

Рівненський державний гуманітарний університет  
Факультет математики та інформатики  
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота  
магістерського рівня  
на тему:

**«Методика розв’язування планіметричних завдань на побудову з  
використанням ІКТ»**

Виконала: студентка II курсу магістратури  
групи М-2  
факультету математики та інформатики  
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)  
Воронова Інна Вікторівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідуючий  
кафедри математики з методикою викладання  
Крайчук Олександр Васильович

Рецензенти: канд. фіз.-мат.  
наук, доцент, професор кафедри вищої  
математики РДГУ Петрівський Борис Петрович;  
канд. пед. наук, доцент, т.в.о. завідувача  
кафедри інформаційних систем та  
обчислювальних методів МЕРУ ім. акад. Степана  
Дем’янчука Лотюк Юрій Георгійович

Рівне-2022

<b>ВСТУП</b> .....	4
<b>РОЗДІЛ I. Науково-теоретичні основи дослідження методики розв’язування планіметричних задач на побудову</b> .....	6
1.1. Основи для реалізації загального підходу методики розв’язування планіметричних задач на побудову.....	6
1. 2. Підходи до розв’язування планіметричних задач на побудову різними способами. ....	9
1.3. Значення методики розв’язування планіметричних задач в навчанні математики.....	12
1.4. Вміння розв’язувати планіметричні задачі на побудову.....	15
1. 5. Традиційна методика розв’язування планіметричних задач на побудову; її переваги та недоліки. ....	18
<b>РОЗДІЛ II. Психолого-педагогічні передумови дослідження</b> .....	12
2.1. Психолого-педагогічний процес навчання .....	22
2.2. Розвиток логічного мислення у процесі навчання математики.....	24
2.3. Психологічний аналіз розумової діяльності під час вивчення найпростіших планіметричних задач на побудову .....	27
<b>РОЗДІЛ III. Методика розв’язування планіметричних задач на побудову з використанням ІКТ</b> .....	30
3.1. Загальна методика розв’язування задач на побудову з використанням ІКТ .....	30
3.2. Етапи розв’язування планіметричних задач на побудову .....	33
3.3. Методичні рекомендації з навчання розв'язання задач на побудову. ....	37
3.4. Методичні аспекти навчання методу допоміжного трикутника .....	41
3.5. Методичні аспекти навчання методу геометричних місць точок .....	43
3.6. Методичні аспекти навчання методу геометричних перетворень.. ....	46

3.7. Методичні аспекти навчання алгебраїчного методу.....	52
<b>РОЗДІЛ IV. Педагогічний експеримент та статистична обробка його</b>	
<b>результатів.....</b>	<b>55</b>
4.1 Організація педагогічного експерименту.....	55
4.2. Хід дослідження.....	60
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>63</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>66</b>
<b>ДОДАТОК А. Початок роботи з програмою. Звернення до послуг</b>	
<b>програми. Активізація програми.....</b>	<b>70</b>
<b>ДОДАТОК Б. Координатна площина.....</b>	<b>72</b>
<b>ДОДАТОК В. Геометричні об'єкти.....</b>	<b>75</b>
<b>ДОДАТОК Г. Перетворення об'єктів.....</b>	<b>78</b>
<b>ДОДАТОК Д. Використання педагогічного програмного засобу GRAN-2D</b>	
<b>під час розв'язування задач на побудову з планіметрії.....</b>	<b>83</b>

## ВСТУП

**Актуальність дослідження.** Одними з найдавніших задач з математики є планіметричні задачі на побудову. В наш час їх використовують для того, щоб активізувати творчу самостійність учнів. Під час роботи з задачами на побудову розвивається мислення, просторове сприйняття, розуміння геометрії як науки про властивості просторових форм.

Особливістю планіметричних задач є і те, що для їх виконання необхідно виконувати певну впорядковану послідовність операцій (елементарних чи основних побудов). Тобто щоб розв'язати задачу потрібно дотримуватись певного алгоритму дій. Це підвищує операційно-алгоритмічну культуру учнів, виробляє звичку до послідовного, а не хаотичного, виконання операцій. Що в епоху комп'ютерів відіграє важливу роль для розвитку пізнавальних інтересів учнів, їх раціоналізаторських здібностей. Використання мультимедійних засобів осучаснить сам процес навчання та підходи до вивчення різних тем.

**Мета дослідження:** Розробити методику вивчення планіметричних задач на побудову з використанням комп'ютерних технологій, яка дасть можливість учням краще засвоїти курс геометрії, розвинути просторове, алгоритмічне мислення учнів.

У процесі дослідження була висунута **гіпотеза:** застосування такої методичної системи допоможе учням сформувати стійкі вміння будувати планіметричні об'єкти, користуватись отриманими знаннями для підвищення рівня математичних знань.

Для досягнення мети планується розв'язати такі **завдання:**

1. Визначити основні теоретичні основи обраної теми.
2. Визначити, в якій мірі методична література, підручники та посібники з математики задовольняють навчання по темі.
3. Розробити методику вивчення даної теми.
4. Експериментально перевірити ефективність розробленої методики та вдосконалити її.

**Об'єкт дослідження:** Процес навчання математики у середній та старшій загальноосвітній школі.

**Предмет дослідження:** Методика вивчення планіметричних задач на побудову в шкільному курсі математики з.

В процесі досягнення поставленої мети планується використати ряд теоретичних та експериментальних **методів:** аналіз методичної літератури, підручників і посібників з математики, проведення тематичного контролю, практична діяльність по організації і проведенню навчального процесу на уроках математики, педагогічний експеримент, опрацювання його результатів з використанням методів математичної статистики.

**Практичне значення** дослідження полягає в тому, що розроблена методика допоможе вчителям при вивченні планіметричних тем на уроках, в підборі та складанні відповідних завдань, завдяки яким учні краще засвоюватимуть навчальний матеріал.

Для кращого розуміння і засвоєння навчального матеріалу потрібно використовувати інформаційно-комп'ютерні технології відповідного змісту. Технічний прогрес частково вирішує дані проблеми, адже сучасні технічні засоби дозволяють краще продемонструвати матеріал тем шкільної програми. Зокрема можна використовувати відеоролики, презентації, наукові фільми, експерименти подані у вигляді кіно. Це дозволить організувати думки школяра на уроці, підвищити рівень зацікавленості до вивчення конкретного предмета чи теми.'

Труднощі виникають у випадках недостатнього оснащення шкіл мультимедійною технікою, що не дозволяє вчителю в повній мірі продемонструвати учням зв'язок предметів з іншими науками та практичне їх застосування. В таких випадках вчителі змушені працювати без використання інновацій. Щоб підвищити рівень зацікавлення сучасного школяра, зробити його конкурентноспроможним за межами нашої держави слід вирівняти якість знань та рівень засвоєння матеріалу шкільного курсу до стандартів європейських навчальних закладів.

# **РОЗДІЛ І. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ**

У цьому розділі обґрунтовується доцільність і можливість формування загального прийому для розв'язування планіметричних задач на побудову, розглядаються теоретичні основи процесу його формування на основі аналізу методичної і психолого-педагогічної літератури.

## **1.1. Передумови реалізації загального підходу методики розв'язування планіметричних задач на побудову**

Для визначення найбільш оптимальних шляхів реалізації загального підходу до навчання учнів методиці розв'язування планіметричних задач на побудову, було проведено аналіз діяльності студентів факультету математики та інформатики Рівненського державного гуманітарного університету при розв'язуванні планіметричних задач. Нами було проведено аналіз володіння теоретичними положеннями по окремих методах розв'язування планіметричних задач на побудову, сформовані уміння здійснювати перехід з мови основних геометричних понять і зв'язків між ними на мову методів розв'язування планіметричних задач і навпаки, сформованість уміння робити обґрунтований вибір методу розв'язування планіметричних задач, уміння здійснювати розв'язування задачі вибраним методом.

У дослідженні взяли участь учні 9 класу Рудко-Червинської гімназії-філії ОЗЗСО «Тоболівський ліцей»

В дослідженні застосовано метод анкетування, проведено аналіз письмових робіт. Учням була запропоновано наступне опитування (див. табл. 1). Проаналізувавши відповіді на перше запитання видно, що кількість учнів, які виявляють інтерес до розв'язування геометричних задач вище, ніж кількість учнів, розв'язування задач у яких не викликає постійного інтересу. Найважчим при розв'язуванні геометричних задач є вибір методу розв'язування. На деякі питання опитування учні відповідали невпевнено. Учні говорили, що над

запитанням “Як ви проводите пошук розв’язування задач?” вони ніколи не задумувалися, а педагог ніколи не спрямовував їх увагу на загальні методи пошуку розв’язування задач. Тому відповіді обумовлені їх емпіричним досвідом щодо розв’язування задач.

Дослідження стану практичного навчання методам розв’язування планіметричних задач проводилося теж за допомогою аналізу письмових робіт і усних відповідей учнів.

**Таблиця 1.**

№ п/п	Запитання	Відповіді		
		А	Б	В
1.	Чи цікавий вам процес розв’язування задач з геометрії: а) так; б) ні; в) не завжди.	6	2	2
2.	Який етап розв’язування планіметричних задач є найскладнішим: а) аналіз умови задачі; б) вибір шляху розв’язання; в) наслідок не достатніх математичних знань.	6	3	1
3.	Як способом ви шукаєте метод розв’язування задачі: а) визначаю до якої теми чи типу задач відноситься дана задача; б) пригадую відповідні поняття і їх властивості, роблю можливі висновки, які приведуть до розв’язку; в) застосовую прийоми відшукування плану розв’язування.	3	5	2

4.	Яким етапом ви закінчуєте роботу над задачею: а) оформлення розв'язку; б) перевірка розв'язку; в) відшукання іншого способу розв'язування.	1	6	3
----	---	---	---	---

### *Продовження таблиці 1.*

Учням була запропонована діагностувальна робота №1. Метою цієї роботи є встановлення рівня володіння учнями методикою розв'язування планіметричних задач. Завдання, що стояли при складанні завдань: 1) включити відомості, що відносяться до різних методів розв'язування планіметричних задач; 2) з'ясувати спосіб, яким учні здійснюють вибір методу розв'язування планіметричних задач;

Стандартні недоліки у навчанні учнів методів розв'язування планіметричних задач: 1) недостатнє володіння прийомами перекладу основних геометричних понять і співвідношень між ними на мову методів розв'язування планіметричних задач і навпаки; 2) недостатнє володіння в повному обсязі теоретичним матеріалом по методах розв'язування планіметричних задач; 3) недостатнє вміння формулювати, в чому полягає сенс того або іншого методу розв'язування планіметричних задач[1].

Дидактичні передумови для формування узагальненого прийому розв'язування планіметричних задач були обумовлені тим, що при існуючій методиці навчання учнів не досягнуто в повній мірі формування ухвалення розв'язку планіметричних задач використовуючи різні методи.

Процес організація навчання учнів вмінням розв'язувати планіметричні задачі умовно виділяє два основних підходи до формування цих вмінь.

Найпоширенішим є поступовий перехід від розв'язування простих задач до складніших. При переході до складніших задач (напівалгоритмічних, евристичних) надають перевагу знайомству із прикладами їх розв'язування .



В такому випадку, взаємодія вчителя і учнів зазвичай зводиться до діагностики формування вміння розв'язувати задачі і демонстрації зразків розв'язування. Зазвичай спостерігається прагнення вчителя заставити учнів виконати якомога більше задач. В цьому випадку, як відомо, вчитель не бере участі в керуванні розумовою діяльністю учнів, а останні досягають певного рівня сформованості вмінь розв'язувати, в повній мірі залежних від їх особистих можливостей і прагнень.

## **1. 2. Аналіз різних підходів розв'язування планіметричних задач на побудову різними способами.**

Математичні вміння – компонент і результат рівневої математичної діяльності, яка має такі властивості: а) основними функціями є – пізнавальна і перетворююча; б) спрямованість на формування узагальнених способів мисленнєвих дій; в) перевага просторового і логічного компонентів, зв'язків, відношень конструктивного характеру; г) належність діяльності операційно – орієнтовного змісту, прийомів, які можна подати у вигляді покрокових програм дій; д) має як прикладну, так і практичну спрямованість.

Сформованість вмінь в певній мірі залежить від того, наскільки повноцінно в процесі навчання враховуються рівні математичної діяльності учнів (мінімально базовий, базовий, підвищений).

Формування математичних умінь є ефективним, якщо включає наступні етапи: підготовчо – мотиваційний етап, операційно–пізнавальний, рефлексивно – оціночний.

Підготовчо-мотиваційний етап включає в себе: мотивацію включення способу діяльності; актуалізацію опорних знань; встановлення вимог програми до способу діяльності, які демонструють на базі і в контексті яких знань має формуватися спосіб діяльності.

Операційно-пізнавальний етап включає в себе: визначення найраціональнішої послідовності виконання дій; виділення способу

діяльності; складання на основі загальних операцій моделі способу діяльності; уточнення і встановлення меж його застосування.

Рефлексивно-оціночний етап передбачає: узагальнення способу діяльності; ретроспективний аналіз і самооцінювання діяльності; співставлення результатів діяльності і навчальних завдань.

Контроль та корекція, оцінювання навчальної роботи учнів на уроках відбувається в процесі її виконання або у формі рефлексивно – оціночного етапу. Рекомендовано такі види контролю: за кінцевим результатом та за параметрами діяльності, покроковий контроль.

Першочергово має бути проаналізований конкретний предметний зміст діяльності вчителя в процесі навчання.

Традиційно оцінюють продуктивну діяльність вчителя математики за тим, як його учні вміють розв'язувати задачі. Це логічно, адже по тому, як учні розв'язують задачі, можна говорити і про рівень засвоєння ними теоретичного матеріалу, про зорієнтованість в навчальному матеріалі і вміння використовувати знання про стадії їх математичного розвитку. З іншого боку, з того, як учні розв'язують задачі можна зробити висновки і про рівень педагогічної майстерності викладача. Оцінюючи діяльність вчителя, рівень педагогічної майстерності в процесі математики через задачі, постає важливе питання якості підготовки майбутніх вчителів до процесу організації цієї діяльності.

Відповідно до цього, проблеми підготовки учнів на уроках математики та методики викладання можна розглянути з двох аспектів: з точки зору підвищення рівня їх загальної ефективності і в значенні підготовки для майбутньої педагогічної діяльності вчителя-математика. Головним для майстерності є оволодіння знаннями з предмету, який вивчається, а теоретичною основою – удосконалення методики навчання з розв'язування і формування професійної майстерності з навчання учнів розв'язувати математичні задачі

Аналізуючи теорію поетапного формування розумових операцій, одним з головних моментів якої є вимога здійснення учнями засвоюваної діяльності, а дана методика реалізує спеціальні засоби з організації орієнтування у виконанні цієї діяльності та потім її поетапного відпрацювання, яке направлене на зміну показників тих чи інших параметрів показує, що діяльність навчання виступає не самостійно зі сторони того, хто навчається, а тому в основі діяльнісного підходу до формування професійної майстерності вчителя математики ми можемо виокремити дві стадії.

На першій стадії передбачено виникнення у студента- математика вмінь, які дозволять актуалізувати процес навчання учнів розв'язуванню задач, засобами нетрадиційного характеру представлення завдань, формування їх умов; у пошуку чітких критеріїв педагогічної значущості задачі і достатньої кількості задач, які були б запропоновані для учнів щоб досягнути поставленої навчальної мети; вмінь правильно компонувати методи індукції та дедукції під час роботи; вміння ставити запитання; прийомами розумових операцій (аналогія, узагальнення, конкретизація); вміння застосовувати контрприклад, обернені твердження; оволодіння узагальненим підходом до роботи над задачею[10].

Наступна стадія містить у собі ряд послідовних змін цих вмінь, які мають на меті отримати заплановані характеристики і насамперед певного ступеня надійності, достатньої щоб функціонувати під час роботи педагогом.

Реалізувати кожну стадію можна створивши такі умови:

- суттєвого підвищення вчительської математичної кваліфікації;
- ефективною перебудови методичної підготовки вчителя;
- обширного обґрунтування місця і значення кожної наукової галузі в загальній системі підготовки школярів;
- стимулювання науково–дослідницької роботи з математики та методики її викладання.

Щоб реалізувати дані умови необхідно першопочатково бути сформована модель компетентності вчителя математики, що буде відповідати

сучасним вимогам і буде ґрунтуватись на науково підтверджених методологічних основах, психолого-педагогічних принципах, що будуть відповідати концепції формування вчителя математики.

Також вміння вчителя математики описують зміст дисциплін, що викладаються для студентам педагогічного університету та методи викладання цих дисциплін. Ще одним варіантом для того щоб удосконалити процес підготовки майбутніх вчителів математики є регулярне вдосконалення навчальних програм та планів.

### **1.3. Значення методики розв'язування планіметричних задач в навчанні математики**

В процесі вивчення математики задачі можуть виконувати різні функції. Навчальні математичні задачі - один із найефективніших і часто незамінний засіб засвоєння учнями понять і методів шкільного курсу математики, взагалі математичних теорій. Робота над задачами допомагає досягнути всі цілі, які поставлено перед вивченням математики. Саме через це для розв'язання задач використовується половина навчального часу уроків математики. Правильна методика розв'язування планіметричних задач відіграє значну роль у формуванні високого рівня математичної компетентності.

Під час розв'язування математичних задач учень вчиться використовувати математичні знання на практиці, готується до практичної діяльності в майбутньому, до розв'язання задач, що ставлять вимоги сучасності . Планіметричні задачі розв'язуються і у інших точних науках.

Розв'язання задачі має бути повністю аргументованим, тобто не допускаються незаконні узагальнення, необґрунтовані аналогії, пред'являється вимога повноти диз'юнкції, дотримуються повнота і витриманість класифікації. При розв'язанні математичних задач в учнів формується особливий стиль мислення: дотримання формально-логічної схеми міркувань, лаконічне вираження думок, чітка розчленованість ходу мислення, точність символіки [6].

Засвоєння математичних знань і рівень математичного розвитку учнів завжди перевіряються за допомогою розв'язування задач. Тому проблема методів навчання математики включає і проблему методів навчання розв'язуванню задач.

Розв'язування математичних задач привчає виділяти посилення і висновки, дані і шукані, виділяти загальне і особливе в даних, співставляти і протиставляти факти. При розв'язанні математичних задач виховується правильне мислення, учні привчаються до повноцінної аргументації.

Якщо проаналізувати уроки математики в сучасній середній школі, то можна без труднощів помітити, що більша частина навчального часу відводиться розв'язуванню задач. Відомий педагог – математик Д. Пойа говорив, що володіння математикою – це є вміння розв'язувати задачі, при чому не тільки стандартні, але й ті, які вимагають відомої незалежності мислення, здорового розуму, оригінальності, винахідливості [39].

Педагоги, яким доводиться мати справу з випускниками середніх шкіл, відмічають слабку підготовку молодих людей саме в методиці розв'язування планіметричних задач на побудову. В чому ж справа? Виявляється, що час, який відводиться на розв'язування задач в школі, далеко не завжди використовується ефективно, і це погано впливає на якість вивчення математики загалом.

Пригадаємо про одне відоме учням поняття: поняття проблемної ситуації. Проблемна ситуація – явище суб'єктивне. Проблемна ситуація містить у собі наступні компоненти: людина, об'єкт її діяльності і проблема (перепона). Тому проблемну ситуацію не можна “списати”, запозичити, передати іншій людині тощо. Це особисте досягнення суб'єкта.

Проблемна ситуація – це інтелектуальна проблема, яка виникає у випадку, коли людина не знає, як пояснити явище, факт, процес дійсності, не може досягти цілі відомим їй способом діяльності. При цьому людина знаходиться в таких умовах, що спосіб подолання проблеми вона повинна знайти тільки завдяки власній пізнавальній активності і самостійності [7;8].

Проблемна ситуація може виникнути безпосередньо під час роботи. Без цього людина не може ні виявити проблему, ні зрозуміти її, ні, тим більше, захотіти її вирішити.

