Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:
Методика реалізації прикладної спрямованості геометрії
у профільних класах

Виконала: студентка II курсу магістратури
групи М-2
факультету математики та інформатики
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Пікун Олена Ростиславівна

Керівник: канд. пед. наук, проф. кафедри
математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри
вищої математики
Демчик Світлана Петрівна

Рівне – 2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність та доцільність дослідження. Реформування освіти України передбачає модернізацію її змісту, методів і засобів навчання, перехід від уніфікованої шкільної моделі до урізноманітнення її типів. Розвиток сучасної педагогічної теорії та практики ґрунтується на відкритості і творчому характері навчання, особистісній його спрямованості. Ключовим завданням сьогодення є орієнтація системи навчання на розвиток особистості, здатної до самостійної навчальної діяльності, саморозвитку і творчого розв'язання інтелектуальних та практичних проблем.

Концепція математичної освіти середньої школи визначає математичну освіту важливою складовою загальноосвітньої підготовки, а якість математичної підготовки молодого покоління - індикатором готовності суспільства до соціально-економічного розвитку, мобільності особистості в освоєнні і впровадженні високих технологій.

Протиріччя між високим рівнем математизації та інформатизації в життєдіяльності людини та досить низьким рівнем математичної підготовки підростаючого покоління вказує на існування *проблеми* підвищення якості математичної підготовки кожного випускника загальноосвітнього навчального закладу. В умовах профілізації старшої школи ця проблема набуває ще більшої актуальності.

Розв'язанню вказаної проблеми шляхом прикладної спрямованості навчальної діяльності старшокласників у процесі профільного вивчення геометрії присвячене дане дослідження. Прикладна спрямованість (ПС) математики в цілому, окремих математичних предметів або тем досліджувалась у контексті (А.С. Адигозалов, Г.П. Бевз, В.К. Беллюстін, Ю.М. Колягін та ін.), політехнізм у навчанні математики (О.М. Ястряб, Б.В. Гнеденко, І.Ф. Тесленко, А.І. Фетисов та ін.). ПС як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів (М.Я. Ігнатенко, Л.С. Межейнікова), практична робота як засіб ПС (Р.Н. Матюгіна, В.Є. Тарасюк та ін.), зв’язок навчання математики з життям і виробництвом (Т.М. Альошина , Г.П. Бевз, В.Г. Прочухаєв та ін.). Прикладні задачі (С.С. Вараданян, Н.П. Колмакова, Л.М. Короткова та ін.).

Аналіз психолого-педагогічних досліджень дає можливість розглядати профільну діяльність як педагогічну проблему і зробити висновок про те, що ефективність процесу навчання залежить від способу її організації. Інноваційні процеси, які відбуваються в сучасній школі, свідчать про необхідність прикладної спрямованості навчання у профільній школі. Нові вимоги суспільства, які характеризуються підвищенням уваги до особистості учня, до його саморозвитку, разом із змінами, що обумовлені впровадженням Концепції профільного навчання у старшій загальноосвітній школі, зумовлюють необхідність розроблення оновленої методичної системи прикладної спрямованості навчальної діяльності.

Таким чином, **актуальність** дослідження зумовлена:

- відмінностями у рівні навченості, успішності учнів у класах з поглибленим вивченням математики; темпі навчальної діяльності, якості виконання завдань та глибині їх осмислення; вмінні самостійно працювати, відшукувати геометричні залежності та проводити проблемно-пошукову діяльність;

- потребами старшокласників у знаннях з геометрії для повсякденного життя та практичної діяльності; потребами учнів, що мають відмінності в навчальних інтересах, мотивації навчальної діяльності;

- необхідністю розвивати творчі можливості, забезпечувати умови для розкриття індивідуальності учня з урахуванням його вікових особливостей на основі компетентнісного підходу.

Актуальність проблеми дослідження та її недостатня розробленість у методиці навчання геометрії і зумовили вибір теми дослідження: *Методика реалізації прикладної спрямованості геометрії у профільних класах.*

Мета дослідження – розробити, теоретично обґрунтувати й експериментально перевірити методичну систему прикладних задач у процесі вивчення геометрії в умовах профільної школи, яка сприятиме підвищенню якості математичної освіти.

Гіпотеза дослідження – застосування потенційних можливостей використання прикладних задач і розробка відповідних методик, що дозволить підвищити ефективність математичної підготовки учнів у порівнянні з традиційними методиками навчання.

Об'єкт дослідження – навчальна діяльність старшокласників у процесі профільного вивчення геометрії.

Предмет дослідження – методична система (цілі, зміст, форми, методи і засоби) організації навчальної діяльності старшокласників у процесі профільного вивчення геометрії.

Для досягнення мети було поставлено такі **завдання:**

1. З'ясувати стан розробленості проблеми у науково-методичній літературі та шкільній практиці;

2. Визначити психолого-педагогічні засади прикладної спрямованості навчання геометрії у профільній школі;

3. Розробити методичну систему використання прикладних задач у процесі викладання геометрії у профільній школі;

4. Експериментально перевірити ефективність розробленої методичної системи і запропонувати методичні рекомендації.

Для розв'язання поставлених завдань застосовувались такі **методи дослідження:**

теоретичні - аналіз та синтез, зокрема, системний аналіз психологічної, науково-методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження; порівняння; аналогія; систематизація та узагальнення; історичний метод, зокрема, добір, класифікація та систематизація фактичного матеріалу;

емпіричні - констатувальний, пошуковий та формувальний експерименти, методи математичної статистики, спостереження, анкетування, бесіди з учнями та вчителями; аналіз результатів письмових робіт з геометрії, документації, шо дозволили з'ясувати рівень навчальних досягнень старшокласників з геометрії.

Наукова новизна результатів дослідження полягає в тому, що:

- *визначено* психолого-педагогічні засади відбору форм, методів і засобів, які забезпечують ефективний підхід до організації профільної навчальної діяльності старшокласників;

- *розроблено* принципи побудови системи геометричних задач для розвитку вмінь навчальної діяльності старшокласників і науково обґрунтовані методичні підходи до їх реалізації;

- Практичне значення дослідження:

- розроблена методика забезпечує ефективний підхід до організації навчальної діяльності у процесі профільного вивчення геометрії, що сприяє підвищенню якості математичної освіти учнів;

- розроблена система задач ПС, що забезпечує розвиток умінь навчальної діяльності.

Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка дає змогу обґрунтовано робити висновки про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в соціумі.

РОЗДІЛ І. Загально-педагогічні основи використання прикладних задач

Важливою складовою загальноосвітньої підготовки особистості є знання з математики. Математика як шкільний предмет володіє достатнім потенціалом для формування та розвитку тих якостей, які необхідні людині. У Державному стандарті базової і повної середньої освіти, у Концепції базової математичної освіти в Україні вказано, що навчання математики на всіх ступенях повинно мати розвиваючий характер і прикладну спрямованість. Тому одне із першочергових завдань математики - забезпечення учнів такими математичними знаннями, вміннями та навичками, які для них потрібні, корисні та будуть застосуватись у побуті, у майбутній професійній діяльності, тобто йдеться про необхідність **прикладної спрямованості шкільного курсу математики.** Розглянемо генезис даного поняття.

1.1. Означення, класифікація, система вимог до прикладних задач

Уперше ***визначення*** поняття *прикладної спрямованості* шкільного курсу математики було дано В.В. Фірсовим. Її суть полягає у здійсненні цілеспрямованого змістового та методологічного зв'язків математики з практикою, що передбачає введення у шкільну математику специфічних моментів, які характерні для дослідження прикладних проблем математичними методами, два з яких - особливо важливі. По-перше, під специфічними моментами прикладної діяльності розумітимемо широке використання евристичних або правдоподібних міркувань; можливість експериментальної перевірки результату; використання неформалізованих і «розмитих» понять. По-друге, методологічний зв'язок курсу математики з практикою повинен проявлятись у розвитку в учнів тих навичок, які є за своїм характером суто математичними, але потрібні під час розв'язування прикладних задач (ПЗ). Серед них наближена прикидка результату, оцінка похибки, приведення результату до числа або розрахункової формули.

Прикладна спрямованість навчання математики - це орієнтація змісту та методів навчання на застосування математики в техніці та суміжних науках, у професійній діяльності, народному господарстві та побуті. ПС навчання математики включає в себе політехнічну спрямованість навчання, зокрема й реалізацію зв'язків з курсами фізики, хімії, географії, креслення, трудового навчання; широке застосування електронно-обчислювальної техніки та забезпечення комп'ютерної грамотності, формування математичного стилю мислення і діяльності. *Практична спрямованість навчання* математики — це спрямованість змісту і методів навчання на розв'язування задач і вправ, на формування у школярів навичок самостійної діяльності математичного характеру. Слід зауважити, що вказані поняття споріднені, проте вимагають дещо різних механізмів здійснення.

У наведених визначеннях вживаються терміни «прикладна спрямованість *курсу* математики у школі» і «прикладна спрямованість *навчання* математики у школі». Ці поняття за змістом нетотожні. Другий термін має дещо інший зміст, оскільки, серед іншого, передбачає орієнтацію методів навчання. Для ПС доцільно вживати термін «курс математики». Це зумовлено тим, що ПС цілком визначається цілями та змістом навчання, а не методами та організаційними формами навчання.

Терміни «прикладний», «практичний», «пов'язаний із життям», «політехнічний» (щодо курсу математики, навчання, задач тощо) часто використовувалися і використовуються й до нині як синоніми. Взаємозамінність вказаних термінів можна спостерігати і в розмовній практиці, і в теоретичній літературі.

Перелічимо основні *засоби* ПС математики, починаючи з найпоширеніших: прикладні задачі; приклади зв'язку теорії з практикою (походження понять, зв'язок математичних абстракцій із реальними об'єктами); геометричний експеримент, практичні та лабораторні роботи; міжпредметні зв'язки тощо. Систематичне використання вказаних засобів (за розробленими методиками), безумовно, сприятиме кращому вивченню математики.

«Серед *теоретичних концепцій* розв'язування проблеми ПС у шкільному курсі математики виділимо такі: розглядати математику, найперше, як інструмент пізнання; навчати учнів елементів математичного моделювання; формувати у них, на основі визначеного операційного складу діяльності, прийоми розумової діяльності, які необхідні для застосування теоретичних знань; виховувати математичну інтуїцію, що базується на свідомому розумінні походження та реальної семантики математичних об'єктів.»]

Аналіз робіт із питань ПС дозволив з'ясувати *зміст ключових для дослідження понять.*

Слід розрізняти такі поняття: 1) прикладна частина геометрії; 2) прикладна частина **шкільної геометрії;** 3) прикладна спрямованість **шкільного курсу геометрії.**

Прикладна частина геометрії - це мобільна в часі, змісті та обсязі частина геометрії, що умовно відокремлена і стосується розв'язування методами геометрії різноманітних проблем, які виникають поза її межами. Зокрема, у ній розглядають моделі, що описують або певною мірою відображають об'єкти, що нас оточують. [1]

Прикладна частина шкільної геометрії - це окреме відображення в шкільному курсі математики змісту та методів прикладної частини геометрії. Вона представлена у школі у вигляді узгодженої з віковими особливостями учнів методичної системи, що характеризується певним консерватизмом. Фактично, це приклади зв'язку теоретичних фактів із життям (походження з практики і застосування на практиці) та ПЗ. Природно, що ця частина геометрії відображає і зв'язки з іншими шкільними предметами.

Для з'ясування суті **прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії,** розглянемо спочатку семантичне значення його складових. «Стереометрія» традиційно трактується в усіх діючих шкільних підручниках *як розділ геометрії, де вивчають фігури у просторі.* Слово «стереометрія» складається з двох грецьких слів: *stereos* (твердий, просторовий) та *metron* (міра) або *metreo* (вимірюю), тобто, буквально це *міра простору.* Далі можна проводити міркування у двох напрямах. По-перше, слово «міра» означає *пропорційність;* слово «гармонія» походить від грецького *harmonia* - зв'язок, пропорційність і означає пропорційність частин, злиття різних компонентів у єдине ціле. По суті «міра» та «гармонія» - синоніми. Отже, термін «стереометрія» можна трактувати як гармонію **простору.** По-друге, слово «модель» походить від латинського *modulus* (міра, зразок). Тобто, стереометрію можна означити і як модель простору.

Курс (від лат. *cursus* — бігти, швидко рухатися) означає напрям руху; систематичний виклад якої-небудь науки. Прикладний - прикладений до діла, той, що має практичне значення, у свою чергу практичний - це той, що відноситься до галузі життєвого досвіду, реальних потреб. **Спрямованість** - зосередженість думок, інтересів, направлених на досягнення певної мети.

Тому **прикладна спрямованість шкільного курсу геометрії -** це орієнтація цілей, змісту та засобів навчання геометрії в напрямку набуття учнями у процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок, що використовуватимуться ними у різних сферах життя.

Прикладні задачі (ПЗ) поділяються на дві групи: ПЗ практичного характеру та ПЗ теоретичного характеру. **Прикладна задача практичного характеру** - це задача, розв'язування якої передбачає використання реального предмета (його виготовленої моделі), потребує проведення геометричного експерименту, відповідних вимірювальних робіт тощо. **Прикладна задача теоретичного характеру -** це задача, розв'язування якої не пов'язане з виконанням дій над реальним предметом або його моделлю.

Серед ПЗ є задачі на **обчислення, побудову та якісні** задачі - задачі з вимогою *пояснити, дослідити* або *обґрунтувати* певний факт, положення із можливим, необов'язковим, виконанням обчислень, побудов тощо.

Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури дозволив виділити такі вимоги до прикладних задач:

1. *ПЗ повинні мати реальний практичний зміст.* Штучні, надумані задачі створюють хибні уявлення учнів про реальні життєві проблеми. Але є винятки,

наприклад цікаві геометричні задачі, що цілком відповідають означенню ПЗ, хоча носять уявний, казковий або міфічний характер. Вони викликають інтерес в учнів. Я.І. Перельман включав їх до своїх збірників ПЗ під рубрикою «Задачі для пожвавлення занять».

2. *ПЗ повинні передбачати застосування математичних методів, зокрема методу математичного моделювання, для дієвого вирішення поставлених питань, показувати значимість набутих геометричних знань, умінь і навичок (ЗУН).* Така вимога значною мірою забезпечує мотивацію вивчення систематичного курсу стереометрії.

3. *Числові значення величин в умові ПЗ повинні бути характерними для практики,* їх непотрібно «підганяти», щоб у результаті розв'язування отримати цілочислові значення. Проте допустимі і такі ПЗ, де початкові дані вже заокруглено, щоб складні обчислення не відвертали уваги учнів

4. Під час розв'язування ПЗ потрібно використовувати *правила наближених обчислень,* а також *обчислювальні засоби.*

5. ПЗ повинні відповідати педагогічним вимогам до довільної задачі взагалі (математичний зміст такої задачі має відповідати програмі, підручнику, цілям уроку, відноситись до вказаної теми тощо).

6. *Складність ПЗ всередині математичної моделі не повинна бути вищою за складністю інших суто математичних задач з даної теми.* Проте, враховуючи, що ПЗ часто розглядають наприкінці вивчення теми, розділу, для класів фізико-математичного профілю цілком допустимо розв'язування і складніших задач.

7. *ПЗ мають відображати передові досягнення науки, техніки, виробництва,* по можливості їх зміст слід пов'язувати з місцевим матеріалом.

8. *ПЗ не повинні містити незрозумілу для учнів термінологію, відомості про вузько технічні або інші складні виробничі процеси.*

9. *Частина ПЗ може бути складена за матеріалами екскурсій, відображати особистий досвід учнів.* Ця вимога, як і ті, що виділено у наступному абзаці, є необов'язковою.

Перелічимо деякі *інші вимоги* до ПЗ, які також є важливими: *необхідність проведення вимірювань* для отримання даних, яких не вистачає; потреба у використанні довідкової літератури, таблиць тощо; надання умові ПЗ форми оповідання для підвищення інтересу учнів; наявність в умові ПЗ зв'язку з іншими дисциплінами; ознайомлення через ПЗ з професіями, що важливі для професійного самовизначення учнів тощо.

ПЗ повинні утворювати систему. Під ***системою ПЗ*** будемо розуміти таке їх поєднання і послідовність, які сприяють розвитку всіх компонентів математичної підготовки.

До системи ПЗ можна сформулювати такі ***вимоги:***

1) кожна ПЗ системи має задовольняти вимоги, поставлені до окремої ПЗ;

2) ПЗ системи мають відповідати змісту шкільного курсу стереометрії;

3) ПЗ кожної підсистеми повинні бути впорядковані за зростанням складності;

4) ПЗ системи мають давати можливість здійснювати диференційований підхід до різних типологічних груп учнів;

5) система ПЗ повинна сприяти оволодінню учнями прийомами алгоритмічної, евристичної і дослідницької діяльності.

Методика роботи з ПЗ системи будується згідно *з етапами математичного моделювання:* формалізації, розв'язування математичної задачі всередині побудованої моделі, інтерпретації. Проте це не відміняє можливості використання ПЗ, де реалізуються лише окремі етапи.

1.2. Аналіз програми і характеристика навчальних посібників з геометрії

Аналіз програми з геометрії

Ефективність навчання геометрії значною мірою визначається глибиною проникнення вчителів у зміст і основні ідеї програми з математики, умінням розглядати процес навчання з позицій наступності і перспективності.

Під час вивчення математики в 1—6 класах систематично проводиться підготовча робота до вивчення курсів планіметрії і стереометрії в наступних класах. На наочно-оперативному рівні формується уявлення про основні фігури: на площині — відрізок, пряму, промінь, паралельні прямі, перпендикуляр до прямої, кут, трикутник, прямокутник, квадрат, коло, круг; в просторі — прямокутний паралелепіпед, куб, куля, геометричні величини та їх вимірювання. Програма передбачає виконання найпростіших побудов геометричних фігур з допомогою лінійки, косинця, транспортира, циркуля. Освітня мета курсу геометрії в 7—9 класах — систематичне вивчення властивостей геометричних фігур на площині, формування просторових уявлень, розвиток логічного мислення і підготовка апарату, необхідного для вивчення суміжних дисциплін (фізики, креслення та ін.) і курсу стереометрії в старших класах.

Зміст курсу планіметрії становлять основні шість «ліній»: 1) геометричні фігури на площині та їх властивості; 2) побудови з допомогою циркуля і лінійки; 3) геометричні перетворення фігур на площині (осьова і центральна симетрії, поворот, паралельне перенесення, перетворення подібності); 4) елементи тригонометрії; 5) координати і вектори; 6) геометричні величини і їх вимірювання (довжини, величини кутів, площі, об'єми).

Вимоги до обов'язкової математичної підготовки з курсу планіметрії, згідно з програмою такі: зображати геометричні фігури, наведені в умовах теорем і задач, виділяти відомі фігури на рисунках і моделях; розв'язувати типові задачі на обчислення, доведення і побудову, спираючись на теоретичні відомості, набуті при вивченні курсу; проводити доказові міркування під час розв'язування типових задач; обчислювати значення геометричних величин (довжин, кутів, площ); застосовувати вивчені властивості і формули; виконувати основні побудови циркулем і лінійкою; розв'язувати нескладні комбіновані задачі, що зводяться до виконання основних побудов; використовувати апарат алгебри і тригонометрії при розв'язуванні геометричних задач; використовувати вектори і координати для розв'язування стандартних задач (обчислення довжин і кутів, додавання векторів і множення вектора на число).

Мета курсу стереометрії — систематичне вивчення властивостей геометричних тіл у просторі, розвиток просторових уявлень і уяви учнів, засвоєння способів обчислення важливих для практики геометричних величин і дальший розвиток логічного мислення учнів.

Вимоги до обов'язкової математичної підготовки учнів з курсу стереометрії сформульовано у програмі так: зображати на площині просторові геометричні тіла, вказані в умовах теорем і задач, виділяти відомі тіла на рисунках і моделях; розв'язувати типові задачі на обчислення і доведення, спираючись на засвоєні теоретичні відомості; проводити обґрунтовані міркування. Під час розв'язування типових задач, використовуючи теоретичні відомості, набуті учнями при вивченні планіметрії і стереометрії; обчислювати значення геометричних величин (довжин, кутів, площ і об'ємів), застосовуючи вивчені в курсах планіметрії і стереометрії формули і теореми; застосовувати апарат алгебри, початків аналізу і тригонометрії під час розв'язування геометричних задач; використовувати вектори і координати для розв'язування нескладних стандартних задач.

У багатьох вчителів виникає запитання, що мають знати учні з основ теорії на обов'язковому рівні підготовки з геометрії, чи повинні вони, зокрема, вміти відтворювати доведення теорем. Приступаючи до вивчення будь-якої теми з курсу геометрії, доцільно чітко сформулювати цілі (освітню, виховну, розвиваючу) і ознайомити учнів з вимогами до знань і умінь, яких вони повинні набути внаслідок вивчення теми. Вимоги до умінь конкретизовані в нормативних документах. Щодо знань, то вчитель сам виділяє головне в теоретичному матеріалі, а саме: означення яких понять з певної теми і зміст яких теорем треба вміти чітко формулювати, доведення яких теорем треба вміти відтворювати хоча б на першому рівні строгості (без необхідних обґрунтувань, називати послідовність основних тверджень, з яких складається доведення, основні теореми, аксіоми, що на них ґрунтується доведення). Під час вивчення наступних тем програми і в кінці вивчення курсу вимога щодо вміння відтворювати доведення вивчених теорем не є обов'язковою. Під час вивчення конкретної теми потрібно враховувати, наскільки часто схема доведення теореми чи елементи доведення використовуються при розв'язуванні задач і доведенні наступних теорем. Наприклад, доведення теореми про три перпендикуляри є зразком доведень, які проводяться при доведенні інших тверджень.

На уроці треба доводити всі теореми, передбачені програмою. Проте вимагати від всіх учнів відтворити громіздкі доведення недоцільно. Для частини учнів досить обмежитись вимогою вміти формулювати теорему і застосовувати її при розв'язуванні типових задач. Від учнів, які готуються до вступу у вузи, треба вимагати доводити вивчену теорему. Сильним учням можна запропонувати самостійно вивчити або знайти доведення деяких тверджень, керуючись вказівками вчителя.

В стереометрії не всі основні лінії курсу планіметрії розвиваються однаково. Зокрема, геометричним побудовам за допомогою циркуля і лінійки приділяється менше уваги в силу специфіки курсу і обмеженості в часі. Проте так званим уявним побудовам треба приділяти в курсі стереометрії належну увагу. З сильними учнями на гурткових заняттях можна розглянути задачі на побудову перерізів многогранників методом слідів і методом внутрішнього проектування. Разом з тим треба навчати всіх учнів зображати просторові фігури на площині, спираючись на властивості паралельної проекції. З усіх видів геометричних перетворень в стереометрії передбачено вивчення лише симетрій відносно точки і площини і паралельного перенесення в просторі.

Основний зміст курсу стереометрії складають чотири «лінії»: 1) просторові геометричні фігури та їх властивості; 2) геометричні перетворення; 3) координати і вектори в просторі; 4) геометричні величини.

