

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

**Методика розв'язування нестандартних задач та їх роль в
інтелектуальному розвитку учнів**

Виконала:

студентка II курсу магістратури

групи М-М-21

спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Стрілець Яна Ігорівна

Керівник: канд. пед. наук, проф. кафедри
математики з МВ

Павелків Ольга Миколаївна

Рецензенти:

канд. пед. наук, доц. кафедри математики з МВ

Генсіцька-Антонюк Наталія Олександрівна

канд. фіз.- мат. наук, доц. кафедри вищої
математики

Сапіліді Тамара Михайлівна

Рівне – 2022 рік

ЗМІСТ

ВСТУП	3
Розділ 1. Науково-теоретичні основи вивчення нестандартних задач	6
1.1. Проблема розвитку мислення здобувачів освіти в процесі навчання.....	6
1.2. Суть розвитку логічного мислення дітей середнього шкільного віку.....	8
1.3. Шляхи і засоби інтелектуального розвитку учнів.	16
1.4. Нестандартні та цікаві завдання на уроках математики.....	19
Розділ 2. Методика розв’язування нестандартних задач	25
2.1. Методичні особливості використання нестандартних задач на уроках математики.....	25
2.2. Вимоги до нестандартних завдань на уроках математики.....	27
2.3. Нестандартні завдання та їх характеристики.	30
2.4. Технологія підбору нестандартних задач з математики.....	38
2.5. Принцип Діріхле. Задачі на застосування принципу Діріхле.....	48
Розділ 3. Вплив розв’язування нестандартних задач на інтелектуальний розвиток учнів.	54
3.1. Задача як засіб інтелектуального розвитку учня.....	54
3.2. Вплив позаурочної роботи з математики на розвиток мислення учнів..	59
3.3. Організація і проведення педагогічного експерименту та аналіз його результатів.	62
3.4. Методична розробка «Збірка нестандартних завдань «Нестандартна математика» для учнів 5-6-х класів.....	65
Висновки	67
Список використаної літератури.	71
Додатки.....	76

ВСТУП

Інтелектуальний розвиток учня в будь-якому віці неможливий без вивчення математичних навчальних дисциплін. Оцінити вплив математичного розвитку в інтелектуалізації дітей можна на прикладі того, яка кількість годин відводиться у навчальному закладі для вивчення математики (алгебри, геометрії). Ми не можемо заперечувати те, що це одні з найважливіших дисциплін у школі.

Математичні первинні уявлення допомагають підтримувати гнучкість розумових процесів здобувачів освіти, які вчаться мислити нестандартно і шукають нетривіальні методи розв'язання задач. Математика виховує вміння виходити за межі звичного способу мислення, а також, знаходити інші прийоми розв'язання задач або вирішення завдань. Тому математичний розвиток школярів надзвичайно важливий.

Майже у всіх сферах діяльності людини, навіть у тих, які ми звикли вважати «нематематичними»: лінгвістика, медицина або ж управління виробництвом, ефективно використовуються засоби і методи математики.

Який зв'язок пов'язує математику і навколишню дійсність? Завдяки чому звичайні числа, геометричні фігури та різноманітні математичні поняття можуть описувати і зображувати різні явища реальності, а також завбачувати закономірність їх перебігу?

На ці питання та багато інших людство віднайшло відповіді за допомогою математики. Незалежно від того, яку професію обере для себе людина, в більшості випадках їй доведеться мати справу з математикою. Бо, як писав видатний український поет і педагог В. О. Сухомлинський: «... математика – це в першу чергу думка, допитлива, та що бажає знати все і про все мати уявлення. Математика навчає мислити і разом з тим народжує віру в безмежні можливості людського розуму. Вона формує волю і характер» [55].

Робота над розвитком мислення школярів проходить без усвідомлення значення психологічних засобів і прийомів під час цього процесу. Ця помилка призводить до того, що більшість здобувачів освіти, навіть в старших класах

школи, не можуть опанувати прийоми систематизації знань на принципах логічного мислення.

Найдоступнішим засобом вирішення цієї проблеми буде розширення курсу математики за допомогою введення до нього нестандартних задач. Нестандартні задачі та завдання формують в учнів високу математичну активність, а також якості, які притаманні творчій особистості: гнучкість, критичність і глибина мислення, цілеспрямованість. Задачі, які підпадають під поняття «нестандартні», у більшості випадків подаються в захоплюючій формі, вони відганяють інтелектуальну ліню, формують звичку до розумової праці і виховують наполегливість в боротьбі з труднощами.

Доказова, послідовна і зв'язна думка учня формується під час розв'язування нестандартних задач. Розв'язуючи задачі, запропоновані в продуманій математичній системі, діти активно опановують зміст курсу математики і формують вміння мислити творчо. Учні повинні мати навички розв'язувати не тільки стандартні математичні задачі, але і виходити за рамки шаблонної, стандартної математики і проявляти оригінальність та винахідливість.

Актуальність теми. Необхідною умовою якісного виховання суспільства є розвиток його інтелектуального потенціалу. Якщо приблизно 15 років тому перспективним вважалося знання і вивчення іноземних мов, то в наш час вільним володінням декількома мовами особливо нікого і не здивуєш. У даний час професійна затребуваність сильно залежить від розуміння технологій, вміння абстрагуватися та мислити не шаблонно, а також наявності здібностей вирішувати нестандартні завдання. Тобто, головним завданням освіти стає завдання формування сприятливих умов для знаходження і розвитку здібностей учнів, розвиток навчальної та пізнавальної діяльності та творчої самостійності.

Мета роботи. Дослідження нестандартних задач та їх ролі у розвитку інтелектуальної культури учнів. На основі дослідження та аналізу теми розробити збірник нестандартних завдань для уроків та позакласних занять з математики.

Об'єкт дослідження: методична значущість використання нестандартних задач на уроках математики.

Предмет дослідження: нестандартні задачі як засіб розвитку інтелектуальної культури учнів.

Задля досягнення поставленої мети визначили основні **завдання**:

- проаналізувати матеріали психолого-педагогічних джерел з проблеми вивчення нестандартних задач в рамках реформування системи загальної середньої освіти України;
- на основі вивчення і аналізу методичної літератури визначити роль та місце математичних задач у шкільному курсі математики;
- дослідити вплив нестандартних задач на підвищення інтелектуальних здібностей здобувачів освіти;
- розробити збірник нестандартних завдань.

Практична значущість. Матеріал викладений у магістерській роботі може бути використаний вчителями математики. Розроблено збірник нестандартних завдань з математики для учнів 5-6 класів «Нестандартна математика».

Для вирішення поставлених завдань були використані такі **методи дослідження**: аналіз і синтез, узагальнення і порівняння.

Апробація результатів. Матеріали наукової роботи обговорювались на XV Всеукраїнській науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених «Наука, освіта, суспільство очима молодих» (м. Рівне, 17 травня 2022 р.).

Структура магістерської роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків.

