB =< MOD$ як вертикальні.

4) Тоді $\Delta AOK = \Delta COL, \Delta BOP = DOM$ за стороною і двома прилеглими кутами.

5) Значить, $KO = OL$. $\Delta KOP = \Delta LOM$ за стороною і двома прилеглими кутами.

6) Рівні трикутники мають рівні площі. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COL,} S_{\Delta COP} = S_{\Delta LOM,} S_{\Delta BOP} = S_{\Delta DOM.}$

7) $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta AOK+} S_{\Delta KOP} + S_{\Delta BOP} = S_{\Delta COL} + S_{\Delta KOP} + S_{\Delta DOM} = 12$ см^2.

8) Медіана розбиває трикутник на два рівновеликі трикутники. AO – медіана ΔDAB. Тоді $S_{\Delta DAB} = S_{\Delta ADO} + S_{\Delta AOB} = 2S_{\Delta AOB} = 2 \cdot 12 = 24$ см^2.

9) Протилежні сторони прямокутника рівні. Тому $S_{\Delta DAB} = S_{\Delta BCD} = 24$ см^2.

10) Площа прямокутника ABCD дорівнює $S_{\Delta ABCD} = 2S_{\Delta DAB} = 2 \cdot 24 = 48$ см^2.

Відповідь: 48 см^2.

ЗНО−2018 (Завдання 20). На рисунку зображено фрагмент поперечного перерізу стіни (прямокутник KLMN) з арковим прорізом ABFCD, верхня частина BFC якого є дугою кола радіуса 1 м. Відрізки AB і DC перпендикулярні до AD, AB=DC=2 м. AD=1,6 м, KL=2,75 м. Визначте відстань d від найвищої точки F прорізу до стелі LM [68].

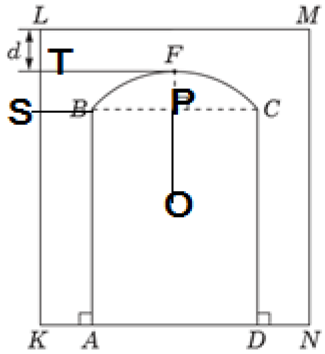


Рис.2.28.

Розв’язання.

$BC = 1{,}6 \div 2 = 0{,}8\ (м)$

У ΔOPC: $OP = 0{,}6\ (м)$ *− за Піфагоровою трійкою*

PF=1-0,6=0,4 (м)   ST=PF=0,4 (м)

KS=AB=2(м)   KT=2 +0,4=2,4 (м)

d=2,75-2,4=0,35(м)

Відповідь: 0,35 (м).

ЗНО−2012 (Завдання 18). У прямокутнику ABCD:BC=80, AC=100. Через точки M і K, що належать сторонам AB і BC відповідно, проведено пряму паралельну AC. Знайдіть довжину більшої сторони трикутника MBK, якщо BK=20 [27].

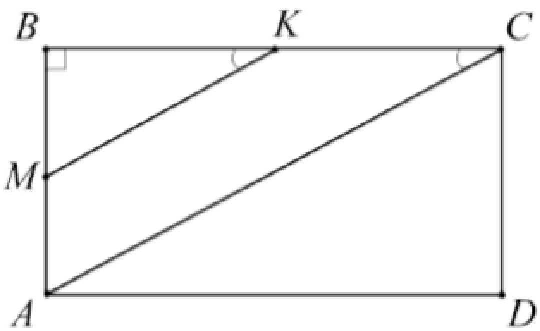


Рис.2.29.

Розв’язання. ABCD — прямокутник. $BC = 80, AC = 100, MK \parallel AC, BK = 20.$

Трикутники MBK і ABC прямокутні ($\angle B = 90°$). $\angle BKM = \angle BCA$ як відповідні при паралельних прямих MK, AC та січній BC. Тоді $\Delta MBK \sim \Delta ABC$ за двома кутами. Отже: $\frac{BK}{BC} = \frac{MK}{AC}$; $\frac{20}{80} = \frac{MK}{100}$; $\frac{MK}{100} = \frac{1}{4}$; $MK = \frac{100}{4} = 25$.

Відповідь: 25.

ЗНО−2006 (Завдання 24). Дві вежі, одна з яких – 40 футів, а друга – 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що знаходиться між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі у футах [44].

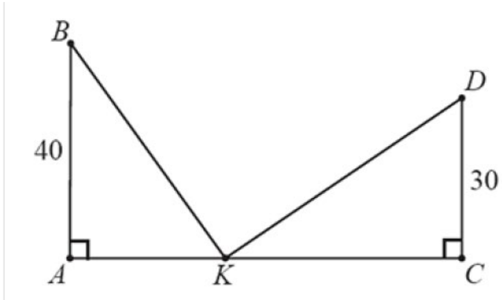


Рис.2.30.

Відрізком AB зобразимо башню заввишки 40 футів, відрізком CD – башню заввишки 30 футів, відрізком AC – відстань між башнями. AC перпендикулярно до AB, ACперпендикулярно до CD. За умовою задачі колодязь знаходиться між башнями, тому точка K, яка зображає місцезнаходження колодязя, належить відрізку AC. Тоді AK — відстань від колодязя до 40-футової башні, CK— відстань від колодязя до 30-футової башні. Оскільки швидкості і час польоту пташок однакові, то відстань вони пролетять однакову, тобто,BK=DK.

Нехай $AK = x (0 < x < 50)$. Тоді $CK = 50 - x$.

З ΔABK за теоремою Піфагора:$BK^2 = AB^2 + AK^2 = 40^2 + x^2$.

Тоді $BK^2 = DK^2$. Значить $40^2 + x^2 = 30^2 + (50 - x)^2$,

$40^2 + x^2 = 30^2 + 50^2 - 100x + x^2$.

$100x = 50^2 - 40^2 + 30^2 = (50 - 40)(50 + 40) + 30^2 = 10 \cdot 90 + 900 =$

$= 900 + 900 = 1800$.

$x = 18.$

Отже, AK=18 футів, KC=50-18=32 фути. Значить відстань від колодязя до найближчої башні – 18 футів.

Відповідь: 18 футів.

ЗНО−2018 (Завдання 26). У прямокутному трикутнику ABC ($< C = 90°$) відстані від середини медіани BM до катетів AC і BC дорівнюють 5 см і 6 см відповідно [68].

Розв'язання.

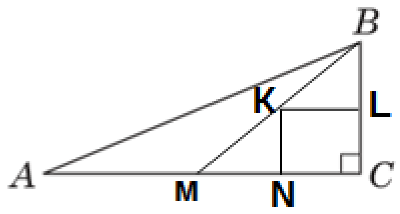


Рис.2.31.

1. Визначтедовжину катета AC (у см).

Оскільки K− середина BM, то L−середина BC, а N−середина MC.

За теоремою Фалеса:

KL−середня лінія ΔMBC

MC=2$\cdot 6 = 12$ (см)

AC=$12 \cdot 2 = 24$ (*см*)

2. Визначте радіус (у см) кола, описаного навколо трикутника ABC.

$$R = \frac{c}{2}$$

KN-середня лінія BC

BC=$2 \cdot 5 = 10$ (*см*)

За Піфагоровими трійками:

AB=$13 \cdot 2 = 26$ (*см*)

$R = 26 : 2 = 13$ (*см*).

Відповідь: 13 (см).

ЗНО−2006 (Завдання 29). Відрізок 12 см завдовжки поділили на дві частини так, що сума площ квадратів, побудованих на цих частинах, стала найменшою. Обчисліть суму площ квадратів [44].

Розв'язання. Відрізок 12 см завдовжки поділили на дві частини. Нехай довжина однієї частини x см ($0 < x < 12$), а другої - $(12 - x)$ см.

Тоді площі квадратів, сторонами яких є відрізком завдовжки x см і $(12 - x)$ відповідно дорівнюють x^2 та $(12 - x)^2$. Сума цих площ дорівнює $x^2 + (12 - x)^2 = x^2 + 144 - 24x + x^2 = 2x^2 - 24x + 144$.

Розглянемо функцію $f(x) = 2x^2 - 24x + 144$, визначену на інтервалі (0; 12) і знайдемо, при якому значенні вона набуває найменшого значення.

Графіком функції $f(x) = 2x^2 - 24x + 144$, є парабола з вітками направленими догори. Значить, мінімального значення функція $f(x)$ набуває у вершині параболи. Абсцису вершини параболи $y = ax^2 + bx + c$ шукаємо за формулою $x_{\text{вершини}} = -\frac{b}{2a}$.

Для нашого випадку маємо $x_{\text{вершини}} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$

Тоді $f(6) = 2 \cdot 6^2 - 24 \cdot 6 + 144 = 72$.

Тобто, шукана сума площ квадратів дорівнює 72 см^2.

Відповідь: 72 см^2.