У першій темі курсу, що є вступом до стереометрії, доцільно провести бесіду про логічну будову геометрії і аксіоматичний метод в математиці. На цей час учні вже мають на прикладі планіметрії зразок дедуктивної побудови теорії.

При вивченні паралельності і перпендикулярності прямих і площин, координат і векторів у просторі розглядаються окремі питання вимірювання геометричних величин: відстаней, кутів між прямими, прямою і площиною, двогранних кутів, кутів між векторами. Ці питання будуть широко використовуватися при розв'язуванні задач в наступних темах, зокрема при вивченні властивостей многогранників і тіл обертання.

Вивчення паралельності і перпендикулярності прямих і площин у просторі дає можливість систематично використовувати аналогії із спорідненими поняттями планіметрії. Це полегшує засвоєння стереометрії, сприяє запам'ятовуванню головного у навчальному матеріалі, дає змогу природно організовувати поточне повторення.

У темі «Декартові координати і вектори у просторі» є не менші можливості для використання аналогій з відповідним матеріалом курсу планіметрії і здійснення міжпредметних зв'язків з фізикою, загальнотехнічними і спеціальними дисциплінами. Вивчаючи тему «Многогранники», особливу увагу треба приділити означенню і класифікації різних видів многогранників, їх зображенню, вимірюванню і обчисленню геометричних величин, пов'язаних з многогранниками (площ перерізів, бічних і повних поверхонь, кутових величин). Система задач при цьому повинна включати задачі, пов'язані з майбутньою професією учнів.

У зв'язку з вивченням тем «Координати і вектори», «Рухи» доцільно використати аналогії на площині, що сприятиме не лише свідомому засвоєнню нового навчального матеріалу, а й повторенню курсу планіметрії. Розглядаючи геометричні тіла і поверхні, яким властива симетрія, доцільно ілюструвати цю властивість на деталях і конструкціях машин і механізмів.

Темою «Тіла обертання» завершується вивчення властивостей геометричних фігур. Тут передбачено ознайомлення учнів з поняттям про тіло та його поверхню.

Останні дві теми курсу присвячені об'ємам многогранників, тіл обертання і обчисленню площ поверхонь тіл.

Зміст навчального матеріалу всіх тем курсу стереометрії сприяє реалізації принципу політехнізму, прикладної спрямованості, встановленню зв'язків з суміжними загальноосвітніми, загально технічними і спеціальними дисциплінами, виробничим навчанням учнів.

Відображення ідеї прикладної спрямованості стереометрії у збірниках задач, посібниках, підручниках та аналіз прикладних задач

Проведемо в хронологічному порядку огляд літератури, що стосується питання ПС курсу стереометрії в школі з точки зору наявності прикладів зв'язків теорії з практикою, прикладних задач.

У 1830 р. вийшла книга французького геометра і політика барона К. Дюпеня «Геометрия искусств, ремесел и изящных художеств», у якій пов'язуються основні поняття геометрії з їх реальними образами, розглядаються застосування теорії на практиці. У роботі «Практические упражнения в геометрии» (автори П. Гур'єв, А. Дмитрієв) надрукованій у 1844 р., висловлено умову свідомого засвоєння геометрії: для того, щоб геометрія була справою розуму, а не пам'яті, непотрібно обмежуватися вивченням одних лише загальних істин без усякого застосування їх на практиці.

У1870 р. з'явилися книги А. Дістерверга: «Комментарии к элементарной геометрии» і «Элементарная геометрия». У першій роботі аналізується освітня роль геометрії, розглядаються шляхи опанування учнями геометричними знаннями, підкреслюється, що найгірша форма викладання - «скучная».

XX століття. Більшість посібників, які варті уваги з огляду на проблему ПС, написані у першій половині цього століття, а збірники задач - переважно датовані другою половиною. Переважна частина робіт, які використовувалися як підручники, є «робочими книгами» (наприклад, М.Ф. Берга) та «робочими зошитами з геометрії» (наприклад, П.А. Карасєва), що були поширені у період комплексів. Інші праці побудовано так: спочатку повідомляється теоретичний матеріал у спрощеному вигляді (часто пов'язаний із життєвими фактами), далі розглядаються задачі, зокрема і прикладні. Це «Математика» І.В. Андрущенка, «Элементарная математика» Е. Бореля, «Краткий курс геометрии» З. Вуліха, «Курс математики для 7-річної школи» М. Голубенка, «Элементарная геометрия и собрание геометрических задач и упражнений для средних учебных заведений» А.М. Горста та ін.

У роботі В. Кемпбеля «Наглядная геометрия», що з'явилась в 1914 р., підкреслюється, що така геометрія «научает оценке красоты и правильности форм. Она отыскивает, извлекает и усваивает методы совершенных геометрических выводов из всякого источника в природе и из всякого применения его в жизни, она является наилучшим побудителем изобретательности». Оригінальною за методом викладу матеріалу є «Творческая геометрия» Г. Шаррельмана, яка видана в 1924 р. Автор пориває з традиційною на той час науковою системою навчання геометрії і вважає, що геометричні знання повинні набуватися лише через аналіз та оцінювання життєвих ситуацій. У 1925 р. надруковано книгу Г. Кемпінського «Жизненная геометрия», у якій німецький педагог майстерно розв'язує питання про життєве значення геометрії, про необхідність привчати учнів бачити і розуміти геометричні форми та їх зміст, доцільність, естетичність та практичне застосування.

У цей період було випущено велику кількість збірників геометричних задач. Практично в кожному з них можна знайти хоча б декілька прикладних.

Окремі збірники містили ПЗ з усіх або з окремих тем стереометрії. Це збірник задач і вправ Т.М. Альошиної, К.П. Арженнікова; І.П. Богуславського; Д. Гіка та А. Муромцева; Б.Г. Гончаренка, А.І. Гуткіна, Л.М. Лоповка та ін.

До інших збірників входили задачі з окремих галузей: збірник задач на базі техніки М.С. Непляха, задачі із сільськогосподарської практики В.А. Петрова, збірник виробничих задач Л.З. Ревіса та ін.

Цікаві прикладні або історичні задачі були у книгах Я.І. Перельмана «Новый задачник по геометрии», «Практические занятия по геометрии», «Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома», «Жива геометрія. Теорія і завдання», у збірниках задач Г.Н. Попова та Г. Штейнгауза та ін.

Щодо шкільних підручників, то у підручнику Г.П. Бевза загальної кількості стереометричних задач - 7 %. Така сама ситуація і з підручником В.М. Клопського, що використовувався у 80-х роках. ПЗ тут було 6 %. У підручнику А.П. Кисельова, який був поширеним у дореволюційній і радянській школі - 7 % таких задач. У пробному підручнику В.О. Тадеєва (крім історичних задач у тексті теорії) таких задач приблизно 2%. У підручнику геометрії О.М. Афанасьєвої - приблизно 13 % від загальної кількості, причому в ньому також містяться контрольні запитання прикладного характеру, яких теж 13 % від усієї кількості. Це найбільший показник кількості ПЗ.

За висновками дослідників, ПЗ має бути орієнтовно 20-30 % від загальної кількості задач.

Поділ стереометрії на теоретичну (абстрактну) та прикладну продукує наявність відповідних частин у шкільному курсі стереометрії. Теоретична частина стереометрії займається розв'язуванням абстрактних задач, а прикладна - прикладних. Тому логічно говорити про відповідний поділ задач і у курсі стереометрії в школі на *абстрактні* та *прикладні,* серед яких вирізнятимемо *навчальні прикладні задачі.*

1.3. Психолого-педагогічні засади прикладної спрямованості навчання геометрії у профільній школі

Важливим для визначення психолого-педагогічних особливостей реалізації ПС є врахування *особистісно зумовленого* характеру засвоєння нового. Це означає, що якість засвоєння матеріалу залежить від того, як учень ставиться до учіння, до навчального матеріалу, як сам процес засвоєння впливає на формування мотивів його діяльності, цілей навчання тощо.

Систематичний курс стереометрії за чинною програмою вивчається в старшій школі. За віковою періодизацією психологів (зокрема В.А. Крутецького), старший шкільний вік - це вік ранньої юності. Він охоплює період розвитку приблизно від 15 до 18 років. Для кожного віку характерний певний провідний вид діяльності. У старшому шкільному віці домінує учіння, проте суттєво змінюється його *мотивація* - з'являється *особистісний смисл* учіння. Пізнавальні інтереси старшокласників, як свідчать дослідження В.А. Крутецького, М.С. Лукіна, стають вибірковішими, набувають активного та сталого характеру. Широке коло пізнавальних інтересів, зростання свідомого ставлення до навчальної діяльності стимулює у них розвиток довільної уваги. Спостереження стає цілеспрямованішим і систематичнішим, збільшується роль *абстрактного,* словесно-логічного запам'ятовування. Розумова діяльність учнів старших класів відрізняється від підліткової вищим рівнем узагальнення та абстракції, здатністю до *пізнання закономірностей навколишнього світу.* У старшокласників виникає інтерес і потреба у *причинно-наслідкових* поясненнях явищ, розвивається вміння аргументувати судження, доводити істинність або хибність певних положень, з'являється критичність мислення.

Перелічені якості, що властиві юнацькому віку, вказують на необхідність здійснення ПС навчальних предметів, зокрема і стереометрії. *По-перше,* вивчення стереометрії на основі ПС має структуру і характер пізнавальної діяльності. Старшокласники мають вищий порівняно з підлітками рівень абстрактного мислення, а тому здатні на узагальнене та опосередковане пізнання світу в процесі практичної і теоретичної діяльності, що здійснюється через дії та операції мислення. Концептуальна модель реалізації ПС шкільного курсу стереометрії передбачає неодноразове використання, крім операцій *аналізу* та *синтезу,* інших, менш поширених у шкільній практиці, операцій, таких як *абстрагування* (для всіх НМТ на ступенях СММ та ППМ), *узагальнення* (на етапі вивчення математичної моделі переважної кількості НМТ і, особливо, на всіх етапах вивчення НМТ про геометричні тіла та їх комбінації) та *порівняння* (на всіх ступенях НМТ, пов'язаних із вивченням перетворень, координат і векторів у просторі, різних видів многогранників, тіл обертання).

По-друге, в результаті ПС шкільної стереометрії отримані ЗУН застосовуються у різних сферах життя (навчанні, майбутній професії, побуті тощо). А відомо, що важливими ознаками юнацького віку є потреба у самореалізації та розвиток власного «Я», вибір професії тощо.

Інтерес до навчального предмета в юнацькому віці визначається не лише цікавим викладом, а ще й тим, якою мірою вчитель пов'язує цей предмет із життям. Потрібно переконати школяра в *практичному значенні предмета.* Як свідчать психологи, свої нові розумові вміння старшокласники застосовують вибірково і лише у тих сферах діяльності, що для них значимі та цікаві. Для старшокласників характерним є виникнення *мотиваційного бар'єру,* що з'являється тоді, коли висловлювані твердження не зачіпають їх власних потреб, не спонукають до дії, пізнання нового. ПС здатна усунути такі перешкоди на шляху вивчення шкільного предмета. Цю думку підтверджує анкетування, проведене серед одинадцятикласників шкіл м. Полонного Хмельницької області, з метою з'ясування ставлення учнів до предметів, які вони вивчають, зокрема до стереометрії.

1.4. Функції прикладних задач у процесі навчання профільної школи

Прикладні задачі мають такі *функції* у процесі навчання: *навчаючу* (формування системи математичних знань, умінь і навичок), *виховну* (формування світогляду, пізнавального інтересу і навичок навчальної праці), *розвиваючу* (розвиток мислення, формування прийомів ефективної розумової діяльності), *контролюючу* (встановлення рівня навченості, здатності до самостійного вивчення математики тощо). Проте реалізацію останньої функції ускладнено майже повною відсутністю таких задач під час діагностики навчальних досягнень учнів.

Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури по проблемі дослідження дозволив до перелічених функцій задач додати: гуманістичну, інформативну, евристичну, естетичну, прогностичну, практичну, коригуючу, інтегруючу.

Гуманістична функція полягає в тому, що ПЗ та процес їх розв'язування мають для учня особистісний сенс, оскільки вони дібрані відповідно до профілю, обраного учнем. Кожна ПЗ (її умова, розв'язування та розв'язок) здійснює *інформативну* функцію. Зокрема, учень ознайомлюється з різноманітними галузями прикладання математики, з історією виникнення математичних ідей тощо. Розв'язуючи ПЗ, учень буде обов'язково використовувати та засвоювати різні евристики, евристичні прийоми (робота з опорними задачами, розгляд граничних випадків, введення допоміжної змінної тощо), застосовувати їх у конкретних ситуаціях, що говорить про *евристичну* функцію ПЗ. Вона реалізується також через використання різних методів пізнання: аналогій, узагальнень, конкретизації тощо. *Естетична* функція ПЗ реалізується під час розв'язування більшості ПЗ. *Практична* функції ПЗ зумовлена сутністю самого поняття прикладної задачі. Незаперечною є також можливість здійснення прикладними задачами *прогностичної та коригуючої* функцій. Зокрема, аналіз та розв'язування ПЗ дає змогу правильно оцінити інформацію, відкоригувати її щодо конкретних умов і дозволить вибрати оптимальний спосіб розв'язування. *Інтегруюча* функція ПЗ проявляється, зокрема, під час розв'язування ПЗ, у яких реалізуються міжпредметні зв'язки.

Через багатовекторність їх функцій, ПЗ формують та закріплюють здатність учнів використовувати здобуті на уроках стереометрії знання, уміння та навички. Тобто ПЗ є важливим засобом ПС шкільного курсу стереометрії.

Висновки до Розділу І

Створення технології, яка визначає провідний задум реалізації ПС шкільної стереометрії, зумовлено необхідністю ефективного розв'язування її у прикладному аспекті. Програмою з математики визначаються рівень і обсяг умінь і навичок, обов'язкових для учнів, та перелік і обсяг матеріалу, обов'язкового для вивчення у школі (відповідно до змістових ліній). У ній також пропонують можливий розподіл матеріалу по класах і орієнтовні вказівки щодо кількості годин на вивчення теми. У підручниках з математики викладено основи знань і способів діяльності відповідно до цілей навчання, визначених програмою. Ні в програмі, ні в підручнику чітко не розкривають технологію організації навчання для досягнення вказаних цілей, зокрема і щодо необхідності ПС навчання.

Виокремимо найважливіші, *основні ідеї реалізації ПС шкільного курсу стереометрії:*

1) посилити мотивацію вивчення курсу стереометрії;

2) під час вивчення курсу застосовувати метод математичного моделювання; звертати увагу на використання правдоподібних міркувань під час побудови математичних моделей;

3) показувати важливість прикладної частини шкільної стереометрії;

4) виявляти та використовувати прикладний потенціал абстрактної складової шкільної стереометрії, найперше для розвитку креативного та логічного мислення, формування вміння говорити чітко, послідовно, доказово тощо;

5) розвивати ті навички, які є за своїм характером суто математичними, але потрібні під час розв'язування ПЗ (наближена прикидка результату, приведення результату до числа або розрахункової формули тощо);

6) використовувати у навчанні геометричний експеримент;

7) формувати в учнів під час вивчення курсу стереометрії якості, притаманні професійній діяльності.

Технологія реалізації ПС шкільного курсу стереометрії - це теоретично сформовані у систему ідеї з реалізації ПС стереометрії. Основними *ланками* такої технології є цілі вивчення курсу, які орієнтовані у прикладному напрямі; планування діяльності з вивчення курсу стереометрії; структурований зміст курсу; засоби наочності; контроль діяльності. *Сприяє* реалізації такої технології використання інформаційно-комунікаційних технологій. *Стрижнем* технології є включення у процес навчання діяльності, що пов'язана з опануванням учнями та застосуванням ними методу математичного моделювання.

РОЗДІЛ ІІ. Методика реалізації прикладної спрямованості геометрії у профільній школі

2.1. Аксіоми стереометрії. Паралельність і перпендикулярність прямих і площин

«За концепцією ПС, вивчення навчально-методичних теорій (НМТ) починається із ступеня емпіричних основ (ЕО). Цьому доцільно присвятити окремий урок (найперше, тому, що це набуття учнями важливого досвіду вивчення геометричного матеріалу за допомогою методу математичного моделювання). Прикладний зміст вказаного ступеня має привести до створення математичної моделі. У даному випадку - точки, прямої та площини. Обсяг даного ступеня НМТ невеликий, оскільки відсутня необхідна кількість прикладних фактів, понять, задач, які одночасно були б достатньо доступні та потрібні для учнів.» [7]

Пропонуємо таке наповнення ступеня. Повідомити теоретичний матеріал радимо у вигляді бесіди з учнями. Так, учитель розповідає: «У розмовній практиці ми іноді вживаємо вислови точка зору, больова точка, точка опори, рушити з мертвої точки, точка відліку, критична точка, влучити в точку, дійти до точки тощо. Можливо, ви продовжите цей ряд? Що означає кожен із цих висловів? Що спільного вони мають?».

Але потрібно звернути увагу учнів на суть висловів: кожного разу йдеться про те, що не має протяжності. Учитель продовжує: «Існує багато задач у практиці, коли необхідно визначити заходження тіла у просторі. Тоді розміри тіла не беруть до уваги. Якщо ми шукаємо певний географічний об'єкт, наприклад місто чи селище, за картою, то також тут не важливі його реальні розміри. Тобто часто доводиться абстрагуватися від вимірів предмета. Так приходять до не означуваного, ідеального поняття - геометричної точки. . Математичні моделі з'являються як спеціальний спосіб наближеного опису певного об'єкта, явища, будь-якої проблеми. Зрозуміло, що реально їх не існує.

Тоді чому їх створюють? Які функції математичних моделей?» У відповіді на поставлене запитання бажано відобразити, що математична модель реальних явищ дає змогу дослідити її математичними засобами та, відповідно, розв'язати певну ПЗ.

За аналогічною схемою працюємо далі. «Тепер допоможіть утворити іншу математичну модель - геометричну пряму, про яку ви також знаєте з курсу планіметрії, - продовжує вчитель. - Усім зрозумілі вислови: пряма мова, пряма дорога, прямий спадкоємець або родич, пряме сполучення, прямі вибори, пряма вказівка, пряма протилежність, пряма користь тощо (продовжіть ряд). Тут ми вживаємо прикметник «прямий», але у якому значенні? Мабуть, йдеться про те, що відбувається в одному напрямі, не розгалужується, має лише один вимір. Згадайте, як виглядають плани будинків на схемі. З ними, можливо, матимете справу або у професійній діяльності, або коли будуватимете, переплановуватимете будинок чи квартиру. Стіни зображають у вигляді прямих ліній, хоча вони, звичайно, мають певну товщину. Але на схемі це не беруть до уваги, бо найперше цікавляться розміщенням кімнат, вікон тощо. Під час проведення комунікацій, наприклад електричного кабелю в будинках, теж зображають їх, не звертаючи уваги на товщину кабелю. Можна навести ще чимало прикладів (наведіть), коли абстрагуються від матеріалу, його якості та вимірів, крім одного - довжини. Але не забудьте, що для математичної моделі геометричної прямої суттєвим є те, що вона нескінченна та не є хвилястою, закрученою тощо. Наближене уявлення про частину прямої може дати світловий промінь, туго натягнута струна, дріт тощо».

Далі переходимо до ще одного не означуваного поняття. «Спочатку згадаємо вислови: наші інтереси лежать в одній площині, котитися по похилій площині, розглянути питання в іншій площині (продовжіть вислови). Ви, мабуть, здогадалися, що йтиметься про створення третьої математичної моделі - площини. Уявити її (точніше, частину площини) допоможе добре відполірована дошка, гладінь озера у тиху погоду чи віконне скло, дзеркало тощо. Які реальні задачі приводять до необхідності створення цього ідеального поняття, вивчення його властивостей? Наприклад, задачі будівельника (стіни кімнати повинні бути паралельні між собою та мати гладку поверхню, міжповерхові перекриття - теж), задачі закрійника тощо.

На наступних уроках потрібно ознайомити учнів з матеріалом, пов'язаним з властивостями основних понять - аксіомами та їх наслідками. Обов'язково слід зауважити, що при всій умовності систем аксіом стереометрія - сукупність тверджень із логічними зв'язками - не залежить від яких-небудь умов. Так, визначні пам'ятки міста із системою вулиць і сполучень між ними існують незалежно від вибору маршруту туристом. Але турист може обрати такий маршрут і стартовий пункт, що відвідає всі визначні пам'ятки. Так і ми, коли вибрали вихідний пункт - систему аксіом, відправляємося через логічні доведення, як по вулицях, на ознайомлення з визначними пам'ятками стереометрії.

Далі слід вивчити матеріал, пов'язаний із розміщенням і властивостями прямих і площин, та перейти до вивчення наступного ступеня. Зміст його повністю наведено в шкільних підручниках і обумовлено програмою. Методика його вивчення є традиційною, вона детально розроблена та міститься у відповідних посібниках. Але протягом вивчення абстрактного стереометричного матеріалу доцільно не забувати, що перпендикулярність і паралельність прямих і площин - основа будівельної геометрії; кути між прямими і площинами постійно доводиться застосовувати у практиці. Про важливість понять, що вивчаються, говорять такі терміни практики, як кут нахилу площини орбіти супутника до площини екватора, кут нахилу променя світла на відбиваючу поверхню, кут нахилу гарматного ствола під час пострілу, кут нахилу скату даху, довгота та широта місця на Землі тощо.

Для розв'язування можемо запропонувати такі прикладні задачі.

Зауваження. Нумерація задач містить дві позиції: перша відображає порядковий номер НМТ, а друга - порядковий номер задачі у цій НМТ.

Аксіоми стереометрії та наслідки з аксіом

1.1. Указати три виміри аркуша паперу. Який вимір найменший порівняно з іншими?

Відповідь. Ширина, висота й товщина. Найменший вимір - товщина.

1.2. Чому для розмітки котловану під невелику будівлю користуються натягнутим шнуром?

Вказівка. Перетином двох площин є пряма.

1.3. Штативи у багатьох інструментів (фотоапарата, нівеліра, теодоліта та ін.) виготовлено у вигляді триноги. Чому підставка з такою кількістю ніжок стоїть стійко?

Вказівка. Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить лише одна площина.

1.4. Тесля виявляє недоліки в обробці дерев'яного бруска або дошки, дивлячись уздовж обробленої поверхні. На чому ґрунтується така перевірка?

Вказівка. Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить площині.

1.5. Під час формування цеглини (або будівельного блоку) по паралельних краях форми, наповненої відповідною масою, ковзає прямолінійний брусок. Чому при цьому грань цеглини (блоку), що розрівнюється, стає плоскою?

Вказівка. Дві паралельні прямі (краї форми) визначають єдину площину.

1.6. Чому стілець з трьома ніжками, розміщеними по колу, завжди стоїть стійко на підлозі, а з чотирма - не завжди стійко?

Вказівка. Три точки, що не лежать на одній прямій, визначають площину і тільки одну.

1.7. Чому мотоцикл з коляскою стоїть на дорозі стійко, а для мотоцикла без коляски потрібна додаткова підпора?