Розділ 1. Науково-теоретичні основи вивчення нестандартних задач

1.1. Проблема розвитку мислення здобувачів освіти в процесі навчання

Проблема розвитку мислення досліджувалась психологами в різні часи. Сучасна психологічна наука подає мислення як найвищий навчально-пізнавальний процес. Проблемою розвитку мислення школярів займалися і займаються досі багато вітчизняних і зарубіжних вчених: Д. Дьюї, В. К. Ягодовська, Л. Микольська, Ж. Піаже, С. А. Рубінштейн, Д. Н. Серeda та ін. Вони теоретично та експериментально довели, що навіть в наш час школа ще не забезпечує здобувачам освіти необхідний рівень розвитку інтелектуальної діяльності. Логічне мислення дає можливість знайти відповіді на питання, які не можна розв'язати шляхом прямого відображення. Завдяки постійному розвитку персональних якостей мислення, людина має можливість правильно орієнтуватись у навколишньому середовищі, застосовуючи раніше отримані знання в новій обстановці. Кожне покоління людей має свої вимоги до освіти. Раніше початковим завданням вважалося надання учням глибоких знань, навичок і вмінь. В наш час завдання загальноосвітніх навчальних закладів інші. Першим завданням стає розвиток універсальних навчальних дій, що забезпечують учням вміння вчитися, здатність в масивах інформації відібрати і відшукати потрібну, самоудосконалюватись та саморозвиватись. З'явилися Державні освітні стандарти загальної освіти другого покоління, в яких визначено, що головною метою навчального процесу є розвиток загальних учбових дій таких як: пізнавальні, особистісні, комунікативні, регулятивні. У відповідності до державним стандартам другого покоління, пізнавальні універсальні дії охоплюють: логічні, загально-навчальні та постановку і вирішення проблеми.[16].

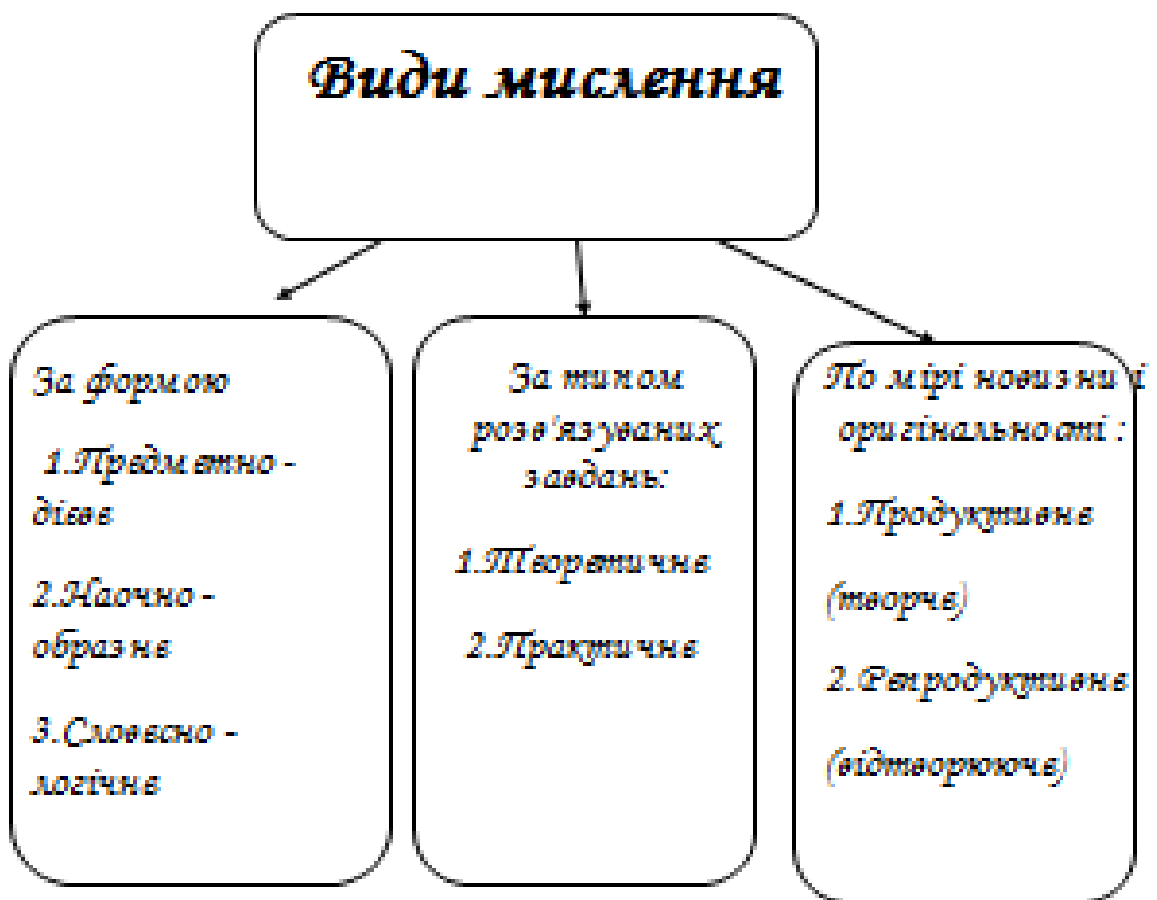
Логічні універсальні дії включають:

- аналіз об'єктів задля виявлення ознак (несуттєвих, суттєвих);
- синтез - складання з частин цілого, в тому числі і самостійне добудовування, з заповненням відсутніх компонентів;

- вибір підстав, ознак і критеріїв для здійснення порівняння та класифікації об'єктів;
- підведення до поняття, виведення наслідків;
- встановлення причинно-наслідкових зв'язків;
- побудова логічних ланцюгів міркувань;
- доведення;
- висунення гіпотез, а також їх обґрунтування.

Ніхто не заперечуватиме те, що кожен вчитель повинен працювати над розвитком логічного мислення школярів. Про це йдеться і в методичній літературі, і в пояснювальних записках до навчальних програм. Як показує практика навчання, інтелектуальний розвиток дітей ставиться як мета уроку майже по кожному предмету. Раніше вважалося, що під час уроків математики логічне мислення розвивається саме по собі, без цілеспрямованої роботи.

Аналіз літератури показує, що існують різні види мислення:



Варто зазначити, що всі види мислення тісно переплетені між собою. Тому, стараючись визначити вид мислення, варто пам'ятати, що цей процес завжди умовний і відносний. Про людей, які мають дуже добре розвинене логічне мислення, зазвичай говорять, що вони вміють ґрунтовно мислити. Люди, в яких розвинене логічне мислення, здебільшого, не припускаються помилок у своїх логічних висновках. Наявність розвиненого логічного мислення застерігає людей від помилок та невдач в практичній діяльності. Головним чином ця якість розвивається під час вивчення математики тому, що математика - це якраз і є практична логіка, в ній кожне положення отримується із допомогою точно обґрунтованих міркувань на основі вже відомих положень, тобто точно доводиться. Математика прищеплює логічне мислення. У математиці школяр може найбільш повно, найбільш зримо побачити приклади практично всіх основних законів елементарної логіки.

1.2. Суть розвитку логічного мислення дітей середнього шкільного віку

Перш, ніж розглянути розвиток логічного мислення в учнів, визначимо, що ж таке мислення як психофізіологічний процес.

Предмети і явища нашої реальності мають властивості і відносини, які можна впізнати безпосередньо за допомогою нашого сприйняття, відчуттів (розміщення та переміщення тіл у просторі, звуки, форми, кольори), а також такі властивості і відносини, які ми можемо пізнати лише опосередковано і за допомогою узагальнення, тобто за допомогою нашого мислення. Мислення - це узагальнене і опосередковане відображення дійсної реальності, вид розумової діяльності, який полягає в пізнанні природи речей і явищ, а також зв'язків і відносин між ними .

Першою особливістю мислення є його опосередкований характер. Тобто, людина пізнає непрямо, опосередковано те, що не може пізнати прямо, безпосередньо: невідоме - через відоме, одні властивості через інші. Мислення завжди опирається на дані почуттєвого досвіду – уявлення, відчуття, сприйняття - і на раніше засвоєні теоретичні знання. Непряме пізнання і є пізнанням опосередкованим.

Другою особливістю мислення є його узагальненість. Так, як всі властивості об'єктів пов'язані один з одним, то можливим є узагальнення як одна із особливостей пізнання загального і істотного в об'єктах дійсної реальності.

