Форма № Н-9.02

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Методика навчання учнів загальноосвітніх шкіл розв’язуванню і складанню геометричних задач

Виконала студентка 2 курсу магістратури,
групи М – М – 21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Нуждак Світлана Віталіївна

Керівник кандидат фізико–математичних наук, професор кафедри математики з методикою викладання Крайчук Олександр Васильович
Рецензенти:

Рівне-2021 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Геометрії як навчальна дисципліни містить у собі величезний гуманітарний і світоглядний потенціал для розвитку людини і тому займає значне місце в системі формування інтелектуальної та творчої особистості учнів загальноосвітніх шкіл. У процесі вивчення геометрії розвивається логічне мислення і просторова уява школярів, відкриваються великі можливості для показу сили наукових методів у пізнанні навколишнього світу, з'ясування процесу формування понять і шляхів їх виникнення. Геометрія являє собою важливу складову математики і є одним із основних компонентів загальнолюдської культури.

Процес навчання геометрії у загальноосвітній школі передбачає виконання двох самостійних і тісно позв’язаних між собою завдань:

- оволодіння учнями теоретичним змістом конкретних розділів дисципліни;
- цілеспрямоване формування прийомів розумової діяльності, розвитку у школярів просторового мислення.

Формування цих завдань антивно здійснюється у процесі розв’язування різних типів геометричних задач. Серед задач які є в геометрії існують задачі на дослідження. Саме в цих задачах розглядають взаємне розміщення величин, умови існування фігур, властивості відношень між елементами фігур, що є основою розвитку просторового мислення школярів загальноосвітньої школи. Але на жаль розв’язуванню таких задач на дослідження вчителі математики приділяють не достатньо уваги.

Для досягнення високого рівня геометричної підготовки учнів необхідно забезпечити можливість надбання ними глибоких фундаментальних знань, розвитку просторової уяви, прагнення до самостійного вивчення нового матеріалу. Вирішенню цієї проблеми сприяє розв’язування геометричних задач на дослідження що є ефективним засобом управління пізнавальною діяльністю і формуванням просторового мислення учнів.

У цьому контексті особливе значення набуває заключний етап розв'язування задачі, оскільки його реалізація поєднує в собі як засвоєння, повторення, систематизацію і узагальнення вивченого, так і відкриття нових знань. Різні аспекти використання заключного етапу розв'язування задачі при навчанні математиці широко обговорюються в науковій і методичній літературі, роботах відомих математиків, методистів, вчителів. Так, визначенню змісту даного етапу присвячені праці Д. Пойа, Е. О. Каніна, Ю. М. Колягина, Ф. Ф. Нагибіна. Серед науковців, які свої роботи присвячували проблемі методики розв'язування і складання геометричних задач на дослідження, слід відокремити К. В. Власенко, С. А. Рикова, Є. А. Недошивкіна.

Мета дослідження полягає у визначенні теоретичних основ методики навчання розв'язуванню і складанню геометричних задач як певної сукупності вихідних психолого-дидактичних і методологічних положень, що дозволяють побудувати наукову модель використання геометричних задач у середній школі як на рівні засобу, так і методу навчання, розвитку та виховання, мети навчання.

Об'єктом дослідження є процес навчання розв'язуванню і складанню задач при вивченні курсу геометрії в загальноосвітній школі.

Для досягнення мети даної дипломної роботи були поставленні такі завдання:

- проаналізувати основні завдання вивчення геометрії в основній школі:
- з'ясувати типи задач, які використовуються в шкільному курсі геометрії;
- дослідити особливості розв'язання геометричних задач на дослідження;
- підібрати задачі на дослідження по окремих темах з геометрії у 7, 8, 9 класі;
- дослідити роль геометричних задач на дослідження у формуванні просторового мислення учнів 7-9 класів.

Предметом дослідження є зміст навчання розв'язуванню і складанню задач з геометрії та відповідної навчальної діяльності учнів у середній школі.

Гіпотеза дослідження: виявлення сукупності дій, розробка методики їх формування в процесі навчання геометрії в середній школі, а також організація цілеспрямованої і систематичної роботи із задачею, розв'язування якої позитивно впливатимуть на якість розв'язування школярами геометричних задач, сприяти підвищенню рівня знань і умінь учнів, що у свою чергу приведе до успішнішого засвоєння геометрії в порівнянні з традиційною методикою навчання.

Для досягнення мети та розв'язання поставлених завдань були використані **теоретичні** (аналіз, порівняння, синтез, систематизація, класифікація та узагальнення теоретичних даних, представлених у педагогічній, психологічній та методичній літературі) та **емпіричні** (вивчення вітчизняного та зарубіжного педагогічного досвіду, аналіз уроків, спостереження) методи досліджень.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблений зміст і методика можуть бути використані вчителями закладів загальної середньої освіти при організації навчання математики на уроках і факультативних та індивідуальних заняттях, для підвищення якості знань учнів, активізації їх пізнавальної діяльності, підготовкм їх до успішної\го складання ЗНО та ДПА.

Структура роботи: робота побудована за логічним принципом і складається зі вступу, основної частини, яка включає два розділи, висновків, списку використаних джерел та додатків. У першому розділі роботи проаналізовано теоретико-методичні основи дослідження. Другий розділ присвячений методиці навчання учнів загальноосвітніх шкіл розв'язуванню і складанню геометричних задач.

Апробація результатів дослідження: основні результати магістерської роботи були представлені на звітних наукових конференціях викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету в 2020 та 2021 роках та анонсовані в роботі **[**19**].**

РОЗДІЛ І. Теоретико-методичні основи дослідження

1.1. Поняття, структура, класифікація, принцип визначення задачі

Під терміном задача розуміють деяке питання, відповідь на яке можна знайти за допомогою математичних операцій. Розглянемо основні елементи, з яких складається кожна задача, і з'ясуємо, що означає розв'язати задачу.
Із визначення задачі випливає, що в ній обов'язково містититься поставлене запитання, на яке потрібно відповісти, виходячи з умови задачі.

Термін «задача» вживається в різних значеннях. У найширшому плані можна сказати, що задача передбачає необхідність свідомого пошуку відповідних засобів для досягнення мети, яку добре видно, але яка без посередньо недосяжна. У психологічному аспекті задача розглядається як свідома мета, що існує в певних умовах, а дії - як процеси або акти, спрямовані на досягнення цієї, тобто на розв'язування задачі.

Під математичною задачею розуміють будь-яку вимогу обчислити, побудувати, довести що-небудь, що стосується кількісних відношень і просторових форм, створених людським розумом на матеріалістичній основі знань про навколишній світ. Арифметичною задачею називають вимогу знайти числове значення деякої величини, якщо дано числові значення інших величин і залежність, яка пов'язує ці величини як між собою, так і з шуканою.

Щоб правильно розв'язувати різні питання методики геометричних задач, слід виходити з досить обґрунтованих загальних принципових положень. Одне з таких положень полягає в тому, щоб завжди врахувати, що таке геометрична задача і що означає розв'язати геометричну задачу.

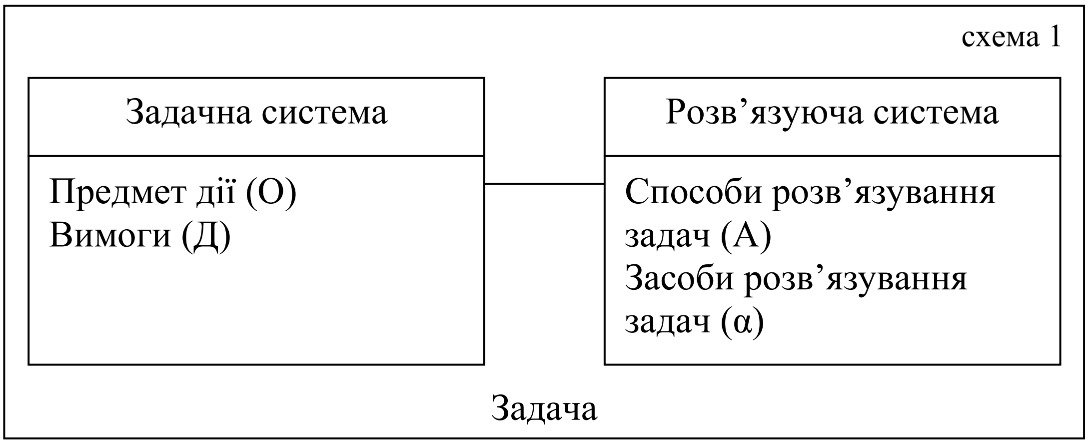
Історія розвитку методичних ідей у галузі вивчення математики знає чимало спроб означення поняття задачі. Вперше поняття «навчальна задача» вводить у педагогічну культуру Д.Б. Ельконін. Він трактував його як задачу, у процесі розв'язання якої основною метою є засвоєння певного зразка дій чи понять. Згодом Д.Б. Ельконін посилює значущість навчальної задачі, вважаючи її основною одиницею навчальної діяльності. Основну відмінність навчальної задачі від усіх інших задач вбачає у тому, що її мета та результат полягають у зміні самого діючого суб’єкта, а не у зміні предметів, з якими він діє[30, с.105].

Відомий російський математик С. О. Шатуновський у вступній статті до книги Адлера «Теорія геометричних побудов» пише: «Задача є виклад вимоги «знайти» за «даними» речами інші, «шукані» речі, що перебувають одна з одною і з даними речами в зазначених співвідношеннях». Роз’яснюючи це означення, С. О. Шатуновський говорить, що в кожній задачі розглядаються два класи речей (конкретних або абстрактних). Розв’язання задачі і полягає в переведенні речей другого класу в перший.

В.М. Брадіс пропонує своє означення задачі. Він вважає означити задачу так: «Задачею слід називати всяке математичне запитання, для відповіді на яке не досить простого відтворення одного якогось результату, якоїсь теореми або означення з пройденого курсу».

Загальнонаукове поняття задачі можна розглядати як узагальнення описаного психологічного поняття. Задача в найзагальнішому сенсі – це ситуація, що визначає дії деякої розв’язуючої системи. Тут вже задачу розв’язує необов'язково людина. Розв’язуючі системи можуть бути біологічними, технічними (наприклад, самоналагоджувальна система з еталонною моделлю), соціальними, нарешті, системами, до складу яких входять люди і автомати (машини). При такому розширенні поняття розв’язуючої системи дію також слід трактувати ширше, ніж прийнято в психології. Це перш за все стосується мети і мотиву дії. Мета розглядається тут як закодована у розв’язуючій системі вимога до стану предмету дії. Мотиву, як його розуміють в психології, в загальному випадку вказати не можна; можна лише говорити про особливості алгоритму функціонування розв’язуючої системи, що визначають спрямованість її дій. Предмет дії, іншими словами, перетворюваний об’єкт або сукупність об'єктів, разом з вимогою про переважний стан цього об'єкту можна розглядати при описі розв'язування задачі як єдине ціле, а саме як деяку систему, яку ми називатимемо задачною системою.

Щоб здійснити розв’язання задачі, розв’язуюча система повинна володіти засобами розв’язування (α) – числами, фігурами, поняттями, деяким набором операцій перетворення (складанням, множенням і т. п.), а також способами розвязування (А) – послідовностями операцій, за допомогою яких розв'язується задача (сюди входять алгоритми, розпорядження, зразки розв’язків і т. п.). Спрощена модель задачі, якою ми користуватимемося в подальшому викладі, приведена на схемі 1.



Відомо, що під час формулювання поняття важливо знайти його ознаки. На думку А.М. Сохора, характерна особливість задач полягає у необхідності здогадки, евристики, на відміну від алгоритмічного характеру прикладів і вправ. І.Я. Лернер ознаками будь-якої задачі визначає такі: 1) наявність мети розв’язування, що диктується вимогою чи запитанням до задачі; 2) необхідність урахування умов і факторів, що являються передумовою застосування способу розв’язування і правильності самого розв’язку; 3) наявність чи необхідність виявлення і побудови способу розв’язування.

Змістом задачі І.Я. Лернер вважає проблему, в основі виникнення якої лежить суперечність між відомим і невідомим. Таке трактування задачі відрізняється від поширеного в педагогічних дослідженнях, де будь-яке завдання, що вимагає для свого виконання яких-небудь дій, розглядається як задача, а будь-яка пізнавальна дія – як розв’язування пізнавальної задачі [28, с.23].

Структура задач. Розуміння задачі визначається не тільки розкриттям її змісту, але і її структурою. Розглянемо основні підходи до виділення структурних елементів. Так, Ю.Н. Кулюткин виділяє в структурі задачі два компоненти: а) умова, тобто наявну сукупність об'єктів, впорядкованих певними відносинами; б) вимога, вказуючи на те, що потрібно шукати в даній умові. Л.М. Фрідман виділяє такі елементи в структурі задачі: умова, вимога і оператор. Під оператором задачі він розуміє «...сукупність тих дій (операцій), які треба провести над умовою задачі, щоб виконати її вимоги». Навряд чи правомірно включати в структуру задачі дії, які треба провести для розв’язування задачі.

Більш узагальнений підхід до розгляду питання про структуру задачі здійснений академіком В.М. Глушковим. Він в задачі розділяє задачну і розв’язуючу системи. До задачної системи відносяться умови і вимоги задач. У розв’язуючу систему входять наукові методи, способи і засоби, які в нашому розумінні є джерелами створення конкретних алгоритмів і евристик для розв’язку задач [28, с. 54].

Не зупиняючись на значенні і функціях задач, хотілося б сказати про головне. У процесі формування у учнів системи знань, умінь і навиків йде формування системи способів діяльності. Володіння способами діяльності робить знання дієвими, активними.

Класифікація задач. Розв'язування математичних задач є найбільш важкою частиною діяльності школярів при вивченні математики, навчання учнів цьому виду діяльності займає одне з головних місць в загальному процесі навчання. Школярів навчають математиці не тільки тому, щоб вони оволоділи певною сумою математичних знань, але й щоб ці знання вони могли ефективно використовувати в своєму подальшому житті для розв’язування різноманітних задач, що виникають в практичній діяльності. Засвоїти ж математичні знання і навчитися їх застосовувати можна, лише розв’язуючи задачі, використовуючи при цьому поняття, теореми, залежності в різних ситуаціях.

Найбільш прийнятним нам представляється означення, дане Л.Л. Гурової: «Задача – об'єкт розумової діяльності, що містить вимогу деякого практичного перетворення або відповіді на теоретичне питання за допомогою пошуку умов, що дозволяють розкрити зв'язки (відносини) між відомими і невідомими її елементами».

У дослідженнях процесу навчання важливим є діяльнісний підхід. При організації процесу навчання учнів розв’язуванню математичних задач, учитель в першу чергу стикається з такими питаннями: задачі якої складності запропонувати учням; чи знайомі школярі з тими діями, які потрібно застосувати при розв’язуванні задач; чи володіють вони відповідними прийомами розумової діяльності і т.д. А це означає, що на озброєнні вчителя повинна бути ясна типологія задач, яка направляла б його при дозволі цих питань, при навчанні задач, що вчаться розв’язуванню. Крім того, «певна типологія задач може мати важливе практичне значення для тієї людини, яка при розв’язуванні задачі могла б організувати свою роботу, спираючись на ці відомості» [28, с.39].

Дуже часто зустрічається ділення задач на обчислення, на доведення, на побудову, на дослідження і вивчається кожен вид. Перший тип задач характеризується тим, що часто геометричними міркуваннями і за допомогою алгебраїчних й арифметичних співвідношень дані про шуканий елемент доводить до числа. Другий тип задач характеризується тим, що, розв’язуючи їх, часто геометричними міркуваннями послідовно перетворюють умову задачі, наближаючи її до висновку, і встановлюють справедливість цього висновку або, навпаки, вважаючи висновок задачі правильним, наближаючи його в результаті послідовних перетворень до умови і стверджують її. Третій тип задач характеризується тим, що зміст їх не вичерпується переліком даних величин і формулювання того, що треба знайти. Тут істотне значення має вказівка на ті засоби, за допомогою яких задача розв'язуватиметься, на ті інструменти, якими виконуватиметься побудова шуканої фігури, бо від цього може змінюватися спосіб розв'язування задачі. Задачі четвертого типу найбільш споріднені із задачами на доведення, але відрізняються від них насамперед тим, що умови не містять готової відповіді. Розв'язуючи їх, учні повинні встановити, чи рівні між собою дані фігури або їх окремі елементи, чи паралельні дані прямі лінії. Очевидно, що таке ділення не може бути інструментом в навчанні школярів розв'язуванню задач хоч би тому, що задачі цих видів не відрізняються один від одного рівнем складності, характером діяльності людини по їх розв'язуванню. У задачах на обчислення, побудову, дослідження найчастіше доводиться багато доводити; у задачах на обчислення, доведення і побудову доводиться багато досліджувати і т.д. Не покращує справи і назва цих видів задач іншими словами: задачі на розпізнавання, на конструювання, на пояснення і доведення і ін. [28, с.47].

Розглядаючи задачі як об'єкти розумової діяльності учнів, важливо враховувати характер зв'язків між елементами задачі, співвідношення між відтворюючою і творчою діяльністю учнів при розв'язуванні задач, яке багато в чому визначається вказаним зв'язками. Таким чином, ми ділимо математичні задачі на наступні три типи: 1) алгоритмічні задачі; 2)напівалгоритмічні задачі; 3) евристичні задачі.

До алгоритмічних задач ми відносимо такі задачі, які розв'язуються за допомогою безпосереднього застосування визначення, формули, доведеної теореми, для розв'язування яких є алгоритм, і на базі вивчених теоретичних положень і засвоєних практичних прийомів діяльності ці задачі необхідно вирішувати за допомогою алгоритму.

Роль алгоритмів, а отже алгоритмічних задач в навчанні математиці дуже велика. Розв'язування задач по алгоритму швидко і легко приводить до бажаного результату, тоді як незнання алгоритму може привести до численних помилок і великої втрати часу. Роль алгоритмічних задач полягає в тому, щоб навчити учнів важливим алгоритмам, безпосередньому застосуванню визначень, теорем, формул, навчити їх діяти стандартно у відповідних ситуаціях.

Учень, що добре засвоїв необхідні алгоритми розв’язування задач, може оперувати згорнутими знаннями при розв’язуванні інших складних задач. Йому не потрібно буде витрачати великих зусиль на пошук розв’язування часткових проблем, які розв'язуються по алгоритму; розумова діяльність школяра буде направлена на розв’язування інших проблем, тобто потрібна автоматизація деяких дій учнів. Ця автоматизація і досягається самостійним розв’язуванням алгоритмічних задач.

До напівалгоритмічних ми відносимо ті задачі, правила розв’язку яких носять узагальнений характер і не можуть бути повністю зведені до об'єднання елементарних актів; зв'язки між елементами цих задач легко знаходяться учнями. В межах одного і того ж узагальненого правила розв’язування задачі відрізняються варіативністю умов. Наприклад, задачі на доведення перпендикулярності двох прямих за допомогою векторів. Узагальнене правило розв’язку таких задач можна описати таким чином: а) вибрати вектори *AB* і *CD,* де точки *A* і *B* належать одній прямій, а точки С і *D* – іншій; б) довести, що скалярний добуток векторів *AB* і *CD* рівний нулю.

Напівалгоритмічні задачі як під задачі містять алгоритмічні задачі. Для задач вказаного вище виду такими під задачами можуть бути: розкладання вектора на два не колінеарні або три не компланарні вектори; обчислення скалярного добутку двох векторів.

Розв’язуючи напівалгоритмічні задачі, учень вчиться згортати знання, фіксуючи їх в свідомості крупними блоками. При цьому він вчиться застосовувати засвоєні алгоритми в різних ситуаціях; таким чином відбувається узагальнення вивченого матеріалу, узагальнення правил розв’язування задач.

У різних ситуаціях одну і ту ж задачу можна відносити до напівалгоритмічних задач і можна не відносити до них (це визначається учбовою метою, а також іншими умовами). Наприклад, для розв’язування деякої задачі може існувати алгоритм, але він або спотворений, або часто дає нераціональний розв’язок і т.п. Зате якщо до цієї задачі підходити як до напівалгоритмічної, знаючи узагальнене правило її розв’язування, то діяльність учнів по її розв’язуванню може бути організована ефективніше.

Зрозуміло, що зі всього класу цих задач можна виділити, наприклад, такі, де потрібно побудувати зображення центру кола, вписаного в трикутник, або якісь інші задачі і створити для їх розв’язку певний алгоритм; але, очевидно, робити це педагогічно і методично недоцільно, оскільки інакше число учбових алгоритмів буде настільки велике, що засвоїти їх учень не в змозі.

До евристичних ми відносимо ті задачі, для розв’язування яких необхідно виявити деякі приховані зв'язки між елементами умови і вимоги або знайти спосіб розв’язування, причому цей спосіб не є очевидною конкретизацією деякого узагальненого правила, відомого учню, або зробити і те і інше. Розв’язуючи такі задачі, учень повинен використовувати евристичні прийоми, методи. На думку Ю.Н. Кулюткина, важливою характеристикою евристичних методів є те, що вони «направлені на розкриття ще невідомих конкретно-змістовних відносин, через які визначається шуканий об'єкт».

Алгоритмічні задачі породжують відповідні класи напівалгоритмічних і евристичних задач. Учнів потрібно «провести» через розв’язок задач різних типів з тим, щоб у них накопичувався досвід діяльності на різних рівнях, щоб вони навчилися бачити загальне в способах розв’язування задач, вчилися діяти в нестандартних ситуаціях, опановували евристичними прийомами.

Приведена типологія задач дає ясний напрям діяльності вчителя по організації навчання учнів розв'язувати задачі. Вона допоможе оптимально підійти до питань співвідношення відтворюючих і творчих процесів в самостійних роботах школярів.

Принцип визначення задачі.

1. Називатимемо задачу визначеною, якщо за даними її елементами (величинами) можна знайти всі її шукані елементи (величини) і число розв'язків r скінченне ($r > 0$).
2. Задачу називатимемо неозначеною, якщо вона має нескінченне число розв'язків ($r = \infty$).
3. Задачу називатимемо невизначеною, якщо вона не має жодного розв'язку ($r = 0$).
4. Елементи задачі називатимемо незалежними, якщо ніякий з них не можна виразити через інші.

Наприклад, елементи (сторони) a, b, c прямокутного трикутника залежні ($a^2 + b^2 = c^2$), елементи a, b, c довільного трикутника — незалежні. Такі елементи, як швидкість v тіла, що рівномірно рухається, час руху t та пройдений ним за цей час шлях S залежні: $S = vt$, але будь-які два з цих елементів незалежні.

5. Два або кілька рівнянь називатимемо незалежними, якщо ніяке з них не випливає з інших.

За вченням про системи рівнянь ми можемо сформулювати таку умову (в загальному випадку — необхідну і достатню) визначеності задачі, яку називатимемо принципом визначеності задачі: задача визначена, якщо в умові її міститься таке число m даних елементів і таке число p шуканих елементів, що між усіма $m + p$ ементами існують p незалежних рівнянь. Ця умова виявиться достатньою, якщо всі дані m елементів належать до допустимих для цих елементів значень і якщо принаймні один розв'язок системи p рівнянь з p невідомими належить до допустимих для цих невідомих значень (інакше $r = 0$).

Розглянемо задачу: «Визначти катети a і b прямокутного трикутника за даними гіпотенузою $c = 6$ *см* і площею $S = 10$ *см*^{2}». Ця задача невизначена ($r = 0$), бо дані її елементи не належать до області допустимих значень. Допустимими для елементів c і S є всі ті значення (додатні), які задовольняють умов $c^2 = 4S$ (інакше перестає існувати трикутник). Розв'язок відповідної системи рівнянь $\begin{cases} ab = 20 \\ a^2 + b^2 = 36 \end{cases}$ не належить області допустимих для невідомих a і b значень.