Вказівка. Три точки, що не лежать на одній прямій, визначають площину і тільки одну.

1.8.Чому незамкнені двері відчиняються, а замкнені - нерухомі?

Вказівка. Через пряму і точку поза нею можна провести площину і лише одну.

1.9. Столяр перевіряє, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, прикріпивши до кінців ніжок навхрест дві нитки. На чому ґрунтується така перевірка?

Вказівка. Дві прямі, що перетинаються, визначають площину і тільки одну.

Паралельність у просторі

2.11. Чому шухляди шаф або письмових столів іноді рухаються ривками, із зупинками?

Вказівка. Відрізки паралельних прямих, які містяться між дома іншими паралельними прямими, рівні.

2.12. Чому вставлений у насос поршень, як правило, рухається без перешкод, плавно?

Вказівка. Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома іншими паралельними прямими, рівні.

2.13. Треба перевірити, чи паралельні одна одній стіни коридору. Чи можна це зробити за допомогою вимірювальної стрічки, чи достатньо довгої палиці?

Розв'язання

Припустимо, що стіни у коридорі вертикальні. Виберемо у нижньому краю кожної з двох стін по одній точці A та B й відкладемо від цих точок уздовж нижнього краю стін відрізки BD та AC однакової довжини. Тоді якщо AB = CD, то стіни паралельні.

2.14. Спільна дотична двох конічних катків дорівнює 100 мм і утворює з віссю обертання кожного конуса кути відповідно 30? і 60?. Обчислити радіуси основ конічних катків.

Відповідь. 50 мм; ≈ 87 мм.

Перпендикулярність у просторі

1.15. Круглий стіл накрито квадратною скатертиною з тонкої тканини (центр квадрата збігається з центром круга). На скільки кути скатертини ближче до підлоги, ніж середини її сторін? Прийняти сторону квадрата (скатертини) за *a*.

Відповідь. $\frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \approx 0{,}207a$.

1.16. Перпендикулярність стіни перевіряють за допомогою виска (шнур з тягарцем). Якщо він щільно прилягає до її поверхні, вважають, що вертикальність витримано. Чи правильно це? На чому ґрунтується такий спосіб перевірки?

Вказівка. Якщо площина проходить через пряму, яка перпендикулярна іншій площині, то ці площини перпендикулярні.

1.17. Якщо вісь розміщено горизонтально, то у якій площині буде обертатися колесо? Чому?

Відповідь. У площині, перпендикулярній до осі колеса.

1.18. Треба перевірити, чи перпендикулярні одна одній сусідні стіни у кімнаті. Як використати для цього теорему Піфагора?

Розв'язання

Припустимо, що стіни у кімнаті вертикальні, а підлога горизонтальна. По нижньому краю стін від точки, яка лежить на лінії їх перетину, відкладемо відрізки AB та AC довжиною 3 та 4 довільних одиниці (наприклад, дециметрів). Відрізки будуть перпендикулярні до лінії перетину площин стін. Тоді кут, який утворили побудовані відрізки, - це лінійний кут двогранного кута між стінами і він буде прямим тоді і тільки тоді, коли довжина відрізка BC дорівнюватиме 5 одиницям.

1.19. Щоб перевірити вертикальність стовпа, спостереження ведуть з двох пунктів, які не лежать на одній прямій з основою стовпа. Обґрунтувати такий спосіб перевірки.

Вказівка. Скористатись ознакою перпендикулярності прямої та площини.

1.20. На недоступному узвишші встановлено високий стовп. Як за допомогою виска перевірити його вертикальність?

Розв'язання

Достатньо перевірити, що стовп знаходиться в одній площині з деякою вертикальною лінією, а також в одній площині (іншій) з деякою іншою вертикальною лінією. Якщо розмістити висок перед собою так, щоб верхні кінці виска та стовпа опинилися на одній лінії з оком, то лінії виска та стовпа повинні збігатися. Обґрунтуванням цього способу перевірки є, по-перше, те, що вертикальний стоп повинен лежати в одній площині з довільною вертикальною прямою. По-друге, якщо дві паралельні прямі лежать у двох площинах, які перетинаються, то ці прямі паралельні лінії перетину площин.

1.21.Горизонтальний промінь, паралельний площині одного з двох вертикальних плоских дзеркал, відбивається від другого дзеркала по прямій, яка перпендикулярна до площини першого дзеркала. Знайти кут між дзеркалами.

Вказівка. Скористайтеся законами відбивання світла.

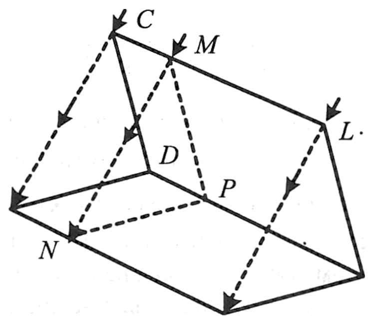
Відповідь. 45°.

1.22. Горизонтальний промінь відбивається від двох вертикальних плоских дзеркал. Причому спочатку промінь є паралельним площині одного дзеркала, а після двох відбивань - площині другого дзеркала. Знайти кут між дзеркалами.

Відповідь. 60°.

1.23. У безвітряну погоду падає «косий» дощ. Як за допомогою листа фанери визначити кут, який утворює траєкторія падаючих крапель з горизонтальною площиною? Зробити відповідний малюнок.

Вказівка. Треба розмістити лист фанери так, щоб його площина була приблизно перпендикулярна до площини, яку визначають траєкторія руху краплини та її проекція на горизонтальну площину.



Тоді на горизонтальній площині отримаємо прямокутник ADFE, на який дощ не капає. Далі слід виміряти PM і PN та знайти тангенс кута між ними.

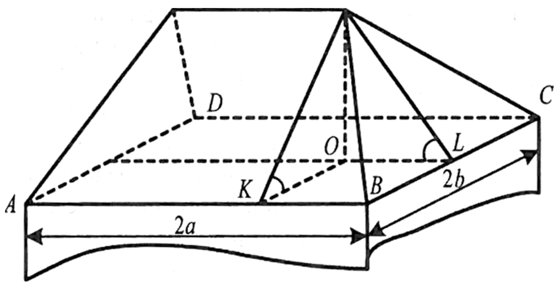
Комбінації базових понять

1.24. Запроектовано чотирисхилий дах. Довести, що проекції ребер даху – це бісектриси кутів прямокутника, що є загальним контуром плану даху.

1.25.Для будинку прямокутної форми треба зробити чотирисхилий дах.

Розміри даху такі:

$AB = 2a$ м, $BC = 2b$ м. Усі схили даху утворюють з горизонтом однаковим кут а. Знайти, скільки квадратних метрів заліза потрібно для даху, коли на шви й відходи передбачається витрата заліза, що становить k % від площі даху.



Відповідь. $\frac{4ab}{\cos\alpha}\left(1+\frac{k}{100}\right)$ м^2.

1.26. Зобразити геометричні образи кута між прямими, кута між прямою та площиною, кута між двома площинами, використовуючи як модель шестигранний олівець і розкриту книжку.

Показати на зображенні даху (задача 1.25.), що має дві площини симетрії, напрями, по яких буде стікати дощова вода.

2.2. Координати і вектори у просторі

Повідомлення вчителя може бути таким. «Поява багатьох математичних понять пов'язана із задачею вимірювання таких величин, як довжина, площа, маса, робота, температура тощо, коли отримують число, що повно характеризує величину, яку вимірюють. Такі величини є скалярними. Значення скалярних величин можна розмістити на координатній прямій, шкалі. Слова «скаляр» і «шкала» мають однакове походження. Саме поняття «шкала» виникло із задачі вимірювання скалярних величин.

Поняття «вектор» охоплює ширший клас величин, до якого належать сила, швидкість, переміщення тощо. Звичайно, ці величини теж можна якось виміряти, але для повного їх опису однієї числової характеристики недостатньо. Для таких величин вводять поняття вектор. Вектор є математичною моделлю фізичних, хімічних та інших величин, що характеризуються невід'ємним числовим значенням (модулем) і напрямом. Ви вже ознайомилися з цим поняттям, вивчаючи вектори на площині. Значна частина відомої вам інформації поширюється і на вектори у просторі».

Далі можна продовжити бесіду та нагадати учням походження самого терміна. «Термін «вектор» походить від латинського vector - «той, що везе; той, що несе». Поняття вектора з'явилося на початку XIX ст. Основи векторного числення заклали ірландський математик В. Гамільтон і німецький математик Г. Ґрасман. Сучасного вигляду поняття набуло наприкінці XIX ст., зокрема у працях англійського фізика О. Хевісайда. Вектори використовують у класичній механіці, у теорії відносності, квантовій фізиці, математичній економіці та багатьох інших розділах природознавства, у різних галузях математики».

До матеріалів цього розділу треба віднести поняття координати та системи координат. Система координат дає змогу ставити у відповідність векторам площини чи простору набори чисел. А це відкриває нові можливості для використання обчислень під час розв'язування задач. Певною мірою система координат - це самостійна математична модель, за допомогою якої розв'язуються прикладні задачі, вивчаються інші моделі. З іншого боку, її можна вважати і допоміжним поняттям для вивчення математичної моделі вектора. Ми віднесли її до першого ступеня даної НМТ.

Далі розповідь учителя може бути такою. «Сьогодні ми ознайомимося ще з однією важливою математичною моделлю - системою координат. Звичайно, у молодших класах ви вивчали її. Нагадуємо, що термін «координати» (від лат. *co*, з, разом та *ordinatus*, упорядкований) увів у математику Г. Лейбніц у 1692 р. Своєрідною системою координат є нумерація рядів і місць у залі театру, позначення клітинок на шахівниці. Це система координат на площині. Поміркуємо над таким. Щоб знайти певний пункт на земній поверхні або на якій-небудь площині, достатньо знати дві його координати. Але щоб визначити місце об'єкта у просторі, цього замало. Як ви думаєте, чому?»

Усі предмети, які нас оточують, можуть бути виміряні за трьома напрямами. Зауважимо, що їх по-різному називають. Наприклад, для будинку це висота, ширина та довжина; для шухляди в шафі - висота, ширина і глибина; для книжки - довжина, ширина і товщина тощо. Проте завжди йдеться про одні і ті самі напрями. Під час побудови системи координат у просторі та наступному визначенні координат об'єктів ми відволікаємося від їх матеріальної природи, зважаємо лише на відповідні математичні характеристики.

Де використовують у реальному житті знання про координати? Їх використовують астрономи, пілоти, фізики, маркшейдери, оператори, які керують різноманітними системами механізмів, за допомогою яких у потрібне місце, наприклад цеху, доставляється певний об'єкт (або проводяться технічні маніпуляції, зокрема зварювання), лікарі, які проводять дистанційні операції, робітники, які працюють на верстатах або підйомних кранах.

Пропонуємо типові прикладні задачі до другої НМТ «Координати і вектори у просторі».

2.1. Пригадати байку І.А. Крилова «Лебідь, рак і щука» та зобразити напрямленими відрізками сили, які прикладені до возу з поклажею. Як математично записати подію, про яку йдеться у байці: «а віз і нині там»?

2.2. Ракета рухається в космічному просторі. Які векторні величини характеризують її політ? Зобразити ці вектори.

2.3. Вантаж спускають на парашуті з висоти 120 м із постійною вертикальною швидкістю 3 м/с. Вітер, який дме горизонтально зі швидкістю 2 м/с, відносить його в бік. Який шлях пролітає вантаж? Дати відповідь із точністю до 1 м.

2.4. Санки тягнуть по снігу за мотузку. Які сили діють на санки? Розкласти силу натягу мотузки на горизонтальну та вертикальну складові.

2.5. Вантаж рівномірно переміщується по горизонтальній площині за допомогою двох тракторів. Напрям руху одного з них утворює кут приблизно 20°, а другого – 10° з напрямом руху вантажу. Сила натягу кожного 50 кН. Яку роботу треба затратити для переміщення вантажу на 200 м? (Тертям знехтувати.)

2.6. Санки з пасажиром рухаються з гірки. Вага розкладається на дві складові: одна напрямлена перпендикулярно до поверхні (це тиск на неї), друга - вздовж поверхні вниз (це сила, «що скочує»). Виконати малюнок, де зобразити розкладання вектора на складові.

2.7. Вага казанка з юшкою, який висить на тринозі над вогнищем, розкладається на три складові. Як вони напрямлені? Виконати малюнок.

2.8. Стійкість мостів, куполів і склепінь будівель та інших конструкцій базується на розкладанні сили тяжіння на складові, що проходять через точки опори. Навести приклад і виконати відповідний малюнок.

2.9. У банку у сховищі цінних речей рівними паралельними до стіни рядами стоять конструкції-стелажі з шухлядами однакових розмірів для зберігання цінностей і документів. До кожної шухляди підведена сигналізацію, сигнал якої посилається на центральний пульт управління. Запропонувати систему нумерації шухляд. Пояснити доцільність. Виконати малюнок.

Розв'язати задачу для випадку, коли банк побудував під існуючим сховищем ще одне у підвальному приміщенні.

2.3. Перетворення у просторі

Одним із найважливіших понять даної теми є поняття симетрії. Розповідь учителя може бути такою. «Із симетрією людина зустрічається скрізь - у природі, техніці, мистецтві, науці. Симетрію у ритмічній побудові віршів і музичної фрази, симетрію орнаментів, атомної структури молекул і кристалів. Принципи симетрії лежать в основі теорії відносності, квантової механіки, фізики твердого тіла.

Симетрія грецькою мовою означає сумірність, пропорційність, однаковість у розміщенні частин. Математично строге уявлення про симетрію сформувалось у XIX ст. Нині симетрію означають так: симетричним називають об'єкт, який можна певним чином змінювати, отримуючи в результаті те, з чого почали.

Урахування закону симетрії допомагає людині зводити міцні споруди, конструювати рухливі машини. Недотримання вимог, які випливають із цього закону, призводило (і призводить нині) до того, що великі, але неправильно спроектовані споруди бувають нестійкими. Звернемо увагу нате, що більшість предметів побуту мають «симетрію листка» (стілець, крісло диван) або ж радіально-променеву симетрію (круглий стіл, табуретка, настільна та висяча лампи). їх форми добре узгоджуються із симетрією поля земного тяжіння і вони досить стійкі.

Знання геометричних законів симетрії має велике практичне значення. Ми повинні не лише навчитися розуміти їх, але й змушувати служити нам на користь»

Пропонуємо прикладні задачі та запитання, які доцільно розглядати колективно. Важливу роль тут відіграє наочність.

3.1. Навести приклади центрально-симетричних тіл з навколишнього середовища. Накреслити їх математичну модель.

3.2. Чи існують у природі тіла, симетричні відносно осі? Навести приклади. Накреслити їх математичну модель.

3.4. Які оточуючі предмети можна віднести до тіл, симетричних відносно площини?

3.5. Відносно чого буде симетричним стілець? Чому стілець вже не буде здаватися симетричним, якщо ми його перекинемо?

Вказівка. Площина симетрії стільця не буде вертикальною. Одночасно зі стільцем ми бачимо частини підлоги і розглядаємо стілець і підлогу як одне ціле. Коли ми бажаємо впевнитись, що який-небудь предмет, орнамент є симетричним, ми підсвідомо повертаємо його так, щоб площина симетрії фігури, якщо така існує, збігалася з площиною симетрії нашого тіла або голови.

3.6. Чи можна вважати паралельне перенесення прикладом руху, який не існує насправді? Відповідь обґрунтувати.

3.7. Як можна назвати з геометричної точки зору зменшені моделі літаків і самі літаки; важки одного комплекту; кульки різних підшипників (вказати використовуване поняття)? Яка мета створення цього поняття в геометрії?

2.4. Геометричні тіла та їх комбінації

У першому розділі йшлося про те, що у різних НМТ ступені (емпірична основа, створення математичної моделі, її дослідження та прикладання) виражені не однаково чітко та повно. Найперше, це стосується НМТ «Геометричні тіла та їх комбінації». У даному випадку етап емпіричної основи проявляється і конкретизується у кожній конкретній НМТ, що стосується многогранників і тіл обертання. Це пов'язано з тим, що зміст даної НМТ розглядається протягом вивчення всього курсу стереометрії, поділяється на 10 проміжків у часі та носить певною мірою узагальнюючий характер. Зважаючи на перелічені вище обставини, подаємо прикладну інформацію у вигляді добірки цікавих і корисних фактів, які можна запропонувати учням перед вивченням відповідних суто стереометричних фактів, що стосуються многогранників (зокрема, правильних), тіл обертання та їх комбінацій.

Прикладна інформація

1. Чи пов'язана геометрія з мистецтвом? Ще в часи середньовіччя геометрію зараховували до семи вільних мистецтв: граматика, риторика, діалектика, арифметика, астрономія, музика та геометрія. Естетика та доцільність геометричних форм сприяла тому, що геометрія стала невід'ємною частиною мистецтва: живопису, скульптури, архітектури. Існує математична теорія живопису. Це теорія перспективи. Леонардо да Вінчі усвідомлював роль геометрії в образотворчому мистецтві. Він розробив математичні закони передачі об 'ємності реальних об'єктів на площину та підходив до живопису з позицій строгих геометричних вимог, підкреслюючи, що гармонія спирається на пропорцію, міру та число.

2. Кубізм - модерністська течія в образотворчому мистецтві в першій чверті XX ст. Виникнення його відносять до 1907 р., коли П. Пікассо написав картину «Авиньйонські дівиці». На ній деформовані фігури зображено без класичних елементів світлотіні та перспективи.

3. Великому художнику Сезанну належать слова: «Усе в природі сферичне та циліндричне».

4. Серед радіолярій Геккеля можна знайти всі п'ять правильних многогранників, тоді як серед кристалічних форм мінералів зовсім відсутні правильні додекаедр та ікосаедр. Так, є і радіолярія, яка має каркас у вигляді кульки із шістьма радіальними голками, що розходяться під прямим кутом (на зразок трьох координатних осей симетрії у куба).

5. Серед морських організмів, які мають форми геометричних фігур, є «скляні губки», у прозорій сітківці яких видно шість прямокутних осей, що відтворюють кристалічну форму куба або октаедра. До таких організмів належать і кубомедузи (кубічні медузи).

6. У 1857 р. ірландський математик У. Гамільтон запропонував гру, яку назвав «подорож по додекаедру». Вона зводилася до обходу вершин

правильного додекаедра за умови, що пересуватися можна лише по його ребрам і ні в одну з його вершин не можна заходити більше одного разу.

7. Задачі на перерізи многогранників або інших тіл постійно розв'язуються в кресленні та в конструкторській практиці.

8. У навколишньому світі циліндрична та конічна поверхні досить часто зустрічаються одночасно. Можна говорити про своєрідний «союз» циліндра та конуса. Геометричну форму у вигляді циліндра, увінчаного конусом, можна часто зустріти в архітектурі середньовіччя. Наприклад, башта Старого міста в Таллінні, що називається Товста Маргарита, замок Шенонсо у Франції. На сучасних атомних електростанціях є споруди у вигляді зрізаних конусів, що переходять зверху в циліндри. їх називають градирнями і служать вони для повітряного охолодження води.

9. Цікавою є одна з найвідоміших споруд Стародавнього Риму - споруджений на початку II ст. н.е. пантеон імператора Адріана. Основна будівля пантеону є циліндром (точніше, порожнистим циліндром), на якому стоїть купол - бетонна півсфера. Внутрішній діаметр цієї півсфери - 44 м; така сама і висота всього будинку. Товщина купола - 1 м. У його центрі є круглий отвір діаметром 9 м, крізь який сонячні промені можуть проникати всередину пантеону. Обчислимо масу купола пантеону. Геометричною моделлю купола є половина порожнистої кулі, у якої радіус зовнішньої сфери $R_2 =$ 23 м. Об'єм цього тіла можна знайти за формулою:

$$V_1 = \frac{2\pi}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right).$$

Від нього треба відняти об'єм V_2, який припадає на круглий отвір у куполі. Наближено будемо розглядати цей об'єм як об'єм циліндра діаметром D = 9 м і висотою H = 1 м : $V_2 = \frac{\pi}{4} D^2 H$.

Врахуємо, що маса кожного кубометра бетону становить 2,3 т. Після обчислень отримаємо, що маса купола більша за 7000 т.

10. Елеватор - велика, в основному залізобетонна, споруда, сховище для зерна. Він складається з прямокутних паралелепіпедів, трикутних призм і

циліндрів. Зберігають зерно в круглих баштах діаметром 7-8 м і висотою до 30 м.

11. Об'єм порожнистого тіла можна виміряти, якщо налити в нього рідину певною міркою. Об'єм твердого тіла можна виміряти, занурюючи його в рідину, яка наповнює довільну посудину до країв. Рідина, яка виллється, збирається та її об'єм, що дорівнює об'єму зануреного тіла, вимірюється. Проте ці прийоми далеко не завжди можна застосовувати на практиці. Наприклад, дерев'яний ящик або житловий будинок не можна наповнити водою, і не всяке тверде тіло можна занурити в рідину. Тому важливо знаходити об'єми тіл різної форми за допомогою вимірювань і відповідних обчислень.

Сформулюємо методичні поради, яких варто дотримуватися під час роботи з прикладними задачами.

1. Чітко сформулювати умову та вимогу задачі математичною мовою. З'ясувати, що корисно проговорювати вголос під час колективного розв'язування задач або «про себе» під час самостійного розв'язування. Якщо є потреба, то потрібно умову задачі перевести на мову математики.

2. Доцільно здійснювати короткий запис умови задачі. Це полегшує етап формалізації, усвідомлення учнями того, які елементи дано в задачі та як вони взаємопов'язані.

3. Розв'язування створеної абстрактної стереометричної задачі потрібно проводити у звичний для учнів спосіб (це стосується й аналізу, і добору методу розв'язування, й оформлення).

4. Корисно попередньо розглянути абстрактну стереометричну задачу, етапи розв'язування якої такі самі, як етапи розв'язування всередині побудованої математичної моделі.

5. Отриманий розв'язок формальної математичної задачі необхідно дослідити на предмет його відповідності вихідній ситуації. На етапі інтерпретації може статися, що відповідь до прикладної задачі відсутня або є кілька випадків.

Пропонуємо прикладні задачі, більшість з яких - це задачі на обчислення.

У деяких задачах збережено застарілі міри. Варто, щоб учні їх знали та вміли перетворювати, оскільки й донині у деяких країнах їх використовують.

Задачі, пов’язані з многогранниками та їх комбінаціями

4.1. Найбільша піраміда Єгипту (піраміда Хеопса) мала висоту 146 м; сторона квадратної основи – 233 м. Вважаючи, що вона суцільно складена з каменю, обчислити, якої висоти кам'яну стіну (товщиною 0,5 м і довжиною від Києва до Парижа) можна було б спорудити з цього каменю? Відстань на карті (масштаб 1:150 000 000) між вказаними географічними об'єктами становить 1,4 см.

Відповідь. ≈ 2,5 м.

4.2. У таблиці наведено дані щодо площі поверхні та середньої глибини океанів. Яких (приблизно) розмірів куб можна було б утворити з усієї цієї води?