2.8.Стереометрія

Стереометрія передбачає вивчення особливостей геометричних фігур розташованих у просторі. Основними просторовими фігурами є точка, пряма та площина. Властивості всіх фігур, які вивчались у планіметрії, справджуються і в кожній точці простору. Виконання стереометричних завдань сприяє формуванню просторових уявлень та уяви, оволодінню школярами основними способами обрахунку геометричних величин. Відповідно до навчальної програми, учні мають навчитися зображувати на площині просторові геометричні фігури, знати основні теореми, відрізняти вже знайомі фігури на рисунках. Практикуючись у розв’язуванні типових задачі на обчислення величин та доведення теорем діти навчаються робити обґрунтовані висновки, застосовувати набуті знання до нових ситуацій, а також спиратися на відомості з інших навчальних предметів для їх використання при роботі із фігурами в просторі. Уявним побудовам варто відводити достатньо часу, аби учні успішно їх опанували і в них не виникало проблем під час побудови об’ємних геометричних фігур на папері.

ЗНО−2018 (Завдання 6). Укажіть формулу для обчислення об’єму V півкулі зображеної на рисунку радіуса R [68].

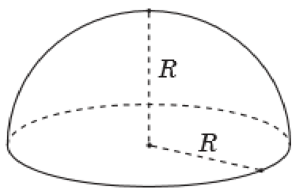


Рис.2.32.

Розв’язання.

Для обчислення об’єму V півкулі використовують формулу: $V = \frac{3}{4}\pi R^3$

Відповідь: $V = \frac{3}{4}\pi R^3$.

ЗНО−2018 (Завдання 15). На рисунку зображено розгортку правильної прикутної призми. Визначте площу бічної поверхні цієї призми, якщо периметр розгортки дорівнює 52 см, а периметр призми становить 12 см [68].

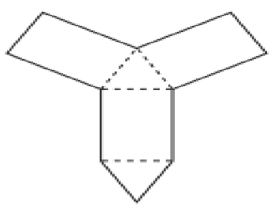


Рис.2.33.

Розв’язання. $P = 3a = 12;\ a = 4$ (см)

Висоти позначимо через – x

$4 \cdot 4 = 16;\ 52 - 16 = 36$

$6x = 36;\ x = 6$ (см)

$S_{б.п.=P\times h=12\times 6=72\ (см^2)}$

Відповідь: $72\ (см^2)$.

ЗНО−2006 (Завдання 20). Знайдіть об’єм тіла утвореного обертанням куба навколо свого ребра, довжина якого a [44].

Розв’язання. При обертанні куба навколо свого ребра утворюється циліндр з висотою, що дорівнює ребру куба, і радіусом основи, що дорівнює діагоналі основи куба. Якщо довжина ребра а, то довжина висоти циліндра – а, довжина радіуса основи циліндра $-a\sqrt{2}.$

Тоді об’єм циліндра $V_{\text{циліндра}} = \pi(a\sqrt{2})^2 \cdot a = 2\pi a^3(\text{куб. од.})$.

Відповідь: $2\pi a^3(\text{куб. од.})$.

ЗНО−2012 (Завдання 12). Прямокутник із сторонами 8 см і 10 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть площу повної поверхні отриманого тіла обертання [27].

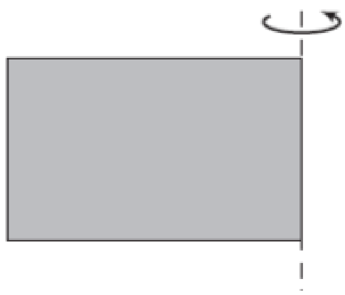


Рис.2.34.

Розв’язання. Отримане тіло обертання — циліндр з радіусом основи 10 см і твірною 8 см. Площа повної поверхні циліндра складається з суми площ його основ та площі бічної поверхні. Основа циліндра — круг, тому $S_{\text{основи}} = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$ (см^2).

Бічна поверхня циліндра — прямокутник, одна сторона якого 8 см, а друга рівна довжині кола основи. $l_{\text{кола}} = 2\pi R = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ (см).

$$S_{\text{б.п.}} = 8 \cdot l = 8 \cdot 20\pi = 160\pi\ (\text{см}^2).$$

Тоді:$S_{\text{п.п.ц.}} = 2 \cdot S_{\text{основи}} + S_{\text{б.п.}} = 2 \cdot 100\pi + 160\pi = 200\pi + 160\pi = 360\pi$ (см^2).

Відповідь: 360π (см^2).

ЗНО−2018 (Завдання 23). Циліндр і конус мають рівні об'єми та рівні радіуси основ. Площа основи циліндра дорівнює $25\pi\, см^2$, а його об'єм − $100\pi\, см^2$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження [68].

Початок речення	Закінчення речення
1) Висота циліндра дорівнює	А) 4 см
2) Висота конуса дорівнює	Б) 5 см
3) Радіус основи циліндра дорівнює	В) 8 см
	Г) 12 см
4) Твірна конуса дорівнює	Д) 13 см

Розв'язання.

1) $S_{\text{основи циліндра}} = \pi R^2, 25\pi = \pi \cdot R^2, R^2 = 25, R = 5$ см.

$V_{\text{циліндра}} = \pi R^2 H, 100\pi = \pi \cdot 5^2 H, 100 = 25H, H = 4$ см.

2) $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H, 100\pi = \frac{1}{3}\pi 5^2 H, 100 = \frac{1}{3}\pi \cdot 25H, H = 100{:}\,25 \cdot 3 = 12$ см.

3) $R = 5$ см.

4) За теоремою Піфагора: $l = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{44 + 25} = \sqrt{169} = 13$ см.

Відповідь: 1−А, 2−Г, 3−Б, 4−Д.

ЗНО−2012 (Завдання 24). На рис.2.35. зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1−4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження [27].

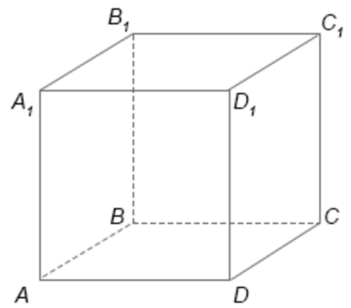


Рис.2.35

Початок речення	Закінчення речення
1) Пряма CB	А) паралельна площині AA_1B_1B.
2) Пряма CD_1	Б) перпендикулярна площині AA_1B_1B.
3) Пряма AC	В) належить площині AA_1B_1B.
4) Пряма A_1B	Г) має з площиною AA_1B_1B лише дві спільні точки
	Д) утворює з площиною AA_1B_1B кут $\angle 45°$

Розв'язання.

1)Всі грані куба — квадрати. Тобто, $CB \perp BB_1, CB \perp AB$.

Значить, пряма CB перпендикулярна площині грані AA_1B_1B за ознакою перпендикулярності прямої і площини.

2)Протилежні грані куба паралельні, тобто, паралельними є площини граней AA_1B_1B і DD_1C_1C. Пряма CD_1 належить площині грані DD_1C_1C, тому вона паралельна площині грані AA_1B_1B.

3)CB — перпендикуляр до рлощини грані AA_1B_1B; AC — похила, AB — її проекція на площину грані AA_1B_1B. Тому кут CAB — кут між прямою AC і площиною грані AA_1B_1B за означенням кута між прямою і площиною.

З $\Delta CAB(\angle B = 90°)$: $\cos\angle CAB = \frac{AB}{Ac} = \frac{AB}{AB\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, $\angle CAB = 45°$.

4)Оскільки точки A_1 i B належать площині грані AA_1B_1B, то пряма A_1B належить цій площині.

Відповідь: 1–Б, 2–А, 3–Д, 4–В.

ЗНО−2006 (Завдання 35). Укажіть номер фужера, у який можна налити найбільше рідини [44].

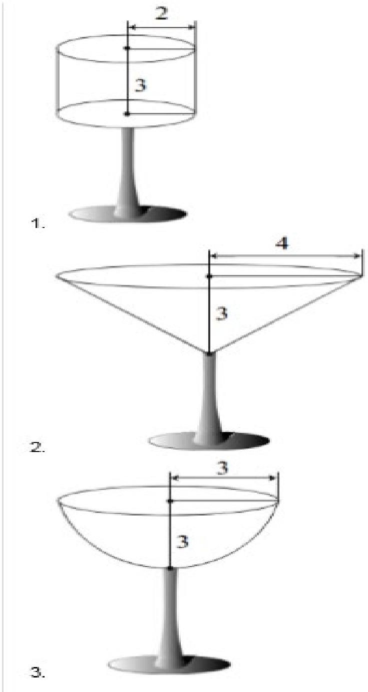


Рис.2.36.

*Розв'язання.*Найбільшу кількість рідини можна налити в той фужер, який має н айбільший об'єм.

1) Кількість рідини, яка поміститься в 1-ому фужері, чисельно рівна об'єму циліндра з радіусом основи $r = 2$ і висотою $h = 3$. Об'єм циліндра дорівнює $V_{\text{циліндра}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$ (куб. од.).

2) Кількість рідини, яка поміститься в 2-ому фужері, чисельно рівна об'єму кон уса з радіусом основи $r = 4$ і висотою $h = 3$. Об'єм циліндра дорівнює $V_{\text{циліндра}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$ (куб. од.).

3) Кількість рідини, яка поміститься в 3-ому фужері, чисельно рівна об'єму півкулі радіусом $r = 3$. Об'єм півкулі дорівнює $V_{\text{півкулі}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = \frac{2 \cdot 27}{3}\pi = 18\pi$ (куб.од.).

Отже, найбільшу кількість рідини можна налити у 3-й фужер.

Відповідь: 3-й фужер.