Невизначені задачі зустрічаються найчастіше тоді коли в умові є «зайві» дані величини (елементи). Але при наявності «зайвих» елементів задача може бути і визначеною. Серед даних елементів можуть опинитися «зайві» як у тих випадках, коли дані елементи залежні, так і в тих, коли вони незалежні. Наведемо приклад.

«У трикутнику, сторони якого дорівнюють 8 *см*, 10 *см* і 12*см*, вписано паралелограм так, що кут його збігається із середнім за величиною кутом трикутника; периметр паралелограма дорівнює 18 *см*. Знайти сторони паралелограма».

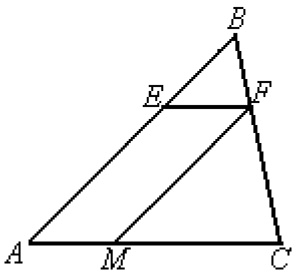


Рис. 1.1.

Дані елементи задачі незалежні, але один зайвий елемент є. Нехай $AB = 8$ *см*, $BC = 10$ *см*, $AEFM$ – паралелограм (рис.). Позначимо $AM = x$. Тоді $FM = 9 - x$. З рисунка маємо: $\frac{8}{9-x} = \frac{12}{12-x}$, звідки $x = 3$ *см*. Як бачимо, сторона $BC = 10$ *см* є зайвим елементом. Задача визначена. Зрозуміло, що визначені задачі з «зайвими» елементами (величинами) доцільно не лише для розв'язування, але й для виявлення цих «зайвих» елементів, для розв'язування питання про визначеність, неозначеність або невизначеність задачі.

При розв'язуванні задачі: «Бісектриса внутрішнього кута паралелограма поділяє одну з його сторін на відрізки по 5 *дм*, а діагональ – на відрізки 3 *дм* та 6 *дм*. Визначити другу діагональ паралелограма» можна обійтися без будь-якого з чотирьох даних в її умові елементів.

«У трикутнику ABC дві медіани дорівнюють m і n і утворюють з AC кути в $31^\circ 15'$ і $28^\circ 45'$. Знайти площу трикутника» .

Неважко зрозуміти, що дані в умові цієї задачі 4 елементи залежні, і, отже, між елементами m і n існує певна залежність: $\frac{m}{n}=\frac{\sin 31^\circ 15'}{\sin 28^\circ 45'}$ при $m>n$ або $\frac{2m}{n}=\frac{\sin 31^\circ 15'}{\sin 28^\circ 45'}$ при $2m>n$. Зрозуміло, що коли елементам m і n надати довільних числових значень (при яких ця залежність не справджується), то задача стане невизначеною.

Неозначені задачі найчастіше зустрічаються в тих випадках, коли умова задачі дає недостатню кількість даних величин (елементів) і, отже, коли маємо недостатню (для розв'язування задачі) кількість рівнянь (число рівнянь менше від числа невідомих). Розв'язування неозначених задач сприяє розвитку функціонального мислення, усвідомленню основного поняття математики – поняття множини.

Наведемо приклад неозначеної геометричної задачі. «Два рівних півкруги накладені так, що діаметри їх паралельні, а півколо одного проходить через центр другого. Визначити площу загальної частини півкругів за даним їх радіусом R». Неважко переконатися в тому, що кількість даних у цій задачі недостатня для її визначеності.

В умовах багатьох визначених задач може не бути даних числових значень величин (задачі без числових даних) або їх може бути дуже мало, якщо в умовах цих задач містяться такі ознаки і властивості шуканих величин, які все ж дають можливість відшукати ці величини.

Ці ознаки і властивості шуканих величин часто виступають у вигляді різних обмежень, що їх накладає на ці величини умова задачі, наприклад, належність шуканих величин до певного класу чисел (цілих, раціональних та ін.), наявність між ними (або між ними і даними величинами) яких-небудь нерівностей та інші обмеження, що швидко звужують границі для шуканих величин.

Багато ознак і властивості шуканих величин, що містяться в умові задачі, не можуть бути безпосередньо перекладені мовою рівнянь. У такому разі задача може бути визначеною, коли число одержуваних для визначення невідомих величин рівнянь менше числа цього невідомих.

1.2. Принцип визначення геометричної фігури

1. Елементом фігури даної назви вважатимемо величину, яка однозначно визначається конкретно заданою фігурою цієї назви.

2. Елемент фігури називатимемо залежним, якщо він має стале числове значення для кожної фігури нескінченної множини фігур розглядуваної назви (наприклад, прямий кут у всіх прямокутних трикутниках, сума кутів у всіх трикутниках). В іншому випадку елемент фігури називатимемо незалежним.

3. Кілька елементів називатимемо незалежними, якщо кожний з них незалежний і ніякий з них не є функцією від інших.

4. Основними елементами фігур називатимемо такі відрізки, дуги й кути:

а) для многокутника – сторона, кут, діагональ, кут між діагоналями, що перетинаються; кут між стороною і діагоналлю, що перетинаються; відрізки, на які поділяються дві діагоналі точкою взаємного перетину;

б) для многогранника – ребро, діагональ, плоский та двогранний кут, кут між діагоналлю і ребром, що перетинаються; кут між діагоналлю і гранню, що перетинаються; кут між ребром і гранню, що перетинаються. Основними елементами многогранника вважатимемо також основні елементи його граней;

в) для плоских фігур, утворених колами, кругами та їх частинами, – радіуси, діаметри, хорди, дуги, центральні кути;

г) основними елементами тіл обертання називатимемо основні елементи їх осьових перерізів. Вказані відрізки й дуги називатимемо основними лінійними елементами, а дуги й кути – основними кутовими елементами.

5. Якщо за даною сукупністю незалежних основних елементів фігури можна в загальному випадку побудувати одну і лише одну фігуру з цими основними елементами, то таку сукупність основних елементів називатимемо базисною.

Застереження про загальний випадок зроблено тому, що можливість побудови фігури за даними її елементами завжди обумовлюється деякими додатковими умовами, які повинні задовольняти ці елементи. Наприклад, додаткові умови можливості побудови трикутника за трьома сторонами $0 < a \le b \le c$ виражається нерівністю $a + b > c$.

6. Вираз $F = F(a_1, a_2, a_3, \ . \ a_m)$, складений з основних елементів a_1, a_2, a_3,…, a_m фігури, називатимемо елементом n-го виміру, якщо цей вираз являє собою однорідну функцію n-го виміру від основних лінійних елементів цієї фігури.

Наприклад, величини $a^2 + R^2$; $\frac{aR}{a+R}$; $\frac{a}{R\cos a}$, де a – сторона трикутника, α – протилежний цій стороні кут, R– радіус описаного кола, є незалежними елементами трикутника відповідно другого, першого і нульового виміру; величина $F = \frac{\alpha}{R\sin\alpha}$ є залежний елемент нульового виміру, бо ця величина для всіх трикутників дорівнює 2.

7. Будь-який елемент нульового виміру називатимемо кутовим, а будь-який елемент першого виміру – лінійним елементом.

Звідси випливає, що коли вираз F (елемент фігури) містить лише кути або лише відношення двох елементів одного й того самого виміру, то він буде кутовим елементом.

8. Всі елементи, крім кутових, умовимося називати метричними. Метричний елемент тією чи іншою мірою характеризує лінійні розміри фігури. Наприклад, нехай a, b, c – сторони трикутника, α, β, γ – протилежні їм кути трикутника.

1) Метричними елементами трикутника є: відрізок бісектриси від вершини до протилежної сторони, відрізок, що сполучає вершину трикутника з точкою, яка ділить протилежну сторону у відношенні 1:2, радіус описаного (вписаного) кола, площа трикутника, віддаль від центра описаного (вписаного) кола до будь-якої сторони або вершини, величина об'єму або поверхні тіла, утвореного обертанням трикутника навколо будь-якої сторони або навколо будь-якої бісектриси, медіани, висоти; вирази $a^2+b^2+c^2$; $a\sqrt{a^2\sin\alpha+b^2}$; $a\sin^2\alpha-b\cos\beta$.

2) Кутовими елементами трикутника є: кут між висотою і бісектрисою, відношення радіусів описаного і вписаного кола, довільний степінь відношення довільних двох відрізків – елементів трикутника, вирази a; $\beta+\gamma$; $\sin\alpha$; $tg(\alpha-\gamma)$; $\frac{a}{b}$; $\frac{a^2b}{c^3\sin\alpha}$; $\alpha+tg\beta+\frac{b}{c}$.

Сума кутів трикутника є залежним його кутовим елементом.

3) Метричними елементами сектора є: довжина його дуги, площа, радіус вписаного (описаного) кола, площа сектора, а кутовими – відношення довжини дуги до радіуса, відношення площі сектора до площі описаного (вписаного) круга або до квадрата радіуса. Відрізок, що сполучає дві довільні точки дуги сектора, не є його метричним елементом (якщо кінці цього відрізка не збігаються з кінцями хорди сектора).

4) Коли задано будь-яке рівняння між кутовими елементами фігури, то це означає, що задано кутовий елемент; наприклад, рівняння

$\frac{a}{b} = \frac{c^2}{a^2}$ визначає кутовий елемент $\frac{a}{b} - \frac{c^2}{a^2} = 0$ (він дорівнює нулю) або $\frac{a^3}{bc^2} = 1$ (кутовий елемент дорівнює одиниці). Звідси випливає, що коли задано будь-яке однорідне відносно лінійних елементів фігури рівняння, то цим самим задано також кутовий елемент.

Рівняння $a\sin\beta = b\sin\alpha$ виражає залежний кутовий елемент трикутника, бо це рівняння є співвідношенням між елементами a, b, α, β довільного трикутника.

9. Якщо за даними m незалежними елементами фігури можна побудувати скінченне число r фігур $(r > 0)$ з цими елементами, то m елементів визначають фігуру.

10. Розв'язати фігуру означає за даними її елементами знайти шукані елементи цієї фігури.

У загальному випадку розв'язування фігури зводиться до обчислювання елементів якомога простішої базисної сукупності за даною небазисною сукупністю елементів, які визначають фігуру. Загальновідома така теорема, що виражає найважливішу ознаку визначеності фігури і яку називають принципом визначеності фігури:

Теорема. Кожна геометрична фігура визначається заданням деякого цілком певного числа незалежних елементів.

Теорема виражає також ознаку визначеності геометричної задачі, в якій йдеться про розв'язування фігури, то можна з її допомогою дізнатися, чи є геометрична задача означеною, неозначеною або невизначеною. Для кожної геометричної фігури знайдеться таке число m незалежних елементів (цієї фігури), які цілком її визначають: будь-яку геометричну фігуру можна побудувати, якщо вибрати достатню кількість її елементів. Ми завжди можемо домогтися того, щоб це число було мінімальним: досить стежити лише за тим, щоб вибрані елементи були незалежними. Якщо число n елементів, які визначають фігуру, не є мінімальним, то це означає, що між n елементами існують залежності (рівняння), які справджуються при обраних числових значеннях цих n елементів.

Серед m повинен бути, як правило, один лінійний елемент. Але існують фігури, наприклад плоский кут, які визначаються лише кутовими елементами. З подібності таких фігур завжди випливає їх рівність. Для різних фігур число m різне. Але, наприклад, рівнобедрений трикутник, конус, сектор, правильна трикутна призма та багато інших фігур визначаються кожна двома елементами. Важливо усвідомити, що для кожної фігури число m цілком певне.

Якщо якісь m незалежних елементів фігури визначають фігуру, то і будь-які інші m незалежних елементів цієї фігури теж її визначають. Справді, нехай фігура визначається m незалежними елементами a_1, a_2, $a_3,\dots,$ a_m і b_1, b_2, $b_3,\dots,$ b_m – будь-які m незалежних елементів тієї ж фігури, серед яких є принаймні один елемент, що відрізняється від елементів a_m ($m=1,\ 2,\ 3,\dots,\ m$). Якщо елементи a_m визначають фігуру, то це означає, що всі елементи b_m є функціями від елементів a_m, і ми дістанемо m рівнянь з m невідомими.
Ці рівняння незалежні. Отже, вони дають можливість виразити елементи a_m як функції від елементів b_m; виходить, що елементи b_m визначають елементи a_m, а отже, і фігуру.

Приклад. Нехай відомо, що бісектриси трикутника незалежні. Трикутник визначається, наприклад, трьома його сторонами, отже, знаючи ці сторони, можна знайти бісектриси як функції від них. А розв'язавши систему трьох незалежних рівнянь з трьома невідомими відносно сторін трикутника, знайдемо ці сторони як функції бісектрис. Це й означає, що бісектриси фіксують трикутник.

Отже, якщо фігура визначається m незалежними елементами, то це означає, що вона визначається всякими m незалежними елементами, хоч якими б складними вони не були. Якщо серед n елементів фігури знайдеться таке мінімальне число m елементів, які визначають фігуру, то за даними m елементами можна знайти решту $n-m$ елементів, і ця задача має в загальному випадку скінченне число розв'язків.

Наприклад. 1) Для прямокутного трикутника $m=2$, тому між його елементами a, b, c, h, a_c, b_c і α (катети, гіпотенуза, висота, опущена на гіпотенузу, проекції катетів на гіпотенузу, один з гострих кутів) повинні існувати і справді існують $7-2=5$ незалежних рівнянь: $a^2+b^2=c^2$; $ab=ch$, $h^2=a_c b_c$; $a^2=ca_c$; $a=b\,tg\alpha$.

2) Елементи a, h_a, b і R (сторона трикутника, відповідна їй висота, друга сторона трикутника та радіус описаного кола) повинні бути зв'язані одним співвідношенням (довільні 3 з цих 4 елементів незалежні), тому за даними, наприклад, a, h_a і R можна знайти b, і задача ця має в загальному випадку 2 розв'язки.

3) Нехай a – сторона трикутника, α – протилежній цій стороні кут, R – радіус описаного кола, d – віддаль від центра описаного кола до сторони. Неважко бачити, що будь-які три елементи з числа цих чотирьох залежні; серед цих чотирьох елементів немає таких, які б визначали трикутник. Застосовувати наведений вище висновок з принципу визначеності фігури в цьому і подібних до нього випадках не можна: між елементами a, α, R і d існують два незалежних співвідношення ($d=R\cos\alpha$, $2R\sin\alpha=a$).

Зауваження. Якщо говориться, що фігура визначається m елементами, то це означає, що вона визначається ними в загальному випадку. В окремих випадках та сама фігура може визначатися меншим, ніж m, числом незалежних елементів. Такі особливі випадки мають місце тоді, коли фігуру фіксуємо не параметрами, а їх числовими значеннями, які задовольняють певні особливі умови.

Так, трикутник у загальному випадку визначається трьома елементами, але елементи $P = 6 \;\; см$ (периметр трикутника), $S = \sqrt{3} \; кв.\, см$ (його площа) визначають єдиний трикутник зі сторонами по 2 $см$ кожна, бо необхідна і достатня ознака існування трикутника з параметрами P і S виражається нерівністю $\frac{P^2}{S} \geq 12\sqrt{3}$, причому рівність має місце лише у випадку рівностороннього трикутника. У нашому випадку $\frac{6^2}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$.

Так само елементи трикутника $R = 10 \; см$, $r = 5 \; см$ (радіуси описаного та вписаного кіл) визначають єдиний трикутник, бо $R^2 - 2R \;\neq d^2 \geq 0$, де d – віддаль між центрами кіл.

1. 3. Психологічна сутність процесу розв’язування задач

Процес розв’язування задач із психологічної точки зору являє собою послідовний перехід суб'єкта від однієї проблемної ситуації до іншої шляхом моделювання першої ситуації й прийняття побудованої моделі за об'єкт своєї діяльності. Суб'єкт будує послідовність моделей спочатку складеної або прийнятої задачі. При цьому перехід від проблемної ситуації до її моделі відбувається шляхом децентрації суб'єкта, тобто уявного виходу суб'єкта із ситуації, її активного вивчення ним зі сторони.

У випадку, коли задача стає уявною моделлю, ця децентрація приймає форму уявного роздвоєння суб'єкта: він вивчає свою власну думку, її перетворення, процес її протікання. Інакше кажучи, суб'єкт ніби роздвоюється на дві істоти: одна з них будує й перетворює уявні моделі вихідної задачі, а друга подумки вивчає моделі, які отримуються й співвідносить їх з моделлю кінцевої або проміжної мети діяльності.

Культура поводження при ознайомленні із задачею є, по суті справи, оволодіння деякою стратегією й тактикою пошуку розв’язування задачі. Вважається, що єдиний метод формування вміння розв’язувати задачі – це практика в розв’язуванні великої кількості задач. Відомий методист Д. Пойя так і радить: «Якщо хочете навчитися розв’язувати задачі, то розв’язуйте їх!» Дотримуючись цієї поради, учителі математики, фізики й інших предметів пропонують учням величезну кількість задач і витрачають на їх розв’язування не менше половини всього навчального часу, не враховуючи часу домашньої роботи учнів, що складається в основному з розв’язування задач. А результати цієї роботи більш ніж скромні: багато учнів так і не опановують загальні підходи їхнього розв’язування й, зустрівшись із задачею незнайомого виду, губляться й не знають, як до неї підступитися [11, с.74].

Культура розв’язування задач полягає в тому, що пошук розв’язування відбувається на базі глибокого й всебічного попереднього аналізу задачі, що кожна із численних спроб обґрунтовується і її результати аналізуються, що після знаходження правильного розв’язання виробляється ретроспективний аналіз із метою виявлення загальних методів, пошуку більш раціонального способу розв’язування, якщо це можливо. Такій культурі можна й потрібно вчити учнів, починаючи з початкових класів. Головне – це зробити самі задачі, їхню структуру й особливості предметом особливого вивчення й засвоєння.

Для цього необхідно використати особливу систему вправ, де конкретні задачі є лише матеріалом, а метою (вимогою) є послідовно:

1) розчленовування задачі на елементарні умови й вимоги;

2) виявлення зв'язків і залежностей між окремими умовами (даними) і між даними й вимогою;

3) побудова схематичної моделі задачі; 4) перекодування задачі на іншу мову. Неодмінною умовою є те, що у всіх цих вправах сама задача не розв’язується, щоб не відволікати учнів від головного ─ аналізу задачі.

Особливу роль у формуванні культури розв’язування задачі грає заключний, ретроспективний аналіз проведеного розв’язування з метою виявлення й засвоєння загальних методів і прийомів розв’язування задачі.

Зазначені навчальні задачі повинні використовуються протягом всіх років навчання й стати основою для формування навичок і вмінь розв’язування задач. Сам процес формування здатностей і вмінь повинен носити цілеспрямований і керований характер. Необхідно чітко представляти, який компонент загальних умінь розв’язувати задачі формується тепер за допомогою певної системи навчальних і конкретно-практичних задач, яку роль при цьому грає кожне з використовуваних задач.

Потрібно змінити й сам підхід до задач. Замість того, щоб бездумно розв’язувати велику кількість задач, корисніше розв’язувати в кілька разів меншу кількість задач, але при цьому саме розв’язування повинне містити глибоке вивчення їх умови, сутності їхнього розв’язування, виявлення загальних методів і прийомів. Задача й механізми їхнього розв’язування повинні стати об'єктами глибокого й постійного вивчення протягом усіх років навчання. Особлива увага повинна бути також приділена формуванню культури розв’язування, розумного підходу до пошуків і конструювання методів розв’язування, виробленню дисциплінованого мислення в процесі розв’язування, вихованню естетичного погляду на розв’язування, що припускає оцінку цього розв’язання не тільки з погляду його бездоганної логічної правильності, але й краси.

Формулювання задачі учнем пов'язане з пошуком загального способу розв’язування цілого класу задач, перебором варіантів розв’язування окремо взятої, конкретної задачі. Розв’язування задачі повинне здійснюватися на базі глибокого й всебічного попереднього аналізу задачі, необхідний і аналіз ходу розв’язання, у тому числі ретроспективний, пошук найбільш раціонального. Учитель, формуючи в школярів таку культуру розв’язування задач, домагається позитивних результатів, не перевантажуючи учнів більшим обсягом завдань. Слід також зазначити, що в процес навчання розв’язуванню задач учитель може додати багато елементів творчості. Один з ефективних творчих прийомів сприйняття самим учителем простого й зрозумілого для нього завдання, як нового й дивного, тобто спроба сприйняття проблеми очима дитини.

1.4. Структура процесу розв'язування задач

Якщо під процесом розв'язування задачі розуміти процес, що починається з моменту умови задачі до моменту повного завершення її розв'язування, то, очевидно, що цей процес складається не лише з викладу вже знайденого розв'язку, а з ряду етапів, одним з яких і являється виклад розв'язування.

Очевидно, що, отримавши задачу, перше, що треба зробити, – це розібратися в тому, що це за задача, які її умови, в чому полягають її вимоги, тобто провести аналіз задачі. Аналіз і складає *перший етап* процесу розв'язування задачі.

Аналіз задачі потрібно певним чином оформити, записати. Для цього використовуються різного роду схематичні записи задач, побудова яких складає *другий етап* процесу розв'язування.

Аналіз задачі і побудова її схематичного запису необхідно головним чином для того, щоб знайти спосіб розв'язування цієї задачі. Пошук цього способу складає *третій етап* процесу розв'язування.

Коли спосіб розв'язування задачі знайдений, його треба виконати, – це буде *четвертий етап* процесу розв'язування – етап виконання розв'язку задачі.

Після того, як розв'язування здійснене і викладене, необхідно переконатися, що це розв'язування правильне, що воно задовольняє усім вимогам задачі. Для цього проводять перевірку розв'язування, що складає *п'ятий етап* процесу розв'язування задачі.

При розв'язуванні багатьох задач, окрім перевірки, необхідно ще провести дослідження задачі, а саме встановити, за яких умов задача має розв’язок і притому скільки різних розв’язків у кожному окремому випадку; за яких умов задача взагалі не має розв'язку і т. д. Усе це складає *шостий етап* процесу розв'язування задачі.

Переконавшись в правильності розв'язування і, якщо потрібно, провести дослідження задачі, необхідно чітко сформулювати відповідь задачі, – це буде *сьомий етап* процесу розв'язування задачі.

Нарешті, в учбових і пізнавальних цілях корисно також виробити аналіз виконаного розв'язування, зокрема встановити, чи немає іншого, раціональнішого способу розв'язування, чи не можна задачу узагальнити, які висновки можна зробити з цього розв'язування і т. д. Усе це складає останній *восьмий етап* розв'язування задачі [31, с.54].

Отже, увесь процес розв'язування задачі можна розділити на вісім етапів:

1-й етап – аналіз задачі;

2-й етап – схематичний запис задачі;

3-й етап – пошук способу розв'язування задачі;

4-й етап – виконання розв'язку задачі;

5-й етап – перевірка розв'язування задачі;

6-й етап – дослідження задачі;

7-й етап – формулювання відповіді задачі;

8-й етап – аналіз розв'язування задачі.

Наведена схема дає лише загальне уявлення про процес розв'язування задачі як про складний і багатоплановий процес.

Задача. Знайти радіус вписаного кола в рівносторонній трикутник із стороною a.

1. Аналіз задачі. Дана задача є геометричною задачею на обчислення з параметрами (буквеними даними). Тому в першу чергу потрібно встановити можливі області зміни параметрів. Очевидно, що a – довжина сторони трикутника – може бути будь-яким додатнім числом, тобто

$$a > 0.$$

2. Схематичний запис задачі. Побудуємо заданий в задачі рівносторонній трикутник (рис. 1.2).