Таблиця

Океан	**Поверхня**	**Середня глибина**
Великий	175 млн. кв. км	3,9 км
Атлантичний	90 млн. кв. км	3,9 км
Індійський	75 млн. кв. км	4,1 км

Відповідь. Куб зі стороною, що наближено дорівнює 1100 км.

4.3. Діамант має форму многогранника, утвореного з 8 рівносторонніх трикутників (двох чотирикутних пірамід, які приєднані одна до одної квадратними основами). Сторона кожної трикутної грані цього многогранника (октаедра) дорівнює 4 мм. Обчислити масу алмазу в каратах.

Відповідь. ≈ 0,5 карата.

4.4. Обеліск фараона Тотмозиса, який було встановлено на кінній арені у Константинополі, має форму правильної чотирикутної зрізаної піраміди висотою 30 м. Ребро нижньої основи піраміди дорівнює 2 м, а ребро верхньої основи – 60 см. Обеліск закінчується правильною чотирикутною пірамідою, бічне ребро якої дорівнює 50 см. Визначити: а) поверхню обеліска; б) об'єм обеліска; в) масу обеліска, якщо густина сієніту, з якого виготовлено обеліск, дорівнює $2{,}5\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. 160 $м^2$; 40 $м^3$; 100 т.

4.5. Ящик для сміття (без кришки) має форму правильної зрізаної 4-кутної піраміди. На його виготовлення використали 3,4 $м^2$ листового заліза, з яких на бічні стінки пішло 2,3 $м^2$. Довжина сторони дна становить 0,6 довжини сторони верху ящика. Скільки заліза потрібно використати для виготовлення ящика (без кришки) такої самої місткості у формі правильної 4-кутної призми висотою 60 см?

Відповідь. $\approx$ 3,8 $м^2$.

4.6. Для вимірюванні довжини, ширини та висоти кімнати (з метою обчислення її об'єму) використовували метр, який, як з'ясувалося пізніше, був на 0,5 см коротшим за істинного метра. Можливості провести вимірювання повторно немає. Як потрібно змінити результат, що є об'ємом кімнати, щоб отримати його правильне значення?

Відповідь. Відняти від результату $\frac{3}{200}$ його значення.

Задачі, пов'язані з тілами обертання та їх комбінаціями

4.7. Мішечок з морозивом має циліндричну форму. Його висота – 15 см, а площа основи – 154$см^2$. У кав'ярні морозиво до кави подають оформленим у вигляді кульок. Скільки приблизно таких кульок морозива радіусом 2,5 см можна сформувати з морозива, що міститься в одному мішечку?

Відповідь. $\approx$ 34 кульки.

4.8. Коробка цукерок висотою 4 см зверху має вигляд півкола, діаметр якого 30 см. Скільки потрібно квадратних сантиметрів прозорої плівки для пакування коробки? На з'єднання додати 3 % плівки.

Відповідь. $\approx$ 1000 $см^2$.

4.9. Господиня почистила 2,5 кг картоплі. Середній діаметр картоплини 4 см, середня товщина шару, що зрізають, 1 мм. Яку масу має почищена картопля?

Відповідь. 2 кг.

4.10. Із апельсина (його діаметр дорівнює 8,5 см) вижали сік, який піднявся у циліндричній тонкостінній склянці на висоту 2,8 см (розміри склянки: висота – 7,5 см, діаметр основи – 7 см, товщина дна – 1 см). Який відсоток від загального об'єму апельсина становить вижатий сік? Скільки приблизно штук апельсинів потрібно купити, щоб отримати 1 л соку, та скільки цей сік буде коштувати, якщо за 5 таких апельсинів заплатили 5 грн 99 к.?

Відповідь. 22 %; 15 апельсинів; 22 грн.

4.11. Скільки келихів соку можна наповнити із глечика циліндричної форми, який має висоту 22 см і довжину кола основи 25 см, якщо глибина келиха конічної форми – 11 см, а діаметр основи – 5 см?

Відповідь. 15 келихів.

4.12. Щоб приготувати каву по-стокгольмському, беруть 400 мл міцної завареної кави, додають збиті з однією столовою ложкою цукру (23см^3) вершки (250 мл), 4 жовтки (діаметр одного жовтка наближено дорівнює 2,5 см), 4 порції рому (одна порція становить 18 см^3). Скільки циліндричних чашок такої кави можна отримати, якщо висота чашки 3 см, а діаметр основи – 6 см?

Відповідь. ≈ 10 чашок.

4.13. За кожну пляшку модного безалкогольного енергетичного напою місткістю 1 л господар кафе заплатив 20 грн. Яка реальна вартість одного келиха напою, якщо келих має циліндричну форму висотою 6 см і діаметром основи 4 см? Визначити прибуток кафе від продажу однієї пляшки напою келихами, якщо один келих продавали за ціною 3 грн.

Відповідь. ≈ 9 грн. 80 к.

4.14. Циліндричну посудину, внутрішній радіус основи якої 3 см, а висота – 16 см, наповнено водою. Цю воду потім перелили в посудину, яка має форму перекинутого конуса. Радіус основи останнього 4 см, а висота – 64 см. На якому рівні буде знаходитися вода у другій посудині?

Відповідь. ≈ 27 см.

4.15. Замість циліндричної цистерни (довжина її 360 см, діаметр основи 200 см) зробили сферичну посудину того самого об'єму. Скільки відсотків металу було зекономлено?

Відповідь. 16 %.

4.16. Дах дзвіниці має вигляд зрізаного конуса висотою 24 фута; діаметр нижньої основи даху 20 футів, а діаметр верхньої - 6 футів. До верхньої основи конічного даху примикає перерізом кулястий купол, що є кульовим сегментом висотою 9 футів («голова»); радіус кульової поверхні цього куполу 5 футів. Визначити, скільки позолоти потрібно для покриття всього даху дзвіниці, якщо на кожний квадратний фут витрачається 2 лота позолоти. (1 м = 3,28 фута, 1лот= 12,8 г.)

Відповідь. ≈ 34 кг.

4.17. Висота циліндричної банки з варенням дорівнює 30 см, а радіус основи – 10 см. Ваза для варення є кульовим поясом висотою 4,5 см, радіус дна вази дорівнює 4,5 см, а поперечник вази зверху дорівнює 15 см. Скільки разів із повної банки можна наповнити вазу варенням, щоб шар варення був товщиною 4 см?

Зауваження. Поперечка (поперечник) – це поперечно прикріплений між опорами брус, дошка, палиця; уявна або проведена лінія по ширині чого-небудь, те саме, що *діаметр*.

Відповідь. ≈ 19 штук.

Задачі, пов'язані з многогранниками та тілами обертання

4.18. Створити графічно асоціативні пари між відомими вам геометричними тілами та такими планіметричними фігурами: трикутник, паралелограм, прямокутник, квадрат, круг. Відповідь обґрунтувати.

4.19. Яку частину об'єму в автоматичній пральній машині займає барабан для білизни з діаметром основи 43 см та висотою 24,5 см? Розміри машини 61 см x 40 см x 85 см.

Відповідь. ≈ 17 %, шосту частину.

4.20. Торт якої форми і як саме можна поділити на 8 рівних частин за допомогою трьох прямих розрізів?

Відповідь. Довільний торт, однорідний за складом, можна двома вертикальними розрізами розділити на 4 рівні частини, а потім горизонтальним розрізом розділити кожну частину навпіл.

4.21. Для приготування крему для торту господиня поклала у циліндричну ємність кухонного комбайна пачку вершкового масла (розміри пачки 9,5 см x 7,5 см x 2 см), банку згущеного молока (висота банки – 8 см, діаметр основи – 7,5 см) та 120 г мелених горіхів (останні повністю заповнили склянку об'ємом 250 см^3). Визначити позначку на ємності комбайну (від її дна), на якій встановиться рівень крему після збивання. Циліндрична ємність кухонного комбайну має висоту 13 см, а діаметр дна – 17,5 см. Взяти до уваги, що збитий крем збільшується в об'ємі на 30 %.

Відповідь. 3,3 см.

4.22. Є заготовка циліндричної форми діаметром 20 мм. Чи можна викувати з неї деталь такої самої довжини, перерізом якої є квадрат зі стороною 18 мм?

Відповідь. Ні.

4.23.Стальну заготовку довжиною 1 м і діаметром 10 см переплавлено в прямокутну, поперечний переріз якої є квадрат зі стороною 5 см. Обчислити довжину заготовки. Втратами металу під час переплавлення нехтувати.

Відповідь. 3,14 м.

4.24. Алмаз відшліфовано у формі многогранника, навколо якого можна описати півкулю і який має велику кількість граней. Поперечник півкулі дорівнює 6 мм. Скільки приблизно карат в цьому алмазі? Густина алмазу $3{,}5\frac{г}{см^3}$. (1 карат = 0,2 г).

Відповідь. ≈ 1 карат.

4.25. У кубічну коробку з ребром 1 см насипано доверху дробинки. Діаметр кожної дробинки - 1 мм. Скільки приблизно дробинок міститься у коробочці?

Відповідь. Не менше, ніж 1000 штук.

4.26. Товщина круглого олівця дорівнює 7 мм; товщина шестигранного олівця (в самій широкій частині) – 8 мм. Довжини олівців і розміри грифелів однакові. Який олівець має більший об'єм?

Відповідь. Шестигранний олівець.

Задачі, пов'язані з опрацюванням окремих теоретичних положень

4.27. Потрібно обчислити об'єм невеликого предмета неправильної форми (каменю, зливку). Як це можна зробити?

Відповідь. Опустити предмет, наприклад, у банку і налити в неї води так, щоб предмет був повністю покритий водою. Потім вийшли предмет з банки і виміряти, на скільки знизився при цьому рівень води. Об'єм предмета буде дорівнювати добутку отриманої величини на площу перерізу банки.

4.28. У колоду вбито три цвяхи однакової довжини та маси, але з різними перерізами: круглим, квадратним і трикутним. Який із цвяхів тримається міцніше?

Відповідь. Із трикутним перерізом, оскільки він має більшу площу дотику з деревиною.

4.29. Чому скіпка загоряється швидше, ніж ціле поліно, від якого вона відколота?

Розв'язання

Оскільки нагрівання відбувається від поверхні та поширюється на весь об'єм тіла, то потрібно порівняти поверхню та об'єм скіпки, наприклад, квадратного перерізу, з поверхнею та об'ємом поліна тієї самої довжини і також квадратного перерізу (щоб визначити, яка поверхня припадає на кожен кубічний сантиметр деревини в обох випадках). Якщо товщина поліна в 10 раз більша від товщини скіпки, то бічна поверхня поліна більша від поверхні скіпки також у 10 раз, а об'єм його більший від об'єму скіпки в 100 раз. Отже, на кожну одиницю поверхні скіпки приходиться вдесятеро менший об'єм, чим у поліна: однакова кількість тепла нагріває у скіпки в десятеро менше речовини. Звідси і пояснення того, чому швидше запалюється скіпка, ніж поліно, від одного й того самого джерела тепла. (Через погану теплопровідність дерева, вказані відношення слід розглядати лише як наближені, що характеризують загальний хід процесу, а не кількісну його сторону.)

4.30.Два самовари, великий і малий, з однакового матеріалу та однакової форми, наповнені кип'ятком. Який остигне швидше?

Розв'язання

Речі остигають з поверхні, і отже, остигне швидше той самовар, в якому на кожну одиницю об'єму припадає більша поверхня. Якщо один самовар в m разів вищий і ширший від другого, то поверхня його більша в m^2 разів, а об'єм – в m^3 разів; на одиницю поверхні в більшому самоварі припадає в т раз більший об'єм. Отже, менший самовар остигне швидше.

Зауваження. З тієї самої причини дитина, яка стоїть на морозі, повинна мерзнути швидше, ніж однаково вдягнутий з нею дорослий: кількість тепла, що виникає в кожному кубічному сантиметрі тіла, в обох приблизно однакова, але поверхня тіла, яка вистигає і припадає на кожний кубічний сантиметр, у дитини більша, ніж у дорослого. У цьому і слід бачити причину того, що пальці та ніс мерзнуть більше та відморожуються частіше, ніж інші частини тіла, поверхня яких не така велика порівняно з їх об'ємом.

Відповідь. Менший самовар.

4.31.Поверхня тіла дорослої людини масою 65 кг дорівнює в середньому 2 м^2. Чому дорівнює поверхня тіла людини, яка має масу 50 кг?

Розв'язання

Маса тіла людини, в середньому, пропорційна до його об'єму, тобто до куба лінійних розмірів (наприклад, висоти), а поверхня – до квадрата висоти. Якщо маси, а отже і об'єми, людей пропорційні $\sqrt[3]{65}:\sqrt[3]{50}$, поверхні ж відносяться як $\sqrt[3]{65^2}:\sqrt[3]{50^2}$. Отже, шукана величина дорівнює $2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{50^2}{65^2}}=1{,}55$ (м^2)

Зауваження. Видозміною цієї задачі є обчислення середньої нормальної маси для людей різного зросту (для зросту 165 см нормальною є маса 57 кг).

Відповідь. 1,55 м^2.

4.32. Статуетку занурили в ящик з водою, що має форму прямокутного паралелепіпеда з основою 15 см х 10 см. Рівень води у посудині піднявся при цьому на 1,5 см. Визначити об'єм статуетки.

Відповідь. 225 см^3.

4.33. У «Пригодах Гулівера» описано країну велетнів, де лінійні розміри всіх предметів у 12 раз більші від звичних для нас. На Гулівера одного разу посипалися яблука, а одне з них навіть збило його з ніг. Яку приблизно масу могло мати таке яблуко?

Розв'язання

Якщо прийняти масу нормального яблука за 100 г, то яблуко країни велетнів має мати масу в 12^3, тобто в 1728 раз більшу, що становить майже 173 кг. Яблуко, впавши на спину Гулівера, мало б не тільки збити його з ніг, але й розчавити.

Відповідь. ≈ 173 кг.

4.34. У країні ліліпутів, яку відвідав Гулівер, усі предмети мали лінійні розміри в 12 раз менші від звичних для нас. Чи міг там Гулівер за обідом з'їсти цілого бика?

Розв'язання

Приймемо масу нормального бика за 0,5 т. Тоді маса бика з країни ліліпутів повинна бути біля 300 г. З'їсти 300 г м'яса за обідом одній людині – це цілком можливо.

Зауваження. Мабуть, неможливо з'їсти одній людині за обідом «20 возів з м'ясом», як описано в книзі.

Відповідь. Так.

4.35. Іграшкове відерце в 10 раз нижче від справжнього такої самої форми, що вміщує 12,3 кг води. Скільки води вміщує іграшкове відерце?

Відповідь. 12,3 г.

4.36. Цар-дзвін важить 12 тисяч фунтів. Скільки важить його модель, що відлита з того самого матеріалу, якщо висота моделі в 40 раз менша від висоти оригіналу? (1 кг = 2,44 фунта.)

Відповідь. 3 кг.

4.37. Ейфелева башта має висоту 300 м і масу 8 000 000 кг. Яку масу має модель цієї башти з того самого матеріалу і висотою 1,5 м?

Відповідь. 1 кг.

4.38. Шовковичний хробак при вилупленні має довжину 3,5 мм, а дорослий – 9 см. У скільки приблизно разів він збільшується у масі?

Відповідь. У 18 000 раз.

4.39. Яку масу мала б муха, якби всі її розміри пропорційно збільшилися б у 100 раз? У мільйон разів? Кімнатна муха має масу 0,02 г.

Відповідь. 20 кг; $2 \cdot 10^2$ т.

4.40. Куряче яйце довжиною 55 мм важить 15 золотників. Скільки наближено важить страусине яйце довжиною 130 мм? Скільки наближено важило яйце вимерлого мадагаскарського птаха епіорніса, яке мало довжину 260 мм? (1 г = 0,23 золотника; 1 кг = 2,44 фунта; 1 т = 61 пуд.)

Відповідь. 870 г; 6970 г.

4.41. У склянку, наповнену майже до країв водою, можна кинути кілька сот шпильок (насипавши їх до верху склянки) – і вода не виллється: вона лише підніметься злегка. Пояснити це явище.

Розв'язання

Об'єм води, що піднялася над початковою поверхнею, дорівнює об'єму кількох сотень шпильок, що легко обґрунтувати. Довжина шпильки – 25 мм, товщина – 0,5 мм. Об'єм однієї шпильки наближено дорівнює 5 мм^3; разом з головкою об'єм шпильки не перевищує 5,5 мм^3. Об'єм водяного шару, що піднімається над початковим рівнем води, навіть якщо його висота 1 мм, дорівнює 6000 мм^3 (приймаючи діаметр склянки за 9 см). Це більше від об'єму шпильки в 1100 раз. Отже, у повну склянку води може поміститись не менше 1000 шпильок!

4.42. Будуючи дахи, мости та інші споруди, опорні балки скріплюють так, щоб вони утворювали систему трикутників. Чому саме таке розміщення балок найкраще забезпечує незмінність форми?

Розв'язання

Балки таких споруд самі собою майже не піддаються ні помітному стиску, ні скороченню довжини. Під дією зовнішньої сили можлива лише зміна їх взаємного нахилу. Але з трьома сторонами даної довжини може існувати лише один трикутник, оскільки всі трикутники з відповідно рівними сторонами рівні між собою. Тому при незмінній довжині балок, які скріплено хоча б шарнірами у формі трикутника, кути, що утворені ними, залишаються незмінними. Звідси - сталість форми всієї споруди, складеної з трикутників.

4.43. Потрібно побудувати будинок певного об'єму з заданою площею фундаменту. Яку з форм потрібно вибрати – призми чи циліндра, щоб бічна поверхня будівлі була найменшою? Відповідь обґрунтувати.

Відповідь. Циліндра.

2.5. Призма

Цілі вивчення теми «Призма» повинні бути визначені на базі програми, але сформульовані з урахуванням інтересів і потреб конкретного класу.

Змістове наповнення першого ступеня подамо у вигляді фрагментів розповіді вчителя учням про призму.

«Ви маєте певні знання про геометричні тіла, зокрема про опуклі та неопуклі многогранники, про їх грані, ребра, вершини, поверхню тощо. А тіла якої форми найпоширеніші в оточуючому нас середовищі? Назвіть їх.
У стереометрії не звертають увагу на те, з чого виготовлені предмети, а лише на їх форму та розміри. У названих вами предметів схожі форми».[4]

Кожного разу слід акцентувати увагу на тому, яка саме плоска фігура рухалася та що спільного в утворених тілах: «Поверхня всіх тіл складається зі скінченної кількості многокутників, причому дві грані – рівні n-кутники, а решта n граней – паралелограми. Такі тіла називають призмами. У дослівному перекладі з грецької слово призма означає обпилене тіло».

Наведемо кілька прикладів інструментів, що мають форму призми, уявлення про які ви, мабуть, маєте: масштабна лінійка, основна частина якої є чотирикутною призмою трапецієподібного перерізу; напилок – слюсарний інструмент, що служить для обпилювання металевих виробів і є чотирикутною призмою з ромбовидним перерізом; гайка, що має форму правильної шестикутної призми і яку використовують разом із болтом як кріпильну деталь для з'єднання двох (або більше) деталей; болт – круглий стрижень, на одному кінці якого є головка у вигляді правильної шестикутної призми; у деталях, які скріпляються болтом і гайкою, висвердлюють круглий отвір, у який вставляють болт, що загвинчують гайкою.

У спорті також не обходяться без знарядь у формі призми. Спортсмени стрибають у висоту через дерев'яну планку трикутного перерізу 3 см х 3 см х 3 см або через дюралеву трубку діаметром 23-26 мм, в обидва кінці якої вставляють дерев'яні буші трикутного або квадратного перерізу.

У фехтуванні використовуються три види холодної зброї: рапіра – колюча зброя, що має легкий еластичний клинок прямокутного перерізу, довжиною 90 см і масою 500 г; шпага – колюча зброя із жорстким тригранним клинком довжиною 90 см і масою 770 г; шабля – колюча та рубаюча зброя, що має клинок довжиною 105 см фігурного перерізу з подовжніми пазами на бічній частині.

Для гри в настільний теніс виготовляють стіл висотою 0,76 м. Для кришки беруть фанеру або дошку товщиною 30 мм. Розмір кришки – 2,74 м х 1,525 м. М'ячик для гри в теніс виготовляють із целулоїду або пластика і він має масу 2,5 г.

Для природи, що оточує людину, прямокутна форма не є характерною і правильна форма окремих кристалічних утворень ніяк не спростовує це твердження. Кристали різник речовин відрізняються один від одного формами. Кубики кристалів кам'яної солі не сплутаєш із стовпчиками берилу або пластинками мідного купоросу. Форму шестигранних призм має кварц.

Рослин, що мають форму призми, практично, не існує. Як ви думаєте, чому? (Учні відповідають.) Ми знайшли лише один приклад – рослину, що росте на болотах біля Нілу - папірус.

Як бачимо, велика кількість предметів навколо нас має форму призми».

Після опрацювання відповідного стереометричного матеріалу учні повинні спробувати застосувати отримані знання для розв'язування прикладних задач. Доцільно нагадати учням, що саме потреби практики, життя привели до створення та вивчення поняття призми, тому цілком логічно розв'язувати саме такі задачі.

Задачі, що подано далі, доцільно пропонувати на ступені прикладання математичної моделі. Проте цілком можливо використовувати окремі з них і під час вивчення третього ступеня.

Задачі, пов'язані з площею поверхні призми та її перерізами

5.1. Скільки граней у шестигранного олівця?

Відповідь. Якщо олівець не заточений, то 8. В іншому випадку – 7.

5.2. Будівельна цеглина важить 4 кг. Скільки важить іграшкова цеглинка з того самого матеріалу, всі розміри якої у 4 рази менші?

Відповідь. 62,5 г.

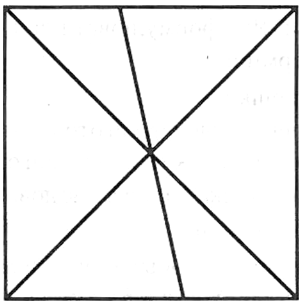
5.3. Чи можна загорнути одиничний кубик в квадратну серветку розмірами 3х3?

Відповідь. Так.

5.4. Господиня приготувала кекс, щоб разом зі своїми друзями поласувати ним під час подорожі. Вона хоче зазделегідь, ще вдома, розділити кекс, але не знає, скільки буде у неї супутників (2 або 3 особи). Яку найменшу кількість розрізів та як саме має зробити господиня, щоб усім вистачило порівну та не довелося додатково розрізати шматочки кексу? Кекс випікався у формі з квадратною основою.

Відповідь. Три розрізи.

$\frac{1}{3}a$ $\frac{2}{3}a$



a

5.5.1) Коробка для упаковування подарунка має форму низької призми з ромбом в основі. Найбільша відстань між протилежними кутами кришки становить 24 см, а найменша-10 см. Висота коробки 4 см. Скільки потрібно квадратних сантиметрів кольорового паперу, щоб обклеїти коробку (крім дна)?

