Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:
Компетентісно-орієнтована методика вивчення тригонометричних функцій в курсі алгебри і початків аналізу старшої школи

Виконала: студентка 2 курсу магістратури,
групи М-М-21
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Михальчич Іванна Іванівна
Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри
математики з методикою викладання
Генсіцька-Антонюк Наталія Олександрівна

Рецензент: канд. техн. наук, доц. кафедри вищої
математики РДГУ
Присяжнюк Ігор Михайлович

Рівне – 2020 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Постановка наукової проблематики. В умовах модернізації освіти та в оновлених державних стандартах вивчення математики реалізується через профільну і рівневу диференціації. З 2018-2019 навчальні роки вивчення математики в старшій школі здійснюється за двома рівнями: базовим і профільним. Диференціація навчання забезпечує достатню математичну підготовку, яка сприяє виробленню необхідних компетентностей задля їх реалізації в повсякденному житті та подальшій математичній підготовці.

Запровадження обов’язкового незалежного зовнішнього оцінювання та державної підсумкової атестації з математики вказує на значущість даного предмету, а саме значущість математичної компетентності в усіх сферах діяльності. Крім того, більшість спеціальностей потребують обов’язкового ЗНО з математики. Тригонометричні функції є невід’ємною складовою математики і вони широко представлені як в завданнях ЗНО (алгебра і геометрія), так і в завданнях ДПА (геометрія).

Важко уявити програму з математики для старшої школи без вивчення тригонометричних функцій, адже, історично склалося, тригонометрії завжди приділялося особливе місце в курсі математики старшої школи. Ще в працях давніх греків тригонометрія є одним з найважливіших розділів математики.

В умовах різноманіття шкільних підручників, новітніх навчальних технологій можна прослідкувати різні методики навчання тригонометричних функцій. Кожен підручник спрямований на реалізацію компетентнісного підходу до вивчення математики.

Аналіз останніх досліджень. Вивченню тригонометричних функцій та методам розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей присвяченні праці І. Кушніра, Г. Барановської, В. Ясінського, І. Гельфанда, А. Мерзляка, В. Полонського, О. Гайштута, І. Конета, Н. Шунди та ін. Методика вивчення тригонометричних функцій широко представлена у працях вітчизняних вчених З. Слєпкань, Г. Бевза, у сучасних підручниках з математики А. Мерзляка, І. М. Шкіля, О. Істера.

Проблема впровадження компетентнісного підходу обговорювалась у працях О. Пометун, С. Ракова, А. Хуторського, О. Заблоцької, М. Голованя і ін.

Деякі питання методики впровадження прикладних задач, призначених для вивчення функцій та їх застосувань, в курс алгебри і початків аналізу розглянуті в статтях вітчизняних авторів В. Ачкана, Н. Вінниченко, О. Гриб'юк та ін.

Таким чином вибрана нами тема ***«Компетентісно-орієнтована методика вивчення тригонометричних функцій в курсі алгебри і початків аналізу старшої школи»*** є досить актуальною зважаючи на реалії і перспективи математичної освіти.

Об'єкт дослідження – процес навчання алгебри учнів загальноосвітніх шкіл.

Предмет дослідження – тригонометричні функції та методика їх вивчення.

Мета дослідження – дослідити теоретичні та методичні основи вивчення тригонометричних функцій на рівні стандарту та сформувати ключові компетентності в процесі розв'язування практичних задач.

Відповідно до мети дослідження нами були поставлені такі **завдання**:

1) проаналізувати науково-методичну, психолого-педагогічну літературу з проблеми дослідження;

2) визначити місце тригонометричних функцій у навчальномій програмі з математики;

3) дослідити і проаналізувати теоретичні та методичні основи вивчення тригонометричних функцій;

4) проаналізувати дидактичні матеріали по темі дослідження;

5) проаналізувати ключові компетентності та засоби їх формування на уроках математики;

6) підібрати систему прикладних задач з теми дослідження та подати методику їх розв’язання задля формування ключових компетентностей.

Для реалізації визначених задач були використані такі **методи дослідження**:

– загальнонаукові (узагальнення і систематизація останніх досліджень з проблематики дослідження);

– пошуково-бібліографічний (вивчення матеріалів періодичних видань з проблеми дослідження);

– метод термінологічного аналізу дав можливість виявити та уточнити значення основних понять з теми дослідження;

– педагогічний експеримент (анкетування).

Джерельна база дослідження:

— періодичні видання,

– навчальні плани, навчальні програми, шкільні підручники та методична література для вчителів математики;

– інтерпретаційні джерела – монографії, брошури, статті;

– довідкова література, сучасні підручники й посібники для вищої школи.

Гіпотеза дослідження. Якщо в процесі навчання математики використовувати систему задач з вивчення тригонометричних функцій, яка містить моделі реальних систем і процесів, то це буде сприяти формуванню ключових компетентностей і досягненні цілей навчання, зазначених в Державному стандарті.

Теоретичне значення дослідження полягає в тому, що:

1) узагальненні і систематизовані теоретичні та методичні основи з теми дослідження;

2) запропонована методика розв’язування задач практичного змісту.

Практичне значення. Результати дослідження, його основні положення та висновки, система задач та подана методика можуть бути використані вчителями шкіл під час підготовки й проведення уроків математики. Результати дослідження ***упроваджено*** в навчально-виховний процес Дубівської загальноосвітньої школи №2 Дубівської селищної ради Закарпатської області.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та висновки дослідження були представлені на *міжнародній конференції* «Наука, освіта, суспільство очима молодих» (Рівне, 2020), звітній науково-практичній конференції РДГУ (2020) та заслуховувалась на засіданні кафедри математики з методикою викладання.

Структура і обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, висновків, списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи – 60 сторінках друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1.1. Тригонометричні функції та їх основні властивості

1.1.1. Радіанна міра кутів та залежність між градусною і радіанною мірами кутів

В геометрії, кут – це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що мають спільний початок. Встановимо інший погляд на кут як алгебраїчну величину.

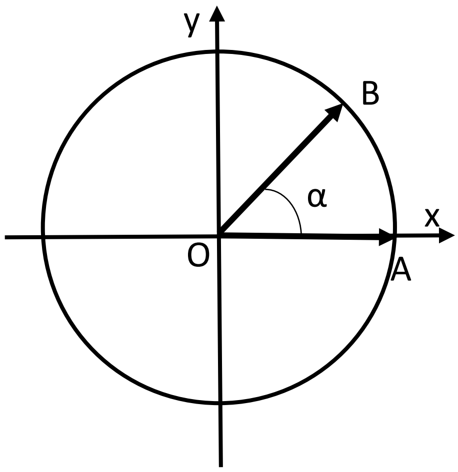

Рис.1.1

Нехай $\overrightarrow{OB}$ радіус-вектор, який обертається по колу. Точка О – початок координат і початок радіус-вектора. Точка В – кінець радіус-вектора і є точкою, що належить колу. $\angle AOB = \alpha$ – це додатний кут, який утворюється внаслідок обертання по колу проти годинникової стрілки, тоді відємним кутом будемо називати кут, який утворюється внаслідок обертання за годинниковою стрілкою [16].

Деякому положенню радіус-вектора буде відповідати безліч кутів, які можна задати формулою $\beta = \alpha + 360^\circ n$, де $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Радіанна міра кута – це деяке число *a*, що дорівнює відношенню довжини дуги кола, яка відповідає деякому центральному куту, до радіуса цього кола $\frac{l}{r}=a$.

Центральний кут, величина якого дорівнює довжині радіуса називається радіаном. Тобто, якщо $l=r$, то *a*=1 радіан.

Кут, заданий у радіанній мірі можна перевести у градусну і навпаки. Куту $1°$ відповідає дуга кола довжиною , тоді куту $\alpha°$ - дуга довжиною $l=\frac{\pi r}{180°}\cdot\alpha°$. Якщо $\frac{l}{r}=a$, то $a=\frac{\pi\alpha°}{180°}$ або $\alpha^{\circ}=\frac{\pi a}{180°}$. Отже, на один радіан припаде $\frac{180°}{\pi}=\frac{180°}{3{,}14159\ldots}=57°18'$ [18].

1.1.2. Означення тригонометричних функцій будь-якого аргументу та знаки тригонометричних функцій

Синусом кута α називається відношення ординати вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OB}$ до довжини самого вектора $\vec{r}$: $sin\alpha=\frac{y}{r}$.

Косинусом кута α називається відношення абсциси вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OB}$ до довжини самого вектора $\vec{r}$: $cos\alpha=\frac{x}{r}$.

Тангенсом кута α називається відношення ординати вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OB}$ до довжини його абсциси: $tg\alpha=\frac{y}{x}$.

Котангенсом кута α називається відношення абсциси вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OB}$ до довжини його ординати: $ctg\alpha=\frac{x}{y}$.

Введемо поняття допоміжних тригонометричних величин, які широко використовуються в астрономії.

Обернена величина до косинуса називається секансом кута α : $sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$. Обернена величина до синуса називається косекансом кута α : $cosec\alpha = \frac{1}{sin\alpha}$.

Якщо кут α змінюється і синус, косинус, тангенс, котангенс змінюються, то координати вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ теж змінюються, тоді і $sin\alpha, cos\alpha, tg\alpha$, $ctg\alpha$ теж будуть змінюватись.

Одиничне коло осями координат поділяється на чотири чверті (квадранти). При повному оберті радіуса-вектора $\vec{r}$ кут α змінюється від 0 до . Тригонометричні функції у кожній чверті мають свої знаки [16].

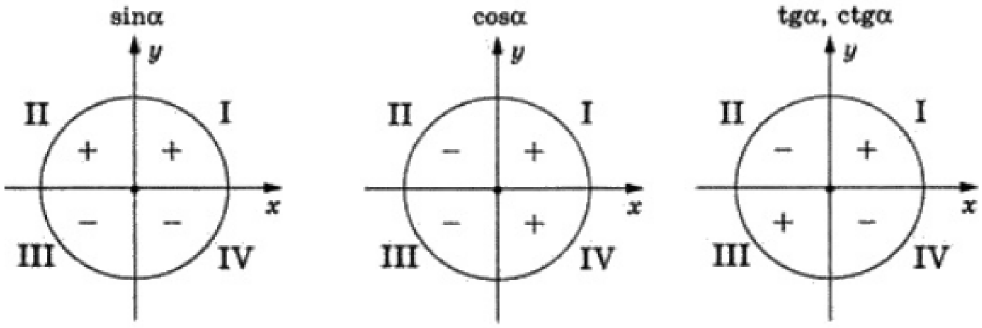

Рис.1.2

1.1.3. Змінна тригонометричних функцій при зміні кута α у межах першого кола

Зміна синуса

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Якщо , то $sin\alpha$ зростає від 0 до 1;

Якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $sin\alpha$ спадає від 1 до 0;

Якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $sin\alpha$ спадає від 0 до (-1);

Якщо , то $sin\alpha$ спадає від (-1) до 0.

Зміна косинуса

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Якщо , то $cos\alpha$ зростає від 1 до 0;

Якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $cos\alpha$ спадає від 0 до -1;

Якщо $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $cos\alpha$ спадає від -1 до 0;

Якщо , то $cos\alpha$ спадає від 0 до 1.

Зміна тангенса

За означенням $tg\alpha = \frac{y}{x}$. Для будь-якого кута α знайдемо на деякій осі відрізок, алгебраїчна величина якого дорівнює $\frac{y}{x} = tg\alpha.$

Розглянемо ΔOBB_1 та ΔONA : $\Delta OBB_1 \sim \Delta ONA$ за двома кутами. З означення $\frac{BB_1}{OB_1} = tg\alpha,$ $\frac{NA}{OA} = tg\alpha$ випливає $\frac{BB_1}{OB_1} = \frac{NA}{OA}$.

Оскільки $OA = 1$, то $NA = \frac{BB_1}{OB_1} = tg\alpha.$

Отже, відрізок алгебраїчна величина якого дорівнює $tg\alpha,$ визначається на осі тангенсів (дотична кола в точці (1;0)).

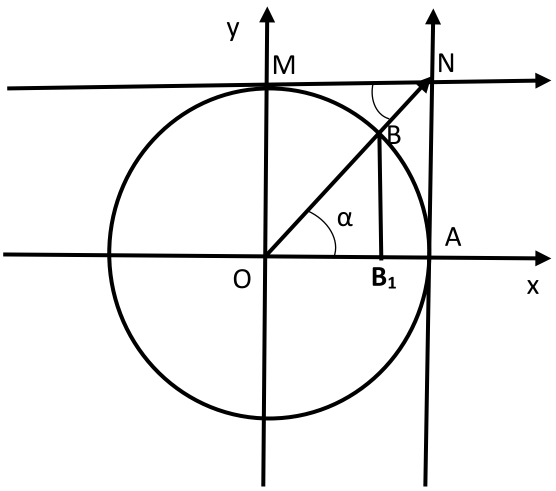

Рис.1.3

Зміна котангенса

За означенням $ctg\alpha = \frac{x}{y}$. Для будь-якого кута α знайдемо на деякій осі відрізок, алгебраїчна величина якого дорівнює $\frac{x}{y} = ctg\alpha$.