В умовах шкільних задач річ, звичайно, може йти тільки про навчальні проблемні ситуації:

- вони є проблемними для тих, хто вчиться, але не для педагогів;
- вони навмисно створюються вчителем для розв'язання запланованих освітніх завдань.

В методичній літературі описують кілька варіантів створення проблемних ситуацій в класі:

Спосіб 1. Створення проблемної ситуації шляхом складання історії виникнення і розвитку якого – небудь математичного поняття чи практичного його застосування в сучасних умовах.

Спосіб 2. Постановка перед учнями теоретичної проблеми пояснення зовнішніх суперечностей у фактах, що спостерігаються, доведення чи заперечення твердження, отриманого на основі спостережень чи в результаті вимірювання, обчислень, виведення формул, правил тощо.

Спосіб 3. Постановка перед тими, що навчаються навчальної проблеми аналізу і узагальнення засвоєних раніше знань і умінь.

У такому випадку, коли людина в проблемну ситуацію, буде намагатись її проаналізувати. Можна сказати, що вона намагається “децентралізувати” ситуацію (до цих пір вона була центром цієї ситуації, а тепер вона хоче вийти за її межі, подивитися на неї зі сторони). Це допомагає суб'єкту детально проаналізувати ситуацію, виявити всі її складові частини, зв'язки і відношення між ними, і особливості проблеми, що виникла.

Результати свого аналізу суб'єкт закріплює письмово.

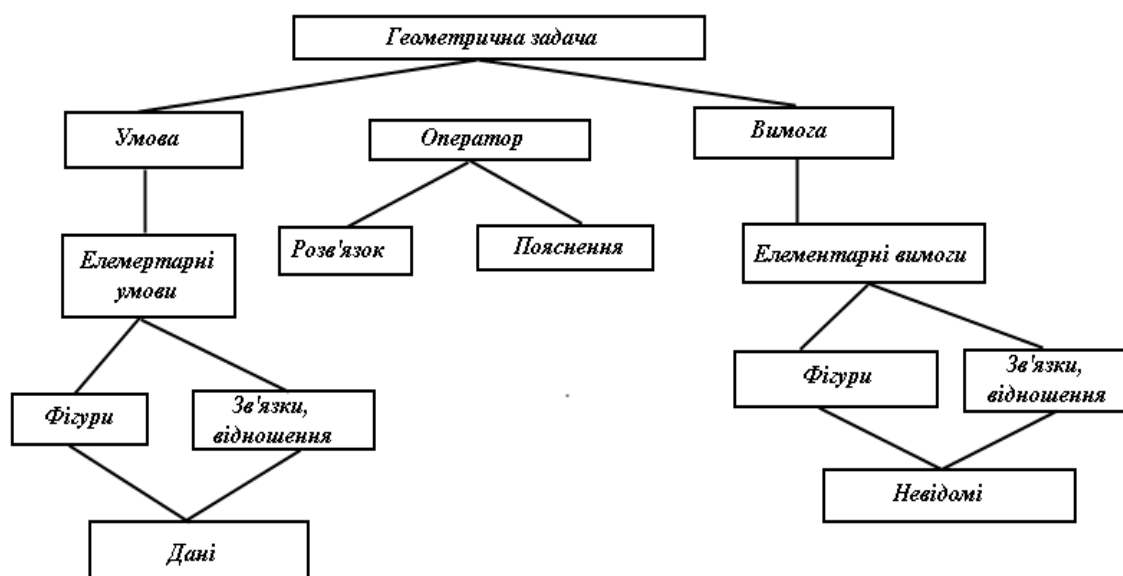
Опис проблемної ситуації на будь – якій мові називається задачею.

Як видно, задача тісно пов'язана з проблемною ситуацією, але вона не співпадає з цією ситуацією. В задачі відображені лише деякі сторони проблемної ситуації. Задача і ситуація подібні, але ситуація багатша, ніж

задача, яка виникла з неї. Тому говорять, що задача – це модель проблемної ситуації.

Задача – це модель проблемної ситуації, виражена за допомогою знаків деякої природної чи штучної мови. Між задачею та проблемною ситуацією можна виділити наступні відмінності.

**Таблиця 2.**



Геометрична задача (див. таблицю 2.) побудована так, що в ній за даними елементами треба знайти інші елементи (шукані) елементи геометричної фігури, які перебувають між собою та даними елементами в певних співвідношеннях, або визначити розміри окремих елементів.

Формування вмінь розв'язувати задачі є однією з основних завдань навчання математиці. Саме ця форма діяльності школярів дає змогу здійснювати контроль рівня їх математичної грамотності.

#### **1.4. Вміння розв'язувати планіметричні задачі на побудову**

Вміння, що базуються на знаннях і навичках -- здатність людини виконувати будь – яку діяльність в умовах, які змінюються.

Значущим та одночасно складним геометричним вмінням може стати вміння розв'язувати планіметричні задачі. Під загальними вміннями розв'язувати геометричні задачі будемо розуміти вміння застосовувати прийоми і методи розв'язування задач, які відрізняються варіативністю умов, самостійно конструювати загальні правила розв'язування визначених груп задач, підбирати логіко – математичні операції для розв'язування цих груп і послідовно їх виконувати. При цьому можливий різний ступінь загальності.

Геометричними вміннями будемо називати вміння, які безпосередньо чи опосередковано пов'язані з операціями над геометричними фігурами.

Необхідно визначити розумові дії, в процесі виконання яких студенти оволодіють вміннями розв'язувати геометричні задачі, тобто визначити операційний склад вмінь. Якщо ми маємо на меті сформувати в учнів вміння розв'язувати геометричні задачі, то насамперед необхідно вяснити, що ж саме треба сформувати, тобто природу вмінь, їх структуру і психологічні особливості.

Щоб визначити структуру (див. таблицю 3.) загальних вмінь розв'язувати геометричні задачі, проаналізуємо діяльність по розв'язуванню задач. В загальному вигляді діяльність по розв'язуванню задач потрібно розглядати як процес взаємозв'язку суб'єкта з об'єктом (задачею), або як цілеспрямовану розумову чи практичну діяльність людини, яка розв'язує задачі[25].

До вивчення діяльності по розв'язуванню задач існують такі підходи:

1. Вивчення діяльності конкретного суб'єкта при розв'язуванні задач з ціллю встановлення структури і особливостей діяльності саме цього суб'єкта.
2. Вивчення діяльності різних суб'єктів при розв'язуванні одних і тих же задач визначеного виду. Такий підхід характерний для дослідження загальних закономірностей мислення при розв'язуванні задач, а також для виявлення структури і особливостей процесу розв'язування задач визначеного виду.
3. Обґрунтування визначеними теоретичними посиленнями побудови діяльності щодо розв'язування задач.



Можна виокремити два способи діяльності щодо розв'язування задач: алгоритмічний та евристичний.

Алгоритмічний спосіб використовуємо тоді, коли учні володіють повною інформацією про об'єкти, методи і засоби діяльності, тобто він може визначити, який алгоритм потрібно використати, щоб розв'язання даної задачі і володіє методикою застосування алгоритму. Цей вид діяльності підкоряється наступному емпіричному правилу: застосовувати для розв'язування конкретної задачі ті засоби (алгоритми) і методи, які в минулому вже використовувались для розв'язування аналогічних задач. Цей спосіб ефективний тільки в тому випадку, коли об'єкти діяльності та умови діяльності постійні[38].

Евристичний спосіб має місце тоді, коли учні не володіють повною інформацією про об'єкти діяльності та процеси виконання операцій чи коли вони постійно змінюються.

З методичної точки зору характеристика цих методів така: якщо учень знає, як розв'язати задачу даного типу, то його діяльність в ході розв'язування носить алгоритмічний характер; якщо ж задача даного типу зустрічається йому вперше (навіть якщо її розв'язання можна досягнути за допомогою нескладного алгоритму), його діяльність набуває евристичного характеру.

Вміння алгоритмічного характеру полягають в тому, що учень виконує свою діяльність щодо розв'язування даної задачі у відповідності з відомим йому алгоритмом, тобто в строго заданій послідовності. Володіння даними навичками спрямовує учнів на формально – логічний аналіз задачі, який закономірно приводить до вибору відповідного конкретного способу розв'язування задач поданого виду.

Вміння евристичного характеру пов'язані з ціленапрямленими пошуками в процесі розв'язування задач. Володіння такими вміннями, на відміну від алгоритмічних, може лише навести на шлях розв'язання запропонованої задачі, тобто вони сприяють відшуканню шляху розв'язання з визначеним ступенем можливості.



*Таблиця 3.*

В шкільному курсі геометрії виокремлюють наступні методи розв'язування задач: аналітичний, синтетичний, аналітико – синтетичний, алгебраїчний, геометричних місць, координатний і векторний, доведення від супротивного.

Застосування методів до розв'язування задач покращується, якщо їх представити у вигляді евристичних схем. Останні являються орієнтовною основою діяльності студентів при розв'язуванні задачі тим чи іншим методом[37].

Навчання розв'язувати задачі ефективно, якщо вчитель не повідомляє дітям готову евристичну схему розв'язування даної групи задач, а на прикладі двох – трьох задач – моделей організує їх діяльність на самостійне її складання.

### **1. 5. Традиційна методика розв'язування планіметричних задач на побудову; її переваги та недоліки**

Важливе значення у роботі над задачею приділяють пошуку розв'язку. Його можна розглядати серед евристичних засобів розв'язування задач стратегії як психічні утворення, що забезпечують інтеграцію основних операцій у складі форми мислення.

Розглянемо можливі стратегії у навчанні розв'язуванню математичних задач за ступенем їх складності. Кожна з них була покладена в основу відповідного рівня у традиційному навчанні пошуку розв'язку математичних задач на побудову[24].

Перший рівень у методиці розв'язування планіметричних задач на побудову відповідає орієнтації на випадкові послідовні спроби перетворення вихідної задачної ситуації. У процесі таких перетворень здійснюється наближення до розв'язку задачі у деякому відносно однорідному задачному полі від вихідної задачі (задачної ситуації) до допоміжних і проміжних задач, підзадач, тощо.

Ефективність методики розв'язування планіметричних задач на побудову на даному рівні залежить від складності задачі (кількості ланок оператора розв'язку). Для нескладної математичної задачі на 1 – 2 дії або перетворення, (ланки відповідного оператора) кількість як вірних так і помилкових або неефективних спроб, що не ведуть до розв'язку задачі, відносно невелика. Тому обрана стратегія буде для цього випадку досить ефективною та результативною[36].

Для складної задачі, що передбачає використання багатоланкового математичного оператора, результативність розв'язку за такої стратегії пошуку падає у статистичній інтерпретації за законом геометричної прогресії.

Можливі посилення даної стратегії пошуку розв'язку математичних задач теоретично, як це показано в теорії розв'язування винахідницьких задач, вичерпуються організаційними формами колективної діяльності: брейнстормінгом (або мозковим штурмом), синектикою, що полягають у збільшенні хаотичних спроб, перебору спроб, варіантів, застосування різних аналогій і вільних асоціацій.

При цьому мова може вестися швидше за все про можливість застосування лише окремих елементів наведених прийомів і методів для математичних задач.

Другий рівень у методиці розв'язку планіметричних задач на побудову відповідає стратегії кількісної систематизації розгляду можливих математичних операторів розв'язку, що наочно можуть бути зображені у деякому однорідному заданому полі.

Систематизація перебору можливих математичних операторів розв'язку задачі дозволяє збільшити кількість можливих спроб, включити дублювання під час пошуку.

Третій рівень у методиці розв'язування планіметричних задач на побудову розширює можливості раніше розглянутих стратегій попередньою структуризацією задачного поля, визначення у ньому емпіричної системи (певної множини) задач, що охоплює зміст параграфа, теми підручника математики, із збереженням підходу виконання випадкових спроб (варіантів). Обмеження задачного поля емпіричною системою задач дозволяє дещо підвищити результативність розгляду математичних задач, якщо учневі стає відомим тип (клас) пропонованих задач. З цього погляду аналогічні математичні задачі, але розташовані відповідно в кінці відомої теми та в кінці підручника (збірника) без вказівки на приналежність до такої теми, будуть розв'язуватися учнем у загальному випадку за різними стратегіями.

Однак за самостійного розв'язку задач, тип яких ще тільки належить визначити, набута результативність зменшується. Інформація про тип пропонованих задач міститься, як правило, у назві розділу підручника, теми розділу збірника задач. Саме цим, на наш погляд, можна пояснити складність для учнів так званих комбінованих задач, що потребують для розв'язування знання кількох тем, розділів.

Четвертий рівень у методиці розв'язування планіметричних задач на побудову передбачає оволодіння стратегією виконання загального напрямку дій з розв'язування задачі у вигляді алгоритму всередині визначеної емпіричної системи задач.

Остання стратегія найбільш ефективна із раніше розглянутих. Однак, внаслідок емпіричного підходу до структуризації задачного поля, система задач, розглядуваних у навчанні, далека від мінімізації[35].

Як бачимо, можливості для удосконалення існуючих стратегій пошуку розв'язку навчальних математичних задач практично вичерпані. Необхідна інноваційна стратегія, що змогла б надати розвитку і доповнити попередні.

## РОЗДІЛ II. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

### 2.1. Психолого-педагогічний процес навчання

Для процесу навчання в педагогіці надають особливе значення. вирішальне та Воно є основним джерелом систематичного впливу на учня, його думки, сферу мислення, почуття. Значну роль у розвитку активізації пізнавальної діяльності мають місце моменти, що вносять елементи захоплення навчальним процесом, допомагають послабити напругу та втомленість після уроків. Основне завдання, що повинен виконати вчитель - показати, що математика - не лише “довгі приклади на всі дії, а й цікаві, змістовні задачі, які потребують не тільки прорахунків, а й міркувань”, а й цікава та потрібна в житті наука.

*Навчання*, — це цілісний двосторонній процес педагогічної діяльності вчителя та освітньої діяльності учнів, у результаті якого відбувається засвоєння суб'єктами учіння визначених знань, навичок і вмінь та реалізуються відповідні виховні педагогічні аспекти. До психологічних факторів навчання можна віднести вікові та індивідуальні особливості учнів (відчуття, почуття, воля, увага, сприймання, пам'ять, мислення, уява тощо), особливості змісту та наповнення навчального матеріалу, а також психологія педагогічної взаємодії між усіма складовими освітнього процесу. Процес засвоєння знань задіює відповідні психологічні компоненти і водночас розвиває їх, причому розвиток як правило, посилюється в гуманізованому й адаптованому до потреб і можливостей дітей середовищі, яке відповідає національним звичаям, державним традиціям і менталітету. Можна підсумувати, що психологізація навчання — це не лише вивчення і врахування вікових та індивідуальних особливостей суб'єктів учіння під час реалізації освітнього процесу, а й адаптування до них змісту навчального матеріалу, дослідження і використання психологічних можливостей навчального матеріалу у розвитку емоційно-вольових та інтелектуально-пізнавальних процесів, національному вихованні студентів. Кожна навчальна дисципліна має свої специфічні психологічні пріоритети. Якщо засобами літератури

найбільше можна розвинути емоційно-почуттєва сфера, то строга логічність математичних форм найбільше розвиває інтелектуальні сили суб'єктів учіння, але лише за умов, якщо навчальний матеріал доступний і водночас достатньо важкий для розуміння і засвоєння його учнями[34].

Зміст математичних дисциплін характеризують їх особливості, які належним чином впливають і на їх місце в структурі навчального процесу, і на психологічне забезпечення засвоєння математичних знань. До них належать: високий рівень узагальнення й абстрагованості; тісний взаємозв'язок між усіма елементами знань; велика кількість термінів і понять; домінування дедуктивних умовиводів, логічних обґрунтувань, постійне включення аналітико-синтетичних функцій мислення; переважання методу вправлянь, його суттєва роль не лише для формування відповідних навичок і вмінь, а й для засвоєння теоретичних знань; загальне домінування розвивальних функцій над освітніми під час вивчення математики; велика роль ядра математичних знань і навичок для успішного подальшого просування і в навчанні, й у розвитку. Серед визначених особливостей математики як навчального предмета більшість носить психологічний характер, домінантою якого є інтелект учнів. Тому навчання математики допомагає встановити розумові здібності учнів для того, щоб і самою технологією навчання, й адаптованим змістом оптимізувати поступ їх мислення. Звісно, в умовах колективного навчання реалізувати сповна розвивальні можливості математичних дисциплін є непростою справою, оскільки кожна дитина за своїми здібностями є неповторною і вимагає індивідуального розвитку (навчання)[2].

Однією з основних функцій математичних знань є інтелектуальний розвиток тих, хто навчається. Формування в них загальних прийомів розумових дій, а також специфічних прийомів, де під час навчання їх використовують і як засіб досягнення навчальних цілей, і як предмет навчально-пізнавальної діяльності. Практика показала, що особливістю пізнавальної діяльності студентів, що слабо навчаються з математики, є

несформованість загальних розумових дій, мисленнєвих операцій, логічного мислення. Основною причиною є надання переваги навчальним цілям, недостатня увага до розумового розвитку дітей, тобто використання математичних знань для формування загальних і специфічних прийомів розумової діяльності, які не часто стають предметом навчання, як такого. Учитель розглядає розширення обсягу знань як кінцеву мету навчального процесу. Така установка не є позитивною та призводить до перевантаження учнів. Внаслідок цього щорічно зростає кількість учнів, які не тільки перестають засвоювати математичні знання, а й сприймати їх в цілому. Щоб не допустити несприймання значною частиною учнів математичних знань на тому чи іншому році навчання необхідно:

- Виокремлювати головні елементи знань на кожному навчальному етапі, без яких подальша робота буде неможливий;
- Другорядні елементи знань використовувати лише для формування прийомів розумової діяльності учнів;
- адаптувати рівень складності головних знань до рівня розумових можливостей учнів;
- задля полегшення запам'ятовування знань насичити психологічно матеріал, використовуючи аналогію, порівняння, логіку встановлення і обґрунтування понять та термінів.

Розумова пасивність, бездіяльність, яка нерідко обумовлена надмірністю вимог до студентів стомлює їх, а неактивна осмислена розумова праця пов'язана з позитивним емоційним підкріпленням [7].

## **2.2. Розвиток логічного мислення у процесі навчання математики**

Розвиток логічного мислення безпосередньо пов'язаний з процесом навчання математики. При цьому багато дослідників зазначають, що однією з найважливіших завдань навчання, в тому числі і математики, у школі є формування в учнів навичок здійснення логічних операцій, навчання їх різним прийомам логічного мислення, озброєння знаннями логіки і вироблення у



школярів умінь і навичок використання цих знань у навчальній і практичній діяльності.

Як наслідок правильно організованого навчання математики, школярі досить швидко розвивають розумові процеси логічного мислення, зокрема, вміння узагальнювати, класифікувати і аргументовано обґрунтовувати свої висновки. Разом з тим немає єдиного підходу до вирішення питання, як ефективно організувати таке навчання математичній компетентності. Одні вважають, що логічні прийоми є невід'ємною частиною математики як науки, основи якої включені у зміст освіти, тому в учнів при вивченні математики автоматично розвивається логічне мислення на основі заданих образів. Інший підхід виражається в думці частини дослідників про те, що розвиток логічного мислення тільки через вивчення навчальних предметів, у тому числі і математики, є малоефективним, такий підхід не забезпечує повноцінного засвоєння прийомів логічного мислення [3].

Хоча, яким би не був підхід до вирішення цього питання, більшість дослідників сходяться в тому, що розвивати логічне мислення в процесі навчання математиці це насамперед означає розвиваток в учнів уміння порівнювати предмети, за якими ведеться спостереження; знаходити в них спільні властивості та відмінності, а також виробляти вміння виділяти суттєві властивості предметів і відволікати (абстрагувати) їх від другорядних, несуттєвих; вчити дітей розчленовувати (аналізувати) предмет на складові частини з метою пізнання кожної складової частини і з'єднувати (синтезувати) розчленовані подумки предмети в одне ціле, пізнаючи при цьому взаємодію частин і предмет як єдине ціле; вчити школярів робити правильні висновки зі спостережень або фактів, уміти перевіряти ці висновки; прищеплювати вміння узагальнювати факти; розвивати в учнів уміння переконливо доводити істинність своїх суджень і спростовувати хибні умовиводи; стежити за тим, щоб думки учнів викладалися виразно, послідовно, несуперечливо, обґрунтовано[33].