ЗНО−2012 (Завдання 15). Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема – 5 см. Визначте косинус кута між площиною бічної грані піраміди і площиною основи [27].

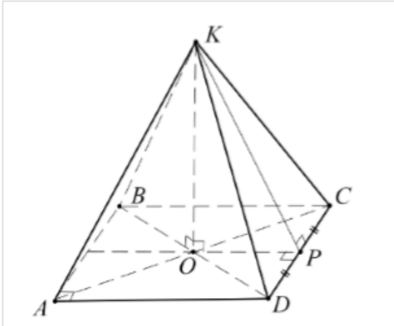


Рис.2.37.

Розв'язання. Нехай KABCD — правильна чотирикутна піраміда. KO — висота, $KO = 4$ см. KP — апофема, $KP = 5$ см.

$KP \perp DC; OP \perp DC.$ Тоді $\angle KPO$ — кут між площиною бічної грані і площиною основи за означенням кута між площинами. За теоремою Піфагора з $\Delta KOP(\angle O = 90°)$: $KP^2 = KO^2 + OP^2$;

$5^2 = 4^2 + OP^2$; $OP^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$;

$OP = \sqrt{9} = 3$ (см). $\cos\angle KPO = \dfrac{OP}{KP} = \dfrac{3}{5}$.

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

ЗНО−2012 (Завдання 31). Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу BC. Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину паралельно ребру AB. Знайдіть площу утвореного перерізу (у см^2), якщо об'єм призми дорівнює 672 см^3, а її висота — 8 см [27].

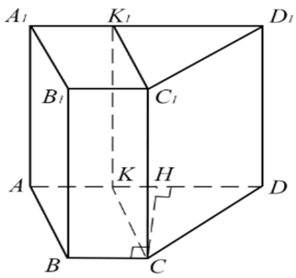


Рис.2.38.

Розв'язання. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — пряма призма. $V_{\text{призми}} = 672$ (см^3).

Висота призми: $h = 8$ см. Основа $ABCD$ — трапеція, в якій $AD \parallel BC$.

$AD = CD$; $AD = 6BC$; $AD = HC$ (HC – висота трапеції).

$$V_{\text{призми}} = h_{\text{призми}} \cdot S_{ABCD} = 8 \cdot \frac{BC + 6BC}{2} \cdot HC = 8 \cdot \frac{7BC}{2} \cdot 6BC = 8 \cdot 21BC^2$$
$$= 672 \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$BC^2 = \frac{672}{8 \cdot 21} = \frac{32}{8} = 4; \quad BC = \sqrt{4} = 2 \text{ (см)}.$$

Побудуємо переріз призми площиною, що проходить через ребро CC_1 паралельно прямій AB. Для цього в площині основи через точку С проведемо пряму, паралельну AB. Вона перетинає сторону AD в точці K. Площина C_1CK паралельна прямій AB за ознакою паралельності прямої і площини.

За властивістю паралельних площин ця площина перетинає площину грані AA_1D_1D по прямій KK_1, паралельній прямій CC_1, а площину верхньої основи — по прямій K_1C_1, яка паралельна KC. Тоді CKK_1C_1 — паралелограм за означенням. А оскільки ребро C_1C перпендикулярне основі, а значить і прямій KC, то CKK_1C_1 — прямокутник за означенням. CKK_1C_1 — шуканий переріз. Його площа $S_{CKK_1C_1} = KC \cdot C_1C = 8 \cdot KC$ (см^2).

Знайдемо KC. AKCB — паралелограм за означенням. Тоді: $KC = AB = CD, AK = BC$.

Значить: $KD = 5BC = 5 \cdot 2 = 10$ см; $HC = 6BC = 6 \cdot 2 = 12$ см.

ΔCKD — рівнобедренний, тому CH є медіаною, тобто, $KH = HD = 5$ см. З $\Delta CHK(\angle H = 90°)$ теоремою Піфагора: $KC^2 = KH^2 + HC^2, KC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$; $KC = \sqrt{169} = 13$ (см).

Тоді: $S_{CKK_1C_1} = 8 \cdot 13 = 104$ (см^2).

Відповідь: 104 (см^2).

ЗНО−2006 (Завдання 36). Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см. Апофема утворює з площиною основи кут $60°$. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди (у см) [44].

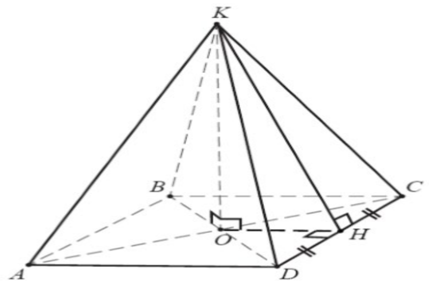


Рис.2.39.

Нехай задано правильну чотирикутну піраміду KABCD. Тобто, ABCD – квадрат. KO – висота піраміди. O – точка перетину діагоналей квадрата ABCD. $KO = 3$ см. KH – апофема, тоді, KH перпендикулярно до DC. Маємо: KO – перпендикуляр до площини основи, KH – похила, OH – її проекція на основу. Тоді $\angle KHO$ - це кут між апофемою KH і площиною основи. $\angle KHO = 60°$.

ΔKDC – рівнобедрений (KD=KC), тому KH є такоє його медіаною: DH=HC. Теореми про три перпендикуляри слідує, що OH перпендикулярно до CD. $\Delta ACD \sim \Delta OCD$ як прямокутні зі спільним кутом C. Тоді $\frac{AD}{OH} = \frac{CD}{CH} = \frac{2}{1}$. Звідси $AD = 2OH, CD = AD$, отже, $CD = 2OH.$

З ΔKOH $(\angle O = 90°)$ маємо: $\frac{KO}{OH} = tg\angle KHO = tg60° = \sqrt{3},$ звідки $OH = \frac{KO}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ см. Тоді $CD = 2\sqrt{3}$ см. $KH = 2OH = 2\sqrt{3}$ см.

Площа бічної поверхні піраміди дорівнює сумі площ її чотирьох бічних граней. Оскільки бічні грані правильної піраміди рівні, маємо : $S_{\text{б.п.п.}} = 4 \cdot S_{\Delta DKC} = 4 \cdot \frac{1}{4} KH \cdot Cd = 2KH \cdot CD = 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$ см^2.

Відповідь: 24 см^2.

ЗНО−2018 (Завдання 32). У правильній чотирикутній піраміді PABCD сторона основи ABCD дорівнює c, а бічне ребро PA утворює з площиною кут α. Через основу висоти піраміди паралельно грані APD проведено площину β.

1. Побудуйте переріз піраміди PABCD площиною β.
2. Обгрунтуйте вид перерізу.
3. Визначте периметр перерізу [68].

Розв'язання.

1) Нехай точка O – основа висоти піраміди. Через точку O проводимо EF ‖ AB. PE та PF – апофеми (висоти бічних граней). В площині (PEF) через точку O проводимо OT ‖ PE. В площині (PBC) через точку T проводимо NM ‖ BC. В площині (ABC) через точку O проводимо KL ‖ BC. Чотирикутник KLMN – шуканий переріз.

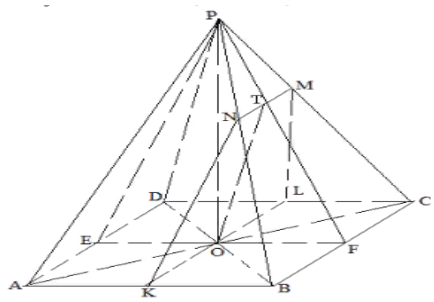


Рис.2.40.

2) NM ‖ BC, KL ‖ BC $\Rightarrow$ NM ‖ KL, отже KLMN - трапеція. NK – середня лінія $\Delta ABP, ML$ – середня лінія ΔPDC.

$$KN = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}PD = ML$$

KLMN – рівнобічна трапеція.

$$KL = AB = c;\ MN = \frac{c}{2};\ \ AC = \sqrt{2c};\ OC = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

3) $\Delta POC: PC = \frac{OC}{\cos a}$

$$ML + KL = \frac{1}{2}PD + \frac{1}{2}AP = PC;$$

$$P_{KLMN} = c \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\cos a}\right) = c \cdot \frac{3\cos a + \sqrt{2}}{2\cos a}$$

Відповідь: $c \cdot \frac{3\cos a+\sqrt{2}}{2\cos a}$

2.9.Координати і вектори

В шкільному курсі математики знайомство із координатною площиною розпочинається в 5 класі. Діти детально вивчають числовий промінь і практикують навички розміщення на ньому чисел починаючи з 0. Надалі до натуральних чисел долучаються ще й від’ємні, котрі розміщують вже на координатній прямій, а точку O(0;0) називають початком координат. Учні мають добре засвоїти, що кожній точці площини відповідає впорядкована пара чисел, які називають координатами точки, а координатні осі розбивають площину на 4 чверті. Аналогічно до площини, розглядаються і координати у просторі.

Поняття вектора є складним для розуміння багатьом школярам, томудля полегшення засвоєння матеріалу варто навести приклади із життя або інших дисциплін, де діти могли з ним зустрічатися. Знайомлячись із векторами, учні мають оволодіти багатьма новими поняттями: координати вектора та його модуль, які вектори називають рівними та як обчислювати скалярний добуток векторів. Завдяки цьому школярі зможуть легко розв'язувати задачі,що стосуються відрізків, прямих, кутів та фігур на площині чи у просторі.