Розглянемо ΔOBB_1 та ΔONM : $\Delta OBB_1 \sim \Delta ONM$ за двома кутами. З означення $\frac{OB_1}{BB_1} = tg\alpha,$ $\frac{NM}{OM} = tg\alpha$ випливає $\frac{OB_1}{BB_1} = \frac{NM}{OM}$.

Оскільки $OM = 1$, то $NM = \frac{OB_1}{BB_1} = ctg\alpha.$

Отже, відрізок алгебраїчна величина якого дорівнює $ctg\alpha,$ визначається на осі котангенсів (дотична кола в точці (0;1)) [16].

1.1.4. Побудова кута за значенням тригонометричної функції. Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів

Необхідно побудувати кути α і α_1, якщо $sin\alpha = \frac{2}{3}$. Радіус кола OM=1 поділимо на три рівні частини і візьмемо таких дві частини та на відстані

від точки O будуємо пряму, паралельну осі OX. Ця пряма перетне коло в точках B і B_1. Таким чином, $\angle BOA = \alpha, a \angle B_1OA = \alpha_1.$

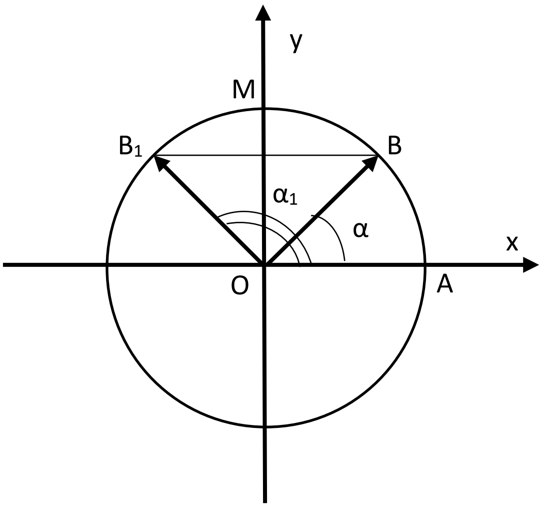

Рис.1.4

Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів [22]

Таблиця 1

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π		
$sin\alpha$	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0	-1	0	1
$tg\alpha$	0		1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1		0	-	0	-

Якщо $\alpha = 30°$, то радіус-вектор $\overrightarrow{OB}$ одиничного кола утворює $30°$ з віссю OX; координати x і y додатні й утворюють катети прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 1. Отже, за теоремою Піфагора $x^2 + y^2 = 1$. Навпроти кута $30°$ лежить катет у два рази менший за гіпотенузу, тоді $sin30° = \frac{1}{2}$.

Якщо $y = \frac{1}{2}$, то $x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, звідси $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, tg30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1.1.5. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж кута

Нехай α – будь-який кут, утворений при повороті радіус-вектора $\vec{r} = \{x; y\}$, тоді $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ (1).

Підносячи до квадрата рівності (1) і їх додавши, отримаємо:

$sin^2x + cos^2x = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$(2).

Оскільки

$x^2 + y^2 = r^2,$ то $sin^2x + cos^2x = 1\ (3)$.

Так як $tg\alpha = \frac{y}{x}$, то $tg\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}\ (4)$. Аналогічно $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ (5).

Помножимо тотожність (4) на (5): $tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 1$ або $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}\ (8)$.

Якщо поділити рівність (3) спочатку на cos^2x, а потім на sin^2x, то отримаємо такі рівності:

$\frac{sin^2x}{cos^2x} + 1 = \frac{1}{cos^2x} \Rightarrow tg^2x + 1 = \frac{1}{cos^2x}$ (9) та

$1 + ctg\ \ x = \ \ sin\ x\ \ 1$ 0

$\Rightarrow$ [8].

1.1.6. Зведення тригонометричних функцій від'ємного аргументу (кута) до функцій додатного аргументу

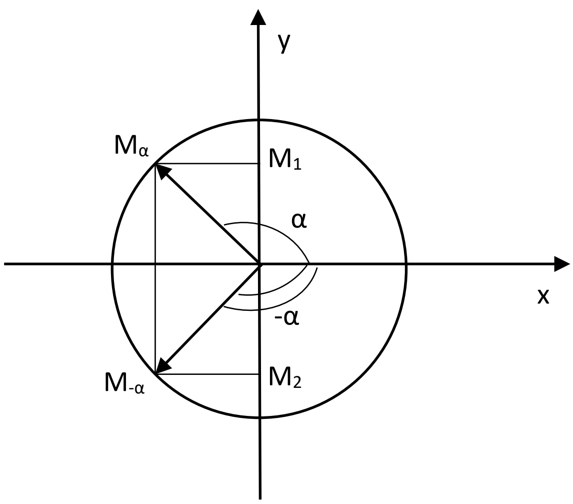

Рис.1.5

Нехай вектор $\overrightarrow{OM}_{\alpha}$ утворює з віссю ОХ кут α; вектор $\overrightarrow{OM}_{-\alpha}$ – кут $(-\alpha)$. Тоді $\sin\alpha = OM_1; \sin(-\alpha) = OM_2$. За модулем (абсолютною величиною) проекції OM_1 та OM_2 рівні між собою, тому $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Точки M_{α} та $M_{-\alpha}$ симетричні відносно ОХ, тому проекції векторів $\overrightarrow{OM}_{\alpha}$ і $\overrightarrow{OM}_{-\alpha}$ на вісь ОХ співпадають, тому $\cos(-\alpha) = cos\alpha$. Тоді

$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-sin\alpha}{cos\alpha} = -tg\alpha$, $\quad ctg(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{cos\alpha}{-sin\alpha} = -ctg\alpha$

[16].

1.1.7. Парність та періодичність тригонометричних функцій

Функція називається ***парною***, якщо виконується рівність: $f(-x) = f(x)$ для всіх x з області її визначення. Функція називається ***непарною***, якщо виконується рівність: $f(-x) = -f(x)$ для всіх x з області її визначення [16].

Оскільки $\cos(-x) = \cos x$, то функція $\cos x$ є парною функцією, а $\sin x$, $tg x$, $ctg x$ – непарними функціями, тому що $\sin(-x) = -\sin x$, $tg(-x) = -tg x$, $ctg(-x) = -ctg x$ [23].

Функцію *f* називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого *x* з області визначення функції *f* виконуються рівності $f(x - T) = F(x) = f(x + T)$. Отже, наймеше додатне число, додавання (віднімання) до аргументу функції не змінює її значення, наз. ***періодом функції*** (*T* – період функції) [23].

Всі тригонометричні функції періодичні. Період синуса, косинуса дорівнює , період тангенса, котангенса - π. Отже, $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$, $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$,

$tg(x \pm \pi) = tg x$, $ctg(x \pm \pi) = ctg x$.

Теорема 1. Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функцій *f*, причому $T_1 + T_2$ є також періодом функції *f*.

Доведення. Для будь-якого $x \in D(f)$:

$f(x) = f(x + T_1) = f((x + T_1) + T_2) = f\left(x + (T_1 + T_2)\right); f(x) = f(x - T_1) = f((x - T_1) - T_2) = f($

Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконуються рівності:

$$f\left(x + (T_1 + T_2)\right) = f(x) = f\left(x - (T_1 + T_2)\right).$$

Отже, $T_1 + T_2$ є періодом функції *f*.

Теорема 2. Якщо число Т є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{|k|}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y = f(kx + b)$:

$$f(kx + b) = f((kx + b) + T) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right);$$

$$f(kx+b)=f((kx+b)-T)=f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right)$$

Звідси для будь-якого $x\in D(y)$, де $y=f(kx+b)$ виконується:

$$f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right)= f(kx+b)=f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Отже, число $\frac{T}{|k|}$ є періодом функції $y=f(kx+b)$.

1.1.8. Формули зведення

Формули зведення – це формули, за допомогою яких значення тригонометричних функцій будь-якого аргументу можна подати через відповідні значення тригонометричних функцій гострого кута.

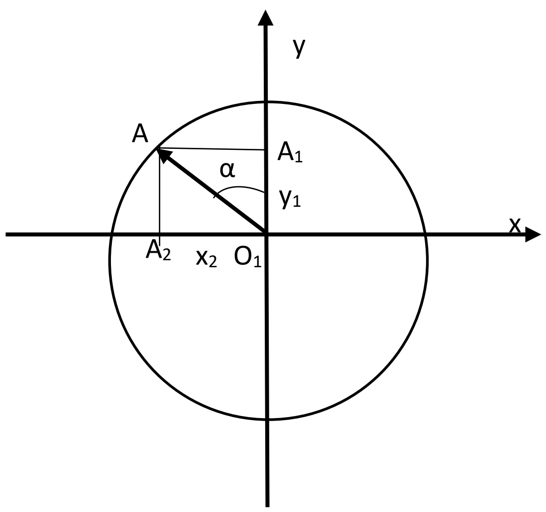

Рис.1.6

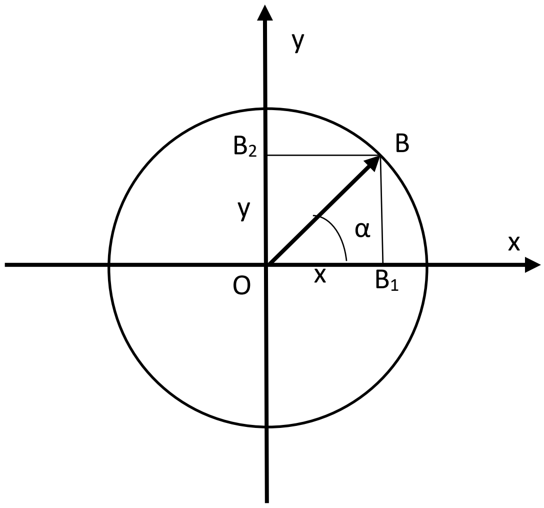

Рис.1.7

Кут, який закінчується у II чверті, можна подати як $90° + \alpha$ або $180° - \alpha$, відповідно у III чверті як $180° + \alpha$ або $270° - \alpha$, у IV чверті - $270° + \alpha$ або $360° - \alpha$.

Загальні правила для формул зведення:

1. Якщо аргумент тригонометричної функції має вигляд $(180° \pm \alpha)$, $(360° \pm \alpha)$ або в радіанній мірі $(\pi \pm \alpha)$, $(2\pi \pm \alpha)$, то назва тригонометричної функції, що зводиться, не змінюється. Знак у правій частині формули зведення пишеться залежно від того, який знак має функція, що зводиться в даній чверті.
2. Якщо аргумент тригонометричної функції має вигляд $(90° \pm \alpha)$, $(270° \pm \alpha)$ або в радіанній мірі $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, то назва тригонометричної функції, що зводиться, змінюється на кофункцію (синус на косинус і навпаки, тангенс на котангенс і навпаки). Знак у правій частині формули зведення пишеться залежно від того, який знак має функція, що зводиться в даній чверті [16].

Таблиця формул зведення [16]

Таблиця 2

x	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$			$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$		
$sinx$	$-sinx$	$sinx$	$sinx$	$-sinx$	$cosx$	$cosx$	$-cosx$	$-cosx$
$cosx$	$-cosx$	$-cosx$	$cosx$	$cosx$	$-sinx$	$sinx$	$sinx$	$-sinx$
tgx	tgx	$-tgx$	tgx	$-tgx$	$-ctgx$	$ctgx$	$-ctgx$	$ctgx$
$ctgx$	$ctgx$	$-ctgx$	$ctgx$	$-ctgx$	$-tgx$	tgx	$-tgx$	tgx

1.1.9. Властивості тригонометричних функцій

Функція $y = sinx$

Графіком тригонометричної функції $y = sinx$ є синусоїда.

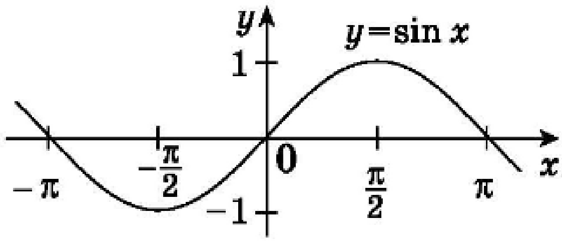

Рис.1.8

Властивості функції $y = sinx$:

1. Область визначення функції: $D(f)=R$.
2. Область значень функції: $E(f) = [-1; 1]$.
3. Функція непарна (симетрична відносно початку координат).
4. Період функції .
5. Нулі функції: $\pi n, n \in Z$.
6. Проміжки, на яких функція набуває додатних значень:
   $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n), n \in Z$.
7. Проміжки, на яких функція набуває від’ємних значень:
   $x \in (\pi;\ 2\pi n), n \in Z$.
8. Проміжки зростання функції: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z.$
9. Проміжки спадання функції: $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z.$

10. Найменші значення функції: $y = -1$, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

11. Найбільші значення функції: $y = 1$, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ [18].