Безсумнівно процес розв'язування таких задач на побудову, розвиває

логічне і активне мислення суб'єктів навчального процесу. Ні одні завдання не сприяють так розвитку в учнях спостережливості та правильності мислення, представляючи в той же час для них і найбільшу привабливість, як геометричні завдання на побудову. Неабияке значення для розвитку логічного мислення учнів мають і задачі на побудову. Як відомо, наявність аналізу, докази і дослідження при вирішенні більшості таких завдань показує, що вони являють собою багатий матеріал для вироблення в учнів навичок правильно мислити і логічно думати. Під час розв'язування планіметричних задач на побудову вони мають справу не з конкретною, визначеною фігурою, а повинні створити необхідну нову фігуру, що піддається різним змінам в процесі роботи над нею. Розкриваючи взаємозв'язки між даними елементами можна побачити як зі зміною одних даних змінюються інші і навіть уся фігура. Цим ми привчаємо учнів до діалектичного методу мислення і по можливості усуваємо формалізм у знаннях, що засвоїлись.

Важко переоцінити роль задач на побудову в математичному розвитку учнів. Вони по своїй постановці і методам розв'язування не тільки стимулюють накопичення конкретних геометричних уявлень, а й розвивають здатність чітко уявляти собі ту чи іншу геометричну фігуру і, більше того, вміти оперувати елементами цієї фігури подумки. Завдання на побудову можуть сприяти розумінню учнями походження різних геометричних фігур, можливості їх перетворення - все це є важливою передумовою розвитку просторового мислення школярів. Вони сильно розвивають логічне мислення, геометричну інтуїцію. Тим часом зауважимо, що процес формування логічного мислення, загальнологічних умінь, як компонента загальної освіти, повинен бути цілеспрямованим, безперервним і пов'язаним з процесом навчання[32].

Логічне мислення - є абстрактне, аналітичне, синтетичне мислення, яке функціонує на базі мовних засобів, активно розвивається в людини, починаючи з певного віку - з початком його навчання.

Розвиток логічного мислення - це формування в учнів навичок здійснення логічних операцій, навчання їх різним прийомам логічного мислення, озброєння знаннями логіки і вироблення умінь і навичок використання цих знань у навчальній і практичній діяльності. Цей процес безпосередньо пов'язаний з процесом навчання математики, правильна організація якого забезпечує найбільш ефективний розвиток логічного мислення, в тому числі і при рішенні геометричних задач. При цьому ні одні завдання не сприяють так розвитку в учнях спостережливості та логічного мислення, представляючи в той же час для них і найбільшу привабливість, як задачі на побудову[4].

### **2.3. Психологічний аналіз розумової діяльності під час вивчення найпростіших планіметричних задач на побудову**

Мета розумової діяльності досягається вирішенням наступних завдань: оволодіння основними розумовими операціями, структурою логічних форм мислення, перенесенням прийомів розумової діяльності з однієї галузі знань в іншу. Організація розумової діяльності базується на принципах спадкоємності, врахування вікових особливостей, розкриття загальнозначущості логічних форм і відносин і ін; а зміст її включає основні логічні вміння та відповідні їм розумові операції. Розвиток розумової діяльності здійснюється за допомогою вивчення процесу мислення, активного використання мовлення, з'єднання і взаємозбагачення всіх видів мислення.

У учнів одного віку пізнавальний процес має різні ступені індивідуального розвитку та їх характер. Елементарним рівнем пізнання вважається відкрита безпосередня зацікавленість новими фактами, знаннями, що формуються на уроці, більш високим рівнем є прагнення учнів до вирішення складних завдань. Саме цей рівень може вирішитися завдяки різноманітним методам навчання при вивченні тем. Вони допомагають розкрити учня, дають поштовх до навчання, прививають любов до математики.

Таким чином, математичні знання і вміння розглядаються не стільки як самоціль, а як засіб розвитку особистості учня, забезпечення його математичної грамотності як здатності розуміти роль математики в світі, в якому він живе, висловлювати обґрунтовані математичні судження і використовувати математичні знання для задоволення пізнавальних і практичних потреб.

Основними завданнями курсу планіметрії є вдосконалення вмінь учнів будувати зображення просторових фігур та розв'язувати різноманітні задачі, які стосуються цієї теми[31].

Особливістю просторового мислення є використання певної системи орієнтації в просторі. Серед можливих систем найбільш природною вважається система орієнтації за допомогою тіла, що лежить в основі практичної орієнтації серед предметів і явищ. Під час переходу до геометричного простору учні зазнають труднощів і виникає потреба відійти від звичної схеми тіла до абстракції. Визначаючи просторове розміщення геометричних об'єктів за точку відліку приймається не спостерігач, а будь-який, наперед обраний елемент, по відношенню до якого в просторі розміщуються всі інші елементи.

Тому перехід від чіткої системи відліку до заданої чи довільно вибраної істотно ускладнює формування просторових образів у школярів.

Поділ курсу геометрії на планіметрію та стереометрію з фактично поодинокими вкрапленнями просторових зображень на площині приводить до гальмування просторової уяви та її спотворення[5].

Не менш важливим є врахування негативного впливу попереднього досвіду студентів, набутого при засвоєнні математичних знань на попередніх етапах навчання. Психологи відзначають, що причиною виникнення таких помилок є пригнічення більш слабких асоціацій сильними та звичними асоціаціями. І як наслідок, відбувається необґрунтоване перенесення вивчених раніше правил, закономірностей у нові умови, неправомірне використання аналогій.

Під час оперування просторовими образами в процесі переходу від площини до простору і навпаки здійснюється процес проєкціювання. Учні оволодівають цим поняттям спочатку тільки емпірично, інтуїтивно, а вже пізніше наповнюють свої знання науковим змістом. Запізнє теоретичне обґрунтування процесу проєкціювання гальмує проєкційні уявлення учнів. Вони не розуміють, що будь-яка плоска фігура є своєрідною проєкцією просторової фігури. До того ж постійне оперування площинними зображеннями призводить до жорсткого закріплення фіксованої позиції спостереження [26].

## **РОЗДІЛ III. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ З ВИКОРИСТАННЯМ ІКТ**

### **3.1. Загальна методика розв'язування задач на побудову з використанням ІКТ**

Як відомо, суть рішення задачі на побудову полягає в тому, що потрібно побудувати наперед зазначеними інструментами деяку фігуру, якщо дана деяка фігура і зазначені деякі співвідношення між елементами шуканої фігури і елементами даної фігури. Кожна фігура, що задовольняє умовам задачі, називається вирішенням цього завдання. Знайти рішення задачі на побудову - значить звести її до кінцевого числа основних побудов, тобто вказати кінцеву послідовність основних побудов, після виконання яких, шукана фігура буде вже вважатися побудованою в силу прийнятих аксіом конструктивної геометрії.

Основні цілі, які повинен ставити перед собою кожен вчитель математики, з нашої точки зору наступні: заохотити до вивчення предмету; навчити і виховати .

Як показали багаторічні спостереження розв'язати першу задачу значно легше, ніж зробити це вдруге. Використовуючи можливості конкретної дисципліни, викладачі навчилися зацікавлювати студентів своїм предметом. А ось навчити всіх в умовах масового виробництва спеціалістів виявилось набагато важче[9].

Насьогодні сучасні інформаційні технології навчання значною мірою сприяють розв'язанню проблеми інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення . Технології комп'ютерного навчання підтримують продуктивну діяльність учнів, сприяють індивідуалізації та диференціації процесу навчання, реалізації діяльнісного підходу, раціоналізують працю вчителя й учня. Сфера застосування таких технологій дуже широка, зокрема, в шкільному курсі планіметрії. Навчальний предмет – геометрія (планіметрія

зокрема) важливий не лише щоб підготувати спеціалістів, чия професія в тій чи іншій мірі пов'язана з математикою, але і для розвитку будь-якої освіченої сучасної особистості. Як в часи виникнення математики як науки геометричні фігури були містком, що пов'язували її із повсякденним життям, так і сьогодні застосування математичних досягнень до розв'язання різноманітних прикладних завдань вимагає розвиненого образного мислення, сформованих просторових уявлень як таких.

Неодноразові педагогічні дослідження показують, що більшість учнів мають наочно- образний тип мислення. Для людей з таким типом мислення наочність є необхідною для ефективного розв'язання задач і важливою ланкою при встановленні зв'язку нового поняття з уже відомими поняттями. Наочність, зокрема комп'ютерна, допомагає учням розвивати свою просторову уяву і формувати правильні і різносторонні уявлення про властивості геометричних об'єктів. Таким чином, вона протистоїть вербалізму, чисто словесному навчанню, проведеному у формі абстрактних міркувань, зміст яких не завжди зрозумілий учням. Геометричні побудови – одна з провідних змістовних ліній шкільного курсу геометрії. Більшість задач на побудову розв'язується нестандартними методами й при їх розв'язуванні значно меншою мірою може бути використаний деякий алгоритм. Саме ці задачі мають значну дидактичну цінність, оскільки їх розв'язування більше, ніж розв'язування інших математичних задач, сприяє розвитку таких рис учнів, як кмітливість, винахідливість, оригінальність, гнучкість мислення, уважність, спостережливість, формує навички евристичної діяльності.

При розв'язуванні задач на побудову підвищує ефективність евикористання педагогічного програмного засобу (ППЗ) GRAN-2D. Наявність інструментів для побудови відрізків, прямих і кіл, для чого традиційно використовувались лінійка і циркуль, забезпечує можливості виконання різноманітних геометричних побудов. Раков С.А. характеризує названий програмний засіб як інтерактивну систему досить високого класу, що моделює геометрію Евкліда на площині. Це значно полегшує роботу учням, дає змогу

виконувати креслення виразніше, точніше та акуратніше. Він дозволяє заощадити час учнів для розгляду і ознайомлення з більшою кількістю задач різних типів та різних рівнів складності. З потрібною точністю можна перевірити отримані результати обчислень та побудов, відповідність гіпотез, умови існування розв'язків та раціональність шляхів їх пошуку.

Насамперед, засіб GRAN-2D призначений для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині, звідки тому і походить назва (GRaphic Analysis 2- Dimension). Використовуючи цей педагогічний програмний засіб GRAN-2D конструюються позиційно-динамічні моделі, дія яких ґрунтується на різноманітних евристичних методах проб та помилок, тимчасового спрощення задачної ситуації, шляхом відкидання частини умови, руху окремих елементів системи, уведенні допоміжних елементів, розгляді окремих ( граничних) випадків, застосуванні допоміжних побудов, індукції з подальшим узагальненням. Використання програми GRAN-2D допомагає також активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів на уроках математичної галузі.

При розв'язуванні задач на побудову цей засіб дає змогу поставити і досягти такі цілі: 1) учні вчаться роботі на комп'ютері; 2) учні мають можливість закріплення вмінь та навичок побудови планіметричних об'єктів на екрані дисплея; 3) значно заощаджується час; 4) учитель може контролювати виконання завдань на кожному окремому етапі кожним учнем. Таким чином, застосування ППЗ GRAN-2D у процесі розв'язування задач на побудову дає змогу реалізувати дослідницький підхід, навчити учнів самостійного знаходження шляху розв'язування, формувати пізнавальний інтерес і творчі якості, котрі є дуже важливими і потрібними у сучасному інформаційному суспільстві.



### 3.2. Етапи розв'язування планіметричних задач на побудову

Однією з основних проблем методики навчання рішенням задач на побудову є методика введення та вивчення етапів вирішення конструктивних завдань. Ще в IV ст. до н. е. давньогрецькі вчені розробили загальну схему вирішення задач на побудову, якою ми користуємося і тепер. Процес рішення задачі розбивають на 4 етапи: аналіз, побудова, доведення і дослідження. Розглянемо кожен етап більш докладно.

Аналіз - це важливий етап вирішення завдання, який ми розуміємо як пошук способу розв'язання задачі на побудову. На цьому етапі повинні бути помічені такі залежності між даними фігурами і шуканою фігурою, які дозволили б в подальшому побудувати цю шукану фігуру (якщо ми знаємо, як будувати шукану фігуру, то ніякої аналіз вже не потрібний).

Аналіз - підготовчий, попередній етап рішення задачі на побудову. Щоб полегшити собі пошук зв'язків між шуканою фігурою і даними фігурами, зазвичай виявляється вигідним мати перед очима допоміжне креслення, креслення-нарис, що зображає дані і шукані фігури приблизно в тому розташуванні, яке передбачено умовою задачі. Креслення можна виконати від руки, на око - це проект креслення, який повинен утворитися, коли завдання вже вирішене. На допоміжному кресленні слід виділити дані елементи і найважливіші шукані елементи. Практично часто зручніше починати побудову допоміжного креслення не з даної фігури, а з зразкового зображення вихідної фігури, пристроюючи до неї дані так, щоб вони перебували у зв'язку, що вказані в умові завдання [13].

Також треба враховувати наступні моменти :

- 1) якщо на допоміжному кресленні не вдається безпосередньо помітити необхідні для вирішення зв'язку між даними і шуканими елементами, то доцільно ввести в креслення допоміжні фігури: з'єднати вже наявні точки прямими, відзначити точки перетину наявних ліній, продовжити деякі відрізки і т. д. Іноді буває корисно проводити паралелі або перпендикуляри до вже

наявних

прямих;

- 2) якщо за умовами задачі дана сума або різниця відрізків або кутів, то ці величини слід ввести в креслення, тобто слід зобразити їх на кресленні-начерку, якщо їх ще немає на ньому;
- 3) у процесі проведення аналізу буває корисно згадати теореми і раніше розв'язані задачі, в яких зустрічаються залежності між елементами, про які йдеться в умові розглянутої задачі.

Другий етап розв'язання задач на побудову складається з двох частин:

- 1) перерахування у порядку всіх елементарних побудов, які потрібно виконати, згідно з аналізом, для вирішення завдання;
- 2) безпосереднє виконання цих побудов на кресленні за допомогою креслярських інструментів. Дійсно, вирішити задачу за допомогою тих чи інших інструментів - означає вказати кінцеву сукупність елементарних, допустимих для даних інструментів, побудов, виконання яких у певній послідовності дозволяє дати відповідь на питання завдання.

Даний етап вводиться при вирішенні самої першої задачі на побудову, якою зазвичай є задача про побудову відрізка, рівного даному, на даному промені з кінцем на початку цього променя. У бесіді, що супроводжує введення етапу, необхідно зазначити, в чому полягає рішення будь-якої задачі на побудову та вказати, що здійснення цього етапу як раз і полягає в перерахуванні кінцевого числа операцій побудови шуканої фігури. Розглянемо рішення задачі: "Побудувати квадрат по його діагоналі".  
*Аналіз.* Провівши діагональ  $A_1 C_1$  (рис. 1), ми бачимо, що побудова квадрата зводиться до побудови рівнобедреного прямокутного трикутника  $A_1 B_1 C_1$  по його гіпотенузі  $A_1 C_1$ , який потім легко доповнити до квадрата.  
*Побудова.* Трикутник  $A_1 B_1 C_1$  можна будувати різними способами. Наприклад:

- 1) Будуємо кут  $B_1 A_1 C_1$ , що містить  $45^\circ$ , і на одній його стороні відкладаємо відрізок  $A_1 C_1$ , і рівний даної діагоналі. Провівши  $C_1 B_1 \perp A_1 B_1$ , отримаємо трикутник  $A_1 B_1 C_1$ , який доповнюємо до квадрата  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , що можна

зробити різними способами.

2) Проведемо через середину  $A_1 C_1$  перпендикуляр  $B_1 O_1 \perp A_1 C_1$  і відкладемо  $B_1 O_1 = A_1 O_1$  і з'єднаємо  $B_1$  з  $A_1$  і  $C_1$ ; отримаємо трикутник  $A_1 B_1 C_1$ .

3) На  $A_1 C_1$ , як у діаметрі, будуємо коло і з точки  $O_1$ , переносимо перпендикуляр  $O_1 B_1 \perp A_1 C_1$  до перетину з колом в точці  $B_1$ . Поєднавши  $A_1$  і  $C_1$ , отримаємо трикутник  $A_1 B_1 C_1$ . Провівши  $B_1 D_1 \perp A_1 C_1$ , ми відразу можемо отримати точки  $B_1$  і  $D_1$ , як і в попередньому випадку.

Вказівка вчителя на існування більш простого способу не дає належного ефекту, оскільки запропоноване вчителем рішення здається учням штучним, якого вони самі не змогли б знайти. Звичайно, якщо це робити до того як учні придбають міцні навички в знаходженні рішень різними способами, то результати виявляться негативними. Увага учнів кожного разу буде розпорошуватися між усіма способами, і вони жодного з них не засвоять ґрунтовно, щоб застосовувати його досить свідомо. Різними способами добре вирішувати завдання в кінці навчального року, при повторенні курсу геометрії, коли учні вже мають достатні навички у вирішенні задач на побудову. Завдання, що допускає різні способи рішення, краще задавати додому, щоб вони не тільки вирішили, а й знайшли найбільш просте рішення.

Після того як фігура побудована, необхідно встановити, чи задовольняє вона умовам завдання, тобто показати, що фігура, отримана з даних елементів певною побудовою, задовольняє всім умовам завдання. Значить, доказ істотно залежить від способу побудови. Одну й ту ж задачу можна вирішувати різними способами, в залежності від наміченого при аналізі плану побудови, а тому, і доведення у кожному випадку буде своє.

Доведення являє собою частину рішення задачі, на своєму логічному змісті зворотнього аналізу. Якщо в аналізі встановлюється, що будь-яка фігура, яка задовольнить поставленим умовам, може бути знайдена таким-то і таким-то шляхом, то в цій, третій частині рішення доводиться зворотне положення. Це зворотне положення в загальному вигляді може бути сформульоване так: якщо деяка фігура отримана з даних елементів такою

побудовою, то вона дійсно задовольняє поставленим умовам. При вирішенні простих завдань, коли всі умови задачі знаходять безпосереднє відображення в плані побудови, немає необхідності доводити, що фігура, отримана з даних елементів такою побудовою, є шуканою [14].

При побудові зазвичай обмежуються відшуканням одного якого-небудь рішення, причому передбачається, що всі кроки побудови дійсно здійсненні. Для повного вирішення завдання потрібно ще з'ясувати наступні питання: 1) чи завжди (тобто при будь-якому чи виборі даних) можна виконати побудову обраним способом, 2) чи можна і як побудувати шукану фігуру, якщо обраний спосіб не можна застосувати; 3) скільки рішень має завдання при кожному можливому виборі даних? Розгляд всіх цих питань і становить зміст дослідження [2].

Таким чином, дослідження має на меті встановити умови розв'язності та визначити число рішень. Нерідко школярі і навіть вчителі проводять дослідження, довільно обираючи ті чи інші випадки, причому неясно, чому розглядаються саме такі, а не які-небудь інші випадки. Залишається неясним також, чи всі можливі випадки розглянуті. Сутність цього прийому полягає в тому, щоб перебрати послідовно всі кроки, з яких складається побудова, і щодо кожного кроку встановити, чи завжди вказане на цьому кроці побудова здійснена, а якщо здійснена, то чи однозначно.

Розглянемо рішення і дослідження завдання: "Побудувати коло, що дотикається даної прямої  $PQ$  і даного кола  $(O; OA)$  в заданій на ній точці  $A$ ".  
*Розв'язування.* Вирішуємо цю задачу методом геометричних місць. Проводимо пряму  $OA$  (рис. 2). У точці  $A$  будуємо дотичну  $AB$  до даної кола, а потім - бісектриси кутів  $PBA$  і  $ABQ$ . Точки перетину прямої  $OA$  з прямими  $BM$  і  $BN$  і будуть центрами шуканих кіл.