Мислення вважається вищим рівнем пізнання людиною дійсності. Почуттєвою основою, яка відповідає за мислення є сприйняття, уявлення та відчуття. За допомогою органів чуття – єдиних каналів зв'язку організму з навколишнім середовищем – до нашого мозку поступає інформація. Мозок переробляє зміст інформації. Діяльність мислення - найбільш складна форма переробки інформації. Людина, вирішуючи завдання, які постають перед нею, розмірковує, робить певні висновки і таким чином пізнає суть речей і явищ, з'ясовує закони зв'язку між ними, а потім на основі цього робить певні відкриття. Мислення не просто пов'язане з відчуттями і сприйняттями, воно формується на їхній основі. Насправді, перехід від відчуття до думки, вважається надзвичайно складним процесом, який формується, передусім, у відособленні і виділенні предмета або його певної ознаки, у відстороненні від конкретного і встановленні істотного, загальноприйнятого для багатьох предметів [25].

У роботах В. Левітеса мислення подається в основному як вирішення певних проблем, задач та питань, які життя постійно ставить перед людиною. Розв'язування задач завжди повинно давати людині щось нове, якісь нові знання. Пошуки рішень зазвичай бувають важкими, тому розумова діяльність - діяльність активна, вимагає терпіння та зосередженої уваги.

Мислення - функція мозку, тобто результат його аналітико-синтетичної діяльності. При розв'язуванні логічних задач в корі головного мозку відбувається процес перетворення систем тимчасових нервових зв'язків. Тобто, знаходження нової думки на фізіологічному рівні означає замикання нервових зв'язків в якомусь новому поєднанні. Вчений Ж. Піаже вважав, що розумова діяльність людини в прямому значенні являє собою розв'язування різних розумових задач, які направлені на розкриття суті якогось процесу. Мисленні

операція являються один з способів розумової діяльності, з допомогою якої людина вирішує логічні завдання.

Розумові операції різноманітні. До них відносяться: порівняння, абстрагування, аналіз і синтез, узагальнення, класифікація та конкретизація. Вид логічних операцій, які людина застосовує в тій чи іншій ситуації, залежить від задачі та характеру інформації, яку вона піддає розумовій переробці.

Взагалі, що стосується поняття «мислення», то потрібно відмітити декілька поглядів:

по-перше, як вказує тлумачний словник, мислення - це «здатність людини думати, що репрезентує собою процес відображення об'єктивної реальності в думках, поняттях, уявленнях" [53]. Давайте розберемо це поняття.

Якби наше пізнання обмежувалось рамками свідчення аналізаторів, то ми знали б про світ, що нас оточує, дуже мало. Людське мислення розкриває саме можливість широкого пізнання світу. Нам не потрібно доводити те, що певна фігура має чотири або більше кутів, оскільки ми бачимо це за допомогою одного з наших аналізаторів, а саме зору. Але ми не можемо ні почути, ні відчувати те, що сума квадратів катетів прямокутного трикутника дорівнює гіпотенузі цього трикутника. Поняття такого роду називають опосередкованими.

Психологічні дослідження мислення активно проводяться, починаючи з XVII століття. Протягом досить тривалого періоду логіку фактично ототожнювали з психологією мислення. А понятійне теоретичне мислення, яке деколи помилково називають логічним, розглядалось як єдиний вид, який підлягає вивченню.

Ще не так давно, мислення розглядалось поза розвитком, а сама здатність до мислення вважалась природною. В той час до числа інтелектуальних відносили самопізнання (рефлексію), логічні міркування, споглядання (аналог абстрактного мислення). Логічні міркування, розумілись, як здатність робити висновки. Споглядання, як здатність оперувати образами. Рефлексію же розуміли, як уміння проводити самоаналіз. Аналіз, синтез, узагальнення,

класифікація, порівняння відносились до операцій мислення. В асоціативній емпіричній психології мислення у всіх своїх проявах, зводилось до вражень та асоціацій отриманих від справжнього досвіду. Активність мислення та його яскраво виражений творчий характер були проблемою, яку не могла розв'язати дана теорія. Тому прихильникам цієї теорії прийшлося визнати творчі здібності апріорними, тобто вродженими здібностями розуму.

Сучасна психологія розуміє мислення як «певний процес дослідницько-пізнавальної діяльності особистості, опосередкованим та узагальненим відображенням дійсності; як вища форма творчої активності» [30].

Психологія має найпростішу поширену і дещо умовну класифікацію видів мислення:

- наочно-образне;
- наочно-дійове;
- відвернене (теоретичне) мислення.

Наочно-дійове мислення – під час процесу психічного розвитку дитини основною буде не тільки теоретична, а практична діяльність. Всередині практичної діяльності як раз і формується початкове дитяче мислення. У молодшому віці (до 4-ох років) мислення здебільшого наочно-дійове. Дитина в такому віці аналізує пізнавані об'єкти по мірі того, як вона руками, практично, роз'єднує і знову об'єднує, співвідносить одне до одного, зв'язує один з одним ті або інші предмети, які вона сприймає в даний момент. Прикладом наочно-дійового мислення є момент, коли діти ламають якусь іграшку через те, що хочуть дізнатись, «що там всередині».

Наочно-образне мислення – переважно виникає у дошкільнят в найпростішій формі, у віці від чотирьох до семи років. У них зберігається зв'язок мислення з практичними діями, але перестає бути таким тісним і прямим, як раніше. Під час аналізу і синтезу дитині не завжди потрібно потримати предмет в руках, щоб вона ним зацікавилась. Але в той же час дитині необхідно наочно представляти та виразно сприймати цей предмет. Говорячи іншими словами,

діти дошкільного віку мислять лише наочними образами та не володіють поняттями.

Відвернене мислення, тобто мислення в формі абстрактних понять розвивається у дітей середнього шкільного віку спочатку в найпростіших формах на основі наочно-почуттєвого досвіду. В такому випадку, мислення виступає насамперед з відвернених міркувань і понять, а не тільки в формі наочних образів та практичних дій. Велике значення в розвитку дітей має опанування понять під час засвоєння учнями основ різних наук (фізики, математики, історії, хімії).

Після закінчення навчання в учнів формується система понять. Розвиток відверненого мислення у здобувачів освіти не значить, що у них перестає розвиватись, або ж зникає наочно-образне мислення та наочно-дійове мислення. Навпаки, ці первинні форми розумової діяльності продовжують змінюватися і удосконалюватися, розвиваючись і під зворотним впливом відверненого мислення.

Людина використовує логічне мислення у випадках, коли задачу можна розв'язати за допомогою логічних міркувань.

У словнику психологічних понять поняття «логічне мислення» визначається як «вид мислення, зміст якого криється в оперуванні поняттями, думками і висновками з використанням законів логіки» [12]. В цьому випадку мається на увазі класична формальна логіка, хоч саме мислення людини не зобов'язане засновуватись виключно на ній.

Логічне мислення, яке ще називають, в ширшому значенні слова, дискурсивним, передбачає перехід логічним шляхом від одного уявлення до іншого [12].

Формальна логіка представляє поняття: думка і висновок, як одні з основних форм мислення. Оперування цими поняттями відображає суть логічного мислення. Система логічного мислення розкривається в операціях логічного мислення, що ґрунтуються на чотирьох основних законах логіки: сумісність, тотожність, достатньої основи, виключення третього. Некласична

(неформальна) логіки надає інші формулювання логічних законів, але навіть, в рамках некласичних логічних систем продовжуватимуть діяти основні логічні операції. З точки зору формальної логіки «логічне мислення – це вид мислення, який відповідає певним правилам, розпорядженням, законам, формування яких складає одну з найголовніших задач логіки» [59].