2) Для обклеювання тільки збоку іншої, але такої самої за формою коробки, що має висоту 5 см і відстань між двома протилежними кутами 10 см, використали 260 см^2 паперу. Скільки необхідно паперу для обклеювання її кришки?

3) За умовою пункту 1 знайти периметр кришки та площу перегородки з картону, що проходить: усередині коробки через найближчі кути; усередині коробки через більш віддалені кути.

4) Скласти задачу, використовуючи дані попередніх пунктів.

Відповідь. 1) 328 см^2; 2) 120 см^2; 3) 96 см^2; 40 см^2.

5.6. Скільки треба заплатити за дерево для виготовлення шафи без ніжок висотою 2 м, шириною 1,5 м та глибиною 0,5 м, якщо 1 м^2 матеріалу коштує: для передньої частини – 50 грн, для бічних стінок – 38 грн, для задньої стінки – 30 грн, для дна, верха та чотирьох поличок – 26 грн. Для виготовлення шафи треба також придбати 4 зубчасті дерев'яні рейки загальною вартістю 108 грн.

Відповідь. 541 грн.

5.7. Скільки коштуватиме покриття спеціальним лаком шафи (з попередньої задачі), якщо її покривають лаком лише спереду та з боків, а покриття лаком 1 $м^2$ коштує 4 грн?

Відповідь. ≈ 20 грн.

5.8. Для виготовлення квадратного ящика висотою 80 см без кришки і дна використали дошку довжиною 6,4 см і шириною 4,3 см. Скільки таких дошок піде на виготовлення дна та кришки? На відходи додати площу половини однієї дошки. Як сформулювати дану задачу, використовуючи лише геометричні терміни?

Відповідь. ≈ 33 дошки.

5.9. Для відправлення товарів виготовлено 80 ящиків у формі куба з ребром 106 см. Скільки дошок пішло на виготовлення ящиків, якщо на 1 $м^2$ ящика потрібна 1 дошка? Дошка має довжину 50 см, а ширину 22 см.

Відповідь. ≈ 5392 дошки.

5.10. Прямокутну кімнату довжиною 5,6 м, шириною 3 м і висотою 2,5 м обклеєно шпалерами. У кімнаті є одне вікно шириною 2,3 м і висотою 1,3 м та двоє дверей шириною 1,1 м і висотою 2,1 м. Скільки використано рулонів шпалер, якщо довжина кожного рулону 10 м і ширина 53 см?

Відповідь. 7 рулонів.

5.11. Для обклеювання шпалерами стін кімнати використано 93,5 $м^2$ шпалер. Вікна та двері займають 15,1 $м^2$. Бордюр, яким обклеєно кімнату вздовж усіх стін, має довжину 25,5 м. Скільки коштуватиме фарбування підлоги цієї кімнати, якщо за фарбування масляною фарбою кожного квадратного метра беруть 3 грн. і якщо висота кімнати менша від її ширини на 1,42 м?

Відповідь. 121 грн.

5.12. Потрібно побілити стелю та стіни у кімнаті, яка має розміри 7 м х х 3,5 м х 3 м. У кімнаті є двоє дверей висотою 2,7 м та шириною 1,1м. Скільки коштуватиме робота, якщо побілка 1 м^2 коштує 4 грн.?

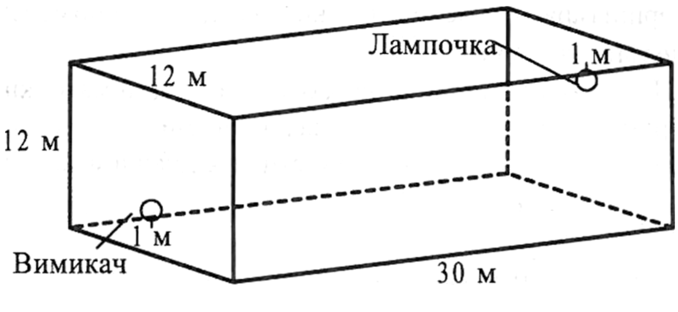
Відповідь. 330 грн.

5.13. Потрібно цементувати підвал глибиною 2 м, шириною 2,5 м та довжиною 4 м. Скільки пудів цементу для цього використають, якщо на кожний квадратний метр дна йде 2 пуди, а на квадратний метр стіни – 0,8 пуда цементу? Підвал має форму прямокутного паралелепіпеда. (1 т ≈ 61 пуд.)

Відповідь. ≈ 41 пуд.

5.14. Потрібно з'єднати стінною проводкою вимикач і лампочку у залі довжиною 30 м, а шириною і висотою по 12 м. Вимикач знаходиться посередині торцевої стіни на висоті 1 м від підлоги, а лампочка – посередині протилежної сторони на висоті 1 м від стелі. Якою найкоротшою може бути довжина проводки?

Вказівка. Розгляньте розгортку прямокутного паралелепіпеда.



Відповідь. 42 м.

5.15. Двосхилий дах має форму тригранної призми. Він розміщений на будинку довжиною 21 м і шириною 8,5 м. Висота даху (підйом) – 3,2 м. Скільки квадратних метрів займає поверхня даху?

Відповідь. ≈ 200 м^2.

5.16. Прямокутну садибу довжиною 153 м і шириною 115 м обнесено парканом, що має висоту 213 см. За скільки часу 4 малярі зможуть пофарбувати з двох боків паркан, що має ворота і хвіртку, якщо 1 маляр фарбує за один день 40,9 м^2 паркану?

Відповідь. 14 днів.

5.17. Стайню довжиною 17 м, шириною 11м, висотою від землі до даху 496 см зроблено з цегли. У стайні 2 дверей висотою по 284 см і шириною 195 см; 6 вікон шириною по 709 см і висотою по 355 см. Скільки використано цеглин на будівництво стін стайні, якщо на 1 м^2 стіни потрібно 198 цеглин?

Відповідь. ≈ 30 тис. цеглин.

Задачі, пов'язані з обчисленням об'єму призми та її комбінаціями

5.18. У Скандинавії в 2005 році побудували хмарочос висотою 190 м. Він складений із 9 кубічних блоків, верхній з яких повернутий відносно нижнього на 90°. Який об'єм одного такого блоку?

Відповідь. ≈ 9300 м^3.

5.19. Стограмова плитка молочного шоколаду має розміри 16 см х 7,6 см х 0,6 см. Для того, щоб приготувати гарячий шоколад, можна до 60 г подрібненої шоколадної плитки додати півсклянки холодної води (125 см^3) і заварити. Потім додати 1 л молока, 3 столові ложки цукру (в одній столовій ложці приблизно 23 см^3 цукру) та кип'ятити кілька хвилин. Скільки отримаємо порцій гарячого шоколаду, якщо на одну порцію йде 200 мл?

Відповідь. ≈ 6 порцій.

5.20. Цукор-рафінад виготовляють у вигляді шматочків, що мають форму прямокутного паралелепіпеда розмірами 24 мм х 24 мм х 10 мм. Скільки шматочків цукру повинно міститися у пачці масою 0,5 кг? Питома вага цукру $1{,}2\ \frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 70 штук.

5.21. Коробка для цукерок має форму прямої призми, основою якої є ромб. Бічна поверхня коробки становить 900 см^2, діагональ дна дорівнює 40 см. Коло, що описує картинку на кришці та дотикається до сторін кришки, має довжину 75,36 см. Скільки кілограм цукерок може вмістити коробка, якщо 1 кг цукерок займає приблизно 2400 см^3?

Відповідь. 2,2 кг.

5.22. Майстер пофарбував підлогу у кімнаті. Чи можна обчислити приблизну товщину шару фарби?

Відповідь. Так, достатньо поділити об'єм витраченої фарби на площу пофарбованої поверхні.

5.23. Мило масою 410 г має об'єм 260 см^3. Яку масу має мило у формі прямокутного паралелепіпеда, якщо:

а) площа однієї бічної грані мила становить 96 см^2, площа перерізу, що проходить через діагоналі обох основ, – 120 см^2, а діагональ основи більша від сторони основи, через яку проходить дана бічна грань, на 2 см;

б) бічна поверхня мила більша від площі однієї з бічних граней на 910 см^2, довжина бічного ребра 20 см, а периметр основи 62 см?

Відповідь, а) ≈ 920 г; б) ≈ 7700 г.

5.24. Коробка для прального порошку має розміри 14 см х 3,5 см х 19,5 см. Знайти об'єм прального порошку, що в ній міститься, якщо цей об'єм становить 80 % об'єму коробки.

Відповідь. ≈ 760 см^3.

5.25. Площа Світового океану наближено дорівнює 361 млн км^2, середня глибина – 3,8 км. Щоб уявити таку кількість води, потрібно вдатися до яких-небудь зрозумілих порівнянь. Подумки помістити Світовий океан у посудину кубічної форми та обчислити сторону такого куба.

Відповідь. ≈ 1100 км.

5.26. Скільки необхідно матеріалу, щоб виготовити тару для соку, яка має форму прямокутного паралелепіпеда висотою 20 см та довжиною сторін основи 6 см і 9 см? Яка місткість такої тари?

Відповідь. 708 см^2; 1080 см^3.

5.27. У ящик висотою 20 см і площею основи 720 см^2 потрібно запакувати морозиво. Скільки пачок морозива у формі прямокутного паралелепіпеда можна помістити у цю коробку, якщо розміри пачки морозива 4 см x 6 см x 10 см? Визначити вартість такого ящика з морозивом, якщо вартість однієї пачки становить 1,25 грн.

Відповідь. 60 штук; 75 грн.

5.28. Скільки приблизно цеглин потрібно для будівництва 18 стовпів висотою 4 м з перерізом у вигляді квадрата зі стороною 7 дм? Розмір цеглини 1 дм x 1,5 дм x 3 дм. Втрати становлять 5 %.

Відповідь. 8200 цеглин.

5.29. Необхідно, щоб у класі на кожного учня приходилося не менше 6 м^3 повітря. Клас має довжину 10 м, ширину 6 м та висоту 3,5 м. Скільки учнів може знаходитися в ньому без шкоди для здоров'я?

Відповідь. 35 учнів.

5.30. Ширина класу не повинна перевищувати 7,1 м, щоб віддалені від вікон парти були достатньо освітлені. Довжина класу не повинна перевищувати 9,9 м, щоб учні, які сидять на задніх партах, чітко розрізняли написане на дошці. На кожного учня повинно припадати не менше 6 м^3 повітря. Беручи до уваги, що повітря, яке знаходиться вище за 3,6 м від підлоги, не бере участь у переміщенні повітряних шарів, обчислити, яка найбільша кількість учнів може одночасно навчатися в цьому класі.

Відповідь. 42 учні.

5.31. Визначити масу повітря в кімнаті, що має форму куба, якщо прийняти масу 1 м^3 повітря рівною 1,25 кг і якщо:

а) площа підлоги цієї кімнати дорівнює 36м^2;

б) відстань між двома протилежними кутами кімнати (верхнім та нижнім) становить 25,9 м.

Відповідь. а) ≈ 270 кг; б) ≈ 4200 кг.

5.32. Кубатура однієї кімнати будівлі дорівнює 120 м^2. Обчислити кубатуру іншої кімнати цієї будівлі, якщо її ширина в 1,5 рази більша від ширини першої, а довжина в 3 рази менша.

Відповідь. 60 м^2.

5.33. Для фундаменту кам'яної стіни, що оточує будинок (довжина будинку 383 м, ширина 250 м), потрібно викопати рів шириною 0,53 м і глибиною 36 см. За скільки годин можуть виконати цю роботу 7 землекопів, якщо 3 землекопи за 12 год можуть викопати 19 м^3 землі і якщо троє воріт мають довжину по 4,3 м?

Відповідь. 61 год.

5.34. Підлогу в прямокутному залі викладено мармуровими плитами. Кожна плита має форму правильної 8-кутної призми зі стороною основи 6,4 см і товщиною 2,5 см. Яка площа підлоги, якщо всі плити мають масу 89 690 кг? Густина мармуру $2{,}6 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{м^3}$.

Відповідь. 140 м^2.

5.35. Дерев'яну плитку у формі правильного восьмикутника зі стороною 3,2 см і товщиною 0,7 см зроблено з дерева, що має густину 0,5 $\frac{г}{см^3}$. Знайти масу дерев'яної плитки.

Відповідь. 3,5 г.

5.36. Визначити місткість трикутної шафки у ванній кімнаті, якщо її основою є рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 50 см, а площа більшої грані на 1700 см^2 більша, ніж площа бічної грані.

Відповідь. 100 000 см^3.

5.37. Стіни та дно прямокутного басейну викладено плитами. Довжина басейну 11 м, ширина 6,4 м, глибина 4,3 м. Яка маса всіх плит, якщо на 1 м^2 поверхні басейну витрачається 313 кг плит? Товщина плити 13 см, а 1 м^3 плити має масу 2 400 кг.

Відповідь. ≈ 70 т.

5.38. Дзвіниця має два поверхи у формі правильних 8-кутних призм. Сторона основи зовнішньої стіни нижнього поверху дорівнює 12,5 футів, а верхнього – 10 футів; висота нижнього поверху дорівнює 8 сажнів, а верхнього – 6 сажнів. У дзвіниці знаходяться: 2 дверей шириною по 8 футів і висотою по 13 футів; 4 вікна шириною по 5 футів, а висотою по 8 футів. Скільки потрібно заготовити кубічних метрів цегли для кладки стін, якщо на 1 квадратний сажень стіни йде 1225 цеглин без залому і якщо в 1 кубічному футі укладається 11 цеглин? На залом додати 5 % потрібної кількості цеглин. (1 метр = 3,28 фута = 0,47 сажня.)

Відповідь. 588 м^3.

5.39. Віконне скло важить 3,75 фунта, а 1 кубічний дюйм скла важить 10 золотників. Яку довжину має скло, якщо його ширина дорівнює 18 дюймів, а товщина дорівнює 1 лінії. (1 кг = 2,44 фунта, 1 г = 0,23 золотника, 1 лінія = 0,1 дюйма, 1 м = 39,4 дюйма.)

Відповідь. 50,6 см.

5.40. Будинок має довжину 11 м і ширину 8,5 м. На горизонтальному даху цього будинку лежить шар снігу товщиною 25,4 см. Яку масу витримує дах, якщо 1 м^3 снігу має масу 88 кг?

Відповідь. 2113 кг.

5.41. Конопляне масло, яке перелили в посудину кубічної форми глибиною 7,6 см, має масу 411 г. Яку масу має 16,4 см^3 масла?

Відповідь. 15 г.

5.42. У склянку, наповнену водою, що має форму правильної 8-кутної призми з ребром основи 2,5 см і висотою 12,7 см, опущено шматок міді. Після того, як мідь вийняли зі склянки, рівень води став 6,4 см. Скільки кубічних сантиметрів міді міститься в цьому шматку?

Відповідь. 200 см^3.

5.43. На фермі із запасу виноградного соку в 50 відер продано через їдальню 1000 склянок соку. Кожна склянка має форму правильної 6-кутної призми з ребром основи 3,2 см і висотою 10 см. Інший сік продали оптом через магазин. Скільки відер соку продано через магазин? Прийняти об'єм одного відраза 12 300 см^3.

Відповідь. 28 відер.

5.44. Під час зливи за 1 год. випадає шар води висотою 37 мм. Визначити масу води, яка випала при такій зливі на прямокутний настіл довжиною 100 м та шириною 80 м, якщо злива тривала $1\frac{1}{4}$ год. та 1 м води має масу 1 т.

Відповідь. 370 т.

5.45. Лід тане тим повільніше, чим менша його поверхня дотику з повітрям. Привезено для льодового свята 59 м^3 льоду. Як його вигідніше скласти для того, щоб він танув якомога повільніше: у формі куба чи прямокутного паралелепіпеда з основою 6,3 м х 4,2 м?

Відповідь. У формі куба.

5.46. Один із самих великих метеоритів за формою нагадує прямокутний паралелепіпед, розміри якого такі: довжина 4 м, ширина 2,5 м, висота 2 м. Його було знайдено в 1894 р. поблизу мису Йорк. Яку масу має такий метеорит, якщо 1 см^3 речовини метеориту має масу 4 г?

Відповідь. 80 т.

5.47. У мікроскоп угледіли крупинку повареної солі кубічної форми з довжиною ребра 0,01 мм. Скільки таких мікроскопічних крупинок у 410 г солі, якщо 1 см^3 повареної солі має масу 2 г?

Відповідь. $\approx$ 205 млрд.

5.48. На лісопильних заводах в 1 м^3 повітря буває до 0,017 г пилу. Скільки пилу (за масою) вдихає робітник на такому заводі протягом 8-годинного робочого дня? Скільки він вдихає за рік, якщо в році 300 робочих днів? Людина кожної хвилини вдихає приблизно 0,2 л повітря.

Відповідь. 0,029 г; 8,7 г.

5.49. На позолоту 1 м^2 куполу йде 1 г золота. Яка товщина шару позолоти, якщо 1 см^3 має масу 20 г?

Відповідь. 0,00005 мм.

5.50. Сніжинка у формі правильної шестикутної призми має діаметр основи 0,14 мм, висоту 0,34 мм (у середньому). Яку масу має мільйон таких сніжинок, якщо 1 см^3 льоду має масу 0,9 г?

Відповідь. 4 г.

5.51. Розміри цеглини 7 см х 14 см х 28 см. Скільки цеглин піде на спорудження стіни довжиною 8,4 м, висотою 5 м і товщиною 49 см?

Відповідь. 7500 цеглин.

5.52. Скільки брусків довжиною 1 м і шириною та товщиною по 0,5 м можна укласти в ящик довжиною 4 м, шириною 2 м та глибиною 2,5 м?

Відповідь. 80 брусків.

5.53. Чи можна ящик з кришкою з розмірами 20 х 15 х 14 заповнити коробками розміром 3 х 5 х 10 так, щоб у ящику не залишилося порожнин і з нього не виступали коробки?

Відповідь. Якщо подумки розділити даний ящик на два ящики з розмірами 20 х 15 х 9 і 20 х 15 х 5, то в кожному з них один вимір буде ділитися на 10, другий – на 5, третій – на 3. Тому обидва ящика, а отже, і даний, можна заповнити коробками.

5.54. Чи вистачить у вас сили підняти куб литого золота з ребром 18,8 см, якщо його густина 19,3.

Відповідь. Напевне ні, оскільки маса такого куба становить 128 кг.

5.55. Розрахувати масу повітря в кімнаті довжиною 11,5 м, шириною 7,8 м і висотою 3 м, якщо маса 1 дм^3 повітря дорівнює 1,3 г.

Відповідь. ≈ 350 кг.

5.56. Сосновий ящик, відкритий зверху, має довжину 150 см, ширину 60 см і висоту 85 см. Визначити його масу, якщо товщина стінок дорівнює 3 см. Густина сосни 0,5 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 64 кг.

5.57. Під час зрізування землі на один штик (глибина однієї лопати) знімається шар товщиною приблизно 25 см. З якої ділянки потрібно зняти землю на 1 штик, щоб зрізаною землею засипати рів об'ємом 100 м^3?

Відповідь. 400 м^2.

5.58. Пліт сколочено із 42 балок прямокутного перерізу, кожна з яких має довжину 10 м, ширину 20 см і товщину 15 см. Густина дерева 0,6 $\frac{г}{см^3}$.

а) Чи можна на цьому плоті переправити через річку вантажівку масою 5 т?

б) Чи зміниться вантажопідйомність плоту, якщо ширину кожної балки буде зменшено на п сантиметрів, а товщину одночасно збільшено на стільки само сантиметрів?

Відповідь, а) Так. б) Не зміниться при збільшенні на 5 см; якщо $n \in (0;5)$, то збільшиться, а якщо $n \in (5; +\infty)$, то зменшиться.

5.59. Скільки тонн зерна вміщує склад прямокутної форми з розмірами 30 м х 5 м, якщо зерно насипано рівним шаром товщиною в 1 м, а густина насипу зерна 0,8 $\frac{г}{см^3}$?

Відповідь. 120 т.

5.60. На автомобілях певної вантажопідйомності необхідно перевести листове залізо, густина якого 8 $\frac{г}{см^3}$. Які потрібно провести вимірювання та обчислення, щоб правильно навантажити машини?

Відповідь. Довжину, ширину та товщину одного листа заліза.

5.61. Міркою для відпуску зернових відходів зі складу служать два прямокутні ящики з рівними основами. Місткість одного з них 50 кг. Визначити місткість другого, якщо його висота в півтора рази перевищує висоту першого.

Відповідь. 75 кг.

5.62. Переріз залізничного насипу має форму рівнобічної трапеції, висота якої дорівнює 3 м, а сторони основ відповідно 4 м та 8 м. Скільки необхідно землі на 1 км такого насипу?

Відповідь. 18 000 $м^3$.

5.63. Переріз каналу має форму трапеції. Ширина каналу нарівні води 12,5 м, а біля дна 8,5 м. Його глибина 3 м. Швидкість течії води в каналі 1,6 км/год. Яка кількість води (в кубічних метрах) протікає через переріз каналу за 1 с?

Відповідь. 14 м^3.

5.64. Переріз каналу – трапеція з основами 6 м та 14 м. Ділянка каналу між шлюзами довжиною 2 км вміщує $6 \cdot 10^4$ м^3 води. Визначити глибину каналу.

Відповідь. 3 м.

5.65. При кожному ударі серце людини виштовхує 175 см^3 крові. Серце робить 75 ударів за одну хвилину. Кубічну посудину яких розмірів потрібно було б мати, щоб вмістити кількість крові, яку перекачує серце за добу?

Розв'язання

Позначимо ребро шуканої посудини за *x*. Тоді маємо:

$x^3 = 75 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 175,\ x = 260$ (см),

тобто ребро куба має дорівнювати 2,6 м.

Відповідь. 2,6 м.

5.66. Якщо всі кубічні міліметри, що містяться в 1 м^3, поставити один на одного, то якої висоти отримаємо стовп?

Відповідь. 1000 км.

5.67. (Жартівлива задача.) Кубічний ящик яких розмірів був би потрібен, щоб у нього могли сховатися всі люди, що живуть на Землі? Людей на Землі близько 6 х 10^9. Вважати, що 6 людей займають об'єм 1 м^3.

Зауваження. Об'єм людського тіла – близько 50 дм^3, тобто м^3. Але людські тіла, звичайно, не вкладаються щільно, тому слід відвести більше місця.

Відповідь. Ребро ящика не перевищило б 1 км.

5.68. (Жартівлива задача.) Якби все населення земної кулі раптом пірнуло б у Ладозьке озеро, то на скільки піднявся б у ньому рівень води? Поверхня озера – 18 000 км^2. Людське тіло має об'єм, що в середньому дорівнює 50 дм^3.

Відповідь. Рівень води піднявся б на 2 см.

2.6. Піраміда

Дана НМТ (як і всі НМТ, які пов'язані із вивченням конкретних геометричних тіл) містить прикладний матеріал, багатий цікавими фактами. Подачу його можна здійснювати як у формі розповіді вчителя, так і бесіди з учнями. У випадку бесіди доцільно матеріал розмежовувати запитаннями як: «Що означає термін піраміда?»; «З чим асоціюється у вас піраміда?»; «Як часто можна спостерігати тіла пірамідальної форми у природі, побуті, архітектурі тощо? Чим це зумовлено?».