Проводячи дослідження з побудови, легко виявляємо, що наше рішення не застосовується, якщо  $OA \perp PQ$ . Для такого випадку розглядаємо рішення задачі окремо. У результаті отримаємо, що якщо  $OA$  не перпендикулярно  $PQ$ , то завдання має два рішення, за винятком випадку, коли коло  $(O; OA)$

перетинає  $PQ$  у точці  $A$ , так як тоді прямі  $BM$ ,  $UN$  і  $OA$  перетнуться в точці  $A$ , і кола не отримаємо. Якщо ж  $OA \perp PQ$ , але  $A$  не лежить на  $PQ$ , то отримуємо одне коло з центром на  $OA$  і радіусом, рівним половині відстані від точки  $A$  до даної прямої  $PQ$ . Якщо ж при цьому  $A$  лежить на  $PQ$ , то завдання невизначена.

Таким чином, для завдання є лише 4 характерні конфігурації вихідних даних:

- 1)  $OA$  не перпендикулярно  $PQ$  і  $A$  не належить  $PQ$  - 2 рішення;
- 2)  $OA$  не перпендикулярно  $PQ$  і  $A$  належить  $PQ$  - немає рішень;
- 3)  $OA \perp PQ$ , але  $A$  не належить  $PQ$  - 1 рішення;
- 4)  $OA \perp PQ$  і  $A$  належить  $PQ$  - нескінченна безліч рішень .

У результаті таких міркувань вирішується питання про можливість і однозначність побудови шуканої фігури даним способом. Іноді вдається довести, що всяке рішення даного завдання збігається з одним із вже отриманих рішень. Якщо ж це не вдається, то можна припустити, що завдання має інші рішення, які можуть бути знайдені іншими способами. У цих випадках треба ретельно перевірити, чи немає яких-небудь інших можливих випадків розміщення даних або шуканих фігур, які не були передбачені раніше проведеним аналізом [15].

### **3.3. Методичні рекомендації з навчання розв'язання задач на побудову**

У курсі геометрії слід ознайомити учнів із загальною схемою рішення задач на побудову. Тут виникає два різних методичних питання . Перший з них - це питання про те, з якого часу у викладанні геометрії при вирішенні завдань повинні фактично проводитися аналіз, побудова, доведення, дослідження? Друге питання, відмінне від першого, - це питання, коли учень повинен бути ознайомлений з логічною схемою рішення задачі. Звертаючись до першого питання, зауважимо, що першим за часом краще вибрати побудову в сенсі перерахування та опису тих чи інших операцій. Тут мається на увазі саме опис процесу вживання інструмента ("прикладаємо два вістря ніжок циркуля до

точок  $M$  і  $N$ , а потім, не змінюючи відстані між вістрями, поміщаємо одне з них в точку  $O''$  і т. п.). На вищому ступені окремі операції просто називаються. Нарешті, останньою сходинкою можна було б вважати ту, коли в якості елементів побудови можуть називатися і досить складні за своїм виконання, але добре відомі учням завдання.

Другим моментом за часом появи в шкільному курсі краще вибрати дослідження задачі. Перший елемент дослідження з'являється під час вирішення завдання про побудову трикутника за трьома сторонами, у вигляді питання про те, чи можна вибрати всі три сторони довільно. До цього має незабаром додатися знайомство з можливістю існування декількох рішень однієї задачі. Цьому моменту потрібно надавати досить велику принципову значимість. Справа в тому, що слова "знайти точку" позначають вимогу "знайти всі точки, які ..." (а не просто "будь-яку точку, яка ..."). Інакше зовсім неминуче виникнення в подальшому питань такого типу, як "навіщо при добуванні кореня брати обидва знаки". Сам термін "дослідження" повинен з'явитися набагато раніше, ніж, скажімо, термін "аналіз".

Третім моментом, що з'являються, приблизно, в один час з елементами дослідження, є доведення правильності виконання побудови. Уже такі завдання як побудова кута, рівного даному, побудова перпендикулярів за допомогою циркуля і лінійки і т. д. ставлять на чергу питання про те, чи буде побудований кут дійсно дорівнювати даному, чи буде побудована пряма перпендикулярна до даної? Проте і на цій стадії роботи і на подальших немає великої необхідності вимагати проведення доведення в тих завданнях, де правильність побудови вбачається безпосередньо. Деякі, навіть порівняно складні, завдання на побудову, можуть, як здається, залишати без особливого доведення.

Нарешті, останнім за часом елементом вирішення, на якому фіксується увагу учнів, є аналіз. Початком цього виду роботи слід вважати звернення до учнів, "хто запропонував" те чи інше рішення задачі, з питанням: "А як ти це рішення знайшов?". Потім поступово треба підвести учнів до думки про те,

щоб фіксувати свою увагу на самому процесі відшукування методу рішення, цей процес і отримує назву аналізу. З вище сказаного випливає, що в справі введення понять аналізу, побудови, доведення і дослідження слід дотримуватися з одного боку, поступовість, а з іншого боку, - наполегливість у сенсі багаторазового систематичного звернення до одних і тих самих питань [16].

Перейдемо тепер до другого питання - про введення в курсі геометрії схеми розподілу розв'язування задач на побудову на чотири частини. Безсумнівно, що вивчення цього питання на тому місці, на якому він поставлений у підручниках, слід вважати невчасним і не досягає мети. Тим не менш, схема рішення повинна бути повідомлена учням, але лише значно пізніше.

Гарним прикладом для ілюстрації загальної схеми рішення задач на побудову є завдання: "Побудувати трикутник за двома сторонами і гострим кутом, який лежить проти однієї з них". Зробивши креслення довільного трикутника, учні складають план побудови і при відповідному виборі даних отримують два рішення. Вони бачать необхідність доказу, а також і необхідність дослідження. Тут природно виділяються всі етапи і очевидна їх доцільність. Якщо учні добре володіють основними побудовами, великих труднощів в оформленні рішень вони не відчують.

Це завдання на побудову є гарним прикладом, який показує зв'язок між числом рішень задачі на побудову трикутника за певними даними й ознаками рівності трикутників. Засвоєння учнями загальної схеми має велике значення не тільки для вирішення задач на побудову. З методичної точки зору і при вирішенні арифметичних завдань, і при вирішенні завдань на складання рівнянь ми користуємося тими ж чотирма етапами, що і при вирішенні задач на побудову.

Рішення задачі на побудову вважається закінченим, якщо вказані необхідні і достатні умови, при яких знайдене рішення є відповіддю на завдання. Значить, ми при будь-якому виборі даних повинні встановлювати:

чи має завдання рішення і якщо має, то скільки. Наприклад: "Побудувати коло, що проходить через три дані різні точки". Якщо дані точки не лежать на одній прямій, то завдання має рішення і до того ж тільки одне, якщо ж точки лежать на одній прямій, то завдання рішення не має. Переходимо тепер до одного з найбільш істотних, в методичному відношенні, питань дослідження задачі на побудову. Як встановити і перерахувати всі ті випадки, які мають істотне значення для вирішення даного завдання?

Відомо, що дуже часто учні, розв'язуючи те чи інше завдання, особливо на перших порах, намагаються дослідити його, виходячи із запитання: "А що буде, якщо ...", придумуючи ті чи інші "якщо" більш-менш довільно. Необхідно привчати учнів вести дослідження по самому ходу побудови.

Бажаючи дослідити завдання, треба в послідовному порядку перебрати ще раз ті операції, з яких складається побудова, і для кожної з цих операцій визначити, чи завжди вона можлива, яке число точок, відрізків і т. д. ця операція може давати. Дослідження є складовою частиною рішення. Рішення задачі на побудову можна вважати закінченим, якщо дізнаємося, скільки шуканих фігур отримаємо при певних умовах, і, зокрема, зазначено, коли отримаємо шуканий геометричний образ. Але дослідження в задачах на побудову, як і дослідження при вирішенні інших завдань з математики, має і загальноосвітнє значення.

Для правильного проведення дослідження потрібно мати добре розвинене логічне мислення. Значить, з іншого боку, дослідження задач на побудову є гарним матеріалом для розвитку логічного мислення учнів. Незважаючи на необхідність та доцільність дослідження при вирішенні задач на побудову, цьому етапу і в школі, і в методичній літературі приділяється недостатньо уваги. Велика увага приділяється зазвичай вирішити його - аналізу. Аналіз - основний етап при вирішенні задач на побудову: не знайшовши вирішення, не можна провести ні побудови, ні дослідження. Але за трудністю виконання дослідження є не менш складним етапом. Найбільша кількість помилок допускається саме при дослідженні [17].



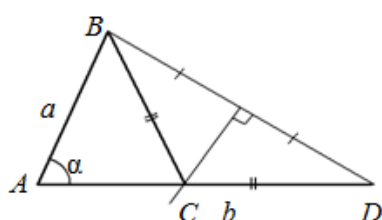
### 3.4. Методичні аспекти навчання методу допоміжного трикутника

Сутність методу - використання допоміжного трикутника (його ми назвемо базисним). Доцільно вважати базисними трикутники, які можна побудувати за двома сторонами і кутом між ними, за стороною і двома кутами, за трьома сторонами. Якщо трикутник прямокутний, то його можна побудувати за двома катетами, катетом і гострим кутом, гіпотенузою і гострим кутом, гіпотенузою і катетом.

Схема розв'язання задач на побудову

1	Аналіз	Виконання рисунка – ескіза шуканої фігури та встановлення зв'язку між її елементами і даними задачі. Визначення плану побудови шуканої фігури
2	Побудова	Здійснення плану, розробленого в ході аналізу
3	Доведення	Обґрунтування того, що побудована фігура має задану форму, а розміри та розміщення її елементів задовольняють умову задачі
4	Дослідження	Визначення кількості розв'язків і умов існування шуканої фігури або обґрунтування неможливості її побудови

**Приклад.** Побудуйте трикутник за даною стороною  $a$ , прилеглим до неї кутом  $\alpha$  і сумою двох інших сторін  $b$ .



Розв'язання.

*Аналіз.* Припустимо, що шуканий трикутник уже побудовано. За даними відрізками і кутом між ними можна побудувати  $\triangle ABD$ . Вершиною  $C$  шуканого трикутника буде така точка, для якої  $BC=CD$ . Виходячи з рівнобедреного трикутника  $CBD$ , у якого медіана є висотою, точка  $C$  має лежати на серединному перпендикулярі сторони  $BD$ .

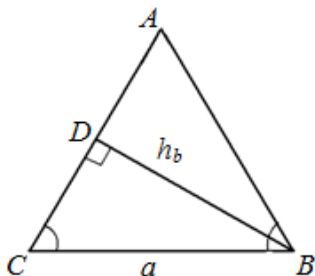
*Побудова.*

- 1) За двома сторонами і кутом між ними будуємо  $\triangle ABD$ .
- 2) Будуємо серединний перпендикуляр сторони  $BD$ .
- 3) Цей серединний перпендикуляр в перетині із стороною  $AD$  дасть точку  $C$ .
- 4) Побудувавши сторону  $BC$ , отримаємо шуканий трикутник.

*Доведення.*  $\triangle ABC$  є шуканим, так як  $AB=a$ ,  $\angle A=\alpha$ ,  $AC+BC=b$ .

*Дослідження.* Задача має розв'язок, якщо  $a < b$

**Приклад.** Побудувати рівнобедрений трикутник за основою  $a$  і висотою  $h_b$ , опущеною на одну з бічних сторін.



Розв'язання.

*Аналіз.* Припустимо, що шуканий трикутник побудовано.  $\triangle CBD$  – прямокутний ( $\angle CDB=90^\circ$ ). Ми можемо його побудувати за катетом  $BD=h_b$  і гіпотенузою  $CB = a$ . З побудованого трикутника матимемо  $\angle DCB$ , рівним якому є  $\angle CBD$ . За основою і прилеглими кутами можемо побудувати заданий трикутник.

*Побудова.* Будуємо  $\triangle CBD$ . Відкладаємо  $\angle B=\angle C$ . З'єднавши точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , маємо шуканий трикутник.

*Доведення.* Кути при основі рівні, отже трикутник рівнобедрений;  $CB=a$ ,  $DB=h_b$ , отже, отриманий трикутник - шуканий.

*Дослідження.* Дана задача має розв'язок, якщо висота  $h_b$  менша за бічну сторону[2].

### **3.5. Методичні аспекти навчання методу геометричних місць точок**

Математична сутність методу геометричних місць досить проста. Вона полягає в тому, що шукана точка визначається як точка перетину деяких двох геометричних місць (або іноді як точка перетину деякого геометричного місця і даної прямої або кола); при цьому ті умови задачі, які визначають положення шуканої точки, розчленовуються на дві умови, і кожне з них дає деяке геометричне місце, побудова якого виявляється можливою.

Метод геометричних місць є одним з найважливіших прийомів розв'язку геометричних задач на побудову взагалі і повинен займати велике місце у вирішенні завдань на побудову, переважно у 8 класі. При поясненні цього методу в школі справа, звичайно, полягає не в тому, щоб учні вміли описати суть методу словами, а в тому, щоб учні вміли свідомо користуватися цим методом.

Основа цього методу - поняття геометричного місця точок. Геометричним місцем точок (ГМТ) простору, що володіють даними властивістю, називається безліч всіх точок простору, кожна з яких володіє цією властивістю. Всі інші точки простору вказаною властивістю не володіють.

Кожне завдання, в якому потрібно знайти ГМТ за його характерними властивостями, описати це ГМТ наочно через відомі елементарні фігури. Набір досліджуваних ГМТ може бути найрізноманітнішим. Традиційний шкільний набір - це:

- а) множина всіх точок площини, віддалених від даної точки на дану відстань;
- б) множина всіх точок площини, рівновіддалених від двох даних точок;

- в) множина всіх точок площини, віддалених від даної прямої на дану відстань;
- г) множина всіх точок площини, рівновіддалених від двох даних прямих.

Доцільно в якості перших завдань на метод геометричних місць дати і таку задачу, де шукана фігура визначалася б не тільки за своєю формою та розмірами, а й за положенням на площині.

У подальшій роботі з геометрії у 8 класі завдання на метод геометричних місць повиннен пропонуватися систематично до кінця навчального року разом із завданнями на обчислення. Поряд з цим застосування методу геометричних місць повинно бути чітко з'ясовано учнями і в тих питаннях теоретичного курсу, де це доречно. Сюди відносяться такі питання, як побудова дотичної до кола з даної точки, побудова вписаних і описаних кіл (при вирішенні цього завдання особливо корисним буде розгляд геометричного місця точок, рівновіддалених\* від двох пересічних прямих, замість геометричного місця точок, рівновіддалених від сторін даного кута).

Завдання на побудову, які вирішуються методом геометричних місць, можуть бути дуже різними. Також не слід ставити мету вказати якийсь стандартний список завдань цього типу для середньої школи. Це просто допомога викладачеві в підборі, а також і в складанні знову завдань такого типу, вказавши ті точки зору, яких при цьому необхідно було б дотримуватися.

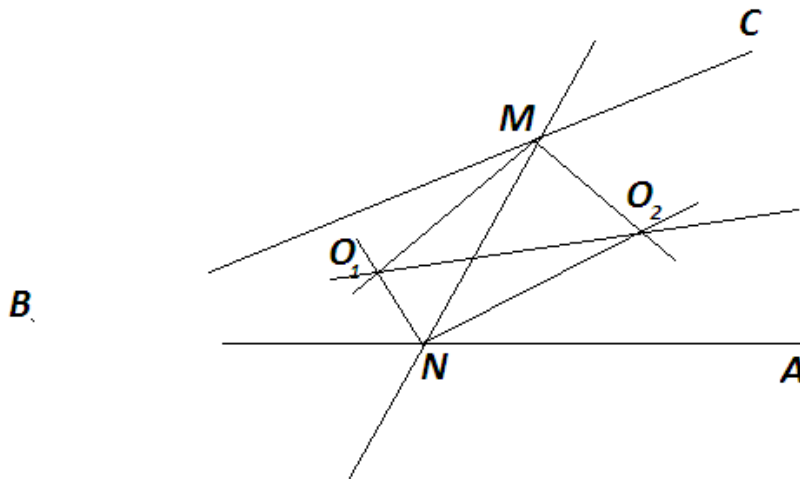
Різні задачі на побудову, які вирішуються методом геометричних місць, відрізняються одна від одної, перш за все, характером тих геометричних місць, за допомогою яких визначається положення шуканої точки. Відбираючи завдання на побудову для вирішення з кожним класом, слід подумати про те, щоб у цих завданнях зустрічалися, по можливості, різноманітні поєднання цих основних геометричних місць. Тим самим буде забезпечено достатню різноманітність дозволених завдань по суті, по тій ідеї, яка лежить в їх основі.

### **Приклад.**

Поділити навпіл кут, вершина якого не розміщена на малюнку.

Розв'язування.

Розв'язків цієї задачі може бути декілька. Розглянемо один із них.

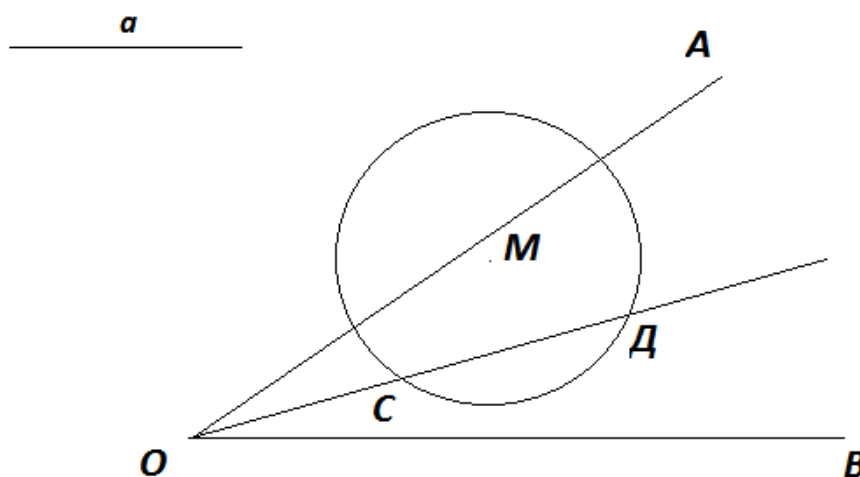


Проведемо довільну пряму, яка перетинає  $BC$  і  $AB$  в точках  $M$  і  $N$ . Побудуємо бісектриси  $MO_1$ ,  $NO_1$ ,  $MO_2$  і  $NO_2$  одержаних кутів  $BMN$ ,  $MNB$ ,  $NMC$ ,  $ANM$ . Точки перетину  $O_1$  і  $O_2$  відповідних бісектрис будуть рівновіддалені від  $BC$  і  $BA$ , а тому лежать на бісектрисі кута  $ABC$ . Пряма  $O_1O_2$  – шукана пряма.

### Приклад.

Дано кут і точка  $M$  в середині кут. Знайти таку точку, яка була б однаково віддалена від обох сторін кута і віддалена від точки  $M$  на дану відстань  $a$ .

Розв'язування.



1. Учні самі можуть вказати, що шукана точка знаходиться на бісектрисі даного кута. Отже, будуємо бісектрису даного кута.

2. Звертаємо увагу учнів на те, що шукана точка повинна бути віддалена від точки  $M$  на відстань  $a$ . А всі точки, рівновіддалені на відстань  $a$ , лежать на колі радіуса  $a$  з центром в точці  $M$ . Будуємо таке коло. Точки  $C$  і  $D$  – шукані, так як ці точки лежать і на одному і на другому геометричних місцях. Розв'язок залежить від величини відрізка  $a$  і від положення точки  $M$ . Задача може мати два розв'язки, один і ні одного[2].

### 3.6. Методичні аспекти навчання методу геометричних перетворень

Методи цієї групи мають досить багато спільного. Кожен вивчається, як правило, при розгляді відповідного перетворення, при цьому розв'язуванні завдання служать для закріплення і більш глибокого засвоєння досліджуваного поняття. Для підвищення ефективності навчання необхідно, щоб, крім початкових уявлень про самі перетворенні, учні вміли виконувати побудову образів фігур при цьому перетворенні, так як використання образу шуканої фігури при побудові є основа кожного з цих методів, їх основна ідея і суть.