С. Рубінштейн писав, що найважливішим моментом під час процесу пізнання є логічне мислення людини. Під час процесу пізнання навколишнього середовища (з раннього дитинства, в повсякденному житті), людиною застосовуються всі методи і види логічного мислення. Розвинене логічне мислення надає людині можливість розуміти процеси, що відбуваються навколо неї, розкривати зв'язки між об'єктами і предметами навколишнього світу. Здатність логічно мислити дозволяє людині розуміти те, що відбувається навколо, робити певні висновки, знаходити рішення в непростих ситуаціях.

Логічні закони діють постійно і незалежно від бажання людини та не підлаштовуються під людину. Логічні закони є відображенням зв'язків і відносин предметів і об'єктів матеріального світу. Мислення може давати істинне або хибне уявлення про світ, з точки зору змісту. А також, воно може бути логічно неправильним, або правильним, з точки зору логічних операцій і дій. Правильне мислення, окрім формально-логічних законів, підкоряється ще і законам діалектичної логіки. Логіка формальна і діалектична логіка - це два порівняно самостійні напрямки в логіці, і в такому значенні вони взаємодоповнюють одна одну. Здобутки формальної логіки необхідні, але в той же час і недостатні. Така логіка, може ефективно існувати тільки під керівництвом діалектичної логіки. [13].

Уміння логічно мислити включає в себе ряд складників: уміння слідувати за законами логіки, уміння орієнтуватися в істотних ознаках об'єктів і явищ навколишнього світу, вибудовувати свої дії відповідно законів логіки, уміння виконувати логічні операції, уміння усвідомлено будувати гіпотези, робити висновки на основі отриманих даних. Але в той же час логічне мислення включає в себе і такий ряд компонентів: уміння визначати взаємозв'язок

предметів і об'єктів один між одним, помічати їх зміну з часом, уміння слідувати за законами логіки, виявляти закономірності їх розвитку, уміння досліджувати склад і структуру елементів, як частин цілого.

Логіка мислення не дається людині з народження. Людина опановує його в процесі життя та навчання. Задля підкреслення значення математики у розвитку в людини логічного мислення, вчені виділяють загальні положення організації такого виду виховання:

- довготривалість процесу виховання культури мислення;
- неприпустимість помилок в логіці викладу і обґрунтуванні;
- залучення учнів до постійної роботи по самовдосконаленню свого мислення, яка розглядалася б ними як важливе завдання;
- включення в зміст навчання системи знань про способи орієнтування у виконанні розумових дій.

Розвиток логічного мислення учня - це процес переходу мислення від емпіричного рівня пізнання, тобто наочно-дійового мислення до науково-теоретичного рівня (логічне мислення), задля подальшого оформлення структури взаємопов'язаних компонентів, в такому випадку компонентами являються прийоми логічного мислення, які забезпечують функціонування логічного мислення [13].

Логічне мислення - це вид мислення, суть якого полягає в маніпулюванні поняттями, думками, висновками, які опираються на закони логіки, їх зіставленні і співвідношенні з сукупністю розумових логічно-достовірних дій або операцій мислення, пов'язаних причинно-наслідковими зв'язками, що дають можливість узгодити наявні знання з метою перетворення об'єктивної дійсності.

Розвиток мислення в середньому шкільному віці відіграє особливу і надзвичайно важливу роль. З перших хвилин навчання мислення займає місце в центрі психічного розвитку дитини, і з часом стає тим, що задає систему інших психічних функцій, які під його впливом інтелектуалізуються і приймають

довільний характер. Вчені вказують, що розвиток розумових операцій, має велике значення в розвитку логічного мислення дітей.

Особливе місце займають розумові операції: порівняння і класифікація, абстрагування і виділення.

За істотними ознаками школяр вчиться пізнавати навколишній світ, розрізнявати предмети і явища, вчиться знаходити в них загальне, порівнювати їх та класифікувати.

До педагогічних умов розвитку логічного мислення учнів, передусім, відносять застосування різних прийомів і методів навчання. Приймаючи до уваги те, що більшість вчителів працюють за традиційними освітніми програмами, у них виникає потреба в методичному матеріалі, спрямованому саме на розвиток логічного мислення, розумових операцій, які можна використовувати на уроках.

Теоретичні і експериментальні роботи таки вчених, як С. Рубінштейн, А. Виготський, Ф. Леонт'єв, підтверджують те, що жодна із специфічних якостей логічного мислення (осмислена пам'ять, творча уява) - не мають можливості розвиватися в школярів незалежно від виховання, внаслідок мимовільного дозрівання вроджених талантів. Вони формуються протягом усього дитинства під час процесу виховання, яке відіграє важливу роль в психічному розвитку дорослих людей і дітей. [41].

Необхідною умовою для розвитку логічного мислення в дітей є навчання їх аналізувати, порівнювати, узагальнювати, розвивати мовну компетентність. Адже, копіювання сторонніх міркувань, та механічне запам'ятовування деякої інформації ніяк не допомагає розвитку мислення дітей.

В. Сухомлинський писав: "... Не скидайте на голову дитині лавину знань, бо під цією лавиною можуть бути похоронені зацікавленість і допитливість. Навчіться відкривати перед дитиною щось одне, але відкривати так, щоб крихта життя заграла перед дітьми всіма кольорами веселки. Відкривайте щось недоказане, щоб дітям хотілося ще не раз повернутися до того, що вони дізнались".[56]

1.3. Шляхи і засоби інтелектуального розвитку учнів

Математика, на відміну від інших навчальних дисциплін, оперує абстрактними поняттями. Показати всі процеси або предмети вивчення математики неможливо. Тому освоєння математики викликає складність у дітей. Перед вчителем постає завдання сприяти розвитку розумової і творчої діяльності учнів, а не навчати їх розв'язувати задачі за шаблоном. Використання такого підходу буде сприяти розвитку самостійності, що є надзвичайно важливим під час навчання в старших класах; сприяє скороченню часу витраченого на виконання завдання; усвідомлення підходів і методів, які потрібні для виконання завдань; а також сприяє усвідомленому розумінню допущених помилок та причин їх виникнення під час розв'язання завдань. Вчитель підбирає відповідні завдання, враховуючи вік учнів. Завдання можуть бути направлені на аналіз або синтез, порівняння, класифікацію, абстракцію, або на отримання логічних висновків. Одночасно сприймати декілька об'єктів здатний кожен. Але чим старше стають діти, тим більше інформації вони можуть тримати в пам'яті. Цей нюанс, також варто враховувати, в ході навчання дітей.

Виділяють два підходи до формування логіко-математичного мислення:

- **традиційне навчання.** (Яке залежно від дії і об'єктивних причин приводить до розвитку або теоретичного, або емпіричного мислення);
- **спеціально організоване навчання.** (Орієнтується на розвиток учбової діяльності, що призводить до становлення теоретичного мислення).

Другий підхід є пріоритетним для формування логічного мислення.

Нестандартні математичні задачі і завдання є одним з основних засобів розвитку математичних здібностей школярів. Відомий математик Д. Пойа писав: «Що означає знання математики? Це вміння розв'язувати задачі не лише стандартні, але і такі, які вимагають незалежності мислення, проявів оригінальності, винахідливості, здорового глузду».

В шкільного курсі математики, безумовно, не вистачає завдань, які будуть сприяти відпрацюванню тих чи інших математичних навиків, різноманітних

тренувальних вправ, завдання ілюстративного характеру, цікавих не шаблонних завдань. Але завдання, які будуть направлені на формування в здобувачів освіти стійкого інтересу до математики, творчого підходу діяльності математичного характеру, не менш необхідні. Не зайвими, також, будуть спеціальні вправи для розвитку в учнів зацікавленості у саморозвитку, для навчання загальноприйнятим прийомам розв'язування завдань, задля опанування методам наукового пізнання навколишнього середовища і прийомам розумової діяльності, які використовують вчені-математики, розв'язуючи ту чи іншу задачу. Реалізуючи цілеспрямоване навчання учнів розв'язуванню задач, за допомогою ретельно підібраних вправ, можна навчити їх користуватися аналогією, порівняннями, індукцією, вести спостереження і робити відповідні висновки.

