Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Методика вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,
Групи М-М-П-21
Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
Бурба Ганна Петрівна

Науковий керівник:
канд. фіз.-мат. наук, проф. Крайчук О.В.

Рецензент ___________________

Рівне-2020 року

З М І С Т

В С Т У П

Необхідною умовою гуманізації навчального процесу в основній та старшій школі відповідно до закону України «Про освіту» [16], Державною національною програмою «Освіта» (Україна XXI століття) [47], Концепції профільного навчання в старшій школі [29] визначено його диференціацію. Диференційоване навчання на сучасному етапі реалізується через профільну й рівневу диференціації, які створюють оптимальні умови задля врахування навчально-пізнавальних можливостей і потреб різних груп учнів на рівні школи та класу, забезпечують достатню предметну підготовку, яка в подальшому сприятиме виробленню у майбутніх фахівців необхідних компетентностей, фахово орієнтованих умінь і навичок.

Організація навчання математики у сучасній профільній школі визначає як один із сучасних критеріїв профільного навчання використання навчальних планів трикомпонентної структури, яка включає: 1) базові навчальні предмети; 2) профільні предмети; 3) курси за вибором. У старшій школі вивчення математики диференціюється за 4 рівнями: рівнем стандарту; академічним; профільним; та рівнем поглибленого вивчення математики. Згідно з оновленою концепцією профільного навчання з 2018-2019 н.р. навчання математики у старшій школі відбуватиметься за 2 рівнями: базовим і профільним. Для учнів, які навчалися у 8-9 класах за програмою поглибленого рівня, розроблено навчальну програму з математики для продовження поглибленого рівня.

Обираючи тему дослідження, ми звернули увагу на те, що в останні роки активізувалася увага до питань диференційованого навчання різних дисциплін і математики зокрема. У психолого-педагогічній та методичній літературі, наприклад, [7, 30, 68] завжди приділялася увага питанням диференційованого навчання математики. Сучасні психолого-педагогічні праці не дозволяють говорити про наявність комплексного дослідження, присвяченого проблемі методики вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей у старшій школі на базовому та профільному рівні підготовки.

На сучасному етапі вивченню тригонометричних функцій саме як функцій числового аргументу приділяється велика увага в шкільному курсі алгебри та початків аналізу. Існують різні підходи до навчання цієї теми в шкільному курсі, однак учителеві-початківцю важко зорієнтуватися, який підхід буде найбільш вдалим, який сприятиме виробленню предметних компетентностей. Тригонометричні функції є найбільш зручним засобом для вивчення властивостей усіх функцій, тому їх вивченню слід приділити достатню увагу.

Уже кілька десятиліть поспіль тригонометрія як окрема дисципліна шкільного курсу математики не існує. Елементи тригонометрії вивчаються в курсі геометрії 8-9 класу. Основна вага у вивченні тригонометричних функцій числового аргументу, їх властивості, формул тригонометрії, тригонометричних рівнянь, нерівностей, їх систем припадає на курс алгебри і початків аналізу у старшій школі (26%).

Історично склалось, що тригонометричним рівнянням і нерівностям приділялось особливе місце в шкільному курсі. Ще греки на початку людства вважали, що тригонометрія – найважливіша із наук, і ми поділяємо думку, що тригонометрія є одним із найважливіших розділів шкільного курсу, усієї математики загалом. В умовах профільного навчання математики роль тригонометричного матеріалу в математичній підготовці учнів значно посилилась, що пояснюється великим прикладним потенціалом тригонометрії, її значенням для розвитку функціонального мислення, обчислювальної та графічної культури, математичних здібностей учнів.

Однієї з ефективних методик формування програмних математичних компетентностей є лекційно-семінарська система навчання. Вивчення буль-якої нової теми за лекційно-семінарською системою здійснюється за такими етапами – уроки лекції; уроки розв’язування ключових задач; уроки-консультації; залікові уроки. У залежності від теми можна доповнювати цю систему ще декількома етапами: уроки розв’язування нестандартних задач, урок-семінар, кіноурок тощо. Викладене вище засвідчує те, що тема магістерської роботи є **актуальною.**

Мета роботи розробити методику вивчення теми «Тригонометричні рівняння, нерівності» на базовому та профільному рівнях підготовки учнів старшої профільної школи.

Мета роботи конкретизується у таких **завданнях:**

1. Вивчення методичної літератури та ознайомлення з публікаціями в періодичній педагогічній пресі з даної тематики;
2. Розкрити методи розв'язання тригонометричних рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики, розробити методику формування практичної компетентності учнів на у процесі розв'язання тригонометричних рівнянь.
3. Розробити методику формування ключових і предметних компетентностей учнів у процесі розв'язання тригонометричних рівнянь і нерівностей на профільному рівні підготовки.
4. Підготувати методичні рекомендації щодо вивчення теми на засадах компетентнісного підходу.

Об'єкт дослідження – процес вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики.

Предмет дослідження – методика формування ключових і предметних компетентностей учнів у процесі навчання розв'язування тригонометричних рівнянь, нерівностей та систем на базовому та профільному рівнях підготовки.

Основні методи дослідження: теоретичний аналіз; критичний аналіз; теоретичний синтез; спостереження за освітнім процесом у старших класах, бесіди з учителями математики, описовий метод.

Практичне значення роботи полягає в тому, що матеріали дослідження можуть бути використані вчителями математики у практичній професійній діяльності та студенти математичних спеціальностей.

Результати роботи були представлені на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету 2019 та 2020 роках.

РОЗДІЛ І. НАУКОВО – ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Урок - основна форма навчання і виховання учнів в школі. У процесі його проведення враховується мета, методинавчання і виховання, особливості матеріалу, участь учителя і учнів, форми контролю, засоби навчання, індивідуальні особливості тарівень роввитку учнів тощо. Усі ці компоненти взаємопов'язані і взаємозалежні. Організаційна структура уроку спрямована на створенняоптимальних умов для навчання кожного учня.

Складність структури уроку зумовлює складність класифікації. До типології можна йти різними шляхами. Наприклад, за змістом і способом проведення уроку І.Н. Казанцева виділяє урок-лекцію,урок-бесіду, урок-екскурсію, кіноурок, урок самостійної роботи тощо; О.О. Хмура - уроки підготовчі, тренувальних вправ, семінарські заняття, контрольно-залікові уроки. За основною дидактичною метою уроку Б.П.Єсипов виділяє уроки ознайомлення учнів з новим матеріалом, узагальнення і систематизації вивченого, вироблення й закріплення вмінь інавичок,перевірки знань, комбіновані уроки.

Вважається, що всі нормально розвинені діти здібні до навчання та засвоєння програмного матеріалу з кожного предмета середньої школи. Розвиток здібностей учнів залежить від системи навчання і виховання.

Діяльність вчителя Р.Г. Хазанкіна по розвитку творчих здібностей учнів надзвичайно багатогранна, але можна виділити наступні основні напрямки цієї діяльності на уроках:

1. Уроки-лекції з метою вивчення нової теми великим блоком, активізація мислення учнів при вивчення нового, економити час для подальшої творчої праці;

2. Уроки розв'язування ключових задач по темі. Вчитель (разом з учнями) виділяє мінімальну кількість задач, на яких реалізується вивчаєма теорія, вчить розпізнавати і розв'язувати ключові задачі;

3. Уроки-консультації, на яких питання задають учні, а відповідає на них вчитель;

4. Залікові уроки, метою яких є організація індивідуальної роботи, допомоги старших учнів молодшим, поступова підготовка до розв'язання більш складних задач.

Як відмічає Г.М. Ганжела, лекційно-семінарська форма навчання дуже ефективна для учнів 10-11 класів, сприяє лекційному запам'ятовуванню вивченого матеріалу, свідомому його застосуванню.

О.С. Дубинчук, Ю.І. Малбований і Н.П. Дичек вважають, що специфіка алгебри як навчального предмета не дозволяє використовувати лекцію в розумінні систематичного послідовного усного викладу вчителем навчального матеріалу. Проте, починаючи з восьмого - дев'ятого класу, можливе застосування лекційно-практичної системи навчання, обов'язковим компонентом якого є шкільна лекція.

В.Є. Куценюк з міста Києва вважає, що система уроків кожної теми має бути наступною:

урок-лекція з поданням конспекта теми. Без доведень, але мотивовано і пов'язано викладається весь матеріал теми з використанням історичних фактів і різноманітних наочних посібників. Протягом кількох уроків потім учні здають письмово, а потім усно конспект;

урок типових задач. Вчитель розв'язує для учнів основні задачі теми, дає ієрархічний список задач домашнього завдання різного рівня оцінювання і повідомляє строк, коли його здати;

урок-семінар. Учні, що підготувались і вчитель доводять усі твердження і теореми теми. Конспект одягається в логічну одежу;

урок парного консультування. Опрацьовується конспект і теореми за схемою : сильний-слабкий і навпаки;

урок вибіркової перевірки. Приблизно півкласа встигають відповісти по конспекту, і вивченим теоремам, і типовим задачам. Це перший зріз серйозного контролю;

самостійна робота бригадним методом. Посадити в довільній формі по 2-4 учня. Вчитель має психологічно підготувати дітей до праці в групах;

урок-консультація вчителя;

урок повторення;

контрольна робота(колоквіум, залік по теорії, програмований залік). Це другий зріз серйозного контролю.

У кінці теми здається домашнє завдання. (Третій зріз серйозного контролю). У дітей два зошити: товстий - для домашнього завдання, тонкий - дл я роботи на уроці.

Як відмічає В.Є. Тараненко важливе значення належить впровадженню в навчальний процес лекцій, семінарських та практичних занять, заліків. Він підкреслює, що вцьому напрямку вже багато зробили вчителі математики Кіровоградської області, де ще у 70-х зароджувалась лекційно-семінарська форма навчання, зокрема у старших класах. У 80-х роках вона знайшла широке розповсюдження і в Черкаській області.

Наприклад, успішно використовують лекційно-семінарську систему навчання у Долінській загальноосвітній школі Кіровоградської області, в ЗОШ № 24 м. Черкаси. Передусім, вчителі планують уроки не окремо, а відразу систему уроків, яка охоплює закінчений в змістовому плані блок програмонго матеріалу, який міститься у бідь-якому розділі або темі. У відповідності з дидактичними цілями вони розробляють структури уроків, встановлюють орієнтовний зміст основних видів робот, особливо на уроки-семінари і контрольно-залікові, зарання підбирають необхідні наочні посібники, технічні засоби, завдання для розв’язання у класі та вдома. Складність підготовчої роботи окупається тим, що створюється чітка система різноманітних типів уроків, обєднаних єдиною логікою руху навчально-виховних цілей і задач кожного уроку окремо і в цілому всієї системи. Тому вчителі в більшій мірі, ніж при традиційному навчанні математики, забезпечують єдність вимог до математичної підготовки учнів і достатньо високий рівень їх знань.

З усього вище сказаного можна зробити висновок, що основними вимогами лекційно-семінарської системи є те, що вивчення кожної нової теми починається з лекції, яка займає від одного до декількох уроків. За цей час вчитель повністю викладає теоретичний матеріал усієї вивчаємої теми. У викладі використовуються цікаві історичні відомості. Матеріал викладається таким чином, щоб учні могли скласти конспект. Під час лекції учні можуть задавати питання, пропонувати і при цьому не боятися зробити помилку. Обговорення кожного питання на семінарському занятті повинно викливати участь усього класу. Велика увага приділяється розв'язуванню задач. По даній темі обирається приблизно сім - вісім так званих ключових задач, в ході розв'язування яких учні можуть оволодіти основними навчальними вміннями. Майже усі інші задачі можна звести до однієї з цих ключових задач. Методика роботи з цими задачами складається з декількох етапів:

1. розуміння учнями теорії, на основі якої розв'язується задача;
2. розбираються розв'язки усіх ключових задач;
3. організація діяльності учнів так, щоб вони отримали достатнє тренування для розпізнання, розв'язання і складання різноманітних задач на основіключових. Після цього приступаємо до розбирання нестандартних задач.

Після вивчення всієї теми проводиться урок-залік. Отримавши картку, учень готується 45 хвили, під час наступних 45 хвилин він відповідає старшекласнику, який склав цю картку або вчителю.

Використання лекцій дозволяє систематизувати матеріал цілої теми, економити час, вчити учнів планувати свою підготовку до заліку, розвивати інтерес до математики в учнів, підвищувати темп їх письма, формувати в школярів вміння уважно слухати пояснення вчителя і виділяти в ньому головне. Складені конспекти потім допоможуть учням готуватися до шкільних випускних екзаменів і до вступних випробувань у ВУЗах.

Оволодіння навмками розв'язання ключових задач гарантує виконання програмних вимог усіма учнями. Чіткий підбір ключових задач ліквідує перевантаження учнів, бо вони вже знають заздалегіть, які типи задач підлягають контролю.

Знайомство з нестандартними задачами допомагає добиватися високих результатів на олімпіадах усіх рівнів, сприяє розвитку логічного мислення багатьох учнів.

Залікові уроки - це уроки індивідуальної роботи, які служать як для контролю і оцінки знань, так і в ще більшій мірі для цілей навчання, виховання і розвитку. Така форма перевірки знань має великі переваги перед традиційними, при яких особливо страждають найбільш здібні учні, бо вчитель змушений витрачати час уроку на повторення і роз’яснення матеріалу, який викликав труднощі у слабших, а інщі учні при цьому нудбгують і поступово втрачають інтерес ло предмета. Двогодинний залік вносить суттєвий внесок в розвиток і виховання шести - семи десятків учнів двох класів. Так розв’язується одне з важливих завдань групового - і той же час індивідуального навчання, розв’язати яке традиційними прийомами неможливо. Велику користь отримує і той, хто приймає залік: він повторює тему в цілому на більш високому рівні по відношенню з поперднім роком. Відбувається перосмислення матеріалу, систематизація, зіставлення нового і старого - і тим самим розвивається мислення старшокласника.

РОЗДІЛ ІІ. ПСИХОЛОГО – ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У пояснювальній записці до програми з математики вказується, що важливим завданням шкільного курсу є розвиток логічного мислення учнів. Підкреслюється, що самі об'єкти математичних умовиводів і прийняті в математиці правила їх конструювання сприяють формуванню умінь обгрунтовувати і доводити судження, наводити чіткі означення, розвивають логічну інтуіцію, стисло і наочно розкривають механізм логічних побудов і навчають їх застосування. Тим самим математика займає провідне місце у формуванні науково-теоретичного мислення учнів.

Робота з розвитку мислення учнів включає формування уних розуміння логічної структури означень понять, теоретичних положень (аксіом і теорем), доведень.

Основними елементами нашого мислення є поняття. В поняттях відображаються найзагальніші і найважливіші властивості предметів і явищ , а також взаємовідношення між речами і явищами.

Формування поняття - складний психологічний процес, який починається з утворення простіших форм пізнання - відчуття - і відбувається за схемою відчуття - сприймання, уявлення, поняття. Цей процес розбивають на два ступені - чуттєвий і логічний. На першому ступені утворюються відчуття, сприймання і уявлення, на другому - здійснюється перехід від уявлень до понять за допомогою узагальнення і абстрагування.

На першому ступені необхідно широко застосовувати наочність. Теоретичне обгрунтування принципу наочності вперше було сформульоване чеським педагогом Я.А. Каменським, який висунув вимоги вчити людей пізнавати самі речі, а не тільки чужі свідчення про них. Російський педагог К.Д. Каменський вказував, що наочність відповідає психологічним особливостям дітей. Наочністьзбагатшує коло уявлень учнів, робить навчання більш доступним, конкретним і цікавим, розвиває спостережливість і мислення. Проте слід мати на увазі, що формування математичних понять не завжди починається з відчуттів. У курсі алгебри та початку аналізу багато понять пов’язано з категогією нескінченності, а людина не може сприймати нескінченність. Зауважимо, що в таких випадках наочність стає інколи гальмуючим фактором.

Заключним етапом формування поняття, як правило, є його означення. Багатовіковою практикою встановлено, а психологами обгрунтовано, що рівень “строгості” доведень повинен бути адекватний віковим можливостям учнів. Не можна очікувати результата процеса до того, як сформований сам цей процес. Процес доведення - складний процес мислення, і він формується лише поступово, від простих до більш складних структур.

Цьому повинні відповідати і поступове ускладнення структури доведення, поступове підвищення його рівня “строгості”. Такі закономірності мислення, які обумовлюють і закономірності навчання.