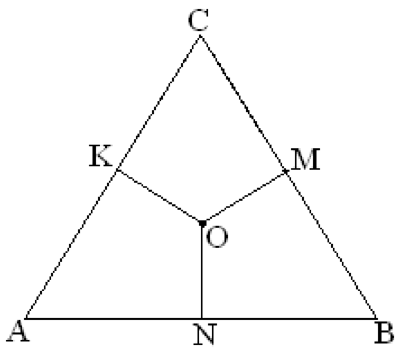


Рис. 1.2.

Відомо, що центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис. А в рівносторонньому трикутнику висота є і бісектрисою, і медіаною. Для того щоб побудувати висоти трикутника, потрібно з вершин трикутника опустити перпендикуляри на протилежні сторони. Утворилася точка *O*, яка є центром кола, вписаного в трикутник. Тоді з точки *O* опускаємо перпендикуляри на сторони. Утворені відрізки *OK*, *OM* і *ON* є радіусами вписаного кола в рівносторонній трикутник.

Виходячи з цього, умову задачі можна записати так.

Дано: 1) ABC – трикутник; 2) $AB = BC = CA = \alpha$;

Знайти: r.

3 – 5. Пошук і здійснення розв'язку. Дослідження задачі.

По відомій формулі маємо:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

Оскільки ΔABC рівносторонній трикутник зі стороною a, то

$$h_a = h_b = h_c = h.$$

Тоді $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h}$; $\frac{1}{r} = \frac{3}{h} \Rightarrow r = \frac{h}{3}$. (1)

Залишилося знайти h. Розглянемо трикутник ANB. Так як BN – висота, медіана, бісектриса, то $\angle BNA = 90^\circ$, а

$$AN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}. \tag{2}$$

За наслідком з теореми Піфагора знайдемо BN.

$$BN = \sqrt{AB^2 - AN^2}. \tag{3}$$

Підставимо вираз (2) у формулу (3), отримаємо:

$$B\ N=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} \Rightarrow \qquad B\ N=\frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad (4)$$

Підставивши вираз (4) у формулу (1), отримуємо, що

$$r=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

6. Перевірка. В даному випадку перевірка розв'язування зводиться до того, щоб переконатися, що по знайдених формулах дійсно можна знайти *r* таке, яке належить області його визначення. Очевидно, що повинна дотримуватися лише одна умова: $r > 0$. Розглядаючи отриману формулу для *r* і враховуючи вказані при цьому умови задачі, легко переконуємося у виконанні вказаної умови.

7. Відповідь: при $\alpha > 0$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

8. Аналіз розв'язування. Переглядаючи уважно проведене розв'язування, помічаємо, що при розв'язуванні подібних задач важливо заздалегідь при аналізі задачі встановити області зміни параметрів.

Отже, при розв’язуванні подібних задач потрібно аналізувати кожен крок розв'язування з точки зору його здійснимості за заздалегідь знайдених або заданих умов і при необхідності ці умови уточнювати, тим самим звужуючи області зміни параметрів.

При фактичному розв'язуванні вказані там етапи зазвичай не відокремлені один від одного, а переплітаються між собою. Так, в процесі аналізу задачі зазвичай здійснюється і пошук розв'язування. При цьому повний план розв'язування встановлюється не до здійснення розв'язку, а в його процесі. Тоді пошук розв'язування обмежується лише знаходженням ідеї розв'язування. Порядок етапів також іноді може мінятися [31, с.86].

Розділ ІІ. Методика навчання учнів загальноосвітніх шкіл розв'язуванню і складанню геометричних задач

2. 1. Методика розв'язування геометричних

Слово «теорема» грецького походження і означає «твердження, доступне пізнанню». Теоремою називають твердження, істинність якого доводиться. Деякі теореми називають наслідками, лемами, ознаками, правилами, законами.

Кожна теорема містить умову і висновок: $A \to B$, де A – умова (аргумент), B – висновок (теза). Умову називають достатньою, якщо при її виконанні висновок обов'язково правильний. Умову називають необхідною, якщо без її виконання висновок не може бути правильним.

Якщо $A \to B$ дана теорема (пряма) і правильним є твердження $B \to A$, то його називають теоремою, оберненою даній. Якщо істинні одночасно пряма і обернена теорема, тобто якщо $A \leftrightarrow B$, то умова кожної з них є і необхідною, і достатньою для їх наслідків. У таких випадках теорему найчастіше формулюють так: «Для того, щоб…, необхідно і достатньо…», або «… тоді і тільки тоді, коли…». Достатню і необхідну умову називають ознакою. Ознаку паралельності прямої і площини можна сформулювати так: «Щоб пряма, що не належить площині, була паралельна до площини, необхідно і достатньо, щоб вона була паралельна якій-небудь прямій у цій площині».

Вивчення теореми розпочинається з її введення. При введенні теорем використовують два методи: конкретно-індуктивний та абстрактно-дедуктивний. У першому випадку теорема в готовому вигляді не повідомляється, а проводиться робота з підведення учнів до теореми, виявлення певних математичних закономірностей. Результатом роботи є формулювання теореми. Наприклад, запитання «Чому дорівнює сума кутів трикутника?» приводить до формулювання відповідної теореми.

Абстрактно-дедуктивний метод введення теорем починається з формулювання теореми, а потім проводиться робота з уточненням її змісту. При виборі методу введення теорем слід врахувати як часові затрати, так і прогнозовані результати навчання. Однак, щоб запобігти байдужості, поява нової теореми має відповідати природній допитливості учнів: теорема не повинна виникати з «нічого». Потрібно з'ясувати можливість її застосування, передбачити її зміст.

Важливим етапом вивчення теореми є її мотивація. З цією метою можна використати такі прийоми:

1. Узагальнення спостережуваних у житті фактів, явищ і формулювання математичного твердження.
2. Показ необхідності знання теореми для розв'язування задач, зокрема практичних, доведення інших теорем.
3. Розв'язування задач на відшукання деяких закономірностей.
4. Виконання побудов, вимірювань, обчислень.
5. Показ розв'язання деякої проблеми в історії науки.

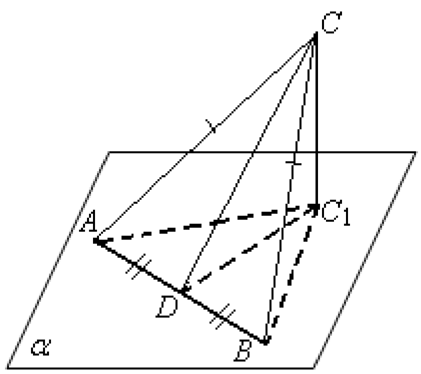


Рис. 2.1

Розглянемо приклад мотивації вивчення теореми про три перпендикуляри.

Нехай (Рис. 2.1) основа AB рівнобедреного ΔABC лежить у площині α, причому його медіана CD є похилою до цієї площини, а ΔABC_1 є ортогональною проекцією ΔABC на площину α. Що треба з'ясувати, щоб встановити, що ΔABC_1 – рівнобедрений? Потрібно пригадати властивості рівнобедреного трикутника і з'ясувати, чи є медіана C_1D трикутника ABC_1 його висотою? Для з'ясування того, що C_1D є висотою ΔABC_1, достатньо довести, що коли якась похила CD перпендикулярна до прямої AB, що належить площині α, то її проекція C_1D на цю площину також перпендикулярна до прямої AB. Після цього потрібно переходити до формулювання і доведення теореми про три перпендикуляри.

Основне з найважливіших завдань – це навчити учнів доводити теореми, розв'язувати задачі на доведення. Розуміння учнями доведень, уміння відтворити готове доведення теореми – важливий етап навчання доведенням. Головним тут є: 1) осмислення структури теореми (дано $\to$ довести); 2) розуміння методу доведення; 3) осмислення основної ідеї та етапів доведення.

У шкільному курсі математики використовують такі методи доведення: синтетичний (від умови і вже відомих тверджень до висновку); аналітичний (від твердження, що доводиться, до умови і відомих тверджень; від супротивного; повної індукції.

У підручнику більшість теорем доведені синтетичним методом. Такі доведення чіткі, короткі, однак вони не позбавлені деяких недоліків: незрозуміло, чому міркують так, а не інакше; додаткові побудови не аргументуються; ідея, план доведення приховані від учнів. Конспектувати недоліки синтетичного методу доведення теорем допомагають такі методичні прийоми:

1) формулювання ідеї доведення;

2)мотивація додаткових побудов;

3) формулювання плану доведення;

4) проведення доведення з опорою на короткий запис;

5) складання опорної схеми доведення;

6) складання таблиці з двома паралельними колонками (твердження і обґрунтування).

Розглянемо приклад теореми про властивість медіани рівнобедреного трикутника (Рис. 2.2) .

Дано: ΔABC – рівнобедрений, BK – медіана.

Довести: 1) BK – бісектриса;

2) BK – висота.

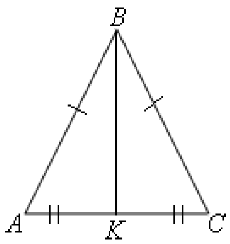
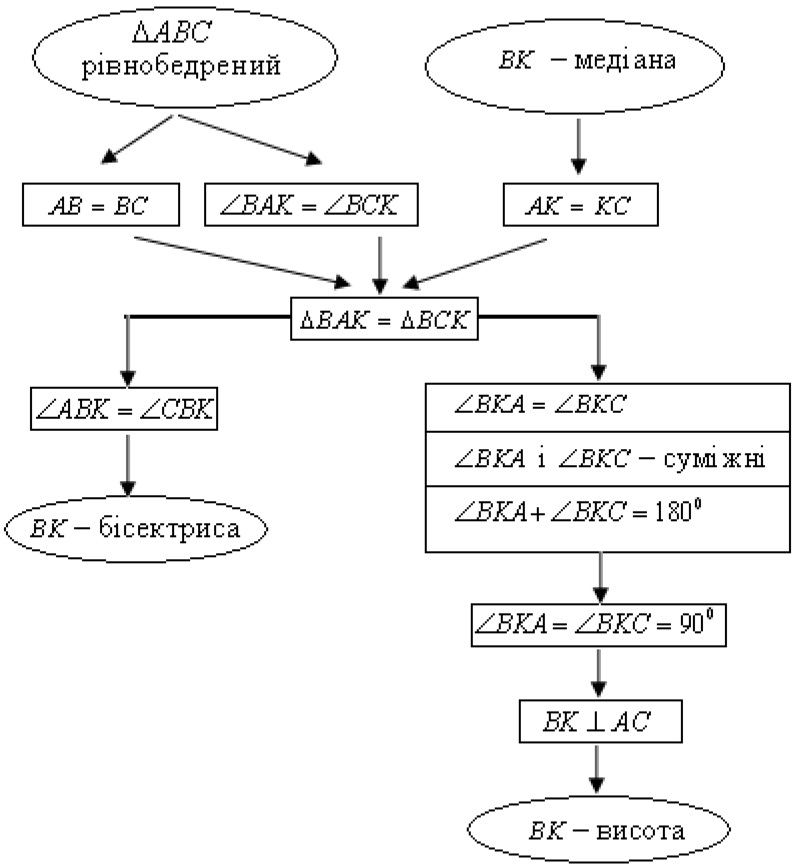


Рис. 2.2

Доведення

№	Твердження	Обґрунтування
1	$AB = BC$	За означенням рівнобедреного трикутника
	$AK = KC$	За означенням медіани
	$\angle BAK = \angle BCK$	За властивістю рівнобедреного трикутника
	$\Delta BAK = \Delta BCK$	За I ознакою рівності трикутника
	$\angle ABK = \angle CBK$	За означенням рівних трикутників
	BK – бісектриса	За означенням бісектриси
2	$\angle BKA = \angle BKC$	$\Delta BAK = \Delta BCK$ (доведено вище)
	$\angle BKA$ і $\angle BKC$ – суміжні	За означенням суміжних кутів
	$\angle BKA + \angle BKC = 180^0$	За теоремою про суму суміжних кутів
	$\angle BKA = \angle BKC = 90^0$	$\angle BKA + \angle BKC = 180^0$
	$BK \perp AC$	За означенням перпендикулярних прямих
	BK – висота	За означенням висоти

Опорну схему цієї теореми можна зобразити так:



Синтетичний метод доведення зручний тоді, коли доведення вже відоме і ми хочемо пояснити його іншим чи записати. Пошук доведення теорем доцільно здійснювати аналітичним методом. Доведення теореми $A \to B$ аналітичним методом здійснюється так: щоб довести B достатньо довести X; щоб довести X достатньо довести Y, і т. д., поки не приходимо до умови A чи інших відомих тверджень. Таким чином, доведення аналітичним методом спрямовується двома запитаннями: «Що треба довести?» і «Що для цього достатньо знати?» При цьому хід міркувань стає більш вмотивованим, природнім, легше виділити ідею та план доведення.

Розглянемо зразок пошуку доведення аналітичним методом теореми: «Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів» (Рис. 2.3).

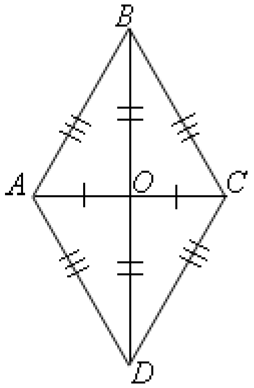


Рис. 2.3.

– Що потрібно довести, щоб довести, що BD – бісектриса кута ABC? (Що $\angle ABD = \angle CBD$.
– Як довести рівність цих кутів? (Треба довести рівність ΔABD і ΔCBD).
– Чи рівні ці трикутники? (Так, за III ознакою) і т. д.

Засвоєнню теореми після її доведення сприяють завдання таких видів:

– Сформулюйте теорему в формі твердження «Якщо…, то…».
– Сформулюйте обернене твердження.
– Відтворіть доведення теореми за готовим рисунком.
– Сформулюйте твердження, які використовуються при доведенні.
– Доведіть теорему іншим методом.
– Розв’яжіть задачу на застосування теореми.

Як важливий засіб укрупнення одиниці засвоєння геометричних знань виступає метод одночасного розгляду взаємозв'язаних задач і теорем.

Ця робота полегшується, якщо в попередніх класах проводилася аналогічна робота по арифметиці і алгебрі. Можливості такої роботи покажемо на різних прикладах.

1. а) Багато задач на обчислення вирішуються двома (або більше) способами; у цих випадках треба вказати, що збіг результатів при обох способах розв’язування підтверджує правильність отриманих відповідей.

Задача. У чотирикутнику *ABCD* кути *B* і *D* прямі. Діагональ *AC* утворює зі стороною *AB* кут 40^0, а зі стороною *AD* – кут 30^0. Знайти гострий кут між діагоналями *AC* і *BD* (рис. 2.4)

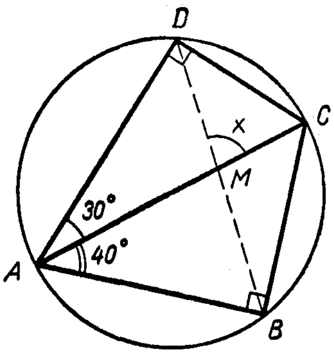


Рис. 2.4.

Дано: $\angle B = 90^0$, $\angle D = 90^0$, $\angle CAB = 40^0$, $\angle CAD = 30^0$.

Знайти: $\angle CMD$.

Розв’язування:

1. Знайдемо дугу *CD*, вона дорівнює $30^0 \cdot 2 = 60^0$, оскільки на неї спирається вписаний кут 30^0.

2. На дугу *BC* спирається вписаний кут 40^0 і тому дуга *BC* дорівнює $40^0 \cdot 2 = 80^0$.

3. $\cup AB = \cup ABC - \cup BC = 180^0 - 80^0 = 100^0$.

4. $\angle CMD$ містить вершину на кола, і тому $\angle CMD = \frac{\cup AB + \cup CD}{2} = \frac{100^0 + 60^0}{2} = 80^0$.

Перевірка (розв’язуємо другим способом).

1. Знайдемо дугу $\cup BC$, $\cup BC = 40^0 \cdot 2 = 80^0$.
2. Знайдемо дугу $\cup AB$, $\cup AB = 180^0 - 80^0 = 100^0$.
3. Знайдемо вписаний кут BAD, що спирається на $\cup AB$;

$$\angle BDA = \frac{100^0}{2} = 50^0.$$

4. $\angle CMD$ зовнішній для трикутника *AMD* і тому $\angle CMD = \angle MAD + \angle ADM = 50^0 + 30^0 = 80^0$.

Обидва способи розв’язування привели до однієї і тієї ж відповіді.

До розглянутої задачі також можна скласти і розв’язати обернену задачу. Щоб скласти обернену задачу, потрібно поміняти місцями одне з даних в умові з шуканою величиною прямої задачі. Всього можна скласти таким чином чотири обернені задачі.

Перша обернена задача.	Друга обернена задача.
Дано: $\angle CMD = 80^0$; $\angle D = 90^0$; $\angle CAB = 40^0$; $\angle CAD = 30^0$. Знайти: $\angle B$.	Дано: $\angle CMD = 80^0$; $\angle B = 90^0$; $\angle CAB = 40^0$; $\angle CAD = 30^0$. Знайти: $\angle B$.
Третя обернена задача. Дано: $\angle CMD = 80^0$; $\angle B = 90^0$; $\angle D = 90^0$; $\angle CAD = 30^0$. Знайти: $\angle CAB$.	Четверта обернена задача. Дано: $\angle CMD = 80^0$; $\angle B = 90^0$; $\angle D = 90^0$; $\angle CAB = 40^0$. Знайти: $\angle CAD$.

Розв’яжемо останню обернену задачу:

1. $\cup CB = 2\angle CAB = 2 \cdot 40^0 = 80^0$.
2. $\cup AB = \cup ACB - \cup CB = 180^0 - 80^0 = 100^0$.
3. $\cup AB + \cup DC = 2 \cdot \angle AMB = 2 \cdot 80^0 = 160^0$.
4. $\cup DC = 160^0 - 100^0 = 60^0$.
5. $\angle CAD = \frac{\cup DC}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$.

Остання обернена задача виявилася складнішою за пряму задачу. Зрозуміло, немає необхідності складати і розв’язувати всі обернені задачі. Але учні повинні засвоїти прийом складання обернених задач.

Після розв’язування оберненої задачі корисно порівняти будову і розв’язування прямої і оберненої задачі і спільно з учнями встановити наступне: якщо, наприклад, в розв’язуванні прямої задачі ми знаходимо величину $\angle AMB$, як половину відомої суми дуг DC і AB, то в оберненій задачі доводиться знайти суму цих дуг, рівну подвоєному куту AMB.

Основне значення порівняння розв’язування прямої і оберненої задачі якраз і полягає в перетворенні прямого зв'язку думок ("ділити суму дуг на 2") на зворотний зв'язок думок ("помножити кут на 2").

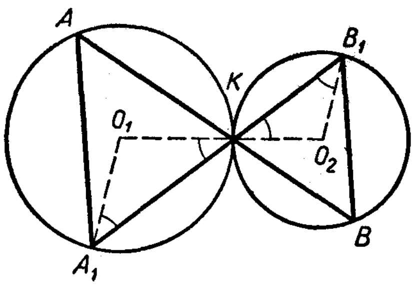
Успішність вивчення математики залежить перш за все від виникнення цієї замкнутої системи зв'язків і думок в результаті негайної перебудови прямого зв'язку думок в зворотний зв'язок думок.

Тим самим відповідний висновок знаходить логічну цілісність, включаючи не лише вихідну думку, але і його наслідок.

2. Після розв’язування задачі на доведення часто буває повчальним скласти і розв’язати обернену задачу (тобто довести обернену теорему).

Нехай задача розв’язана:

Якщо через точку дотику двох кіл провести дві січні і кінці їх з'єднати, то утворені хорди є паралельними (рис. 2.5.).



Ри

рис. 2.5.

Дано: кола O_1 і O_2 дотинаються в точці K,

AKB і A_1KB_1 – загальні січні двох кіл.

Довести: $AA_1 \parallel BB_1$.

Доведення:

1) Як відомо, що центри кіл O_1 і O_2 і точка їх дотику K лежать на одній прямій, тому $\angle O_1K\ _1 = \angle AO_2K\ _1 = \angle BO_2B_1K = \angle 1$. Значить треті кути трикутників теж рівні: $\angle A_1O_1K = \angle K\ _2B_1\ \Theta 1\ ^0\ 8\ 2 \cdot \angle 01$.

2) Але дані кути центральні; рівним центральним кутам відповідають рівні дуги:

$$\cup A_1K = \cup B_1K.$$

3) Рівним дугам відповідають рівні вписані кути:

$$\angle A_1A\ K = \angle B_1B\ .$$

4) Але ці кути лежать навхрест при прямих AA_1 і BB_1. Отже, $AA_1 \parallel BB_1$.

Обернена задача.

Дано: $AA_1 \parallel BB_1$, кола O_1 і O_2 дотинаються в точці K, AKB – січна.

Довести: A_1KB_1 – січна (тобто точки A_1, K, B_1 лежать на одній прямій).

Запишемо умову оберненої задачі:

Якщо через точку дотику K двох кіл провести січну АКВ, а через точки перетину цією січною з колами (А і В) провести паралельні хорди AA_1, BB_1 то точки A_1, K, B_1 лежатимуть на одній прямій.

Доведення.

1) $\angle KAA_1 = \angle KBB_1$, як внутрішні різносторонні при паралельних прямих ($AA_1 \parallel BB_1$).

2) Але ці кути вписані. Рівні вписані кути спираються на рівні дуги:

$$\cup A_1K = \cup B_1K .$$

3) Рівним дугам відповідають рівні центральні кути:

$$\angle A_1O_1K = \angle B_1O_2K .$$

4) ΔA_1O_1K і ΔB_1O_2K рівнобедрені. Значить рівні кути при основі:

$$\angle O_1KA_1 = \angle O_2KB_1 = \frac{180^0 - \angle A_1O_1K}{2} .$$

Звідси випливає, що B_1K є продовженням прямої A_1K: точки A_1, K, B_1 лежать на одній прямій.

Порівнюючи доведення прямої і оберненої теореми, ми виявимо, що в цих процесах виявляються нові взаємозв'язки.

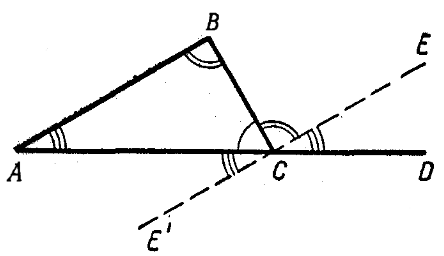
3. При доведенні однієї і тієї ж теореми двома структурно протилежними способами важливе для розвитку мислення. Покажемо це на прикладі.

Теорема. Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180^0.

Довести: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ (рис. 2.6).

Доведення:

1. Проведемо пряму $CE \parallel AB$.



Р

Рис. 2.6.

2. Тоді $\angle ABC = \angle BCE$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних AB і CE).

3. Продовжимо сторону AC. Тоді $\angle B\ \ A = C\angle E\ \ C$ (як відповідні кути при паралельних AB і CE).
4. Три кути, які лежать на одній прямій ACD і мають спільну вершину, в сумі утворюють розгорнутий кут $\angle B\ \ +C\angle B\ \ A+C\angle E\ \ E=€1\ \ ^0$.
5. Так як кут $\angle B\ \ C=E\angle A\ \ B$, а кут $\angle E\ \ C=D\angle B\ \ A$, то тоді отримаємо:

$\angle B\ \ +A\angle A\ \ C+B\angle B\ \ C=C1\ \ ^0$.