Якщо шукану фігуру відразу побудувати важко, то її перетворюють в яку-небудь іншу фігуру, побудову якої можна зробити легше або безпосередньо. При вивченні цих методів доцільно виділити найбільш характерні ознаки з тим, щоб у майбутньому, аналізуючи задачу, учень міг вибрати відповідний метод. Діюча програма з геометрії не передбачає використовувати ідею геометричних перетворень як керівної ідеї шкільного курсу геометрії, хоча використання геометричних перетворень при розв'язанні задач на побудову має велике методичне значення .

#### Метод центральної симетрії

Симетрією відносно точки  $O$  (центральною симетрією)  $Z_0$  простору називається перетворення простору, яке точку  $O$  відображає на себе, а будь-яку іншу точку  $M$  відображає на таку точку  $M_1$ , що точка  $O$  є серединою відрізка

$MM_1$

1.

Даний метод можна застосовувати до тих завдань, в умові яких в тій чи іншій формі вказана точка, яка є центром симетрії шуканої або допоміжної фігури.

Розглянемо задачу: "Через точку  $A$  провести пряму так, щоб її відрізок з кінцями на даній прямій та колі ділився точкою  $A$  навпіл".  
*Розв'язування.* Нехай  $m$  і  $\alpha$  - дані пряма і коло,  $CD$ -шуканий відрізок,  $C \in m$ ,  $D \in \alpha$ . Тоді  $Z_A(C) = D$ . Якщо  $Z_A(m) = m_1$ , то  $D \in m_1$  і, отже,  $D \in \alpha \cap m_1$ . Звідси випливає така побудова: будуємо образ  $m_1$  прямої  $m$  при симетрії  $Z_A$ . Точки  $D$  і  $E$  перетину прямої  $m_1$  з даним колом  $\alpha$  визначають разом з точкою  $A$  шукані прямі  $DA$  та  $EA$ .

### Метод осьової симетрії

Симетрією простору щодо даної прямої  $l$  (осьовою симетрією)  $S_l$  називається перетворення, яке кожному точку прямої  $l$  відображає на себе, а будь-яку іншу точку  $M$  простору відображає на таку точку  $M_1$ , що пряма  $l$  служить серединним перпендикуляром до відрізка  $MM_1$ . Пряма  $l$  називається віссю симетрії. Важко вказати загальні ознаки завдань, що розв'язуються методом осьової симетрії. У більш складних завданнях метод осьової симетрії, що нерідко спрямлює ламані лінії в прямі, може бути застосований, якщо в умовах фігурується сума або різниця частин деякої ламаної лінії. Можна обмежитися зазначенням, що метод осьової симетрії застосуємо для задач, в умові яких зазначене пряма, яка є віссю симетрії частини елементів фігури. Таку пряму легко встановити за властивостями фігур.

Застосування осьової симетрії доцільно для завдань, які легко вирішуються, якщо частина даних розташована по один бік деякої прямої, а решта - по другий.

Розглянемо задачу: "Побудувати ромб так, щоб одна з його діагоналей дорівнювала даному відрізку  $r$  і лежала на даній прямій  $a$ , а інші дві вершини ромба лежали відповідно на даних прямих  $b$  і  $c$ ".  
*Аналіз.* Нехай  $ABDC$  - шуканий ромб,  $AD = r$ . Зауважуємо, що задача про побудову ромба зводиться до побудови однієї будь-якої з його вершин,

наприклад вершини  $C$ . За властивостями ромба точки  $B$  і  $C$  симетричні відносно прямої  $a$ . Тому при осьовій симетрії відносно прямої  $a$  точка  $B$  перетвориться в точку  $C$ , а, отже, пряма  $b$  - в деяку пряму  $b'$ , що проходить через точку  $C$ . Таким чином, точка  $C$  може бути побудована як точка перетину прямих  $c$  і  $b'$ , з яких одна дана, а інша легко будується.

*Побудова.* Будуємо послідовно: пряму  $b'$ , симетричну з прямою  $b$  відносно прямої  $a$ ; точку  $C$ , загальну для прямих  $c$  і  $b'$ ; пряму  $BC$ . Точки  $A$  і  $D$  на прямій

$a$  віддалені від точки  $O$  на відстань  $\square$ ;  $ABCD$  - шуканий ромб.

*Доведення* зважаючи на його простоту опустимо.

*Дослідження.* Можливі наступні випадки: 1)  $c \parallel b'$ , рішень немає, 2)  $c \perp b'$ , рішень нескінченно багато, 3) прями  $c$  і  $b'$  перетинаються поза прямою  $a$ , одне рішення; 4) прями  $c$  і  $b'$  перетинаються на прямій  $a$ , рішень немає.

### Метод паралельного перенесення.

Паралельним перенесенням на вектор  $\square$  називається відображення площини на себе, при якому кожна точка  $M$  відображається в таку точку  $M_1$ , що вектор  $\square$  дорівнює вектору  $\square$ .

Методом паралельного перенесення розв'язують завдання, при аналізі яких важко знайти залежність між даними елементами, що дозволяє побудувати шукану фігуру (дані елементи віддалені один від одного), але якщо ми якусь частину або всю фігуру перенесемо паралельно в деякому напрямку на певну відстань, то отримаємо допоміжну фігуру, яку легко можна побудувати. Напрямок і величина перенесення визначаються так, щоб в допоміжну фігуру увійшло більше число даних. Розглянемо задачу: "Побудувати опуклий чотирикутник, знаючи три його кути і дві протилежні сторони".

Докладніше: дано два відрізки  $a$  і  $b$  і три кути  $\alpha, \beta, \delta$ . Потрібно побудувати



чотирикутник  $ABCD$  так, щоб  $\sphericalangle A = \alpha$ ,  $\sphericalangle B = \beta$ ,  $\sphericalangle D = \delta$ ,  $AD = a$ ,  $CB = b$ .  
 Передбачається, що  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $0^\circ < \beta < 180^\circ$ ,  $0^\circ < \delta < 180^\circ$ .  
*Аналіз.* Припустимо, що  $ABCD$  - шуканий чотирикутник. Перенесемо сторону  $BC$  на вектор  $\vec{AD}$ , і нехай відрізок  $BC$  займе після перенесення положення  $AE$ .  
 Тоді в  $\triangle AED$  відомі:  $AD = a$ ,  $AE = b$ ,  $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAE = \sphericalangle A - (180^\circ - \sphericalangle B) = \alpha + \beta - 180^\circ$ . За цими даними  $\triangle AED$  може бути побудований.

*Побудова.*

1) На довільній прямій будуємо відрізок  $AD = a$ , 2) Через точку  $A$  проводимо промінь  $AM$  під кутом  $\alpha + \beta - 180^\circ$  до променя  $AD$ ; 3) Відкладаємо на промені  $AM$  відрізок  $AE = b$ ; 4) Будуємо промінь  $EN$ , утворює з  $EA$  кут  $\beta$  і розташований з точкою  $D$  по різні сторони від прямої  $AM$ ; 5) Будуємо промінь  $DK$  так, щоб  $\sphericalangle ADK$  дорівнював  $\delta$  і щоб промінь  $DK$  розташовувався по ту ж сторону прямої  $DE$ , що і промінь  $EN$ ; 6) Відзначаємо точку  $C$  перетину променів  $EN$  і  $DK$  - третю вершину чотирикутника; 7) Четверта вершина  $D$  виходить в перетині прямої  $AF$ , паралельної  $PC$ , з прямою  $CL$ , паралельної  $AE$ .

*Доведення.*  $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAE + \sphericalangle DAE = (180^\circ - \beta) + (\alpha + \beta - 180^\circ) = \alpha$ .  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CEA$ , як кути, сторони яких відповідно паралельні і протилежно направлені.  $\sphericalangle CEA = \beta$  з побудови.  $\sphericalangle ADC = \delta$  з побудови. Відрізок  $AD = a$  з побудови.  $BC = AE$ , як відрізки паралельних між паралельними. Але  $AE = b$ , а значить, і  $BC = b$  [2].

### Метод повороту

Поворотом площини навколо точки  $O$  на кут  $\alpha$  називається відображення площини на себе, при якому кожна точка  $M$  відображається в таку точку  $M_1$ , що  $OM = OM_1$  і кут  $\sphericalangle MOM_1 = \alpha$ .  
 Даний метод застосовується до тих завдань, де або частини фігур зближуються в положення, зручне для побудови, або при заданих явно або опосередковано центрі і куті повороту потрібно відшукати дві відповідні точки, що лежать на даних або шуканих фігурах.

Розглянемо задачу: "Земельна ділянка квадратної форми була огорожена. Від огорожі збереглися два стовпи на паралельних сторонах квадрата. Крім того, залишився стовп в центрі квадрата. Потрібно відновити кордон ділянки".

*Аналіз.* Нехай  $ABCD$  - шуканий квадрат,  $O$  - його центр,  $M$  і  $N$  - дані точки відповідно на сторонах  $AB$  і  $CD$ . Якщо повернути квадрат на  $180^\circ$  біля його центру  $O$ , то він перетвориться сам у себе. Точка  $M$  займе деяке положення  $M'$  на стороні  $CD$ , а точка  $N$  - деяке положення  $N'$  на стороні  $AB$ . Після цього неважко вже побудувати прямі  $AB$  і  $CD$  і відновити шуканий квадрат.

*Побудова.* 1) Будуємо точку  $M'$ , симетричну  $M$  щодо  $O$ , і точку  $N'$ , симетричну  $N$  щодо  $O$ . 2) Будуємо прямі  $MN'$  і  $NM'$ . 3) Повернемо побудовані прямі навколо точки  $O$  на  $90^\circ$ . Чотири побудовані прямі обмежують шуканий квадрат.

*Доведення* опускаємо.

*Дослідження.* За змістом завдання неможливий випадок, коли точки  $M$  і  $N$  розташовуються з точкою  $O$  на одній прямій, але не симетричні щодо  $O$ . Якщо точки  $M$  і  $N$  симетричні щодо  $O$ , то задача стає невизначеною. В інших випадках завдання має єдине рішення.

### **Метод подібності**

Метод подібності полягає в тому, що спочатку будується деяка фігура, подібна шуканій, але задовольняє не всім поставленим в задачі умовам. Потім побудовану допоміжну фігуру замінюємо фігурою, подібною до неї і яка задовольняє вже всім необхідним умовам. Завдання вирішується методом подібності, якщо її умову можна розділити на дві частини, одна з яких визначає форму фігури з точністю до подібності, а друга - розміри фігури.

### **Метод симетрії**

У шкільному курсі геометрії розглядаються геометричні перетворення двох видів: рух (зберігаються відстані між точками) і перетворення подібності. Як

прикладі перетворення руху вивчаються: симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, симетрія відносно площини.

Властивості геометричних перетворень використовуються ефективно до розв'язування задач лише тоді, коли учні вміють:

- будувати геометричні фігури при конкретних видах перетворень;
- визначати вид перетворення за окремими елементами геометричних фігур;
- встановлювати (обчисленням, побудовою) положення відповідних точок при певному виді перетворення.

Для формування цих вмінь корисно скористатися розв'язуванням задач на побудову. Задачі цього виду можна умовно поділити на групи:

1. побудова відповідних точок при заданому геометричному перетворенні;
2. побудова фігури, для якої відповідне перетворення треба знайти.

Розглянемо використання геометричних перетворень на конкретних прикладах. Метод симетрії відносно точки застосовується в задачах про центрально-симетричні фігури або про відрізки з серединою в даній точці і кінцями на двох даних прямих. Хід міркувань зводиться до:

- знаходження положення прямої, що проходить через центр симетрії двох геометричних фігур;
- відшукування образу точки на одній з фігур, якщо відомі центр їх симетрії і прообраз цієї точки.

**Приклад .** Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелограма  $ABCD$  є його центром симетрії.

Доведення: Нехай точка  $O$  – точка перетину діагоналей паралелограма  $ABCD$ . За раніше доведеною теоремою діагоналі  $AB$  і  $CD$  діляться нею пополам, тому точки  $A$  і  $C$ ,  $B$  і  $D$  симетричні відносно точки  $O$ . Отже, відрізки  $AB$  і  $CD$ ,  $BC$  і  $DA$  симетричні відносно точки  $O$ , яка є центром симетрії паралелограма.

**Метод симетрії відносно прямої** використовується в задачах про геометричні фігури, що мають вісь симетрії, або в тих випадках, коли в задачі

дано суму лінійних або кутових коефіцієнтів. При цьому учні повинні вміти знаходити:

- образи геометричних фігур при заданій симетрії;
- точки на фігурах, симетричних відносно деякої осі.

### **3.7. Методичні аспекти навчання алгебраїчного методу**

Розв'язування геометричних задач за допомогою алгебри, математичного аналізу, тригонометрії дозволяє не тільки показати єдність геометрії, алгебри, аналізу, але й озброїти студентів математичних спеціальностей прийомам пошуку розв'язування задачі.

Суть даного методу залежить від типу задач, які поділяються на задачі на обчислення, на доведення, на побудову.

Для задач на доведення суть методу полягає в тому, що за умовою задачі складається рівняння (система), розв'язавши яке, ми переконуємося в справедливості твердження, про яке йдеться в задачі.

Для задач на побудову – за умовою задачі складається рівняння; розв'язується рівняння; досліджуються отримані формули; проводиться побудова шуканих величин за знайденими формулами.

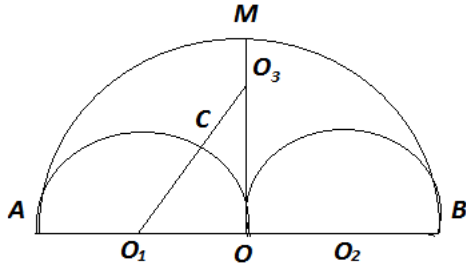
При розв'язуванні задач за допомогою алгебраїчного методу широко використовується спосіб введення допоміжного елемента.

Суть методу полягає в тому, що допоміжну змінну вибирають таким чином, щоб величини, задані в умові задачі, однозначно визначали геометричну фігуру. Тобто, якщо в процесі розв'язування задачі не вдається безпосередньо пов'язати дані та шукані величини, то користуються прийомом введення допоміжного елемента, якими можуть виступати відрізок, кут, площа, об'єм[27].

Під час розв'язування задач можуть трапитися два випадки:

- допоміжний елемент доводиться знаходити (обчислювати);
- він не вимагає знаходження числової величини.

Приклад. Дано півколо  $AMB$  з діаметром  $AB=2R$  і два півкола на діаметрі з радіусом  $\frac{R}{2}$ . Побудувати коло, яке дотикається до трьох даних півкіл.



Розв'язування.

Нехай центр шуканого кола  $O_3$ . Позначимо радіус шуканого кола за  $x$ .  $O_3M = x$ . З'єднаємо точки  $O_3$  і  $O_1$ .

З трикутника  $O_1O_3O$  за теоремою Піфагора:

$$O_1O_3^2 = O_1O^2 + OO_3^2$$

$$O_1O_3 = O_1C + CO_3 = \frac{R}{2} + x; \quad OO_1 = \frac{R}{2}; \quad OO_3 = R - x;$$

$$\left(\frac{R}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - x)^2; \quad \frac{R^2}{4} + Rx + x^2 = \frac{R^2}{4} + R^2 - 2Rx + x^2;$$

$$3Rx - R^2 = 0; \quad R(3x - R) = 0;$$

$$R \neq 0 \quad 3x - R = 0$$

$$x = \frac{R}{3}.$$

Отже, шукане коло ми будемо з радіусом  $\frac{R}{3}$ .

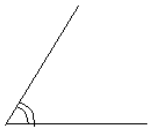
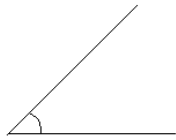
Побудова очевидна.

Приклад. Вершини трикутника з сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  є центрами трьох кіл.

Побудувати ці кола так, щоб вони дотикались одне до одного зовні.

Розв'язування.

Виконуємо малюнок до даної задачі.



$h_c$

---

За умовою  $AB = c$ ,

$BC = a$ ,  $AC = b$ . Нехай радіус кола з центром в точці  $A$  дорівнює  $x$ ,  $AM = x$ .  
Тоді радіуси двох інших кіл  $c - x$  і  $b - x$ . Так як  $BM = BN = c - x$ , а  $NC = CK = b - x$ , то  $BC = c - x + b - x$ .

Маємо рівняння  $c - x + b - x = a$ ;  $x = \frac{c + b - a}{2}$ .

Будуємо відрізок  $x$ , а потім трикутник за трьома сторонами.

Далі будуємо три кола, знаючи їх радіуси.

## РОЗДІЛ IV. ПЕДАГОГІЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ТА СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ

### 4.1 Організація педагогічного експерименту

Експеримент – це науково поставлений дослід у галузі навчальної чи виховної роботи, вивчення обстежуваного педагогічного явища в спеціально створених і контрольних умовах.

Суть експерименту полягає в тому, що він ставить досліджуване явище в певні умови, створює планомірно організаційні ситуації, виявляє факти, на основі яких встановлюється залежність між експериментальними діями та їх об'єктивними результатами. У сучасних умовах учитель перетворюється на організатора особистісно орієнтованого навчання, яке передбачає розвиток і саморозвиток дитини. Щоб розвивати творчі здібності учнів, поступово та систематично залучати їх до самостійної пізнавальної діяльності, щоб забезпечити співпрацю між учнями та вчителем, традиційного уроку недостатньо.

Навчальні педагогічні заклади щорічно готують молодих спеціалістів-вчителів. Протягом кількох років вони опановують методику викладання того чи іншого предмету, при чому вагоме місце займає застосування засвоєних знань вже на практиці. Тут майбутні вчителі при проведенні уроків пізнають свої можливості. Під час проходження педагогічної практики вони, готуючись до проведення уроків, підбирають необхідний матеріал (газети, журнали, підручники, матеріали з Інтернету тощо) консультуючись з вчителем та методистом[28].

Зміст експерименту:

На основі анкетування і результатів контрольної роботи була складена робоча навчальна програма: спецкурс з математики “Розв’язування планіметричних задач на побудову”.

Одним з основних завдань, поставлених перед вищою школою є всебічний розвиток творчого мислення учнів. Розв’язати це важливе завдання

при викладанні математики означає насамперед озброїти учнів загальними прийомами і методами розв'язування задач.

Під час роботи на спецкурсі з математики «Розв'язування планіметричних задач на побудову» розглядають головні методи розв'язування геометричних задач, відбувається поглиблення і систематизація знання учнів з елементарної математики, формування вміннь розв'язувати математичні задачі шкільного рівня, а також задачі факультативних курсів та гуртків.

Даний курс тісно пов'язаний з основними курсами університету (алгебра і теорія чисел, геометрія, математичний аналіз), а також з курсом методики викладання математики.

В процесі роботи учні набудуть *вміння*:

- проаналізувати й дати оцінку різним науковим теоріям і концепціям з даної теми;
- розв'язувати планіметричні задачі різними методами;
- знаходити нові способи застосувати і використовувати вивчений матеріал;
- аналізувати геометричну ситуацію;
- визначати схему вивчення окремих методів вирішення планіметричних задач, що включає наступні компоненти: 1) суть методу, 2) прийом навчальної роботи з застосування методу до вирішення задач, 3) опорні знання, 4) опорні задачі, 5) основні геометричні ситуації, 6) прийом навчальної роботи з вибору даного методу, 7) серія задач на застосування методу; у виділених діях, що визначають склад узагальненого прийому учбової роботи по вибору методу вирішення задачі і узагальненого прийому учбової роботи за рішенням планіметричних задач[29].

Поточний контроль при розв'язуванні планіметричних задач здійснюється за такими видами діяльності:

- засвоєння теорії;
- опрацювання рекомендованих навчально-методичних матеріалів;
- виконання усіх навчальних зцілей, що відповідають поставленим завданням.



Якщо учень без поважних причин буде пропускати заняття спецкурсу знімається 1 бал за пропуск заняття. Учень, який виконав усі поставлені завдання і набрав необхідну кількість балів, може не писати контрольної роботи і отримати підсумкову оцінку, яка відповідає його рівню. Якщо учень протягом семестру не набрав потрібної кількості балів, то він повинен написати контрольну роботу.