Знання - це уявлення і поняття, які формуються в людини внаслідок відображення об’єктивної реальності. Коли мова йде про формування знань у школярів, то перш за все мають на увазі засвоєння ними наукових знань. Але поняття, які відображають загальні та істотні властивості предметів, формуються на основі чуттєвих образів, тобто уявлень, як ми казали вже раніше.

Навичками називають дії, які доведені до відповідного рівня удосконалення, виконуються легко, швидко, економно, з найвищими результатами і одночасно з найменшою напругою уваги, тобото немовби автоматично. Навички - це добре засвоєні дії. Процес формування будь-якої навички складається з кілької кроків:

попередній (спостереження). при цьому учні шляхом спостереження знайомляться з методом дії, тобто отримують знання;

аналітичний. Тут учні практично оперують окремими елементами дії. Як правило, учень здійснює всі рухи окремі, через більш чи менш значні проміжки часу. При цьому спостерігаються зайві, невиправдані рухи і напруженість пози.. Темп діяльності учня-початківця нестійкий і погано підкоряється його волі;

синтетичний. На цьому етапі відбувається об’єднання, сполучення окремих рухів в єдине ціле, у цілу дію. Механізмом об’єднання є ланцюг асоціацій, відчуттів, які виникають від кожного руху. Завдяки асоціації відчуттів утворюється “рушіна форма навички”, яка стає нібито “нотами”, зафіксованими в мозку людини, на основі яких і розготається дія. Чим краще закріплена “формула”, тим швидше й легше вона виконується.

Кожний вид діяльності включає в себе більш-менш складну систему навичок, на основі яких формується уміння.

Поняття “навик” і “уміння” - не тотожні. Опанування будь-якою діяльністю передбачає не одну навичку, а декілька. Сукупність навичок, які стосуються однієї і тієї самої діяльності, є основою уміння.

У самому широкому розумінні уміння є засвоєна готовність свідомо розв’язати ту чи іншу задачу. Уміння передбачає добру орієнтацію в нових умовах. Воно включає елементи творчості. Не випадково корінь слова “уміння” - “ум”. Діяти уміло - означає діяти “з умом”, самостійно планувати весь хід роботи, знаходити найбільш раціональні способи розв’язування поставлених задач. Звідси випливає, що для формування уміння необхідно організовувати заняття так, щоб кожна вправа, задача вимагали б від учня розв’язування нових задач, тобто вимагали творчості.

Д.Н. Богоявленський у книзі ”Психология формирования понятий и умственных действий” пише, що: “Під прийом розумової діяльності сприймають систему процесів або операцій аналізу, синтезу, абстракції, узагальнення та інших спеціально організованихдля розв’язуваннязадач-проблем певного типу й різного ступеня узагальненості.” Саме в зв’язку з тим, що прийомирозумової діяльності і прийоми навчальної діяльності (роботи) тісно пов’язані, в останній час дидактики вживають у синтезі обидва цівиди прийомів і говорять про прийоми навчально-пізнавальної діяльності, наприклад, М.Т. Махмутов “Теория и практика проблем обучения”.

Якщо говорити про прийоми розумової діяльності в процесі навчання математики, то серед них можна виділити прийоми навчально-пізнавальної діяльності з розв’язання задач. У зв’язку з цим Н.Ф. Тализіна в книзі “Управление процесом и усоения знаний” пише: “У процесі розв’язування задач людина, як правило, використовує неокремі дії, аціллі їх системи. Ось тому сукупність дій, яка приводить до розв’язання задач того чи іншого типу, називають прийомом, способом або методом розв’язування .” Прийоми розумової діяльності відіграють значну роль у навчанні учнів і зокрема в розв’язанні проблеми “вчити вчитися.”

Психологічні аспекти пошуку розв’язання задачі:

І крок. Спостереження - перший крок кожного етапу пізнання, який є “живим спогляданням”. Для того, щоб виконати є “живе споглядання”, треба виконати аналіз.

ІІ крок. Аналіз(поділ, розчленування цілого на частини) зорової інформації. Щоб виник аналіз зорової інформації, перш за все необхідно виконати осмислення.

ІІІ крок. Осмислення загальної структури одержаного (або кимось запропонованого) зображення. Таким зображенням може бути формула, графік, схема ... При цьому мислення слід спрямувати на розпізнавання.

ІV крок. Розпізнавання деякої стандартної ситуації, що дає можливість мисленно відповісти на запитання: “На що?”, “На який матеріал?”, “На яку теорему?”, тобто на застосування яких знань, правил запропонована задача. Після цього виконуємо розчленування.

V крок. Розчленування - це зоровий аналіз інформації, в якому важливе значення має впізнання, узнавання окремих її фрагментів, ототожнення однакових, схожих за формою або за смислом її (інформації) елементів.

Видатний американський психолог, метематик Дж. Пойа в своїй книзі “Как решать задачу” дає таблицю “как решать задачу”, яку подамо у скороченому вигляді. Ця таблиця складається з таких блоків.

I. Розуміння постановки задачі. Треба чітко зрозуміти задачу: Що невідомо? Що дано? У чому полягає умова?

II. Складання плану розв'язання. Потрібно знайти розв'язок між даними і невідомим. Чи відома вам яка-небудь споріднена задача? Чи не знаєте теореми, яка б виявилась корисною?

III. Здійснення плану. Треба здійснити план розв'язання. Здійснюючи план, контролюйте свій крок.

IV Погляд назад. Треба вивчити знайдений розв'язок, виконати перевірку результату; подумати над можливістю розв'язання даної задачі іншим способом.

Ефективність навчальної діяльності з роввитку мислення у великій мірі залежить від ступеня творчої активності учнів при розв'язанні математичних задач. Отже, необхідні математичні задачі і вправи, які б активізували розумову діяльність школярів. А.Ф. Есаулов у книзі "Психология решения задач" поділяє задачі на такі види: розраховані на відтворення(при їх розв'язуванні спираються на пам'ять і увагу); розв'язування яких приводить до нової, невідомої до цього думки, ідеї; творчі задачі. Активізує і ровиває мислення учнів розв'язування задач останніх описаних видів.

Розв'язування математичних задач у учнів виховує особливо математичний стиль мислення. По А.Я. Хінчину, такий стиль характеризується дотримуванням формально-логічної схеми міркувань, лаконічним відбиттям думок як у словах, так і у записах, чітким розмежуванням ходу мислення, точності застосованої символіки. Істотним для розвитку математичного мислення учнів є формування відповідних компетентностей, вмінь правильно виділяти помилки і висновки. Такі вміння формуються, звичайно, під час розв'язування задач на доведення.

З психології навчання відомо, що "краще розв'язати одну задачу трьома способами, ніж три задачі одним способом." Психологами встановлено, що навіть рівень сприйняття задачі неоднаковий в учні в одного класу. Здібний до математики сприймає і однимичні елементи задачі, і комплекси її взаємопов'язаних елемнтів задачі, і роль кожного елемента в комплексі. Середній учень сприймає лише окремі елементи задачі. Тому при розв'язуванні задач необхідно спеціально аналізувати з учнями зв’язок і вдношення елементів задачі. Це створює для учнів полегшення вибору способів переробки умови задачі.

У процесі розв’язуваня задачі часто доводиться звертатися до пам’яті. Індивідуальна пам’ять здібного до математики учня зберігає не всю інформацію, преважно “узагальнені і згорнуті структури”. Збереження такої інформації не завантажує мозок надмірною інформацією, а ту, яка запам’ятовується, дозволяє довше зберігати і легше використовувати. Навчання узагальненням при розв’язуванні задач розвиває, таким чином, не тільки мислення, а пам’ять, формує “узагальнені асоціації”. На завершення психолого-педагогічного дослідження процитуємо слова М.В. Ломоносова : “Математику вже треба для того вивчати, що вона розум у порядок приводить”.

РОЗДІЛ ІІІ. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНМХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

§ 1. Розвязування тригонометричних рівнянь.

До вивчення даної теми переходять після вивчення теми “Властивості тригонометричних функцій”.

1.1. Обернені тригонометричні функції

1. Розпочинаємо з одного важливого твердження (його називають теоремою про корінь), якими зручно користуватися розв′зуючи рівняння.

Теорема. Нехай функція f зростає (або спадає) на проміжку I , а число a- будь-яке із значень, яких набуває f на цьому проміжку. Тоді ріняння f(x)=a має єдиний корінь на проміжку I.

Доведення проведемо для зростаючої функції (у випадку спадної функції міркування аналогічні). За умовою теореми число a – значення функції f , якого вона набуває на проміжку I, тобото на проміжку I існує таке число b , що f(b)=a. Покажемо, що b –единий корінь рівняння *f(x)=a.* Припустимо, що проміжку I є ще число c≠b. Таке, що f(c)=a=f(b). Тоді або c<b, або c>b. Але функція f зростає на проміжку I , тому або f(c)<f(b) , або f(c)>f(b). Це супечить рівності f(c)=f(b). Отже зроблене припущення неправильне і в проміжку I крім числа b , інших коренів рівняння *f(x)=a* не має.

2. Як відомо, функція синус зростає на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і набуває всіх значень від –1 до 1. Отже, згідно з теоремою про корінь для будь-якого числа a, такого, що $|a|\leq 1$, в проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ існує єдиний корінь b рівняння sin x=a. Це число b називають арксинусом числа a і позначають arcsin a. Отже, арксинусом числа a називається таке число з відрізка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, що його синус дорівнює a.

Приклад 1. знайдемо arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, оскільки sin $\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{\pi}{4}$є $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Приклад 2. Знайдемо arcsin $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Кут (з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$), синус якого $-\frac{\pi}{6}$, дорівнює . Тому arcsin $\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

Значення арксинуса можна знаходити за таблицями (або за допомогою калькулятора). Щоб знайти arcsin a, за таблицею значень синуса знаходять кут α^{o} , що лежить в межах $-90^{o}\leq\alpha^{o}\leq90^{o}$ і для якого sin α=a. Після цього подають α^{o} (при цьому користуються таблицею переведення градусної міри кутів у радіанну).

3.Функція косинус спадає на відрізку [0;π] і набуває всіх значень від –1 до 1. Тому для будь-якого числа a, такого, що $|a|\leq1$, на відрізку [0;π] існує єдиний корінь b рівняння cos x=a. Це число b називають аркосинусом числа a і позначають arccos a.

Арккосинусом числа a називається таке число з відрізка [0;π], що його косинус дорівнює a.

Приклад 4. Arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, оскільки cos $\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{\pi}{6}$є [0;π].

На інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функція тангенс зростає і набуває всіх значень з **R**. Тому для будь-якого числа a в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ існує єдиний корінь b рівняння tg x=a. Це число b називають арктангенсом числа a і позначають arctg a. Отже, *арктангенсом числа a називається таке число з інтервалу* $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, що його тангенс дорівнює a.

Приклад 5. arctg 1=$\frac{\pi}{4}$, бо tg $\frac{\pi}{4}$=1 і $\frac{\pi}{4}$є $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

1.2. Розв′язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

1. Почнемо з рівняння ***cos t = a*** (1)

де a – довільне дійсне число. Дослідимо, скільки розв′язків має це рівняння залежно від значення a і які вони.

Очевидно, що коли $|a|>1$, то рівняння (1) не має розв′язків, бо $|\cos t|\le 1$ для будь-якого t.

Нехай $|a|\le 1$. Треба знайти всі такі числа t, що cos t = a. На відрізку $[0;\pi]$ існує точно один розв′язок рівняння (10 – це число arccos a.

Косинус – парна функція, і, отже, на відрізку $[-\pi;0]$ рівняння (1) також має точно один розв′язок – число arccos a. Таким чином, рівняння cos t = a на відрізку $[-\pi;\pi]$ завдовжки 2π має два розв′язки: $t=\pm\arccos a$ (які збігаються, якщо a=1).

Внаслідок періодичності функції y= cos t всі інші розв′язки відрізняються від цих на $2\pi n$($n \in Z$), тобто формула коренів рівняння (1) має такий вигляд:

$$t=\pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (2)$$

Розв′язання рівняння (1) можна проілюструвати на одиничному колі. За означенням cos t – це абсциса точки P_t одиничного кола. Якщо $|a|<1$, то таких точок дві, а якщо a=1 або a=-1, то маємо одну точку.

Коли a=1 , числа arccos a і –arccos a збігаються (дорівнюють нулю), тому розв′язки рівняння cos t=1 прийнято записувати у вигляді $t=2\pi n$, $n \in Z$.

“Особливу ” форму запису розв′язків рівняння (1) прийнято для a= -1 й a= 0:

$\cos t = -1$, коли $t=\pi+2\pi n$, $n\in Z$;

$\cos t = 0$, коли $t=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$;

Приклад 1. Розв′язати рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$.

За формулою (2) $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

Оскільки arccos $\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, маємо:

x=$\pm\frac{\pi}{3}$+2πn, nєZ.

Приклад 2. Розв′язати рівняння cos (2x-$\frac{\pi}{4}$) = -$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

За формулою (2)

$$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n, n\in Z,$$

тобто

$$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{5}{6}\pi+2\pi n, n\in Z,$$

звідки

$$x=\frac{\pi}{8}\pm\frac{5}{12}\pi+\pi n, n\in Z.$$

2. Рівняння

$$\sin t = a \qquad (3)$$

не має розв′язків│a│>1, бо │sin t│≤1 для будь-якого t.

Якщо │a│≤1 на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то рівняння (3) має тільки один розв′язок t_1=arcsin a. На проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$функція sin x спадає і набуває всіх значень від –1 до 1; тому рівняння (30 на цьму відрізку має один корінь. Цим коренем є число t_2, яке рівне π-arcsin a. Справді,

$$\sin t_2 = \sin (\pi - t_1) = \sin t_1 = a.$$

Крім того, оскільки $-\frac{\pi}{2}\le t_1\le\frac{\pi}{2}$ маємо: $-\frac{\pi}{2}\le -t_1\le\frac{\pi}{2}$ і $\pi-\frac{\pi}{2}\le\pi-t_1\le\pi+\frac{\pi}{2}$, тобто число t_2 належить відрізку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Отже рівняння (30 на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$має два розв′язки t_1=arcsin a і t_2=π-arcsin a (які збігаються, якщо a=1). Врахувавши періодичність синуса (з періодом 2π), дістанемо такі формули для запису всіх розв′язків рівняння:

t=arcsin a + 2πn, (4)

t=π-arcsin a + 2πn, n є Z. (5)

Зручно розв′язки рівняння (30 записувати не двома, а однією формулою:

t = $(-1)^k$ arcsin a + πk, k є Z. (6)

Як неважко переконатися, при парних k=2π з формули (6) знаходимо всі розв′язки, записані формулою (4); при непарних k=2n+1 - розв′язки, записані формулою (5).

Розв′язання рівняння (3) зручно ілюструвати на одиничному колі. За означенням sin t є ордината точки P_1 одиничного кола. Якщо │a│<1, то таких точок дві; при a=±1 – одна.

Якщо a=1, то числа arcsin a і π - arcsin a збігіються (вони дорівнюють $\frac{\pi}{2}$), тому розв′язок рівняння

$$\sin t = 1$$

прийнято записувати так:

$$t=\frac{\pi}{2}+2\pi\, n,\ n\in Z.$$

Якщо a = -1 і a = 0, прийнято такий запис розв′язків:

$\sin\ t=-1$, якщо $t=-\frac{\pi}{2}+2\pi\, n,\ n\in Z$,

sin t = 0, якщо t = πn, n є Z

Приклад 3. Розв′яжемо рівняння

$$\sin\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

За формулою (6)

$$x=(-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k,\ k\in Z,$$

тобто $x=(-1)^k \arcsin \frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

Приклад 4. Розв′яжемо рівняння

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

За формулою (6)

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k, k\in Z.$$

Оскільки $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, маємо:

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{5}-(-1)^k\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$$

4. При будь-якому t в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ є тільки одне таке число t , що tg t = a, це arctg a.

Тому рівняння

$$\text{tg } t = a \qquad (7)$$

має на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ завдовжки π тільки один корінь. Оскільки тангенс – періодична функція з періодом π, решта коренів рівняння (7) відрізняються від знайденого на πn (n∈Z), тобто

$$t=arctg\, a+\pi n, n\in Z. \qquad (8)$$

Розв′язання рівняння tg t = a зручно ілюструвати, розгладаючи лінію тангенсів. Нагадаємо, що tg t – це ордината точки T_t перетину прямої OP_t з лінією тангенсів. Для буль-якого числа a на лінії тангенсів є лише одна точка з ординатою a . Пряма OT перетинається з одиничним колом у двох точках; при цьому інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ відповідає точка P_{t_1} правої півплощини, така, що t_1 = arctg a.