Це доведення має в психологічному відношенні той недолік, що перший крок – проведення прямої CE, паралельно AB, – для учнів нічим не мотивований: їм не зрозуміло, як вчитель «здогадався» провести саме паралельну пряму і для чого це робить.

Розглянемо інше доведення цієї теореми, структурно протилежне до першого доведення.

I. Побудуємо $\angle B\ \ C=E\angle A\ \ B$ (щоб знайти суму двох кутів: $\angle C$ і $\angle B$).

II. Кути ABC і BCE лежать навхрест. За ознакою паралельності прямих отримуємо: $CE \parallel AB$.

III. Ми побудували при одній вершині два кути. Побудуємо до кута BCA з другої сторони кут ACE', рівному куту BAC (щоб знайти суму трьох кутів: $\angle BCE$, $\angle ACB$, $\angle ACE'$).

За ознакою паралельності прямих отримуємо: $CE' \parallel AB$.

Отже, ми маємо: через одну точку C проведені дві прямі, паралельні однією і тією ж третьою прямою: $CE \parallel AB$ і $CE' \parallel AB$.

IV. Але на підставі аксіоми паралельних прямих маємо: через одну точку C можна провести лише одну пряму, паралельну AB. Значить, прямі CE і CE' збігаються.

V. Сума трьох кутів при вершині C дорівнює розгорнутому куту: $\angle A\ \ ' €\angle A\ \ E+C\angle B\ \ B=C1\ \ ^0$.

Замінивши два з цих кутів рівними їм кутами, отримаємо: $\angle B\ \ +A\angle A\ \ C+B\angle B\ \ C=C1\ \ ^0$.

Порівняємо ці доведення. У першому доведенні використовуються властивості кутів, що утворилися при пересіченні двох паралельних прямих третьою (пункти 2, 3). У другому доведенні використовуються зворотні теореми — ознаки паралельності прямих (пункти II, III).

У другому доведенні є новий елемент — послання на аксіому паралельних прямих; до того ж початок другого доведення зрозуміліше для учнів, чим початок першого: оскільки в теоремі йдеться про суму кутів трикутника, тому потрібно спробувати прибудувати ці кути при вершині.

Порівняння двох доведень однієї теореми як би створює внутрішню цілісність групи теорем, усередині якої встановлюються циклічні зв'язки між окремими теоремами. У даному зв'язку зупинимося ще на одному питанні.

У шкільному курсі геометрії інколи обмежуються доведенням прямої теореми; в той же час користуються часто згодом зворотною теоремою як фактом, нібито само собою зрозумілим, хоча вона не була доведена і не зрідка навіть не було вказано на необхідність особливого доведення зворотної теореми.

Така практика приводить до того, що учні схильні усюди вважати, що там де вірна пряма теорема, вірна також і обернена, й інколи просто ототожнюють ці теореми.

Якщо доведення прямої теореми розглянуто в підручнику, а оберненої теореми там немає, то вчитель може запропонувати обернену теорему у вигляді задачі на доведення.

Розглянемо далі ще один приклад, коли доцільно протиставляти прямі і обернені теореми в курсі геометрії. Після доведення теорем про співвідношення між елементами трикутника доцільно сформулювати узагальнену думку таким чином. Зведемо доведені три теореми:

1. Якщо в трикутнику $\angle C < 90^0$, то $c^2 = a^2 - 2ab + b^2$ або $c^2 < a^2 + b^2$.

2. Якщо в трикутнику $\angle C = 90^0$, то вірна теорема Піфагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

3. Якщо в трикутнику $\angle C > 90^0$, то $c^2 = a^2 + b^2 + 2a$ або $c^2 > a^2 + b^2$.

Ці три теореми можна сформулювати так:
Якщо сторона трикутника лежить проти гострого (прямого, тупого) кута, то квадрат цієї сторони відповідно менший (рівний, більший) сумі квадратів двох інших сторін.

Сформулюємо тепер обернену теорему. Якщо квадрат однієї сторони трикутника менший (рівний, більший) сумі квадратів двох інших сторін, то проти цієї сторони лежить відповідно гострий (прямий, тупий) кут.
У останній теоремі по суті полягають три теореми. Розглянемо першу з них:
Дано: $c^2 < a^2 + b^2$ (A). Довести: $\angle C < 90^0$.
Доведення (методом від супротивного).
Нехай даний кут не гострий. Тоді він може бути або прямим, або тупим.
Якщо ж він прямій, то згідно з прямою теоремою (2) маємо: $c^2 = a^2 + b^2$, що суперечить умові даної теореми (A). Якщо кут тупий, то згідно з прямою теоремою (3) маємо: $c^2 > a^2 + b^2$, що також суперечить умові (A).

Отже, даний кут гострий.

Можна запропонувати сформулювати і довести аналогічним прийомом дві інші обернені теореми, що є достатніми ознаками прямокутного і тупокутного трикутників. Зручно записати всі шість теорем так:

$$\left[c^2 \underset{<}{\overset{\geq}{-}} a^2 + b^2\right] \Leftrightarrow \left[\angle c \underset{<}{\overset{\geq}{-}} 9\ {}^0\right]($$

2.2. Використання загальних прийомів евристичної діяльності до розв'язування задач

Порівняння і аналогія

Розв'язуючи стереометричні задачі можна використовувати прийоми розумових дій, такі як: аналіз, синтез, порівняння, аналогія, абстрагування, узагальнення, індукція і дедукція.

Задача 1. Радіус циліндра 2 м, висота 3 м. Знайти діагональ осьового перерізу.

Дана стереометрична задача зводиться до розв'язання планіметричної:

«Знайдіть діагональ прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 4 м і 3 м відповідно». Також необхідно наголосити, що тут використовується прийом аналогії. Цей прийом використовують тоді, коли, аналізуючи стереометричну задачу, говорять, що дану задачу можна звести до планіметричної, не порушивши умови. Далі учням необхідно перейти до відпрацювання операцій прийому порівняння:

1. Виконати малюнок (Рис. 2.7) і пригадати означення: циліндра, осьового перерізу циліндра, його радіуса, висоти.

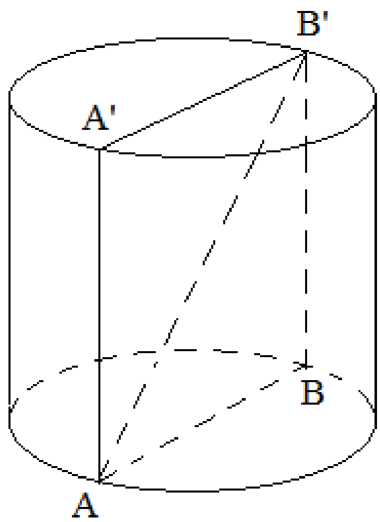


Рис. 2.7. зображення циліндра

2. Осьовий переріз $AA'B'B$ – прямокутник, основа якого дорівнює діаметру основи циліндра, тобто 4 м, а висота – 3 м.

3. Із прямокутного трикутника $\Delta ABB'$ за теоремою Піфагора одержимо $AB' = \sqrt{BB'^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5(\text{м})$.

Отже, діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 5 м.

У даній задачі використовують прийом порівняння, коли порівнювали циліндр з прямим циліндром, і використали прийом аналогії, коли звели розв'язання стереометричної задачі до розв'язання планіметричної, яку учні вже вміють без труднощів розв'язувати.

Задача 2. Радіус основи зрізаного конуса дорівнює 3 м і 6м, а висота 4 м. Знайдіть твірну зрізаного конуса.

Для розв'язання задачі учні виділяють операційний склад прийому:

1. Виконати малюнок, повторити означення конуса, зрізаного конуса, його радіуса, твірної.

2. Скласти план діяльності: розглянути осьовий переріз конуса і дослідити всі дані, які дано в задачі. Зробити висновок про те, що дано і що треба знайти.

3. Сформулювати висновок: «Оскільки осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція і її основи дорівнюють відповідно двом радіусам основ зрізаного конуса, то достатньо, використовуючи аналогію, розв'язати таку планіметричну задачу: «У рівнобічної трапеції основи відповідно дорівнюють 6м і 12 м, а висота – 4 м. Знайдіть бічну сторону»»(рис. 2.8.).

Потрібно наголосили, що дану стереометричну задачу можна порівняти, використовуючи прийом аналогії, з планіметричною задачею, що дасть нам потрібний результат. Прийом порівняння можна використати, коли розглядається осьовий переріз зрізаного конуса, де говорилося про те, що він є рівнобічною трапецію, і подальше розв'язання даної задачі зводиться до відшукання її бічної сторони.

Оскільки *BCKM* – прямокутник, бо *BM* і *CK* – висоти трапеції, то *BM*=*CK* і $\Delta ABM=\Delta DCK$. Тому $KD = AM = 0,5 \cdot (AD - BC) = 3$ (м).

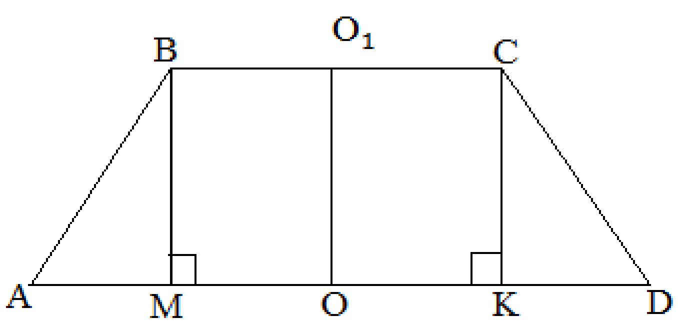


Рис. 2.8. Зображення трапеції

У прямокутному ΔAMB за теоремою Піфагора:

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,(\text{м}).$$

Отже, бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 5 м. Звідси можна зробити висновок, що твірна зрізаного конуса дорівнює 5 м.

При розв'язанні кожної стереометричної задачі використовується прийом порівняння, коли розглядають перерізи геометричних тіл, і прийом аналогії, коли формулюють планіметричну задачу. Учні помічають, що кожна задача такого типу розв'язується, формулюючи відповідну планіметричну задачу, використовуючи прийоми порівняння та аналогії. Така схема розв'язку значно полегшує розв'язання цих задач і підвищує не тільки рівень знань учнів, але й рівень зацікавленості математикою.

Задача 3. Діаметр кулі 25 см. На її поверхні дано точка *A* і круг, всі точки якого віддалені (по прямій) від *A* на 15см. Знайдіть радіус цього круга.

Пригадавши суть прийому порівняння та його операційний склад, проводимо аналіз задачі.

Для цього виконують малюнок (рис. 2.9.).

Пригадавши означення кулі та її властивості, учні приходять до висновку, що для розв'язання даної задачі необхідно розв'язати аналогічну планіметричну задачу, використовуючи прийом аналогії: «Дано рівнобедрений трикутник *AOB,* у якого дві сторони по 12,5 см, а третя – 15 см. Знайдіть висоту *BO* проведену з вершини *B* на сторону *OA*».

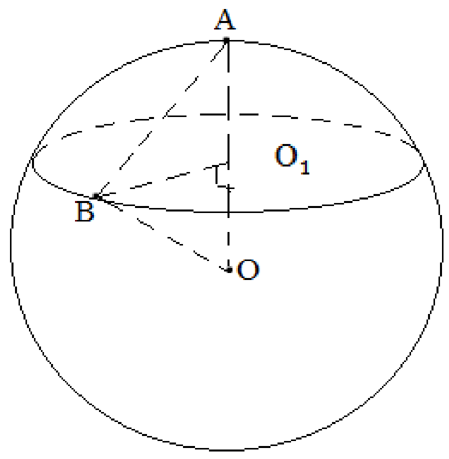


Рис. 2.9. Зображення кулі

Для цього потрібно перейти до відпрацювання операцій: ΔAOB – рівнобедрений (оскільки $OB=OA$) і AB=15 см.

Тепер можна знайти площу цього трикутника за формулою Герона:

$$S_{AOB} = \sqrt{p(p - AO)(p - OB)(p - AB)} = 75\,(\text{см}).$$

Але

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\, AO \cdot BO_1,$$

тоді

$$R = BO_1 = \frac{2S_{AOB}}{AO} = \frac{2 \cdot 75}{12,\ 5} = 12\,(\text{см}).$$

Отже, радіус круга дорівнює 12 см.

Задача 4. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть об’єм конуса, якщо радіус описаної навколо нього кулі дорівнює R.

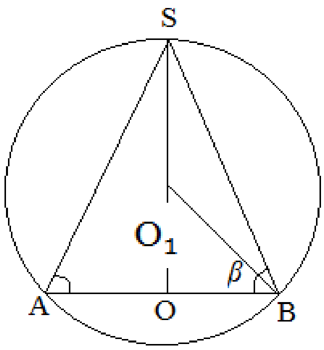


Рис. 2.10.

Пригадавши означення конуса, кулі та їх властивості, учні приходять до висновку, що для розв’язання даної задачі необхідно розв’язати таку планіметричну задачу: «У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює β. Навколо трикутника описано коло, радіус якого дорівнює R. Знайти висоту даного трикутника» (рис. 2.10.). Розв’язавши дану планіметричну задачу, ми отримаємо усі потрібні величини для обчислення об’єму конуса, вписаного в кулю стереометричної задачі.

Розв’язання:

Розглянемо осьовий переріз конуса і кулі. SO – висота ΔSAB, $SA=SB$. $<SBA=\beta$. O_1 – центр описаного навколо трикутника кола, $O_1S=O_1B=R$. В ΔASB центр O_1

описаного кола лежить на прямій, що містить висоту SO. З ΔABS за наслідком з теореми синусів:

$$\frac{AB}{\sin \angle S} = 2R,\ AB = 2R \cdot \sin(180° - 2\beta) = 2R \cdot \sin 2\beta.$$

$$OB = 0,5 \cdot AB = R \cdot \sin 2\beta;$$

З ΔSOB ($\angle O = 90°$):

$$SO = OBtg2\beta = R \sin 2\beta \cdot tg2\beta = R\ \frac{2tg\beta}{1+tg^2\beta} \cdot \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta} = R\ \frac{4tg^2\beta}{1-tg^4\beta}.$$

Розв’язавши планіметричну задачу, отримаємо усі необхідні дані для розв’язання стереометричної задачі. Підставимо отримані дані у формулу для обчислення об’єму конуса. Отримаємо:

$$V = \frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot OS = \frac{1}{3}\pi R^2 \sin^2 2\beta \cdot 2R \sin^2 \beta = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\beta \cdot \sin^2 \beta$$

.

Таким чином, розв’язавши спочатку планіметричну задачу, отримують необхідні дані для розв’язання стереометричної задачі.

Задача 5. Куля радіуса R вписана в зрізаний конус. Кут нахилу твірної до площини нижньої основи конуса дорівнює α. Знайдіть радіуси основ і твірну l конуса.

Розглянувши осьовий переріз зрізаного конуса, учні бачать, що ним є рівнобічна трапеція і формулюють відповідну планіметричну задачу, використовуючи аналогію: «У рівнобічній трапеції кут при основі дорівнює α. В неї вписано коло, радіус якого – R. Знайти сторони основи і бічну сторону трапеції».

Для розв’язання даної планіметричної задачі провести $BM \perp AD$. Тоді $BM=O_1O_2=2R$.

У ΔABM:

$$l = Ab = \frac{BM}{\sin \alpha} = \frac{2R}{\sin \alpha}.$$

Центр кола, вписаного в трапецію, лежить на перетині бісектрис, отже,

AO і BO – бісектриси, тобто $\angle BAO = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ABO = \frac{1}{2}\ \angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Це означає, що трикутник ΔABO прямокутний.

Далі під керівництвом вчителя учні переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Будують зображення перерізу зрізаного конуса, тобто рівнобічну трапецію (рис. 2.11.).
2. Потрібно сформулювати аналогічну планіметричну задачу.

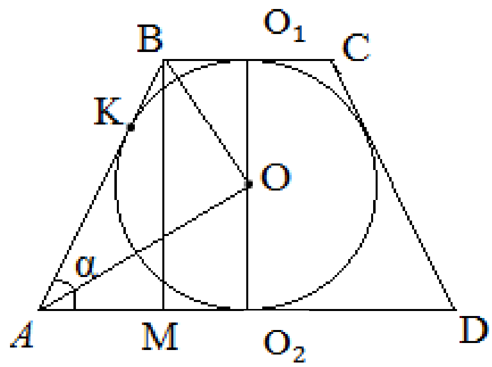


Рис. 2.11.

3. Розв’язання даної планіметричної задачі:

В ΔABM:

$$l = AB = \frac{BM}{\sin\ \alpha} = \frac{2R}{\sin\ \alpha}.$$

З ΔABO:

$$BO = AB \cdot \sin\ \angle BAO = \frac{2R \cdot \sin\ \frac{\alpha}{2}}{\sin\ \alpha} = \frac{R}{\cos\ \frac{\alpha}{2}}\ .$$

З прямокутного трикутника $\Delta\ BO_1O$:

$$BC = 2BO_1 = 2\sqrt{BO^2 - OO_1{}^2} = 2\sqrt{\left(\frac{R}{\cos\ \frac{\alpha}{2}}\right)^2 - R^2} = 2R\sqrt{\frac{1 - \cos^2\ \frac{\alpha}{2}}{\cos^2\ \frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= 2R\sqrt{tg^2 \frac{\alpha}{2}} = 2Rtg \frac{\alpha}{2}.$$

Оскільки $BK=BO_1$ і $AO_2=AK$, то

$$AD = 2AO_2 = 2AK = 2(AB - BK) = 2(AB - BO_1) = 2\left(\frac{2R}{\sin\alpha} - Rtg\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{2R}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\frac{R\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{R\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = 2Rctg\frac{\alpha}{2}$$

4. Розв’язавши планіметричну задачу, одержують значення бічної сторони та значення основ трапеції. Це значення відповідає твірній зрізаного конуса. А значення радіусів основ зрізаного конуса дорівнюють половині знайдених основ трапеції. Тому можна знайти радіуси основ зрізаного конуса, поділивши знайдені значення основ рівнобічної трапеції на два. Одержимо:

$$BO_1 = Rtg\frac{\alpha}{2},\ AD = Rctg\frac{\alpha}{2}, \text{ а твірна } l = \frac{2R}{\sin\alpha}.$$

Отже, значення BO_1, AD, l є розв’язками даної задачі. Спочатку розв’язавши її першу частину за допомогою розв’язання планіметричної задачі, а потім, одержавши потрібні нам величини, розв’язали стереометричну задачу при цьому використовували необхідні нам прийоми порівняння і узагальнення.

Узагальнення та конкретизація

Задача 6. Через вершину конуса проведено площину під кутом $45°$ до основи. Площина перетинає основу по хорді, що дорівнює радіусу основи конуса. Знайти об’єм конуса, якщо відстань від його вершини до хорди дорівнює 6 см.

Пригадавши означення конуса та його властивості, суть прийому узагальнення та формулу для обчислення об’єму конуса учитель наголошує, що розміри конуса можуть бути різними. Тому відстань від вершини конуса до хорди можна позначити в загальному випадку через *a* см, а кут позначити через *α*. Тоді, старшокласники можуть сформулювати узагальнену задачу: «Через вершину конуса проведено площину під кутом α до основи. Площина перетинає основу по хорді, що дорівнює радіусу основи конуса. Знайти об’єм конуса, якщо відстань від його вершини до хорди дорівнює *a*» (рис. 2.12.). Тут потрібно наголосити, що прийом узагальнення використовується після формулювання узагальненої задачі до даної.

Роздільне відпрацювання операцій в даній задачі таке:

1. Пригадати означення конуса та формулу для обчислення його об’єму.

Об’єм конуса

$$V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} \pi R^2 H .$$

2. Сформулювати узагальнену задачу, розв’язати її.

Розв’язання:

ΔAOB рівносторонній (за умовою), ΔASB рівнобедрений ($AS=SB$).

$$SO = SC \sin \alpha = a \sin \alpha , \; OC = SC \cos \alpha = a \cos \alpha .$$

З ΔAOC ($\angle O = 30°, \; \angle A = 60°, \; \angle C = 90°$):

$$R = OA = \frac{OC}{\sin \angle A} = \frac{a \cos \alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a \cos \alpha}{\sqrt{3}} .$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{2a \cos \alpha}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot a \cdot si\alpha = \frac{4a^3}{3} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{2a^3}{3} \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha .$$

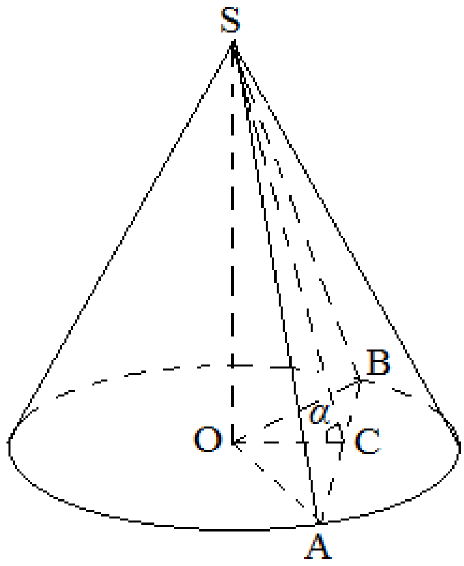


Рис. 2.12.

3. Зробити висновок: отже, для того, щоб розв'язати задачу, можна спочатку розв'язати її в загальному вигляді, а потім підставити числові значення в отриманий результат, одержимо розв'язок початкової задачі.

4. Отже, підставимо в отриманий результат початкові дані. Отримаємо:

$$V = \frac{2 \cdot 6^3}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 72\sqrt{2}\ (\text{см}^3).$$

Потрібно наголосити, що в пункті 3-4 використовується прийом конкретизації, тобто у виведену формулу підставляють конкретні дані з умови задачі і отримують розв'язок початкової задачі.

Задача 7. Куля, радіус якої R, перетнуто площиною на відстані c від центра. Знайдіть площу перерізу (рис 2.13.).

Спочатку учні пригадують, що називається кулею, її радіусом, що є її перерізом і чому він дорівнює.

Означення: Кулею називається тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться від даної точки на відстані, не більшій за дану. Ця точка називається центром кулі, а дана відстань радіусом кулі.

Теорема: Переріз кулі площиною є круг.

Оскільки перерізом кулі є круг, то ми можемо конкретизувати нашу задачу, тобто розглянути конкретну задачу з планіметрії до якої можна звести стереометричну. Отже, потрібно знайти площу розглядуваного круга. Для цього спочатку знайдемо його радіус.

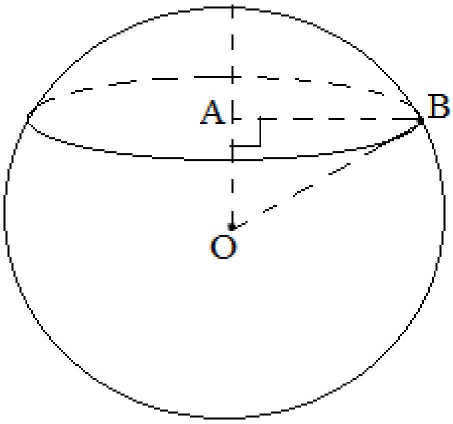


Рис. 2.13.

Розв'язання:

У прямокутному трикутнику ΔAOB за теоремою Піфагора:

$$AB = \sqrt{R^2 - c^2}.$$

Тоді площа перерізу дорівнює

$$S = \pi AB^2 = \pi \left(\sqrt{R^2 - c^2} \right)^2 = \pi \left(R^2 - c^2 \right).$$

В отриману формулу, щоб перевірити її правильність, можна підставити деякі конкретні значення, наприклад, нехай, R=41 см, а c=9 см. Тоді,

$$S = 1600\pi \text{ (дм}^2) = 16\pi \text{ (м}^2).$$

Оскільки ми отримали деяке конкретне додатне число, то дана формула є правильною.