ЗНО−2006 (Завдання 19). Ортогональною проекцію відрізка з кінцями у точках A(-1; 0;5) і B(-1; 0; 8) на координатну площину xy є…[44].

Розв'язання. Ортогональною проекцією точки A (-1; 0; 5) на площину XY є точка (-1; 0; 0).

Ортогональною проекцією точки B (-1; 0; 5) на площину XY є точка (-1; 0; 0).

Ортогональною проекцією відрізка AB на площину XY є точка.

ЗНО−2012 (Завдання 4). Яка з наведених точок належить осі Oz прямокутної системи координат у просторі? [27].

Розв'язання. Осі Oz належить точка (0; 0; z). Тобто, це точка F(0; 0; –3).

Відповідь: точка F(0; 0; –3).

ЗНО−2012 (Завдання 9). При якому значенні x вектори $\vec{a}(2; x)\ і\ \vec{b}(-4; 10)$ перпендикулярні? [27].

Розв'язання. Аби вектори $\vec{a}\ і\ \vec{b}$ були перпеникулярні, їх скалярний добуток має дорінювати нулю. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-4) + x \cdot 10 = -8 + 10x = 0;$

$10x = 8;\ x = \dfrac{8}{10} = 0{,}8.$

Відповідь: при $x = 0{,}8$.

ЗНО−2006 (Завдання 34). Обчисліть скалярний добуток векторів, зображених на рисунку [44].

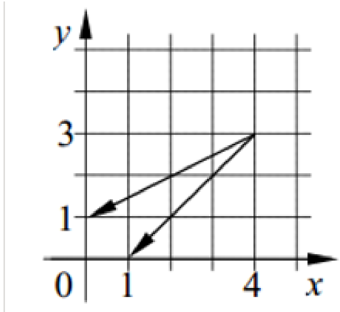


Рис.2.41.

Розглянемо три точки: $A(0;1), B(4;3), C(1;0)$.

$$\overrightarrow{BA}(-4;\ -2), \qquad \overrightarrow{BC}(-3;\ -3).$$

Скористаємось тим, що скалярний добуток векторів $\vec{a}(x_a;\ y_a)\ i\ \vec{b}(x_b;\ y_b)$ дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

Тоді $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-3) = 12 + 6 = 18$

Відповідь: 18.

ЗНО−2018 (Завдання 30). У прямокутній системі координат на площині задано колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{a}$(3;-5). Визначте абсцису точки B, якщо A(−4;1), а точка B лежить на прямій $y = 3$ [68].

Розв'язання. Нехай точка B має координати $(x; y)$, але за умовою точка B лежить на прямій $y = 3$, тоді точка B має координати $(x; 3)$. Знайдемо координати вектора: $\overrightarrow{AB}$= $(x_B - x_A; y_B - y_A) = (x + 4; 2)$. Як що дані вектори колінеарні, то їх відповідні кооринати пропорційні. Тоді маємо: $\frac{x+4}{3} = \frac{2}{-5}, -5(x + 4) = 3 \cdot 2, -5x - 20 = 6, -5x = 26, x = -5{,}2$.

Відповідь: $-5{,}2$.

2.10. Елементи статистики та теорія ймовірностей

Задачі, у яких доводиться відповідати на запитання: скількома різними способами можна виконати те, що вимагається, називають комбінаторними. Теорія ймовірностей – наука, яка вивчає закономірності масових однорідних випробувань. До основних понять теорії ймовірностей належать поняття схоластичного експерименту та події. Пропедевтичні основи цих знань формуються у дітей ще в 1-4 класах на прикладах ігрових задач, де потрібно підбирати потрібні варіанти серед багатьох можливих. На уроках алгебри школярі розширено розглядають неможливі, вірогідні та випадкові події. Наводячи приклади із повсякденного життя, вчитель підводить дітей до визначення імовірності випадкової події

Знайомлячись із елементами статистики школярі навчаються опрацьовувати статистичні дані, кількісну інформацію, представлену у вигляді таблиць, діаграм, графіків, формують навички порівняння ймовірностей настання випадкових подій із результатами конкретних статистичних експериментів. Саме тому матеріали із даних тем виносяться на ЗНО з математики.

ЗНО−2012 (Завдання 3). На діаграмі відображено кількість відвідувачів Музею води протягом одного робочого тижня. У який день тижня кількість відвідувачів була вдвічі більша, ніж у попередній день? [27].

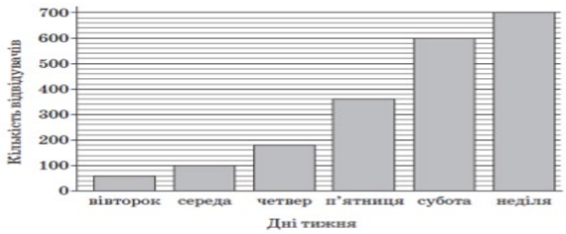


Рис.2.42.

Розв'язання. Згідно з даними діаграми легко помітити, що у четвер було 180 відвідувачів, а у п'ятницю – 360 відвідувачів, що у двічі більше.

Відповідь: у п'ятницю.

ЗНО−2006 (Завдання 16). Власник банкоматної картки забув останні дві цифри свого PIN-коду, але пам'ятає, що вони різні. Знайдіть ймовірність того, що з першої спроби він отримає доступ до системи [44].

Розв'язання. Першу цифру власник картки може вирахувати десятьма способами (це цифри від 0 до 9), другу – дев'ятьма (серед цифр, які залишились після першого вибору, бо цифри різні). За комбінаторним правилом добутку маємо, що дві цифри власник картки може вибрати $10 \cdot 9 = 90$ рівноможливими способами.

Обчислимо, скільки серед цих способів таких, що обидві цифри набрано вірно. Першу цифру можна вірно набрати лише одним способом, другу – також одним способом. За комбінаторним правилом добутку маємо $1 \cdot 1 = 1$

Отже, ймовірність того, що з першого разу власник картки набере вірні цифри – $1: 90 = \frac{1}{90}$.

Відповідь: $\frac{1}{90}$.

ЗНО−2018 (Завдання 12). Учень з понеділка по пятницю записував час (у хвилинах), який він витрачав на дорогу до школи та зі школи (див.таблицю)

Дні / Дорога	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця
До школи	19	20	21	17	23
Зі школи	28	22	20	25	30

На скільки хвилин у середньому дорога зі школи триваліша за дорогу до школи? [68].

Розв'язання. Середнє значення дороги до школи позначимо *X*, а середнє значення дороги зі школи позначимо *У*. Отже,

$$X = \frac{19 + 20 + 21 + 17\_23}{5} = \frac{100}{5} = 20\ (хв)$$

$$Y = \frac{28 + 22 + 20 + 25 + 30}{5} = \frac{125}{5} = 25\ (хв)$$

25–20=5 (хв)

Відповідь: 5 хв.

ЗНО−2012 (Завдання 25). Батьки разом із двома дітьми: Марійкою (4 роки) та Богданом (7 років) — збираються провести вихідний день у парку атракціонів. Батьки дозволяють кожній дитині відвідати не більше трьох атракціонів і кожний атракціон — лише по одному разу. Відомо, що на атракціони «Електричні машинки» і «Веселі гірки» допускаються лише діти старше 6 років. На «Паровозик» Богдан не піде. Для відвідуання будь-якого атракціону необхідно купити квиток для кожної дитини. Скориставшись таблицею, визначте максимальну суму коштів (у грн), що витратять батьки на придбання квитків для дітей [27].

Назва атракціону	Вартість 1 квитка для 1 дитини, *грн*
Веселі гірки	17
Паровозик	16
Електричні машинки	20
Карусель	12
Батут	15
Дитяча рибалка	8
Лебеді	13

Розв'язання. Найдорожчі атракціони, які може відвідати Богдан: «Веселі гірки» за 17 грн, «Електричні машинки» за 20 грн, «Батут» за 15 грн. Разом це коштує 52 грн. Найдорожчі атракціони, які може відвідати Марійка: «Паровозик» за 16 грн, «Батут» за 15 грн, «Лебеді» за 13 грн. Разом це коштує 44 грн. Тобто, максимальна сума коштів на придбання квитків: $52 + 44 = 96$ (грн).

Відповідь: 96 (грн).