В експерименті брали участь учні 9 класу Рудко-Червинської гімназії-філії ОЗЗСО «Тоболівський ліцей» Прилісненської сільської ради Волинської області.

В експериментальній групі було запроваджено методику детального вивчення обраної тематики на основі опорних конспектів.

Акцент робили саме правильному розумінню того матеріалу, який підлягав вивченню. Для учнів були проведені заняття спецкурсу «Розв'язування планіметричних задач», на яких використовувалися різноманітні ігри, самостійні та колективні роботи, а також різні дидактичні матеріали та блоки з опорними сигналами. Задуми та ідеї, які потрібно було відобразити під час занять, попередньо були обговорені з вчителями математики.

Можна виокремити дві головні частини методичних особливостей методики, що впроваджувалася:

- впровадження методики на заняттях спецкурсу, діагностика якості роботи – контрольна робота.

- дослідження рівня знань учнів з предмету. Проведення бесід та консультації з вчителями. Це приносить велику користь в роботі, а саме вчительські поради та настанови методистів[29].

У ході першого етапу експерименту були намічені і досягнуті наступні цілі: проаналізовано й узагальнено стан досліджуваної проблеми в теорії та практиці навчання, розроблена методика проведення занять з математики.

На другому етапі дослідження здійснювалася експериментальна перевірка розробленого змісту практичних занять й методики їх проведення. При цьому були намічені і досягнуті наступні завдання: вивчити вплив

запропонованого змісту і методики математичних заходів на засвоєння знань в процесі навчання, формувати стійкі вміння аналізувати, досліджувати.

Також було проведено ще один експеримент.

Під час вивчення методів розв'язання планіметричних задач на побудову у 9 класі на уроках використовували форми роботи: колективна, робота в групах та робота в парах, а найбільше значення мали нетрадиційні уроки та застосування у навчанні комп'ютерних засобів. Такі форми навчання дозволяють диференціювати та індивідуалізувати процес навчання, формують внутрішню мотивацію до активного сприйняття, засвоєння та передачі інформації; сприяють формуванню комунікативних рис учнів; активізують розумову діяльність.

Застосування комп'ютерних технологій під час навчання зацікавило дев'ятикласників, що, як наслідок, змусило їх слухати уважніше виклад матеріалу, а оскільки комп'ютер дозволяє значно прискорювати розв'язання задачі, то відповідно і кількість розв'язаних різнотипних задач підвищилась.

Було проведено діагностувальну контрольну роботу для учнів. Перевірка знань учнів проводилася за допомогою діагностичного комплексу тестів. Загалом було представлено кожному учню 20 тестових завдань.

Результати тестування подано в таблиці 1.

**Розподіл учнів за кількістю виконаних завдань  
(констатувальний зріз)**

Кількість завдань	Кількість учнів, що виконали завдання (у %)
	9 клас
0–5	23%
6–10	32%
11–15	27%
16–20	18%

Отримані дані дозволили обґрунтувати необхідність розробки й впровадження методики навчання геометрії в школі.

В учнів почали вироблятися необхідні для творчої роботи вміння, а саме:

- уміння зміцнювати навички у заданих ситуаціях;
- здатність вивільнювати підсвідоме, висловлювати ідеї і думки навіть тоді, коли вони здаються незрозумілими та недостатньо обґрунтованими;
- здатність бачити відмінні властивості та функції об'єктів, а також їх взаємозв'язки;
- уміння швидко та адекватно пристосовуватись до нових ситуацій;
- уміння засвоювати за аналогією, знаходити однакове, подібне у далеких, на перший погляд, явищах, подіях і процесах, котрі начебто не мають нічого спільного;
- розуміння та вміле використання цих подібностей під час розв'язування завдань і т.д.

Проаналізувавши результати контрольної роботи, рівень знань, умінь та навичок учнів, можна зробити висновок про доцільність використання на уроках математики різних форм роботи з учнями.

## 4.2. Хід дослідження

Дослідне викладання застосовується, щоб об'єктивно та достовірно перевірити гіпотезу і передбачає одночасне використання сукупності методів, наприклад, спостереження, що діагностують контрольні роботи, розмова.

Завдання дослідного викладання - перевірка ефективності розробленого факультативного курсу з розв'язування задач на побудову, як передбачених шкільною програмою, так таких, що в шкільному курсі математики не зустрічаються. Курс розроблений для учнів 9 класів.

### *Цілі факультативного курсу:*

1. Сформувані в учнів уявлення про методи і подібності, які застосовуються під час виконання задач на побудову, і навчити їх застосовувати ці уявлення.
2. Сформувані чіткі бачення про етапи роботи з задачею на побудову.
3. Розвивати логічне мислення школярів.
4. Сформувані наполегливість, цілеспрямованість, працьовитість.
5. Розвинути математичну мову з усіма притаманними їй властивостями: стислість, точність та лаконічність.

### *Етапи спецкурсу:*

1. Розробка програми факультативних занять "Задачі на побудову та методи їх розв'язування" для учнів 9 класу.
2. Проведення опитування серед вчителів та учнів.
3. Використання психологічних ресурсів, щоб визначити початковий рівень розвитку логічного мислення.
4. Проведення вступної діагностувальної контрольної роботи.
5. Проведення розробленої програми факультативних занять.
6. Проведення повторної діагностувальної контрольної роботи.
7. Використання психологічних методик, для того, щоб повторно визначити рівень розвитку логічного мислення.

## 8. Аналіз отриманих результатів дослідження.

### Етап № 1

Розробка програми факультативних занять "Задачі на побудову та методи їх розв'язування" для учнів 9 класу.

### Етап № 2

Викрисано психологічні методики, які визначають рівень розвитку логічного мислення. Насамперед нам необхідно з'ясувати чи зазнає змін рівень логічного мислення учнів і як саме, тому ми використаємо лише показники кількості правильних відповідей по кожній застосованій методиці. Потім ці результати можна порівняти з результатами, які будуть отримані після проведення експериментального.

### Етап № 3

Проведення вступної діагностувальної контрольної роботи. Під час виконання діагностувальної роботи учні повинні розв'язати 3 завдання. Час виконання роботи – 60хв. Результати вступної діагностувальної контрольної роботи показано в таблиці.

№ завдання	1	2	3
Кількість осіб, які вирішили завдання	3	2	5
Відсоток учнів, які вирішили завдання	30%	20%	50%

### Етап № 4

Проведення розробленої програми факультативних занять. Основні завдання проведення факультативних занять:

- 1) визначити той навчальний матеріал, який провокує в учнів найбільші труднощі;
- 2) визначити рівень ефективності засвоєння матеріалу за допомогою поточної перевірки;
- 3) виявити інтерес учнів у вивченні даної математичної теми.

### Етап № 5

Проведення повторної діагностувальної контрольної роботи. Діагностувальною робота була проведена після завершення факультативних

занять розробленої програми. Завдання: виявлення знань та умінь вирішувати задачі на побудову. Учням було знову запропоновано 3 завдання. Час виконання – 60 хв.

#### Етап № 6

Аналіз отриманих результатів дослідження.

На підставі попередніх досліджень можна зробити висновок, що відображає порівняння результатів контрольних робіт, проведених перед відвідуванням учнями факультативних занять і після їх відвідування[30].

Очевидно, що з попередніх досліджень, перед проведенням факультативного курсу рівень знань учнів був нижчим, ніж середній, а після проведення занять він значно підвищився. Позитивна тенденція помітна: учні навчилися вирішувати задачі на побудову методом подібності, і більшість впоралися із завданнями 1,3; значно покращилося вміння вирішувати більш складні завдання.

Дослідження виявило, що більш глибоке і об'ємне вивчення задач на побудову та методів їх вирішення дає можливість учням краще орієнтуватися в даній темі, творчо підходити до кожного завдання, застосовувати найраціональніший метод розв'язування, а також підвищити рівень свого логічного мислення.

## ВИСНОВКИ

Вирішення завдань загальної освіти залежить від створення і використання нових методичних комплексів, які б на найвищому рівні враховували індивідуальні інтереси і здібності учнів, сприяли їх всебічному розвитку.

Під час виконання магістерської роботи досліджено науковово-теоретичну та навчально-методичну літературу з визначеної теми; проаналізовано стан досліджуваної проблеми у психолого-педагогічній теорії та практиці шкільного навчання планіметрії, розглянуто теоретичні і практичні рекомендації для вчителів і методистів з даної проблеми.

Вміння розв'язувати планіметричні задачі розглядаються як визначені розумові дії, напрямлені на розв'язування конкретних задач. Характер цих дій дозволяє виділити загальні вміння розв'язувати планіметричні задачі.

В основу даного дослідження покладені концепції діяльнісного підходу і системного аналізу; концепція розвитку особистості; основні положення теорії пізнання; дослідження з проблеми визначення ролі і місця задач в навчанні; основні положення теорії формування математичних понять, вивчення теорем, навчання розв'язуванню математичних задач.

Під час дослідження з'ясувалося, що при вивченні і засвоєнні певного навчального матеріалу учні повинні виконувати ряд спеціальних розумових операцій, які зовні виражаються в переліку навчальних дій, що виявляються залежно від самої системи знань. При цьому внутрішні зв'язки, що підлягають засвоєнню, не лежать на поверхні і не можуть бути виявлені без спеціального логіко-дидактичного аналізу.

Були виявлені найефективніші методичні прийоми, комплекси вправ, які сприяють виробленню в учнів вмінь знаходити шлях розв'язання задачі, пошуку методу розв'язання і застосування його до певної конкретної ситуації.

Навчання учнів методам розв'язування планіметричних задач проводилося по двох напрямках: 1) реорганізація теоретичного матеріалу, що реалізовує єдину схему вивчення кожного методу; 2) навчання узагальненому

прийому навчальної роботи по застосуванню методу, що має один і той же склад дій незалежно від методу.

Була розроблена загальна схема вивчення окремих методів розв'язування планіметричних задач, що включає наступні компоненти:

1) суть методу, 2) прийом навчальної роботи з застосування методу до розв'язування задач, 3) опорні знання, 4) опорні задачі, 5) основні геометричні ситуації, 6) прийом навчальної роботи по вибору даного методу, 7) серія задач на застосування методу; у виділених діях, що визначають склад узагальненого прийому навчальної роботи по вибору методу розв'язування задачі і узагальненого прийому роботи розв'язування планіметричних задач.

Важливим критерієм професійної підготовки сучасного вчителя є його творча активність. Враховуючи це необхідно максимально використовувати всі наявні резерви для підготовки педагога з високим рівнем підготовки і достатнім досвідом дослідницької діяльності.

Творча активність це одночасно процес створення нового і сукупність властивостей особистості, які реалізують її включення в цей процес. Встановлено, що необхідні для творчої діяльності риси, зазвичай, не даються від природи, а набуваються в результаті виховання і навчання. Творча діяльність студента, як правило, розпочинається тоді, коли ведеться самостійний пошук нових рішень, намічаються нові, більш сучасні, оригінальні напрямки пошуку, раціональні способи розв'язання теоретичних і практичних задач.

В ході роботи нами був проведений педагогічний експеримент, під час проведення якого були розглянуті основні типи задач, при розв'язуванні яких застосовуються методи розв'язування планіметричних задач.

Аналіз результатів проведеного експерименту був зроблений на основі методу експертних оцінок. Учні підвищили знання з теми в порівнянні із знаннями, які в них були до запровадження спецкурсу «Розв'язування планіметричних задач на побудову». Наведені статистичні дані переконливо доводять ефективність використання різних нетрадиційних форм проведення



занять, оскільки це покращило засвоєння знань на середньому та достатньому рівнях. Також це сприяло формуванню навичок розв'язування більш складних завдань, творчої діяльності студентів та вмінь працювати з додатковою літературою.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Елементарна геометрія. Планіметрія. Посібник для учителів середньої школи. – К.: Радянська школа. – 1953. – 574 с.
2. Алексюк А.М., Загальні методи навчання в школі/ А. М. Алексюк – К.: Радянська школа, 1981. – 206 с.
3. Бурда М.І., Розв’язування задач на побудову в 6-8 класах/М.І.Бурда – К.: Радянська школа, 1986. – 112 с.
4. Бурда М.І. Вивчення геометрії у 7 класі. Методичний посібник. – К.: Радянська школа. – 1984. – 112 с.
5. Бевз Г.П., Методика викладання математики/ Г. П. Бевз – К.: Радянська школа, 1989. – 200 с.
6. Бевз Г.П., Математика: Проб. підручник для 11 кл. серед шк./ Г. П. Бевз – К.: Освіта, 1995. – 312 с.
7. Біла Т.О., Підготовка інтелектуальної еліти в Україні і використання мультимедіа-технології / Т. О. Біла– Миколаїв: Вид-во МФ НаУКМА, 2000. – Т.7. – С. 73-76.
8. Власюк І.М., Коваль В.В. Методика розв’язування планіметричних задач на побудову з використанням мультимедійних технологій: навчально-методичний посібник для вчителів.- Рівне: РВВ РДГУ, 2011.- 65
9. Вергасов В.М., Активізація розумової діяльності студентів в вищій школі/ В.М. Вергасов - К.: Вища школа, 1979. - 216 с.
10. Возняк Г.М. Прикладні завдання для мотивації навчання /Г.М.Возняк// Математика в школі. – №2 – 1990. – С.5-8
11. Возняк Г.М. Прикладні завдання для мотивації навчання/ Г.М.Возняк// Математика в школі. – №2 – 1990. – С.5-8.
12. Галайко Р.П. Ознаки рівності трикутників / Р.П. Галайко //Математика. – 2003.– №1.– С.6–10.
13. Дементій О. І. Навчаючі задачі з геометрії: [посіб. Для 7-9 кл.] / О.І. Дементій, С.В. Дементій. – К.: Торгсин, 1998. – 210 с.
14. Забранський В. Організація письмових контрольних та самостійних робіт

- при диференційованому навчанні математики / В. Забранський // Математика в школі. – 2000. – №5. – С. 30–33.
- 15.Збірник задач і завдань для тематичного оцінювання з геометрії для 7 класу / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. – Х.: Гімназія, 2007. – 112 с.
- 16.Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід, метод: Посібник/ Авт.-уклад. О. Пометун, Л. Пироженко. – К.: АПН, 2002. – 186 с.
- 17.Кельбас М.П. Геометрія. Пробний підручник для 7–9 класів середньої школи / М.П.Кельбас. – К.: Освіта. –1994. – 224 с.
- 18.Коваль Т.І. Підготовка викладачів вищої школи: інформаційні технології у педагогічній діяльності : навч.-метод. посіб. / Т.І. Коваль. – К. : Вид. центр НЛУ, 2009. – 380 с.
- 19.Концепція загальної середньої освіти як базової в єдиній системі неперервної освіти. – К.: МО України, 1992. – 177 с.
20. Коношевський Л.Л., Мамонов П.Д., Кондратюк В.Д., Підвищення ефективності самостійної роботи студентів засобами інформаційних технологій/ Л.Л. Коношевський, П.Д. Мамонов, В.Д. Кондратюк – Київ-Вінниця, 2000. – С. 289-295.
- 21.Коротка Н.І. Думки з приводу оцінювання / Н.І. Коротка // Математика. – 2003. –№13.– С. 1–2.
- 22.Литвиненко Г. М. Математика. Основна школа: Екзаменаційні завдання для тестової перевірки умінь і навичок / Г. М. Литвиненко, А. М. Капіносов. – Дніпропетровськ, 1994. – 84 с
23. Лозова В.І., Пізнавальна активність школярів: (спецкурс із дидактики): (Навчальний посібник для пед. ін-тів)/ В.І. Лозова - Х.: Основа, 1990. - 89 с.
- 24.Математика: посібник для факультативних занять у 8-мкл./ Л. М. Вивальнюк, В. Н. Боровик, І. Ф. Тесленко та ін. – К.: Рад. шк.,1995. – 207 с.
- 25.Матюшкін І.М., Проблемні ситуації в мисленні і навчанні/ І.М. Матюшкін - Педагогіка, 1990. – 216 с.
- 26.Мерзляк А.Г. Геометрія: Підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів з

- поглибленим вивчення математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір – Х.: Гімназія, 2017. – 304 с.
- 27.Наливайко Н. Я. Інформатика: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – К. : ЦУЛ, 2011. – 577 с.
- 28.Нелін Є.П., Алгебра в таблицях ( з Додатком): Навч. посібник для учнів 7 - 11 класів/ Є.П. Нелін - Х.: Світ дитинства, 1998. - 116 с.
- 29.Ненхо Т. Вивчення шкільної геометрії як засіб розвитку різних видів мислення учнів / Т. Ненхо // Математика в школі. – 2003. – №2. – С. 34–35.
- 30.Прус А. В. Збірник задач з методики навчання математики / А.В. Прус, В.О. Швець. – Житомир : Рута – 2011. – 388 с.
- 31.Семенець С.П. Методика формування математичних понять (розвивальних підхід)/ С.П. Семенець //Навчання математики: проблеми та перспективи. – № 37 – 2012. – С.68-73.
- 32.Слепкань З.І., Методика викладання алгебри і початків аналізу/ З.І. Слепкань- К.: Радянська школа, 1978. - 220 с.
- 33.Федорчук І.І., Федорчук І.П., Проблеми і перспективи розвитку дистанційної освіти і нових інформаційних технологій навчання/ І.І. Федорчук, І.П. Федорчук – Київ-Вінниця, 2003. – 82 с.
- 34.Фокіна В.І. Розвиток в учнів пізнавального інтересу під час вивчення геометрії / В.І. Фокіна // Математика в школах України. – 2014. – №13. – С. 17.
- 35.Форми навчання у школі / За ред. Ю.І.Мальованого. –К., Освіта, 1992. – С. 24-30
- 36.Хабіб Р.А., Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики/ Р.А. Хабіб - К.: Радянська школа, 1985. - 152 с.
37. Шаталов В.Ф., Навчати всіх, навчати кожного/ Педагогічний пошук/ В.Ф. Шалатов - К.: Радянська школа, 1988. - С. 127 - 189.
- 38.Шиман О.І. Формування основ інформаційної культури майбутніх учителів початкової школи: Автореф. дис... канд. пед. наук: спец. 13.00.02 "Теорія і методика навчання і виховання"/ Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. — К., 2005. — 20 с.

39.Шкіль М.І., Слепкань З.І., Дубинчук О.С., Алгебра і початки аналізу: Пробний підручник для 10 - 11 класу середньої школи/ М.І. Шкіль, З.І. Слепкань, О.С. Дубинчук - К.: 1995. - 608 с..

40. Шкурник Ю.М., В.В. Коваль. Методика розв'язування планіметричних задач на побудову: Навчально-методичний посібник для вчителів. – Рівне: РДГУ, 2018 – 54 с.

## Початок роботи з програмою. Звернення до послуг програми. Активізація програми

**Активізація програми.** Програма GRAN-2D призначена для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині, звідки і походить її назва (GRaphic Analysis 2-Dimension). Програма функціонує під управлінням операційної системи Windows9x. Для встановлення програми слід запустити на виконання файл SETUP.EXE з диску дистрибутива (обсягом близько 1.44Mb) та відповісти на всі стандартні запити інсталляторів. Після успішного встановлення у вибраній папці буде створено файл GRAN2D.EXE – основна програма, та у додатковій субдиректорії HELP буде створено допоміжні файли допомоги. Надалі при натисненні кнопки Пуск назва програми GRAN-2D з'являтиметься як пункт меню Програми, при зверненні до якого відбуватиметься запуск ППЗ GRAN-2D.

**Позначення, що використовуються в тексті.** Обумовимо позначення, що використовуються. В тексті курсивом виділяються написи та послуги, що належать до інтерфейсу програми.