При розв'язуванні нестандартних завдань у дітей розвиваються фантазія і уява, гнучкість мислення, пам'ять і увага, а також, розум дитини стає гострішим, розвивається вміння проводити порівняння, аналізувати явища, спостерігати, узагальнювати факти, робити висновки. Міркування здобувачів освіти стають логічними, послідовними та доказовими, а мова - переконливою та аргументованою. Розв'язування нестандартних завдань – не являється привілеєм математики. Саме під час розв'язування таких завдань, природнім способом можна розвивати у дітей елементи творчого математичного мислення, реалізуючи безпосередні цілі навчання математики.

Нестандартні завдання поділяються на дві категорії:

1 категорія. Завдання, що включаються в шкільний курс математики, але мають підвищену складність. Наприклад, завдання математичних олімпіад або, так звані, завдання «з зірочкою»

2 категорія. Завдання по типу різноманітних математичних розваг.

Перша категорія нестандартних завдань використовується в основному для роботи з школярами в яких є інтерес до математики; зазвичай ці завдання тематично пов'язані з певним розділом шкільної програми. Вправи, задачі і завдання, що відносяться до першої категорії, сприяють поглибленню

навчального матеріалу, узагальнюють або ж навпаки доповнюють окремі положення шкільного курсу, розвивають навички для розв'язування важких завдань, розширюють математичний кругозір.

Друга категорія нестандартних завдань не передбачає особливої математичної підготовки і не має прямого відношення до шкільної програми. Це звичайно не свідчить, проте, що до другої категорії входять лише легкі задачі і завдання. В ній, також, присутні завдання з дуже важкими розв'язками та завдання, відповіді на які до цих пір не отримані.

Використання різних методів навчання і застосування різних форм організації отримання знань, раціональним поєднанням індивідуальної, групової і фронтальної форм роботи забезпечує ефективне формування логічних знань і вмінь в дітей. Система вправ із логічним навантаженням є одним із найвпливовіших засобів розвитку логічного мислення школярів.

Основними теоретичними позиціями у формуванні логічних знань і вмінь учнів є :

- математичні завдання з логічним навантаженням мають створюватися на основі програмного матеріалу шкільного курсу математики і враховувати цілі навчання математики;
- структуру системи вправ потрібно підібрати, опираючись на загальні психологічні закономірності мислення, пам'яті, уваги та особливості логічного мислення дітей;
- у системі повинні реалізовуватися загально дидактичні принципи, а також принципи розвивального навчання;
- виконання нестандартних вправ має забезпечувати засвоєння здобувачами освіти математичних знань і навичок на основному, вищому і поглибленому рівнях, логічних знань – на продуктивному, репродуктивному і творчому рівнях.

Визначення *«система вправ з логічним навантаженням»* не має розумітися як суто розв'язування задач або завдань з логічним навантаженням. Скоріше вона повинна розумітись як цілеспрямована система роботи педагога

над розвитком логічного мислення дітей на кожному етапі уроку. Досвід вчителів показує, що через нестандартні завдання можливо розвивати логічне мислення учнів на різних етапах уроку: мотивація, перевірка домашнього завдання, під час вивчення нової теми, узагальнення та систематизації знань, умінь та навичок, наприкінці уроку і при закінченні вивчення розділу.

Розвиток *мотиваційного* складника здійснюється через забезпечення сприятливого ставлення дітей до математичної діяльності; під час виховання пізнавального інтересу. Часто на уроках використовуються крилаті вислови відомих особистостей. Не секрет, що зародження процесу логічного мислення диктує наявність *проблемної* ситуації.

Дитина лише тоді буде працювати активно та результативно, коли проблемна ситуація буде максимально близькою для неї особисто. На цьому етапі необхідним елементом є особистісна активність дітей стосовно проблеми, усвідомлення протиріччя між їх особистим досвідом та необхідним обсягом знань, чітке розуміння питання, прагнення знайти розв'язок проблеми, бажання самоудосконалюватись.

Внутрішня мотивація учнів доволі нестійка і, часто, залежить від ситуації. Щоб привернути увагу дітей, вчитель використовує логіко-розвивальні завдання, наводить цікаві факти з життя знаменитих особистостей, різноманітні історичні матеріали, розв'язання ситуативних задач, ігрові ситуації.

1.4. Нестандартні та цікаві завдання на уроках математики.

Прищепити дітям любов до математики, відкрити їм дорогу у неймовірний світ математичних див — завдання кожного вчителя математики.

Однак не рідко доводиться чути скарги від дітей, що математика для них важкий предмет. Неважко простежити, як змінюється ставлення учнів до предмета «математика» в процесі навчання. У молодших класах уроки математики здебільшого проводяться в ігровій формі. Швидка зміна видів діяльності школярів та унаочнення дає змогу урізноманітнювати уроки та запобігати перевтомі дітей.

Проходить час і на зміну яскравим наочним посібникам приходять сухі умовні схеми, а з плином часу і їх стає менше. Але, на жаль, по-іншому й бути не може, адже це диктується високим рівнем абстрактності самої математики. Завдання ускладнюються, виконання кожного з них потребує все більше часу і прикладених зусиль. Урок математики стає не тільки рутинною роботою, а ще й доволі «сірою». А це призводить до того, що діти просто не знаходять причин любити математику заради самої математики.

Учні можуть перестати розуміти матеріал, стикнувшись з першими труднощами на шляху його засвоєння. Головною причиною цього є невміння дітей розв'язувати нестандартні задачі. Якщо не розвивати в учнів логічне мислення, вони можуть зневіритись у своїх математичних здібностях. Від розвитку нестандартного мислення у дітей залежить не тільки розвиток їхніх математичних здібностей, а також розвиток вміння знаходити вихід із життєвих ситуацій. Щоб такого не сталося, потрібно сприяти активізації розумової діяльності учнів.

Інтелектуальні здібності учнів потребують постійного направлення і коригування, майже так само, як розвиток первинних навичок читання, письма, обчислення.

Д. Ушинський – один з основоположників педагогічної науки, створив основи методики викладання початкової арифметики. Він був прихильником розвитку у школярів умінь реалізувати розумові операції, такі як порівняння, аналіз, синтез, усвідомлення, впорядкування і узагальнення інформації, формування в дітей критичного мислення.

Розв'язування нестандартних математичних задач сприяє розвитку в дітей цих розумових операцій і вимагає від учнів певної самостійності мислення, здійснення творчих пошуків, кмітливості й винахідливості, вміння критично оцінювати свою роботу.

Об'єм знань, отриманих учнем в інтелектуальному плані і необхідних для виконання певних інтелектуальних дій, є визначальним показником його інтелектуального розвитку. Важливим також є і те, наскільки вільно, швидко і

безпомилково учень розв'язує математичні задачі без посилання на те чи інше зовнішнє тлумачення їхніх умов. Було встановлено, що більшість дітей середнього шкільного віку спроможні розв'язувати задачі з допомогою певного внутрішнього плану дій. Саме такий спосіб діяльності приводить до розвитку рефлексивного мислення, тобто до здатності усвідомлено пояснювати хід своїх думок, критично оцінювати власні помилки, знаходити причину їхньої появи.