Приклад 5. Розв′жемо рівняння

$$tg\ x = \sqrt{3}.$$

За формулою (8) знаходимо розв′язок $x = arctg\ \sqrt{3} + \pi\ n, n \in Z$, бо $arctg\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, приходимо до остаточної відповіді:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi\ n, n \in Z.$$

Приклад 6. Розв′яжемо рівняння

$$ctg\ x = -\sqrt{3}.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$tg\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

яке розв′язуємо за допомогою формули (8):

$$x = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi\ n = -\frac{\pi}{6} + \pi\ n, n \in Z.$$

1.3. Основні типи раціональних тригонометричних рівнянь та їх розв’язування.

Однією із особливостей вивчення даного матеріалу є те, що він вивчається лише після досконалого засвоєння учнями розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь та рівнянь, що до них зводяться. Слід пам'ятати, що для того, щоб розв'язати тригонометричне рівняння, треба звести його шляхом еквівалентних перетворень до:

а) найпростішого рівняння;

б) сукупність найпростіших рівнянь;

в) системи або систем найпростіших рівнянь.

Рівняння, що зводяться до однієї тригонометричної функції одного аргументу.

При розв'язуванні цього типу рівнянь, як правило, використовують формули:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1,\ \text{або}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Приклад *1*. Розв'язати рівняння $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

Розв'язання. $1 + \cos x + \cos 2x = 0,\ x \in \mathrm{R}$.

Враховуючи, що $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, маємо

$$1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$$

Звівши подібні доданки, одержимо

$$2\cos^2 x + \cos x = 0 \text{ або } \cos x(2\cos x + 1) = 0.$$

Звідси

$$\cos x = 0 \qquad \text{або} \qquad 2\cos x + 1 = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \qquad\qquad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi m$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n, m \in Z$

Приклад *2*. Розв'язати рівняння $\mathrm{tg}\, x + 2\,\mathrm{ctg}\, x = 3$.

Розв'язання. $\mathrm{tg}\, x + 2\,\mathrm{ctg}\, x = 3$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ x \neq \pi k$, $k, m \in Z$.

Враховуючи, що $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, маємо

$$\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg} x} = 0$$

Звідси

$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$ і $\operatorname{tg} x \neq 0$

$\operatorname{tg} x = 1, \quad \operatorname{tg} x = 2$ $\quad x \neq \pi l, l \in Z.$

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z,$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \ n, k \in Z.$

Вправи для самостійного розв'язування:

1. $2\cos^2 x + \sin x = -1$ 2. $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$

3. $\cos 2x = 2\sin^2 x$ 4. $\sin\dfrac{x}{2} + \cos x = 1$

5. $3\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1$ 6. $\cos 2x - 5\sin x = 3$

Рівняння виду $\boldsymbol{a\sin x + b\cos x = c, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0}$

Розглянемо один із способів розв'язування таких рівнянь, що полягає у зведенні їх до рівнянь виду $\cos(x - \alpha) = m,$ або $\sin(x - \alpha) = n.$

Домножимо обидві частини заданого рівняння на $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Одержимо

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Так як $\left|\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1$ та $\left|\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1$ і , причому,

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1 \ ,$$

то можна ввести функції, наприклад,

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ та } \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отримаємо рівняння

$$\sin\alpha\sin x+\cos\alpha\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

що зводиться до найпростішого

$$\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Дане рівняння буде мати розв’язок за умови $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$.

Застосувавши відповідну формулу, знаходимо

$$x-\alpha = \pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2\pi n , \quad n\in Z,$$

Звідси

$$x = \alpha \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2\pi n , \quad n\in Z.$$

Якщо значення cos α($\sin\alpha$)не співпадають із таблич-ними, то в загальному випадку для визначення величини кута α можна скористатися такими співвідношеннями:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right):\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{a}{b}.$$

Звідки $\alpha=\text{arctg}\frac{a}{b}$.

Отже, розв’язки рівняння $a\sin x+b\cos x=c \quad (a\cdot b\cdot c\ne 0)$

виражаються за формулою

$$x=\text{arctg}\frac{a}{b} \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2\pi n , \quad n\in Z .$$

Приклад *3.*Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

Розв'язання. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1, \quad x \in R$

Домножимо обидві частини рівняння на $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}$.

Одержимо

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}.$$

Так як $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ і $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то маємо

$\sin\frac{\pi}{3}\sin x - \cos\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2}$ або $-\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right) = \frac{1}{2}$.

Звідси

$$-\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{ і , остаточно, } \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Застосувавши відповідну формулу, одержимо

$$x - \frac{\pi}{3} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, \ n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z.$

Приклад *4*. Розв'язати рівняння $2x + \cos 2x = -1$.

Розв'язання. $\sin 2x + \cos 2x = -1, \ x \in R$.

Домноживши на $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, одержимо

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Врахувавши, що $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, маємо

$\sin 2x \sin\frac{\pi}{4} + \cos 2x \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ або $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Застосувавши відповідну формулу, одержимо:

$$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\pi\mathrm{n},\ \mathrm{n}\in Z.$$

Звідси

$$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi\mathrm{n},\ \mathrm{n}\in Z$$

$$2x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi\mathrm{n},\ \mathrm{n}\in Z\text{і}\ \ x=\frac{\pi}{8}\pm\frac{3\pi}{8}+\pi\mathrm{n},\ \mathrm{n}\in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{8}\pm\frac{3\pi}{8}+\pi\mathrm{n},\ \mathrm{n}\in Z.$

Вправи для самостійного розв'язування :

7. $\sin x+\cos x=1$
8. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$
9. $\sin 3x-\cos 3x=1$
10. $\sin 3x-\cos 3x=\sqrt{\frac{3}{2}}$
11. $\sin 2x+\sqrt{2}\cos 2x=1$
12. $\sin 5x-\cos 5x=\sqrt{2}$

Раціональні рівняння відносно sin x та cos x.

Такі рівняння розв'язуються універсальною тригонометричною підстановкою:

$$\sin x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}},\qquad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}.$$

Недоліком такого способу є те , що при застосуванні універсальної тригонометричної підстановки підвищується степінь рівняння , а це , як правило, ускладнює процес розв'язання.

Оскільки $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ існує , коли $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi\mathrm{n},\ \mathrm{n}\in Z,$

або $x\neq\pi+2\pi\mathrm{n},\mathrm{n}\in Z,$ то слід пам'ятати , що при пере-ході від $\sin x$ та $\cos x$ до $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ звужується область до-пустимих значень змінної заданого рівняння, а саме , з області допустимих значень виключаються числа $x=\pi+2\pi\mathrm{n}$, $\mathrm{n}\in\mathrm{Z}$. Тому , щоб не втратити корені , потрібно перевірити чи будуть ці числа коренями даного рівняння.

Приклад 5. Розв’язати рівняння $\sin x - 2\cos x = 2$.

Розв'язання . $\sin x - 2\cos x = 2$, $x \in \mathrm{R}$.

Враховуючи , що $\sin x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$, маємо

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} - \frac{2\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} = 2$$

Поділимо одержане рівняння на 2 та зведемо до спільного знаменника.Одержимо

$$\frac{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} - 1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} = 1\,.$$

Домноживши на $\left(1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}\right) \neq 0$, матимемо

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = 1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\ .$$

Звідси $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = 2$.

Отже,

$$\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\,2 + \pi\,\mathrm{n}, \mathrm{n} \in Z.$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi\,\mathrm{n}, \mathrm{n} \in Z\,.$$

Перевіримо прямою підстановкою в рівняння, чи

будуть числа $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$ розв’язками заданого рівняння

$$\sin(\pi+2\pi n) - 2\cos(\pi+2\pi n) = 2$$

$$0 - 2\cdot(-1) = 2$$

$$2 = 2.$$

Рівність істина , тому числа $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$ є розв'язками заданого рівняння.

Відповідь: 2arctg2+2πn ; π+2πn , n,k ∈Z.

Приклад *6*. Розв'язати рівняння sin x + 7cos x = 5.

Розв'язання. sin x + 7cos x = 5 , x∈R.

Використавши універсальну тригономеричну підстановку , маємо

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}+\frac{7\left(1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}=5, \text{ або } \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+7-7\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}=5.$$

Домноживши на $\left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}\right)\neq 0$, одержимо

$$2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}7-7\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}=5+5\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}.$$

Звідси

$$12\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}-2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-2=0 \text{ або } 6\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1=0.$$

Одержали квадратне рівняння відносно $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$. Роз’язавши його, знайдемо

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=\frac{1\pm 5}{12}.$$

Звідси

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \qquad\qquad \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2}=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z \qquad\qquad \frac{x}{2}=-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z$$

$$x=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+2\pi n, n\in Z \qquad\qquad x=-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$$

Перевіримо , чи є числа π+2πm , m∈Z коренями заданого рівняння

sin (π+2πm) + 7cos (π+2πm) = 5

0+7·(–1)=5

–7≠5.

Отже , числа $\pi+2\pi m$, $m\in Z$ не є коренями даного рівняння.

Відповідь: $2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,\ -2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+2\pi k,\ n,k\in Z.$

Приклад *7*.

Розв'язати рівняння $5\sin 2x - \cos 2x = \mathrm{tg}\, x + 5$.

Розв'язання. $5\sin 2x - \cos 2x = \mathrm{tg}\, x + 5$, $\cos x \neq 0$

Застосуємо формули

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Одержимо

$$5\cdot\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x} - 5\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \mathrm{tg}\,x + 5\,.$$

Отже,

$$\frac{10\,\mathrm{tg}\,x - 5 + 5\,\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \mathrm{tg}\,x + 5.$$

Так , як $1+\mathrm{tg}^2 x \neq 0$, то

$$10\,\mathrm{tg}\,x - 5 + 5\,\mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}\,x + 5 + \mathrm{tg}^3 x + 5\,\mathrm{tg}^2 x$$
$$\mathrm{tg}^3 x - 9\,\mathrm{tg}\,x + 10 = 0.$$

Нехай $\mathrm{tg}\, x = t$, тоді $t^3 - 9t + 10 = 0$.

Шукаємо корені рівняння серед дільників вільного члена , тобто , числа 10.

При $t = 2$, отримаємо $8 - 18 + 10 = 0$ Отже,число 2 – корінь рівняння.. Так як

$t^3 - 9t + 10 = (t - 2)(t^2 + 2t - 5)$, то маємо

$$(t - 2)(t^2 - 2t - 5) = 0$$

$$t^2 + 2t - 5 = 0.$$

Звідси

$$t_1 = \sqrt{6} - 1 \qquad \text{або} \qquad t_2 = -\sqrt{6} - 1\,.$$

Отримали: $t = 2, t = \sqrt{6} - 1, t = -\sqrt{6} - 1,$ тобто

$\operatorname{tg} x = 2$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{tg} x = \sqrt{6} - 1$

$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z$ $\qquad\qquad$ $x = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{6} - 1\right) + \pi k, k \in Z$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{6} - 1$

$x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{6} - 1\right) + \pi l, l \in Z.$

При переході від $\sin 2x$, $\cos 2x$ до $\operatorname{tg} x$ відбулася втрата числа $\frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$,але це число, як неважко переконатися , не є коренем рівняння.

Відповідь: $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $\operatorname{arctg}(\sqrt{6} + 1) + \pi k$,

$-\operatorname{arctg}(\sqrt{6} + 1) + \pi l$, $n, k, l \in Z$.

Приклади для самостійного розв'язання :

13. $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}$ $\qquad$ 15. $3\sin x - 3\cos x = 5$

14. $\sin 2x - 3\cos 2x = 3$ $\qquad$ 16. $3\sin x - \cos x = 1$

Однорідні рівняння та рівняння , що зводяться до них .

Однорідними тригонометричними рівняннями нази-вають такі рівняння, у яких ліва частина є многочленом, кожний член якого має вид $\sin^{n} x \cos^{k} x$ (де $n, k \in N$) і, причому, у кожному члені сума показників синуса та косинуса однакова, тобто n+k= const, а права частина дорів-
нює нулю.

Суму показників синуса та косинуса, тобто число n+k, називають степенем однорідного рівняння.

Однорідні рівняння розв'язують діленням лівої та правої частини на $\cos^{n}x$ (або на $\sin^{n}x$), де n – степінь рівняння. При цьому отримаємо рівняння з однією три-гонометричною функцією $\operatorname{tg} x$.

Примітка. При переході від sinx та $\cos x$ до $\operatorname{tg} x$, зву-жується область допустимих значень змінної заданого рів-
няння, тому слід пам'ятати про можливу втрату коренів.

Приклад *8.*

Роз'язати рівняння $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Розв'язання. $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0, \quad x \in R$.

Поділимо рівняння на $\cos^2 x \neq 0$. Якщо $\cos x = 0$, то $\sin^2 x + 2\sin x \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$ і $\sin x = 0$, що неможливо. Отже, втрати коренів не буде. Одержимо

$$\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg} x - 3 = 0.$$

Звідси

$$\mathrm{tg}\, x = -3 \qquad \text{або} \qquad \mathrm{tg}\, x = 1.$$

Отже,

$$x = -\mathrm{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь: $-\mathrm{arctg} 3 + \pi n,\ \frac{\pi}{4} + \pi k,\ n, k \in Z$.

Приклад *9.* Розв'язати рівняння $\cos^2 x - 2\sin x \cos x = 0$.

Розв'язання. $\cos^2 x - 2\sin x \cos x = 0,\ x \in R$.

Поділимо рівняння на $\cos^2 x \neq 0$. Якщо $\cos x = 0$, то $0 = 0$, отже, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ є розв'язком рівняння. Внаслідок ділення одержимо

$$1 - 2\mathrm{tg}\, x = 0 \qquad \text{або} \qquad \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2}.$$

Звідси

$$x = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi m, \quad m \in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi m, \quad n, m \in Z$.

Приклад *10.*

Розв'язати рівняння $5\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2$.

Розв'язання.

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x), \quad x \in R$$

Поділимо рівняння на $\cos^2 x \neq 0$. Якщо $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, що неможливо. Отже, при діленні втрати коренів не відбувається. Маємо

$$3\mathrm{tg}^2x + 3\mathrm{tg}x - 5=0$$

Звідси

$$\mathrm{tg}x=\frac{-3+\sqrt{69}}{6} \quad \text{або}$$

$$\mathrm{tg}x=\frac{-3-\sqrt{69}}{6}.$$

Тому

$$x=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{69}-3}{6}+\pi n,\ n\in Z,\quad x=-\,\mathrm{arctg}\frac{3+\sqrt{69}}{6}+\pi m,\ m\in Z.$$

Відповідь: $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{69}-3}{6}+\pi n,\ -\mathrm{arctg}\frac{3+\sqrt{69}}{6}+\pi m,\quad n,m\in Z.$

Приклад *11.* Розв'язати рівняння $2\sin^3 x = \cos x$.

Розв'язання.

$$2\sin^3 x = \cos x, \quad x\in R$$

$$2\sin^3 x = \cos x(\cos^2 x+\sin^2 x)$$

$2\sin^3 x-\cos^3 x - \cos x\sin^2 x = 0$ – однорідне рівняння третього степеня. Ділимо ліву і праву частину рівняння на $\cos^3 x\neq 0$, отримаємо:

$$2\mathrm{tg}^3x - \mathrm{tg}^2x - 1=0$$

Нехай $\mathrm{tg}\,x = t$, тоді $2t^3-t^2-1=0$.

Розв'язком цього рівняння буде число 1,тому

$$2t^3-t^2-1=(t-1)(2t^2+t+1) \quad \text{і} \quad (t-1)(2t^2+t+1)=0.$$

Звідси

$$2t^2+t+1=0.$$

Так як $D = 1 - 8 < 0$, то коренів немає.

Отже, $t = 1$ і $\mathrm{tg}\,x = 1$.

Звідси $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

Перевіримо ,чи не відбулася втрата коренів. Нехай $\cos^3 x=0$, тоді $\sin x = 0$, що неможливо.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

Приклади для самостійного розв'язування :

17 . $\sin^2 x + 14\sin x \cos x = 15\cos^2 x$

18 . $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 6\cos^3 x = 5$

19. $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$.