Функція $y = cosx$

Графіком тригонометричної функції $y = cosx$ є косинусоїда.

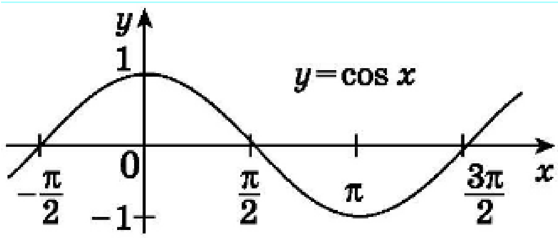

Рис.1.9

Властивості функції $y = cosx$:

1. Область визначення функції: *D(f)=R*.
2. Область значень функції: $E(f) = [-1; 1]$.
3. Функція парна (симетрична відносно осі OY).
4. Період функції .
5. Нулі функції: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.
6. Проміжки, на яких функція набуває додатних значень:

   $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$.
7. Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень:

   $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$.
8. Проміжки зростання функції: $x \in (-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n), n \in Z$.
9. Проміжки спадання функції: $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n), n \in Z$.
10. Найменші значення функції: $y = -1$, при $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.
11. Найбільші значення функції: $y = 1$, при $x = 2\pi n, n \in Z$ [18].

Функція $y = tgx$

Графіком тригонометричної функції $y = tgx$ є тангенсоїда.

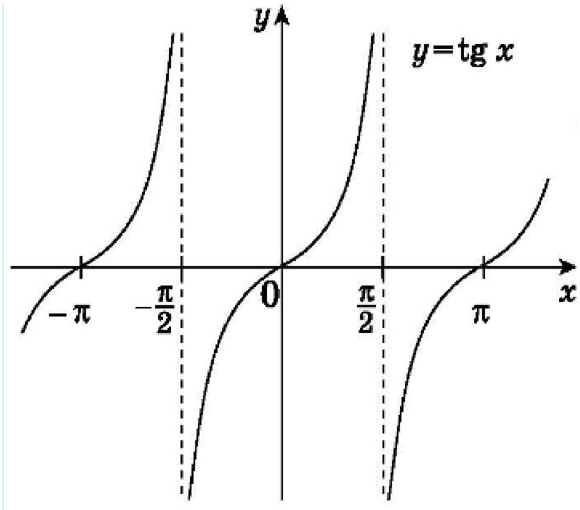

Рис.1.10

Властивості функції $y = tgx$:

1. Область визначення функції: $D(f)=R\{\pi/2 + 2\pi n\}$.
2. Область значень функції: $E(f) = R$.
3. Функція непарна (симетрична відносно початку координат).
4. Період функції π .
5. Нулі функції: $\pi n, n \in Z$.
6. Проміжки, на яких функція набуває додатних значень:

$$x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$$.

7. Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right), n \in Z$$.

8. Проміжки зростання функції: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z.$
9. Проміжки спадання функції: немає.
10. Найменші значення функції: немає.
11. Найбільші значення функції: немає [18].

Функція $y = ctgx$

Графіком тригонометричної функції $y = ctgx$ є котангенсоїда.

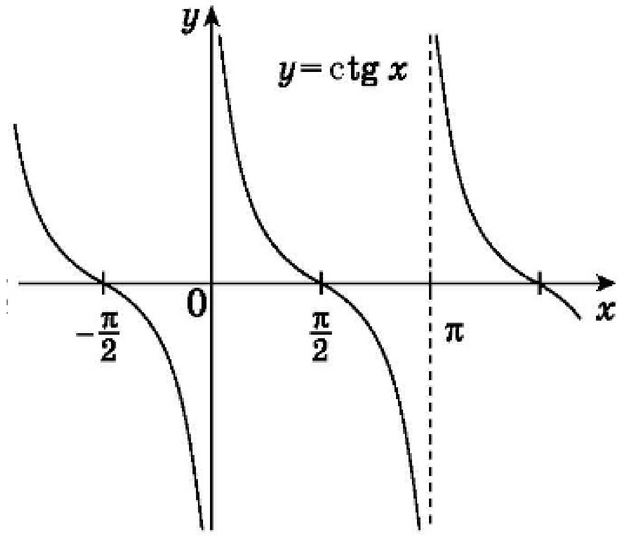

Рис.1.11

Властивості функції $y = ctgx$:

1. Область визначення функції: $D(f)=R\{\pi n\}$.
2. Область значень функції: $E(f) = R$.
3. Функція непарна (симетрична відносно початку координат).
4. Період функції π .
5. Нулі функції: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.
6. Проміжки, на яких функція набуває додатних значень:

   $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.
7. Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень:

   $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in Z$.
8. Проміжки зростання функції: немає.
9. Проміжки спадання функції: $x \in (\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$.
10. Найменші значення функції: немає.
11. Найбільші значення функції: немає [18].

1.1.10. Властивості обернених тригонометричних функцій

Функція $y = arccosx$

Функція, обернена до функції косинуса, називається арккосинусом. Якщо дана функція $y = cosx$, то $x = arccosy$, тобто x – кут, косинус якого

$[0; \pi$

дорівнює y . Функція $y = arccosx$ визначена на проміжку , тоді як область визначення $D(y) = [-1; 1]$. Побудуємо графік $y = arccosx$ знаючи, що вона обернена до функції $y = cosx$, тобто симетрична їй відносно прямої $y = x$.

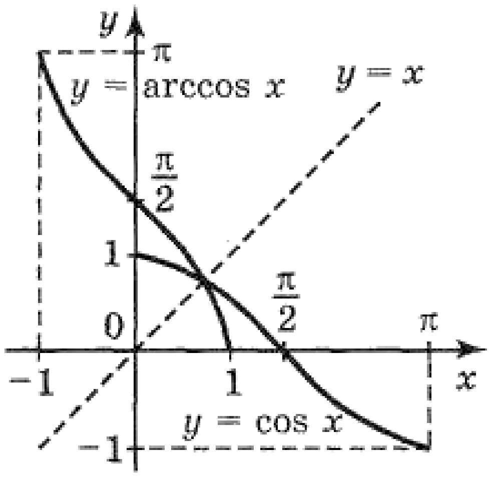

Рис.1.12

Властивості функції $y = arcsinx$:

$[-1 \quad 1$

1. Область визначення функції: *D(f)*= .
2. Область значень функції: $E(f) = [0; \pi]$.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Функція неперіодична.
5. Нулі функції: $x = 1$.
6. Проміжки, на яких функція набуває додатних значень: $x \in (-1; 1)$.

7. Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень: немає.
8. Проміжки зростання функції: немає.
9. Проміжки спадання функції: $x \in [-1; 1]$
10. Найменші значення функції: $f(1) = 0$.
11. Найбільші значення функції: [19].

Функція $y = arcsinx$

Функція, обернена до функції синуса, називається арксинусом.

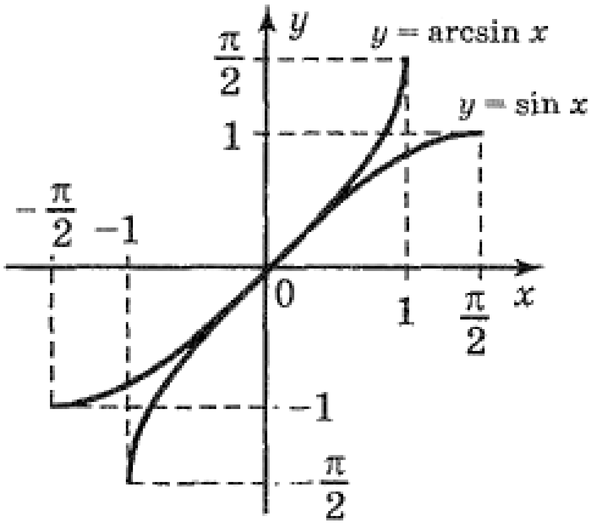

Рис.1.13

Властивості функції $y = arcsinx$:

$[-1 \quad 1$

1. Область визначення функції: *D(f)*= .
2. Область значень функції: $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функція непарна (симетрична відносно початку координат).
4. Функція неперіодична.
5. Нулі функції: $x = 0$.
6. Проміжки, на яких функція набуває додатних значень:

$x \in (0; 1)$.

7. Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень:

   $x \in (-1;\ 0)$.

8. Проміжки зростання функції: $x \in (-1; 1)$.
9. Проміжки спадання функції: немає.
10. Найменші значення функції: $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

$f(1) = \frac{\pi}{2}$

11. Найбільші значення функції: [19].

Функція $y = arctgx$

Функція, обернена до функції тангенса, називається арктангенсом.

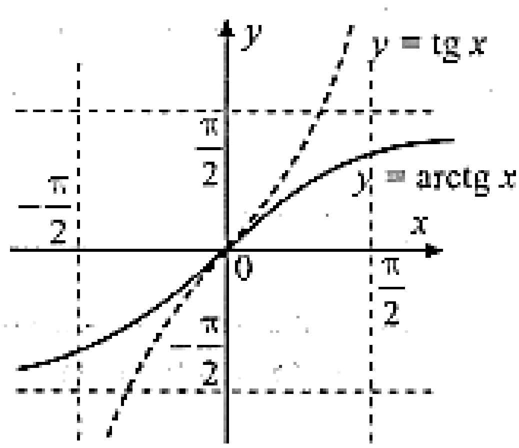

Рис.1.14

Властивості функції $y = arctgx$:

1. Область визначення функції: $D(f) = R$.
2. Область значень функції: $E(f) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
3. Функція непарна (симетрична відносно початку координат).
4. Функція неперіодична.
5. Нулі функції: $x = 0$.
6. Проміжки, на яких функція набуває додатних значень:

   $x \in (0; +\infty)$.

7. Проміжки, на яких функція набуває від’ємних значень:

   $x \in (-\infty;\ 0)$.

8. Проміжки зростання функції: $x \in (-\infty; +\infty)$.
9. Проміжки спадання функції: немає [19].

Функція $y = arcctgx$

Функція, обернена до функції котангенса, називається арккотангенсом.

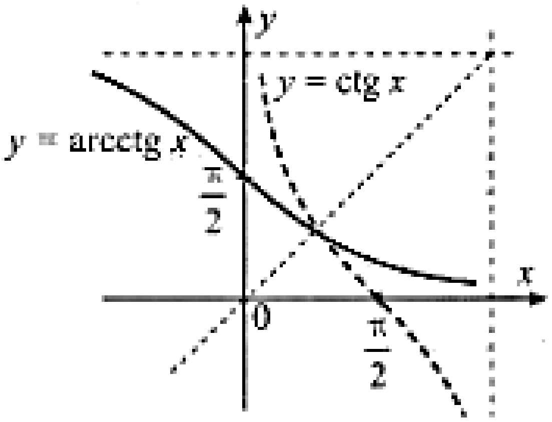

Рис.1.15

Властивості функції $y = arcctgx$:

1. Область визначення функції: $D(f)=R$.
2. Область значень функції: $E(f) = [0;\pi]$.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Функція неперіодична.
5. Нулі функції: немає.
6. Проміжки, на яких функція набуває додатних значень:

   $x \in [0;\pi]$.

7. Проміжки, на яких функція набуває від’ємних значень: немає.
8. Проміжки зростання функції: немає.
9. Проміжки спадання функції: $x \in R$ [19].

1.1.11. Побудова графіків тригонометричних функцій методом геометричних перетворень

Для побудови графіків функцій виду $y = f(x) + a, y = f(kx), y = f(kx \pm a), y = af(kx \pm b), y = |f(x)|, y = f(|x|)$ та ін. використовуємо геометричні перетворення графіків тригонометричних функцій $y = sinx, y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

1. Побудова графіка .

Щоб побудувати графік функції $y = f(x - a)$, потрібно графік функції $y = f(x)$ перемістити вправо на *a* одиниць по осі OX.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Алгоритм побудови:

1. Будуємо графік функції $y = sinx$.
2. Переміщуємо графік $y = sinx$ на $\frac{\pi}{6}$ вправо по осі OX.