<u>Задача 8</u>. В основі прямої призми лежить прямокутній трикутник з гіпотенузою 4 см і гострим кутом $45°$. Діагональ грані, що містить протилежний до даного кута катет, нахилена до площини основи під кутом $30°$. Знайти бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.

Розв'язання:

Можемо сформулювати задачу, яка є узагальненою по відношенню до даної задачі, використовуючи прийом узагальнення: «В основі прямої призми лежить прямокутній трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом β. Діагональ грані, що містить протилежний до даного кута катет, нахилена до площини основи під кутом α. Знайти бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму» (рис 2.14.).

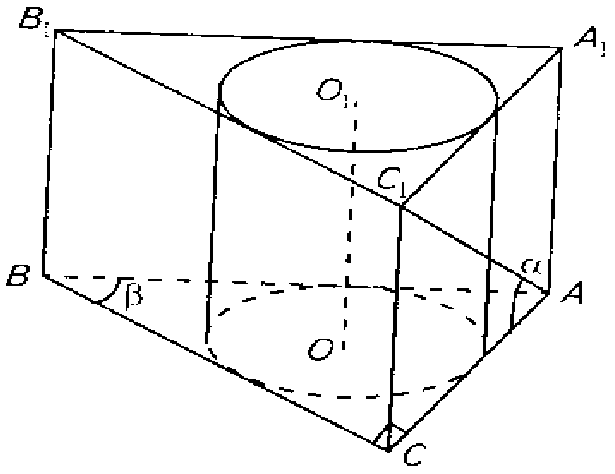


Рис.2.14.

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – дана призма, основою якої є ΔABC, в якому $\angle C = 90°$, $\angle B = \beta$, $AB = c$. Проекцією діагоналі AC_1 на площину основи є відрізок AC. Тому за умовою $\angle C_1AC = \alpha$. Висота H=OO_1 циліндра, вписаного в дану призму, дорівнює висоті призми, а радіус основи r – радіус кола, вписаного в ΔABC.

$$S_б = 2\pi rH .$$

З ΔABC ($\angle C = 90°$):

$$AC = c \cdot \sin\ \beta;\ BC = c \cdot \cos\ \beta .$$

Тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\ AC \cdot BC = \frac{1}{2}\ c \cdot \sin\ \beta \cdot c \cdot \cos\ \beta = \frac{1}{4}\ c^2\ \sin\ 2\beta .$$

З іншого боку

$$S_{\Delta ABC} = p \cdot r ,$$

де p – півпериметр ΔABC.

Оскільки

$$p=\frac{1}{2}\left(c+c\cdot\sin\beta+c\cdot\cos\beta\right)=\frac{c}{2}\left(1+\sin\beta+\cos\beta\right),\text{ то}$$

$$r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}=\frac{c\cdot\sin 2\beta}{2\left(1+\sin\beta+\cos\beta\right)}.$$

З ΔACC_1 ($\angle C=90°$):

$$H=CC_1=AC\cdot tg\alpha=c\cdot\sin\beta\cdot tg\alpha.$$

Отже,

$$S_б=2\pi\,\frac{c\cdot\sin 2\beta}{2\left(1+\sin\beta+\cos\beta\right)}\cdot c\cdot\sin\beta\cdot tg\alpha=\frac{\pi c^2\cdot\sin\beta\cdot\sin 2\beta\cdot tg\alpha}{1+\sin\beta+\cos\beta}.$$

Таким чином, ми розв’язали поставлену перед нами узагальнену задачу. Для розв’язання початкової задачі необхідно, використовуючи прийом конкретизації, в одержаний результат підставити числові значення величин. Тоді матимемо:

$$S_б=\frac{\pi c^2\cdot\sin\beta\cdot\sin 2\beta\cdot tg\alpha}{1+\sin\beta+\cos\beta}=\frac{\pi\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{8\sqrt{6}\pi}{3\left(1+\sqrt{2}\right)}\text{(см).}$$

Розв’язання узагальненої задачі дає можливість підставити в одержаний результат будь-які конкретні значення. У даному конкретному випадку, було б не досить зручно користуватися отриманими величинами, які є ірраціональними числами, з самого початку задачі. Тобто інколи краще спочатку розв’язати узагальнену задачу, а потім підставити в результат конкретні значення.

Задача 9. В основі піраміди лежить прямокутник, площа якого дорівнює S і кут між діагоналями дорівнює α. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Знайти об’єм конуса, описаного навколо цієї піраміди (рис. 2.15.).

Розв’язання:

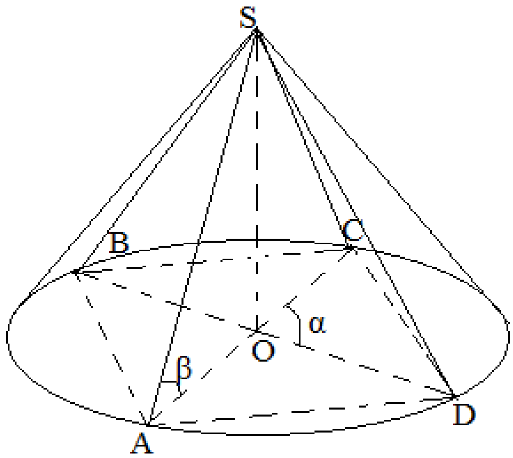


Рис. 2.15.

Нехай *SABCD* – дана піраміда, основою якої є прямокутник *ABCD*, $S_{ABCD} = S$. О – точка перетину діагоналей *AC* і *BD*, $\angle COD = \alpha$. Оскільки бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи один і той же кут, то вершина *S* проектується в центр кола, описаного навколо прямокутника, тобто в точку О. Отже, *S*O⊥*(ABC)* і за умовою $\angle SAO = \beta$.

Розглянемо прямокутник *ABCD.* З нього знайдемо діагональ *AC*. Як було встановлено раніше, $R = AO = \frac{1}{2}\ AC$. Потім з прямокутного трикутника ΔSOA знайдемо одну з його сторін, яка є висотою конуса. Оскільки усі необхідні елементи у нас будуть, то ми можемо знайти об’єм конуса, описаного навколо піраміди.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\ AC \cdot BD \cdot \sin\ \alpha = \frac{1}{2}\ AC^2\ \sin\ \alpha = S\ .$$

Звідси

$$AC = \sqrt{\frac{2S}{\sin\ \alpha}}\ . \qquad R = \frac{AC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2S}{\sin\ \alpha}}\ .$$

З ΔSOA ($\angle O = 90°$):

$$H = SO = OA \cdot tg\,\beta = \frac{tg\,\beta}{2}\sqrt{\frac{2S}{\sin\ \alpha}}\ .$$

Тоді

$$V=\frac{1}{3}\,\pi R^{2}H=\frac{1}{3}\,\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2S}{\sin\,\alpha}\cdot\frac{tg\beta}{2}\cdot\sqrt{\frac{2S}{\sin\,\alpha}}=\frac{\pi\cdot S\cdot tg\alpha}{12\,\sin\,\alpha}\,\sqrt{\frac{2S}{\sin\,\alpha}}\,.$$

Можна розглянути таку конкретизовану задачу, використовуючи при цьому прийом конкретизації: «В основі піраміди лежить прямокутник, площа якого дорівнює 4 см і кут між діагоналями дорівнює $30°$. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $45°$. Знайти об’єм конуса, описаного навколо цієї піраміди».

Отже, при розв’язанні даної задачі отримується формула, яка задає об’єм конуса в даному випадку. Підставивши деякі конкретні значення, одержимо значення об’єму.

$$V=\frac{\pi\cdot S\cdot tg\alpha}{12\,\sin\,\alpha}\,\sqrt{\frac{2S}{\sin\,\alpha}}=\frac{4\cdot 1}{12\cdot\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 4}{\frac{1}{2}}}\cdot\pi=\frac{2}{3}\cdot 4\cdot\pi=\frac{8}{3}\,\pi\,(\text{см}^3).$$

Задача 10. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює 4 см. Знайти площу поверхні кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом $30°$.

Пригадавши суть цих прийомів, відповідно до їх операційного складу проводимо аналіз умови задачі.

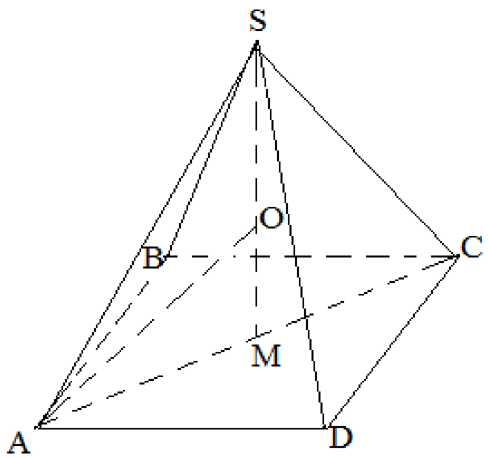


Рис. 2.16. Зображення піраміди

Нехай *SABCD* – дана піраміда, основа *ABCD* – квадрат, AB=4 см, $\angle SAC=\angle SCA=30°$.

Пригадавши означення правильної чотирикутної піраміди, вписаної в кулю, учні пропонують узагальнити дану задачу, тобто розв'язати її в загальному вигляді, використовуючи при цьому прийом узагальнення, а в одержаний результат підставити числові значення, використовуючи прийом конкретизації. «В кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює *a* см. Знайти площу поверхні кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом *α*».

Розв'язання узагальненої задачі:

Точка *O* – центр вписаної кулі, О належить висоті піраміди *SM*. *AS*=*CS*, $AC = \sqrt{2a}$, $\angle ASM = 90° - \alpha$.

З ΔASM ($\angle M = 90°$):

$$AS = \frac{AM}{\cos\ \alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{2\ \cos\ \alpha}.$$

З ΔASO (*AO*=*SO* як радіуси):

$$\angle ASO = 180° - \angle AOS - \angle SAO = 180° - 2\angle ASO = 180° - \angle ASC.$$

Але

$$\angle ASC = \angle SAO = 180° - 2\alpha.$$

Отже,

$$\angle AOS = 2\alpha.$$

Тоді

$$\angle AOS = \angle SAO = 90° - \alpha.$$

За теоремою синусів:

$$\frac{OS}{\sin\ \angle SAO} = \frac{AS}{\sin\ \angle SOA},\ \text{тобто}\ \frac{OS}{\sin\left(90° - \alpha\right)} = \frac{AS}{\sin\ 2\alpha}.$$

Звідки

$$OS = \frac{AS \cdot \cos\ \alpha}{2\ \sin\ \alpha \cdot \cos\ \alpha} = \frac{AS}{2\ \sin\ \alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{2\ \sin\ \alpha \cdot \cos\ \alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{2\ \sin\ 2\alpha}.$$

Але *OS* – радіус сфери, тому

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2\ \sin\ 2\alpha}\right)^2 = \frac{8\pi a^2}{\sin^2\ 2\alpha}.$$

Отже, розв'язавши узагальнену задачу можна розв'язати і початкову, підставивши початкові дані з задачі в отриманий результат (використовуючи прийом конкретизації).

$$S=\frac{8\pi a^2}{\sin^2 2\alpha}=\frac{8\cdot 4\cdot \pi}{\frac{3}{4}}=\frac{128}{3}\pi=42\frac{2}{3}\pi\ (\text{см})^2.$$

Задача 11. У циліндр вписано пряму призму, основою якої є рівнобічна трапеція з гострим кутом $60°$. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трапеції дорівнює *4* см і утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть об'єм циліндра.

Пригадавши означення циліндра, прямої призми, циліндра, описаного навколо призми, їх властивості та провівши аналіз умови задачі, учні помічають, що вона є конкретизованою по відношенню до такої задачі: «У циліндр вписано пряму призму, основою якої є рівнобічна трапеція з гострим кутом *α*. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трапеції дорівнює *l* і утворює з площиною основи кут *γ*. Знайдіть об'єм циліндра (рис. 2.17.).

Розв'язання:

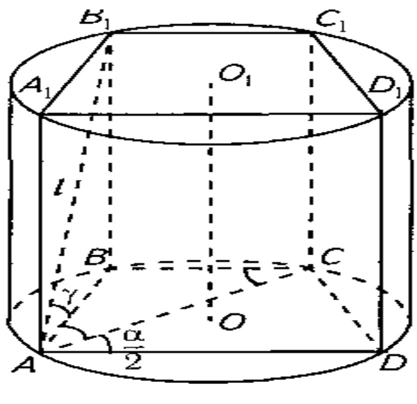


Рис. 2.17.

Для початку потрібно провести аналіз, використовуючи прийом порівняння: нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – дана призма, вписана в циліндр, основою якої є трапеція $ABCD$, $AD||BC$, $AB=CD$, $\angle BAD=\alpha$, $\angle BAC=\angle CAD$. Оскільки $AD||BC$, то $\angle DCA=\angle BCA$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих *AD* і *BC* та січній *AC*. Отже, *AB=BC*. *AB* є проекцією діагоналі B_1A на площину основи. Тому за умовою $B_1A=l$ і $\angle B_1AB=\gamma$.

З ΔAB_1B ($\angle B=90°$):

$$AB=BC=D_1D\ \cos\ \gamma=l\ \cos\ \gamma.\quad H=DD_1=l\ \sin\ \gamma.$$

$$V=\pi R^2 H,$$

де $H=OO_1=DD_1$, R – радіус кола, описаного навколо трапеції *ABCD*.

Цей радіус є радіусом кола, описаного навколо трикутника ΔABC. За наслідком з теореми синусів маємо:

$$\frac{AB}{\sin\ \frac{\alpha}{2}}=2R,\quad R=\frac{AB}{2\ \sin\ \frac{\alpha}{2}}=\frac{l\ \cos\ \alpha}{2\ \sin\ \frac{\alpha}{2}}.$$

$$V=\pi R^2 H=\pi\ \frac{l^2\ \cos^2\ \gamma}{4\ \sin^2\ \frac{\alpha}{2}}\cdot l\ \sin\ \gamma=\frac{\pi l^3\ \sin\ \gamma\cdot\cos^2\gamma}{4\ \sin^2\ \frac{\alpha}{2}}.$$

Потім потрібно перейдемо від узагальнення даної задачі до її конкретизації, тобто підставити числові значення в знайдену формулу. Тоді,

$$V=\frac{\pi l^3\ \sin\ \gamma\cdot\cos^2\gamma}{4\ \sin^2\ \frac{\alpha}{2}}=\frac{4^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{4}}{4\cdot\frac{3}{4}}\ \pi=\frac{16\sqrt{2}}{3}(\text{см}^2).$$

Практика свідчить, що розв’язання учнями задач з використанням прийомів узагальнення та конкретизації, значно підвищує їх рівень сформованості та стимулює математичну творчість. Адже, учні постійно творчо працюють над даними задачі, роблять висновки, формулюють узагальнені чи конкретизовані задачі.

Аналіз і синтез

Аналіз є основою досить загального підходу до розв’язування задач, відомого під назвою зведення задачі до сукупності під задач.

Ідея такого підходу полягає саме у властивому для аналізу «міркуванні у зворотному напрямі» від задачі, яку треба розв’язати, до підзадач, потім від цих під задач до ще простіших і т. д., поки вихідна (первинна) задача не буде зведена до набору елементарних задач.

Задача 12. На поверхні кулі дано три точки. Прямолінійні відстані між ними 6 см, 8 см, 10 см. Радіус кулі 13 см. Знайти відстань від центра до площини, яка проходить через ці точки.

Потрібно провести OO_1 перпендикулярно площині ΔABC. Тоді прямокутні трикутники AO_1O, BO_1O, CO_1O рівні за катетом і гіпотенузою (оскільки $AO=BO=CO$ – радіус кулі і OO_1 – спільний катет). Отже, O_1 – центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Зауважимо, що $6^2+8^2=10^2$. Тому трикутник ABC прямокутний. Через це O_1 – середина AC. Отже, AO_1=5 см.

Потрібно знайти шукану відстань з прямокутного трикутника AOO_1.

Після цього учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій (синтезу):

1. Будова зображення кулі (рис. 2.18.).

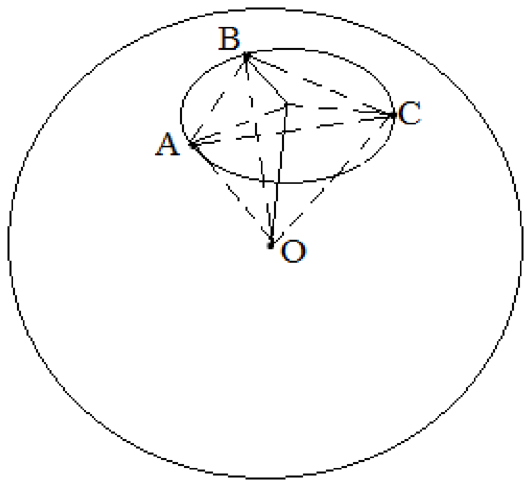


Рис. 2.18.

2. Позначення на ній даних точок і проведення її радіусу.
3. В прямокутному трикутнику AOO_1 за теоремою Піфагора:

$$OO_1=\sqrt{AO^2-AO_1{}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12\,(\text{см}).$$

4. Отже, шукана відстань дорівнює 12 см[5].

<u>Задача 13.</u> Рівносторонній трикутник обертається навколо своєї сторони a. Знайдіть об’єм отриманого тіла обертання.

Виконаємо малюнок і перейдемо до проведення аналізу задачі

Аналіз: Як ми знаємо, в результаті обертання трикутника навколо своєї сторони ми отримаємо два конуси. Отже, для відшукання об'єму утвореного тіла обертання, необхідно знайти об'єм конуса і помножити його на два.

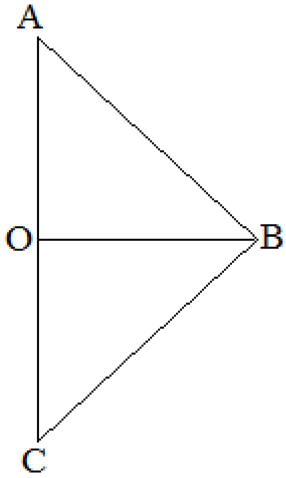


Рис. 2.19.

З рівностороннього трикутнику *ABC* знайдемо висоту конуса і радіус основи:

$$OC = AO = \frac{1}{2}\ AC = \frac{a}{2}, \quad BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тоді об'єм отриманого тіла обертання дорівнює сумі об'єму двох однакових конусів з радіусом *BO* і висотою *AO*=*OC* (використовуємо прийом синтезу).

Тобто,

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}\ \pi \cdot OB^2 \cdot AO = 2 \cdot \frac{1}{3}\ \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a^2}{4} = \frac{\pi}{4}\ a^3.$$

Задача 14. Довести, що якщо в осьовий переріз зрізаного конуса можна вписати коло, то його висота є середня пропорційна між діаметрами основ (рис. 2.20.).

Розв'язання:

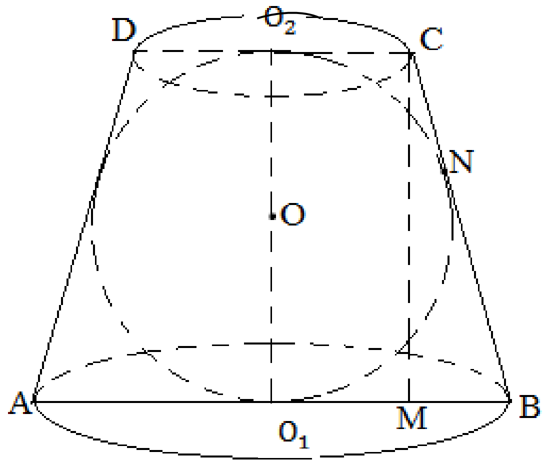


Рис. 2.20.

Нехай в осьовий переріз *ABCD* зрізаного конуса вписано коло з центром *O*.

Позначимо $AO_1=R$, $DO_2=r$, $O_2O_1=H$, $AD=L$. Треба довести, що $H=2\sqrt{rR}$.

Осьовим перерізом є рівнобічна трапеція *ABCD.* З точки *C* на *AB* опустимо перпендикуляр $CM\perp AB$; тоді

$$MB=O_1B-O_1M=O_1B-O_2C=R-r.$$

За властивістю дотичних проведених з однієї і тієї ж самої точки до кола, $O_2C=CN, O_1B=NB$.

Звідси $O_2C-O_1B=CN+NB$, тобто $L=R+r$.

З прямокутного трикутника $\Delta\ CMB\ \angle M=90°$, знаходимо

$$CM=H=\sqrt{CB^2-MB^2}=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{rR}.$$

Що й треба було довести [3].

Задача 15. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з її центра під кутом *β*. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з серединою цієї хорди, нахилений до площини основи під кутом *α*. Знайдіть бічну поверхню циліндра, якщо відстань від центра нижньої основи до цього відрізка дорівнює *d*. (рис. 2.21.)

Розв’язання:

Нехай дано циліндр з віссю OO_1, AB – хорда нижньої основи, $\angle AOB = \beta$, $AM=MB$. Проекція відрізка O_1M на площину основи є відрізок OM. Тому за умовою $\angle O_1MO = \beta$. З точки О проведемо $ON \perp O_1M$. За умовою $ON=d$.

Площа бічної поверхні циліндра дорівнює

$$S_б = 2\pi RH.$$

Після цього учні під керівництвом вчителя переходять до роздільного відпрацювання операцій:

1. Побудова зображення циліндра:

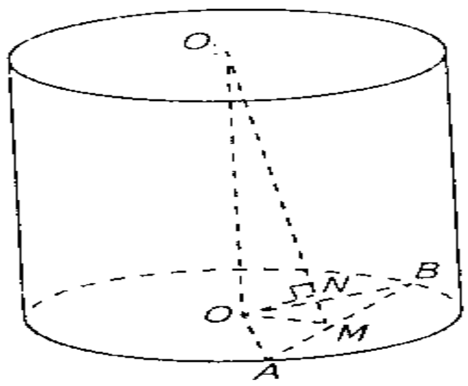


Рис. 2.21.

2. Для відшукання бічної поверхні циліндра потрібно розглянути відповідні трикутники з малюнка і знайти необхідні елементи.

З ΔONM ($\angle N = 90°$):

$$OM = \frac{ON}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\alpha}.$$

З ΔO_1OM ($\angle O = 90°$):

$$H = OO_1 = OM \cdot tg\alpha = \frac{d}{\sin\alpha} \cdot tg\alpha = \frac{d}{\cos\alpha}.$$

Оскільки $OA=OB$, то в ΔAOB медіана OM є одночасно висотою і бісектрисою. Тому $\angle OMA = 90°$, $\angle AOM = \frac{\beta}{2}$.

З $\Delta\, AOM$ ($\angle M = 90°$):

$$R = AO = \frac{OM}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{d}{\sin\alpha \cdot \cos\frac{\beta}{2}}.$$

Тоді,

$$S_б = 2\pi \frac{d}{\sin\alpha \cdot \cos\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{d}{\cos\alpha} = \frac{4\pi d^2}{\sin 2\alpha \cdot \cos\frac{\beta}{2}}.$$

Задача 16. Твірна зрізаного конуса нахилена до площини основи під кутом α. Радіуси основ R і r ($r<R$). Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса (рис. 2.2.).