Рівняння виду $\sin^n x + \cos^m x = 1$, де $m \geq 3$ і $n \geq 3$, $n , m \in N$

Неважко побачити, що розв'язки рівняння цього типу можна знайти, розв'язавши системи рівнянь

$$\begin{cases} \sin^n x = 1 \\ \cos^m x = 0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \sin^n x = 0 \\ \cos^m x = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Покажемо,що рівняння інших розв'язків не має. Припустимо протилежне.

Нехай існують розв'язки $x = \alpha$,

відмінні від вище наведених, тобто такі , що $\sin\alpha \cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq \pm 1$, $\cos\alpha \neq \pm 1$.Так як $|\sin\alpha| < 1$ і $|\cos\alpha| < 1$, то $\sin^2\alpha < 1$ і $\cos^2\alpha < 1$. Тому для довільних натуральних $n \geq 3$ і $m \geq 3$ маємо

$\sin^n x < \sin^2 x$ і $\cos^m x < \cos^2 x$. Додавши ці нерівності, одержимо

$$\sin^n x + \cos^m x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Отже, рівність $\sin^n x + \cos^m x = 1$ виконується тоді і тіль-ки тоді, коли мають місце системи (1).

Таким чином , враховуючи парність чисел n та m, маємо :

1. Розв'язками рівняння $\sin^{2k} x + \cos^{2l} x = 1$ є числа

$x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$

2. Розв'язками рівняння $\sin^{2k+1} x + \cos^{2l+1} x = 1$ є числа $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $n,m \in Z$.

3. У випадку, коли числа n та m мають різну парність, розв'язки рівняння такого виду шукаються безпосередньо як розв'язки системи (1). У цьому випадку розв'язків може і не бути.

Приклади для самостійного розв'язання:

20. $\sin^3 2x + \cos^3 2x = 1$

21. $\sin^6\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^6\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Раціональні рівняння відносно $\sin x \pm \cos x$ та $\sin 2x$.

Рівняння такого типу розв'язуються заміною змінних $\sin x \pm \cos x = t$, тоді

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \pm \sin 2x = t^2$$

Звідси

$$\sin 2x = \mp (t^2-1)$$

Приклад *12.* $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$

Розв'язання . $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$, $x \in R$.

Нехай $\cos x - \sin x = t$, знайдемо $\sin 2x$.

$$\cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x = t^2$$

$$-\sin 2x = t^2 - 1 \quad \text{і} \quad \sin 2x = 1 - t^2$$

Маємо : $4 - 4t + t^2 - 1 = 0$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad , \quad t_2 = 3.$$

Тоді

$$\cos x - \sin x = 1 \qquad \cos x - \sin x = 3$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \qquad \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 3$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} , \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} > 1$$

Звідси $\frac{\pi}{4} - x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

$$-x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z.$

Приклад *13.* $\sin x - \sin 2x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

Розв'язання: $\sin x - \sin 2x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, $x \in R$.

Так як $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$, то маємо

$\sin x - \sin 2x = 1 - \cos x$, або $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

Нехай $\sin x + \cos x = t$, тоді $\sin 2x = t^2 - 1$, отже,

$$t^2 - t = 0, \text{ або } t(t-1) = 0.$$

Звідси

$$t = 0 \quad \text{або} \quad t = 1.$$

Маємо

$$\sin x + \cos x = 0, \qquad \sin x + \cos x = 1$$

$$\operatorname{tg} x + 1 = 0 \qquad \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{4} - x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

$$-x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in Z$$

$$x_2 = 2nl, l \in Z$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad 2\pi l, \quad n, m, l \in Z.$

Приклади для самостійного розв'язування:

22. $1 + \sin 2x = \cos x - \sin x$

23. $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0$

24. $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

Рівняння, які розв'язуються перетворенням суми (різниці) функцій в добуток.

Приклад ***14***. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0.$

Розв'язання $(\cos 9x - \cos 7x) + (\cos 3x - \cos x) = 0$, $x \in R$.

Використаємо формулу різниці косинусів , отримаємо:

$$-2\sin 8x \sin x - 2\sin 2x \sin x = 0.$$

$$-2\sin x(\sin 8x + \sin 2x) = 0.$$

Використавши формулу суми синусів , отримаємо

$$\sin x 2\sin 5x \cos 3x = 0.$$

Отже ,

$\sin x = 0$ або $\sin 5x = 0$ або $\cos 3x = 0$ $x_1 = \pi n$ $, n \in Z$

$$x_2 = \frac{k}{5}\pi \text{ , } k \in Z \qquad x_3 = \frac{1}{6}\pi + \frac{l}{3}\pi \text{ , } l \in Z$$

Враховуючи , що корені x_1 містяться в x_2 , отримаємо остаточну відповідь :

$$x = \frac{k}{5}\pi \text{ , } k \in Z \text{ та } x = \frac{1}{6}\pi + \frac{l}{3}\pi \text{ , } l \in Z$$

Відповідь: $\frac{k}{5}\pi$, $\frac{1}{6}\pi + \frac{l}{3}\pi$, $k, l \in Z$

Приклад ***15*** **.** $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$

Розв'язання:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2 \text{ , } x \in R.$$

Понизимо степінь кожного доданку , використовуючи формулу $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$.

Отримаємо:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2.$$

Спростивши, отримаємо:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Застосувавши формулу суми косинусів , маємо

$$2\cos 3x\cos x + 2\cos 7x\cos x = 0.$$

$$2\cos x\,(\cos 3x + \cos 7x) = 0.$$

Звідси

$$4\cos x\cos 5x\cos 2x = 0$$

$\cos x = 0$, або $\cos 5x = 0$, або $\cos 2x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi l}{5},\ l \in Z$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi l}{5}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $l, m, n \in Z$.

Приклади для самостійного розв'язання

25. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$
26. $\sin(15^0 + x) + \sin(45^0 - x) = 1$
27. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos\left(7x + \frac{3\pi}{2}\right)$

Рівняння , які розв'язуються розкладанням добутку функцій у суму (різницю) функцій

Приклад *16*. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2x = \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$

Розв'язання.

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2x = \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2},\ x \in R.$$

Застосуємо формули :

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Отримаємо

$$\frac{1}{2}\,(-\sin x+\sin 2x\,)-\frac{\sin 2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\,(\,\sin x\,+\sin 2x\,)\,=0$$

$$\sqrt{3}\sin x\,+\,\sin 2x\,=0$$

$$\sqrt{3}\sin x\,+\,2\sin x\cos x\,=\,0$$

$$\sin x\,(\sqrt{3}\,+2\cos x\,)\,=\,0$$

$$\sin x=0 \qquad\text{або}\qquad \sqrt{3}\,+2\cos x\,=\,0$$

$$x=\pi\,\text{n},\ \text{n}\in Z, \qquad \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\pm(\,\pi-\frac{\pi}{6}\,)+2\pi\,\text{m},\ \text{m}\in Z\,.$$

$$x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi\,\text{m},\ \text{m}\in Z\,.$$

Відповідь: πn, $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, n,m$\in$ Z .

Приклад ***17***.

$$\sin(\frac{\pi}{4}+5x\,)\cos(\frac{\pi}{4}+2x\,)=\sin(\,\frac{\pi}{4}+x\,)\sin(\,\frac{\pi}{4}\,-6x\,).$$

Розв'язання.

$$\sin(\frac{\pi}{4}+5x\,)\cos(\frac{\pi}{4}+2x\,)\,=\,\sin(\frac{\pi}{4}+x\,)\sin(\frac{\pi}{4}-6x\,)\,,\ x\in\text{R}.$$

Використавши формули

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\,(\,\sin(\,\alpha-\beta\,)\,+\,\sin(\,\alpha+\beta\,)\,)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\,(\,\cos(\alpha-\beta\,)-\cos(\,\alpha+\beta\,)\,)\,,$$

отримаємо,

$$\frac{1}{2}\,(\,\sin 3x+\sin(\frac{\pi}{2}+7x\,)-\cos 7x+\cos(\,\frac{\pi}{2}-5x\,)\,=\,0$$

Звідси, застосувавши формули зведення , маємо

$$\sin 3x\,+\,\cos 7x\,-\,\cos 7x\,+\,\sin 5x\,=\,0$$

$$\sin 3x\,+\sin\,5x\,=\,0$$

$$2\sin 4x\cos x\,=0.$$

Отже,

$$\sin 4x = 0 \qquad \text{або} \qquad \cos x = 0$$

$4x_1 = \pi n$, $n \in Z$ $\qquad$ $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$

$x_1 = \frac{\pi}{4} n$, $n \in Z$.

Враховуючи , що розв'язки x_2 містяться в розв'язках x_1, отримаємо, $x = \frac{\pi}{4} n$, $n \in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} n$, $n \in Z$

Приклади для самостійного розв'язання.

28. $\sin 2x \sin 6x = \sin 3x \sin 5x$

29. $\sin x \cos 2x + \cos x \cos 4x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right)$

Тригонометричні рівняння виду f (x)·φ(x) = ± 1 , де f(x) і φ(x) - тригонометричні функції синус і косинус

Рівняння виду $f(x) \cdot \varphi(x) = 1$ розв'язується за допомогою сукупності двох систем

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = -1 \\ g(x) = -1 \end{cases}$$

Рівняння виду $f(x) \cdot \varphi(x) = -1$ розв'язується за допомогою сукупності двох систем

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = -1 \\ g(x) = 1 \end{cases}$$

Приклад *18*. $\qquad \sin x \cos 8x = 1$

Розв'язання. $\qquad \sin x \cos 8x = 1, \quad x \in R.$

Розв'язки даного рівняння одержимо, розв'язавши сукупність двох систем

$$\begin{cases}\sin x = 1\\ \cos 8x = 1\end{cases} \qquad \begin{cases}\sin x = -1\\ \cos 8x = -1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{n}, \text{n} \in Z \\ x = \frac{\pi k}{4}, \text{k} \in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \text{n}, \text{n} \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{4}, l \in Z \end{cases}$$

Знаходимо спільні розв'язки кожної з систем:

$x = x$ $\qquad\qquad$ $x = x$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi \text{n} = \frac{\pi k}{4} \;\Big|\; \cdot \frac{4}{\pi}$ $\qquad\qquad$ $-\frac{\pi}{2} + 2\pi \text{m} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{4} \;\Big|\; \cdot \frac{8}{\pi}$

$\text{k} = 2 + 8\text{n}$ $\qquad\qquad$ $-4 + 16\text{m} = 1 + 2l$

$\text{k} \in Z$ при $\text{n} \in Z$ $\qquad\qquad$ $l = \frac{-5 + 16\text{m}}{2} = -2{,}5 + 8\text{m}$

$l \notin Z$ при $\text{m} \in Z$

Отже, перша система має розв'язок, а друга система розв'язку не має.

Маємо розв'язок :

$$x = \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi(2 + 8\text{n})}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{n}, \text{n} \in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi \text{n}, \text{n} \in Z$.

Приклад *19*. $\qquad \cos x \cos \frac{x}{4} = -1.$

Розв'язання. $\qquad \cos x \cos \frac{x}{4} = -1, \; x \in R$.

Розв'яжемо відповідні системи рівнянь

$$\begin{cases}\cos x = 1\\ \cos \frac{x}{4} = -1\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x = -1\\ \cos \frac{x}{4} = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x = 2\pi \text{k}, \text{k} \in Z\\ x = 4\pi + 8\pi \text{n}, \text{n} \in Z\end{cases} \qquad \begin{cases}x = \pi + 2\pi l, l \in Z\\ x = 8\pi \text{m}, \text{m} \in Z\end{cases}$$

Знаходимо спільні розв'язки кожної з систем

$x = x$ $\qquad\qquad$ $x = x$

$2\pi\text{k} = 4\pi + 8\pi\text{n} \;\Big|\; :2\pi$ $\qquad\qquad$ $\pi + 2\pi l = 8\pi\text{m} \;\Big|\; :\pi$

$\text{k} = 2 + 4\text{n}$ $\qquad\qquad$ $1 + 2l = 8\text{m}$

$k \in Z$ при $n \in Z$, $\quad 1 \notin Z$ при $m \in Z$,

Отже, маємо розв'язок:

$$x = 2\pi k = 2\pi\,(2+4\pi) = 4\pi + 8\pi n, \quad n \in Z.$$

Відповідь: $4\pi + 8\pi n, \quad n \in Z$.

Приклади для самостійного розв'язання.

30. $\cos 3x \cos(x + \frac{2\pi}{3}) = 1$

31. $\left|\sin \frac{3x}{2}\right| \cos \frac{x}{2} = -1$

Тригонометричні рівняння виду f(x)+φ(x)±2, де f(x) і φ(x) – тригонометричні функції синус та косинус.

Рівняння виду $f(x) + \varphi(x) = 2$ в заданому випадку розв'язується за допомогою системи:

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ \varphi(x) = 1, \end{cases}$$

а рівняння виду $f(x) + \varphi(x) = -2$ розв'язується за допомогою системи:

$$\begin{cases} f(x) = -1 \\ \varphi(x) = -1. \end{cases}$$

Приклад *20.* $\sin x + \cos 4x = 2.$

Розв'язання. $\sin x + \cos 4x = 2, \quad x \in R$

Розв'язками рівняння будуть розв'язки системи

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z \end{cases}$$

Знаходимо спільні розв’язки системи .

Якщо $x = x$, то $\frac{\pi}{2}+2\pi k = \frac{\pi n}{2}$ і 1+4k = n.

Отже, $n \in Z$ при $k \in Z$. Маємо розв’язок :

$$x=\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi(1+4k)}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$$

Відповідь : $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

Приклад *21.* $\sin x\frac{5x}{2}+\cos 6x=2$

Розв'язання.

$$\begin{cases}\sin\frac{5x}{2}=1\\ \cos 6x=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\\ 6x=2\pi n, n\in Z\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi k}{5}, k\in Z\\ x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z\end{cases}$$

Знаходимо спільні розв'язки системи.

$x = x$

$$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi k}{5}=\frac{\pi n}{3}\quad\Big|\ \times\frac{15}{\pi}$$

$$3+12k=5n$$

$$n=\frac{3+12k}{5}$$

$n\in Z$, якщо $k=1, 6, 11, 16, ...$, тобто $k=5m+1, m\in Z$.

Маємо розв'язок:

$$x=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi k}{5}=\frac{\pi}{5}(1+4k)=\frac{\pi}{5}(1+4(5m+1))=\frac{\pi}{5}(1+20m+4)=$$

$$\frac{\pi}{5}(5+20m)=\pi+4\pi m, m\in Z.$$

Відповідь: $\pi+4\pi m, m\in Z$.

Приклади для самостійного розв'язування:

32. $\sin x+\sin 5x=2$

33. $\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}=2$

34. $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}=2$

Тригонометричні рівняння виду f $^2(x)$ + φ ^{2} (x)=0, де f(x) і φ(x) – довільні тригонометричні функції.

Рівняння виду f $^2(x)$ + φ $^2(x)$=0 розв'язують за допомогою системи

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ \varphi(x)=0 \end{cases}$$

Приклад *22.* $\cos^2 x+\sin^2 4x=0.$

Розв'язання. $\cos^2 x+\sin^2 4x=0$, $x\in\mathrm{R}$.

$$\begin{cases} \cos x=0 \\ \sin 4x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \\ x=\frac{\pi k}{4}, k\in Z. \end{cases}$$

Знаходимо спільні розв'язки системи .

$$\frac{\pi}{2}+\pi n=\frac{\pi k}{4} \qquad \text{і} \qquad 2+4n=k.$$

Отже, $k\in Z$,якщо $n\in Z$.

Маємо розв'язок $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

Відповідь : $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

Приклад *23.* $\mathrm{tg}^2 x+\sin^2 2x=0.$

Розв'язання . $\mathrm{tg}^2 x+\sin^2 2x=0$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi p, p\in Z.$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pi n, n \in Z \\ x = \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z. \end{cases}$$

Отже , $x = \pi n, n \in Z$.

Відповідь: $\pi n, n \in Z$.

Приклади для самостійного розв'язання.

35. $\cos^2(2x + \frac{\pi}{3}) + \cos^2(\frac{\pi}{12} - x) = 0$

1.4. Нестандартні способи розв’язування раціональних тригонометричних рівнянь

При розв'язуванні раціональних тригонометричних рівнянь корисно знати не тільки їх типи , але й деякі нестандартні способи розв'язання , які досить часто використовують у більш складних тригонометричних рівняннях.

Спосіб розв'язання тригонометричних рівнянь відносно однієї із функцій , що входять у ці рівняння.