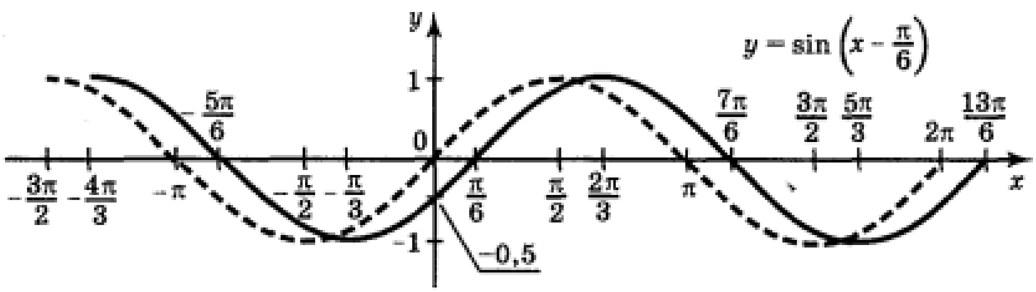

Рис.1.16

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Алгоритм побудови:

1. Будуємо графік функції $y = cosx$.
2. Переміщуємо графік $y = cosx$ на $\frac{\pi}{3}$ вліво по осі OX.

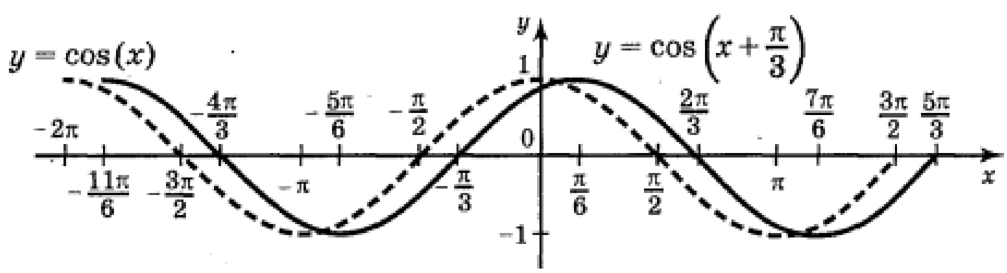

Рис.1.17

2. Побудова графіка .

Щоб побудувати графік функції $y = f(kx)$, потрібно графік функції $y = f(x)$ стиснути по осі ОХ у k разів, якщо $k > 1$ та розтягнути, якщо $0 < k < 1$.

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = \sin 2x$.

Алгоритм побудови:

1. Будуємо графік функції $y = sinx$.
2. Стиснемо графік $y = sinx$ по осі ОХ вдвічі.

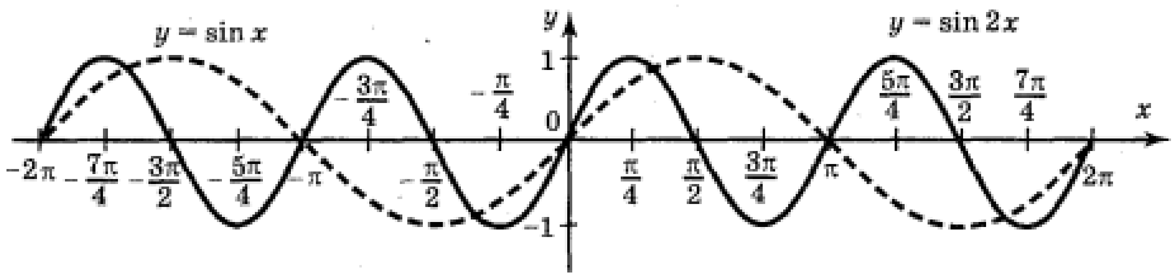

Рис.1.18

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = \dfrac{\cos x}{3}$.

Алгоритм побудови:

1. Будуємо графік функції $y = cosx$.
2. Розтягнемо графік $y = cosx$ вдвічі по осі ОХ.

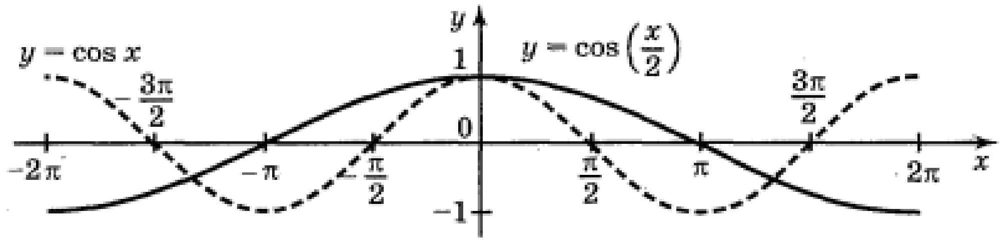

Рис.1.19

3. Побудова графіка .

Щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, потрібно графік функції $y = f(x)$ розтягнути по осі OY у k разів, якщо $k > 1$ та стиснути, якщо $0 < k < 1$.

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = 2\sin x$.

Алгоритм побудови:

1. Будуємо графік функції $y = sinx$.
2. Розтягнемо графік $y = sinx$ по осі OY вдвічі.

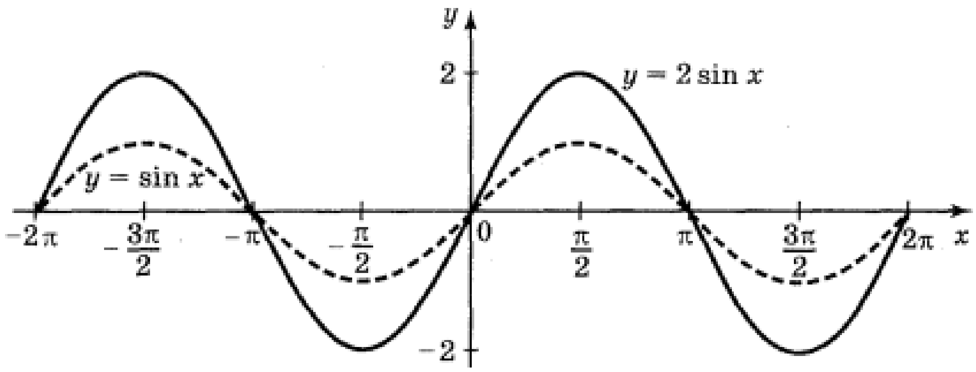

Рис.1.20

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}cosx$.

Алгоритм побудови:

1. Будуємо графік функції $y = cosx$.
2. Стиснемо графік $y = cosx$ вдвічі по осі OY.

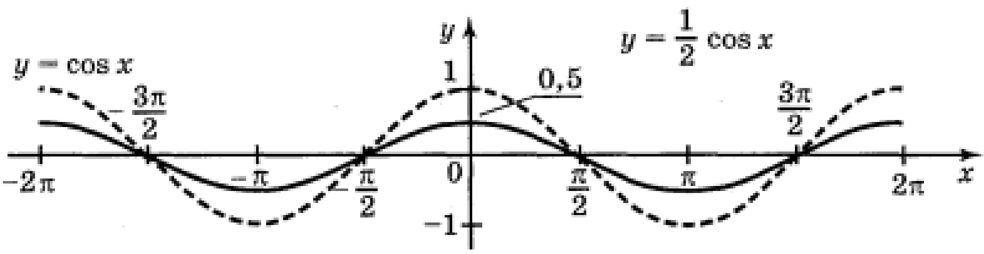

Рис.1.21

4. Побудова графіка .

Щоб побудувати графік функції, необхідно графік функції $y = f(x)$ симетрично відобразити відносно осі OX.

Приклад 7. Побудувати графік функції $y = \sin(-x)$.

Алгоритм побудови:

1. Будуємо графік функції $y = sinx$.
2. Симетрично відобразити графік $y = sinx$ відносно осі OY.

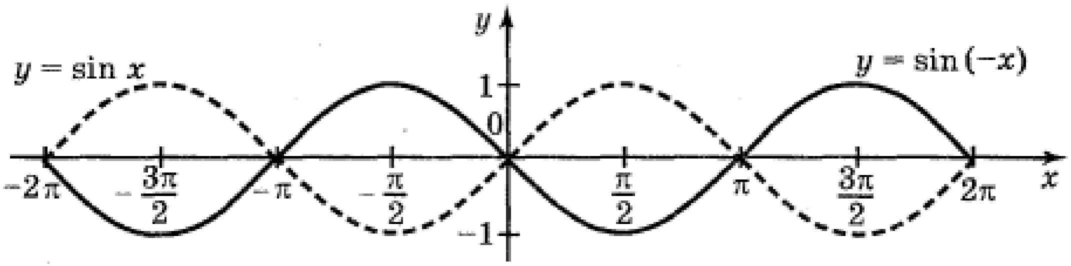

Рис.1.22

5. Побудова графіка .

Щоб побудувати графік функції, необхідно ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка нижче осі OX, симетрично відобразити відносно осі OX.

Приклад 8. Побудувати графік функції $y = |cos(x)|$.

Алгоритм побудови:

1. Будуємо графік функції $y = cosx$.
2. Симетрично відображаємо ту частину графіка $y = cosx$, де $y < 0$ відносно осі OX.

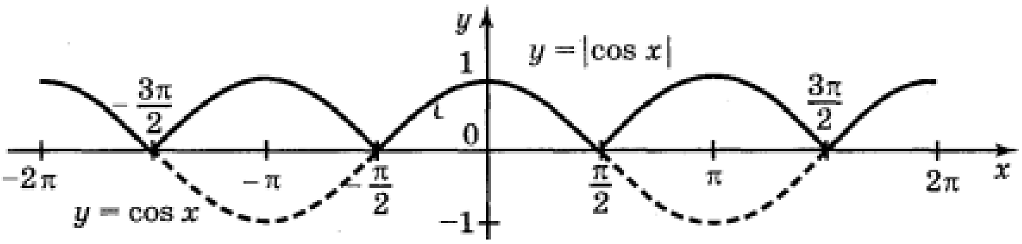

Рис.1.23

6. Побудова графіка .

Щоб побудувати графік функції $y = f(x) \pm a$, потрібно графік функції $y = f(x)$ перемістити по осі OY вгору на *a* одиниць для $y = f(x) + a$ і вниз на а одиниць для $y = f(x) - a$.

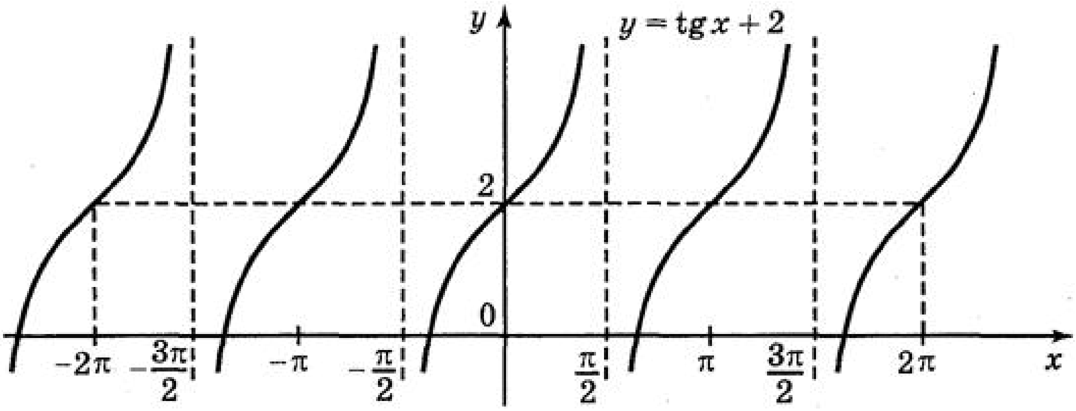

Рис.1.24

1.2. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

1.2.1. Теореми додавання

Виведемо формули косинуса суми і косинуса різниці. Розглянемо одиничне коло.

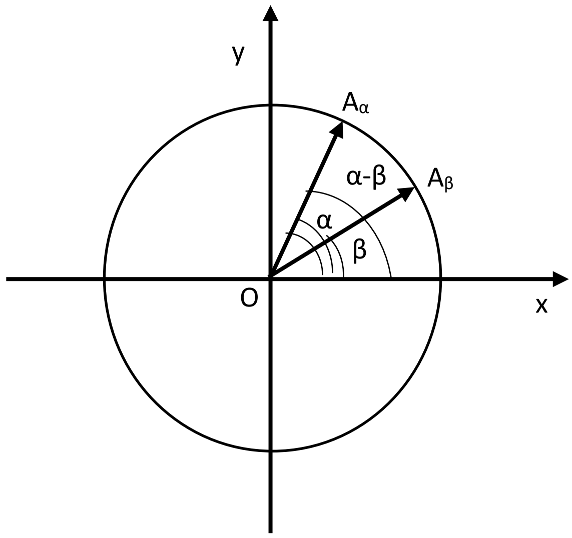

Рис.1.25

Вектори $\overrightarrow{OA_\alpha}$ і $\overrightarrow{OA_\beta}$ утворюють кути α і β з додатним напрямком осі абсцис. Кут між векторами $\overrightarrow{OA_\alpha}$ і $\overrightarrow{OA_\beta}$ дорівнює $\alpha-\beta$. Знайдемо скалярний

$$\left|\overrightarrow{OA_\alpha}\right| = \left|\overrightarrow{OA_\beta}\right| = 1.$$

добуток цих векторів: , оскільки Вектори $\overrightarrow{OA_\alpha}$ і $\overrightarrow{OA_\beta}$ мають координати $\overrightarrow{OA_\alpha}(cos\alpha; sin\alpha)$ і $\overrightarrow{OA_\beta}(cos\beta;\ sin\beta)$. Тоді $\overrightarrow{OA_\alpha}\cdot\overrightarrow{OA_\beta} = \ cos\alpha cos\beta +\ sin\alpha sin\beta$.