Розв’язання:

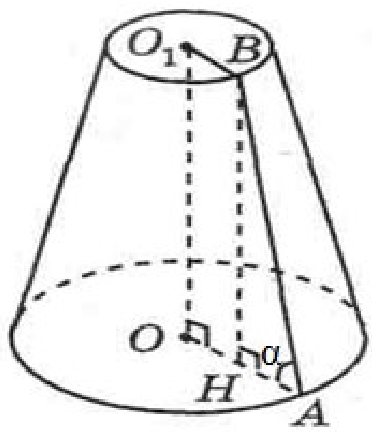


Рис. 2.22.

Дано зрізаний конус, круг ($O;OA$) і круг ($O_1;O_1B$) – основи, $OA=R$, $O_1B=r$, α – кут нахилу AB до площини основи. Знайти $S_б$.

$$S_б = \pi\left(r + R\right) l,$$

де r і R – радіуси основи, l – твірна.

OA і O_1B – прямі перетину паралельних площин основ зрізаного конуса площиною ABO_1O, то за властивістю паралельних площин $OA||O_1B$. Отже, за означенням ABO_1O – трапеція з основами OA і O_1B. Оскільки OO_1 – висота зрізаного конуса OO_1||(круг ($O;OA$)), то $O_1O||OA$.

Проведемо $BH||OO_1$. Тоді $BH \perp OA$. Отже, за означенням OO_1BH – паралелограм з прямим кутом BHO, то OO_1BH – прямокутник. Тоді,

$O_1B=OH=r$ і тоді $AH = OA - OH = R - r$.

BH – перпендикуляр, проведений з точки B до площини нижньої основи зрізаного конуса, BA – похила, то AH – її проекція. Тоді за означенням кута між прямою і площиною $\angle AOB$ – кут нахилу AB до площини основи. За умовою $\angle AOB = \alpha$.

З ΔABH: $\angle AHB = 90°, \angle HAB = \alpha$, $AH = R - r$.

$$\cos \angle HAB = \frac{AH}{AB},\ AB = \frac{AH}{\cos \angle HBA},\ AB = \frac{R-r}{\cos \alpha}.$$

Тобто

$$l = \frac{R-r}{\cos \alpha}.$$

Отже,

$$S_б = \pi \left(r + R \right) l = \pi \left(r + R \right) \cdot \frac{R-r}{\cos \alpha} = \frac{\pi \left(R^2 - r^2 \right)}{\cos \alpha}.$$

Задача 17. Через дві твірні конуса, які утворюють між собою кут α, проведено площину, що перетинає основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом β. Знайти бічну поверхню конуса, якщо відстань від центра основи до середини твірної дорівнює d (рис. 2.23).

Розв’язання:

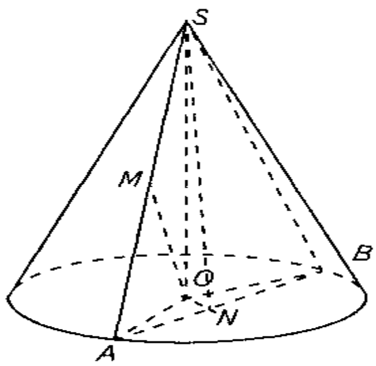


Рис. 2.23.

Нехай дано конус з висотою SO, SA, SB – його твірні, $\angle ASB = \alpha$, $\angle AOB = \beta$, $SM=MA$, $OM=d$. $S = \pi Rl$, де $R=OA$ – радіус основи, $l=SA$ – довжина твірної.

З ΔSOA: $OM = \dfrac{1}{2} SA$, тому точка O є центром описаного кола. $SA = 2OM = 2d$. З точки S проведемо $SN \perp AB$. За теоремою про три перпендикуляри $ON \perp AB$. Оскільки $SA=SB$, висота SN є бісектрисою і медіаною ΔASB. Тому, $\angle NSA = \dfrac{\alpha}{2}$ і $AN=NB$. Аналогічно, $\angle NBO = \dfrac{\beta}{2}$.

Провівши аналіз задачі, потрібно провести її синтез.

З ΔSNA:

$$NA = SA \cdot \sin \angle NSA = 2d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

З ΔONA:

$$OA = \frac{NA}{\sin \angle NOA} = \frac{2d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Отже, маючи усі необхідні дані, можна знайти площу бічної поверхні.

$$S_{б} = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \frac{2d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot 2d = \frac{4\pi d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Задача 18. Радіуси двох куль – 25 дм і 29 дм, а відстань між їх центрами – 36 дм. Знайти довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні (рис. 2.24.).

Під керівництвом вчителя учням спочатку потрібно пригадати операційний склад прийому аналізу і синтезу, потім виконати роздільне відпрацювання операцій:

1. Аналіз (провести аналіз задачі, використовуючи прийом аналізу). Встановити мету: обчислити довжину лінії по якій перетинаються дані кулі.

2. Пригадати означення кулі, кола, перерізу кулі, що проходить через її центр.

3. Скласти план. Учні ставлять перед собою питання: «Як знайти довжину лінії по якій перетинаються дані кулі?».

4. Оскільки $O_1O_2=36<25+29$, то поверхні двох куль перетинаються по

колу. Розглянемо переріз поверхонь цих куль довільною площиною, яка проходить через пряму їх центрів. Ця площина перетинає кожну поверхню по її великому колу, які перетинатимуться в точках *A* і *B*. $O_1O_2 \perp AB$. Нехай O_2O_1 і *AB* перетинаються в точці *C*. Відрізок *CA* буде радіусом кола, по якому перетинаються поверхні даних куль. Нехай $O_1C = x$, тоді $CO_2 = 36 - x$ (Відбулося проведення евристичного прийому аналізу).

Переходимо до роздільного відпрацювання операцій (використовуємо загальний евристичний прийом – синтез):

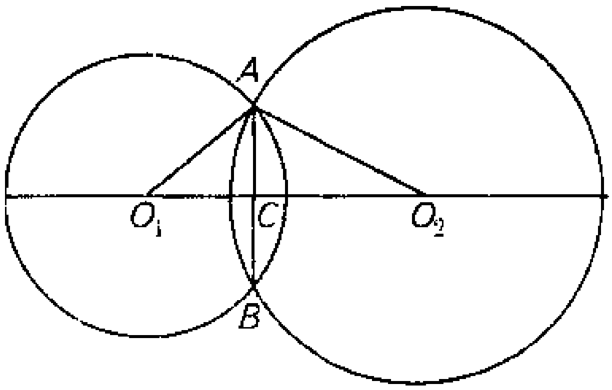


Рис. 2.24.

1. З ΔO_1AC ($\angle C = 90°$):

$$AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2 = 25^2 - x^2.$$

2. З ΔO_2AC ($\angle C = 90°$):

$$AC^2 = O_2A^2 - O_2C^2 = 29^2 - (36 - x)^2.$$

Звідси:

$$25^2 - x^2 = 29^2 - (36 - x)^2,\ x = 15\,(\text{дм}).$$

$$AC = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\,(\text{дм}).$$

Коло *(C, CA)* матиме довжину $2\pi \cdot CA = 2\pi \cdot 20 = 40\pi$ (дм).

Отже, ми відшукали довжину лінії по якій перетинаються поверхні двох куль.

Як показує практика, розв’язання задач, використовуючи прийоми аналізу та синтезу, сприяють кращій активності учнів на уроках. Адже, учні самі, проводячи потрібні міркування, поступово приходять до розв'язання даної задачі. При цьому вони спочатку використовують аналіз, тобто аналізують дану задачу, а потім, використовуючи прийом синтезу та проведені міркування, розв'язують без труднощів поставлену перед ними задачу.

Такі прийоми евристичної діяльності, як свідчить практика, стимулюють в учнів бажання вчитися, а саме головне – міркувати та висловлювати свої думки, навіть, якщо вони можуть бути не зовсім вірні. При цьому ввесь клас бере активну участь у бесіді і відшукані правильних методів розв'язання задачі. Крім цього, використання аналізу і синтезу при розв'язувані задач високого рівня стимулює в учнів розвиток творчого мислення.

2.3. Розв'язування геометричних задач раціональними способами

Характерною рисою курсу геометрії є розв'язування великої кількості задач. Таке насичення курсу геометрії вправами допомагає, насамперед, досягненню міцності знань.

Розв'язування задач є найбільш поширеною формою поєднання теорії з практикою під час вивчення геометрії. При розв'язуванні конкретної задачі у якості головного виступає провідна функція, заради якої розв'язувалася задача. Навчальні функції задач спрямовані на формування в учнів систем математичних знань, умінь і навичок на різних етапах їх засвоєння. Виховна функція задач визначається цілями виховання і спрямована на виховання пізнавального інтересу, самостійності у здобутті знань і навичок навчальної праці, моральних якостей, культури. Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення учнів, на їх навчання ефективним прийомам розумової діяльності, наприклад, навчання вмінню виділяти головне, суттєве в задачах та їх розв'язуванні. Контролююча функція спрямована на встановлення рівня навченості, математичного розвитку учнів, здібностей до самостійного вивчення математики, сформованості пізнавальних інтересів учнів.

В одних випадках геометричні задачі дають змогу закріпити пройдене, в інших – показують застосування певних теоретичних питань на практиці. Розв'язування задач виявляє глибину знань учнів і вказує на наявні прогалини в їх підготовці, привчає учнів до послідовності і систематичності в роботі, виховує наполегливість, працьовитість, кмітливість.

Таким чином, задачі є невід'ємною складовою частиною курсу геометрії.

Виконання будь-якої вправи з математики, незалежно від ступеня трудності завдання, вимагає пригадати і застосувати певні математичні положення. У своїй книзі «Як розв’язувати задачу» Д. Пойа вказує на чотири ступені в процесі розв’язування задачі: «По-перше, ми повинні зрозуміти задачу, ми повинні виразно бачити, що в ній є шуканим. По-друге, ми повинні побачити, як пов’язані один з одним різні елементи задачі, як невідоме пов’язане з відомим. Це необхідно, щоб дістати уявлення про розв’язування, щоб скласти план. По-третє, ми здійснюємо наш план. По-четверте, оглядаючись назад на одержане розв’язання, ми знову вивчаємо і аналізуємо його» [22, с.201].

І етап	Зрозуміння постановки задачі (потрібно ясно зрозуміти задачу)	Що невідоме? Що дано? У чому полягає умова? Чи можна задовольнити умову? Чи достатньо умови для визначення невідомого? Або недостатньо? Або надмірно? Або суперечливо? Зробіть малюнок. Напишіть відповідні позначення. Розділіть умову на частини.
ІІ етап	Складання плану розв’язування (потрібно знайти зв'язок між даними і	Чи не зустрічалася раніше ця задача? Відома яка-небудь подібна задача? Чи не знаєте теореми, яка могла би бути корисною?

	невідомими. Якщо не вдається відразу виявити цей зв'язок, корисно буде розглянути допоміжні задачі. У кінці необхідно прийти до плану розв'язування)	Розгляньте невідоме. І попитайтеся згадати знайому задачу з такими подібними невідомими. Ось задача, подібна даній і вже розв'язана. Чи не можна скористатися нею? Чи не можна застосувати її результат? Чи не можна використати метод її розв'язування ? Чи не можна інакше сформулювати умову задачі? Якщо не вдається розв'язати дану задачу, спробуйте спочатку розв'язати подібну. Чи не можна придумати більш доступну подібну задачу? Аналогічну задачу? Чи не можна розв'язати частину задачі? Чи не можна витягнути що-небудь корисне з даних? Чи не можна придумати інші дані, з яких можна було б визначити невідоме? Чи не можна змінити невідоме, або дані, або те і інше так, щоб нові невідомі і нові дані виявилися ближчими один до одного? Чи всі дані використані? Чи прийняти всі поняття, що містяться в задачі?
III етап	Здійснення плану (потрібно здійснити план розв'язування)	Здійснюючи план розв'язування, контролюйте кожен крок. Чи ясно, що зроблений крок правильний? Чи зумієте довести, що він правильний?

IV етап	Погляд назад (Потрібно вивчити знайдений розв'язок)	Чи не можна перевірити результат? Чи не можна перевірити хід розв'язування? Чи не можна отримати той же результат інакше? Чи не можна угледіти його з одного погляду? Чи не можна в якій-небудь іншій задачі використовувати отриманий результат або метод розв'язування?

Реалізація цих вказівок є для учнів нелегким завданням. Крім вимог правильно розв'язувати, перед учнями ставиться вимога виконати завдання раціональним способом, тобто так, щоб обраний шлях до мети був найкоротшим, з найменшою кількістю перетворень і обчислень. За існуючими нормами, якщо спосіб розв'язування нераціональний, оцінку знижують.

Іноді проти цього заперечують, посилаючись на те, що за обмежений час учні не встигають порівняти різні шляхи розв'язування. Прихильники такої точки зору вважають, ніби до початку роботи не можна встановити, що обраний спосіб розв'язування нераціональний.

Таке заперечення не можна вважати серйозним. Розв'язуючи задачу нераціональним способом, учні витрачають (більше часу і сил, а через це часто не встигають виконати завдання вчасно. Труднощі відшукування раціональних способів, звичайно, є. Але з цього випливає лише необхідність систематично тренувати учнів у відборі найбільш зручних способів розв'язування, вироблення в них потрібних навичок.

Отже, мова йде про планомірне навчання учнів протягом кількох років. Без цього вони не зможуть опанувати раціональні способи розв'язування задач.

Протягом багатьох років автор дотримується певної меодичної послідовності в навчанні учнів розв'язувати задачі раціональним способом. Основні вимоги цієї роботи такі;

а) Під час навчання учнів у школі від них вимагають виконувати обчислення найпростішим способом — на основі застосування законів арифметичних дій, використання формул скороченого множення та ін.

б) Ознайомлюючи учнів з методами розв'язування задач з кожної теми, треба вказувати, в яких випадках певний метод слід застосовувати, а в яких він виявляється нераціональним.

в) Добираючи вправи до певної теми, треба виділити ті з них, які можна розв'язувати особливо дотепними прийомами. Передбачаючи пропозиції учнів розв'язувати вправу звичним способом, слід підготувати раціональний спосіб виконання вправи.

г) У процесі розв'язування задачі слід чуйно реагувати на всі можливі прийоми раціоналізації розв'язування і привчати учнів уважно ставитись до таких прийомів. Для успішного здійснення цього заходу треба відзначати випадки раціонального розв'язування задачі, всіляко заохочувати учнів щоразу відшукувати найкращий спосіб розв'язування вправи [26, с.48].

Докладніше про методику роботи в цьому напрямі покажемо нижче.

Насамперед, учнів треба переконати, що не слід обирати спосіб розв'язування поспішно. Річ у тому, що очевидний шлях розв'язування, який, як кажуть, кидається в очі, далеко не завжди є найкращим.

Маючи це на увазі, іноді треба не заперечувати, коли учні пропонують розв'язати задачу очевидним, але складним способом. Проте й після розв'язання обов'язково розглянути спосіб раціональний. Це справляє на учнів сильне враження, і тому час, витрачений на нераціональне розв'язування, не пропав марно.

З другого боку, автор систематично пропонував учням такі задачі, на яких зручно було демонструвати саме необхідність попередньої роботи для визначення раціонального методу розв'язування.

Пояснимо це на прикладах.

1) Нехай треба знайти катет трикутника, дві інші сторони якого дорівнюють 493 і 468.

Розв’язування ґрунтується на теоремі Піфагора. Обчислення часто має такий вигляд:

$x = \sqrt{493^2 - 468^2} = \sqrt{243049 - 219024} = \sqrt{24025} = 155$.

Тут доводиться виконати два піднесення до квадрата тризначних чисел, віднімання шестизначних чисел і добування кореня з п’ятизначного числа. Якщо скористатися формулою $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ обчислення спрощуються

$x = \sqrt{493^2 - 468^2} = \sqrt{25 \cdot 961} = 5 \cdot 31 = 155$.

2) Через середину M сторони BC паралелограма $ABCD$, площа якого дорівнює 1, і вершину A проведено пряму, яка перетинає діагональ BD у точці Q. Знайти площу чотирикутника $QMCD$.

Розв'язування: $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4}$. $S_{\Delta ABQ} : S_{\Delta ABM} = |AQ| : |AM|$.

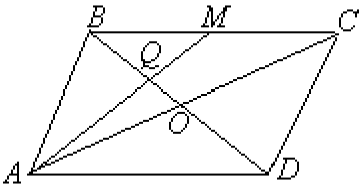


Рис. 2.25.

Знайдемо величину цього відношення, позначивши $|BQ| : |QO| = m : n$, де O – точка перетину діагоналей паралелограма ABCD. $\overrightarrow{AQ} = x \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{x}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AQ} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AO} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{2(m+n)}\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{m}{2(m+n)} = \frac{x}{2}, \\ \frac{n}{m+n} = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{m+n} = x, \\ \frac{n}{m+n} = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}x = 1 \right) \Rightarrow \left(x = \frac{2}{3} \right).$$

Отже, $\left(|AQ| = \frac{2}{3}|AM| \right) \Rightarrow \left(|QM| = \frac{1}{3}|AM| \right)$.

Звідси $\frac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta ABM}} = \frac{2}{3}$; $S_{\Delta BQM} = \frac{1}{12}$; $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}$; $S_{QMCD} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ *кв. од.*

Таке розв’язування правильне, але воно громіздке і вимагає великої роботи. Розглянемо другий спосіб.

Нехай $AD=a$, $S_{QMC}=S_{DBC}-S_{CBQ}$, $\Delta BQM \sim \Delta AQD$ (за двома кутами).

Коефіцієнт подібності $k=2$.

$$S_{ABCD}=a\cdot h \Rightarrow h=\frac{S}{a}=\frac{1}{a},\quad S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3a}=\frac{1}{12}.\ S_{QMCD}=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}\ \text{кв. од.}$$

Як бачимо, другий спосіб раціональніший і він вимагає мало часу на його розв’язок.

Систематично показуючи приховані можливості істотно спрощувати розв’язування задач і прикладів, треба перед учнями поставити таку вимогу: прочитавши умову задачі, не поспішайте її розв’язувати, поміркуйте над тим, чи не можна знайти інший спосіб, щоб швидше і простіше дістати відповідь.

Проте, щоб учні вміли відшукувати раціональні розв’язання задач, треба їм не тільки показувати такі розв’язання у кожному можливому випадку, а й поглиблювати їх знання загальних методів розв’язування задач, вчити їх порівнювати ці методи.

Відшукувати раціональні способи розв’язування задач легше тому, хто краще (повніше, глибше) знає математику. Шкільний курс охоплює ряд розділів так званої елементарної математики, проте в кожному з цих розділів розглядають лише окремі питання. Вибір розділів і уточнення змісту матеріалу кожного розділу в основному підпорядковані двом вимогам: відібрані теореми та формули важливі або для практики, або для дальшого вивчення геометрії й інших дисциплін (насамперед фізики, хімії).

Поза межами програми залишається багато цікавого і корисного матеріалу. Частина цього матеріалу використовується на уроках під час розв’язування вправ на доведення, частина розглядається в позаурочній роботі.

Від учнів не вимагають завчати ті результати, які вони дістають, виконуючи вправи. Проте ми домагаємося, щоб учні зрозуміли: той, хто більше знає, легше знайде найкращий шлях виконання завдання.

Перспектива досягти успіху заохочує кращих учнів до участі в роботі математичних гуртків, до опрацювання популярних книжок і брошур з математики. Але більшість учнів не працює над позапрограмним матеріалом, і слід показувати їм, що за допомогою окремих теорем яких не вивчають за програмою в школах, можна легше і швидше розв'язувати деякі задачі.

Наведемо кілька прикладів.

1) Сума катетів трикутника ABC дорівнює m. На гіпотенузі BC поза трикутником побудовано квадрат $BCDF$. Визначити віддаль від центра O квадрата до вершини прямого кута трикутника.

Проведемо $AH \perp BC$ і $OE \parallel BC$, нехай вони перетинаються в точці E. Шукану віддаль можна визначити з прямокутного трикутника AEO.

Справді, $CH = \frac{b^2}{a}$ (як проекція катета на гіпотенузу),

$$HE = OM = \frac{a}{2} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - 2b^2}{2a} = \frac{c^2 - b^2}{2a} = \frac{(c-b)(c+b)}{2a}.$$

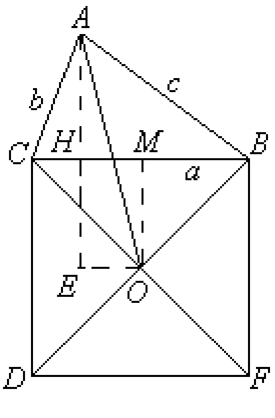


Рис. 2.26.

В той же час, $AH = \frac{bc}{a}$ (як висота, проведена до гіпотенузи), $AE = \frac{bc}{a} + \frac{a}{2} = \frac{2bc + a^2}{2a} = \frac{(b+c)^2}{2a}$.

Отже,

$$AO^2 = \frac{(c-b)^2(c+b)^2}{4a^2} + \frac{\left((b+c)^2\right)^2}{4a^2} = \frac{(b+c)^2}{4a^2}\left((c-b)^2 + (b+c)^2\right) =$$

$$= \frac{(b+c)^2}{4a^2}\left(2b^2 + 2c^2\right) = \frac{(b+c)^2}{4a^2} \cdot 2a^2 = \frac{m^2}{2},$$ тобто $AO = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

Як бачимо, для розв'язування задачі потрібні знання, що не виходять за межі шкільної програми, але викладки досить довгі.

Знаючи теорему Птолемея, розв'язування можна значно спростити.

Оскільки діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні, то сума кутів BAC і COB дорівнює 180^0. Отже, навколо чотирикутника $ABOC$ можна описати коло. За першою теоремою Птолемея, добуток діагоналей такого чотирикутника дорівнює сумі добутків протилежних його сторін.

$A \cdot BO = CA \cdot CB + AO \cdot BC$. Нехай $BO = CO = x$, тоді $BC = x\sqrt{2}$. Таким чином, $A \cdot xO\sqrt{2} = A \cdot xB + A \cdot xC$; $A O\sqrt{2} = A + BA$; $A O = \frac{A + BB}{\sqrt{2}} = \frac{C m}{\sqrt{2}}$.

2) Дано: AO – бісектриса кута BAC, що дорівнює 120^0. З точки M всередині кута BAO опущено перпендикуляри MD (на AB), ME (на AO) і MK (на AC). Довести, що сума перпендикулярів MD і ME дорівнює MK.

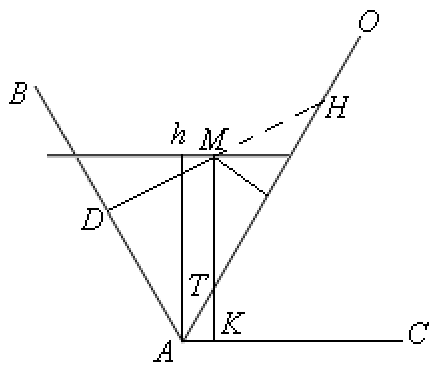


Рис. 2.27.

Доведення можна здійснити багатьма способами. Вкажемо, наприклад, на такий, коли порівнюються довжини відрізків за допомогою обчислення. Продовжимо DM до перетину з AO в точці H, позначимо точку перетину AO з MK через T. Помічаємо, що трикутник TMH – рівнобедрений (два його кути дорівнюють по 30^0).

Якщо $ME = a$, то $MT = 2a$ і $TH = 2a\sqrt{3}$. Якщо $TK = b$, то $AT = \frac{2b}{\sqrt{3}}$. Знаючи, що $AH = 2a\sqrt{3} + \frac{2b}{\sqrt{3}}$, визначаємо з прямокутного трикутника AHD, що катет $HD = 3a + b$.

Отже, справді $M + M = (a + b) + a = 2a + b = M$.