Увага є однією з необхідних умов засвоєння знань. Часто вчені порівнюють увагу з дверима, які обов'язково повинні бути відчинені, щоб знання мали можливість увійти у свідомість дитини.

Величезний вплив на розвиток пам'яті і уваги учнів, уяви, самостійності мислення, активності, ініціативності, на виховання сили волі, лаконічної математичної мови має розв'язання нестандартних задач.

Вже давно відомо, що вправи нестандартної математики, різноманітні математичні ігри, можуть слугувати не тільки засобом розумового відпочинку, але й виступатимуть елементом цікавого матеріалу, пов'язаного з іншими областями науки та навколишнього середовища і приносять дітям задоволення. Для цього потрібно вміло та ретельно підбирати нестандартні завдання, щоб вони могли зацікавити школярів, тому що сформувати інтерес до математики є головною метою, якої хоче досягнути педагог, виконуючи завдання покращення рівня математичних знань учнів. Задля виконання цього завдання важливо використовувати нестандартні математичні задачі на уроках математики та під час позакласної роботи. Адже з них, як раз, і зароджується інтерес дітей до вивчення математики та позакласних завдань, гурткової роботи, і що є найважливішим самостійної роботи.

Класифікація нестандартних завдань на уроках математики

Велика різноманітність цікавих завдань (головоломок, задач, вправ з геометричним змістом...) дає підґрунтя для проведення їхньої класифікації, хоча це доволі складне завдання.

Класифікувати цей матеріал можна за різними ознаками:

- за характером розумових операцій;
- за змістом і значенням;
- за спрямуванням на розвиток тих чи інших умінь.

Відштовхуючись від логіки дій, які виконує той, хто розв'язує задачу, нестандартний матеріал можна класифікувати, виокремивши в ньому три головні групи:

- математичні (логічні) задачі та вправи;
- розваги;
- задачі практичного характеру (завдання з необхідністю вибору числових даних або самих дій, або ж відношень між даними).

Назва і характер матеріалу того чи іншого виду є підставою для виділення таких груп. Представимо класифікацію схематично:

Таблиця 1

Цікаві завдання з математики		
Розваги	Логічні задачі, вправи	Задачі практичного характеру
Загадки, задачі, жарти та цікаві питання, шаради, кросворди, ребуси, задачі-вірші, задачі-казки, магічні квадрати, лабіринти, математичні фокуси.	Задачі на знаходження пропущеної фігури, продовження ряду фігур, задачі на доведення та інші.	Задачі на вибір числових даних, над якими потрібно виконати дію, на вибір відношень між даними і задачі, пов'язані з величинами.

Нестандартні, розважальні задачі є корисними для активізації розумової діяльності здобувачів освіти. Адже, за допомогою них діти можуть досліджувати те, як живуть своїм вигаданим життям і діють герої улюблених книжок, фільмів і мультфільмів. Задачі такого виду сприятимуть поживленню в класі і появи інтересу в учнів. Адже, дуже важливо на кожному уроці підтримувати позитивний емоційний фон та настрій, це полегшить сприймання навчального матеріалу. Такі задачі заохочують учнів до розв'язання і пробуджують інтерес до вивчення математики.

Задачі з казковими сюжетами, також, виступають ефективним і дієвим засобом розвитку інтересу до навчання. Такі задачі дуже позитивно сприймаються дітьми. Цікава форма викладу підвищує інтерес до самої задачі, підштовхує дитину до пошуку вирішення проблеми, викликає бажання допомогти фантастичним героям. Нестандартний хід розв'язання, несподівані повороти думок, логічний зміст роздумів — підсилює емоційне сприймання учнів.

Слід підбирати завдання, які відповідають можливостям дітей та їхньому рівню розвитку. Корисно також, дати перший поштовх, щоб спонукати учнів займатись розв'язуванням, а потім закріпити готовність долати складнощі під час роботи. Тому що часто виникають ситуації, коли навіть здібний учень не хоче хоча б прочитати задачу, не говорячи вже про її розв'язування. Тому вчителі намагаються захопити учнів нестандартними задачами. Мета буде досягнута, якщо учня зацікавить умова задачі.

Використання казок, як одного із виду нестандартної математики — ідея В. Сухомлинського. І навчання, і виховання вчений починав із казки. Учні в нього часто слухали казки і навіть складали їх самі — всі разом або поодиноці. Перше ознайомлення з задачею у вигляді казки — велика подія в житті дитини. Школяр завжди знаходиться на стороні позитивних героїв казки, тобто, на тій, де добро торжествує, а зло карається. Казки і через задачі продовжують виховувати, але ще й сприяють інтелектуальному розвитку учнів.

В молодших класах середньої школи процесу розв'язування задач можна надати певної таємничості. Коли діти, усвідомивши зміст задачі, мислять самостійно, а отримавши відповідь повідомляють її учителю «по секрету», записавши на листку, щоб не заважати мисленню інших. Також можна організувати роботу в групах (парами або четвірками), під час такої роботи діти повинні готувати не лише відповідь, а й коротке пояснення, як вони її отримали.

Цей набір нестандартних завдань у симбіозі зі звичайними сприяє розвитку логічного та творчого мислення школярів, засвоєнню ними математичної мови,

розвиває інтерес учнів до «цариці наук». А, також, така робота з дітьми формує мислячу особистість. Тому надзвичайно важливо, поряд із стандартними математичними задачами, використовувати нестандарті. Вони сприятимуть не тільки активізації навчальної діяльності учнів, а й їх інтелектуальному розвитку.

Розділ 2. Методика розв'язування нестандартних задач

2.1. Методичні особливості використання нестандартних задач на уроках математики

Використовуючи нестандартні задачі на уроках, слід враховувати такі нюанси:

- для роботи над нестандартними завданнями виділяти 8-10 хвилин уроку хоча б 2-3 рази на тиждень;
- на уроці варто стандартні (програмні) вправи поєднувати з нестандартними так, щоб попереднє завдання підводило дітей до розв'язування наступного і щоб під час такої роботи дитина могла застосовувати свій життєвий досвід;
- важливо, щоб діти розуміли кінцеву мету завдання, для цього особливу увагу варто приділяти розкриттю сюжету нестандартного завдання;
- розкривати умови задач образно і емоційно, опираючись на наочність;
- самостійність не є обов'язковим критерієм під час розв'язування додаткових задач, але важливо створювати такі ситуації, щоб дитина порозмірковувала над задачею, приклала зусилля до її розв'язання;
- при розв'язуванні нестандартних і творчих вправ має реалізовуватись принцип диференційованого підходу;
- під час самостійного розв'язування нестандартних вправ не слід обмежувати учнів у виборі способу розв'язування;
- не варто показувати хід розв'язування задачі, значно важливіше правильно направити хід думок учня, адже, головне – не кінцевий результат, а процес розв'язування;
- потрібно практикувати метод повторного розв'язування нестандартних задач.

Інтелект є особливим даром людини, а вміння розв'язувати задачі є однією з його специфічних особливостей. Отже, розв'язування задач може бути презентоване, як один з найхарактерніших проявів людської діяльності.

Використовуючи ретельно підібрані задачі, педагог повинен допомогти здобувачу освіти, зрозуміти що математика теж може бути доволі цікавою, а складна розумова робота, в більшості випадках, приводить до потрібного результату.

Застосування у навчанні різних видів нестандартних задач сприяє розвитку інтересу дітей до математики та розвитку їхніх інтелектуальних здібностей. Можна зробити висновок, що найбільше впливають на розвиток математичних здібностей учнів задачі:

- комбінаторні;
- логічного змісту;
- на кмітливість;
- з елементами дослідження.