Таким чином, $\cos(\alpha-\beta) = \ cos\alpha cos\beta +\ sin\alpha sin\beta$.

Подамо суму $\alpha+\beta$ як $\alpha-(-\beta)$ і отримаємо:

$\cos\left(\alpha-\left(-\beta\right)\right) = cos\alpha\cos(-\beta) + sin\alpha\sin(-\beta) = \ cos\alpha cos\beta -\ sin\alpha sin\beta.$

Таким чином, $\cos(\alpha+\beta) = \ cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$.

Виведемо формули синуса суми і синуса різниці.

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)cos\beta + si$$

Таким чином, $\sin(\alpha+\beta) = \ sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta.$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\left(\alpha+(-\beta)\right) = sin\alpha\cos(-\beta) + cos\alpha\sin(-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$$

Таким чином, $\sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta.$

Виведемо формули для тангенса і котангенса суми і різниці.

$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta}.$ Поділимо чисельник і знаменник дробу на $cos\alpha cos\beta$, отримаємо:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{sin\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta} + \dfrac{cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta} - \dfrac{sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}.$$

Тангенс різниці

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{\dfrac{sin\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta} - \dfrac{cos\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha cos\beta}{cos\alpha cos\beta} + \dfrac{sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta}} = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}.$$

Отже, $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$.

$ctg(\alpha + \beta) = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на $\sin\alpha\sin\beta$ і отримаємо:

$$ctg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}.$$

Котангенс різниці

$$ctg(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{ctg\alpha ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}.$$

Отже, $ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\alpha \pm ctg\beta}$ [16].

1.2.2. Тригонометричні функції подвійного, потрійного і половинного аргументу

Для виведення формул подвійного аргументу скористаємось формулами додавання.

Якщо $\alpha = \beta$, то $\sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha$

Виведемо формулу тангенса подвійного кута $tg2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу $\cos^2\alpha$, отримаємо:

$$tg2\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Виведемо формулу котангенса подвійного кута. $ctg2\alpha = \frac{cos2\alpha}{sin2\alpha} = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{2\ sin\alpha cos\alpha}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу $sin^2\alpha$, отримаємо:

$$ctg2\alpha = \frac{\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} - \frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha}}{\frac{2\ sin\alpha cos\alpha}{sin^2\alpha}} = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}.$$

Для виведення формул потрійного аргументу скористаємось формулами додавання, подвійного аргументу і врахувавши, що $\beta = 2\alpha$, маємо:

$$\sin(\alpha + 2\alpha) = sin3\alpha = sin\alpha cos2\alpha + cos\alpha sin2\alpha = sin\alpha(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + cos\alpha 2\ sin$$

.

Отже, $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$.

$$\cos(\alpha + 2\alpha) = cos3\alpha = cos\alpha cos2\alpha - sin\alpha sin2\alpha = cos\alpha([cos]^2\ \alpha - [sin]^2$$

Отже, $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$.

Аналогічно доводимо формули потрійного кута для тангенса і котангенса. Таким чином, $tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$, $ctg3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha}$.

Для виведення формул половинного аргументу скористаємося формулами: $1 = cos^2\frac{\alpha}{2} + sin^2\frac{\alpha}{2}$ та $cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}$. Додамо ліві і праві частини цих рівностей: або $cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}}.$$

Знайшовши різницю тотожностей $1 = cos^2\frac{\alpha}{2} + sin^2\frac{\alpha}{2}$ та $cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}$ отримаємо: $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$ або $sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{2} \Rightarrow$ $\frac{\sin\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}$.

Поділивши тотожність $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$ на тотожність отримаємо $tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha} \Rightarrow tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}}$. Для тангенса половинного кута можна скористатися і іншими, більш зручними формулами:

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{sin\alpha}$ або $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\alpha}{1 + cos\alpha}$.

Поділимо тотожність на тотожність $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$, отримаємо: $ctg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\alpha}{1 - cos\alpha} \Rightarrow ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{1 - cos\alpha}}$ [5].

1.2.3. Формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій у добуток і навпаки

За теоремами додавання $\sin(\gamma + \varphi) = sin\gamma cos\varphi + cos\gamma sin\varphi$ і $\sin(\gamma - \varphi) = sin\gamma cos\varphi - cos\gamma sin\varphi$. Додамо ці рівності і отримаємо: $\sin(\gamma + \varphi) + \sin(\gamma - \varphi) = sin\gamma cos\varphi + cos\gamma sin\varphi + sin\gamma cos\varphi - cos\gamma sin\varphi = 2sin\gamma cos\varphi$.

Нехай $\gamma + \varphi = \alpha,\quad \gamma - \varphi = \beta$. Розв'яжемо систему цих двох рівнянь:

$$\begin{cases} \gamma + \varphi = \alpha \\ \gamma - \varphi = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}.$$

Врахувавши результати цієї системи, маємо:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta=\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{2}\cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

Віднявши рівності $\sin(\gamma+\varphi)= sin\gamma cos\varphi + cos\gamma sin\varphi$ і $\sin(\gamma-\varphi)= sin\gamma cos\varphi - cos\gamma sin\varphi$ і врахувавши $\begin{cases}\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \varphi=\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$, отримаємо:

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta=\frac{2\sin(\alpha-\beta)}{2}\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

За теоремами додавання $\cos(\gamma+\varphi)= cos\gamma cos\varphi - sin\gamma sin\varphi$ і $\cos(\gamma-\varphi)= cos\gamma cos\varphi + sin\gamma sin\varphi$. Додавши ці рівності, маємо:

$\cos(\gamma+\varphi)+\cos(\gamma-\varphi)= cos\gamma cos\varphi - sin\gamma sin\varphi + cos\gamma cos\varphi + sin\gamma sin\varphi = 2$

. Врахувавши, що $\begin{cases}\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \varphi=\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$, маємо:

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta=\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{2}\cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

Віднявши рівності $\cos(\gamma+\varphi)= cos\gamma cos\varphi - sin\gamma sin\varphi$ та $\cos(\gamma-\varphi)= cos\gamma cos\varphi + sin\gamma sin\varphi$ і врахувавши, що $\begin{cases}\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \varphi=\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$, маємо

$\cos(\gamma+\varphi)-\cos(\gamma-\varphi)= cos\gamma cos\varphi - sin\gamma sin\varphi - (cos\gamma cos\varphi + sin\gamma sin\varphi) =$

.

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta=-\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{2}\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Таким же чином і доводимо рівності $tg\alpha \pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{cos\alpha cos\beta}$ та $ctg\alpha \pm ctg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{sin\alpha sin\beta}$.

Формули $\sin(\gamma+\varphi)+\sin(\gamma-\varphi)=2sin\gamma cos\varphi$, $\cos(\gamma+\varphi)+\cos(\gamma-\varphi)=2cos\gamma cos\varphi$, $\cos(\gamma+\varphi)-\cos(\gamma-\varphi)=-2sin\gamma sin\varphi$ можна прочитати зліва направо і навпаки. Якщо ці рівності поділити на 2 і переписати справа наліво, то отримаємо:

$$cos\alpha cos\beta=\frac{1}{2(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))};$$

$$sin\alpha sin\beta=\frac{1}{2(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))};$$

$$sin\alpha cos\beta=\frac{1}{2(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))}$$ [16].

1.2.4. Формули перетворення синуса і косинуса аргументу через тангенс половинного аргументу (універсальна заміна)

$$sin\alpha=\frac{\frac{2\sin\alpha}{2}\cos\alpha}{2}=\frac{\frac{\frac{2\sin\alpha}{2}\cos\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{\frac{\frac{2\sin\alpha}{2}\cos\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже, $sin\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

$cos\alpha=$ 【cos】↑2 $\alpha/2-$ 【sin】↑2 $\alpha/2=($ 【cos】↑2 $\alpha/2-$ 【sin】↑2 $\alpha/2)/($ 【cos】↑2 $\alpha/2+$

Отже, $cos\alpha=\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

Якщо поділити рівність $sin\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ на рівність $cos\alpha=\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, отримаємо:

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Поділивши $cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$ на $sin\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$, або врахувавши, що $tg\alpha ctg\alpha = 1$ отримаємо: $ctg\alpha = \dfrac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$ [16].

1.2.5. Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

$\sin(arcsinx) = x,\quad \cos(arccosx) = x, x \in [0;\pi];$

$tg(arctgx) = x,\quad ctg(arcctgx) = x, x \in R.$

$arcsin(sinx) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\quad arccos(cosx) = x, x \in [0;\pi];$

$arctg(tgx) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\quad arcctg(ctgx) = x, x \in [0;\pi].$

$arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}, x \in [-1;1],\quad arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}, x \in R.$

$\arcsin(-x) = -arcsinx,\quad arccos(-x) = \pi - arccosx,\quad x \in [-1;1];$

$arctg(-x) = -arctgx,\quad arcctg(-x) = \pi - arcctgx,\quad x \in R.$

$$arcsinx = arccos\sqrt{1 - x^2} = arctg\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = arcctg\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, x \in (0;1).$$

$$arccosx = arcsin\sqrt{1 - x^2} = arctg\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = arcctg\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (0;1).$$

$$\frac{arctgx = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 + x^2}} = \arccos 1}{\sqrt{1 + x^2}} = arcctg\frac{1}{x},\quad x \in (0;+\infty).$$

$$\frac{arcctgx = \dfrac{\arcsin 1}{\sqrt{1 + x^2}} = \arccos x}{\sqrt{1 + x^2}} = arctg\frac{1}{x},\quad x \in (0;+\infty).$$

$$sin(arccosx) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in [-1; 1];$$

$$sin(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad cos(arcctgx) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad x \in R.$$

$$cos(arcsinx) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in [-1; 1];$$

$$cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad cos(arcctgx) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad x \in R.$$

$$tg(arcsinx) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1); \; tg(arccosx) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x},$$

$$tg(arcctgx) = ctg(arctgx) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

$$ctg(arccosx) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1);$$

$$ctg(arcsinx) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, x \in [-1; 0) \cup (0; 1)$$ [37].

1.3. Найпростіші тригонометричні рівняння та рівняння, що зводяться до алгебраїчних

До найпростіших тригонометричних рівнянь відносяться рівняння: $sinx = a$, $cosx = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$

Таблиця розв’язків найпростіших рівнянь [7]

Таблиця 3

	$sinx = a$	$cosx = a$	$tgx = a$	$ctgx = a$
	$x = (-1)^n arcsina + \pi n$ $n \in Z$	$x = \pm arccosa + 2\pi n$ $n \in Z$	$x = arctga + \pi n$ $n \in Z$	$x = arcctga + \pi n$ $n \in Z$
$a = 0$	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x = \pi n$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$,	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$

			$n \in Z$	$n \in Z$
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$

Тригонометричні рівняння, що зводяться до алгебраїчних

Рівняння виду $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0, a\cos^2 x + b\sin x + c = 0,$ $a\sin^2 x + b\cos x + c = 0,$ aco та інші можна звести до алгебраїчних, вводячи заміну.