Висновки до 2 розділу

Проаналізувавши навчальну і методичну літературу зовнішнього незалежного оцінювання, ми з'ясували, що шкільний матеріал з алгебри та геометрії, який виноситься на зовнішнє незалежне оцінювання з математики можна умовно розділити на 10 навчально-тематичних блоків:

1. Числа і вирази

2.Функції та їх графіки

3. Рівняння та системи рівнянь

4.Нерівності та системи нерівностей

5.Текстові задачі

6. Елементи математичного аналізу

7. Планіметрія

8.Стереометрія

9.Координати і вектори

10. Елементи статистики

Їх вивчення розпочинається ще в початковій школі на пропедевтичних засадах без оперування конкретною термінологією та продовжується у середній та старшій школі. Вчителі молодших класів з перших уроків математики закладають основи для успішного засвоєння матеріалу на прикладах із повсякденного життя, аби дітям легше було зрозуміти суть усіх математичних явищ та понять. Всі виділені нами теми є доволі об’ємними за кількістю матеріалу який вони містять та займають важливе місце у шкільному курсі математики. Аби успішно ним оволодіти варто приділити достатньо часу детальному опрацюванню кожної з теми і тренувати свої навички обрахунків на виконанні вправ різної форми та рівня складності. Тому ми розкрили покрокове виконання всіх різнопланових завдань із сертифікаційних робіт 2006, 2012 та 2018 з математики аби майбутні абітурієнти могли підготувати себе до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В результаті аналізу психолого-педагогічної, навчальної та науково-методичної літератури з теми дослідження ми систематизували теоретичні відомості, пов'язані з особливостями впровадження та становлення зовнішнього незалежного оцінювання в Україні. Розкрили особливості наповнення сертифікаційної роботи з математики завданнями різної форми та рівня складності. Також ми розглянули програму підготовки до ЗНО і з'ясували, на які саме теми із шкільного курсу математики варто звернути увагу абітурієнтам при підготовці до проходження тестування, які знання їм необхідно мати та якими вміннями і навичками варто володіти. Оскільки в сертифікаційній роботі з передбачено завдання, на які абітурієнт має подати розгорнутий розв'язок із усіма необхідними побудовами, тому ми подали в роботі критерії оцінювання завдань з алгебри та геометрії відкритої форми із розгорнутою відповіддю.

На основі досліджених сертифікаційних робіт, нами було виконано порівняння структури та змісту завдань тесту за 2006, 2012 та 2018 роки з математики, з метою виявлення основних змін, котрих зазнали тести за період часу від впровадження ЗНО з математики до сьогодення.

Детально проаналізувавши наповнення сертифікаційних робіт з математики, ми дійшли висновку, що завдання тесту відрізняються за складністю:

- Легкі
- Оптимальні
- Складні
- Дуже складні

та індексом роздільної здатності:

- Низька
- Середня
- Хороша
- Дуже хороша

Оскільки кожен з абітурієнтів хоче бути максимально підготовленим до складання тесту ЗНО і знати як правильно виконувати завдання різної форми та рівня складності, тому нами було розподілено завдання за 10 основними тематичними блоками:

1. Числа і вирази

2.Функції та їх графіки

3. Рівняння та системи рівнянь

4.Нерівності та системи нерівностей

5.Текстові задачі

6. Елементи математичного аналізу

7. Планіметрія

8.Стереометрія

9.Координати і вектори

10. Елементи статистики

та розкрито методику виконання тестів сертифікаційних робіт з математики за 2006, 2012 та 2018 роки.

В результаті проведеного нами дослідження поставлена мета була досягнута, завдання виконані повністю. Висунута гіпотеза про те, що зміни структури та наповнення сертифікаційної роботи ЗНО з математики сприяють отриманню кращих результатів серед абітурієнтів при складанні тесту була спростована, оскільки кількість завдань підвищеної складності істотно збільшилася. А це означає, що вступники з середнім чи достатнім рівнем знань навряд зможуть їх виконати, тому отримають мешу кількість балів. Отже, зміни які відбулися у структурі тестів з математики, не сприяють отриманню кращих результатів абітурієнтами.

Проведене дослідження не вичерпує всіх проблем та питань пов’язаних із зовнішнім незалежним оцінюванням із математики котрі виникають в науковців, освітян та абітурієнтів і дослідження в цьому напрямку є перспективними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра. Розв’язування задач та вправ / О. А. Гайштут та ін. К. : Магістр–8, 1997. 256 с.
2. Аналітичний звіт про результати зовнішнього тестування з математики за 2006 рік. *Освітній портал*: веб-сайт. URL: http://f.osvita.org.ua/ukrtest/math_2006.pdf (дата звернення: 13.12.2019).
3. Апостолова Г. Ціла та дробова частини числа. К.: Факт, 1996. 97 с.
4. Апостолова Г., Ясінський В. Перші зустрічі з параметром. К.: Факт, 2006. 324 с.
5. Апостолова Г.В. Геометрія 8 клас. К.: Генеза, 2008. 272 с.
6. Апостолова Г.В. Геометрія 9 клас. К.: Генеза, 2009. 304 с.
7. Бевз Г.П. Алгебра: підручник для 7 класу. К.: Відродження, 2015. 290 с.
8. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник. К. : Вища школа, 1989. 367 с.
9. Белешко Д. Т. Практикум по решению геометрических задач. Ч.1. Общие положения. Методы решения геометрических задач: Методические рекомендации для учителей и студентов физико-математических факультетов. Ровно,1986. 64 с.
10. Белешко Д. Т. Практикум по решению геометрических задач. Ч.2. Геометрические фигуры. Характеристические и метрические соотношения в них: Методические рекомендации для учителей и студентов физико-математических факультетов. Ровно,1986. 54 с.
11. Біляніна О.Я. Геометрія 10 клас. К.: Генеза, 2010. 259 с.
12. Бродський Я., Слипенко А. Производная и інтеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. К. : Вища школа, 1985. 152 с.
13. Бродський Я.С., Слипенко А.К. Функциональные уравнения. К.: Высшая школа, 1983. 96 с.
14. Вибранні питання елементарної математики / В. А. Вишневський. Київ. : Вища школа, 1981. 456 с.

15. Вороний О.М. Рівняння зі змінною під знаком цілої частини. *Математика в школі.* 2003. №2. С. 49-51.

16. Вороний О.М. Функціональні рівняння із вільними змінними. *У світі математики.* 2003. Т.9, вип.1. С. 18-28.

17. Гайшут О. Тригонометрія: довідник-задачник. К. : Магістр-8, 1997. 256 с.

18. Геометрія 11 клас (академічний рівень, профільний рівень) / Бевз Г.П. та ін. К.: Генеза, 2011. 336 с.

19. Державний стандарт базової і повної середньої освіти України. *Офіційний веб-сайт Міністерства освіти та науки України*. URL: http://mon.gov.ua/ images/files/ gromad_ obg/standart.doc. (дата звернення: 08.09.2019).

20. Задачі з параметрами / Горнштейн П. І. та ін. Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. 256 с.

21. Збірник задач з математики: навчальний посібник / Вишневський В. та ін. К. : Либідь, 1990. 328 с.

22. Збірник задач з математики з розв'язками / Ю. Л. Геворкян та ін. Харків : Прапор, 1999. 448 с.

23. Збірник задач *з* математики для вступників до ВНЗ / В. К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський та ін. 6-те вид. К.: Арій, 2011. 604 с.

24. ЗНО в Україні (Історична довідка). *Євро Освіта*: веб-сайт. URL: http://euroosvita.net/?category=17&id=1128 (дата звернення: 22.01.2020).

25. Зовнішнє незалежне оцінювання. *Блог Молодан Віти.* URL: http://b11molodan16.blogspot.com/2016/ (дата звернення: 14.10.2019).

26. Зовнішнє незалежне оцінювання. *Вікіпедія:* веб-сайт. URL: https://uk.wikipedia.org/ wiki/Зовнішнє незалежне оцінювання (дата звернення: 16.12.2019).

27. Зовнішнє незалежне оцінювання із математики 2012. *Освіта.ua:* веб сайт. URL: http://ru.osvita.ua/doc /files/ news/294/29497/1_math2012-1.pdf (дата звернення: 07.01.2019).

28. Істер О.С. Алгебра: підручник для 7 класу– К.: Генеза, 2015. – 256 с.

29. Істер О.С. Геометрія 7 клас. К.: Генеза, 2015. 184 с.

30. Історія ЗНО в україні. *Студвей*: веб-сайт. URL: https://studway.com.ua/zno/ (дата звернення: 21.09.2019).

31. Історія створення ЗНО. *natali.sonce.natali:* веб-сайт. URL: https://sites.google.com/site/natalisoncenatali/assignments (дата звернення: 06.10.2019).

32. Кашина Г.С. Зовнішнє незалежне оцінювання в освіті України: курс лекцій. Луцьк, 2010. 115 с.

33. Крайзман М. Розв'язування геометричних задач методом векторів. К. : Рад. школа, 1980. 95 с.

34. Крайзман М. Розв'язування геометричних задач методом координат. К. : Рад. школа, 1983. 127 с.

35. Крамор В. С. Повторюємо і систематизуємо шкільний курс алгебри і початків аналізу. Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2012. 412 с.

36. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. М. : Просвещение, 1992, 416 с.

37. Критерії оцінювання завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю з сертифікаційної роботи з математики зовнішнього незалежного оцінювання від 30.10.2019 року. *Український центр оцінювання якості освіти*: веб-сайт. URL:https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/11/kryteriyi_ matematyka_2020.pdf (дата звернення: 18.01.2020).

38. Критерії оцінювання завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю з сертифікаційної роботи з математики зовнішнього незалежного оцінювання від 22 вересня 2016 року. *Український центр оцінювання якості освіти*: веб-сайт. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2017/01/ criteria_mathem_2017.pdf (дата звернення: 01.12.2019).

39. Критерії оцінювання завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю з математики з сертифікаційної роботи з математики зовнішнього незалежного оцінювання 2018 року. *Український центр оцінювання якості освіти*: веб-сайт. URL: https://dneprtest.dp.ua/docs/2017/tabl_zno_2018/krit/ mathem_kriter_2018.pdf (дата звернення: 13.11.2019).