Приклад. $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$

Розв’язання. $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x, \quad x \in R.$

Нехай $\sin^2 3x = a$. Розв’яжемо задане рівняння відносно $\sin x$.

$$\sin^2 x - a \sin x + \frac{1}{4} a = 0.$$

$$\sin x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a}{4}}$$

Необхідна умова існування розв’язку :

$$\frac{a^2}{4}-\frac{a}{4}\geq 0$$

$$a(a-1)\geq 0$$

$$a\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty).$$

Так як $\sin^2 3x = a$, то $0\leq a\leq 1$. Тому умову існування розв'язку задовольняють лише два значення $a = 0$ або $a = 1$.

Отже, маємо

при $a = 0$, $\sin x = 0$ і $x = \pi k, k\in Z$,

при $a = 1$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$

Відповідь : πk , $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $k,n\in Z$.

Приклади для самостійного розв'язання.

36. $\cos^2 3x + \frac{1}{4}\cos^2 x = \cos 3x - \cos^4 x.$ $[\cos^2 x = a]$

37. $\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x\cos^4 x.$ $[\cos^2 x = a]$

Спосіб розв'язування тригонометричних рівнянь шляхом дослідження обох частин рівняння на екстре-мум .

Приклад. $(4 - \cos 2x)(2 + 3\sin y) = 12 + 13\sec^2 z.$

Розв'язання. $(4 - \cos 2x)(2 + 3\sin y) = 12 + 13\sec^2 z,$

$$x, y\in R;\ z\neq\frac{\pi}{2}+\pi p,\ p\in Z.$$

Оцінимо значення виразів, що вхдять у дане рівняння

$$(4 - \cos 2x)(2 + 3\sin y) = 12 + 13\sec^2 z.$$

a) $4 - \cos 2x \leq 5$

b) $2 + 3\sin y \leq 5$

c) $12 + 13\sec^2 z \geq 25$

Отже , рівність досягається у випадку , коли ліва і права частина рівняння дорівнюють по 25 .

Маємо :

$$\begin{cases}\cos 2x=-1\\ \sin y=1\\ \sec^2 z=1\end{cases} \quad \begin{cases}\cos 2x=-1\\ \sin y=1\\ \left[\begin{array}{l}\sec z=1\\ \sec z=-1\end{array}\right.\end{cases} \quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z\\ \left[\begin{array}{l}z=2\pi l, l\in Z\\ z=\pi+2\pi n, n\in Z\end{array}\right.\end{cases}$$

Відповідь:

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $y=\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $z=2\pi l$ або $z=\pi+2\pi m$,

k , m , n , $l\in Z$.

Приклад для самостійного розв'язання.

$$(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2+(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2=12+\frac{1}{2}\sin y .$$

Спосіб розв'язання тригонометричних рівнянь введенням допоміжної змінної .

Приклад. $\operatorname{tg}(120^\circ+3x)-\operatorname{tg}(140^\circ-x)=2\sin(80^\circ+2x)$

Розв'язання . $\operatorname{tg}(120^\circ+3x)-\operatorname{tg}(140^\circ-x)=2\sin(80^\circ+2x)$, $x\neq-10^\circ+6k$, $x\neq 50+180n$, $k,n\in Z$.

Нехай $40^\circ+x=y$, тоді

$$\operatorname{tg}3y-\operatorname{tg}(180^\circ-y)=2\sin 2y$$

$$\operatorname{tg}3y+\operatorname{tg}y=2\sin 2y$$

$$\frac{\sin 4y}{\cos 3y\cos y}-2\sin 2y = 0$$

$$2\sin 2y\,(\frac{\cos 2y}{\cos 3y\cos y}-1)=0.$$

Звідси

$\sin 2y=0$ або $\frac{\cos 2y}{\cos 3y\cos y}-1= 0.$

Маємо

$$y=\frac{\pi l}{2},\ l\in Z \qquad \frac{\cos 2y-\cos 3y\cos y}{\cos 3y\cos y}=0$$

$$y=90^{o}\,l,\ l\in Z \qquad \frac{\cos 2y-\frac{1}{2}(\cos 4y+\cos 2y)}{\cos 3y\cos y}=0$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cos 2y-\frac{1}{2}\cos 4y}{\cos 3y\cos y}=0$$

$$\frac{\sin y\sin 3y}{\cos 3y\cos y}=0$$

$$\mathrm{tg}3y\ \mathrm{tg}\,y=0$$

$$\mathrm{tg}3y=0 \qquad \text{або} \qquad \mathrm{tg}\,y=0$$

$$y=\frac{\pi m}{3},\ m\in Z \qquad y=\pi p,\ p\in m$$

$$y=60^{o}\,m,\ m\in Z \qquad y=180^{o}p,\ p\in m.$$

Отже ,

$y=90^{o}\,l$ та $y=60^{o}m$, $l, m\in Z$.

Тоді

$$40^{o}+x=y$$

$$x=y-40^{o}.$$

Таким чином, маємо

при $y=90^{o}\,l$, $x=-40^{o}+90^{o}\,l$, $l\in Z$

при $y=60^{o}\,m$, $x=-40^{o}+60^{o}\,m$, $m\in Z$.

Відповідь: $-40^{o}+90^{o}\,l$; $-40^{o}+60^{o}\,m$, $l, m\in Z$.

Приклад для самостійного розв'язування.

$$\frac{tg4x}{tg2x}+\frac{tg2x}{tg4x}+\frac{5}{2}=0$$

§2. Розв`язування тригонометричних нерівностей.

Згідно з навчальною програмою з математики для загальноосвітньої школи тригонометричні нерівності розглядаються в курсі алгебри і початків аналізу 10-го класу. Тут вивчається розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей. Розв'язуючи такі нерівності, учні закріплюють свої знання про властивості тригонометричних функцій, набувають навичок теоретико-множинних та логічних міркувань.

Розв'язування будь-якої тригонометричної нерівності зводиться, як правило, до розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей вид

$\sin x \geq a$, $\cos x \geq a$, $tgx \geq a$, $ctgx \geq a$,

$\sin x > a$, $\cos x > a$, $tgx > a$, $ctgx > a$,

$\sin x \leq a$, $\cos x \leq a$, $tgx \leq a$, $ctgx \leq a$,

$\sin x < a$, $\cos x < a$, $tgx < a$, $ctgx < a$.

Такі нерівності розв'язуються, в основному, із використанням одиничного кола або графічним способом. Кожен із цих способів разом зі своїми перевагами має і ряд недоліків. Так, наприклад, при застосуванні графічного способу, потрібно щоразу будувати, хоч і схематично, графіки тригонометричних функцій. Використання одиничного кола також кожен раз вимагає побудови малюнка, причому, застосовуючи цей спосіб,учні часто помиляються, коли вибирають межі. Тому корисно показати учням як такі нерівності можна розв'язати іншими способами,зокрема,за допомогою формул.

Використовуючи поняття arcsin a, arccos a, arctg a та arcctg a, а саме, графічну ілюстрацію цих понять, аналогічно до виведення формул коренів найпростіших тригонометричних рівнянь, можна вивести формули і для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Застосування таких формул, наприклад, економить час при розв'язуванні нерівностей, дозволяє учням зосередити всю свою увагу безпосередньо на розв'язанні самої тригонометричної нерівності, а не на побудові малюнка.

Слід зауважити, що спосіб розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей за допомогою формул необхідно обов'язково розглянути в класах із поглибленим вивченням математики та класах фізико-математичного профілю. Потрібно постійно враховувати і те, що на вступних іспитах у вузи на математичні спеціальності пропонуються складні тригонометричні нерівності, які не зводяться до найпростіших. Тому бажано ознайомити учнів також із універсальними методами розв'язування тригонометричних нерівностей, наприклад, методом інтервалів.

Вивчення тригонометричних нерівностей можна розбити на дві частини за складністю:

1. Найпростіші тригонометричні нерівності та їх розв'язування.
2. Розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів.

2.1. Найпростіші тригонометричні нерівності та їх розв'язання.

Аналогічно до виведення формул для розв'язу-вання найпростіших тригонометричних рівнянь, вико-ристовуючи поняття обернених тригонометричних функцій, можна, застосувавши, наприклад, графічний спосіб, вивести формули і для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей. Наведемо, спочатку означення деяких основних понять, що будуть використовуватися в процесі роботи.

Означення 1. Arcsin a називається кут, що міс-титься в інтервалі $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ і синус якого дорівнює a.

Означення 2. Arccos a називається кут,що міс-титься в інтервалі $[0,\pi]$ і косинус якого дорівнює a.

Означення 3. Arctg a називається кут, що міс-титься в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і тангенс якого дорівнює a.

Означення 4. Arcctg a називається кут, що міс-титься в інтервалі $(0;\pi)$ і котангенс якого дорівнює a.

Вивчення матеріалу про розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей можна розбити на такі етапи:

а). Використовуючи геометричну інтерпритацію наведених вище понять, вивести формули для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей. Виведемо ці формули, користуючись графічним методом:

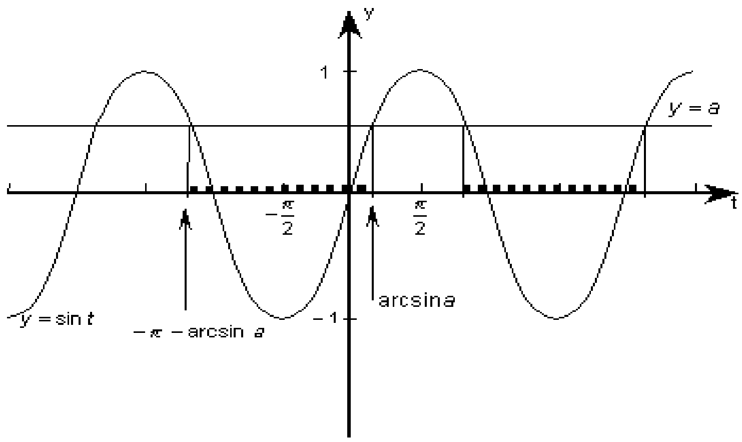
sin t < a

якщо $a < -1$, *то нерівність розв'язків не має*

якщо $a > 1$, *то* $t \in (-\infty\ ;\ +\infty)$

якщо $a \in [-1;1]$, *то графічним способом виводимо формулу:*

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < t < \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$$



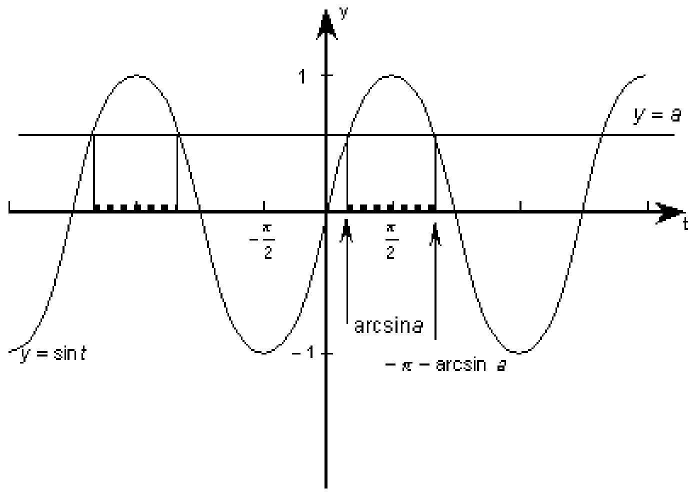
sin t > a

якщо $a<-1$, *то* $t \in (-\infty\ ;\ +\infty)$

якщо $a>1$, *то нерівність розв'зків не має*

якщо $a \in [-1;1]$, *то графічним способом виводимо формулу:*

$$\arcsin a + 2\pi n < t < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$$



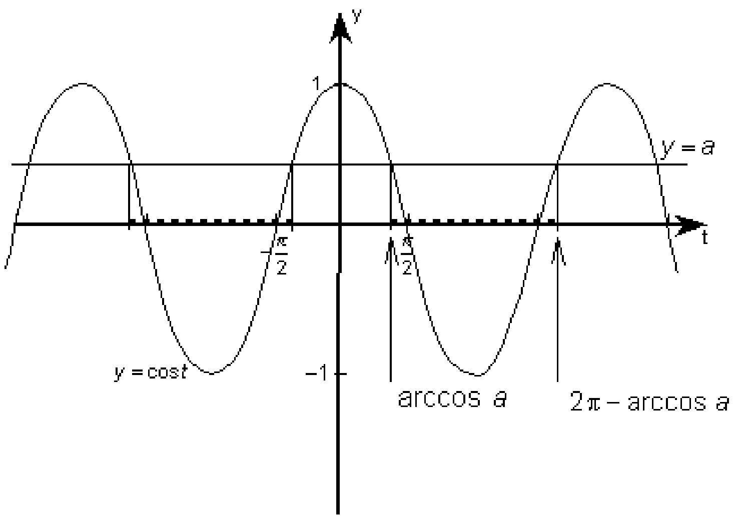
cos t < a

якщо a<-1, то розв'язків не має

якщо a>1, то $t \in (-\infty; +\infty)$

якщо $a \in [-1;1]$, то графічним способом виводимо формулу:

$$\arccos a + 2\pi n < t < \pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$



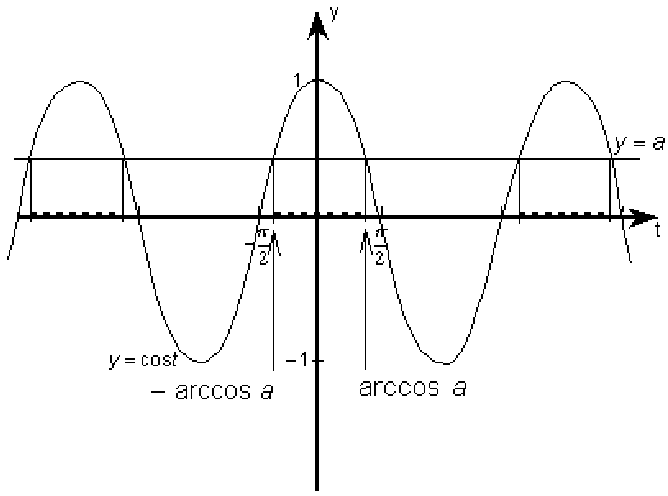
cos t >a

якщо *a<-1, то t∈(-∞ ; +∞)*

якщо a>1, то розв'язків не має

якщо $a \in [-1;1]$*, то графічним способом виводимо формулу:*

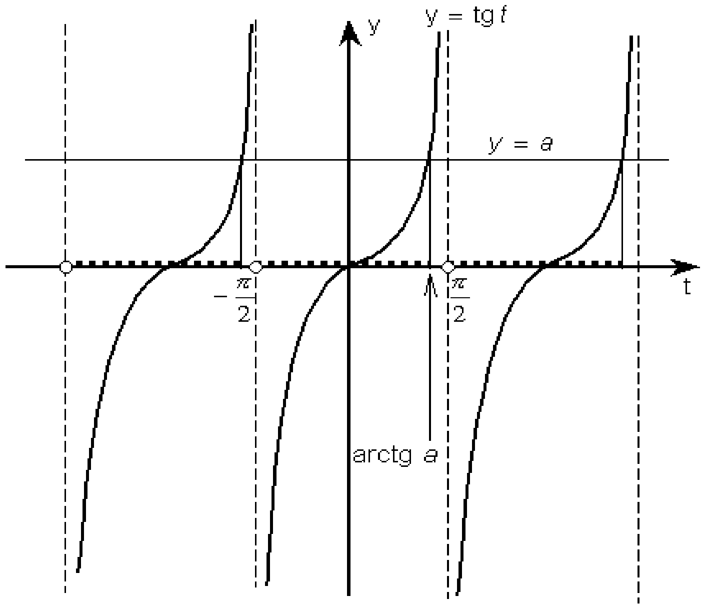
$$-\arccos a + 2\pi n < t < \arccos a + 2\pi n\,,\; n \in Z$$



tg t < a,

то a є R отримаємо формулу

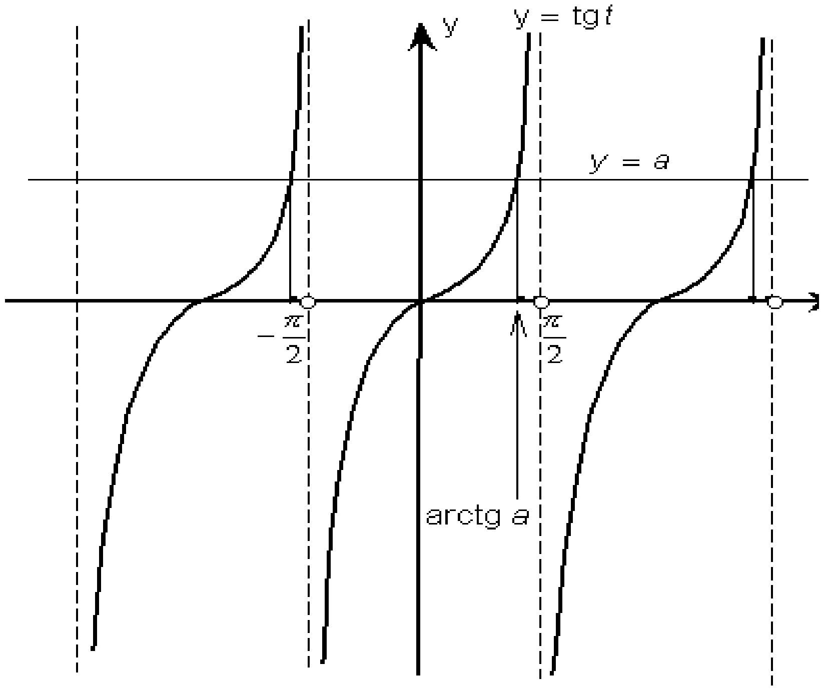
$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < arctga + \pi n, n \in Z$$