Досвід багатьох вчителів засвідчує той факт, що дослідницьку роботу необхідно починати проводити вже в початкових класах. Такий підхід дозволить продемонструвати учням роль індукції, експерименту, спостереження та надасть можливість поруч із навичками логічного мислення формувати навички евристичного мислення, показати дітям шлях до математичної творчості. Безперевна робота над нестандартними задачами спрямовується на вдосконалення елементарних розумових операцій, розвиток критичного мислення в школярів, гнучкості їхнього мислення.

Мати гнучке мислення – означає, в першу чергу, не боятись негайно відмовитись від звичної системи дій, коли вона перестає бути ефективною і змінити її на новий порядок дій, незвичний, нестандартний, який буде відповідати новим умовам.

В процесі розв'язування нестандартних задач учні виробляють навички роботи за планом (але не за шаблоном), найекономнішого вибору засобів і способів для досягнення мети і аналізу та обґрунтування своїх дій. Кінцевою метою є досягнення результату, при якому школярі навчаються самостійно знаходити відповідь будь-якої доступної їм задачі.

Підхід до навчання розв'язуванню нестандартних задач повинен забезпечити поступове збільшення складності виконуваної роботи та бути органічно переплетеним з розвитком у дітей логічного мислення й інтелектуальних здібностей.

2.2. Вимоги до нестандартних завдань на уроках математики.

Для активізації та підтримки інтересу дітей до математики нестандартні завдання мають задовольняти декілька умов [28]:

1. умова завдання повинна бути зрозумілою для дітей;
2. не бути схожими на стандартні математичні задачі;
3. необхідно, щоб розв'язання задач або завдань було по силам кожному з присутніх на уроці учнів;
4. відповіді повинні знаходитись швидко; якщо для розв'язання необхідні обчислення, то слід виконувати їх усно.

Велику цікавість у дітей викликають звичайні ребуси. Під час використання ребусів на уроках математики слід підбирати ті, які мають зв'язок з математикою: в ребусі використовують математичні знаки і символи, в ньому зашифрований певний математичний термін, ідеальним буде поєднання першої і другої ознаки. Завдання такого типу можна заделегіть зобразити або роздрукувати на листках паперу, вивести на екран мультимедійної дошки або проектора. В такому випадку вчитель зможе в будь-який момент запропонувати учням ребуси для розгадування.

Не секрет, що діти з захопленням відносяться до загадок. В цьому випадку, також варто пам'ятати, що загадки повинні мати математичний підтекст або математичні елементи. Часто таким елементом виступає число, яке присутнє в загадці і є однією з критеріїв, який нашоухує дітей на пошук правильної відповіді. Також, під час розгадування загадок діти можуть натрапити на математичні відношення («більше», «менше», «рівне») або, як і у випадку з ребусами, відповідь виявиться терміном, що пов'язаний з математикою.

Доцільним, також, буде проведення під час занять математичних ігор. Наприклад, «Відшукати таблицю множення», «Математичні салки». Також, можна використовувати найпростіші логічні вправи. Наприклад:

1. З яких геометричних фігур складаються ці ялинки? Яка відмінність є між ними? Чому одна ялинка відрізняється від першої? На скільки більше трикутників в першій ялинці, ніж в другій?
2. З скількох прямокутників складено «вікно»? (рис.1).

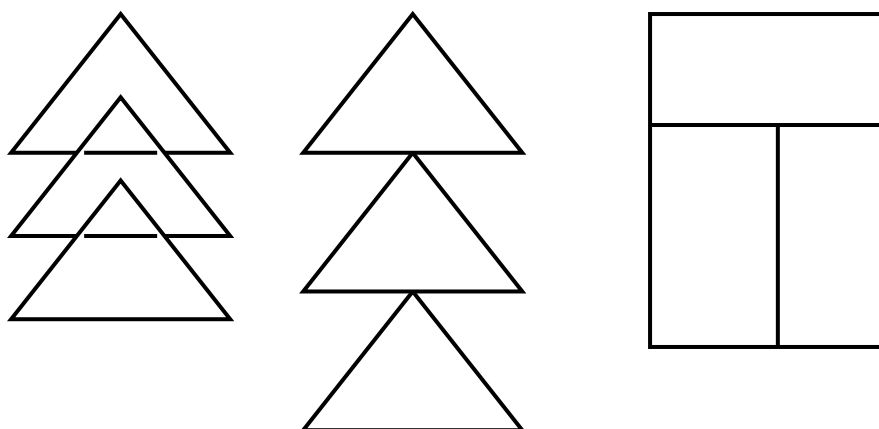


Рис.1.

В результаті ознайомлення учнів із задачами нестандартної математики у них може з'явитись інтерес і до позакласних, групових занять.

Позакласні заняття відбуваються після основних уроків, але ні за формою викладання матеріалу, ні за змістом, вони не повинні бути схожі на заняття для слабких учнів, або ж на стандартні уроки математики. Доцільно буде залучати до позакласних занять всіх дітей класу.

Групову та позакласну роботу з математики варто починати вже з першого класу. Під час занять слід враховувати вміння та навички, які вже мають учні, рівень їхніх знань, інтереси. Поступове ускладнення завдань проводиться, спираючись на накопичений в дітей масив знань з математики та рівень вмінь розв'язувати нестандартні задачі (головоломок, логічних задач, ребусів, олімпіадних завдань і т.д.).

Групові заняття з математики можуть бути тематичними. В таких випадках педагог ставить мету – використовуючи нестандартні задачі та ігрові форми навчання, закріпити знання з тієї чи іншої теми [2].

Комбіновані заняття проводяться найчастіше, їхній матеріал зовсім не переплітається з темами уроків математики. Періодичне проведення комбінованих занять обґрунтовується тим, що під час заняття можна використовувати великий спектр матеріалу.

Організація заняття, також, впливає на підтримання зацікавленості дітей. Майже кожне позакласне заняття має три частини:

1. вступну;
2. основну;
3. підсумкову.

У вступній частині варто пояснити дітям різницю між стандартними заняттями і заняттями з використанням нестандартного підходу. Для початку слід запропонувати учням легкі вправи, наприклад: загадки, ребуси, задачі з казковими героями. В основну частину слід додати завдання і задачі, для розв'язання яких слід зосередитись на завданні і добре подумати. Наприклад: логічні вправи, задачі на застосування методу Діріхле або кіл Ейлера, задачі на рух тощо. В підсумковій частині заняття варто використати математичні або логічні ігри та провести рефлексію. Вважається, що заняття слід закінчувати тоді, коли учні готові повторити гру. Адже, такі бажання слугують так званим «паростком інтересу» до наступних занять тому, що у дітей середнього шкільного віку інтереси до шкільних предметів ще доволі тісно переплітаються з захопленням ігровою діяльністю [15].

Елемент застосування наочності під час позакласних занять варто ретельно продумувати. По-перше, наочність має бути цікавою, по-друге - вона повинна формувати в учнів розуміння сутності розв'язування вправ та задач, запам'ятовування нюансів виконання нестандартного завдання.

В процесі таких занять слід забезпечити диференційований підхід, опираючись на особливості окремих дітей. Запропоновані учням, під час

занять, завдання можуть спрямовуватись на розвиток пам'яті, виховання уваги, розвиток обчислювальних навичок, формування інтересу до розв'язання задач, розширення загального світогляду і т. д.

2.3. Нестандартні завдання та їх характеристики.

В основному уроки математики люблять діти, які люблять і розуміють як розв'язувати задачі. Тобто, навчивши учнів розв'язувати нестандартні задачі, ми покажемо їм, що наука математика доступна всім, підвищимо таким чином інтерес до математики і повпливаємо на розвиток логічного мислення у дітей. Крім того, нестандартні завдання, також, впливають на активізацію пізнавальної діяльності, наприклад, викликають, пробуджують в учнів бажання працювати і великий інтерес.