40. Кушнир И. Функции. Задачи и решения. К. : Астарта, 1996. 540 с.

41. Кушнір І. А. Векторні методи розв'язування задач. К.: Оберіг, 1994. 210 с.

42. Кушнір І. Методи розв'язання задач з геометрії. Книга для вчителя. К. : Абрис, 1994. 464 с.

43. Литвиненко В. Н. Практикум по злементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. М. : Просвещение, 1991. 352 с.

44. Математика зовнішнє оцінювання 2006. *Український центр оцінювання якості освіти* : веб-сайт. URL: https://www.slideshare.net/tcherkassova2104/2006-44853220 (дата звернення: 22.07.2019).

45. Мерзляк А.Г. Алгебра 8 клас. Х.: «Гімназія», 2008. 288 с.

46. Мерзляк А.Г. Геометрія 7 клас. Х.: «Гімназія», 2015. 224 с.

47. Мерзляк А.Г. Математика 5 клас. Х.: «Гімназія», 2013. 352 с.

48. Мерзляк А.Г. Математика 6 клас. Х.: «Гімназія», 2014. 400 с.

49. Нелін Є.П. Алгебра 10 клас. Х.: «Гімназія», 2010. 416 с.

50. Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Випуск 43: збірник наукових праць. К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. 256 с. URL: http://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/7256/1/Y_Kovbasenko_EA_21_GI_ZNO.pdf (дата звернення: 08.02.2020).

51. О. Козакова. Зовнішнє незалежне оцінювання у контексті підвищення якості шкільної географічної освіти. *Проблеми безперервної географічної освіти і картографії.* URL: https://goik.univer.kharkov.ua/wp-content/files/issue_25/ 25_8.pdf (дата звернення: 10.01.2020).

52. Організаційні та методичні основи ЗНО-2012. URL: https://www.slideshare.net/vtutor/yrok-zno-2012 (дата звернення: 11.10.2019).

53. Основи педагогічних вимірювань та моніторингу якості освіти : курс лекцій: навч. посіб. / В.Вачкан. Бердянськ, 2013. 62 с.

54. Офіційний звіт про проведення в 2018 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 2. *Український центр оцінювання якості освіти*: веб-

сайт. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2018/08/ZVIT-ZNO_2018-Tom_2.pdf (дата звернення: 02.09.2019).

55. Офіційний звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень випускників загальноосвітніх навчальних закладів у 2012 р. *Український центр оцінювання якості освіти* : веб-сайт. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/ 2017/01/Report2012.pdf (дата звернення: 16.08.2019).

56. Перехейда О. М. Доведення нерівностей. Харків : Основа, 2003. 96 с.

57. Пойа Д. Математика в правдоподобных рассуждениях. М.: Наука, 1975. 463 с.

58. Проблеми моніторингу якості освіти. *Тестування і моніторинг в освіті:* веб-сайт. URL: http://timo.com.ua/node/7213 (дата звернення: 20.12.2019).

59. Практикум з розв'язання задач з математики. К. : Вища школа, 1978. 478 с.

60. Про освіту. Закон україни від 05.09.2017 р. No 2145-Viii. *Законодавство україни*. URL: http://zakon0.rada.gov.ua/laws/show/2145-19 (дата звернення: 05.11.2019).

61. Про систему підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики. *Тестування і моніторинг в освіті:* веб-сайт. URL: https://docplayer.net/55775818-Pro-sistemu-pidgotovki-do-zovnishnogo-nezalezhnogo-ocinyuvannya-yakosti-znan-z-matematiki.html (дата звернення: 21.09.2019).

62. Проблеми моніторингу якості освіти. *Тестування і моніторинг в освіті*: веб-сайт. URL: http://timo.com.ua/node/7213 (дата звернення: 15.01.2020).

63. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики для осіб, які бажають здобувати вищу освіту на основі повної загальної середньої освіти від 03.02.2016 р. *Український центр оцінювання якості освіти:* веб-сайт. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/ 2017/01/ mathematics2017.pdf (дата звернення: 12.08.2019).

64. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики здобутих на основі повної загальної середньої освіти від 26.06.2018 р. *Освіта.ua:* веб-сайт. URL: https://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/Math.pdf (дата звернення: 18.12.2019).

65. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5–12 класи // Інформаційний збірник Міністерства освіти України. 2005. № 13–14. 64 с.

66. Раухман А. С. Геометрія чотирикутника: навч. пос. Тернопіль: Навчальна книга «Богдан», 2010. 152 с.

67. Саушкін О. Ф. Рівняння вищих степенів. Методи розв'язування. Навчальний посібник. К. : КНЕУ, 1999. 100 с.

68. Сертифікаційна робота з математики 2018. *Освіта.ua:* веб-сайт. URL: https://ru.osvita.ua/doc/files/news/ 608/60848/Matematyka-Osnovne-ZNO_2018-Zoshyt_1.pdf (дата звернення: 26.10.2019).

69. Сидоренко О. Створення системи моніторингу якості освіти в Україні: регіональний досвід і перспектива. URL: http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/17992/1/Sydorenko.pdf (дата звернення: 12.09.2019).

70. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник [2-ге вид., допов. і переробл.]. К.: Вища шк., 2006. 582 с: іл.

71. Тарасенкова Н.А. Математика 5 клас. К. : Видав.дім «Освіта», 2013. 352 с.

72. Тарасенкова Н.А. Математика 6 клас. К. : Видав.дім «Освіта», 2014. 304 с.

73. Титаренко А. М. Форсированный курс школьной математики [Учебное пособие]. Харьков : Каравелла. 1996. 384 с.

74. Толок В. О. Математика для вступників до вузів. Навчальний посібник. Запоріжжя : Просвіта, 2000. 656 с.

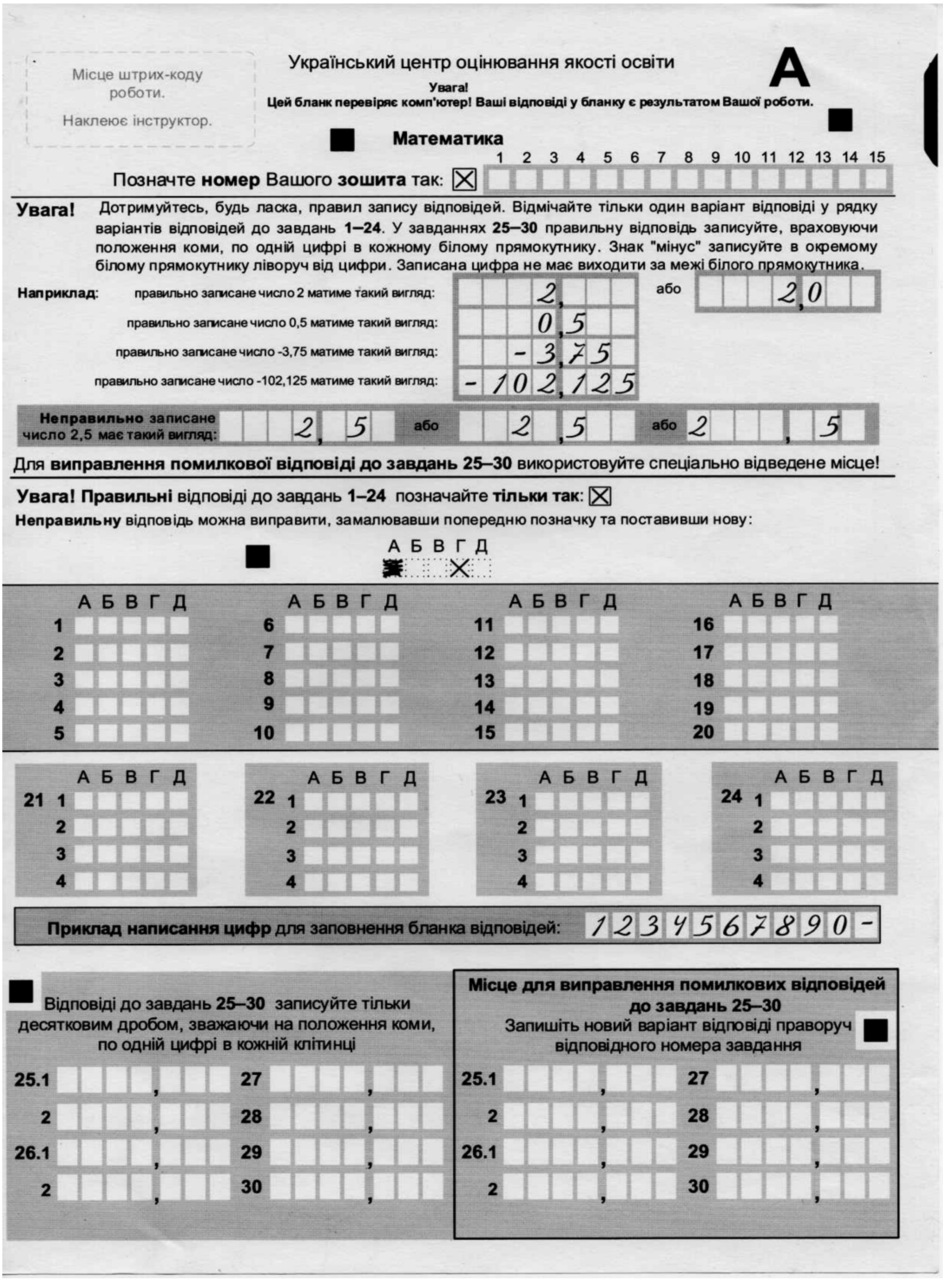
75. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики. Навчальний посібник. К. : Техніка, 1999. 504 с.