$tg\ t > a$,

то а є R отримаємо формулу

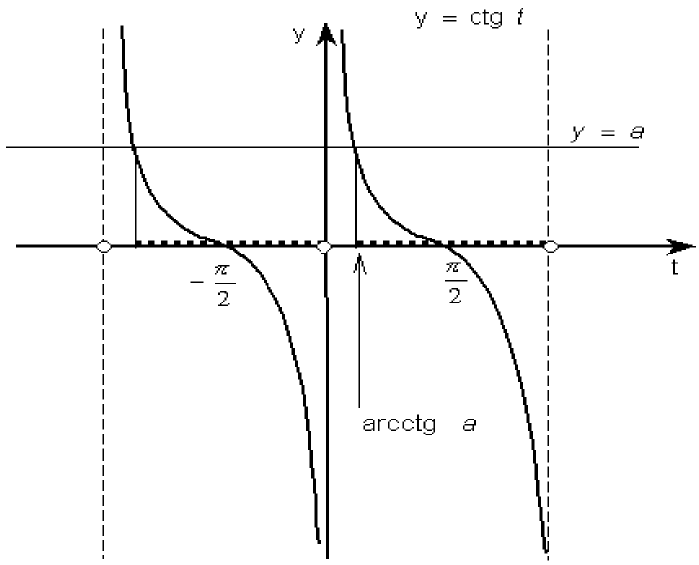
$$arctga + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$



$ctg\ t < a$,

то а є R отримаємо формулу

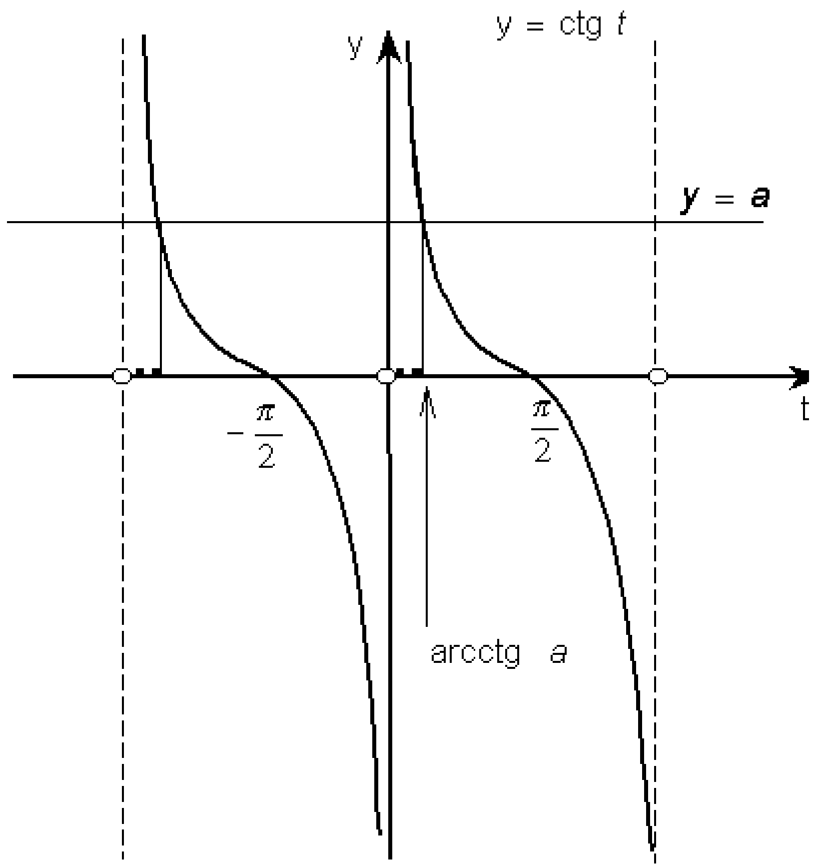
$$arcctga + \pi n < t < \pi + \pi n, n \in Z$$



ctg t > a,

то a є R отримаємо формулу

$$\pi n < t < arcctga + \pi n, n \in Z$$



Якщо знак нерівностей, що містять *cos* чи *sin* нестрогий, то кожний знак нерівностей у розв'язку також нестрогий.

Якщо знак нерівностей, що містять *tg* чи *ctg* не -строгий, то нестрогим буде лише той знак розв'язку, який стоїть біля *arctg* чи біля *arcctg*.

Зауваження. Цей матеріал учні можуть також вивчати і самостійно без допомоги вчителя. Якщо ж виведення формул розглядається колективно, то частину доведень необхідно обов'язково дати учням для самостійного опрацювання.

б). Розв'язати усно із записом відповідей нерівності із *sin* та *cos,* якщо a=±1

$sin\ t < 1$	$sin\ t = -1$	$cos\ t > 1$	$cos\ t= -1$
$sin\ t = 1$	$sin\ t > -1$	$cos\ t = 1$	$cos\ t > -1$
$sin\ t = 1$	$sin\ t < -1$	$cos\ t = 1$	$cos\ t < -1$
$sin\ t < 1$	$sin\ t = -1$	$cos\ t < 1$	$cos\ t = -1$

в) Розв'язати усно такі нерівності :

$sin\ x = 2$	$sin\ 2x = -2$
$cos\ x = -3$	$2cos(x+\frac{\pi}{3}) = 3$
$sin\ x > -1.5$	$4cos\frac{7x}{9}+1> -5$

г).Розглянути приклади розв'язування тригоно-метричних нерівностей, що зводяться до найпростіших .

1. Нерівності, що розв'язуються без введення нової змінної.

Приклад 1.1. $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\geq 0$

Розв'язання. $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\geq 0, x\in R$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Маємо нерівність типу $\sin t\geq a$.Застосувавши відповідну формулу, одержимо

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n\le 2x+\frac{\pi}{3}\le \pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n$$

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n\le 2x+\frac{\pi}{3}\le \pi-\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Додамо до усіх частин нерівності $-\frac{\pi}{3}$,

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n\le 2x+\frac{\pi}{3}\le \frac{2\pi}{3}+2\pi n \qquad \Big| \quad -\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2\pi n\le 2x\le -\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+2\pi n$$

$$2\pi n\le 2x\le \frac{\pi}{3}+2\pi n$$

Домноживши останню нерівність на $\frac{1}{2}$, визначимо x

$$\pi n\le x\le \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$$

Відповідь: $\left[\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$

Приклад1.2. $\sin 4x-\cos 4x\cdot \mathrm{tg}\,2x\le\sqrt{3}$

Розв'язання.

$$\sin 4x-\cos 4x\cdot \mathrm{tg}\,2x\le\sqrt{3},\ x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\sin 4x-\frac{\cos 4x\cdot\sin 2x}{\cos 2x}\le\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin 4x\cdot\cos 2x-\cos 4x\cdot\sin 2x}{\cos 2x}\le\sqrt{3}$$

Звідси $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\le\sqrt{3}$ або $\mathrm{tg}\,2x\le\sqrt{3}$.

Нерівність типу $\mathrm{tg}\,t\le a$. Застосувавши відповідну формулу, одержимо

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n<2x\le\frac{\pi}{3}+\pi n$$

Домноживши останню нерівність на $\frac{1}{2}$, знайдемо x

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x\le\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$$

Беремо $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right]\cap\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z$

Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right],\ n\in Z$

Приклад 1.3.

$$2\left(\cos^2\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3}{2}x\right)\right)>-1$$

Розв'язання.

$$2\left(\cos^2\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3}{2}x\right)\right)>-1,\ x\in R$$

$$\cos^2\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3}{2}x\right)>-\frac{1}{2}$$

Застосувавши формулу подвійного кута, одержимо

$\cos 2\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{1}{2}$ або $\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{1}{2}.$

Нерівність типу $\cos t>a$. Використавши відповідну формулу, одержимо нерівність

$$-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n<3x-\frac{\pi}{3}<\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<3x-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}+2\pi n$$

Додамо до усіх частин нерівності $\frac{\pi}{3}$. Одержимо

$$\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<3x<\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+2\pi n$$

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<3x<\pi+2\pi n.$$

Поділивши останню нерівнівсть на 3, знайдемо x

$$-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$$

Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}\right),\ n\in Z$

Приклад 1.4. $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \le 0$

Розв'язання

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \le 0,\ x \in R$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \le 0$$

$$\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{3} \le 0$$

Звідси $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \le 0,$ нерівність типу $\sin t \le a$. Засто-сувавши відповідну формулу, одержимо

$$-\pi + 2\pi n \le 2x - \frac{\pi}{3} \le 2\pi n$$

Додамо до усіх частин нерівності $\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{3} - \pi + 2\pi n \le 2x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Для визначення x поділимо останню нерівність на 2

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n \le x \le \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$$

Відповідь: $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right],\ n \in Z$

2.Нерівності, що розв'язуються введенням нової змінної.

Приклад 2.1. $2\sin^2 x - \sin x - 1 \le 0$

Розв'язання.

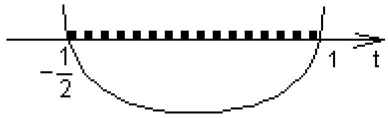
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 \le 0,\ x \in R$$

Позначивши $\sin x = t$, одержимо квадратну нерівність $2t^2 - t - 1 \le 0$, яку розв’яжемо методом інтервалів

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t=\frac{1\pm 3}{4},\ t_1=-\frac{1}{2},\ t_2=1$$

$\sin x \ge a$



Бачимо, що $-\frac{1}{2}\le t\le 1$. Отже, $-\frac{1}{2}\le \sin x\le 1$ і тому маємо $\sin x\ge -\frac{1}{2}$, (нерівність типу $\sin x\ge a$). За формулою знаходимо

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n\le x\le \pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$$

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n\le x\le \pi+\frac{\pi}{6}+2\pi n$$

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n\le x\le \frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$$

Відповідь: $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$

Приклад 2.2. $\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$

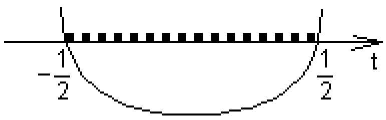
Розв'язання.

$$\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{2}\right)^2\le\frac{1}{4},\ x\in R$$

За формулою синуса різниці маємо $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)\le\frac{1}{4}$ або $\sin^2\frac{x}{6}\le\frac{1}{4}$. Позначивши $\sin\frac{x}{6}=t$, одержимо $t^2\le\frac{1}{4}$.

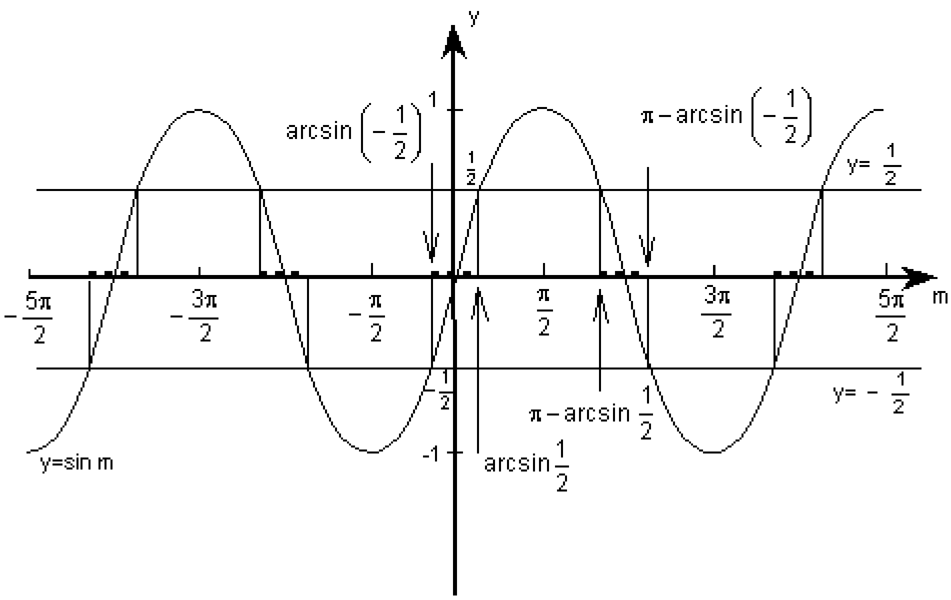
Звідси $t^2-\frac{1}{4}\le 0$. Знайдемо розв’язки методом інтервалів:

$$t^2-\frac{1}{4}=0 \qquad t=\pm\frac{1}{2}$$



Бачимо, що $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$. Якщо $\frac{x}{6} = m$, то $-\frac{1}{2} \le \sin m \le \frac{1}{2}$

Розв'яжемо нерівність графічно,побудувавши графіки



$y = \sin m, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n \le m \le \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z \\ \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \le m \le \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le \frac{x}{6} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le \frac{x}{6} \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\pi + 12\pi n \le x \le \pi + 12\pi n,\ n \in Z \\ 5\pi + 12\pi k \le x \le 7\pi + 12\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

Відповідь:

$\left[-\pi+12\pi n;\pi+12\pi n\right]\cup\left[5\pi+12\pi k;7\pi+12\pi k\right],\ n,k\in Z$

Примітка: Нерівність можна розв'язувати і за допомогою системи

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{6}\geq-\frac{1}{2} \\ \sin\frac{x}{6}\leq\frac{1}{2} \end{cases}$$

Але цей шлях не є раціональним.

г). Приклади для самостійної роботи учнів.

Розв'язати нерівності:

1. $\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x-\cos\frac{\pi}{6}\sin 3x>\frac{1}{2}$
2. $\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x-\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x>-\frac{1}{2}$
3. $4\sin\left(\frac{\pi}{3}-1.5x\right)\cos\left(1.5x-\frac{\pi}{3}\right)<\sqrt{3}$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)>1$
5. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)<1$
6. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)>1$
7. $\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{3}\sin\frac{x}{2}\right)^2\geq\frac{1}{4}$
8. $\cos^2 x+\cos x-1\leq 1$

2.2. Розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів.

а) Досить часто задану тригонометричну нерівність не можна звести до найпростішої. Тоді користуються універсальним методом розв'язування нерівностей - методом інтервалів.

Спочатку повторюємо з учнями основні положення, на яких базується метод інтервалів:

1).В якому випадку можна використовувати метод інтервалів для розв'язування нерівностей виду f(x)>0? (*функція f(x) повинна бути неперервною*).

2).У чому полягає суть методу інтервалів ?
(шукаємо область визначення та нулі функці f(x); розбиваємо область визначення за допомогою нулів на інтервали; знаходимо знак на кожному з цих інтервалів і вибираємо проміжки, на яких f(x) >0)

3).Правило встановлення знаків проміжків, враховуючи кратність коренів на області визначення. (*якщо рівняння f(x)=0 має корені парної кратності, то при переході через них функція f(x) не змінює свій знак, а при переході через корінь непарної кратності - знак змінюється на протилежний).*

Так як тригонометричні рівняння мають безліч коренів, то при розв'язуванні тригонометричних нерівностей виду f(x)>0 методом інтервалів зручно користуватись такою схемою:

1. Знаходимо область визначення функціі f(x).

2. Знаходимо найменший період T_0 функції f(x). При знаходженні найменшого періоду T_0, використовуємо такі твердження:

а). Сума і добуток двох функцій з одним і тим же періодом T є функціями з періодом T.