Про походження терміну «піраміда»

«За свідченням деяких дослідників, слово «піраміда» походить від єгипетського «перемус», що означає діагональ основи. Форму правильних чотирикутних пірамід мають легендарні єгипетські піраміди, які видатний французький архітектор Ле Корбюзьє назвав «німим трактатом з геометрії». З Єгипту, можливо, походить і сам термін «піраміда». За однією з гіпотез, відповідне грецьке слово «пураміс» утворилося від давньоєгипетського «перо», що означало «великий будинок» – саме так називали єгиптяни усипальниці своїх фараонів.» [4]

Слід зауважити, що у підручниках такої інформації мало. Підведення до створення та вивчення математичної моделі – піраміди – краще проводити у вигляді розповіді вчителя з використанням заздалегідь підготовлених повідомлень учнів.

Учитель починає: «Де ми зустрічаємося з реальними прообразами геометричних пірамід? Дахи пірамідальної форми прикрашають різні кіоски, альтанки, «грибочки» на пляжі тощо. Намети (циркові, туристичні) часто мають форму піраміди. Форму правильної шестикутної піраміди (зокрема і зрізаної) мають бетонні стовпці, що є уздовж шляху в небезпечних для транспорту місцях – на поворотах з крутими схилами, поблизу ярів. У формі правильної чотирикутної піраміди роблять ковпаки над димовими трубами (такі ковпаки потрібні для того, щоб атмосферні опади не попадали всередину труби). Урни, тачки, бункери для піску або розчину, що застосовуються на будівництві та в промисловості, часто виготовляють у вигляді правильної зрізаної чотирикутної піраміди (вибір такої форми зумовлений зручним завантаженням і вивантаженням матеріалів). Наведіть інші приклади».

Далі учні наводять свої приклади. Учителю варто доповнити їх відповіді, наприклад, інформацією про піраміду в архітектурі та природі.

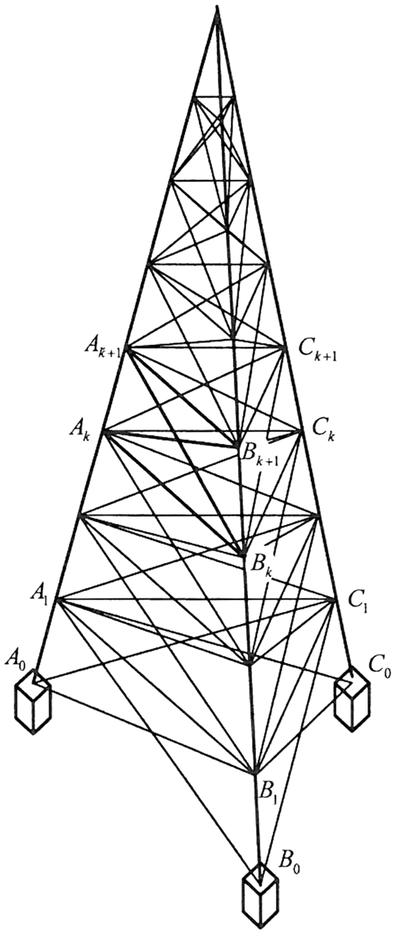
У природі тіла пірамідальної форми зустрічаються рідко. Відома груша пірамідальної форми. Це груша-кайон із Західного Паміру. Її плоди схожі на трикутні пірамідки, що мають масу до 700 г.

Отримані відомості приводять до створення нової математичної моделі – піраміди, яка буде центральним об'єктом НМТ. На ступені СММ потрібно ввести поняття висоти піраміди, різних кутів, представлених у ній, зрізаної піраміди тощо. їх вивчення буде пов'язано з поняттями, що опрацьовувалися в НМТ «Базова». На перших заняттях цієї НМТ доцільно виготовити кілька моделей пірамід (кожен учень має зробити власну).

Для здобуття навичок зображати піраміду на площині учні повинні спочатку звернутися до узагальнених відомостей про зображення просторових фігур на площині. Оскільки піраміда вивчається після призми, то учні вже мають певний досвід і тому можуть самостійно спробувати утворити правила зображення різних видів пірамід на площині. Після розгляду питання про поверхню піраміди та її площу можна переходити до розв'язування абстрактних задач із поступовим переходом до прикладних.

Пропонуємо добірку прикладних задач. їх доцільно використовувати як дидактичні матеріали для розв'язування (групового чи індивідуального) в аудиторії, для домашніх завдань, а також як доповнення до текстів самостійних і контрольних робіт.

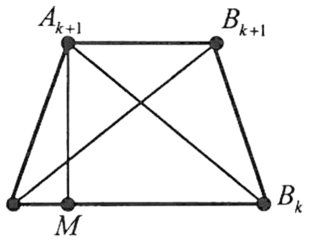
Задачі, пов'язані з обчисленням площі поверхні піраміди або окремих її елементів



6.1. Томатна паста «Чумак» розфасована у пачки, що мають форму правильної трикутної піраміди, бічні ребра якої становлять 14 см, а периметр основи – 42 см. Скільки матеріалу йде на виготовлення однієї пачки? На шви додати 2 % матеріалу. Який об'єм пасти в одній пачці?

Відповідь. 340 см^2; 320 см^3.

6.2. Щогла антени радіостанції має форму правильної трикутної піраміди. Висота щогли $SO = h$. Відстань між опорними точками $A_0B_0 = B_0C_0 = C_0A_0 = a$. Для міцності опорні стрижні щогли сполучені між собою за допомогою горизонтальних і косих стрижнів, причому яруси горизонтальних стрижнів поділяють кожний з опорних стрижнів на n рівних частин. Визначити довжини стрижнів щогли.



Відповідь.

$$A_{k+1}B_k = \frac{1}{n}\sqrt{h^2 + a^2\left(\frac{1}{3} + (n-k)(n-k-1)\right)}.$$

Щоб визначити довжини всіх горизонтальних стержнів, треба у формулі надати k таких значень: $k = 1, 2, 3, \dots n-1$. Щоб визначити довжини всіх косих стержнів, треба у формулі надати k таких значень: $k = 0, 1, 2, \dots n-2$.

6.3. Купол дзвіниці має форму правильної восьмикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 футів, апофема – 7 сажнів і 5 футів. За скільки днів зможуть покрити цей купол 4 робітники, якщо для покриття 27 квадратних футів поверхні даху один робітник витрачає четверть дня? (1 м = = 0,47 сажня = 3,28 фута.)

Відповідь. 4 дні.

6.4. Відома піраміда Хеопса спочатку мала висоту 147 м і займала квадратну площу 34 300 м^2. Скільки тонн вапна потрібно було для облицювання цієї споруди, якщо прийняти, що на кожний квадратний метр використовують 10 пудів вапна? (1 т = 61 пуд.)

Відповідь. 11 000 т.

Задачі, пов'язані з обчисленням об'єму піраміди

6.5. Менша з пірамід Гізи – піраміда Мікереніуса, має висоту близько 30 сажнів. Її основа – квадрат, сторона якого близько 58 сажнів. Визначити, скільки глиб, кожна по 40 кубічних футів, пішло на спорудження піраміди, якщо вважати її суцільною? (1 м = 0,47 сажня = 3,28 фута.)

Відповідь. ≈ 270 000 глиб.

6.6. Найвища єгипетська піраміда – піраміда Хеопса - має висоту 144 м; сторона її квадратної основи дорівнює 230 м. Внутрішні ходи та кімнати займають 30 % її об'єму. Визначити масу каменю, який пішов на її спорудження. Маса 1 м^3 каменю дорівнює 2,5 т.

Відповідь. 4 400 000 т.

6.7. Каркас намету, обтягнутий парусиною, складається із 4 жердин, що утворюють правильну чотирикутну піраміду. Скільки повітря міститься в наметі і скільки метрів парусини потрібно для виготовлення намету, якщо:

а) висота намету 2,4 м, а відстань між основами кожних двох найближчих жердин дорівнює 2 м;

б) довжина жердини 3,6 м, а площа, яку займає намет, дорівнює 4,41 м^2?

Врахувати, що ширина парусини 70 см, і на дно намету її не використовували.

Відповідь. а) 3,2 м^3; 15 м; б) 4,7 м^3; 20 м.

6.8. Фільтр виготовлено у вигляді правильної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 17,5 см, а ребро основи - на 40 % менше. Скільки води може вмістити фільтр, якщо він має форму:

а) шестикутної піраміди;

б) трикутної піраміди;

в) п'ятикутної піраміди?

Відповідь, а) 1310 см^3; б)256 см^3; в)950 см^3.

6.9. Десяток залізних корабельних цвяхів мають масу 2 кг 304 г. Визначити:

а) довжину цвяха;

б) поверхню цвяха, якщо він має форму правильної чотирикутної піраміди і периметр цвяха у самій широкій його частині - 8 см. Густина заліза 7,2 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь: а) 24 см; б) 100 см^2.

Задачі, пов'язані з обчисленням площі поверхні або об'єму зрізаної піраміди

6.10. Поряд із будинками на дитячих майданчиках побудували 5 пісочниць. Кожна з них має форму правильної зрізаної чотирикутної піраміди зі сторонами основ 200 см та 160 см, висота пісочниці на 85 % менша від довжини меншої сторони. Яку масу піску потрібно привезти, щоб їх наповнити? Густина піску 1,5 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. 1,9 т.

6.11. Форма для сирної паски (правильна чотирикутна зрізана піраміда) складається із 4-х бічних дощечок, сполучених гачечками, дна (менша основа) та дощечки (більша основа) для підкладання її під прес, яким надавлюють на сир. Визначити висоту форми, якщо:

а) площа бічних дощечок 1700 см^2, площа всіх дощечок 2376 см^2, а висота бічної дощечки – 25 см;

б) сума площ бічних стінок форми дорівнює 2304 см^2, висота бічної грані дорівнює її середній лінії, а бічне ребро цієї грані 25 см;

в) поверхня всіх граней форми дорівнює 954 дм^2, поверхня бічних стінок – 288 дм^2. Ребро верхньої дощечки довше від ребра дна на 6 дм.

Відповідь. а) 24 см; б) 23 см; в) 26 см.

6.12. Зруб колодязя має форму правильної зрізаної чотирикутної піраміди. Поверхня зрубу всередині колодязя дорівнює 90,5 м^2, ширина стінки колодязя внизу на 142 см більша, ніж ширина стінки отвору зрубу зверху. Визначити, на скільки відер води в колодязі менше у липні, ніж у вересні, якщо у липні вода стоїть на половині висоти колодязя, а у вересні – на 71 см вище. Висота стінки зрубу дорівнює 6,4 м. Врахувати, що відро вміщує 10 л води.

Відповідь. $\approx$ 448 відер.

2.7. Циліндр

В основній школі учні ознайомилися з циліндром у 6-му класі. Тому вивчення даного тіла у систематичному курсі стереометрії можна розпочати з повторення. Наприклад, доцільно провести бесіду про поширеність циліндричної форми в оточуючому світі та причини цього. Обов'язково слід згадати, як можна утворити циліндричну форму (йдеться про прямий круговий циліндр).

«Більшість предметів (або їх частин), створених людиною, має циліндричну форму. Допоможіть навести приклади». Учні завжди називають велику їх кількість (це резервуари для нафти, циліндричні труби, котки для асфальтування, цистерни для молока, корпуси водонапірних башт, ринви, рулони паперу, консервні бляшанки, склянки, пляшки, батарейки, ручки, пробірки, качалки для розкачування тіста, сито тощо). Оскільки вони, переважно, перелічують предмети побуту, можна звернути увагу старшокласників на предмети та технічні пристрої циліндричної форми, з якими вони мали справу на уроках фізики, хімії, виробничого навчання, ОБЖД, фізичного виховання, допризовної підготовки основ медичних знань тощо. Відповіді учнів, за потребою, можна доповнити.

Знову потрібно повернутися до запитання: Чому циліндрична форма характерна для великої кількості предметів не лише утворених природою, але й виготовлених людиною? «Досить багато продуктів харчування виготовляють або упаковують у циліндричні форми. Наприклад, торти, цукерки, тверді сири, ковбаси. їх циліндрична форма, як і форма різноманітних посудин, зокрема каструль, банок, форм для тортів тощо, обумовлена зручністю, економічністю у використанні (якою?). Причинами доцільності пояснюється циліндрична форма різних футлярів, сувоїв паперу або матерії. Чому? Циліндричну форму мають також більшість предметів, які обертаються (точильний камінь, котушка, резервуари для білизни у пральних машинах, ємності для продуктів у кухонних комбайнах, блоки тощо. Поясніть, чому (згадайте фізику)».

Зауважимо, що на деякі запитання учням важко буде знайти відповідь. До відповідей на них можна повернутися після вивчення площі поверхні та об'єму циліндра. Неможливість знайти обґрунтовану відповідь створить мотивацію вивчення подальшого стереометричного матеріалу.

Учням цікаво буде дізнатися про те, що з усіх тіл з даною поверхнею найбільший об'єм має прямий круговий циліндр, основа якого дорівнює $\frac{1}{6}$ повної поверхні. Цей математичний факт привів до того, що певний час деякими архітекторами пропагувалась ідея побудови будинків циліндричної форми. Такі будинки мали перевагу, крім економії будівельного матеріалу, ще і в тому, що менша поверхня зовнішніх стін забезпечувала менші втрати тепла зимою та менше нагрівання стін улітку. Радіальне розташування кімнат скорочує переходи з однієї кімнати в іншу, що особливо цінується у великих будівлях установ і готелів.

Зауважимо, що спосіб обчислення бічної поверхні циліндра знайшов ще Архімед. Об'єм циліндра і в давні часи обчислювався множенням площі основи на висоту. Але це правило було знайдено не внаслідок теоретичних міркувань, а виведено практично. Тому доцільно додати до попереднього матеріалу відповідну історичну інформацію.

Після вивчення суто стереометричного матеріалу пропонуємо розв'язувати прикладні задачі із запропонованих нижче.

Задачі, пов'язані з обчисленням об'єму циліндра або його перерізами

7.1. Кружка місткістю 1000 $см^3$ для вимірювання молока має форму циліндра, висота якого дорівнює діаметру основи. Визначити висоту такої кружки.

Відповідь. ≈ 11 см.

7.2. Кружка, яку використовують для вимірювання не молока, а інших речовин, повинна мати форму циліндра, висота якого вдвічі більша від діаметра основи. Якою має бути висота кружки?

Відповідь. ≈ 17 см.

7.3. Скільки необхідно шоколаду, щоб покрити морозиво циліндричної форми з діаметром 4 см та висотою 11 см, якщо на 1 см^2 кондитер повинен витратити 100 мг шоколаду?

Відповідь. ≈ 16 г.

7.4. Є коробка циліндричної форми для льодяників таких розмірів: діаметр дна 16 см, висота коробки 8 см. Якою повинна бути висота іншої коробки, щоб для такої самої місткості, що і перша, вона мала діаметр дна 12 см?

Відповідь. ≈ 14 см.

7.5. Туш для вій має об'єм 9 мл у циліндричному флаконі висотою 12,1 см і діаметром основи 1,5 см. Який відсоток від об'єму флакона займає об'єм туші? Скільки туші в середньому витрачається на вії за одне їх фарбування? Вважати, що одного флакона туші вистачає на 4 місяці.

Відповідь. 42 %; 0,1 мл.

7.6. Скляний флакон очищаючого тоніку для обличчя має циліндричну форму. Висота флакона дорівнює 14 см, а діаметр основи – 6 см. Скільки рідини міститься у флаконі, якщо 18 % цього флакона становить дно, виготовлене з суцільного скла?

Відповідь. ≈ 320мл.

7.7. Є дві циліндричні посудини. Одна в півтора рази вужча від другої, але вдвоє вища. Яка посудина має більшу місткість?

Відповідь. Перша.

7.8. Є дві циліндричні колоди. Одна має товщину 20 см і довжину 1,5 м. Друга колода на 5 см товща, але коротша на 50 см від першої. Яка колода має більший об'єм?

Відповідь. Друга.

7.9. Скільки треба взяти циліндричних колод довжиною 6 м і товщиною 25 см, щоб мати об'єм 1 м^3?

Відповідь. ≈ 3,5.

7.10. Потрібно виготовити таку циліндричну мензурку з поділками для вимірювання кубічних сантиметрів рідини, щоб відстань між її двома сусідніми поділками дорівнювала 1 мм. Визначити внутрішній діаметр мензурки.

Відповідь. $\approx 3{,}6$ см.

7.11. Щоб визначити площу поперечного перерізу тонкої трубки, в неї влили 6,35 г ртуті. Довжина стовпчика ртуті дорівнює 14,7 см. Обчислити радіус трубки. Густина ртуті 13,6 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 1 мм.

7.12. Пуф має форму циліндра. Його висота 0,7 м, а діаметр основи 0,6 м. Скільки потрібно тканини, щоб його перетягнути, якщо витрати матеріалу на шви становлять 10 %?

Відповідь. ≈ 2 м.

7.13. До даху будинку з одного боку по його довжині потрібно виготовити жолоб, який має форму на пів-циліндра , і вертикальну трубу для дощової води. Діаметр труби та жолоба повинен дорівнювати 15 см. Довжина будинку дорівнює 15 м, а висота – 12,5 м. Скільки квадратних метрів листового заліза піде на виготовлення жолоба та труби? На шви і спайки додати 5 % матеріалу.

Відповідь. 10м^2.

7.14. Визначити масу 1 м мідної проволоки діаметром 7 мм. Густина міді – 8,9 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. 0,3 кг.

7.15. Визначити масу залізної труби довжиною 1 м, якщо зовнішній її діаметр 5,5 см, внутрішній – 5 см. Густина заліза 7,8 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. 3,2 кг.

7.16. Гирю в 1 кг виготовлено з латуні (густина – 8,5 $\frac{г}{см^3}$) у формі циліндра. Маса ручки складає 12 % маси гирі. Визначити розміри гирі, якщо її висота дорівнює діаметру.

Відповідь. 5 см.

7.17. У циліндричному колодязі з внутрішнім діаметром 2,1 м вода прибула на 28 см. Скільки літрів води прибуло?

Відповідь. ≈ 970 л.

7.18. Торговець купив оптом 1024 плетених коробок з вишнями. Кожна коробка має форму циліндра з діаметром основи 0,2 м та висотою 0,3 м. Скільки відсотків прибутку отримав торговець, якщо 1 гарнець (1 гарнець = 3,28 дм^3) вишень він продавав по 90 к., а сам заплатив за всі вишні 2200 грн?

Відповідь. 20 %.

7.19. Стаціонарну циліндричну цистерну з плоским днищем місткістю 12 т заповнено пальним. Висота цистерни дорівнює 6 м, а рівень пального – 2 м. Скільки пального міститься в цистерні?

Відповідь. 4 т.

7.20. Скільки циліндричних бочок довжиною 1,5 м і діаметром 0,8 м потрібно, щоб розлити у них вміст циліндричної цистерни довжиною 4,5 м і діаметром 1,6 м?

Відповідь. 12 бочок.

7.21. У циліндричну посудину діаметром 10 см опущено тіло складної конфігурації. Визначити об'єм тіла, якщо рівень рідини в посудині піднявся на 4 см.

Відповідь. ≈ 314 см^3.

7.22. Автомобіль вантажопідйомністю 3 т необхідно завантажити стальними болванками циліндричної форми. Які вимірювання та обчислення необхідно провести, щоб визначити необхідну кількість болванок для повного завантаження автомобіля?

Відповідь. Виміряти діаметр основи та довжину кожної болванки. Обчислити об'єм, а потім – масу однієї болванки. Для знаходження необхідної кількості вантажопідйомність автомобіля розділити на знайдену масу однієї болванки.

7.23. Картонний папір згорнуто в рулон циліндричної форми. Як наближено виміряти площу поверхні паперу?

Відповідь. $S = \frac{V}{d} = \pi h \cdot \frac{D_2^2 - D_1^2}{4d}$, де S – шукана площа паперу, d – товщина картону, D_1, D_2 – відповідно внутрішній і зовнішній діаметри рулону картону, h – висота рулону, V – об'єм рулону.

7.24. Сергійко насипав у циліндричну каструлю трошки крупи та запитав маму: «Скільки потрібно налити води, щоб зварити смачну кашу?» – «Це дуже просто, – відповіла мама. – Нахили каструлю, постукай, щоб крупа пересипалась і закрила рівно половину дна. Тепер зафіксуй точку на стінці каструлі біля краю, до якого піднялася крупа. До цього рівня і потрібно налити воду». – «Але крупи можна насипати більше або менше, та й каструлі бувають різні – широкі, вузькі», – сказав Сергійко. - «Не має значення, цей спосіб стане у пригоді в будь-якому випадку», – відповіла мама. Чи справді це так?

Вказівка. Спочатку сформулюйте задачу математичною мовою: відношення об'ємів води (V_B) і крупи (V_K) за вказаним рецептом для довільної циліндричної каструлі є однаковим. Треба знайти, чому дорівнює це відношення. Далі досліджувану модель помістіть у систему координат так, щоб основа циліндра (каструлі) лежала у площині *xy*, а центр основи *O* став початком координат. Через точку x_0 на осі *X*, $x_0 \in [-R; R]$ побудуйте переріз тіла (тобто гірки з крупи всередині каструлі) площиною, перпендикулярною до осі *x* і паралельною осі *y*. У перерізі отримаєте трикутник. Далі потрібно використати поняття інтеграла та виконати обчислення, у результаті яких отримаємо, що $\frac{V_B}{V_K} = \frac{3\pi}{2} - 1$. Ця величина не залежить від розмірів циліндра (каструлі).

7.25. Горизонтально розміщену циліндричну цистерну майже повністю вкопано в землю. Чи можна визначити, яка частина об'єму цистерни знаходиться у землі? Як саме? Поверхня землі навколо цистерни горизонтальна.

Розв'язання

Частина основи цистерни, яка виступає над землею, є сегментом. Вимірявши хорду $2d$ цього сегмента і його висоту (стрілку) h, прийдемо до такого результату:

$$V = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2dh}{d^2+h^2} - \frac{2dh\left(d^2-h^2\right)}{\pi\left(d^2+h^2\right)^2}.$$

Щоб уникнути тригонометричних розрахунків, виміряємо довжину I дуги сегмента та прийдемо до результату:

$$V = \frac{lh}{\pi\left(d^2+h^2\right)} - \frac{2dh\left(d^2-h^2\right)}{\pi\left(d^2+h^2\right)^2}.$$

Задачі, пов'язані з обчисленням площі поверхні циліндра або комбіновані

7.26. Обчислити повну поверхню обох коробок із задачі 7.4 та порівняти, яку коробку (при однаковій місткості) вигідніше виготовляти, щоб витрати матеріалу були найменші.

Відповідь. Другу.