76. Шарова Л. И. Уравнения и неравенства. Пособие для подготовительних отделений. К. : Вища школа, 1981. 280 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Бланк відповідей А для ЗНО з математики



Місце штрих-коду роботи.

Наклеює інструктор.

Український центр оцінювання якості освіти

А

Увага!
Цей бланк перевіряє комп'ютер! Ваші відповіді у бланку є результатом Вашої роботи.

Математика

Позначте **номер** Вашого **зошита** так: ☒ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Увага! Дотримуйтесь, будь ласка, правил запису відповідей. Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до завдань **1–24**. У завданнях **25–30** правильну відповідь записуйте, враховуючи положення коми, по одній цифрі в кожному білому прямокутнику. Знак "мінус" записуйте в окремому білому прямокутнику ліворуч від цифри. Записана цифра не має виходити за межі білого прямокутника.

Наприклад:
правильно записане число 2 матиме такий вигляд: 2, або 2,0
правильно записане число 0,5 матиме такий вигляд: 0,5
правильно записане число -3,75 матиме такий вигляд: -3,75
правильно записане число -102,125 матиме такий вигляд: -102,125

Неправильно записане число 2,5 має такий вигляд: 2, 5 або 2 ,5 або 2 , 5

Для **виправлення помилкової відповіді до завдань 25–30** використовуйте спеціально відведене місце!

Увага! Правильні відповіді до завдань **1–24** позначайте **тільки так:** ☒

Неправильну відповідь можна виправити, замалювавши попередню позначку та поставивши нову:

А Б В Г Д

	А	Б	В	Г	Д
1–20					

А Б В Г Д — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

21 (1, 2, 3, 4) А Б В Г Д; 22 (1, 2, 3, 4) А Б В Г Д; 23 (1, 2, 3, 4) А Б В Г Д; 24 (1, 2, 3, 4) А Б В Г Д

Приклад написання цифр для заповнення бланка відповідей: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 -

Відповіді до завдань **25–30** записуйте тільки десятковим дробом, зважаючи на положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці

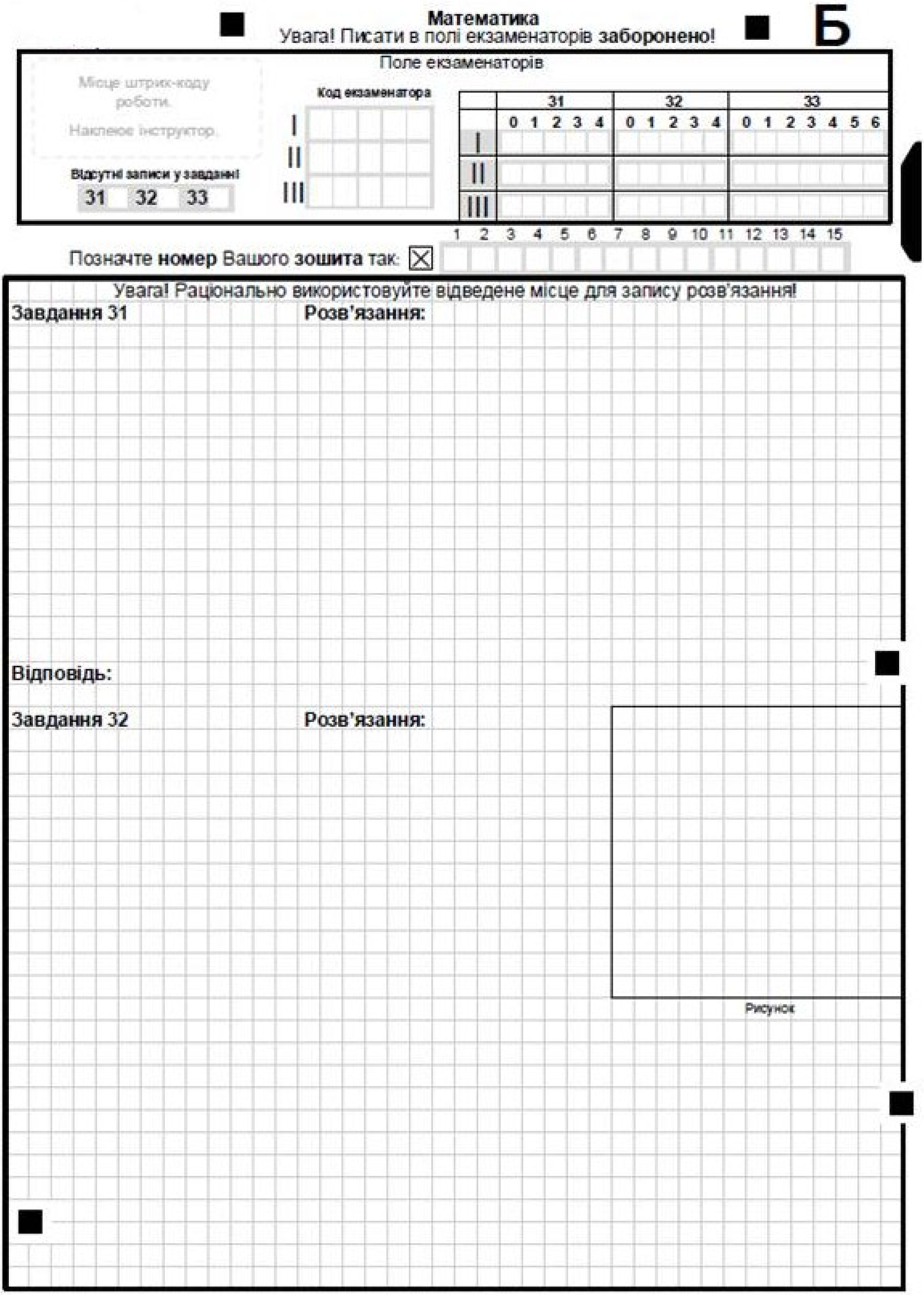
25.1, 2, 26.1, 2, 27, 28, 29, 30

Місце для виправлення помилкових відповідей до завдань 25–30
Запишіть новий варіант відповіді праворуч відповідного номера завдання

25.1, 2, 26.1, 2, 27, 28, 29, 30

Додаток Б

Бланк відповідей Б для ЗНО з математики



Математика

Увага! Писати в полі екзаменаторів **заборонено!**

Б

Поле екзаменаторів

Місце штрих-коду роботи.

Наклеює інструктор.

Відсутні записи у завданні

31 32 33

Код екзаменатора

I II III

	31					32					33						
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6
I																	
II																	
III																	

Позначте **номер** Вашого **зошита** так: ☒ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Увага! Раціонально використовуйте відведене місце для запису розв'язання!

Завдання 31 **Розв'язання:**

Відповідь:

Завдання 32 **Розв'язання:**

Рисунок

Додаток В

Історія проведення ЗНО

<table>
<tr><th>Предмет</th><th>2004</th><th>2005</th><th>2006</th><th>2007</th><th>2008</th><th>2009</th><th>2010</th><th>2011</th><th>2012</th><th>2013</th><th>2014</th></tr>
<tr><td>Українська мова</td><td>✗</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td rowspan="2">✔</td><td rowspan="2">✔</td><td rowspan="2">✔</td><td rowspan="2">✔</td><td rowspan="2">✔</td><td rowspan="2">✔</td><td rowspan="2">✔</td></tr>
<tr><td>Українська література</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td></tr>
<tr><td>Історія України</td><td rowspan="2">✓</td><td rowspan="2">✓</td><td>✓</td><td rowspan="2">✓</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
<tr><td>Всесвітня історія</td><td>✓</td><td>✔</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
<tr><td>Математика</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
<tr><td>Фізика</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✓</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
<tr><td>Хімія</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
<tr><td>Зарубіжна література (Світова література)</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✔</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
<tr><td>Біологія</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✓</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
<tr><td>Основи економіки</td><td>✗</td><td>✓</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✔</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td></tr>
<tr><td>Основи правознавства</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✔</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td></tr>
<tr><td>Географія</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
<tr><td>Іноземна мова (англійська, німецька, французька або іспанська)</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
<tr><td>Російська мова</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✗</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td><td>✔</td></tr>
</table>

Примітки

✗ — не проводилося;

✓ — проводилося вибірково;