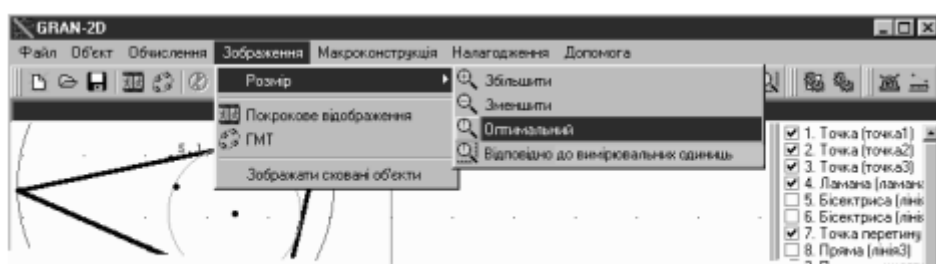


Рис. 1.1

Надалі вказати на деякий об'єкт чи послугу означатиме підвести вказівник мишки до відповідної назви чи зображення натиснути ліву клавішу мишки. “Звернутися до послуги”, “Активізувати послугу” означатиме встановити вказівник на назву потрібної послуги головного меню програми та натиснути клавішу Enter або ліву клавішу мишки.

**Звернення до послуг програми.** Після активізації ППЗ GRAN-2D на екрані з'явиться головне вікно програми (рис.1.2). Розглянемо основні

елементи інтерфейсу програми. Зверху під заголовком головного вікна знаходиться головне меню – перелік послуг, до яких можна звернутися в процесі роботи

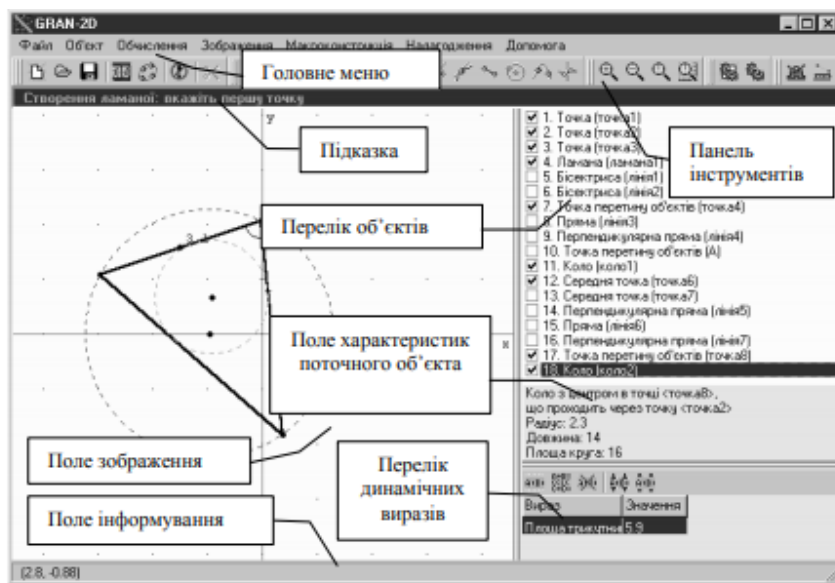


Рис. 1.2

з програмою. При зверненні до певного пункту головного меню з'являється перелік пунктів відповідного підменю. Пункти підменю в свою чергу можуть розгалужуватись Рис. 1.2 Головне меню Панель інструментів Перелік об'єктів Поле характеристик поточного об'єкта Перелік динамічних виразів Поле зображення Підказка Поле інформування на підпункти, перелік яких з'являється при зверненні до відповідного пункту підменю. Під час роботи з програмою у деяких ситуаціях використання певних послуг меню не є коректним. Такі пункти виділятимуться блідішим кольором, а звернення до них не призведе до яких небудь дій. Наприклад, використання послуги Об'єкт\Вилучити не є коректним, якщо не виділено жодного об'єкта у полі зображення. Якщо необхідно відмовитися від роботи із щойно обраною послугою, слід звернутися до послуги Об'єкт\Припинити виконання операції або натиснути клавішу ESC. Звернення до окремих послуг програми при необхідності можна здійснити за допомогою функціональних клавіш, вказаних справа біля назв пунктів головного меню, а також за допомогою кнопок швидкого виклику послуг, розміщених на панелі інструментів.

## Координатна площина

Після завантаження програми GRAN-2D у полі зображення з'являється зображення осей координат, на яких вказано значення

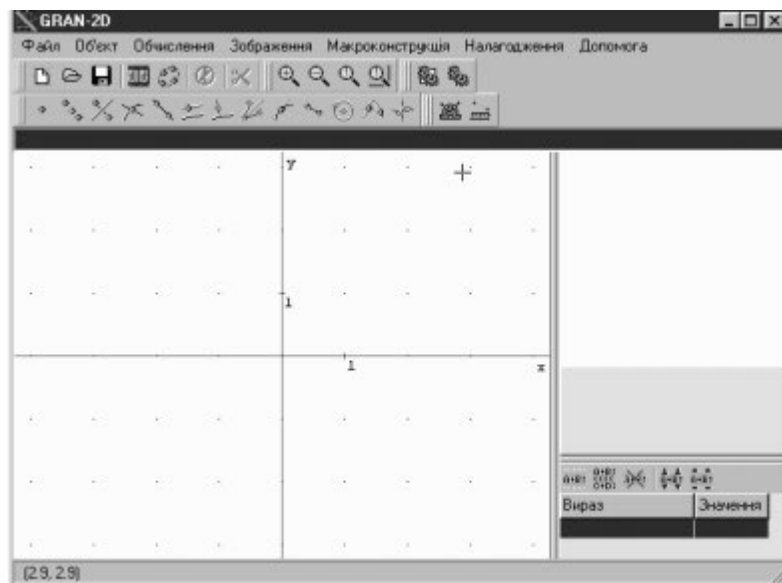


Рис. 2.1

поділок, що визначають довжини одиничних відрізків вздовж цих осей. Центр системи координат співпадатиме з центром поля зображення (рис.2.1).

Зображення координатних осей та координатної сітки. Для встановлення або видалення зображення координатних осей або координатної сітки (у полі зображення) слід звернутися до послуги Налаштування та у вікні Налаштування, що з'явиться (рис.2.2), за допомогою мишки встановити або зняти відмітку біля написів Зображати координатні осі та Зображати координатну сітку, після чого "натиснути" кнопку Застосувати.

Переміщення початку системи координат Для переміщення початку системи координат відносно центра поля зображення необхідно натиснути клавішу Ctrl і ліву клавішу мишки, та утримуючи їх у натисненому стані, встановити вказівник мишки у нове положення. При цьому початок системи координат переміщуватиметься відповідно до положення Рис. 2.1 вказівника мишки.



Масштаб зображення. Для збільшення або зменшення масштабу об'єктів у полі зображення призначено послуги Зображення\Розмір\Збільшити та Зображення\Розмір\Зменшити. При зверненні до послуги Зображення\Розмір\Оптимальний буде встановлено масштаб, при якому зображення всіх створених об'єктів поміститься у полі 1 см”≈зображення. Для встановлення масштабу “1 поділка потрібно звернутися до послуги Зображення\Розмір\Відповідно до вимірювальних одиниць.

Декартові та полярні координати. Щоб вказати бажаний тип координат, слід звернутися до послуги Налаштування і у вікні Налаштування (рис.2.2), що з'явиться, за допомогою мишки встановити перемикач Система

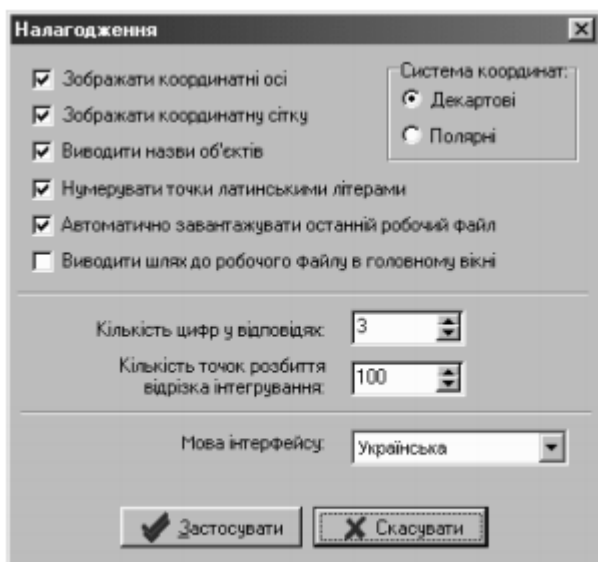


Рис. 2.2

координат у одне з положень – Декартові або Полярні, після чого “натиснути” кнопку Застосувати. За замовчуванням встановлено тип координат Декартові. Нагадаємо, що у декартовій системі координат положення точки на площині визначається її проекціями на вісь Ох (абсциса) та на вісь Оу (ордината).

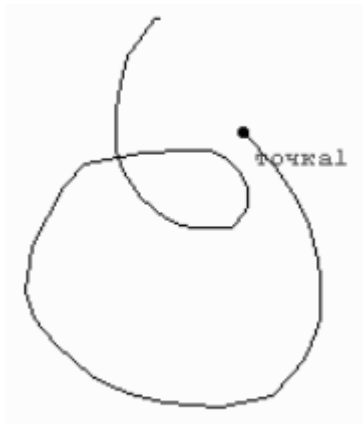
Рис. 2.2

У полярній системі координат положення точки на площині визначається її віддаллю від початку координат (полярний радіус) та кутом між додатнім напрямом полярної осі (горизонтальної півпрямої, що виходить з початку координат і направлена вправо) і відрізком, що з'єднує розглядувану точку з початком координат. Цей кут (полярний кут) відкладається від полярної осі проти годинникової стрілки та змінюється в межах від 0 до 2π. Від полярних координат до декартових (і навпаки) можна перейти за допомогою формул  $x = \rho \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \varphi$ ;  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ .

Визначення координат точок При переміщенні у полі зображення вказівника мишки у полі інформування автоматично виводяться координати

точки, що відповідає поточному положенню вказівника мишки відносно центра координат (рис.2.1).

Зображення геометричного місця точок Іноді виникає необхідність



**Рис. 2.3**

фіксування шляху, який проходить деяка точка при переміщенні об'єктів, від яких залежить її положення, - наприклад, при розв'язуванні задач на встановлення геометричного місця точок. Якщо звернутися до послуги Зображення\ГМТ та за відповідним запитом програми (що з'явиться у полі підказки) вказати на Рис. 2.3 зображення деякої точки, то надалі при всіх переміщеннях

вказаної точки на зображенні буде залишатися її слід (як на рис.2.3). Щоб відмовитися від виведення зображення сліду вибраної точки, слід звернутися до послуги Зображення\Припинити зображення ГМТ.

Покрокове зображення об'єктів При зверненні до послуги Зображення\Покрокове відображення розпочнеться покрокове відображення (у полі зображення) створених об'єктів, починаючи з першого (у переліку об'єктів) до останнього. При цьому для виведення на екран зображення кожного наступного об'єкта потрібно натиснути ліву клавішу мишки. При виведенні зображення чергового об'єкта вказівник переліку об'єктів автоматично встановлюється у положення, що відповідає назві цього об'єкта.

Після виведення зображення всіх створених об'єктів програма переходить у звичайний режим роботи.

### Геометричні об'єкти

ППЗ GRAN-2D дозволяє оперувати у площині моделями геометричних об'єктів шести базових типів: Точка, Лінія, Ламана, Коло, Інтерполяційний поліном, Графік функції. При цьому типи Точка та Лінія діляться на підтипи.

При створенні об'єктів усіх типів (крім типів Вільна точка та Графік функції) необхідно вказувати опорні об'єкти – тобто об'єкти, які визначають результуючий об'єкт. Результуючий об'єкт буде автоматично розміщуватись відповідно до положення опорних об'єктів. Наприклад, при створенні об'єкта типу Середня точка необхідно вказати два опорні об'єкти типу Точка. Надалі при зміні положення будь-якої з опорних точок утворена точка типу Середня точка завжди залишатиметься точно посередині між вибраними опорними точками.

Створення об'єктів Об'єкти можна створювати двома способами: або шляхом введення їх характеристик у вікні Конструювання об'єкта, або з екрану, за допомогою мишки. Для створення об'єктів шляхом введення їх характеристик призначено послуги пункту меню Об'єкт\Створити. При активізації будь-якої з послуг вказаного пункту меню з'являється вікно Конструювання об'єкта з вкладинкою, що відповідає типу обраного об'єкта. У вказаному вікні слід ввести параметри об'єкта, що створюється, та “натиснути” кнопку Застосувати. Після цього відповідний об'єкт буде створено, і його зображення з'явиться у полі зображення. Опорні об'єкти задаються шляхом вказування назв задалегідь створених об'єктів у відповідних полях вікна Конструювання об'єкта.

Створення об'єктів типу Вільна точка Для створення об'єкта типу Вільна точка призначено послугу Об'єкт\Створити\Точка. Після активізації вказаної послуги з'являється вікно Конструювання об'єкта з вкладинкою Точка рис.3.1а). У поля біля написів  $x=$  та  $y=$  слід ввести

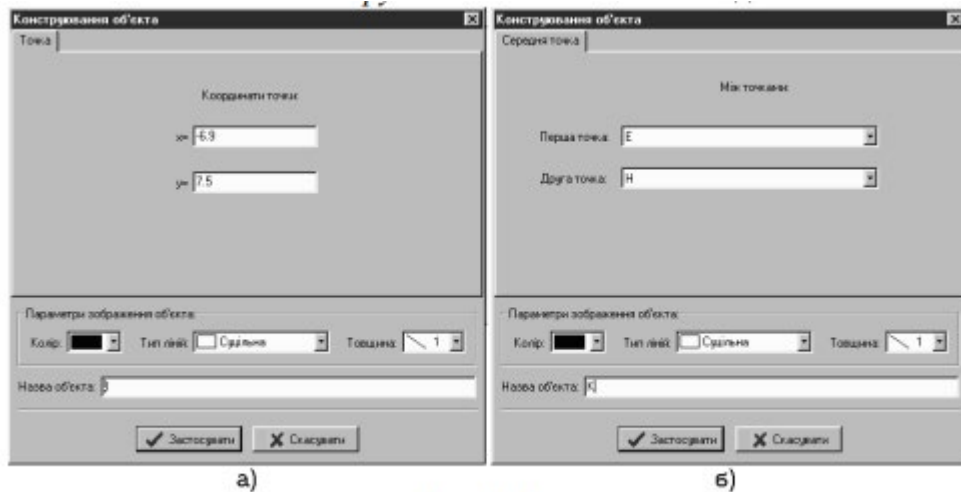


Рис. 3.1

координати точки, та “натиснути” кнопку Застосувати.

Створення об’єктів типу Середня точка Для створення об’єкта типу Середня точка слід звернутися до послуги Об’єкт\Створити\Середня точка, та у вікні Конструювання об’єкта з вкладинкою Середня точка, що з’явиться, у полях Перша точка та Друга точка вказати назви Рис. 3.1 опорних точок, та “натиснути” кнопку Застосувати. Надалі створена точка буде розміщуватись строго посередині між вказаними точками.

Створення об’єктів типу Точка перетину об’єктів Для створення об’єкта типу Точка перетину об’єктів слід звернутися до послуги Об’єкт\Створити\Точка перетину об’єктів, та у вікні Конструювання об’єкта, що з’явиться (рис.3.2), у полях Перший об’єкт та Другий об’єкт вказати назви об’єктів, точку перетину яких необхідно знайти, та “натиснути” кнопку Застосувати. Опорні об’єкти повинні належати до типів Лінія або Коло. Надалі створена точка буде розміщуватись у місці перетину обраних об’єктів.

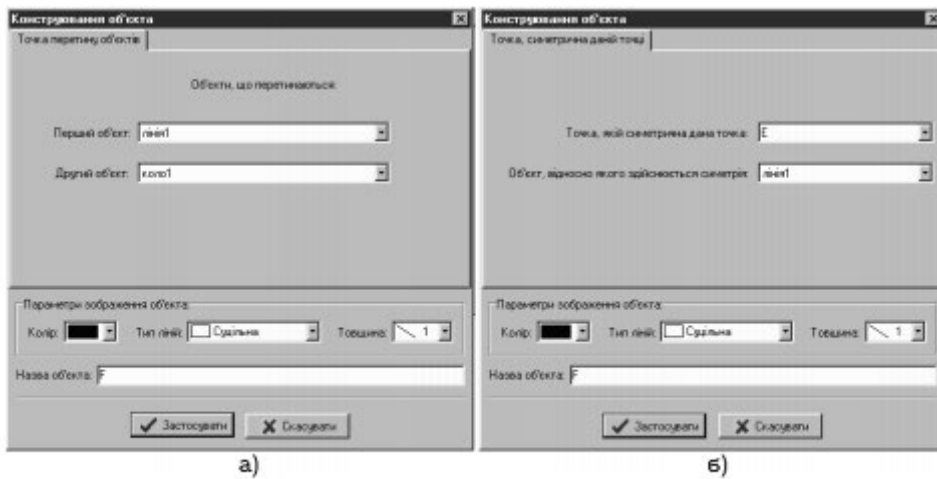


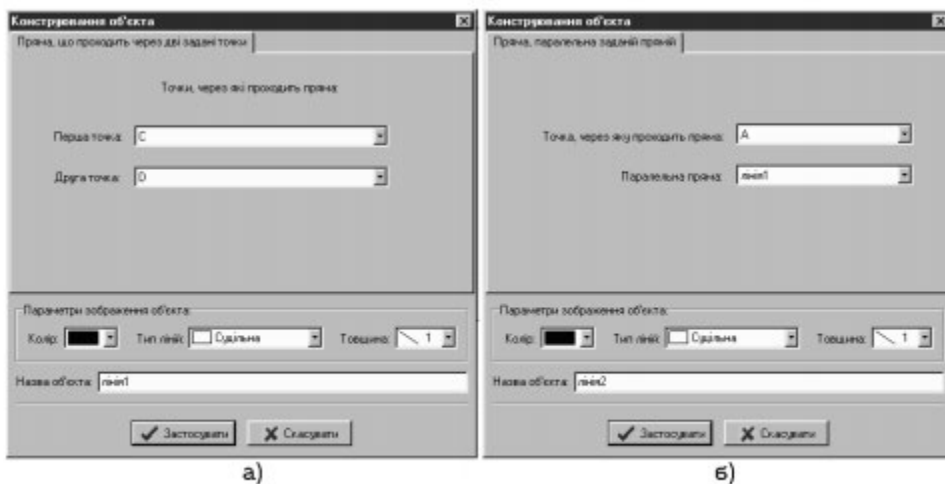
Рис. 3.2

Якщо

об'єкти можуть перетинатись в двох точках (наприклад, пряма і коло або коло і коло), то буде утворено два об'єкти типу Точка перетину об'єктів.

Створення об'єктів типу Симетрична точка. Для створення об'єкта типу Симетрична точка слід звернутися до послуги Об'єкт\Створити\Точка, симетрична даній точці. У вікні Конструювання об'єкта, що з'явиться (рис.3.2), у полі Точка, якій симетрична дана точка необхідно вказати назву Рис. 3.2 потрібної точки, а у полі Об'єкт, відносно якого здійснюється симетрія точка - вказати назву відповідної точки або лінії. Після "натиснення" кнопки Застосувати буде створено точку, що буде автоматично розміщуватись симетрично до вказаної точки відносно обраної точки або лінії.

Створення об'єктів типу Пряма. Для створення об'єкта типу Пряма потрібно звернутися до послуги Об'єкт\Створити\Пряма, що проходить через дві задані точки. У вікні Конструювання об'єкта, що з'явиться (рис.3.3а), у



полях Перша точка та Друга точка необхідно вказати назви точок, через які повинна

Рис. 3.3

проходити пряма, та “натиснути” кнопку Застосувати.

## ДОДАТОК Г

### Перетворення об’єктів

За допомогою ППЗ GRAN-2D можна здійснювати геометричні перетворення деяких об’єктів, а саме паралельне перенесення, поворот (відносно деякої точки) та деформацію об’єктів типу Точка, Лінія, Ламана, Коло та Інтерполяційний поліном. Для цього призначено послуги пункту головного меню Об’єкт\Перетворення. Параметри перетворення можна задавати як через введення координат вектора перенесення чи кута повороту у відповідні поля, так і графічно “з екрану”, користуючись мишкою. У першому випадку для виконання деякого перетворення слід звернутися до послуги меню Об’єкт\Перетворення\Параметри, а в другому – до підпунктів меню Об’єкт\Перетворення\З екрану – Паралельне перенесення або Поворот, в залежності від того, який тип перетворення об’єктів необхідно здійснити.