7.27. Визначити енергетичну цінність пачки печива «Мрія», коли відомо, що енергетична цінність 100 г цього продукту становить 400 ккал, а маса одного печива -8 г. Відомо, що печиво упаковано у вигляді циліндра (в ряд) і одне печиво має діаметр 5 см і висоту 4 мм, а площа паперу, що обгортає печиво (крім основ), дорівнює 267 см^2.

Відповідь. 1400 кал.

7.28. У 2005 р. киргизькі вчені запустили у космос із прискоренням 1 м/с перший наносупутник масою 5 кг у формі циліндра довжиною 50 см та приблизно в 2 рази меншим діаметром основи. Яка площа його бічної поверхні? (Наносупутники призначені для спостереження за Землею, для отримання даних про погоду. Ними користуються під час дистанційної освіти школярів і студентів, які знаходяться у віддалених від навчального закладу районах.)

Відповідь. $\approx 0{,}4$ м^2.

7.29. Діаметр котка для утрамбування ґрунту дорівнює 1 м, а ширина – 1,5 м. Яка площа утрамбовується котком за один його оберт?

Відповідь. ≈ 4,7 $м^2$.

7.30. Шліфувальний круг діаметром 350 мм і товщиною 60 мм за час роботи зменшився в діаметрі на 4,5 мм. На скільки при цьому зменшилася його робоча (циліндрична) поверхня?

Відповідь. ≈ 850 $мм^2$.

7.31. Золотих справ майстер позолотив усередині 7 однакових циліндричних склянок. Діаметр дна склянки 6 см, а глибина – 10 см. Скільки використано золота на позолоту склянок і скільки коштує це золото, якщо на кожен 1 $см^2$ поверхні пішло 0,026 г золота і якщо 1 г золота коштує приблизно 50 грн?

Відповідь. ≈ 40 г; ≈ 2000 грн.

7.32. Кожне червоне кров'яне тільце (кулька) може поглинати та виділяти кисень тільки з поверхні. Тому фізіологічне функціонування кульок у крові буде тим успішніше, чим більша їх загальна поверхня. А вона тим більша, чим більше роздріблено речовину і чим більша, відповідно, кількість кульок. Фізіологи на основі наближеного визначення поверхні кожної кульки в крові людини, а також беручи до уваги, що в 1 $мм^3$ крові у людини міститься 5 000 000 таких кульок і що кількість крові у дорослої людини дорівнює приблизно 5 л, обчислили, що загальна поверхня всіх червоних кульок, які містяться у крові людини, дорівнює 3200 $м^2$. Перевірити, чи правильно знайдено загальну поверхню кров'яних тілець людини, знаючи, що кожна кулька насправді (всупереч назві) має форму гральної шашки діаметром 0,007 мм і висотою 0,002 мм.

Відповідь. 3025 $м^2$.

7.33. На циліндричний барабан підйомної машини, діаметр якої 750 мм і ширина 350 мм, намотується стальний трос товщиною 20 мм. Скільки метрів тросу вміщується в один ряд на поверхні барабана, якщо його робоча частина становить 80 %?

Відповідь. ≈ 33 м.

7.34. Відпрацьована пара турбіни охолоджується в циліндричному конденсаторі із встановленими в днища трубками, по яких тече вода, охолоджуючи її. Скільки потрібно трубок діаметром 23 мм і довжиною 2855 мм, щоб загальна площа охолодження становила 280 м^2 ?

Відповідь. ≈ 1350 трубок.

7.35. Діаметр відра циліндричної форми дорівнює 21 см, а висота – 38 см. Чи можна зі шматка жерсті прямокутної форми розмірами 62 см х 40 см зробити заготовку бічної частини цього відра?

Відповідь. Ні.

7.36. Павільйон на плані має розміри 40 м х 10 м, а його вид спереду є сегментом висотою 5 м. Дах павільйону є частиною циліндричної поверхні, радіус якої дорівнює 42,5 м. Обчислити поверхню даху.

Відповідь. ≈ 4000 м^2.

Разом із розв'язуванням прикладних задач корисно також проводити роботи зі складання таких задач. Матеріал для них можна знайти, використовуючи предмети оточуючого середовища потрібної форми або інформацію, взяту з книг (різних довідників, енциклопедій тощо).

2.8. Конус

Із поняттям конуса та зрізаного конуса учні ознайомлюються наприкінці 9-го класу під час вивчення початкових відомостей із стереометрії. Проте доцільно не відразу переходити до формулювання означення конуса та розгляду його властивостей, а спочатку виділити вказану форму в оточуючому середовищі, розглянути її поширеність і доцільність вивчення. Це відповідає змісту першого ступеня – **ЕО**. Форму викладу прикладного матеріалу вчитель обирає самостійно. Рекомендуємо провести бесіду з учнями, предметом якої буде конічну форма, її естетика та практичність. Наведемо приклад такої бесіди.

«Конус – досить унікальна фігура. Вона є у природі як форма, до якої наближаються природні форми в своїй компактності, стійкості, раціональності, але в чистому вигляді зустрічається не досить часто. Зокрема, всі ми бачили зимою бурульки, які «ростуть» у вигляді конуса; ягоди полуниці, суниці можуть служити хоч і наближеною, але моделлю конуса. Наведіть інші приклади». Учні можуть назвати стовбури дерев, гори, «будиночки» молюсків, бивні та хобот слона. Такі приклади вчителю слід деталізувати. Конічну форму мають і вулкани. Не можна не розповісти про трепангів, які живуть у захищених від штормів бухтах.

У побуті ми частіше маємо справу з речами, елементи яких мають форму зрізаного конуса. Наведіть приклади». Учні часто називають лійки, склянки, бокали, горщики для кімнатних квітів, елементи технічних деталей, насипані на горизонтальній поверхні купи щебеню та піску, воронки, поширення променя світла від його джерела у темряві, капелюхи, палатки тощо. Доповнити їх відповідь можна так. «В астрономії конуси та зрізані конуси зустрічаються у різних супутників, у носовій частині ракет. Прикладом є також розтруб вогнегасника. Голка гравірувальна-тонкий металічний штифт з конусоподібним кінцем - застосовується для роботи по металу. Продукти харчування, наприклад цукерки, морозиво, часто роблять у вигляді конуса або зрізаного конуса.

Обов'язково слід з'ясувати з учнями те, чому для всіх перелічених вище об'єктів конічна форма є доцільною. «Розглянемо горщик для кімнатних рослин. Чим зумовлена його форма у вигляді зрізаного конуса?» Відповідь може бути такою: «Горщик для кімнатних рослин має вмістити корені рослин, які спочатку розходяться в різні сторони, а потім звужуються у вигляді конуса. Із горщика такої форми легко вийняти рослину, посадити в інший та насипати необхідний ґрунт».

Потрібно також обговорити із учнями, як саме утворюється конічна форма, що вона є однією з найбільш практичних, зручних, а отже і доцільних форм.

На закінчення бесіди учні можуть сформулювати означення конуса, що означає побудову нової математичної моделі. Потім можна перейти до означення зрізаного конуса, а далі - до вивчення та дослідження всередині побудованої моделі .

Пропонуємо для розв'язування такі прикладні задачі.

Задачі, пов'язані з обчисленням об'єму конуса

8.1. Визначити на око об'єм якого-небудь конічного предмета, а потім шляхом безпосереднього вимірювання обчислити об'єм та порівняти результати.

8.2. Фільтр має форму перекинутого конуса. Скільки рідини міститься в фільтрі, якщо радіус його основи (розтруб) становить 10 см, а довжина від дна до краю (твірна) – 26 см?

Відповідь. ≈ 2500 см^3.

8.3. Поглиблення келиха має форму конуса. Глибина келиха 17,5 см, а висота його стінки від дна до краю становить 18,5 см. Скільки келихів можна наповнити з кружки, діаметр дна якої дорівнює 9,1 см, а висота 12 см?

Відповідь. ≈ 1,5 келиха.

8.4. Келих, глибина якого дорівнює 12 см, а відстань від дна до краю 12,5 см, має форму перевернутого вершиною вниз конуса. Скільки повних келихів можна вилити в циліндричну склянку, висота якої дорівнює 10 см, а бічна поверхня дорівнює 235,5 см^2?

Відповідь. 2 келихи.

8.5. Щоб черпати гаряче масло, слід виготовити ложку, що має форму конічної лійки. Для цього взяли шматок жерсті площею 428 см^2 (ручка ложки виготовляється з іншого матеріалу). Скільки масла може вмістити ложка, якщо відстань від верхівки до краю ложки по твірній дорівнює 15 см? Густина масла $\frac{3}{4}\ \frac{г}{см^3}$, а на з'єднання використано 4,5 см жерсті.

Відповідь. ≈ 760 г.

8.6. Приблизно 2 фунти цукерок упаковано у паперовий подарунковий конічний пакунок висотою 18 см. Визначити площу аркуша використаного паперу, якщо фунт цукерок займає 600 см^3. Взяти до уваги, що площа аркуша паперу має бути в два рази більшою за площу поверхні пакунка. (1 кг = 2,44 фунта.)

Відповідь. 2300 см^2.

8.7. Об'єм видобутої в Росії в 1897 р, платини міг би дорівнювати об'єму куба зі стороною 2,2 фута. Визначити, якої висоти конус можна виготовити з цієї платини, якщо радіус основи конуса дорівнюватиме 2,5 фута (1 м = 3,28 фута).

Відповідь. 0,5 м.

8.8. У циліндричну посудину, радіус основи якої дорівнює 9 см, налито 39 000 см^3 води. Визначити, за скільки часу витече вода через отвір у нижній основі, якщо діаметр отвору 2,5 мм. Кількість рідини, що витікає за одну секунду, дорівнює gc, де g – площа отвору, c – швидкість витікання води за одну секунду. Швидкість витікання води (в метрах за одну секунду) дорівнює $\sqrt{2gh}$, де g = 9,696 м, h – висота рідини в посудині в метрах.

Відповідь. ≈ 11,8 хв.

8.9. Обчислити масу конічної купи піску висотою 2 м, якщо твірна конуса утворює з діаметром основи кут 45° (природній укіс піску). Маса 1 м^3 піску дорівнює 1900 кг.

Відповідь. 16 т.

8.10. Скільки тонн жита знаходиться в конусоподібній купі, висота якої дорівнює 2 м, а довжина кола основи 19 м. Насипна маса 1 м^3 жита дорівнює 0,8 т.

Відповідь. 14 т.

8.11. Бокал у вигляді конуса до країв наповнено соком. Петро хоче поділитися цим соком з Яном. Він перелив в інший, такий самий, бокал сік так, що у першому бокалі соку залишилось $\frac{3}{4}$ від попередньої висоти. У якому бокалі більше соку? Відповідь обґрунтувати.

Відповідь. У другому бокалі.

8.12. У закритій лабораторній посудині конусовидної форми міститься рідина. Якщо посудину розмістити вертикально вершиною вгору, то поверхня рідини знаходитиметься посередині твірної. На якій висоті буде рідина (починаючи від вершини), якщо конус розмістити вертикально вершиною вниз?

Відповідь. $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$ висоти.

8.13. Посудину у формі конуса поставлено на вершину так, що вісь її вертикальна. Висота конуса дорівнює 15 см, а діаметр основи 18 см. Посудину доверху наповнено водою та ртуттю, які взято в однакових за масою кількостях. Знайти висоту шару ртуті та води. Густина ртуті 13,6 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. 6,1 см; 8,9 см.

8.14. Суцільний залізний конус плаває у ртуті так, що вершина конуса занурена, а вісь розміщено вертикально. Знайти відношення висоти зануреної частини до всієї висоти конуса. Густина заліза 7,8 $\frac{г}{см^3}$, ртуті 13,6 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. $\approx$ 0,82.

8.15. Буй має форму закритого з усіх сторін пустотілого конуса, діаметр основи якого 0,8 м, а висота – 1,25 м. Яку масу має цей буй, якщо квадратний метр жерсті, з якої його виготовили, має масу (разом із фарбою) 12 кг? Не брати до уваги масу повітря в ньому, шви та заклепки.

Відповідь. $\approx$ 26 кг.

Задачі, пов'язані з обчисленням площі поверхні конуса

8.16. Дах башти має форму конуса, висота якого 10 м, а радіус основи 4,5 м. Цю поверхню треба покрити листовим цинком. Для цього беруть прямокутні листи довжиною 60 см та шириною 40 см. Скільки потрібно таких листів, якщо на з'єднання та крій потрібно додати 25 %?

Відповідь. $\approx$ 800 листів.

8.17. У дачному будиночку над димовою трубою з окружністю 125,6 см поставлено конічний навіс, край якого виступає над краєм труби на 2 см.

Висота навісу 35 см. Яку масу заліза використали на навіс, якщо на з'єднання пішло 17,5 см2, а лист шириною 70 см та довжиною 140 см має масу 12 фунтів? (1 кг = 2,44 фунта.)

Відповідь. ≈ 1,5 кг.

8.18. Скільки квадратних метрів парусини потрібно для виготовлення намету у формі конуса, якщо діаметр основи намету має дорівнювати 7 м, а бічні шви мати довжину 3 м 50 см, причому на шви та обрізки потрібно додати приблизно 1,5 м^2 ?

Відповідь. 40 м^2.

8.19. Під час реставрації старовинних будівель буває необхідно знайти площу поверхні високого конічного шпиля. Як це зробити, використовуючи лише рулетку? Знайти розрахункову формулу.

Відповідь. $S = \frac{L^2}{2(L-l)}$, де S – шукана площа, L – довжина кола основи (її можна виміряти рулеткою), l – довжина кола, проведеного на відстані 1 м уздовж твірної вгору (її теж можна виміряти).

Задачі, пов'язані з обчисленням об'єму та площі поверхні зрізаного конуса

8.20. Індійські жінки під час збирання насіння водяних рослин часто беруть із собою своїх маленьких дітей. Для безпеки вони кладуть їх на листя амазонського латаття. Кожен листок у поперечнику має до 2 м, а його краї високо загнуті вгору. Тому малюкам є де погратись і вони з листка не випадуть. Один дослідник для перевірки вантажопідйомності листка насипав на нього 10 відер піску. Тільки тоді листок потонув. Яку масу може витримати один такий листок?

Відповідь. 150 кг.

8.21. Відерко з морозивом має форму зрізаного конуса. Площа нижньої основи відерка дорівнює 50,2 см^2, висота – 10 см, висота стінки відерка – 11 см. Визначити, скільки морозива вміщується у відерко та кількість паперу, необхідного для виготовлення кольорової наклейки, що повністю обклеює відерко збоку.

Відповідь. ≈ 570 г; ≈ 290 см^2.

8.22. Вафельний ріжок вміщує близько 170 см^3 морозива. Відомо, що висота ріжка дорівнює 7 см, діаметр зверху в 1,2 рази більший від діаметра дна. Скільки (у метрах квадратних) вафель потрібно для виготовлення 100 таких ріжків?

Відповідь. ≈ 2 м^2.

8.23. Морозиво «Ріжок» виготовляють у вигляді конуса з діаметром основи 7 см. Збоку воно має обгортку зі спеціального паперу. Довжина обгортки від вершини морозива до основи дорівнює 17,5 см. Який об'єм має це морозиво? Як можна визначити його масу?

Відповідь. ≈ 218 м^3; для визначення маси морозива необхідно знати його густину. Зауважимо, що на етикетці морозива, як правило, вказується виробником об'єм або маса продукту.

8.24. Скільки (у метрах квадратних) матеріалу потрібно для виготовлення рупора, якщо діаметр одного кінця рупора повинен дорівнювати 4,4 см, діаметр розтруба – 44 см, а довжина стінки рупора від одного краю до другого – 20,7 см?

Відповідь. ≈ 0,16 м^2.

8.25. Поверхня абажура для лампи становить 258 см^2. Діаметр нижньої основи абажура дорівнює 8,5 см, а довжина кола верхньої – 18,8 см. Визначити висоту абажура.

Відповідь. ≈ 11 см.

8.26. Горщик для кімнатної рослини має форму зрізаного конуса. Його основа займає 113 см^2, висота дорівнює 20 см, а висота його стінки від одного краю до іншого – 20,5 см. Господині треба пересадити кімнатні рослини. Горщиків у неї 10, а коріння займає приблизно 40 % об'єму. Скільки господині треба купити землі, якщо вона має бути пухкою і густина такої землі наближено дорівнює 1,5 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 36 кг.

8.27. Нікелева каструля має форму зрізаного конуса, твірна якого становить 10 см. Поверхня бічної стінки каструлі дорівнює 565 см^2, а відношення радіусів дна і кришки дорівнює $\frac{4}{5}$. Визначити місткість каструлі:

а) в літрах;

б) у склянках, якщо радіус основи циліндричної склянки 3,4 см, а висота – 9,5 см.

Відповідь, а) 2,6 л; б) ≈ 8 склянок.

8.28. Чайна чашка, що має форму зрізаного конуса, вміщує 237 см^3.рідини. Висота чашки 6 см, а діаметр чашки зверху в $\frac{9}{5}$ рази більший від поперечника дна. Визначити поверхню чашки.

Відповідь. ≈ 140 см^2.

8.29. Чан має форму зрізаного конуса з радіусом дна 50,8 см; поперечник чана зверху дорівнює 137 см, а висота його стінки від дна до краю – 63,5 см. Скільки відер води необхідно влити, щоб заповнити чана (по висоті)? Відро – це циліндр, радіус основи якого 12,7 см, а висота – 24,3 см.

Відповідь. ≈ 15 відер.

8.30. Визначити в літрах місткість бочки, якщо діаметр верхнього і нижнього дна дорівнює 60 см, висота бочки 140 см, а довжина кола середнього (найбільшого) перерізу бочки становить 471 см. Визначити додатково місткість бочки у відрах.

Вказівка. Під час обчислення місткості бочки прийміть об'єм бочки рівним сумі об'ємів двох зрізаних конусів, що складено більшими основами. За більшу основу кожного такого конуса можна взяти середній переріз бочки (найбільший), а за меншу – основу бочки. Висота дорівнюватиме половині висоти бочки.

Відповідь. 1280 л; 104 відра.

8.31. Визначити, наскільки великою є похибка під час знаходження місткості бочки за способом, описаним у попередній задачі, порівняно з обчисленням об'єму бочки за формулою, що дає точніший результат:

$$V = \pi h\left(\frac{2R + r}{3}\right)^2,$$

де V – місткість бочки, R – найбільший радіус бочки, r – радіус дна, h – висота бочки (або відстань від одного до другого дна бочки).

8.32. Які потрібно провести вимірювання, щоб визначити об'єм предмета або споруди, що мають форму зрізаного конуса?

Для створення нових прикладних задач до теми «Конус» можна використати дані до матеріалів першого ступеня НМТ.

2.9. Куля

Вивчаючи кулю, неможна обмежитися розглядом лише її геометричних властивостей. Потрібно розкрити причину широкого застосування цієї довершеної форми в техніці та побуті (серед усіх замкнених поверхонь однієї й тієї самої площі кульова поверхня обмежує найбільший об'єм; серед усіх тіл певного об'єму куля має найменшу поверхню), звернути увагу на поширеність цієї форми в природі. Бесіда з учнями може бути такою. «Властивість кулі мати найменшу поверхню серед усіх тіл певного об'єму яскраво ілюструє кульова форма мильних бульбашок, яка зумовлена тим, що частинки мильної рідини утворюють форму з найменшою потенціальною енергією, тобто найменшою поверхнею. Але для однакового об'єму (що визначається зрівноваженням атмосферного тиску й тиску всередині бульбашки) поверхня буде мінімальною тоді, коли матиме форму сфери. Тому мильна бульбашка і набирає вказаної форми. Відомо також, що вода в стані невагомості розщеплюється на окремі кульки, які повільно та хаотично рухаються. Пояснення цього явища - те саме. Придивіться: холодної ночі кіт згортається клубочком, що нагадує кулю.

Мабуть, він теж знає ізопериметричний секрет. Який саме? З усіх тіл однакового об'єму куля має найменшу площу поверхні».

Звичайно, потрібно навести приклади матеріальних реальних куль або сфер. Учні зазвичай називають кульки підшипника, спортивні ядра, дробини, цукерки-драже, м'ячі, газгольдери (посудини для зберігання газів, швидкозаймистих рідин на хімічних підприємствах). За потребою учитель доповнює: «Кульову форму мав корпус першого штучного супутника Землі. Форму, близьку до кульової, мають Земля, Місяць, Сонце та інші планети. Таку форму мають деякі плоди, наприклад, кавуни, горошини, вишні тощо.

Доцільно розповісти учням також про те, що раніше, коли для зважування дорогоцінних каменів не існувало точних гир, замість них використовували горошини рослини *цератонії*. «Горошини були точними копіями одна одної та важили по 0,2 г. Міру такої ваги назвали *карат*. І хоча нині горошини цареградських ріжків (це інша назва цератонії) не використовують, карат як міра ваги зберігся.

Тіла, що мають форму кулі, досить широко представлені в *архітектурі* побудови кулястих будинків, що даватиме велику економію будівельних матеріалів для зовнішніх стін. Є й інші переваги, зокрема, відсутність даху (в звичному розумінні) та зменшення площі тротуарів біля будинку (вся будівля розміщується на круглому цоколі з діаметром приблизно у два рази меншим, ніж діаметр усієї будівлі). Ідею побудови кульового будинку було реалізовано в 1928 р. на Дрезденській виставці. Діаметр будівлі становив 28 м. Чому, на вашу думку, незважаючи на означені переваги, будинки кулястої форми все ж не набули поширення?»

До НМТ «Куля» пропонуємо такі прикладні задачі.

Задачі, пов'язані з об'ємом кулі та обчисленням її елементів

9.1. Американські астрономи виявили у сузір'ї Кентавра найбільший алмаз у Всесвіті. Його маса в каратах обчислюється одиницею з 34 нулями. Цей алмаз є ядром згаслої зірки (білого карлика), що знаходиться від нашої планети на відстані-480 трильйонів кілометрів. Який радіус цього алмаза? Густина алмаза 3,5 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 500 000 км.

9.2. У скільки приблизно разів об'єм м'ясистої частини вишні більший від об'єму кісточки?

Розв'язання

Оскільки діаметр вишні приблизно у три рази більший від діаметра кісточки (те і друге приймаємо за кулі), то об'єм вишні більший від об'єму кісточки в 27 раз, а об'єм м'якоті більший від об'єму кісточки в 26 раз. Отже, об'єм кісточки становить близько $\frac{1}{26}$, тобто 4 % об'єму м'якоті.

9.3. Зазвичай маса краплини дощу не перевищує 0,065 г. Але трапляється, наприклад на острові Ява, що середня маса крапель дорівнює 0,16 г. Визначити діаметр дощових крапель, якщо вважати їх форму кулястою. 1 см^3 води має масу 1 г.

Розв'язання

0,065 г води займає 0,065 см^3 або 65 мм^3. Діаметр кулі такого об'єму отримуємо з рівняння $\frac{1}{6}\pi x^3 \approx 65$, де x – діаметр у міліметрах. Звідси маємо, що $x = \sqrt[3]{\frac{6{,}65}{\pi}} \approx 5$ (мм). Отже, велика дощова крапля має діаметр близько 0,5 см. Діаметр найбільших виміряних крапель (масою 0,16 г) дорівнює 6,7 мм.