✔ — для всіх абітурієнтів

Додаток Г

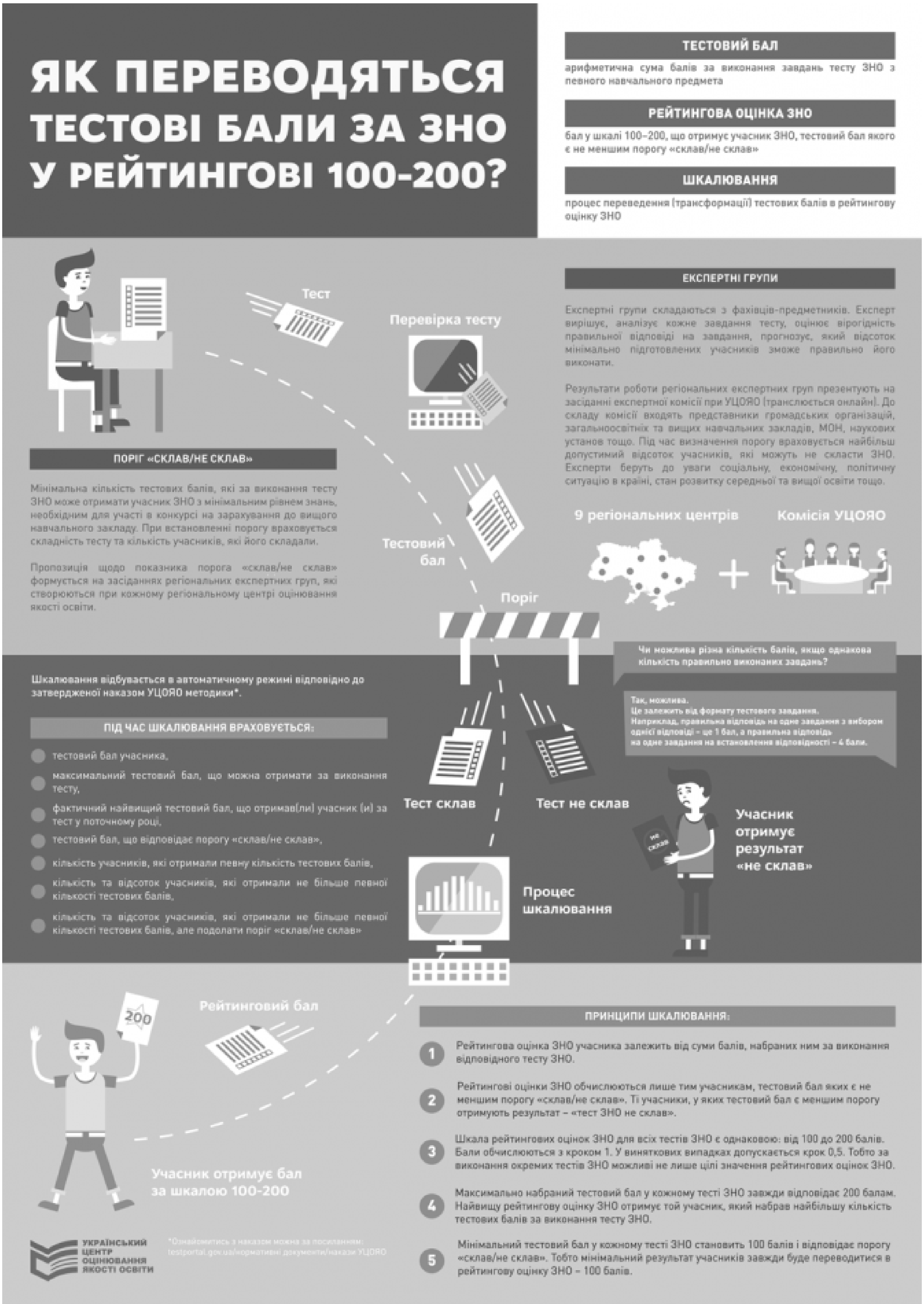
Таблиця переведення тестових балів отриманих за сертифікаційну роботу з математики за шкалою 100-200 балів

Тестовий бал	Рейтингова оцінка 100 – 200
0	не склав
1	не склав
2	не склав
3	не склав
4	не склав
5	не склав
6	не склав
7	не склав
8	не склав
9	не склав
10	100
11	104
12	107
13	111
14	114
15	117
16	119
17	122
18	124
19	127
20	129
21	131
22	133
23	136
24	138
25	140
26	142
27	144
28	146
29	148
30	150
31	152
32	153
33	155
34	157
35	159
36	161
37	163
38	164
39	166
40	168
41	170
42	172
43	173
44	175
45	177
46	178
47	180
48	182
49	183
50	185
51	186
52	188
53	189
54	191
55	192
56	193
57	195
58	196
59	197
60	198
61	199
62	200

Таблиця відповідності тестових балів оцінкам рівнів навчальних досягнень за шкалою 1-12 балів з математики

Кількість балів	Оцінка за шкалою 1–12 балів
0–3	1
4–6	2
7–9	3
10–13	4
14–19	5
20–26	6
27–32	7
33–37	8
38–41	9
42–45	10
46–49	11
50–52	12

Додаток Д


ЯК ПЕРЕВОДЯТЬСЯ ТЕСТОВІ БАЛИ ЗА ЗНО У РЕЙТИНГОВІ 100-200?
ТЕСТОВИЙ БАЛ
арифметична сума балів за виконання завдань тесту ЗНО з певного навчального предмета
РЕЙТИНГОВА ОЦІНКА ЗНО
бал у шкалі 100–200, що отримує учасник ЗНО, тестовий бал якого є не меншим порогу «склав/не склав»
ШКАЛЮВАННЯ
процес переведення (трансформації) тестових балів в рейтингову оцінку ЗНО
Тест
Перевірка тесту
ЕКСПЕРТНІ ГРУПИ
Експертні групи складаються з фахівців-предметників. Експерт вирішує, аналізує кожне завдання тесту, оцінює вірогідність правильної відповіді на завдання, прогнозує, який відсоток мінімально підготовлених учасників зможе правильно його виконати.
Результати роботи регіональних експертних груп презентують на засіданні експертної комісії при УЦОЯО (транслюється онлайн). До складу комісії входять представники громадських організацій, загальноосвітніх та вищих навчальних закладів, МОН, наукових установ тощо. Під час визначення порогу враховується найбільш допустимий відсоток учасників, які можуть не скласти ЗНО. Експерти беруть до уваги соціальну, економічну, політичну ситуацію в країні, стан розвитку середньої та вищої освіти тощо.
ПОРІГ «СКЛАВ/НЕ СКЛАВ»
Мінімальна кількість тестових балів, які за виконання тесту ЗНО може отримати учасник ЗНО з мінімальним рівнем знань, необхідним для участі в конкурсі на зарахування до вищого навчального закладу. При встановленні порогу враховується складність тесту та кількість учасників, які його складали.
Пропозиція щодо показника порога «склав/не склав» формується на засіданнях регіональних експертних груп, які створюються при кожному регіональному центрі оцінювання якості освіти.
Тестовий бал
9 регіональних центрів
Комісія УЦОЯО
Поріг
Чи можлива різна кількість балів, якщо однакова кількість правильно виконаних завдань?
Так, можлива.
Це залежить від формату тестового завдання.
Наприклад, правильна відповідь на одне завдання з вибором однієї відповіді – це 1 бал, а правильна відповідь на одне завдання на встановлення відповідності – 4 бали.
Шкалювання відбувається в автоматичному режимі відповідно до затвердженої наказом УЦОЯО методики*.
ПІД ЧАС ШКАЛЮВАННЯ ВРАХОВУЄТЬСЯ:
тестовий бал учасника,
максимальний тестовий бал, що можна отримати за виконання тесту,
фактичний найвищий тестовий бал, що отримав(ли) учасник (и) за тест у поточному році,
тестовий бал, що відповідає порогу «склав/не склав»,
кількість учасників, які отримали певну кількість тестових балів,
кількість та відсоток учасників, які отримали не більше певної кількості тестових балів,
кількість та відсоток учасників, які отримали не більше певної кількості тестових балів, але подолати поріг «склав/не склав»
Тест склав
Тест не склав
не склав
Учасник отримує результат «не склав»
Процес шкалювання
200
Рейтинговий бал
ПРИНЦИПИ ШКАЛЮВАННЯ:
1 Рейтингова оцінка ЗНО учасника залежить від суми балів, набраних ним за виконання відповідного тесту ЗНО.
2 Рейтингові оцінки ЗНО обчислюються лише тим учасникам, тестовий бал яких є не меншим порогу «склав/не склав». Ті учасники, у яких тестовий бал є меншим порогу отримують результат – «тест ЗНО не склав».
3 Шкала рейтингових оцінок ЗНО для всіх тестів ЗНО є однаковою: від 100 до 200 балів. Бали обчислюються з кроком 1. У виняткових випадках допускається крок 0,5. Тобто за виконання окремих тестів ЗНО можливі не лише цілі значення рейтингових оцінок ЗНО.
4 Максимально набраний тестовий бал у кожному тесті ЗНО завжди відповідає 200 балам. Найвищу рейтингову оцінку ЗНО отримує той учасник, який набрав найбільшу кількість тестових балів за виконання тесту ЗНО.
5 Мінімальний тестовий бал у кожному тесті ЗНО становить 100 балів і відповідає порогу «склав/не склав». Тобто мінімальний результат учасників завжди буде переводитися в рейтингову оцінку ЗНО – 100 балів.
Учасник отримує бал за шкалою 100-200
УКРАЇНСЬКИЙ ЦЕНТР ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ОСВІТИ
*Ознайомитись з наказом можна за посиланням: testportal.gov.ua/нормативні документи/накази УЦОЯО