б). Якщо функція f періодична і має період T, то функція kf(ax+b), де $k,b,a \neq 0$ - сталі, також періодична, причому її період дорівнює $\frac{T}{|a|}$.

в). Якщо функції f(x) та g(x) - періодичні з періодами T_1 та T_2, то функція $f(x) \pm g(x)$, також періодична і її період T дорівнює найменшому спільниму кратному періодів доданків T_1 та T_2 .

3. Розв'язавши рівняння f(x) = 0, знаходимо нулі функції f(x).

4.Позначаємо знайдені нулі на проміжку довжиною T_0 і визначаємо знак функції на кожному з утворених інтервалів.

5.Вибираємо проміжки на яких f(x)>0, додаючи до кінців цих проміжків $T_0 n$, де T_0-найменший період f(x),
$n \in Z$.

6.Узгоджуємо отримані розв'язки з областю визна-чення функції і записуємо відповідь.

б) Приклади розв'язування тригонометричних нерівностей методом інтервалів.

Приклад 2.1. $\sin x + \sin 3x \geq 0$

Розв'язання.

$$\sin x + \sin 3x \geq 0, \ x \in R$$

Перетворимо суму синусів у добуток. Одержимо

$$2\sin 2x \cdot \cos x \geq 0$$

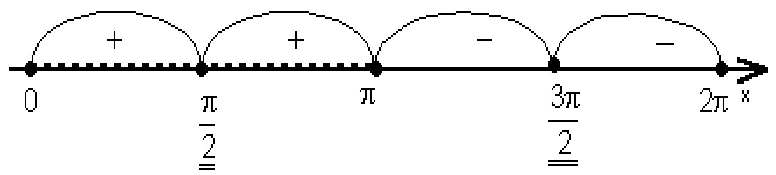
Тут $T_0 = 2\pi,$ де T_0 - найменший додатній період функції $f(x) = 2\sin 2x \cdot \cos x$. Знайдемо нулі функції.

$$2\sin 2x \cdot \cos x = 0$$

Звідси $\sin 2x = 0,$ або $\cos x = 0$

$$x = \frac{\pi k}{2}, \ k \in Z \qquad\qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$$

Враховуючи, що $T_0 = 2\pi$ маємо:



$x \in [0;\pi]$ - основний проміжок

Отже, розв'язками нерівності є такі значення:

$x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z$ та $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Відповідь: $[2\pi n; \pi + 2\pi n] \cup \left\{\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right\}, n, k \in Z.$

Приклад 2.2. $\sqrt{3}\left(\sin^2\dfrac{x}{2} - \cos^2\dfrac{x}{2}\right) \le \sin 2x$

Розв'язання.

$$\sqrt{3}\left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right) \le \sin 2x, x \in R$$

Перенесемо усі доданки в ліву частину нерівності та застосуємо формулу косинуса подвійного кута.

$$-\sqrt{3}\cos x - \sin 2x \le 0$$

Розписавши sin2x та винісши cosx за дужки, одержимо

$-\cos x\left(\sqrt{3} + \sin x\right) \le 0,$ або $\cos x\left(\sqrt{3} + 2\sin x\right) \ge 0$.

Для $f(x) = \cos x\left(\sqrt{3} + 2\sin x\right)$ період $T_0 = 2\pi$.

Знайдемо нулі функції f(x):

$$\cos x\left(\sqrt{3} + 2\sin x\right) = 0 \qquad (1)$$

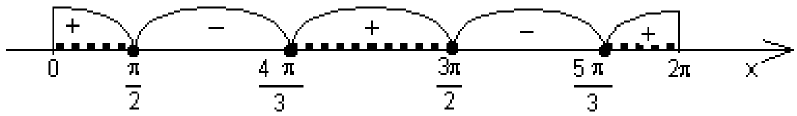
Звідси $\cos x = 0$ або $\sqrt{3} + 2\sin x = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ $\qquad \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in Z$$

Враховуючи, що $T_0 = 2\pi$, маємо:

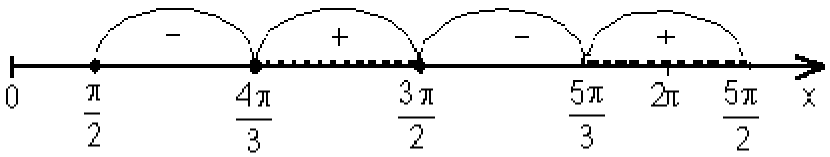


У відповіді нам потрібно взяти проміжки знаку "+". Але вони на проміжку $[0;2\pi]$не є закритими (бо точки 0 і 2π не є коренями рівняння (1)). У таких випадках для зручності запису відповіді вводиться допоміжна точка, яка є коренем рівняння f(x)=0, наприклад:

а) або $\frac{5\pi}{2}$ ($\frac{5\pi}{2}$-це корінь рівняння (1), наступний за коренем $\frac{5\pi}{3}$);

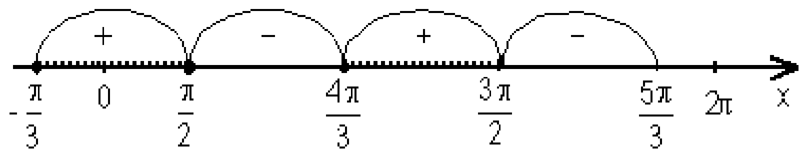
б) або $-\frac{\pi}{3}$ ($-\frac{\pi}{3}$ - це корінь рівняння (1), що передує корню $\frac{\pi}{2}$).

Тоді у випадку а) матимемо:



і відповідь запишеться у вигляді: $\left[\frac{4\pi}{3} + 2\pi n\,;\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3} + 2\pi n\,;\frac{5\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z.$

У випадку б) матимемо :



і відповідь запишеться так :

$$\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\,;\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3} + 2\pi n\,;\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z.$$

Можливий ще запис відповіді без введення допоміжних точок-коренів

$$\left[2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3}+2\pi n;2\pi+2\pi n\right],$$

$n\in Z$. який не є раціональним.

Приклад 2.3. $1-\cos x<\operatorname{tg}x-\sin x$

Розв'язання.

$$1-\cos x<\operatorname{tg}x-\sin x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$$

$$1-\cos x-\operatorname{tg}x+\sin x<0,$$

Для $f(x)=1-\cos x-\operatorname{tg}x+\sin x$ період $T_0=2\pi.$

Розписавши tgx і звівши вираз до спільного знаменника, матимемо

$$\frac{\cos x-\cos^2x-\sin x+\sin^2x}{\cos x}<0$$

$$\frac{(\cos x-\sin x)(1-\cos x)}{\cos x}<0$$

Знайдемо нулі заданої функції f(x)

$$\frac{(\cos x-\sin x)(1-\cos x)}{\cos x}=0$$

Тоді

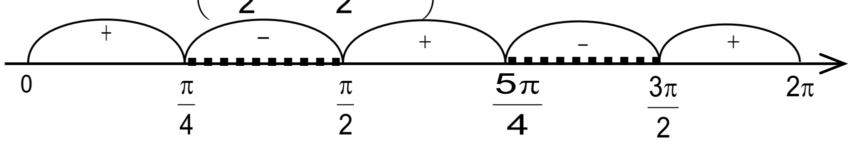
$\cos x-\sin x=0,$ $\quad 1-\cos x=0,$ $\quad \cos x\neq 0$

$\operatorname{tg}x=1$ $\quad \cos x=1$ $\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi l, l\in Z$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ $\quad x=2\pi n,\ n\in Z$

Враховуючи, що

$T_0=2\pi$ і $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$, маємо:



Відповідь: $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

Приклад2.4. $\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 2x\cdot\cos 4x<\sin 4x$

Розв'язання.

$$\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 2x\cdot\cos 4x<\sin 4x, x\in R$$

Застосуємо формулу косинуса різниці двох кутів. Одержимо $\cos(4x-2x)<\sin 4x$, або $\cos 2x-\sin 4x<0$.

Розписавши sin4x та винісши cos2x за дужки, матимемо

$$\cos 2x(1-2\sin 2x)<0$$

Для $f(x)=\cos 2x(1-2\sin 2x)$ період $T_0=\pi$. Знайдемо нулі функції:

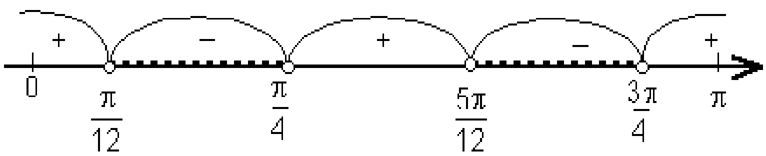
$\cos 2x(1-2\sin 2x)=0$ Звідси $\cos 2x=0$ або $1-2\sin 2x=0$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$ $\sin 2x=\frac{1}{2}$

$$x_1=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z$$

$$x_2=\frac{5\pi}{12}+\pi m,\ m\in Z$$

Враховуючи, що $T_0=\pi$, маємо :



Відповідь: $\left(\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{12}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi\right),\ n\in Z$

Приклад 2.5. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\geq 3\mathrm{tg}x$

Розв'язання.

$$\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3tgx \ , \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \, , n \in Z$$

Розпишемо tgx і перенесемо доданки в ліву частину нерівності. Одержимо

$$\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x}{\cos x} \geq 0 \, .$$

Зведемо вираз до спільного знаменника

$$\frac{\cos^2 2x - 3\sin x \cos x}{\cos^2 x} \geq 0 \, .$$

Застосувавши формулу подвійного кута, одержимо

$$\frac{\cos^2 2x - \frac{3}{2}\sin 2x}{\cos^2 x} \geq 0 \, .$$

Для функції $f(x) = \dfrac{\cos^2 2x - \frac{3}{2}\sin 2x}{\cos^2 x}$ період $T_0 = \pi$. Знайдемо нулі функції f(x).

Враховуючи область допустимих значень, маємо

$$\cos^2 2x - \frac{3}{2}\sin 2x = 0$$

$$2\cos^2 2x - 3\sin 2x = 0$$

$$2 - 2\sin^2 2x - 3\sin 2x = 0$$

$$2\sin^2 x + 3\sin 2x - 2 = 0$$

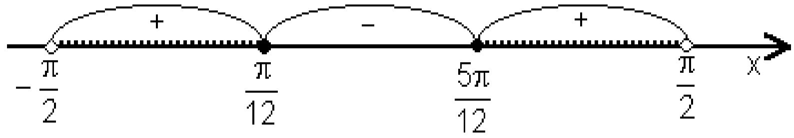
Маємо квадратне рівняння відносно sin2x. Розв'язавши його одержимо

$\sin 2x = -2 \notin [-1; 1]$ $\qquad$ $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$

x= $\varnothing$ $\qquad$ $x_1 = \dfrac{\pi}{12} + \pi n \, , n \in Z$

$$x_2 = \frac{5\pi}{12} + \pi m \, , m \in Z$$

Розглянемо проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, що відповідає $T_0 = \pi$



Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n\,;\frac{\pi}{12}+\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{12}+\pi n\,;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$

Приклад 2.6. $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1$

Розв'язання.

$$2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1 \quad , \quad x\in R$$

$$2\sin^2 x-\sin x+\sin\ 3x-1<0$$

Застосуємо формулу $\sin 3x=3\sin x-4\sin^2 x$.Одержимо

$$2\sin^2 x-\sin x+3\sin x-4\sin^3 x-1<0$$

$$-4\sin^3 x+2\sin^2 x+2\sin x-1<0$$

$$-2\sin^2 x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)<0$$

$$(2\sin x-1)(1-2\sin^2 2x)<0$$

Найменший період T_0 функції $f(x)=(2\sin x-1)(1-2\sin^2 2x)$ дорівнює 2π. Знайдемо нулі функції.

$$(2\sin x-1)(1-2\sin^2 2x)=0 \qquad (1)$$

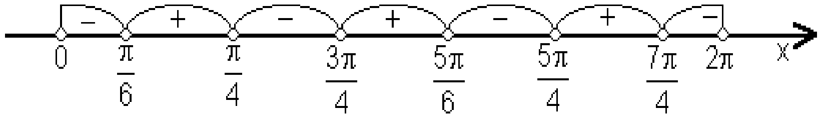
Тоді $2\sin x-1=0$, або $1-2\sin^2 2x=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$, або $\cos 2x = 0$

$x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi n\,, n\in Z$ $\qquad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2}, l\in Z$

$x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi m\,, m\in Z$

Розглянемо проміжок $[0\,;2\pi]$, що має довжину $T_0=2\pi$



Введемо допоміжну точку $x = -\frac{\pi}{4}$ (корінь рівняння (1), що передує корню $\frac{\pi}{6}$).

Тоді відповідь буде мати вигляд

Відповідь :

$$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$$

в) Приклади для самостійної роботи учнів.

Розв'язати нерівності:

1. $\cos + \cos 3x \le 0$
2. $\sqrt{2}\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right) \ge \sin 8x$
3. $1 + \sin x < \operatorname{ctg} x + \cos x$
4. $\sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x < \sin 4x$
5. $\sin^2 x - \cos^2 2x \ge 0$
6. $\cos^2 x - \sin^2 2x \le 0$

§ 3.Аналіз та результати педагогічного експерименту

Педагогічний експеримент був проведений серед учнів десятих класів гімназії «Гармонія» Рівненської міської ради. Було вибрано дві групи: експериментальну та контрольну. Для учнів експериментальної групи було проведено заняття за методикою, запропонованою у даній магістерській роботі. Перед тим, як приступити до проведення занять, було визначено середню успішність учнів з математики у двох групах. Для порівняння результатів ми використовували закон розподілу ймовірностей Стюдента, оскільки в даному випадку маємо досить малу вибірку, адже кількість учнів у підгрупах становить 15 та 16 учнів.

Теорія малої вибірки дає можливість оцінити істотність відмінності між двома вибірковими середніми. Ймовірність значень різниць між двома вибірковими середніми, за абсолютною величиною не менших від фактичної різниці, яка відома з досвіду, визначається за формулою

$$P[\left|\tilde{x}' - \tilde{x}''\right| > \delta_ф] = 2[1 - S(t_ф)].$$

Де $\tilde{x}'$ і $\tilde{x}''$ - вибіркові середні;

$\delta_ф = \tilde{x}' - \tilde{x}''$ - фактична різниця між двома вибірковими середніми;

$t_ф$ - визначається за формулою

$$t_ф = \frac{\delta_ф}{\mu_{MB}} = \frac{\delta_ф}{\sqrt{\dfrac{[\sum(x' - \tilde{x}')^2 + \sum(x'' - \tilde{x}'')^2](n_1 + n_2)}{(n_1 + n_2 - 2)n_1 n_2}}}.$$

Коли за таблицею (додаток) визначається ймовірність, яка дорівнює $2[1 - S(t_ф)]$, замість n слід брати $n_1 + n_2 - 2$. Якщо ймовірність дістанемо велику, то слід чекати різниць, які перевищують фактичну. А це означає, що фактична різниця, будучи меншою за ті, яких слід чекати з більшою ймовірністю, не дає підстав вважати, що відмінності між середніми істотні. Коли дістанемо малу ймовірність, відмінність між середніми не випадкова, а істотна.

Оцінимо розходження між середніми успішностями навчання у двох підгрупах на початку проведення занять та на закінчення теми.

Експериментальна група.

Учні	Успішність у балах (x')	$(x')^2$
1	10	100
2	11	121
3	8	64
4	10	100
5	9	81
6	8	64
7	11	121
8	10	100
9	8	64
10	10	100
11	7	49
12	5	25
13	9	81
14	7	49
15	10	100
Всього	133	1219

Контрольна група.

Учні	Успішність у балах (x'')	$(x'')^2$
1	10	100
2	11	121
3	8	64
4	7	49
5	8	64
6	10	100
7	9	81
8	12	144
9	6	36
10	8	64
11	9	81
12	7	49
13	8	64
14	9	81
15	11	121
16	9	81
Всього	142	1300

Дано: $n_1 = 15;$ $\sum x' = 133;$ $\sum (x')^2 = 1219;$ $n_2 = 16;$ $\sum x'' = 142;$ $\sum (x'')^2 = 1300;$

$$1)\sum (x' - \widetilde{x}')^2 = \sum (x')^2 - \frac{(\sum (x'))^2}{n_1} = 1219 - \frac{133^2}{15} = 39{,}73.$$

$$2)\sum (x'' - \widetilde{x}'')^2 = \sum (x'')^2 - \frac{(\sum (x''))^2}{n_2} = 1300 - \frac{142^2}{16} = 39{,}75.$$

$$3)\delta_{\delta} = \widetilde{x}' - \widetilde{x}'' = 39{,}75 - 39{,}73 = 0{,}02.$$

$$4)\ t_{\delta} = \frac{0{,}02}{\sqrt{\frac{(39{,}73 + 39{,}75)(15 + 16)}{(15 + 16 - 2) \cdot 15 \cdot 16}}} = 0{,}03.$$

5) З таблиці (додаток 3) для $n_1 + n_2 - 2$=15+16-2=29 знаходимо S(0,03) = 0,518

6) Знаходимо ймовірність $P[|\widetilde{x}' - \widetilde{x}''| > 0{,}03] = 2[1 - S(0{,}03)] = 2(1 - 0{,}518) = 0{,}964.$

Ймовірність досить велика, тому середній бал успішності двох груп на початок проведення уроків за запропонованою методикою майже однаковий.