9.4. Під час охолодження насиченої водяної пари від 15° C до 14° C з одного кубічного метра виділяється 0,75 г води. Вважаючи, що діаметр крапель, що при цьому утворюються, дорівнює 0,5 мм, обчислити, скільки їх виділяється при охолодженні кубічного метра повітря, насиченого водяною парою.

Розв'язання

Об'єм краплі дорівнює $\frac{1}{6}\pi \cdot 0{,}5^3 = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}125 \approx 0{,}065$ (мм^2).Маса такої краплі дорівнює 0,065 мг. Тоді матимемо 0,75 · 1000 : 0,065 = 11 000 (крапель).

Зауваження. Товщина дощових хмар вимірюється сотнями метрів. Це означає, що з кожного квадратного метра нижньої поверхні такої хмари випадають мільйони крапель.

9.5. Шпаруватість ґрунтів є результатом нещільного прилягання частинок ґрунту одна до одної, внаслідок чого між ними залишаються проміжки або пори. Якщо уявити, що ґрунтові частинки мають вигляд кульок однакового розміру, то ці частинки можуть бути розташовані так, що об'єм між шарами буде найбільший (пухкий ґрунт), або найменший (щільний ґрунт). У першому випадку кульки кожного верхнього ряду будуть дотикатися з кульками нижнього ряду «верхівками», а в другому – кожна кулька верхнього ряду міститься (є частиною) в проміжку, утвореному двома кульками нижнього ряду. Обчислити, який відсоток загального об'єму ґрунту повинен складати об'єм пор при самому пухкому його складі.

Розв'язання

Задача зводиться до обчислення відношення об'єму кулі до об'єму описаного куба. Шукану величину знайдемо відніманням цього відношення від одиниці:

$$\frac{1}{6}\pi d^3 : d^3 = \frac{\pi}{6};\ 1-\frac{\pi}{6} \approx 1-0{,}524 = 0{,}476 = 47{,}6\ \%$$

9.6. Відомо близько 1000 малих планет (астероїдів), що переміщуються між Марсом і Юпітером. Висловлювалися припущення, що всі вони з'явилися в результаті руйнування однієї планети. Обчислити діаметр цієї гіпотетичної планети, беручи до уваги, що середній діаметр астероїдів 50 км і що відома лише приблизно десята частина існуючих астероїдів.

Розв'язання

Куля, об'єм якої в 10 000 раз більший за об'єм кулі з діаметром 50 км, повинна мати діаметр в $\sqrt[3]{10000}$ раз більший, тобто він має дорівнювати $50 \cdot 21{,}54 = 1077$ (км).

Зауваження. З отриманого результату видно, що діаметр такої планети в 3,5 рази менший від діаметра Місяця.

9.7. Чи може плавати у воді пустотіла мідна куля, зовнішній діаметр якої 12 см, а товщина стінок 1,5 см? (Тіла плавають у воді лише тоді, коли їх маса менша від рівної за об'ємом кількості води.)

Розв'язання

Об'єм пустотілої кулі визначимо як різницю об'ємів кулі діаметром 12 см та порожнини кулі діаметром 9 см:

$\frac{1}{6}\pi \cdot 12^3 - \frac{1}{6}\pi \cdot 9^3 \approx 523{,}7$ (см^3).

Її маса дорівнює 523,7 · 9 ≈ 4713 (г). Маса водяної кулі однакового зовнішнього об'єму дорівнює $\frac{1}{6}\pi \cdot 12^3 = 904{,}78$ (г). Отже, дана куля не плаватиме у воді.

9.8. Мідна куля, радіус якої дорівнює 3 см і що має всередині порожнини, плаває у воді, занурившись наполовину. Внутрішня поверхня шару міді концентрична зовнішній поверхні кулі. Знайти товщину шару міді. Густина міді 8,9 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 0,6 см.

9.9. Знайти об'єм порожнини всередині мідної кулі, якщо її маса 720 г і товщина шару міді 3 мм. Густина міді 8,9 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 380 см^3.

9.10. Дерев'яна куля занурюється у воду на $\frac{5}{8}$ свого радіуса. Знайти густину дерева.

Відповідь. ≈ 0,93 $\frac{г}{см^3}$.

9.11. Радіус кулі дорівнює 1 м. Точкове джерело світла знаходиться на відстані 1 м від поверхні кулі. Зайти площу освітленої та неосвітленої поверхонь кулі.

Відповідь. ≈ 3,14 м^2; ≈ 9,42 м^2.

9.12. Спостерігалися градини масою близько 2 кг. Вони мали форму кульок і складалися з льоду. Визначити їх діаметр, якщо 1 см^3 льоду має масу 0,9 г.

Відповідь. 16 см.

9.13. Визначити діаметр найбільших можливих крапель під час дощу, якщо вони не можуть мати масу більшу за 0,2 г, а 1 см^3 води має масу 1г.

Відповідь. 7 мм.

9.14. Зазвичай маса крапель дощу не перевищує 0,065 г. Знаючи, що 1 г води займає 1 см^3, визначити діаметр таких крапель.

Відповідь. 5 мм.

9.15. Скільки дощових крапель потрібно, щоб зібрати 1 л води? Середній діаметр дощової краплі прийняти рівним 2 мм.

Відповідь. ≈ 239 000 крапель.

9.16. Якого діаметра залізна куля має таку саму масу, як і вся атмосфера нашої планети, якщо 1 м^3 заліза має масу 8 т?

Відповідь. ≈ 106 км.

9.17. Жовток курячого яйця містить 30 % жиру. Скільки жиру міститься в жовтку діаметром 2 см? Густина жовтка 1 $\frac{г}{см^3}$.

Відповідь. ≈ 1,3 г.

9.18. Перший радянський і другий американський штучні супутники Землі було виготовлено у формі куль з діаметрами 58 см та 16 см відповідно. У скільки разів об'єм першого супутника більший за об'єм другого?

Відповідь. Наближено у 47 раз.

9.19. Господиня купує на базарі кавун. Який з двох вигідніше купити, коли один з них на четвертину більший в обхваті за інший, але коштує в 1,5 рази дорожче?

Відповідь. Більший кавун.

9.20. Продаються дві дині одного сорту: одна має в обхваті 60 см, а друга – 50 см. Перша у півтора рази дорожча за другу. Яку диню вигідніше купити?

Відповідь. Більшу.

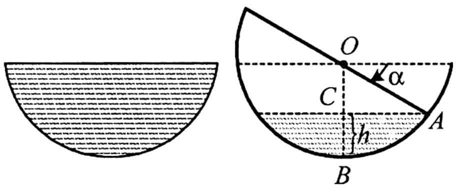
9.21. Котлован для водосховища має форму сферичного сегмента. Як обчислити, скільки землі було вивезено під час робіт, що проведено? Скласти і розв'язати відповідну задачу з числовими даними.

Розв'язання

Виміряємо глибину (стрілку) котловану А та відстань сі від самої нижньої точки котловану до верхнього його краю. Тоді шуканий об'єм виразиться формулою

$$V = \frac{\pi h\left(3d^2 - 2h^2\right)}{6}.$$

9.22. Посудину, що має форму півсфери з внутрішнім радіусом R, наповнено рідиною. Визначити, який об'єм рідини виллється з посудини, коли нахилити її на кут α.



Відповідь. $V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi R^3\left(3 - \sin^2\alpha\right)\sin\alpha$.

9.23. Квіткову клумбу спроектовано у формі сферичного сегмента, висота якого дорівнює 3 м, а радіус сферичної поверхні – 10м. Який об'єм землі необхідно для клумби?

Відповідь. 260 м^3.

Задачі, пов'язані з площею поверхні кулі та комбіновані задачі

9.24. Кегельна куля має діаметр 30 см; поверхня крокетної кулі на 1256 см^2 менша від поверхні кегельної. Визначити відношення радіусів цих куль.

Відповідь. ≈ 1,3.

9.25. Вода покриває $\frac{3}{4}$ поверхні земної кулі. Обчислити, скільки квадратних кілометрів займає суша, якщо прийняти радіус Землі рівним 6370 км.

Відповідь. $\approx 128 \cdot 10^6$ км^2.

9.26. За рік на 1 м2 поверхні Землі осідає у середньому 1,4 г космічного пилу. Скільки пилу осідає на всю поверхню за одну годину?

Відповідь. 80 тис. т.

9.27. Футбольний м'яч (R = 15 см) лежить: а) біля стіни; б) у кутку. Чи вміститься між м'ячем і стіною м'ячик від настільного тенісу (r = 1,5 см)?

Відповідь. а) Так; б) так.

9.28. Коли яблуко печуть, воно зморщується. На що це вказує? Відповідь. На те, що об'єм яблука зменшується, а шкірка зберігає попередні розміри.

Зауваження. Можна зробити приблизні розрахунки: обчислити, наприклад, який надлишок шкірки отримаємо, якщо яблуко діаметром 8 см зменшується (внаслідок втрати води при нагріванні) на 4 мм по діаметру:

$4\pi \cdot 40^2 - 4\pi \cdot 38^2 = 4\pi\left(40^2 - 38^2\right) = 4\pi \cdot 78 \cdot 2 \approx 1961$ (мм^2).

Це наближено 20 см^2. Отже, загальна поверхня всіх зморшок печеного яблука для вибраних розмірів дорівнює 20 см^2.

9.29. Якби можна було б обійти Землю по екватору, то маківка нашої голови описала б довший шлях, ніж ступні. На скільки великою є ця різниця?

Розв'язання

Приймемо зріст людини за 175 см і позначимо радіус Землі через R . Тоді маємо:

$2\pi(R + 175) - 2\pi R = 2\pi \cdot 175 \approx 1099{,}56$ (см),

тобто близько 11 м.

Зауваження. Дивовижним є те, що результат не залежить від радіуса кулі і, отже, буде однаковим і на велетенському Сонці, і на маленькій кульці.

9.30. Діаметр повітряної кулі дорівнює 15 м. Яку масу має її оболонка, якщо один квадратний метр матерії (перкалі), з якої її виготовляють, має масу 307 г?

Відповідь. ≈ 217 кг.

9.31. Скільки фунтів оліфи піде на фарбування «римського купола» (він має форму півкулі діаметром 14 сажнів)? На пофарбування 1 кв сажня йде 2,2 фунта оліфи. (1 кг = 2,44 фунта, 1 м = 0,47 сажня.)

Відповідь. ≈ 68 фунтів.

9.32. На позолоту 1 м^2 купола напівсферичної форми йде 1 г золота. Скільки потрібно золота, щоб позолотити купол окружністю 20 м?

Відповідь. ≈ 63 г.

9.33. Купол Московського цирку є сферичним сегментом висотою 42 м і діаметром основи 64 м. Скільки листів перфорованого декоративного дюралю витрачено на його покриття, якщо розмір одного листа
1,25 м x 1,75 м?

Відповідь. ≈ 4000 листів.

9.34. Поверхня Африки становить $\frac{1}{17}$ частину всієї земної поверхні. Діаметр Місяця становить приблизно $\frac{1}{4}$ діаметра Землі. Чи міг би поміститися материк, що за площею дорівнює Африці, на одній півкулі Місяця?

Відповідь. Ні.

9.35. На скільки квадратних кілометрів зменшилась би поверхня земної кулі, якби її радіус зменшився б на 1 м?

Відповідь. ≈ 160 м^2.

9.36. Середня площа поверхні тіла дорослої людини дорівнює 2 м^2. Який діаметр має куля з такою самою поверхнею?

Відповідь. ≈ 0,86 м.

9.37. Перший радянський штучний супутник Землі був виготовлений у формі кулі, зовнішній діаметр якої дорівнює 58 см. Визначити поверхню супутника.

Відповідь. ≈ 1 м^2.

9.38. Скільки метрів шовкової матерії шириною 1 м необхідно для виготовлення повітряної кулі діаметром 4 м? На з'єднання та відходи додати 10 %.

Відповідь. ≈ 55 м.

9.39. Один із павільйонів Дрезденської виставки 1928 р. був побудований у вигляді кулі, поверхня якої дорівнює 784π м^2. Визначити діаметр павільйону.

Відповідь. 28 м.

Для організації роботи зі **складання прикладних задач** пропонуємо використати дані прикладної інформації до першого ступеня НМТ.

ВИСНОВКИ ДО ІІ РОЗДІЛУ

У другому **розділі** – *«Методична система реалізації прикладної спрямованості геометрії у профільних класах"* - розкрито методику, та розроблено прикладні задачі.

Вони базуються на індивідуалізації та диференціації навчання, забезпечують стимулюючу і розвивальну функції одержаних знань. колективних та групових формах навчання. Учні, при цих формах навчання, самостійно формулюють спільні завдання, знаходять способи їх розв'язування.

Орієнтація на позитивний мотив *у* найбільшій мірі сприяє врахуванню в навчанні таких індивідуальних особливостей учнів, як особливості психіки, рівень самостійності, научуваності і дає можливість вчителю адаптувати навчальний матеріал до індивідуальних особливостей учнів та сприяє формуванню в них організаційних, інформаційних, інтелектуальних умінь.

Основними цілями прикладної спрямованості з геометрії є наступні: розвиток стійкого інтересу учнів до геометрії та її практичного застосування; розвиток геометричних здібностей, дослідницьких вмінь та високої геометричної культури; розвиток вмінь самостійно та творчо працювати з навчальною та науково-популярною літературою; розширення та поглиблення уявлень учнів про культурно-історичні цінності в геометрії тощо.

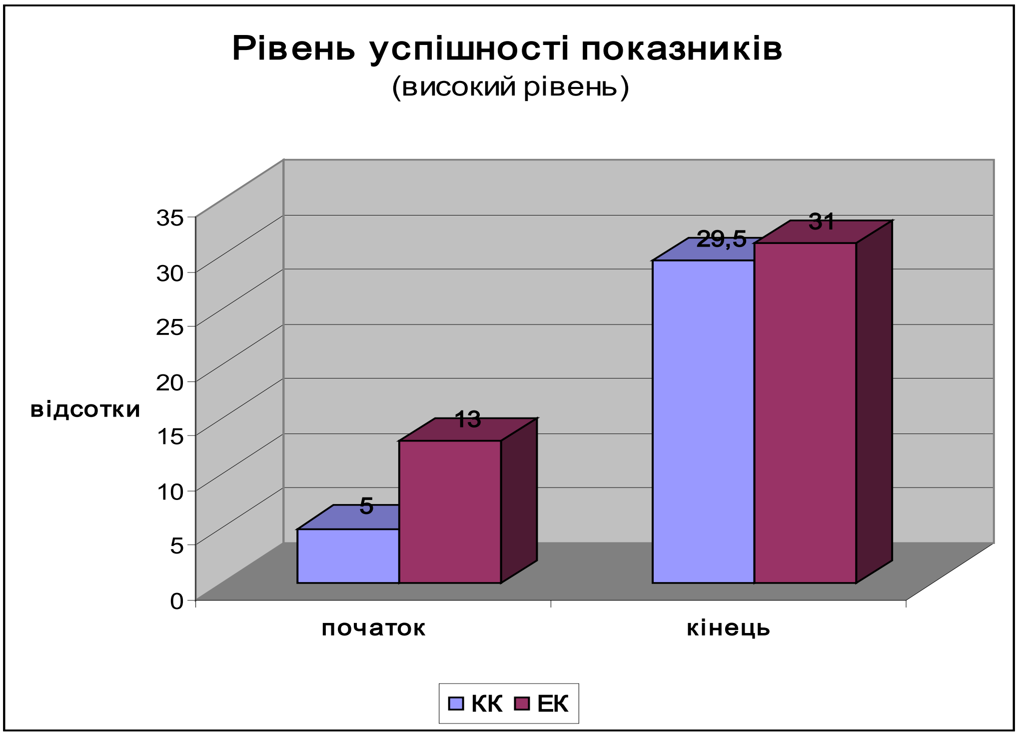
Методика організації навчання учнів розвязуванню ПЗ здійснюється згідно таких етапів: формалізації, розв'язування математичної задачі всередині побудованої моделі, інтерпретації. Проте це не відміняє можливості використання ПЗ, де реалізуються окремі етапи.

РОЗДІЛ ІІІ. Організація, проведення і результати педагогічного експерименту

Формувальний експеримент, мета якого обґрунтувати ефективність розробленої методики розв'язування прикладних задач відбувався у Полонській профільній школі . Для перевірки ефективності методики у процесі вивчення тем учні розв'язували задачі прикладного характеру, а в кінці проводились контрольні зрізи. Учням пропонувалася система задач, а вчителям – методика їх виконання.

Оцінювання результатів експериментального навчання було проведено на основі визначення рівня успішності засвоєння тем.

Діаграма 1



Таким чином, у експериментальних класах збільшилась кількість учнів з високим і середнім рівнями успішності і зменшилась кількість з низьким рівнем.

Результати формувального експерименту обґрунтувалися також методами математичної статистики. Експериментальні дані використані для перевірки нульової та альтернативної гіпотез за двостороннім критерієм Пірсона, оскільки обидві вибірки випадкові, незалежні і члени кожної з вибірок незалежні між собою, шкала вимірів е шкалою найменувань з 12 критеріями. Було сформульовано основну H_0 і альтернативну H_1 гіпотези.

H_0 : ймовірність попадання учнів контрольних і експериментальних груп в кожну з i-х (i=1,..., 12) категорій рівні $(p_{1i} = p_{2i})$ і вищий рівень успішності навчальної діяльності в експериментальних групах пояснюється випадковими факторами.

H_1: $p_{1i} \neq p_{2i}$ хоча б для однієї з 12 категорій, тобто цей більш високий рівень пояснюється використанням запропонованої методики. Здобуто такі результати: $T_{сп} \approx 35{,}71$. Для числа ступенів вільності $r = 12 - 1 = 11$ і $\alpha = 0{,}05$ $T_{кр} = 16{,}68$. Оскільки $T_{сп} > T_{кр}$, то маємо підстави відхилити нульову гіпотезу і прийняти альтернативну.

Отже, результати педагогічного експерименту свідчать про підвищення рівня успішності учнів при вивчені тем з використанням задач прикладного характеру у профільній школі.

ВИСНОВКИ

Відповідно до поставленої мети і визначених завдань у ході дослідження здобуто такі результати: з'ясовано стан розробленості даної проблеми у теорії та шкільній практиці; виділено психолого-педагогічні засади прикладної спрямованості у профільній школі; розроблено і теоретично обґрунтовано методичну систему навчальної діяльності старшокласників у процесі прикладної спрямованості геометрії у профільній школі, яка сприяє підвищенню якості математичної підготовки учнів.

Результати проведеного дослідження дають підставу для таких висновків.

1. Результати констатувального експерименту засвідчили, що відбувається переорієнтація навчального процесу на особистість учня, ведеться пошук сприятливих умов досягнення кожним учнем найбільш можливого і необхідного для нього рівня знань. Однак традиційна методика навчання не забезпечує в достатній мірі успішності учнів. Старшокласники мають переважно низький та середній рівень успішності виконувати навчальні завдання. Водночас незважаючи на те, що прикладна спрямованість геометрії максимально сприяє формуванню і розвитку таких вмінь, її можливості використовуються не повністю. Навчальну діяльність під час вивчення геометрії рекомендується поділяти за типом пізнавальної діяльності учнів на: продуктивну, варіативну, частково-пошукову, дослідницьку та творчу.

Основними умовами ефективної навчальної діяльності є:

а.) технологізація навчального процесу;

б) створення дидактичних пакетів з геометрії для самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів;

в) забезпечення самостійної навчальної діяльності при різних формах навчання (індивідуальній, груповій, фронтальній);

г) домінування творчих навчально- пізнавальних завдань над репродуктивними.

2. Система завдань з геометрії для навчальної діяльності учнів повинна відповідати таким вимогам: враховувати розвивальні, навчальні та виховні цілі уроку та зміст програмного матеріалу; спрямовувати навчання не тільки на розширення знань, структурування, інтегрування, узагальнення змісту, але й на постійне збагачення наявного суб'єктивного геометричного досвіду учня; забезпечувати диференційованість за рівнем, відповідно до вимог державного загальноосвітнього стандарту та поглибленого вивчення предмету; враховувати особливості навчальної діяльності учнів (потреби, інтереси, операційний склад).

3. Результати дослідження підтверджують достовірність гіпотези про те, що пропонована методика прикладної спрямованості геометрії у профільній школі є ефективною. У результаті її використання учні досягають вищого рівня математичної підготовки порівняно з традиційною.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров А.Ю. О геометрии. Математика в школе.1980. №3. С. 56-57.
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я. С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Геометрія. 10-11 класи: Пробний підручник. Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2003. 246 с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Київ: Вища шк. Головне вид-во, 1989. 367 с.
4. Бевз Г.П. Прикладна спрямованість шкільного курсу геометрії: Посіб. для вчителя. Київ: Видавниче підприємство «Перше вересня», 1999. 56с. (Серія «Бібліотечка «Першого вересня»; липень 1999, № 25-28)
5. Колягин Ю.М., Пикан В.В. О прикладной и практической направленности обучения математике. Математика в школе. 1985. №6.
6. Концепція профільного навчання в старшій школі. Затв. рішенням колегії М-ва освіти і науки України від 25.09..03. №10/12-2/АПН України. Ін-т педагогіки; Уклад: Л. Березівська, Н. Бібік, М. Бурда та ін.
7. Марнянський І.А. Аксіоми – для чого вони? Київ: Рад. шк., 1986. 111 с.
8. Петров В.А. Математические задачи из сельскохозяйственной практики. Москва: Просвещение, 1980. 64 с.
9. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків: Гімназія, 2017. 304 с.
10. Мерзляк А.Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Тригонометрія: Вчимося розв'язувати задачі. Київ: Генеза, 2008.
11. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень. Харків: Гімназія, 2018.
12. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 240 с.

13. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv)

14. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів (для класів з поглибленим вивченням математики) URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv)

15. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів: академ. рівень. Харків: Гімназія, 2010

16. Прочухаев В.Г. Связь теории с практикой в преподавании математики: Пособие для учителей. М.: Гос. уч.-пед. изд-во МП РСФСР, 1958. 178 с.

17. Раухман А. С., Сень Я.Г. Устные упражнения по геометрии для 7-11 классов: Пособие для учителя. К.: Рад. шк., 1989. 160 с.

18. Розв'язування геометричних задач у середній школі / За ред. Л.М. Лоповка. Київ: Рад. шк., 1972. 262 с.

19. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., доповн. і переробл. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

20. Тадеєв В.О. Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В.І. Михайловського. Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2003. 167 с. URL: https://dk-books.com/upload/iblock/9c0/9c019ee91d81a9bf7664814193bb8baf.pdf)

21. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. 194 с.

22. Тесленко І.Ф. Питання методики геометрії (в 9-11 класах): Посібник для вчителів. Київ: Рад. шк., 1962. 243 с.

23. Штейнгауз Г. Сто задач: Пер. с пол. - 4-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1986. 127 с.

24. Щукина Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся. М.: Педагогика, 1988. 205 с.

25. Эрдниев П.М., Эрдниев В.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. М.: Просвещение, 1986. 225 с.