При розв'язуванні рівнянь даного виду, спочатку необхідно звести рівняння до однієї функції використовуючи формули: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Таблиця тригонометричних рівнянь, що зводяться до алгебраїчних та методів їх розв'язування

Таблиця 4

$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	Введемо заміну $\sin x = t, -1 \le t \le 1$ Тоді рівняння зведеться до квадратного $at^2 + bt + c = 0$. Знайшовши корені квадратного рівняння і врахувавши, що $-1 \le t \le 1$, маємо $\left[\begin{array}{l} \sin x = t_1 \\ \sin x = t_2 \end{array}\right.$, тоді $\left[\begin{array}{l} x_1 = (-1)^n \arcsin t_1 + \pi n \\ x_2 = (-1)^n \arcsin t_2 + \pi n \end{array}\right., n \in Z$.
$a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$	Дане рівняння перетвориться на попереднє замінивши $\cos^2 x = 1 - \sin^2\alpha$, тоді $a(1 - \sin^2\alpha) + b\sin x + c = 0$, $a - a\sin^2\alpha + b\sin x + c = 0,$

	$a\sin^2\alpha - b\sin x - (a+c) = 0$.
$a\sin^2 x + b\cos x + c = 0$	Рівняння перетвориться на квадратне замінивши $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, тоді $a(1 - \cos^2\alpha) + b\cos x + c = 0,$ $a - a\cos^2\alpha + b\cos x + c = 0,$ $a\cos^2\alpha - b\cos x - (a+c) = 0$ Вводимо заміну $\cos x = t,$ $-1 \le t \le 1$ $at^2 - bt - (a+c) = 0$, Знайшовши корені квадратного рівняння і врахувавши, що $-1 \le t \le 1$, маємо $\left[\begin{array}{l}\cos x = t_1\\ \cos x = t_2\end{array}\right.$, тоді $\left[\begin{array}{l}x_1 = \pm\arccos t_1 + 2\pi n\\ x_2 = \pm\arccos t_2 + 2\pi n\end{array}\right.$, $n \in Z$.
$a\cos 2x + b\sin x + c = 0$ або $a\cos 2x + b\cos x + c = 0$	Скориставшись формулою $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ зведемо дані рівняння до однієї функції, які перетворяться до попередніх рівнянь
$a\,tgx + b\,ctgx = 0$	Скористаємося формулою $tgx\,ctgx = 1$ і перетворимо рівняння до виду $a\,tgx + \frac{b}{tgx} = 0$. Введемо заміну $tgx = t$ і отримаємо дробово-раціональне рівняння: $at + \frac{b}{t} = 0$, розв'язавши його

	відносно t , маємо: $\left[\begin{array}{l} x_1 = arctgt_1 + \pi n \\ x_2 = arctgt_1 + \pi n \end{array}\right., n \in Z.$

Висновки до першого розділу

Тригонометрія займає окреме місце в програмі з математики. Вона є обов’язковою у завданнях як з алгебри, так і з геометрії зовнішнього незалежного оцінювання. Знання фактичного теоретичного матеріалу є обов’язковим задля ефективного розв’язування завдань різної складності. Тому в першому розділі нами представленні теоретичні основи вивчення тригонометричних функцій.

Знання одиничного тригонометричного кола, дозволяє знайти знаки тригонометричних функцій, їх змін, при зміні кута, розуміння формул зведення, формул знаходження коренів рівнянь та розв’язків нерівностей (профільний рівень). Крім того знання одиничного кола дає можливість вивести основні тригонометричні тотожності, на основі яких доводяться і інші тотожності.

Знання теоретичних основ дозволить розв’язувати задачі практичного змісту представлених у другому розділі.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

2.1. Методичні особливості вивчення тригонометричних функцій

Вивчення тригонометричних функцій починається з 8 класу курсу геометрії при вивченні прямокутних трикутників, доведення теореми Піфагора. Далі продовжується у 9 класі курсу геометрії при вивченні теореми косинусів та синусів та застосовується при знаходженні площ трикутників та чотирикутників. Крім того в 9 класі вивчаються основна тригонометрична

$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$

тотожність та деякі формули зведення $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha,$ $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$, що використовуються при розв'язуванні трикутників і чотирикутників.

У 10 класі на вивчення тригонометричних функцій і їх властивостей відводиться окрема тема «Тригонометричні функції». За програмою рівня стандарту на вивчення цієї теми відводиться 18 годин, тоді як у профільному рівні – відводиться 34 години. Суттєва відмінність в програмах є те, що у рівні стандарту в тему «Тригонометричні функції» входять найпростіші тригонометричні нерівності та нерівності, які зводяться до алгебраїчних. Тоді як у профільному рівні на вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей відводиться окрема тема «Тригонометричні рівняння і нерівності» на яку відводиться 32 години. Хочемо зазначити, що у рівні стандарту тригонометричні нерівності не вивчаються і функція котангенса також.

При вивченні синуса, косинуса, тангенса кута та радіанного вимірювання кутів учням пропонуються завдання на знаходження кута у градусній і радіанній мірі та знаходження довжини дуги кола з використанням формул: $l = \frac{\pi r}{180°} \cdot \alpha°$, $a = \frac{\pi \alpha°}{180°}$, $\alpha° = \frac{\pi a}{180°}$.

Наприклад.

№ 74 (Мерзляк, 2018). Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює: 1) $18°; 2)48°;$
3) $75°; 4)240°$.

№ 74 (Мерзляк, 2018). Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

1) $\pi/20;\ 2)4\pi/5;\ 3)1\ 2\pi/3;\ 4)\ 4\pi.$

№ 75 (Мерзляк, 2018). Радіус кола дорівнює 3 см. Чому дорівнює довжина дуги кола, радіанна міра якої становить: 1) $\frac{\pi}{24}$; 2) $\frac{17\pi}{12}$; 3) 6?

№ 78 (Мерзляк, 2018). Кути трикутника відносяться як 3:5:7. Знайдіть радіанні міри його кутів.

При вивченні тригонометричного одиничного кола учні вдосконалюють свої знання на вправах, що стосуються знаходженням кута на одиничному колі, чверті, в якій знаходиться кут та координат точок.

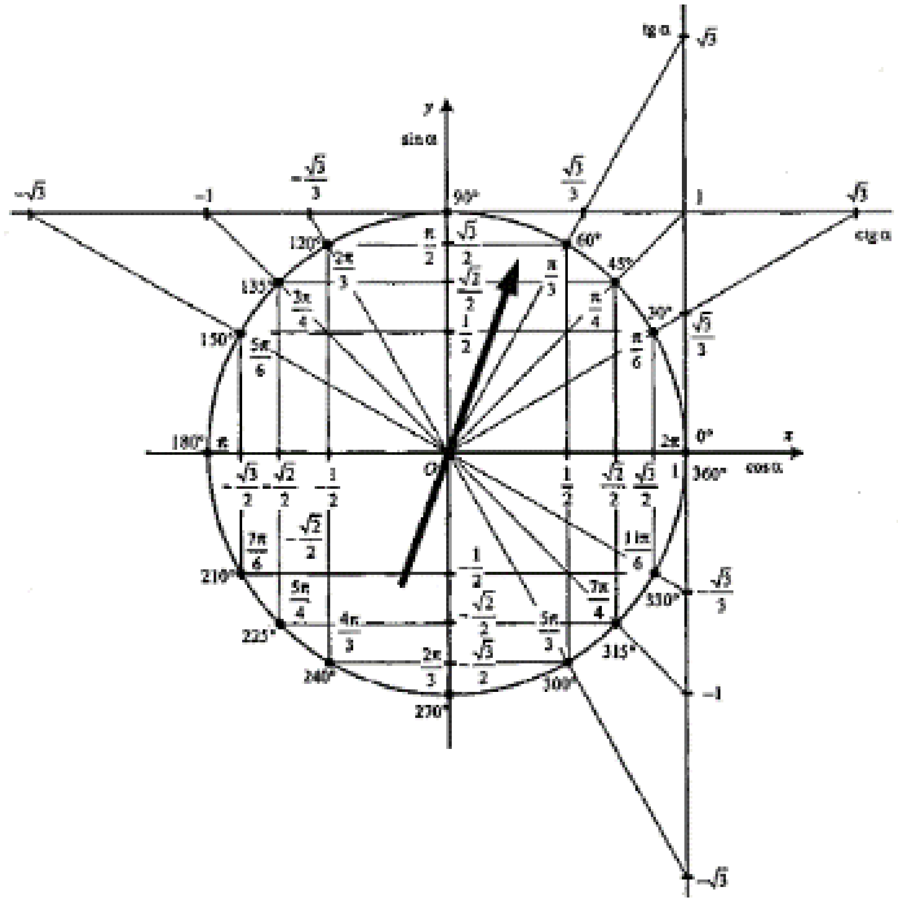

Рис.2.1

Наприклад.

№77 (Мерзляк, 2018). У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1;0)$ на кут:

1) $283°$; 3) $420°$; 5) $\frac{\pi}{9}$; 7) $-\frac{4\pi}{3}$; 9) 3;

2) $-215°$; 4) $-53°$; 6) $\frac{11\pi}{18}$; 8) $-2{,}1\pi$; 10) -4?

№79 (Мерзляк, 2018). Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1;0)$,

щоб отримати точку: 1) $P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $P_0\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

№80 (Мерзляк, 2018). Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1;0)$ на кути:

1) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$;

2) 4) $\frac{\pi k}{6}, k \in Z$.

Після вивчення тригонометричних функцій числового аргументу учні вивчають основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу та формули зведення, користуючись одиничним колом. При цьому учні знаходять знаки і значення виразів та знаходять найбільші і найменші значення виразів.

Наприклад.

№156 (Мерзляк, 2018). Знайдіть значення виразу:

1) 3) $tg45°cos30°ctg60°$;

2) $ctg\frac{\pi}{2}+\frac{3\cos\pi}{2}-\frac{4\sin 3\pi}{2}$; 4) $\frac{\left(\frac{\sin\pi}{4}+\frac{\cos 3\pi}{2}\right)ctg\frac{\pi}{6}}{tg\frac{\pi}{6}-tg2\pi}$;

5) $\sqrt{\left(2sin45°+1\right)^2}-\sqrt{\left(1-2cos45°\right)^2}$.

№157 (Мерзляк, 2018). Знайдіть значення виразу $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ при:

1) $\alpha=45°, \beta=15°$; 2) $\alpha=\frac{\pi}{3}, \beta=\frac{\pi}{6}$.

№159 (Мерзляк, 2018). Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $1+3sin\alpha$; 2) $cos^2\alpha$; 3) $\frac{\cos(1-sin\alpha)}{cos\alpha}$.

№160 (Мерзляк, 2018). При яких значеннях параметра *а* можлива рівність:

1) $sinx=a+6$; 2) $cosx=a^2-9a+19$?

Вивчення основних тригонометричних співвідношень на рівні стандарту обмежене основними тригонометричними тотожностями, формулами подвоєного кута, формулами додавання та пониження степеня.

Побудови графіків і дослідження функцій може проводитися двома способами [12]:

1. Перш ніж вивчити властивості тригонометричних функцій, спочатку доводять їх періодичність і, Використовуючи означенням та

властивість періодичності тригонометричних функцій, будують їх графіки. За допомогою графіків виводять і інші властивості.

2. Побудова графіку відбувається після дослідження функції, а наочні уявлення про властивості функції учні отримують, аналізуючи поведінку функцій на одиничному колі.

Найдоцільніше застосовувати другий підхід, оскільки при цьому підході, по-перше, всі властивості тригонометричних функцій ілюструються на обох моделях (на числовому колі і графіку), а, по-друге, це є доброю підготовчою роботою для подальшого навчання дослідженню функцій і побудови графіків за допомогою похідної. Попри те, що аналізуючи поведінку функції на числовому колі, ми лише ілюструємо деяку властивість, не варто забувати, що іноді доведення за допомогою кола є єдиним доступним для учнів способом обґрунтування деяких фактів. Хоча деякі випадки вимагають чіткішого обґрунтування сформульованих тверджень [12].

Після знаходження області значень доцільно розглянути властивість обмеженості функцій косинус і синус та провести взаємозв'язок між цими властивостями не лише для тригонометричних, але й для інших класів функцій. При розгляді властивості монотонності тригонометричних функцій у більшості діючих підручників не наводиться чіткого доведення зростання функцій синус і косинус на проміжках $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $[-\pi;0]$ відповідно, а обґрунтування цих фактів проводиться з опорою на числове коло: при русі точки по четвертій і першій чвертям кола у додатному напрямку (від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$) її ордината поступово збільшується (від -1 до 1), це означає, що функція синус є зростаючою на цьому проміжку.

На цьому етапі учні будують графіки тригонометричних функцій методом геометричних перетворень.

Після того, як учні достатньо добре навчилися оперувати властивостями тригонометричних функцій, можна переходити до розв'язування тригонометричних рівнянь і тригонометричних перетворень.

При вивченні найпростіших тригонометричних рівнянь учні знайомляться з оберненими тригонометричними функціями. Слід відмітити те, що не слід формально запам'ятовувати розв'язки рівнянь, коли синус чи косинус деякого кута дорівнює 0, -1, 1, а усвідомити їх використовуючи одиничне коло або графіки функцій.

Як зазначалося вище, у темі «Тригонометричні функції», при вивченні на рівні стандарту, вивчаються найпростіші тригонометричні рівняння та рівняння, що зводяться до алгебраїчних. При розв'язуванні тригонометричних рівнянь слід наголосити на області значень тригонометричних функцій $y = cosx, y = sinx: E(f) = [-1; 1]$.

2.2. Компетентність та роль прикладних задач у формуванні ключових компетентностей

Щоб знайти своє місце в житті, бути успішним, активно засвоювати життєві і соціальні ролі, сучасний випускник має володіти такими якостями і вміннями: бути гнучким і мобільним, швидко адаптуватися до зміни життєвих ситуацій, використовувати знання для розв'язання життєвих проблем, планувати стратегію власного життя; бути комунікабельним [33].