По завершенні вивчення теми обом підгрупам була дана однакова контрольна робота, на основі підсумкових оцінок якої знову було проведено обробку результатів успішності контрольної та експериментальної груп.

Експериментальна група.

Учні	Успішність у балах *(x')*	*(x')²*
1	10	100
2	11	121
3	9	81
4	10	100
5	9	81
6	8	64
7	10	100
8	11	121
9	8	64
10	10	100
11	8	64
12	5	25
13	9	81
14	10	100
15	10	100
Всього	138	1302

Контрольна група.

Учні	Успішність у балах *(x΄΄)*	*(x΄΄)²*
1	9	81
2	11	121
3	8	64
4	7	49
5	8	64
6	10	100
7	9	81
8	10	100
9	5	25
10	9	81
11	8	64
12	7	49
13	8	64
14	9	81
15	10	100
16	9	81
Всього	137	1205

Дано:

$$n_1 = 15; \qquad n_2 = 16;$$
$$\sum x' = 138; \qquad \sum x'' = 137;$$
$$\sum (x')^2 = 1302; \qquad \sum (x'')^2 = 1205;$$

$$1)\sum (x' - \tilde{x}')^2 = \sum (x')^2 - \frac{(\sum (x'))^2}{n_1} = 1302 - \frac{138^2}{15} = 32{,}4;$$

$$2)\sum (x'' - \tilde{x}'')^2 = \sum (x'')^2 - \frac{(\sum (x''))^2}{n_2} = 1205 - \frac{138^2}{16} = 31{,}94;$$

$$3)\delta_{\partial} = \tilde{x}' - \tilde{x}'' = 32{,}4 - 31{,}94 = 0{,}46.$$

$$4)\ t_{\partial} = \frac{0{,}46}{\sqrt{\frac{(32{,}4 + 31{,}94)(15 + 16)}{(15 + 16 - 2) \cdot 15 \cdot 16}}} = 0{,}86.$$

5) З таблиці (додаток 3) для $n_1 + n_2 - 2$=15+16-2=29 знаходимо S(0,86)=0,785.

6) Знаходимо ймовірність $P[|\tilde{x}' - \tilde{x}''| > 0{,}86] = 2[1 - S(0{,}86)] = 2(1 - 0{,}785) = 0{,}4.$

Ймовірність досить мала, тому середній бал успішності двох груп наприкінці експерименту істотно відрізняється.

Отже, можна стверджувати, що запропонована методика викладання теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» є ефективною. Учні експериментальної групи написали контрольну роботу краще, а це свідчить про те, що засвоїли вони матеріал глибше, навчились аналізувати та розв’язувати вправи.

ВИСНОВКИ

Згідно з навчальною програмою з математики для загальноосвітньої школи тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи розглядаються в курсі алгебри і початків аналізу 10-го класу. Тут вивчається розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь і нерівностей. Розв'язуючи такі рівняння і нерівності, учні формують математичні компетентності, закріплюють свої знання про властивості тригонометричних функцій, набувають навичок теоретико-множинних та логічних міркувань.

Використовуючи поняття arcsin a, arccos a, arctg a та arcctg a, а саме, графічну ілюстрацію цих понять, аналогічно до виведення формул коренів найпростіших тригонометричних рівнянь, можна вивести формули і для розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Застосування таких формул, наприклад, економить час при розв'язуванні нерівностей, дозволяє учням зосередити всю свою увагу безпосередньо на розв'язанні самої тригонометричної нерівності, а не на побудові малюнка.

Слід зауважити, що спосіб розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей за допомогою формул необхідно обов'язково розглянути в класах із поглибленим вивченням математики та класах фізико-математичного профілю. Потрібно постійно враховувати і те, що на вступних іспитах у вузи на математичні спеціальності пропонуються складні тригонометричні нерівності, які не зводяться до найпростіших. Тому бажано ознайомити учнів також із універсальними методами розв'язування тригонометричних нерівностей, наприклад, методом інтервалів.

Магістерська робота складається зі вступу, трьох основних розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Результати досліджень можуть бути використані вчителями математики при проведенні уроків і студентами математичних спеціальностей у процесі вивченні фахових дисциплін та написанні курсових і кваліфікаційних робіт.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аналітична геометрія / О.А. Борисенко, Л.М.Ушакова. – Харків : Основа, 1993. – 192 с.

2. Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник, изд. 3-е. — СПб. : ЛКИ, 2008. — 248 с. 3. Аджиєва А. Тригонометричні рівняння / А. Аджиєва // Математика. Додаток до газети «Перше вересня». – 2001. – № 33.

4. Адрова И. А. Модульний урок в X класі по темі «Рішення тригонометричних рівнянь» / И.А. Адрова, И.В. Ромашко // Математика в школі. – 2001. – № 4. – С. 28–32.

5. Бабенко С.П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. II семестр. Академічний рівень // С.П. Бабенко. – Харків : Основа, 2011. – 253 с.

6. Бардушкін В. Тригонометричні рівняння. Відбір коріння / В.Бардушкін, О. Прокоф'єв. // Математика. – 2005. – №12. – С. 23–27.

7. Бевз Г.П. Методика викладання математики. / Г.П.Бевз. – К.: Радянська школа, 1989. – 320 с.

8. Вигодський Я.Я. Довідник по елементарній математиці. – Київ, 2003. – 345 с.

9. Голобородько В.В. Алгебра і початки аналізу. Самостійні і контрольні роботи. / В.В. Голобородько, А.П.Єршова. – К., 2004.

10. Гальперіна А.Р. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Збірник завдань для контролю знань / А.Р. Гальперіна, І.О.Золотарьова. – Харків : Вид-во «Ранок», 2010. – 176 с.

11. Гетманцев В. Д. Математика. Тригонометрія : посіб. [для слухачів підгот. відділень та вступників до пед. ін-тів] / В.Д. Гетманцев, О.Ф.Саушкін. – Київ : Либідь, 1994. – 144 с.

12. Гилемханов Р. Г. Звільнімося від зайвої роботи (при рішенні однорідних тригонометричних рівнянь) / Р.Г. Гилехамов // Математика в школі. – 2000. – № 10. – С. 9. 85

13. Городніченко В.Д.Тригонометрія. Конкурсні задачі / В.Д.Городніченко // Математика в школах України. – 2011. – № 1–2. – С. 34– 39.

14. Довідник з елементарної математики. Геометрія, тригонометрія, векторна алгебра / за ред. П.Ф. Фільчакова. – 2-е вид. – Київ : Наука, 1967. – 439 с.

15. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX-X классы. Пособие для учителей. / Г. И. Глейзер — М. : Просвещение, 1983. — 352 с.

16. Закон України про освіту / Відомості Верховної Ради (ВВР), 2018, № 38-39, ст.380.

17. Игудисман О. Математика на устном экзамене / О. Ігудисман О. – Москва : Айрис прес, Рольф, 2001. – 159 с.

18. Істер О.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики – 11 клас / О.С. Істер, О.І. Глобін, І.Є. Панкратова. – Київ : Центр навч.-метод. літератури, 2011. – 112с.

19. Історія тригонометрії. Електронний ресурс. – Режим доступу https://www.turkaramamotoru.com/uk97-209105.html

20. Каплун О. І. Алгебра і початки аналізу + геометрія. 10 клас: навчально-методичний посібник / О.І. Каплун. – Харків : ФОП Співак В. Л., 2010. – 320 с.

21. История математики под редакцией А. П. Юшкевича в трёх томах, М.: Наука, 1970.

22. Кириченко Т. Ф. Методические рекомендации для студентовзаочников по решениям математических задач / Т.Ф. Кириченко. – Ленинград, 1987. – 53 с.

23. Ивлев Б.М. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса / Б.М.Ивлев, С.М.Саакян, С.И.Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1990. – 176 с.

24. Капіносов А.М. Дидактичні матеріали для різнорівневого навчання. Алгебра 10 клас. / А.М. Капіносов. – К.: А.С.К., 1997. – 80 с. 86

25. Кожеуров П.Я. Курс тригонометрии для техникумов / П.Я.Кожеуров. – Москва : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. – 296 с.

26. Кожеуров П.Я. Тригонометрия / П.Я. Кожеуров. – [6-е издание]. – Москва : Гос. изд-во «Физ.-мат. литературы», 1961. – 329 с.

27. Кожеуров П.Я. Тригонометрия / П.Я. Кожеуров [7-е видання]. – Москва : Гос. изд-во «Физ.-мат. литературы», 1963. – 342 с.

28. Кранц П. Сферическая тригонометрия / П. Кранц. – Москва : URSS.ЛКИ, 2007. – 93 с.

29. Концепція профільного навчання в старшій школі. Електронний ресурс. Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/37784/

30. Лов'янова І.В. Дидактичні основи навчання математики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / І.В.Лов'янова. – Кривий Ріг: КДПУ, 2009. – 192с.

31. Македонська С.І. Побудова графіків тригонометричних функцій / С.І. Македонська // Математика. – 2003. – березень (№12) – С. 8–11.

32. Матвиевская Г.П. Становление плоской и сферической тригонометрии. Из истории математических идей / Г.П. Матвиевская.–Москва: Знание, 1982.– 64 с.

33. Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту. Профільний рівень – Електронний ресурс. Режим доступу https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

34. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, Д.А.Номіровський В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків : Гімназія, 2010. – 415 с.

35. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2009. – 379 с. 87

36. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв'язувати задачі // А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Київ : Генеза, 2008. – 312 с.

37. Мирошин В. Отбор корня в тригонометрических уравнениях / В.Мирошин // Математика. – Додаток до газети «Перше вересня». – 2006. – № 17. – С. 56–59.

38. Мордкович А. Г. Алгебра і початки аналізу. 10-11 кл.: Підручник для загальноосвітніх установ / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2000. – 336с.

39. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень / С. І. Нелін. – Харків : Гімназія, 2010. – 416 с.

40. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Є.П. Нелін / [2-ге вид., виправ. і доп.]. – Харків : Світ дитинства, 2006. – 448 с.

41. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова / [2-ге вид., виправл. і доп]. – Харків : Світ дитинства, 2006. – 416 с.

42. Пандул И.С. Сферическая тригонометрия и сферическая астрономия применительно к решению инженерно-геодезических задач / И.С. Пандул. – Ленинград : ЛГИ, 1982. – 99 с.

43. Пичурин Л. Ф. Про тригонометрию и не только о ней / Л.Ф.Пичурин. – Москва : Просвещение, 1985. – 128 с.

44. Пінчук О.П. До проблем формування ключових компетенцій у старшокласників. Роль математики та інформатики у вирішенні цієї проблеми / О.П. Пінчук // Наука і сучасність: зб. наук. пр. / Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Київ, Логос, 2002. – Том XXXIII. – С.109–116.

45. Погребиський І. Б. Тригонометрія : посіб. для учителів / І.Б.Погребиський, П.Ф. Фільчаков. – Київ : Рад. шк., 1951. – 251с. 88.

46. Пойа Д. Как решать задачу. / Д Пойа. – М.: Учпедгиз, 2-е издание, 1961. – 208с.

47.Перебийніс С.М. Тригонометрія у таблицях, схемах та розв’язках. 10 клас / С.М. Перебийніс. – Тернопіль: Мандрівець, 2014. – 80 с.

48. Про Державну національну програму «Освіта» (Україна XXI століття). Електронний ресурс. Режим доступу: http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/896-93-%D0%BF

49. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [монографія] / С.А. Раков. – Харків : Факт, 2005. – 360с.

50. Резуненко В.О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів / В.О. Резуненко, В.О. Ярмак. – Харків : Вид. група «Основа», 2011. – 94 с.

51. Тематична атестація. Математика. 10 клас. – Тернопіль : СМП Астон, 2000. – 80 с.
52. Решетников Н. Н. Тригонометрия в школе / Н.Н. Решетников. – Москва : Педагогический университет, 2006. – 278 с.
53. Рыбников К. А. История математики в двух томах. – М. : Изд. МГУ, 1960. – Т. I. –с. 265.
54. Рижков М. О. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 8-11 / М.О. Рижков. – Харків : Вид. група «Основа», 2008. – 96 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України». – Вид. 9 (69)).
55. Роганін О. М. Математика : Практичний довідник / О.М. Роганін, О.І. Каплун. – Харків : ФОП Співак Т. К., 2009. – 416 с
56. Слєпкань З.І. Збірник завдань для ДПА з математики. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. / З.І. Слєпкань. – Харків, «Гімназія», 2002. – 160 с.
57. Сипченко Т.М. Календарно-тематичний план з математики. 5–11 класи / Т. М. Сипченко. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Харьков: Видавництво «Ранок», 2011. – 128 с.
58. Сканави М.И. Элементарная математика / М.И.Сканави. – М., 1974.– 592 с.
59. Смоляков А. Н. Прийоми рішення тригонометричних рівнянь / А.Н.Смоляков, П.Ф. Севрюков // Математика в школі.– 2004. – № 1. – С. 24– 26.
60. Тригонометричні функції. Завдання та розв'язки. – К.: Видавничий дім «Перше вересня», 2016. – Серія «Бібліотека «Шкільного світу»».
61. Тарасенкова Н. А. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів / Н. А. Тарасенкова, В. К. Кірман // Математика в школі. – 2008. – No 6. – С. 3–9.
62. Тарасенкова Н.А. Засоби перевірки математичної компетентності в основній школі / Н.А. Тарасенкова, І.М.Богатирьова, О.М.Коломієць, З.О.Сердюк // Science and education a new dimension. – III (26), Issue: 71. – Budapest: SCASPEE, 2015. – P. 21-25.
63. Титаренко О.М. 5770 задач з математики з відповідями. – 2–ге вид. випр. / О.М. Титаренко. – Харків : ТОРГСІНГ ПЛЮС, 2007. – 336 с.

64. Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики : [навчальний посібник] / О.М. Титаренко. – Харків : Торсінг, 2003. – 368 с.

65. Токарева А. Тригонометричні нерівності / А. Токарева // Математика. // Додаток до газети «Перше вересня» № 44, 2002 р

66. У світі математики : [збірник науково-популярних статей]. – Випуск10. – Київ : Радянська школа, 1979. – 207 с.

67. У світі математики : [збірник науково-популярних статей]. – Випуск 14. – Київ : Радянська школа, 1983. – 255 с.

68. У світі математики : [збірник науково-популярних статей]. – Випуск 9. – Київ : Радянська школа, 1978. – 236 с.

69. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 1983. — 160 с.

70. Фурман М. С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. – Харків : Вид. група «Основа», 2010. – 159 с. 90

71. Ходырева Н.Г. Методическая система становления готовности будущих учителей к формированию математической компетентности школьников : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Н.Г. Ходырева. – Волгоград,– 2004. – 179 с.

72. Цукарь А.Я. Вправи практичного характеру з тригонометрії / А.Я.Цукарь // Математика в школах України. – 1993. – №3. – С. 45–50.

73. Шабашова О. В. Прийоми відбору коренів в тригонометричних рівняннях / О.В. Шабашова // Математика в школі. – 2004. – №1. – С.20–24.

74. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – Київ : Зодіак-ЕКО, 2002. – 272 с.

Додаток

Календарне планування вивчення теми

«Тригонометричні рівняння і нерівності»

№ п/п	Зміст начального матеріалу	Кількість годин
1.	Урок-лекція: Арксинус, арккосинус, арктангенс. Розв′язування найпростіших тригонометричних рівнянь. Розв′язування найпростіших тригонометричних нерівностей.	2
	Розв′язування ключових задач	2
	Розв′язування нестандартних задач	2
	Урок-семінар.	2
	Урок-залік.	2
	Контрольна робота	1
	Аналіз контрольної роботи	1