Розв’язування спрощується, коли скористатися такою властивістю рівностороннього трикутника: сума віддалей від точки, яка міститься всередині рівностороннього трикутника, до його сторін дорівнює висоті трикутника.

Проведемо через точку M пряму, паралельну AC. Утвориться рівносторонній трикутник, на одній із сторін якого лежить точка M. Віддалі до цієї точки від сторін трикутника дорівнюють MD, ME і нулю. Висота цього трикутника дорівнює відрізкові MK.

Отже, дійсно $M \quad ĐM \quad ∓M$.

3) Нехай треба довести, що у вписаному в коло чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD та його сторони зв’язані таким співвідношенням: $A \quad : B \quad =\!C(A \quad DA \quad + \mathbf{B} \quad \cdot D\!C \quad) : (CA \quad \cdot \mathbf{B} \quad + B\!A \quad \cdot \mathbf{C} \quad)$.

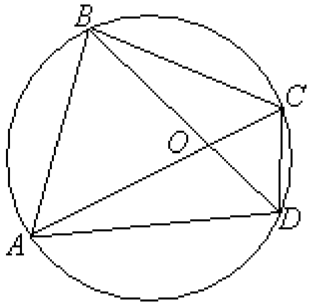


Рис. 2.28.

Доведення цієї теореми (так званої другої теореми Птолемея) можна значно спростити, використавши співвідношення між сторонами трикутника і радіусом описаного кола: $R = \frac{abc}{4S}$.

З цієї формули випливає, що площа трикутника $S = \frac{abc}{4R}$. Кожна діагональ розбиває чотирикутник на два трикутники, сума площ яких дорівнює площі чотирикутника. Беручи до уваги, що трикутники ABC, ACD, ABD і BCD вписані в те саме коло, можемо написати рівність: $\frac{A \quad \cdot B \quad \cdot A\ B}{4R} + \frac{AC \quad \cdot AC \quad \cdot C\ C}{4R} = \frac{AD \quad \cdot AD \cdot B\ B}{4R} + \frac{BD \quad \cdot BD \quad \cdot C\ C}{4R}$. Дальші перетворення очевидні. $A \quad \cdot B \quad \cdot A\,B + AC \quad \cdot AC \quad \cdot C\,C = AD \quad \cdot AD \cdot B\,B + BD \quad \cdot BD \quad \cdot C\,C$;

$A \quad \left(A \quad \cdot BC \quad + BA \quad CC \quad\right) \!=\! ĐB \quad \left(DA \quad \cdot AD \quad + BB \quad \cdot DC \quad\right)$;

$A \quad : B \quad =\!C(A \quad DA \quad + \mathbf{B} \quad \cdot D\!C \quad) : (CA \quad \cdot \mathbf{B} \quad + B\!A \quad \cdot \mathbf{C} \quad)$, що й треба було довести.

Оскільки від учнів не можна вимагати знань матеріалу, що виходить за межі програми, знаходження раціональних способів розв’язування задач на основі позапрограмного матеріалу здійснюється в школі в дуже вузьких рамках.

Розв’язування будь-якої задачі починається з аналізу умови. Поки учень не збагнув умови задачі, не можна починати її розв’язувати. У книзі Д. Пойа подано вказівки щодо способів відшукування розв’язування. Найперша вимога – зрозуміти задачу («Що невідомо? Що дано? У чому полягає умова? Чи достатня умова для визначення невідомого? Чи не суперечлива»?). Далі Пойа вимагає встановити зв'язок між даними і невідомими величинами, причому, якщо цей зв'язок не виявляється відразу, рекомендується розглянути допоміжні задачі. Зокрема, ставляться запитання: «Чи не траплялась раніше вам ця задача, може в дещо іншій формі? Чи відома вам яка-небудь споріднена задача?» [37, с.62].

Ці вказівки правильні, але виконання їх не гарантує, що буде знайдено раціональний шлях розв'язування. Ми вважаємо, що для виявлення раціонального способу розв'язування задачі треба перш за все проаналізувати властивості і особливості даної фігури або сукупності фігур, зв'язків між числовими значеннями величин, про які йдеть в умові задачі. При цьому мова йтиме не про загальні властивості фігур або величин певного класу, а про конкретні особливості об'єкта, який розглядають, особливості, що видаляють його з цього класу.

Досвід показує, що нераціональність розв'язку здебільшого є наслідком звички розв'язування по шаблону без огляду на конкретні особливості умови задачі.

Іноді умову задачі складено так, що зв'язок між даними і шуканими величинами очевидний. Якщо, наприклад, треба визначити радіус кола, вписаного в трикутник, за сторонами трикутника, то розв'язування зводиться до обчислення площі трикутника (за формулою Герона) і поділу одержаної величини на півпериметр.

Проте в багатьох випадках встановити такий шлях розв'язування не можна. Часом дані і шукані величини роз'єднань, тобто є такими, що безпосередні зв'язки між ними і даними невідомі.

У деяких випадках це роз'єднання можна усунути за допомогою формул, спеціально виведених для таких випадків. Але цей шлях не завжди можливий, оскільки в ряді випадків виведення формул або доведення нових теорем може забрати більше часу, ніж спроба розв'язати задачу без цих формул чи теорем.

Під час розв'язування геометричних задач прийоми зближення величин бувають різноманітними. Насамперед вкажемо на безпосереднє зближення відрізків, кутів та інших елементів.

Нехай треба побудувати нерівнобедрену трапецію за основою, бічними сторонами і різницею кутів при основі. Щоб зблизити бічні сторони і одержати на рисунку різницю кутів при основі, треба обернути один з кутів на 180^0 навколо точки на його стороні. Але просте обертання кута приведе не до утвореної різниці кутів, а до утворення їх суми. Тому треба побудувати симетричне відображення одного з кутів відносно прямої, яка проходить через середину основи трапеції перпендикулярно до цієї основи.

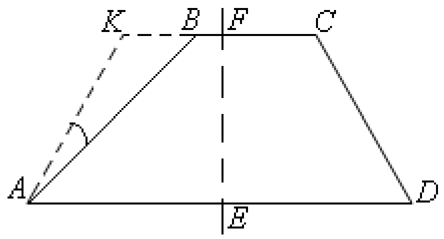


Рис. 2.29.

Якщо відрізок AK симетричний CD, то кут KAB дорівнює різниці кутів при основі AD. У трикутнику KAB відомі дві сторони і кут між ними, отже, цей трикутник легко побудувати. Взявши до уваги паралельність прямих KB і AD та симетричність точок K і C відносно EF, приходимо до такої побудови.

Будуємо трикутник KAB, потім через точку A проводимо пряму, паралельну KB, і відкладаємо на ній відрізок AD, що дорівнює основі. Через середину цього відрізка проводимо перпендикуляр до нього. Якщо перпендикуляр перетинає пряму KB в точці F, то відкладаємо відрізок $FC = KF$ на прямій KB і цим визначаємо четверту вершину трапеції.

Для розв'язування задач використовується обертання. В тих випадках, коли зближення елементів не можна здійснити за допомогою руху, мети досягаємо, вводячи допоміжні фігури.

Наприклад. Нехай у трикутник вписано квадрат так, що дві вершини його лежать на основі трикутника, а дві – на бічних сторонах. Довести, що між стороною квадрата a і радіусом вписаного в трикутник кола r існує співвідношення: $r\sqrt{2} < a < 2r$.

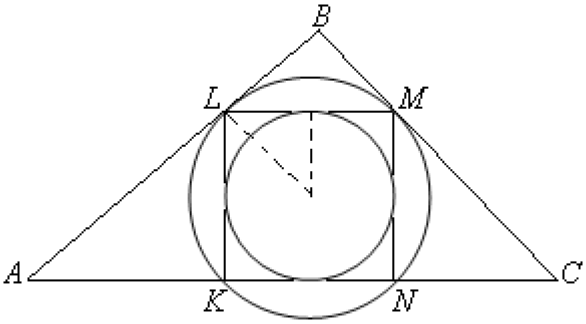


Рис. 2.30.

Розв'язування з застосуванням алгебри занадто складне. Довелося б визначати сторону квадрата з подібності трикутників, а потім доводити дві нерівності. А це виявляється недоступним для переважної більшості учнів.

Введемо допоміжні фігури – два кола, з яких одне вписане в квадрат, який розглядається, а друге – описане навколо цього квадрата. Тепер міркуватимемо так:

а) Якщо радіус кола, вписаного в квадрат, дорівнює r_1, то $a = 2r_1$. Радіус кола, вписаного в трикутник, більший від r_1, бо вписане коло дотикається до всіх сторін трикутника, а вписане в квадрат коло лежить всередині трикутника і дотикається лише до однієї сторони трикутника. Отже, $r_1 < r$, тобто $\frac{a}{2} < r$ і $a < 2r$.

б) Якщо радіус кола, описаного навколо квадрата, r_2, то $a = r_2\sqrt{2}$. Але описане навколо квадрата коло має спільні точки з усіма сторонами трикутника і перетинає принаймні одну сторону трикутника. Таким чином, $r_2 > r$ або $\frac{a}{\sqrt{2}} > r$ і $a > r\sqrt{2}$, що й треба було довести.

Отже, поняття про раціональні способи розв’язування не є незмінними. З розширенням кругозору і обсягу знань учнів можна розглядати нові, простіші способи розв’язування деяких задач. В кожному окремому випадку мова йде про відшукання серед доступних учням способів розв’язування такого, яке є найкоротшим, виконується з найменшою кількістю перетворень і обчислень.

Без попереднього аналізу умови задачі, без уваги до «індивідуальних особливостей» задачі не можна знайти раціонального способу розв’язування.

У книзі «Як розв’язувати задачу» Д. Пойа про аналіз умови говориться як про вирішальний етап у розв’язуванні задачі. По-перше, вказує Пойа, треба усвідомити умову. «Треба знайти зв'язок між даними і невідомими. Якщо не вдасться відразу знайти цей зв'язок, можливо буде корисним розглянути допоміжні задачі».

Спостереження за учнями на цьому етапі роботи показують, що ті учні, які не мають достатнього досвіду в самостійному розв’язуванні задач, діють по шаблону. Для цієї групи оригінальність умови задачі, незвичайність формулювання питання лише перешкодами на шляху знаходження способів розв’язування. Навпаки, ті, що достатньо засвоїли програмний матеріал, не задовольняються першими-ліпшими способами розв’язування, пропонують інші варіанти. Ці учні правильно оцінюють пропозиції (своїх, товаришів або вчителя), спрямовані на спрощення розв’я зування.

Але було б помилкою вважати, що лише кращі учні можуть належно оцінити дотепні способи розв’язування. Перевагу раціональних методів здатні усвідомити всі учні. Але для кращих учнів такі способи розв’язування відкривають перспективу дальшого вдосконалення, а в невстигаючих (при неправильній постановці роботи) можуть викликати ще більшу невіру в свої сили. Тому виявляти можливості раціонального способу розв’язування задачі треба так, щоб підкреслювалася доступність таких методів для всіх учнів, без винятку. До того ж таку роботу слід вести систематично, це створить в учнів певність, що варто шукати раціональний спосіб розв’язування, що його майже завжди можна знайти. Все це буде заохочувати учнів до старанного авалізу умови.

Другим етапом є складання плану розв’язування. У плані враховують виявлені особливості задачі і на основі цього можливість досягти максимального спрощення розв’язування. Без плану можна розв’язувати тільки прості задачі.

Третім етапом є реалізація наміченого плану.

Отже, щоб раціонально розв’язати задачу, треба виконати певну підготовчу роботу, проаналізувавши умову задачі. Навчаючи учнів раціонально розв’язувати задачі, цим самим привчають уважно, вдумливо підходити до виконання будь-якого завдання вчителя, бути послідовними у виконанні роботи, правильно, логічно мислити.

2.4. Аналіз результатів педагогічного експерименту

У сучасних умовах учитель перетворюється на організатора особистісно рієнтованого навчання, яке передбачає розвиток і саморозвиток дитини. Щоб розвивати творчі здібності учнів, поступово та систематично залучати їх до самостійної пізнавальної діяльності, щоб забезпечити співпрацю між учнями та вчителем, традиційного уроку недостатньо.

Для експерименту було вибрано два класи: 10-А та 10-Б ЗОШ № 17 м.Рівного, у яких рівень успішності з математики був приблизно однаковий.

При вивченні методів розв’язання планіметричних задач у 10-Б класі на уроках було застосовано різні форми роботи: колективна, робота в групах та робота в парах, а особливо велике значення мали нетрадиційні уроки та застосування у навчанні комп’ютерної техніки. Такі форми навчання дають змогу диференціювати та індивідуалізувати процес навчання: формують внутрішню мотивацію до активного сприйняття, засвоювання та передачі інформації; сприяють формуванню комунікативних рис учнів; активізують розумову діяльність.

Застосування комп'ютерних технологій під час навчання зацікавило дітей у 10-Б класі, що відповідно змусило їх слухати уважніше виклад матеріалу, а оскільки комп'ютер дозволяє значно прискорювати розв'язання задачі, то відповідно і кількість розв’язаних різнотипних задач значно вища.

Було проведено діагностичну контрольну роботу для учнів 10-х класів м.Рівного. Перевірка знань учнів проводилася за допомогою діагностичного комплекту тестів. Загалом було представлено кожному учню 10-х класів 20 тестових завдань.

Результати тестування подано в таблиці 1.

Розподіл учнів за кількістю виконаних завдань

(констатувальний зріз)

Кількість завдань	Кількість учнів, що виконали завдання (у %)	
	10-А клас	10-Б клас
0–5	23%	18%
6–10	32%	28%
11–15	27%	33%
16–20	18%	21%

Табл. 4. 1.

Отримані дані надали можливість обґрунтувати необхідність розробки й упровадження методики навчання геометрії в школі.

В учнів почали вироблятись необхідні для творчої роботи вміння, а саме:

- уміння зміцнювати навички у заданих ситуаціях;
- здатність вивільнювати підсвідоме, висловлювати ідеї і думки навіть тоді, коли вони здаються незрозумілими та недостатньо обґрунтованими;
- здатність бачити відмінні властивості та функції об'єктів, а також їх взаємозв'язки;
- уміння швидко та адекватно пристосовуватись до нових ситуацій;
- уміння засвоювати за аналогією, знаходити однакове, подібне у далеких, на перший погляд, явищах, подіях і процесах, котрі начебто не мають нічого спільного;
- розуміння та вміле використання цих подібностей під час розв'язування завдань і т.д.

На підсумковому уроці була проведена контрольна робота у 10 -А та у

10 -Б класах. На основі результатів виконання підсумкової контрольної роботи було оцінено навчальні здобутки учнів двох класів.

Рівень засвоєння методів розв’язання планіметричних задач в учнів 10-Б класу був значно вищим, ніж в учнів 10-А класу. Це було зумовлено тим, що при розв'язуванні планіметричних задач необхідно орієнтуватись у виборі конкретного методу для розв'язання конкретного прикладу. Якісний характер цього процесу і обумовлює ефективність розв'язання задачі. Це видно із результатів виконання контрольної роботи.

Проаналізувавши результати контрольної роботи, рівень знань, умінь та навичок учнів двох класів, можна зробити висновок про доцільність використання на уроках математики різних форм роботи з учнями. Покращення успішності у 10-Б класі показує, що дуже важливо у своїй практиці вчителю проводити нетрадиційні уроки, використовуючи інноваційні технології, адже це сприяє вихованню в дітей самостійності, активності, наполегливості, розвиває логічне мислення в учнів.

ВИСНОВКИ

Важливим засобом і метою навчання математики є розв'язування геометричних задач. Геометричні задачі виконують ряд функцій навчального, виховного, розвивального і контролюючого характеру.

Однак аналіз практики навчання розв'язувати геометричні задачі показує, що не дивлячись на удосконалення форм і методів роботи вчителів, у вміннях розв'язувати задачі є такі істотні прогалини, що традиційна форма навчання розв'язувати геометричні задачі не є досить ефективною. Значна частина учнів не має достатніх уявлень про задачі. І тому, щоб отримати хороші результати навчання, ми повинні знати не тільки чого навчати, а і як навчати, знати різні методи формування понять, уміти передбачити, як той чи інший метод сприйматимуть учні, які помилки вони допускатимуть, як їх виправляти.

На прикладах геометричних задач різних типів показана необхідність попереднього аналізу умов задач, який дає максимум корисної інформації для вибору методу розв'язування. Результати такого аналізу у вигляді переліку незалежних елементарних умов і вимог доцільно представляти в найбільш зручній, компактній і наглядній формі. В роботі підкреслено основні вимоги до такої форми представлення результатів аналізу.

Робота складається із вступу, двох розділів, загальних висновків, списку використаної літератури.

У вступі обґрунтовується вибір теми дослідження, визначень об'єкт, предмет та мета, сформульована гіпотеза і поставлено завдання дослідження.

Перший розділ присвячено науковому дослідженню проблеми. В ньому розглянуто поняття, структура, класифікація, принцип визначення задачі, принцип визначення геометричної задачі, психологічна сутність процесу розв'язування і складання задач, а також структура процесу розв'язування задач.

В другому розділі проаналізували методи розв'язування геометричних задач, розглянули використання загальних прийомів евристичної діяльності до розв’язування геометричних задач, а також розробили ефективну методику розв'язування планіметричних задач.

При виконанні магістерської роботи були виконанні наступні завдання:

1. Опрацювання літературних та електронних джерел, згідно даної теми.
2. Розкриття змісту прийомів розумових дій.
3. Аналіз стану досліджуваної проблеми в теорії і практиці навчання стереометрії.
4. Навчилися розв’язувати стереометричні задачі з використанням даної теми.

У ході дослідження була підтверджена гіпотеза про те, що використання евристично-орієнтованої системи задач сприяють в учнів формуванню евристичної діяльності та підвищенню їх інтересу до математики як навчального предмету.

Для реалізації мети і перевірки справедливості висунутої гіпотези були виконані розв'язали наступні завдання:

1. Опрацювання літературних та електронних джерел, згідно даної теми
2. Виявили і дослідили складові частини заключного етапу розв’язування задачі.
3. Розробили методику навчання як розв’язувати геометричні задачі.
4. Аналіз стану досліджуваної проблеми в теорії і практиці навчання геометрії.

Отже, завдяки методиці навчання розв’язувати та складати геометричні задачі в загальноосвітній школі в учнів розвивається пізнавальний інтерес до вивчення геометричних фігур, а також підвищується якість їх знань, умінь і навичок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Закон України «Про освіту» Прийняття від 05. 09. 2017. (Набрання чинності 28. 09. 2017) URL: http://ru.osvita.ua/legislation/law/2231.
2. Проект Національної стратегії розвитку освіти в Україні на2015-2025 роки[Електронний ресурс] / Міністерство освіти і науки України. – URL: http://www.mon.gov.ua/images/files/news/12/05/4455.pdf
3. Апостолова Г. В. Планіметрія в опорних схемах / Передм. В. Ясінського. – К.: Поліграфсервіс, 2001. – 124 с.
4. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владимирова Н. Г. Геометрія: Проб, підруч. для 7 – 9 кл. – 2-ге вид. – К.: Вежа, 2004. – 312 с.
5. Белешко Д.Т., Віннічук М.А., Крайчук О.В. Стереометрія. Збірник задач: навч. пос. – Рівне, 2014. – 138с.
6. Белешко Д.Т., Віннічук М.А., Крайчук О.В. Усні вправи зі стереометрії . – Х.: Вид. група "Основа", 2015. – 111с.
7. Бродський Я. С., Павлов О. Л. Готуємось до повторення//Математика 2002. – К.: А.С.К., 1998. – 98 с.
8. Бурда М. І. Теорія шкільного підручника з математики//Матем. в школі. – 1999. – 144 с.
9. Забрянська Н. В. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках геометрії // Математика. – 2004. – № 31–32 серп. – 35 с.
10. Істер О. С., Єргіна О. В. Геометрія(профільний рівень) підр. для. 10 кл. закл. загальн. серед. освіти. – Генеза, Киев.2018. – . 368с.
11. Касьяненко М. Д. Підвищення ефективності навчання математики. – К., 1999. – 180 с.
12. Крамаренко А. В. Проблеми творчого розвитку учнів//Математика. – 2004. – №27–28 (липень). – 32с.
13. Кушнір І. А. Методи розв’язування задач з геометрії: Книга для

вчителя. – Абрис, 1994. – 464 с.

14. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія (профільний рівень) підр. для. 10 кл. закл. загальн. серед. освіти. – Харьків.: Гімназія,2018. –240с.
15. Методика викладання математики в середній школі: Навчальний посібник для педагогічних інститутів. Пер. з рос. Харків: Основа,1992.– 30 с.
16. Методика викладання математики: Практикум / за ред. Бевза Г. П. – К.: Вища школа, 1981. –263 с.
17. Нелін Є. П. Геометрія (профільний рівень) підр. для. 10 кл. закл. загальн. серед. освіти. – Харьків, Ранок, 2018. – 240с.
18. Нелін Є. П. Особливості поглибленого вивчення математики в 10 класі. К.: Освіта, 1992. – 236 с.
19. Нуждак С. В., Крайчук О. В. Методика навчання учнів загальноосвітніх шкіл розв’язуванню і складанню геометричних задач. – Наука, освіта, суспільство очима молодих: Матеріали XIV Міжнародної науково–практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих науковців. – Рівне: РВВ РДГУ. – 2021. – С.63.
20. Підручна М. В. Диференційовані дидактичні матеріали з геометрії для 9 класу. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1996. – 40 с.
21. Погорєлов О. В. Геометрія: Підручник для 7-11 класів середніх загальноосвітніх закладів .– К.: Освіта 2000. – 351 с.
22. Пойа Д. Как решать задачу: Пособие для учителей / Пер. с англ. В. Звонарёвой и Д. Белла; Под ред. Ю. Гайдука. — Изд. 2-е. — М.: Учпедгиз, 1961. — 207 с.
23. Полонський В. Б. Вчимося розв’язувати задачі з геометрії: навч.-метод. посібник. – К.: Магістр-S, 1998. – 256с.
24. Рыжик В. Й. Система задач школьного учебника геометрии. – К.: Просвещение, 1993. – 57 с.

25. Розв'язування геометричних задач у середній школі. За ред. доц. Л.М. Лоповка.– К.: Радянська школа. 1972 р. – 249 с.
26. Слєпкань З. І. Методика викладання математики: Навч. посібник. – К.: Вища шк., – 2005. – 95 с.
27. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник для студентів мат. спец. пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512 с.
28. Слєпкань З. І. Ще раз про диференціацію навчання математики і роль в ній освітнього стандарту// Математика в школі. – 2001. - №1. – 116 с.
29. Староста В. І. Навчання школярів складати й розв'язувати завдання з хімії: теорія і практика: Монографія . – Ужгород: УжНУ – Гранда, 2006. – 327с.
30. Столяр А. А. Педагогіка математики. – Мінськ: Вища школа, 1984.– 360с.
31. Черкасов Р. С. Методика викладання математики в середній школі. – Харків, 1992. – 184 с.
32. Черних Я. В. Диференційований підхід у навчанні математики. Газета «Математика». – 2003. – 43 с.
33. Чепіга Ю.В. Словник шкільної термінології. Математика. – Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2010. – 384 с.
34. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.– К.: Зодіак – ЕКО, 2003. – 214 с.
35. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К.: Зодіак – ЕКО, 2002. – 204 с.