Тому важливою й актуальною проблемою сучасної школи має бути формування в учнів життєвих або ключових компетентностей.

У Державному стандарті поняття «ключова компетентність» вживається в такому значенні: «ключова компетентність — спеціально структурований комплекс характеристик (якостей) особистостей, що дає можливість їй ефективно діяти в різних сферах життєдіяльності і належить до загальногалузевого змісту освітніх стандартів» [10]. Компетентність — це оволодіння людиною відповідною компетенцією, що містить її особистісне ставлення до предметної діяльності. Освітня компетенція — це певний рівень розвитку особистості учня. Він пов'язаний, перш за все, з якісним опануванням змісту освіти. Але компетенція не зводиться лише до сукупності знань та навичок учнів. Таким чином, компетенція — це здатність розв'язувати життєві завдання, розв'язувати проблеми, здатність діяти та виконувати поставлені задачі.

Саме компетентнісний підхід сприяє формуванню ключових і предметних компетентностей. Найбільш ефективними засобами, які сприяють формуванню ключових компетентностей, є сучасні педагогічні інноваційні технології. Сприятливим середовищем для реалізації цього завдання є навчально-виховний процес, зокрема уроки математики [34].

Математика як шкільний предмет має достатній потенціал для формування та розвитку тих якостей, які необхідні людині для того, щоб бути успішною в сучасному житті.

Головне завдання вчителя математики — розвивати математичні здібності і навички учнів, підвищувати престиж знань, формувати не тільки математичні, але й ключові компетентності, тобто формувати вміння використовувати набуті в процесі навчання знання в повсякденному житті [34].

Однією з ключових компетентностей є математична компетентність.

Для формування математичних компетентностей потрібні: здатність творчо мислити, послідовно міркувати та презентувати свої ідеї; вміти працювати в команді (визначати пріоритети, планувати результати і нести відповідальність за їх реалізацію); ефективно застосовувати знання в реальному житті [34].

Математична компетентність передбачає здатність до застосування та усвідомлення ролі математичних знань та методів для розв'язання широкого кола проблем у повсякденному житті; здатність до математичного моделювання процесів та ситуацій [33].

За роки навчання в школі в школярів має сформуватися відповідна система компетентностей: навчальна, здоров'язберігаюча, соціальна, загальнокультурна, компетентність щодо інформаційних і комунікаційних технологій, громадянська, підприємницька [34].

Аналіз цих програм та врахування загальних принципів реалізації компетентнісного підходу до навчання дозволив виділити наступні предметно-галузеві математичні компетентності учня. Процедурна компетентність – володіння методами розв’язування типових математичних задач. Конструктивно-графічна компетентність – здатність будувати математичні моделі практичних ситуацій, використовуючи аналітичні або графічні об’єкти. Логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень. Дослідницька компетентність – володіння передбачуваними програмою та Державним стандартом базової і повної загальної середньої освіти математичними методами дослідження практичних задач [2].

Учитель математики повинен знайти шлях до особистості учнів через звернення до їх життєвого досвіду, через задачі прикладного змісту, використання історичного матеріалу, що викликає інтерес учнів до предмета, формує в них певні компетентності. Наприклад, розв’язуючи задачі на місцевому матеріалі (історичному, архітектурному тощо), формуємо ключові загальнокультурну, громадянську компетентності [33].

Неможливо недооцінювати роль прикладних задач курсу тригонометрії на уроках математики, адже при розв’язуванні таких задач в повній мірі реалізовується компетентнісний підхід.

Одним із ефективних способів формування ключових компетентностей в цілому є впровадження задач практичного і прикладного змісту.

В Г. Болтянський писав, що «задачі прикладного характеру мають у загальноосвітній школі важливе значення перш за все для виховання в учнів інтересу до математики. На прикладі добре складених задач прикладного змісту учні будуть переконуватись у значенні математики для різноманітних сфер людської діяльності, в її користі і необхідності для практичної роботи, побачать широту можливих застосувань математики, зрозуміють її роль в сучасній культурі» [34].

Слід відмітити, що прикладні задачі слід розв'язувати на уроках засвоєння і узагальнення та систематизації знань.

2.3. Формування ключових компетентностей при розв'язуванні завдань з теми «Тригонометричні функції»

Змістова лінія «Функції» широко впроваджена в курс алгебри, знання і вміння якої широко використовується в різних галузях. Тригонометричні функції вивчаються у 10 класі. Компетентнісний підхід має широку реалізацію у державному стандарті базової і повної середньої освіти.

Вимоги до програмних результатів навчання при вивченні тригонометричних функцій визначено на основі компетентнісного підходу.

Задача 1. Плануючи графік польоту, пілоту потрібно розрахувати швидкість, врахувавши швидкість напрямок руху вітру. Швидкість в км/год можна виразити формулою як $v = \frac{770 \sin 135^\circ}{\sin\theta}$. Без використання калькулятора знайти значення швидкості якщо $tg\theta = 7$, а $0^\circ < \theta < 180^\circ$.

Розв'язання. Для заходження швидкості знайдемо $\sin\theta$. Для цього використаємо формули: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ та $tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$. Врахувавши, що $tg\theta = 7$, маємо: Тоді $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$. $\sin\theta > 0$ адже $0^\circ < \theta < 180^\circ$.

Отже, $\sin\theta = \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

Таким чином,

$$v = \frac{770 \sin 135^\circ}{\sin\theta} = \frac{770 \sin[(90^\circ + 45^\circ)]}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \frac{770 \cos 45^\circ}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \frac{770 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = 550 \text{ (км).}$$

Задача 2. Знайти висоту гори, якщо спостерігач, що знаходиться на відстані 150 м від підніжжя гори, бачить її вершину під кутом 30^0, а кут нахилу гори (з боку спостерігача) 75^0. (Висотою спостерігача знехтувати)

Задача 3. В коливному контурі заряд заданий формулою $q = 5e^{-10t}\cos\left(60t + \frac{1}{4}sin60t\right)$, де t - час в секундах після ввімкнення схеми. Знайти початковий заряд.

Розв’язання. Знайдемо заряд q , при $t = 0$:

$$q = 5e^{-10\cdot 0}\cos\left(60\cdot 0 + \frac{1}{4}sin60\cdot 0\right) = 5\cdot\cos 0 = 5 \text{ (Кл)}.$$

Задача 4. Вивчаючи вид комахи, еколог оцінює популяцію колонії протягом восьми тижнів. Якщо t – це кількість тижнів після початкової оцінки, то чисельність комах в тисячах може бути описана формулою

$P(t) = 5 + 2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, де $0 \le t \le 8$.

1. Яка була початкова чисельність виду.
2. Яке було найменше і найбільше число популяції.
3. Протягом якого тижня число популяції комах перевищувало 6000 особин.

Розв’язання.

1) $P(0) = 5 + 2\sin\left(\frac{\pi\cdot 0}{3}\right) = 5 \text{ (тис. ос.)}$;

2) Оцінимо значення виразу $5 + 2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$:

$-1 < \sin(\pi t/3) < 1 \qquad |\times 2$

$-2 < 2\sin(\pi t/3) < 2 \qquad |+5$

$3 < 5 + 2\sin < 7.$

Отже, $P_{min} = 3 \text{ (тис. ос.)}$, $P_{max} = 7 \text{ (тис. ос.)}$.

3) $5 + 2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) > 6$

$\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) > \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < \frac{\pi t}{3} < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

$\pi + 6\pi n < \pi t < 2\pi + 6\pi n$

$1 + 6n < t < 2 + 6n$, якщо $n = 1$, то $7 < t < 8$.

Отже, протягом восьмого тижня число популяції комах перевищувало 6000 особин.

Задача 6. Висота (в метрах) припливів реєструється на одному з пляжів Чорного моря протягом t годин. Виявлено, що цю висоту можна виразити формулою $y = 1{,}3 + 1{,}2cos2t$.

1. Намалюйте графік y для $0 \leq t \leq \pi$.
2. Знайти висоту припливу через 4 години після початку спостереження.

Розв'язання.

1) Для побудови графіка функції $y = 1{,}3 + 1{,}2cos2t$ скористаємося геометричними перетвореннями: . Таким чином, побудуємо графік, скориставшись програмою GRAN 1.

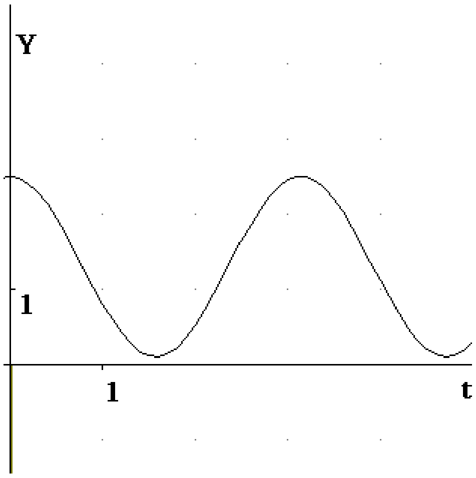

Рис.2.2

2) Підставимо $t = 4$ у функцію $y = 1{,}3 + 1{,}2cos2t$, отримаємо: $y = 1{,}3 + 1{,}2cos8.$

Скористаємося калькулятором у програмі GRAN 1.

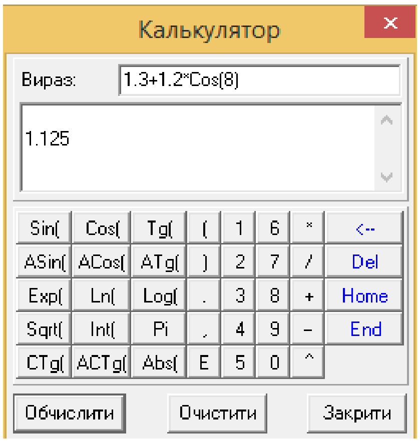

Рис.2.3

Таким чином, $y = 1{,}3 + 1{,}2cos8 \approx 1{,}125$ (м).

Задача 8. Замість букв позначте кути (в градусах і радіанах).

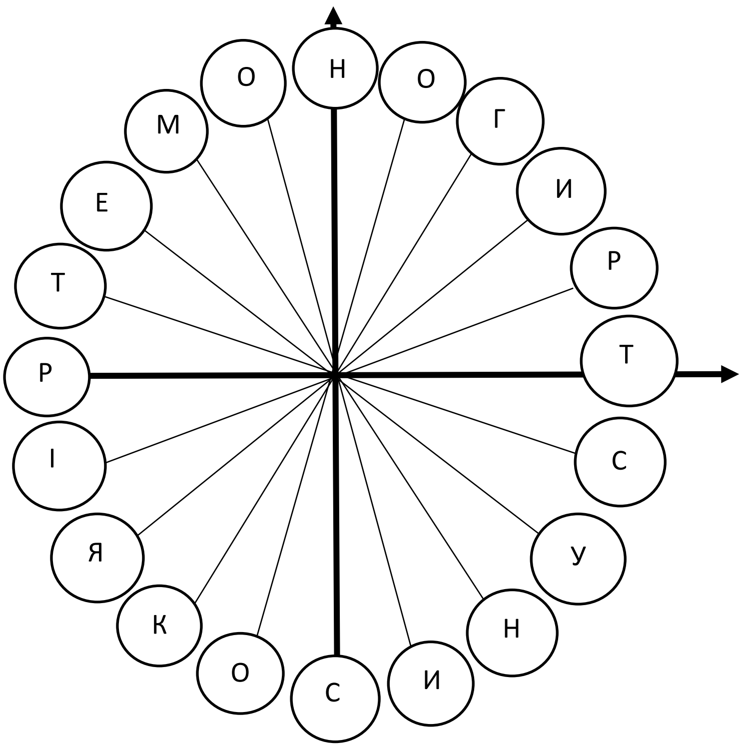

Рис.2.4

Розв’язання. Знайдемо скільки градусів припаде на один кут: $\frac{360°}{20} = 18°$ або Таким чином, «Т» - $0°, 0, 360°, 2\pi$; «Р» - $180°, \pi$;

«Р» - $18°, \frac{\pi}{10}$; «І» - $198°, \frac{11\pi}{10}$;

«И» - $36°, \frac{\pi}{5}$; «Я» -

«Г» - $54°, \frac{3\pi}{10}$; «К» - $234°, \frac{13\pi}{10}$;

«О» - $72°, \frac{2\pi}{5}$; «О» -

«Н» - $90°, \frac{\pi}{2}$; «С» - $270°, \frac{3\pi}{2}$;

«О» - $108°, \frac{3\pi}{5}$; «И» - $288°, \frac{8\pi}{5}$;

«М» - «Н» -

«Е» - «У» - $324°, \frac{9\pi}{5}$;

«Т» - «С» - $342°, \frac{19\pi}{10}$.

Задача 9. Траєкторія руху автобуса описується функцією $y = tgx,\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, а траєкторія велосипеда *y*=3. Чи перетнуться ці траєкторії?