Введення параметрів перетворення об’єктів При зверненні до послуги Об’єкт\Перетворення\Параметри являється вікно Перетворення об’єктів з вкладками з Паралельне перенесення, Поворот та Деформація (рис.4.1-4.2).

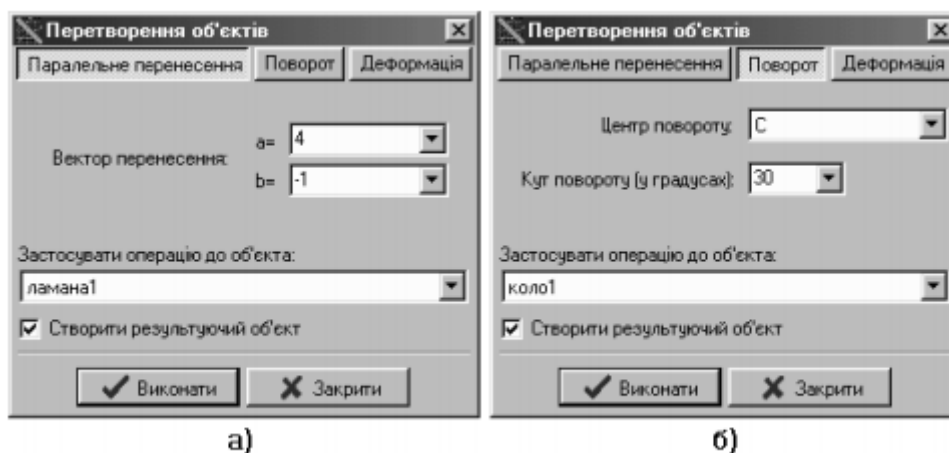


Рис. 4.1

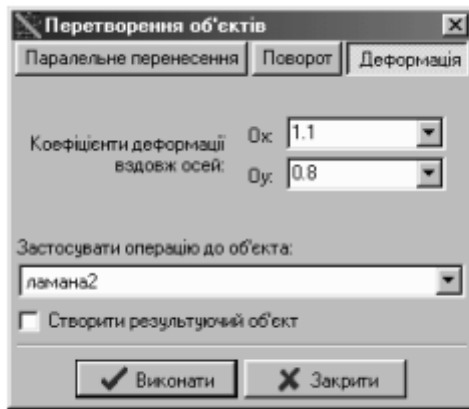
Для виконання необхідного перетворення перш за все слід перейти на вкладку з назвою потрібної операції, після чого у полі під написом Застосувати операцію до об’єкта потрібно вказати назву заздалегідь

створеного об'єкта, перетворення якого Рис. 4.1 31 необхідно здійснити. Якщо встановити відмітку біля напису Створити результуючий об'єкт, то після виконання операції вихідний об'єкт залишиться результатом виконання—без змін, а буде створено новий об'єкт операції стосовно вихідного об'єкта. Задавши всі параметри перетворення, слід натиснути кнопку Виконати.

Паралельне перенесення. Для виконання паралельного перенесення деякого об'єкта на вектор  $(a,b)$  необхідно перейти на вкладинку Паралельне перенесення (рис.4.1a) та у полі під написом Застосувати операцію до об'єкта вказати назву заздалегідь створеного об'єкта, паралельне перенесення якого необхідно здійснити. Далі у поля біля написів  $a=$ ,  $b=$  потрібно ввести координати вектора і натиснути кнопку Виконати.

Поворот. Якщо необхідно виконати поворот об'єкта на деякий кут навколо певної точки, потрібно перейти на вкладинку Поворот (рис.4.1б) та у полі під написом Застосувати операцію до об'єкта вказати назву заздалегідь створеного об'єкта, поворот якого необхідно здійснити. У полі Центр повороту слід вказати назву заздалегідь створеного об'єкта типу Точка (центр повороту), а також ввести величину кута повороту (у градусах) у поле біля відповідного напису. Після натиснення кнопки Виконати операцію повороту буде застосовано до вказаного об'єкта.

Деформація. У разі необхідності збільшити або зменшити розміри деякого об'єкта вздовж напрямів осей  $Ox$ ,  $Oy$ , слід перейти до вкладинки Деформація (рис.4.2). У полі під написом Застосувати операцію до об'єкта слід вказати назву заздалегідь створеного об'єкта, деформацію якого необхідно здійснити, а також ввести коефіцієнти деформації вздовж кожного з напрямів  $Ox$ ,  $Oy$  у поля біля відповідних написів. Після натиснення кнопки Виконати  $x$ - та  $y$ -координати усіх опорних точок вихідного об'єкта буде помножено на відповідні коефіцієнти. За замовчуванням значення коефіцієнтів деформації вздовж осей  $Ox$  та  $Oy$  встановлюються рівними 1. У випадку, поданому на рис.4.2, після “натиснення” кнопки Виконати розміри об'єкта з назвою ламана2 вздовж осі  $Ox$

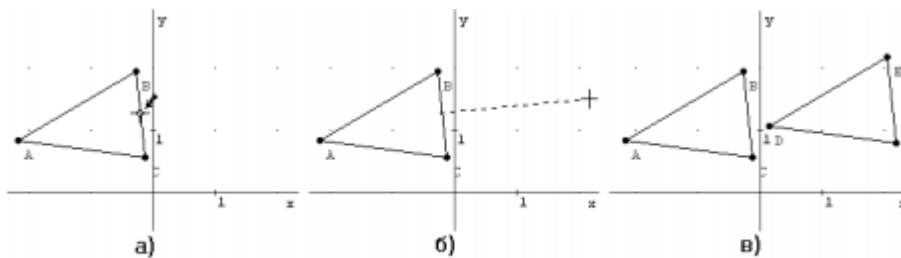


**Рис. 4.2**

збільшаться на 10 відсотків, а вздовж осі Оу зменшаться на 20 відсотків.

4.2. Задання параметрів перетворення об'єктів “з екрану” Для задання “з екрану” параметрів перетворення об'єктів призначено послуги Об'єкт\Перетворення\З екрану\Паралельне перенесення та Об'єкт\Перетворення\З екрану\Поворот.

Паралельне перенесення. Для виконання паралельного перенесення деякого об'єкта



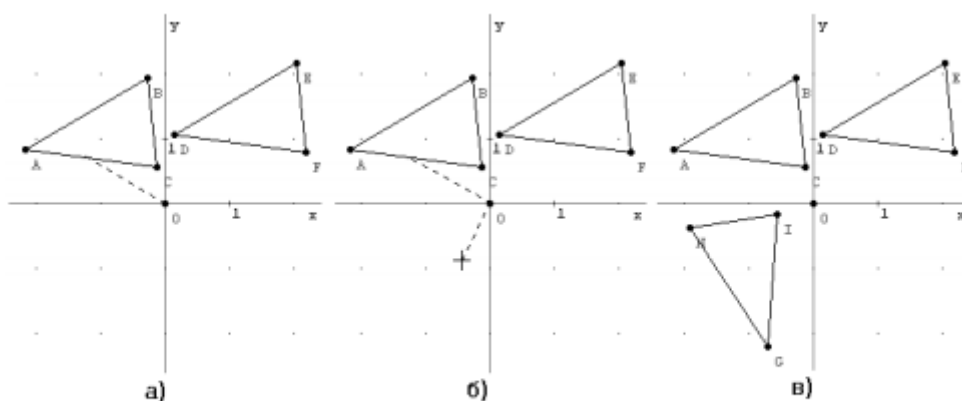
**Рис. 4.3**

можна скористатися послугою Об'єкт\Перетворення\З екрану\Паралельне перенесення. Після активізації цієї послуги слід вказати (за допомогою вказівника мишки) у полі зображення об'єкт (рис.4.3а), паралельне перенесення якого необхідно виконати, і натиснути ліву клавішу мишки. Точка об'єкту, що відповідала положенню вказівника мишки в момент натиснення її лівої клавіші, визначатиме початок вектора перенесення. Далі потрібно встановити вказівник мишки у положення, в яке необхідно перемістити щойно зафіксовану на об'єкті точку (при цьому зображатиметься вектор перенесення (рис.4.3б), а у полі інформування виводитимуться його координати). Після вказування кінцевої точки вектора перенесення слід



натиснути ліву клавішу мишки. Після цього з'явиться запит “Створити результуючий об'єкт?”. У разі позитивної відповіді вихідний об'єкт залишиться без змін, а буде створено новий об'єкт - результат виконання паралельного перенесення вихідного об'єкта на заданий вектор (рис.4.3в). Якщо ж натиснути кнопку “Ні”, то вихідний об'єкт переміститься (разом з його опорними об'єктами) у нове положення.

**Поворот.** Для здійснення повороту об'єкта навколо деякої точки можна скористатись послугою Об'єкт\Перетворення\З екрану\Поворот.



**Рис. 4.4**

Після активізації цієї послуги слід вказати (за допомогою вказівника мишки) у полі зображення об'єкт, поворот якого необхідно здійснити, і натиснути ліву клавішу мишки. В результаті вказаний об'єкт буде підсвічуватись. Далі слід вказати на зображення заздалегідь створеного об'єкта типу Точка, що визначатиме центр повороту. При цьому перетворюваний об'єкт та центр повороту буде з'єднано штриховою лінією (рис.4.4а). Після цього за допомогою вказівника мишки потрібно вказати при переміщенні мишки у полі зображення щойно-кут повороту зафіксована точка на перетворюваному об'єкті, центр повороту та вказівник мишки будуть з'єднані штриховою лінією (рис.4.4б), а у полі інформування виводитиметься величина кута (в градусах). Після того, як потрібний кут буде встановлено, слід натиснути ліву клавішу мишки. Далі з'явиться запит “Створити результуючий об'єкт?” з кнопками Так та Ні. При “натисненні” кнопки Так вихідний об'єкт залишиться без змін, а буде створено новий об'єкт - результат

виконання повороту вихідного об'єкта навколо точки – центра повороту на вказаний кут (рис.4.4в). Якщо ж натиснути кнопку “Ні”, то вихідний об'єкт переміститься разом з своїми опорними об'єктами у нове положення.

**Зміна форми.** Щоб змінити форму деякого об'єкта, досить перемістити у полі зображення будь-який його опорний об'єкт. При зміні положення опорних об'єктів змінить форму і об'єкт, який визначається через опорні.

**Переміщення об'єктів.** Для переміщення деякого об'єкта у нове положення необхідно підвести вказівник мишки до зображення цього об'єкта, натиснути ліву клавішу мишки та тримаючи її у натисненому стані, переміщувати вказівник у потрібному напрямі. При цьому “зафіксований” об'єкт буде переміщуватись разом із вказівником. Перемістивши таким чином об'єкт у потрібне положення, слід звільнити ліву клавішу мишки. Якщо необхідно перемістити одночасно групу об'єктів, слід виділити потрібні об'єкти, підвести вказівник мишки до зображення будь-якого з виділених об'єктів (так, щоб вказівник набув форми долоні, рис.4а,б), натиснути ліву клавішу мишки та тримаючи її у затисненому стані, перемістити вказівник у потрібне положення. При цьому всі виділені об'єкти будуть переміщуватись разом з вказівником.

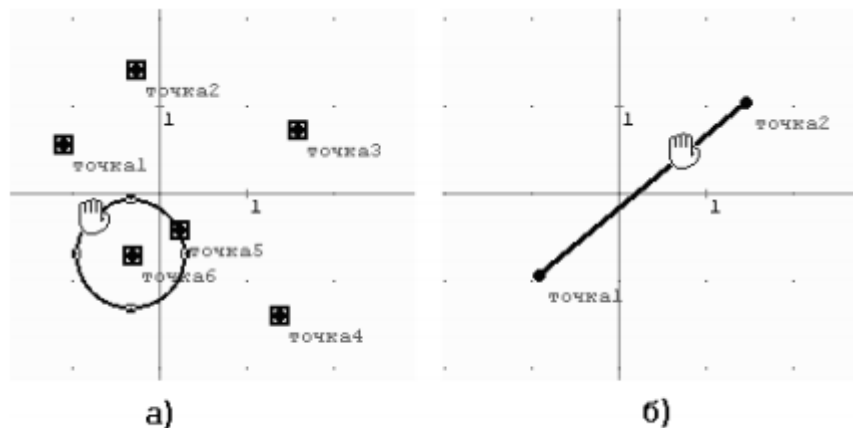


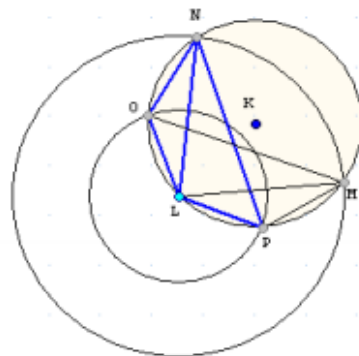
Рис. 4.5

## Використання педагогічного програмного засобу GRAN-2D під час розв'язування задач на побудову з планіметрії

Розглянемо на прикладі розв'язування задач на побудову різними методами можливості використання ППЗ GRAN-2D на уроках планіметрії. Розглянемо даний метод на прикладі розв'язування наступної задачі. Задача. Побудувати трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола. Для розв'язування задач методом геометричних місць необхідно з'ясувати: до знаходження яких точок зводиться розв'язання задачі і які дві вимоги мають ці точки задовольняти. Далі розглядають одну з вимог задачі і будують геометричне місце точок (ГМТ), що задовольняють цю вимогу. Потім будують ГМТ, які задовольняють інші вимоги і, нарешті, знаходять точки перетину геометричних місць точок. На рис. 1 показано копію вікна побудови з умовою задачі, заданими відрізками, відкритими підказками та додатковим малюнком, які можна приховати, «натиснувши» відповідну кнопку.

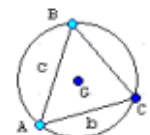
Побудувати трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола.

b  
 \_\_\_\_\_  
 c  
 \_\_\_\_\_  
 R  
 \_\_\_\_\_



Підказки

Аналіз задачі



Розглянемо довільний трикутник  $ABC$ , навколо якого описане коло з центром в точці  $G$ . Нехай точка  $A$  – вершина даного трикутника і вона лежить на описаному колі даного радіуса. Точки  $B$  і  $C$  – шукані. Встановлюємо що точка  $B$  лежить на даному колі і віддалена від точки  $A$  на відстань  $c$ . Точка  $C$  також лежить на колі радіуса  $R$  і віддалена від  $A$  на відстань  $b$ .

Побудова

- 1) Будемо коло з центром в точці  $K$  і радіусом  $R$  і позначимо точку  $L$  на ньому.
- 2) Будемо коло з центром в точці  $L$  і радіусом  $b$ . Позначимо точки перетину  $O, P$ .
- 3) Будемо коло з центром в точці  $L$  і радіусом  $c$ .
- 4) Позначимо точки перетину  $N, M$ .
- 5) Проводимо відрізки  $LO, LN, LM, LP, OM, NP$ . Сдержуємо трикутники  $OLN=LMP$  і  $LNP=LON$ .  
Отже, трикутники  $OLN$  і  $LNP$  – шукані.

Рис. 1

Проведемо аналіз даної задачі. Нехай точка  $A$  – вершина трикутника  $ABC$ , навколо якого описане коло радіуса  $R$ . Необхідно знайти розташування інших вершин трикутника – точок  $B$  і  $C$ . Точка  $B$ , по-перше, лежить на даному колі радіуса  $R$ , а по-друге віддалена від точки  $A$  на відстань  $s$ . Тобто вона лежить на перетині даного кола і кола з центром в точці  $A$  і радіусом  $s$ . Точка  $C$  також лежить на даному колі та віддалена від  $A$  на відстань  $b$ . Отже, вона лежить на перетині даного кола і кола з центром в точці  $A$  і радіусом  $b$ . Під час побудови легко встановити, що шуканих трикутників два. Застосування методу осьової симетрії для розв’язування задач на побудову можна проілюструвати за допомогою такої задачі. Задача. Через вершину  $A$  трикутника  $ABC$  і точку  $D$  основи  $BC$  проведено пряму. Знайти на цій прямій точку  $M$ , з якої відрізки  $BD$  і  $CD$  видно під рівними кутами. Для розв’язування задачі слід використати правило-орієнтир. По-перше, необхідно припустити, що задача розв’язана, тоді обрати певну симетрію стосовно або даної прямої, або прямої, яку легко побудувати та замінити один із даних елементів

Через вершину трикутника  $ABC$  і точку  $D$  основи проведено пряму  $BC$ . Знайти на цій прямій точку  $M$ , з якої відрізки  $BD$  і  $CD$  видно під рівними кутами.

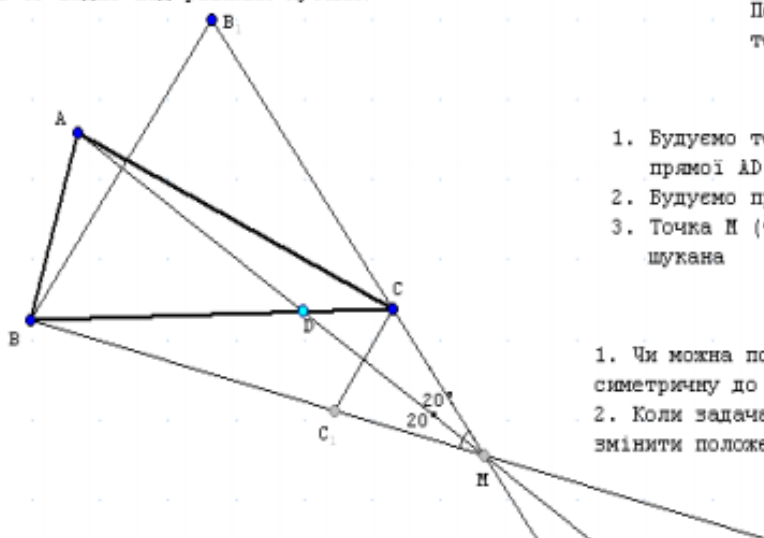


Рис. 2

симетричним щодо обраної осі симетрії. У запропонованій задачі пряма  $AD$  буде розглядатись як вісь симетрії, а точка  $C$  – об’єкт симетрії (рис. 2).

Маючи на екрані точки  $B$  і  $C_1$ , неважко здогадатися провести пряму через ці точки, яка перетне пряму  $AD$  в точці  $M$ . Далі пропонуємо учням перевірити, чи є точка  $M$  шукана? Для цього спочатку можна провести

#### Підказка

Побудувати точку  $C_1$  симетрично до точки  $C$  відносно  $AD$

#### Побудова

1. Будуємо точку  $C_1$  симетрично до точки  $C$  відносно прямої  $AD$ .
2. Будуємо промінь  $BC_1$ .
3. Точка  $M$  (точка перетину прямих  $BC_1$  і  $AD$ ) – шукана

#### Дослідження

1. Чи можна побудувати точку  $M$ , використовуючи точку, симетричну до точки  $B$  відносно  $AD$ ?
2. Коли задача матиме безліч розв’язків? (спробуйте змінити положення точки  $D$  на основі  $BC$ ).

дослідження, вимірявши градусну міру кутів  $\angle AMB$  і  $\angle AMC$  з допомогою інструмента Обчислення кута за трьома точками, а потім аналітично довести рівність цих кутів (очевидно, пряма  $AM$  є бісектрисою кута  $\angle BMC$  чи  $\angle CMB$ ). Оскільки модель геометричної побудови в ППЗ GRAN-2D є динамічною, то учням доцільно поставити завдання на дослідження. Спробуйте змінити положення точки  $D$  на основі  $BC$ . Чи можна знайти точку  $M$ , побудувавши точку  $B_1$  симетрично до  $B$  відносно  $AD$ ? Який із способів і в якому випадку буде більш зручним? Коли задача матиме безліч розв'язків? До малюнка бажано створити кілька кнопок, за допомогою яких приховувати і послідовно відкривати підказки. Завдяки цьому імітується евристичний діалог школяра з учителем. За кнопкою можна приховувати навідні або додаткові запитання для учня. Це також допомагає школяреві вдосконалювати навички самоконтролю.