ДОДАТОК

Конспект уроку №1

Тема. Вступ. Точка і пряма. Властивості точок і прямих

Мета: ознайомити учнів з предметом вивчення геометрії, планіметрії та із поняттям найпростіших фігур у геометрії, домагатися від учнів свідомого засвоєння термінології, що описує взаємне розташування точок та прямих на площині, формулювання основних властивостей розташування точок та прямих; виробити первинні вміння позначати точки та прямі на рисунку, описувати ситуацію, що зображена на рисунку та, навпаки, за описом ситуації виконувати відповідні рисунки, користуючись найпростішим креслярським приладдям.

Тип уроку: засвоєння знань, умінь та навичок.

Форма проведення: бесіда.

Наочність та обладнання: демонстраційні креслярські інструменти.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент

Учитель повідомляє учнів про організацію навчального процесу з вивчення геометрії, знайомить з вимогами програми щодо знань та вмінь (в адаптованій формі), пояснює структуру підручника, його особливості.

II. Формулювання мети й завдань уроку

Виходячи з теми уроку та погодження її з учнями, вчитель формулює основну дидактичну мету уроку (див. вище).

III. Засвоєння нових знань

План вивчення нового матеріалу

1°. Вступна бесіда.

а) Зародження геометрії;

б) геометрія Евкліда;

в) з історії розвитку геометрії, будова геометрії;

г) найпростіші геометричні фігури;

д) що таке аксіома.

2°. Точка і пряма.

3°. Властивості точок і прямих.

а) Властивість належності точок і прямих;

б) аксіома проведення прямої;

в) аксіома розміщення точок на прямій.

Методичний коментар

1°. Додатковий матеріал для вступної бесіди про розвиток геометрії можна взяти з книг: Глейзер Г. И. История математики в школе.— М.: Просвещение, 1982, 1983; Большая советская энциклопедия.— М.: Советская энциклопедия, 1971.— Т. 6.— С. 307.

У вступній бесіді можна використати геометричні знання, яких учні набули в 1–6 класах, та звернутися до їх життєвого досвіду.

2°. Під час викладення цього питання слід нагадати учням, як зображується пряма та точки, їх позначення (слід указати на те, що для розрізнення тепер зазвичай пряму будемо позначати однією маленькою латинською літерою, а точки — великими латинськими літерами).

3°. Нові терміни «лежить», «не належить», «проходить через точку», «перетинаються», «лежить між» тощо, слід уводити одночасно з виконанням рисунка.

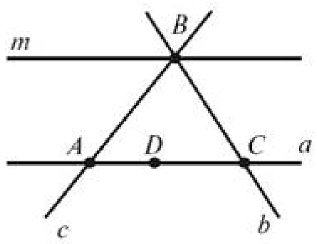


Рис. 1

При цьому, увівши поняття, вчитель формулює аксіому проведення прямої та аксіому розміщення точок на прямій. Під час пояснення можна використовувати рисунок 1.

IV. Первинне усвідомлення нових знань

Для засвоєння введеної термінології та аксіом можна виконати усні вправи.

Виконання усних вправ

1. На прямій АВ позначено точку С. Чи лежить точка А на прямій ВС? Чи лежить точка В на прямій АС?

2. Точка А лежить на прямій с, а точка В не лежить на прямій с. Чи перетинаються прямі с і АВ? Якщо так, то назвіть точку їхнього перетину.

3. Через точку А проведено дві прямі. Чи можуть ці прямі мати спільну точку В, відмінну від точки А?

4. Точка В лежить на прямій між точками А і С. Як розміщені точки В і С відносно точки А?

Рис. 2

5. На прямій позначено точки K, L, M, N (рис. 2).

Назвіть:

а) точку, що лежить між точками L і N;

б) точки, що лежать між точками K і N;

в) дві точки, що лежать по один бік від точки L;

г) точку, по різні боки від якої лежать точки K і M.

6. Розгляньте рисунок 1 і дайте відповідь на запитання.

а) На яких прямих лежить точка А? точка В? точка С? точка D?

б) Які прямі проходять через точки: А; В; С; D?

в) В якій точці перетинаються прямі a і b; b і c; c і m; b і m?

г) В якій точці перетинаються три прямі? Назвіть ці прямі.

д) Яка точка на рисунку лежить між двома іншими? Чи можна сказати, що точка А лежить між точками В і D?

Виконання графічних вправ

Проведіть пряму.

а) Позначте точки А і В,що лежать на цій прямій, і точки С і D, що не лежать на ній. Як можна назвати цю пряму?

б) Проведіть ще одну пряму через точки А і С. Скільки спільних точок мають побудовані прямі?

Виконання письмових вправ

Рівень А

1. Позначте точки В і С. Проведіть через них пряму. Проведіть ще одну пряму так, щоб вона проходила через точку В, але не проходила через точку С. Скільки спільних точок мають ці прямі?

2. На прямій точки Е і F лежать по різні боки від точки D. Як розміщені точки D і F відносно точки Е? Чи може точка F лежати між точками D і Е?

Рівень Б

1. Дано чотири точки, причому жодні три з них не лежать на одній прямій. Через кожні дві з даних точок проведено пряму. Скільки всього прямих проведено?

2. На прямій точка В лежить між точками А і С. Позначте на цій прямій точку D,що лежить між точками В і С. Назвіть точку, що лежить між точками А і D. Які з позначених точок лежать по один бік від точки С?

Рівень В

Скільки прямих можуть визначити чотири точки? Розгляньте всі можливі випадки. Зробіть рисунки.

Методичний коментар

Необхідно з перших уроків під час розв’язування вправ різного рівня складності привчати учнів до попереднього здійснення певних послідовних міркувань, що ґрунтуються на змісті розглянутих понять та на аксіомах.

Наприклад

Позначте точки В і С. Проведіть через них пряму. Проведіть ще одну пряму так, щоб вона проходила через точку В, але не проходила через точку С. Скільки спільних точок мають ці прямі?

Розв’язання. Позначимо точки B і C. За аксіомою проведення прямої, через ці дві точки можна провести пряму і тільки одну (рис. 3).

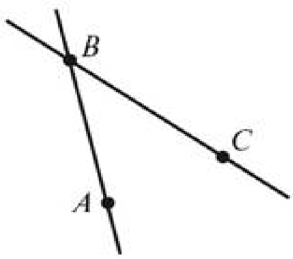


Рис. 3

Візьмемо точку A, що не лежить на прямій BC. Тоді через точки A і B, за аксіомою проведення прямої, можна провести пряму AB, до того тільки одну.

Отже, прямі AB і BC мають одну спільну точку B.

V. Підсумки уроку

Диктант

1. Проведіть пряму, використавши аксіому проведення прямої, позначте її.

2. Проведіть пряму a, позначте точку C, яка лежить на прямій a, точку D, що не лежить на прямій a. Проведіть пряму b,що проходить через точку D і перетинає пряму a. Позначте точку перетину прямих літерою F.

3. Позначте на прямій a точки M, S і K так, щоб точка K лежала між точками M і S. Позначте на прямій точку A, щоб точки S і K лежали по один бік, а точка M — по інший бік від точки A. Прочитайте назви точок за порядком, починаючи з точки M. Запишіть утворене слово.

VI. Домашнє завдання

1. Позначте дві точки й від руки проведіть через них пряму. Перевірте правильність побудови за допомогою лінійки. Якою аксіомою ви скористалися?

2. Точки M і N лежать на прямій по один бік від точки K. Яка з цих трьох точок не може лежати між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

3. Точки A, B, C лежать на одній прямій, а точка D не лежить на цій прямій. Через кожні дві з даних точок проведено пряму. Скільки всього прямих проведено?

4. На прямій позначено точки X ,Y, Z, причому точки X і Y лежать по один бік від точки Z, а точки X і Z —по один бік від точки Y . Яка з трьох точок лежить між двома іншими?

Додаткова задача

Скільки різних прямих можуть задавати точки:

а) A, B, C;

б) A, B, C, D;

в) A, B, C, D, O?

Відповідь поясність, проілюструвавши її рисунками.

Конспект уроку №2

Тема. Відрізки

Мета: домогтися засвоєння учнями змісту понять «відрізок», «рівні відрізки», «середина відрізка», «довжина відрізка», а також аксіоми вимірювання відрізків; виробити в учнів уміння розпізнавати на готовому рисунку відрізки (користуючись означенням) і за готовими рисунками робити записи, що відповідають аксіомі вимірювання відрізків, та, навпаки, розв'язувати найпростіші задачі на застосування аксіом вимірювання відрізків і взаємного розташування точок на прямій.

Тип уроку: засвоєння знань, умінь та навичок.

Наочність і обладнання: таблиця «Відрізки».

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент

Учитель перевіряє готовність учнів до уроку та повідомляє його тему.

II. Перевірка домашнього завдання

Розв'язування домашніх вправ № 4–6 перевіряється під час фронтальної роботи за готовими рисунками.

III. Формулювання мети й завдань уроку. Мотивація навчальної діяльності

Для створення мотивації вчитель пропонує учням ще раз звернутись до взаємного розташування точки і прямої та точок на прямій, виконавши завдання.

Завдання 1. Позначте на даній прямій точку А, назвіть частини, на які поділяє точка А дану пряму.

Завдання 2. Позначте точки А і В на прямій а. На скільки частин поділяють цю пряму позначені точки? Які з цих частин є променями? Чи є названі промені доповняльними? Чи є третя з утворених частин променем? Чому?

Виходячи із результатів виконання завдань, учитель формулює основну дидактичну мету уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

Виконання усних вправ

Чи правильні твердження?

1) Через точку площини можна провести не менше ніж 1000 прямих.

2) Сполучивши парами три дані точки площини, завжди дістанемо три прямі.

3) На кожній прямій можна вибрати принаймні 1000 точок.

4) Із трьох точок на прямій принаймні одна лежить між двома іншими.

5) Дві різні прямі на площині можуть мати хоча б одну спільну точку.

V. Засвоєння нових знань

План вивчення нового матеріалу

1°. Означення відрізка; його елементи та позначення.

2°. Означення рівних відрізків. Середина відрізка.

3°. Довжина як міра відрізка, одиниці вимірювання відрізків.

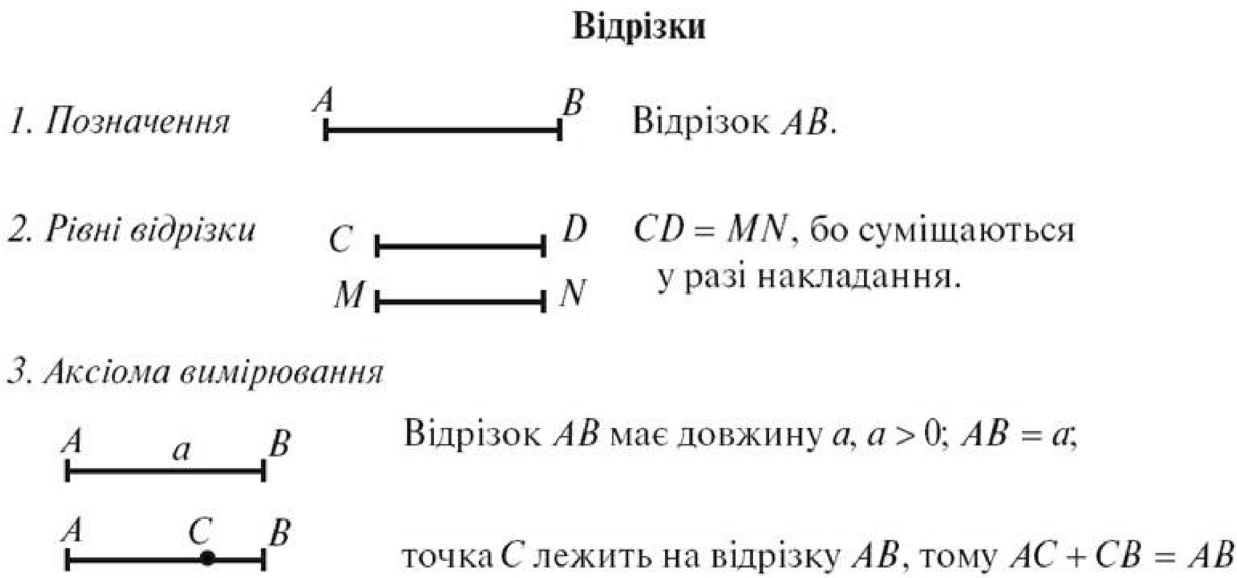
4°. Аксіома вимірювання відрізків.

Методичний коментар

Насправді з навчальним матеріалом уроку учні знайомі ще з третього класу. Тому головне завдання вчителя полягає в тому, щоб викласти новий матеріал з достатнім рівнем математичної коректності, із посиланням на вивчений раніше теоретичний матеріал (аксіому взаємного розташування).

Висновки вчитель демонструє у вигляді таблиці.

Таблиця 1.



IV. Первинне усвідомлення нового матеріалу

Виконання усних вправ (за готовими рисунками)

1. За рис. 4, 5. а) Опишіть взаємне розташування точок.

б) Скільки відрізків утворилося на рисунку?

в) Який з утворених відрізків найбільший? Чому?

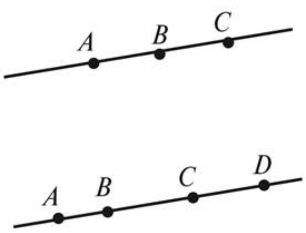


Рис. 4

2. Користуючись рисунком 5, розв’яжіть задачі.

Рис. 5

а) Дано: AB = CD. Доведіть, що AC = BD.

б) Дано: AC = BD. Доведіть, що AB = CD

Виконання письмових вправ

Методичний коментар

Під час уроку вчитель формує в учнів уміння розв’язувати задачі на застосування аксіоми вимірювання відрізків. Названий вид задач є першою спробою аргументованого (з посиланням на вивчені аксіоми) та алгоритмічного розв’язування геометричних задач на обчислення. Тому приклад розв’язання задач такого виду бажано записати в зошити учнів з відповідним коментарем.

Рівень А

1. На прямій точка M лежить між точками K і N. Знайдіть довжину відрізка KN, якщо KM = 2,9 см, MN = 4,1 см.

2. На відрізку MN позначено точки P і R так, що MP = PR = RN. Зробіть рисунок. Які ще рівні відрізки з кінцями в даних точках утворилися на рисунку?

Рівень Б

1. На прямій точка M лежить між точками K і N. Знайдіть довжину відрізків KM і MN, якщо KN = 24 см, а відрізок KM більший за відрізок MN на 8 см.

2. Точки B і C лежать на відрізку AD. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо AD =10 см, AB = 6,8 см, CD = 8,3 см.

Рівень В (додатково)

На прямій відкладено точки A, B, C так, що AB =17 см, AC =11 см, BC = 6 см. Яка з цих точок лежить між двома іншими? Чи зміниться відповідь, якщо AB = 17 см, AC = 11 см, BC= 28 см?

Методичний коментар

Як було сказано вище, під час розв’язування задач потрібно вимагати від учнів пояснень із застосуванням аксіоми вимірювання відрізків, а саме:

«Якщо одна точка (А) з трьох (А, В, С) точок прямої лежить між двома іншими, то ця точка (А) належить відрізку з кінцями в двох інших точках (В і С), а тому виконується аксіома вимірювання відрізків (а саме АС+ АВ = ВС). Тому далі, виходячи з умови задачі, або підставляємо відомі величини й виконуємо обчислення, або складаємо рівняння».

VII. Підсумки уроку

1. Чи правда, що АС = ВС + АВ (див. рис.)?

1) Так;

2) ні;

3) встановити не можна.

Рис. 6

2. Відомо, що MN = MK + KN. Який із рисунків відповідає цій умові?

Рис. 7

VIII. Домашнє завдання

Усно виконати вправи.

1. На прямій позначено три точки. Скільки відрізків при цьому утворилося?

2. На прямій точка А лежить між точками В і С. Який із відрізків з кінцями в даних точках є найбільшим?

3. Якщо точка С лежить на відрізку АВ, то вона лежить і на промені АВ. Чи є правильним таке твердження?

Письмово розв’язати задачі.

1. На прямій точка М лежить між точками K і N. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо KN = 8,3 см, KM = 5,8 см.

2. На прямій точка М лежить між точками K і N. Знайдіть довжину відрізків KM і KN, якщо MN = 9 см, а KN : KM = 7:4.

3. На відрізку MN позначено точки A і B так, що MA = 7 мм, AB = 4,3 мм, BN = 5,1 мм. Знайдіть довжину відрізка MN. Розгляньте всі можливі випадки.

Конспект уроку №3

Тема. Трикутник та його елементи

Мета: домогтися засвоєння учнями змісту понять: «трикутник»; «сторона, вершина, кут (внутрішній) трикутника»; «кут, протилежний стороні»; «кут, прилеглий до сторони»; «периметр трикутника»; «внутрішня та зовнішня область трикутника».

Сформувати вміння:

· розпізнавати та називати елементи трикутників, зображених на рисунку;

· за рисунком та символічним позначенням трикутника називати кути, протилежні та прилеглі до певної сторони трикутника;

· записувати формулу для знаходження периметра трикутника та, використовуючи цю формулу, складати рівняння за умовою задачі;

· розв'язувати задачі на обчислення сторін трикутника за відомим периметром та навпаки.

Тип уроку: засвоєння знань, умінь та навичок.

Наочність та обладнання: набір демонстраційного креслярського приладдя; таблиця «Трикутники».

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент

II. Перевірка домашнього завдання

Учитель вибірково перевіряє зошити учнів.

III. Формулювання мети й завдань уроку

Учитель може запропонувати учням прочитати передмову розділу, після чого разом із учнями виділити той об'єкт, що буде головним для вивчення—

трикутник. Цілком логічно (і це можуть усвідомити учні), що спершу треба дати означення та розглянути елементи нового поняття. Виконання цього завдання і приведе до здійснення основної дидактичної мети уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

Виконання усних вправ

Назвіть знайомі вам з курсу геометрії 7 класу геометричні фігури, зображені на рисунку 8. Які властивості цих фігур ви знаєте?

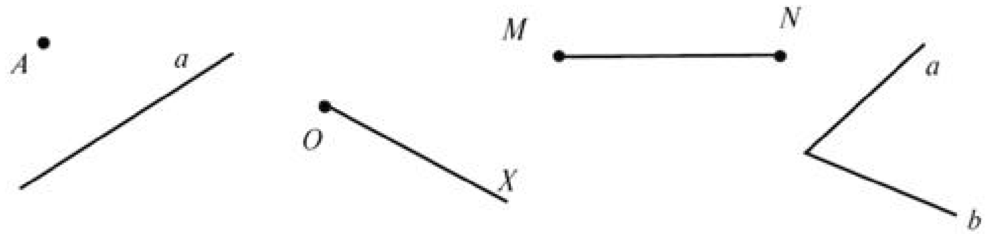


Рис. 8

V. Засвоєння нових знань

План вивчення нового матеріалу

1°. Означення трикутника.

2°. Елементи трикутника:

а) вершини; б) сторони; в) кути.

3°. Позначення трикутника, позначення його елементів.

4°. Варіанти взаємного розташування сторін та кутів трикутника.

5°. Периметр трикутника.

Методичний коментар

В означенні трикутника важливо, продемонструвавши рисунки, звернути увагу на те, що три точки, які є вершинами трикутника, не лежать на одній прямій.

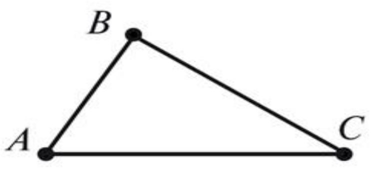


Рис. 9

На рисунку 9 а) точки А, В і С не лежать на одній прямій, тому є вершинами трикутника АВС.

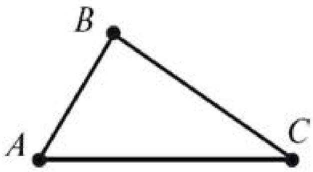
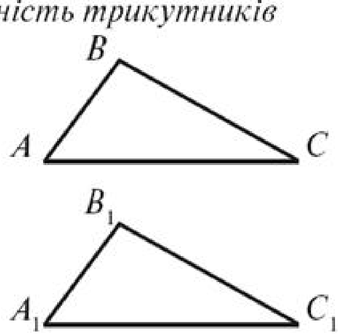
Рис. 10

На рисунку 10 б) точки А, В і С лежать на одній прямій, тому трикутника АВС не існує.

Також, формуючи знання, треба звернути увагу на взаємне розташування сторін та кутів трикутника (на жаль, у підручнику О. В. Погорєлова цьому питанню не приділялось належної уваги).

Поняття периметра трикутника не є новим для учнів: у 5 класі було розв'язано багато задач на застосування формул периметра.

Таблиця 2

Трикутники		
1. Означення  а) точки A, B, C не лежать на одній прямій; б) відрізки AB, BC і AC з'єднують точки A, B, C, тоді утворилась геометрична фігура — трикутник	*2. Елементи, позначення* → ΔABC або ΔBCA, або ΔCAB → вершини трикутника A, B, C → сторони трикутника AB, BC, AC кути трикутника $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$	*3. Величини* $P = AB + BC + AC$ — периметр
4. Рівність трикутників 	$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, якщо суміщаються у разі накладання або $AB = A_1B_1$ $\angle A = \angle A_1$ $BC = B_1C_1$ і $\angle B = \angle B_1$ $AC = A_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$	

VI. Первинне усвідомлення нового матеріалу

Виконання усних вправ

1. Знайдіть на рисунку 11 вісім трикутників. Укажіть їх вершини, сторони, кути.

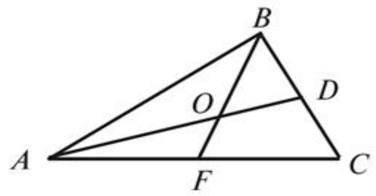


Рис.11

2. У трикутнику ABD назвіть:

1) кути, прилеглі до сторони AD;

2) кут, протилежний до сторони BD;

3) сторони, прилеглі до кута D;

4) сторону, протилежну куту A.

Виконання письмових вправ

1. У трикутнику ABC AC = 6 см, сторона AB менша, ніж BC, на 3 см, а сторони, прилеглі до кута C, рівні. Знайдіть периметр трикутника.

2. Точки A,B і C лежать на одній прямій, а точка D не лежить на прямій AC. Скільки трикутників із вершинами в даних точках можна побудувати? Зробіть рисунок.

3. У трикутнику ABC AB:BC:AC = 3:5:7. Знайдіть:

а) периметр трикутника, якщо BC =15 мм;

б) найменшу сторону трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 мм;

в) найбільшу сторону трикутника, якщо різниця двох інших його сторін дорівнює 4 мм.

4. Задача на повторення. Різниця двох суміжних кутів удвічі менша за один з них. Знайдіть градусну міру кожного з кутів.

VII. Підсумки уроку

1. Дано дві точки M і N. Як треба побудувати точку K, щоб точки M, N і K могли бути вершинами деякого трикутника?

2. Як називається величина, що дорівнює сумі відстаней між цими точками, взятими парами?

VIII. Домашнє завдання

Вивчити означення трикутника.

Усно виконати вправи.

1. На прямій позначено три точки. Чи можуть ці точки бути вершинами трикутника?

2. У трикутнику KMP назвіть:

а) кути, прилеглі до сторони MP;

б) кут, протилежний стороні KP;

в) сторону, протилежну куту K;

г) сторону, протилежну куту P.

Письмово розв’язати задачі.

1. Периметр трикутника ABC дорівнює 24 м, причому AB = 10 м, а сторона BC утричі менша, ніж AC. Назвіть кут трикутника, протилежний його найбільшій стороні.

2. Периметр трикутника ABC дорівнює 18 см, причому AB + BC = 12 см, BC + AC = 13 см. Назвіть кути, прилеглі до найбільшої сторони трикутника.

З цупкого паперу виготовити шаблон трикутника, принести його на наступний урок.