Розв'язання. Так як графік функції $y = tgx$ монотонно зростаюча і на проміжку $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ не періодична, то ці траєкторії перетнуться в одній точці.

Задача 10. Функція $y = 2sinx - 1$, описує зміну сили струму в обмотках котушки. Яких значень може набувати сила струму?

Розв'язання. Поступово оцінимо вираз .

$-1 < \sin x < 1 \quad | \times 2$

$-2 < 2\sin x < 2 \quad | - 1$

$-3 < 2\sin x - 1 < 1.$

Отже, сила струму може набувати значень $-3 < y < 1$.

Задача 11. Астроном спостерігає зорі з двох телескопів. Перший телескоп він нахилив під кутом $\alpha = arctg 1$, а другий – під кутом $\frac{\beta = 2{,}1 \arccos \sqrt{3}}{2}$ до поверхні стола. Який з кутів більший?

Розв’язання. Якщо $\alpha = arctg 1$ та $\frac{\beta = 2{,}1 \arccos \sqrt{3}}{2}$, то $tg\alpha = 1$ та $cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тоді $\alpha = 45°$ і $\varphi = 30°$, $\beta = 2{,}1 \cdot 30° = 60°18'$.

Отже, $\beta > \alpha$.

Розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Задача 1. Траєкторію руху пароплава описує функція $y = 2cosx + 1$. В якій точці *x* функція *y* дорівнюватиме нулю?

Розв’язання. , , $cosx = -\frac{1}{2}$,

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z,\ \ x = \pm\, arccos -\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Отже, $x = \pm\, arccos -\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Задача 2. Літак піднявся в небо під деяким кутом. Якби цей кут збільшили в 2 раза, а потім зменшили на $\frac{\pi}{6}$, то косинус одержаного кута

дорівнював би . Знайдіть кут, під яким літак піднявся в небо [32].

Розв’язання.

Нехай *x* – кут, під яким літак піднявся в небо. Тоді за умовою задачі:

$\cos(2x - \pi/6) = 1/2$

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right., \ n \in Z$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right., \ n \in Z$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \pi n \end{array}\right., \ n \in Z$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{12} + \pi n \text{ – не задовольняє умову} \end{array}\right., \ n \in Z$$

Таким чином, кут під яким злетів літак дорівнює 45^0.

Задача 3. Пішохід пройшов певний шлях лісом. Якщо цей шлях зобразити графічно, то дістанемо графік функції $y = \sin\left(\frac{4x}{7} + \frac{\pi}{2}\right)$. Дорогу, яка проходить через ліс, можна також зобразити графіком функції y = – 1. Знайдіть точки, в яких пішохід переходить дорогу [32].

Розв’язання.

$$\sin\left(\frac{4x}{7} + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Отже, $x = -\frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi n}{2}, n \in Z$.

Задача 4. Краплі дощу падають на поверхню озера під деяким кутом. Якщо цей кут збільшити на $\frac{\pi}{6}$, а потім зменшити у 2 разів, то 4 косинуси одержаного кута дорівнюватимуть . Знайдіть кут, під яким краплі дощу падають на поверхню озера [32].

Розв’язання.

Нехай x – кут, під яким краплі дощу падають на поверхню столу. Тоді за умовою

, $n \in Z$

, $n \in Z$

$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{4}$, $n \in Z$

$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $n \in Z$

$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in Z$

$\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $n \in Z$

Знайдемо значення гострого кута

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $n \in Z$

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $n \in Z$

$x=\frac{\pi}{6}+4\pi n$, $n \in Z$

При $n=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=30°$.

Задача 5. Обчисліть площу прямокутного трикутника, якщо градусна міра гострого кута описується рівнянням , а прилеглий катет дорівнює 3 см.

Розв'язання. Знайдемо гострий кут трикутника з рівняння

.

$$sin2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$

Так як нас цікавить лише гострий кут, то $x = \frac{\pi}{6}$, $x = 30°$.

Таким чином, інший катет знайдемо як $3 \cdot tg30° = \sqrt{3}$ (см). Отже, площу прямокутника знайдемо як пів добуток катетів:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} (см^2).$$

Висновки до другого розділу

Участь України у Міжнародних дослідженнях якості освіти PISA, яку координує Організація економічного розвитку та співробітництва, довела, що українські учні не можуть застосовувати отримані знання в реальних життєвих ситуаціях, тобто навчання математики націлене лише на фактичне засвоювання формул та теорем. Але ж математика – це предмет, призначений формувати світоглядні компетентності. Таким чином, вивчення математики – це інструмент вивчення навколишнього світу, основа науково-технічного прогресу. І саме вивчення математики має бути тісно пов’язане з реальним життям.

В даному розділі у першому пункті представлені методичні особливості вивчення тригонометричних функцій та представлені завдання з діючих дидактичних матеріалів, що свідчать про формування лише предметної компетентності.

В другому пункті проаналізовано роль прикладних задач як засіб формування ключових компетентностей

В третьому пункті нами представленні завдання, які формують не лише предметну компетентність, а й здатність спілкуватися державною мовою, математичну компетентність, основні компетентності у природничих науках і технологіях, інформаційно-цифрову компетентність, ініціативність і підприємливість, соціальну та громадянську компетентності, екологічну грамотність та здоровий спосіб життя.

ВИСНОВКИ

В програмі з математики для 10-11 класів зазначено, що «…навчання математики … полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти» [25]. Тобто програма ще раз підкреслює значущість математичної компетентності.

Зміст програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, який спрямований на формування програмних результатів, що дають змогу обґрунтовано застосувати математику в реальному житті, готовність до успішної діяльності в соціумі.

Одним із завданням математики, навчальною програмою передбачено, що випускник: « ….розпізнає життєві чи предметні ситуації як задачі, що можна розв’язати математичними методами; формулює їх математичною мовою та розв’язує, використовуючи математичні компетентності, оцінює похибку обчислень та інтерпретує отримані результати з урахуванням конкретних умов, змісту та цілей предмета дослідження; застосовує математичні моделі при вивченні природничих (фізика, астрономія, географія, економіка, хімія, біологія) та інших навчальних предметів» [25].

Отже, і мета, і завдання вивчення математики передбачають розв’язування життєвих чи предметних ситуацій, використовуючи математичне моделювання.

В нашому дослідженні подані не тільки теоретичні основи вивчення тригонометричних функцій, а й подані прикладні задачі з методикою їх розв’язання, як засіб формування ключових компетентностей.

Таким чином, всі поставлені завдання були виконані та досягнуто мети дослідження.

Дані дослідження можна використати при навчанні алгебри в 10 класі.

Перспективою подальшого дослідження є формування компетентностей при розв'язуванні тригонометричних рівнянь та нерівностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноовсіт. навч. закладів : проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Неміровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 416. : іл.
2. Ачкан В. В. Прикладні задачі як засіб формування математичних компетентностей учнів у процесі вивчення рівнянь і нерівностей в курсі алгебри та початків аналізу / В. В. Ачкан // Математика в школі. – 2009. – № 1, 2. – С. 31 – 34.
3. Барановська Г. Г. Практикум з математики. Тригонометрія [Текст] : навч. посібник для вступників до вузів / Г. Г. Барановська, В. В. Ясінський ; ред. В. В. Ясінський ; Національний технічний ун-т України "Київський політехнічний ін-т". - К. : Вирій, 1997. - 121 с.
4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник / Г. П. Бевз. — К. : Вища школа, 1989. — 367 с.
5. Бермант А. Ф. Тригонометрия / А. Ф. Бермант, Л. А. Люстерник. — М.: Физматгиз, 1960. — 177 с.
6. Возняк Г. М. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Посібник для вчителя / Г. М. Возняк, К. П. Маланюк. - К.: Рад. шк., 1989. – 128 с.
7. Гайштут О. Г. Тригонометрія [Текст] : довідник- задачник / О. Г. Гайштут, Р. П. Ушаков ; Творча спілка вчителів України, Асоціація вчителів математики. - К. : Магістр-S, 1997. - 255 с.
8. Гельфанд І. М. Тригонометрія / І. М. Гельфанд, С. М. Львовський, А. М. Том. – М.: МЦНО, 2014. - 204 с.

9. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура / М. С. Головань // Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. – 2014. - №1. – С. 35-39
10. Державний стандарт базової і повної середньої освіти України [Електронний ресурс] : Офіційний веб-сайт Міністерства освіти та науки України. – Режим доступу : http://mon.gov.ua/images/files/gromad_obg/standart.doc.
11. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К. : РННЦ "ДНІТ". – 2004. – 255 с.
12. Житарюк І. В. Методичні особливості вкладання теми «Тригонометричні функції» у старшій школі / І. В. Житарюк // Наука і освіта. – Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського. – №1. – 2014. – С. 127-130
13. Заблоцька О. С. Компетентнісний підхід як освітня інновація : порівняльний аналіз / О. С. Заблоцька // Вісник Житомирського державного університету. Випуск 40. – Серія : Педагогічні науки. – 2008. – С. 63–68.
14. ЗНО з математики [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/191/
15. Істер О. С. Метоматика: (алгебра та початки аналізу і геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер. – Х.: Гімназія, 2018. – 384. : іл.
16. Клочко І. Я. Посібник з математики для школярів і абітурієнтів: Частина друга / І. Я. Клочко – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. – 224 с.
17. Компетентнісна освіта – від теорії до практики / Н. М. Бібік, І. Г. Єрмаков, О. В. Овчарук - К.: Плеяда, 2005. – 120 с.
18. Конет І.М. Тригонометрія / І. М. Конет. – К.: Абетка, 2006. – 224 с.
19. Кушнір І. А. Тригонометрія [Текст] : задачі та розв'язання / І. А. Кушнір. - К. : Астарта, 1997. - 390 с.

20. Кушнір І. А. 101 задача з тригонометрії / І. А. Кушнір. — К.: Факт, 2006.- 132 с.
21. Математика. Тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи [Текст] / уклад. Л. М. Ломонос. - К. : Рада, 1998. - 134 с. - (Бібліотечка школяра і абітурієнта).
22. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія. рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Неміровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 256. : іл.
23. Мерзляк А. Г. Тригонометрія: вчимося розв’язувати задачі / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський. - К.: Генеза, 2008. - 352 с.
24. Михальчич І. І. Обернені тригонометричні функції в шкільному курсі математики / І. І. Михальчич // Матеріали IX Міжнародної науково-практичної конференції «Наука, освіта, суспільство: очима молодих». – Рівне: РДГУ, 2020. – С.
25. Навчальні програми для 10-11 класів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
26. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підручн. для 10 кл. загальноосвітн. навч. закладів: академ. рівень / Є. П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.: іл.
27. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях (з Додатком): Навчальний посібник для учнів 7–11 класів / Є. П. Нелін. – Х. : Світ дитинства, 1998. – 116 с. (Додаток 56 с.)
28. Пометун О. І. Теорія та практика послідовної реалізації компетентнісного підходу в досвіді зарубіжних країн / О. І. Пометун // Компетентнісний підхід у сучасній освіті : світовий досвід та українські перспективи : Бібліотека з освітньої політики ; під заг. ред. О. В. Овчарук. – К. : К.І.С., 2004. – С. 15–24.

29. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія / С. А. Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
30. Рудь М. Компетентнісний підхід в освіті / М. Рудь // Вісник Львів. ун-ту. – Серія : Педагогіка – 2006. – Вип. 21, ч. 1. – С. 73–82.
31. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник [2-ге вид., допов. і переробл.] / З.І. Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с: іл.
32. Сморжевський Л. О. Задачі з алгебри і початків аналізу: 1001 задача прикладного змісту: 10–11 кл. / Л. О. Сморжевський, П. С. Атаманчук, А. М. Кух. – К. : А.С.К., 1999. – 135 с.
33. Формування життєвих вмінь та навичок учнів на уроках математики шляхом використання прикладних задач. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://schoolv.ucoz.ru/publ/formuvannja_zhittevikh_vmin_ta_navichok_uchniv_na_urok akh_matematiki_shljakhom_vikoristannja_prikladnikh_zadach/1-1-0-1
34. Формування компетентностей на уроках математики / О. М. Ткаченко, І. М. Кожевнікова, Л. П. Шатохіна. - [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://journal.osnova.com.ua/article/40968
35. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу. для 10-11класів загальноосвітніх навчальних закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. К.: «Зодіак-Еко», 2001. - 656 с.
36. Шунда Н. М. Функції та їх графіки / Н. М. Шунда. – К. : Рад. шк., 1976. – 190 с.
37. Ясінський В. А. Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТТУ «КПІ» / В. А. Ясінський, за ред. чл.-кор. НАН України В. С. Мельника. – К. : НТТУ «КПІ», 2005. – 372 с. (Серія «На допомогу абітурієнту»)