Приклади нестандартних завдань:

Завдання на припущення

Аналіз умови завдань даного виду приведе дітей до необхідності порівняння двох груп об'єктів, на перший погляд схожих, але таких, що мають певні відмінні ознаки (для прикладу, різна кількість коліс, ніг, сторінок і т. д.).

Підготовча робота.

Мета підготовчої роботи:

- коригування уявлень дітей про окремі об'єкти дійсної реальності;
- осмислення характеру залежності величин одна від одної, адже, від кількості об'єктів залежить сумарне значення їхніх відмінних характеристик.

Приклади підготовчих вправ

1. Поміркуйте і дайте відповіді на запитання: «Скільки лап мають чотири собаки? Скільки ніжок мають дві стоноги? На скільки лап у чотирьох собак більше, ніж ніг в чотирьох курей? Де більше мандрівників і на скільки: в трьох чотиримісних байдарках чи в п'яти двомісних?»

Методи розв'язування задач на припущення.

З а д а ч а. Скільки чотиримісних і двомісних байдарок потрібно, щоб розсадити 22 туристів, якщо ви маєте всього 8 байдарок?

Практичний метод:

Розв'язання такої задачі можна представити у вигляді послідовності символічних малюнків. Якщо ми введемо відповідні позначення і виконаємо практичні дії, то за допомогою перерахунку виявимо, якщо розмістити туристів в байдарках по двоє, то в 8 байдарках ми зможемо розмістити лише 16 з 22 людей. Це означає, що 6 туристів сядуть по двоє в перші три байдарки (адже в нас вони були і чотиримісні).

В такий спосіб ми знайдемо відповідь задачі. Практичне розв'язування задачі може бути оформлене у вигляді таблиці, малюнку, схеми; завдання може бути розв'язане практичним способом, якщо воно містить в умові невеликі числові дані; під час виконання практичних дій варто записувати хід арифметичних операцій.

Арифметичний метод:

1. $2 \cdot 8 = 16$ (тур.) – по двоє в 8 байдарках;
2. $22 - 16 = 6$ (тур.) – залишиться;
3. $4 - 2 = 2$ (тур.) – більше в чотиримісній байдарці;
4. $6 \div 2 = 3$ (ч.) – чотиримісних;
5. $8 - 3 = 5$ (ч.) – двомісних.

Перевіримо: $2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 22$; $22 = 22$.

Алгебраїчний метод:

Позначимо, що x – число двомісних байдарок, в такому випадку чотиримісних байдарок $8 - x$. Складене за умовою задачі рівняння:

$$2 \cdot x + 4 \cdot (8 - x) = 22.$$

Розв'язати таке рівняння зможе лише учень старшого шкільного віку. Молодші школярі не зможуть справитись з таким рівнянням.

Метод перебору:

Використовуючи цей метод, нам потрібно буде послідовний перебір всіх варіантів оформити в таблицю. Загальне число байдарок – 8, отже найвдалішим варто вважати підбір, який починається з середнього варіанту – 4 двомісні

байдарки і 4 чотиримісні байдарки. А вже потім, опираючись на результат (22 туристи), знайти розв'язання, зменшуючи на 1 число чотиримісні байдарки.

Метод припущення відповіді:

Уявимо, що з 8 байдарок всього 3 - двомісні, а інші 5 — чотиримісні. Дізнаємось, скільки людей можна посадити в байдарки за такої умови:

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26 \text{ (тур.)}$$

Отримаємо, що $26 > 22$ (не всі туристи зможуть розміститись). В такому випадку кількість туристів зросте на 4 тому, що при прийнятій гіпотезі кількість туристів збільшилася б на 4, оскільки $26 - 22 = 4$. Тоді давайте, заберемо з кожної чотиримісної байдарки по 2 пасажири, тому що в кожній чотиримісній байдарці на 2 місця більше, ніж в двомісній ($4 - 2 = 2$). Тепер дізнаємось, на скільки нова гіпотеза більше знайденої: $4 \div 2 = 2$ байдарки, в такому випадку кількість чотиримісних байдарок $5 - 2 = 3$, а двомісних $8 - 3 = 5$ або $3 + 2 = 5$ байдарок. Визначимо правильність розв'язання способом встановлення відповідності між шуканим і даним.

Тепер визнаємо, на скільки прийнята гіпотеза більше дійсної відповіді: $4 : 2 = 2$ човни, тому кількість чотиримісних човнів дорівнює $5 - 2 = 3$, а двомісних $8 - 3 = 5$ або $3 + 2 = 5$ човнів. Способом встановлення відповідності між даними і шуканими легко визначається правильність розв'язання запропонованої задачі:

$$2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 22; 22 = 22.$$

Задача на заміну даних

В умові таких задач наявні дані, пов'язані кратним або різницеvim відношенням, це дозволяє під час розв'язування здійснити заміну даних, не торкаючись загальної відомої величини (наприклад, маси або вартості покупки).

Підготовча робота.

Мета підготовчої роботи — усвідомлення дітьми (без введення терміну) властивостей зворотної і прямої пропорційної залежності: із зменшенням (або збільшенням) однієї величини зменшується (або збільшується) інша (при

постійній третій). Наведемо приклад, чим вища ціна, тим менше предметів, ми зможемо купити наявні у нас гроші. Необхідно приділити увагу збереженню кратності відношень: в скільки разів більша ціна, в стільки разів менша кількість. Якщо величини зв'язує не кратне, а різницеве відношення, то слід розуміти, що якщо замінити декілька величин однаковою кількістю менших, то це призведе до зменшення загальної кількості.

Приклади підготовчих вправ.

Розв'яжіть задачу. Для ясельної групи садка купили 4 машинки і 3 м'яча. М'яч в 2 рази дорожчий за машинку. Скільки м'ячів можна купити замість 4 машинок? Скільки всього м'ячів можна було купити на всі гроші? Скільки машинок коштують стільки ж, скільки 3 м'ячі?

Методи розв'язування задач на заміну даних.

З а д а ч а. Тато купив 4 апельсини і 3 мандарини, віддавши за всю покупку 50 гривень. Мандарин в 2 рази дорожчий за апельсин. Скільки коштує апельсин? Скільки коштує мандарин?

Алгебраїчний метод:

Алгебраїчний метод в цьому випадку можна використовувати в неявному вигляді, тобто не вводячи назву способу розв'язування і латинського алфавіту для позначення змінних.

$$4a + 3m = 50, \text{ але } m = 2a.$$

$$4a + 3 \cdot 2a = 50;$$

$$4a + 6a = 50;$$

$$10a = 50 \rightarrow a = 5;$$

$$m = 2 \cdot 5 = 10.$$

Арифметичний метод:

Спосіб 1

1. $3 \cdot 2 = 6$ а. – замість 3 мандаринів;
2. $4 + 6 = 10$ (а.) – всього;
3. $50 \div 10 = 10$ (грн.) – ціна мандарина;

4. $5 \cdot 2 = 10$ (грн.) – ціна апельсина.

Спосіб 2

1. $4 \div 2 = 2$ (м.) – замість 4 апельсин;

2. $2 + 3 = 5$ (м.) – всього;

3. $50 \div 5 = 10$ (грн.) – ціна мандарина;

4. $10 \div 2 = 5$ (грн.) – ціна апельсина.

Перевіримо: $5 \cdot 4 + 10 \cdot 3 = 50$.

Цей метод можна поєднувати з схематичними (практичними) діями.

Завдання на знаходження чисел по їх сумі, різниці або кратному відношенню

Підготовча робота.

Мета підготовчої роботи — сформувати у дітей вміння перекладати на математичну мову та схематично зображати різні поняття.

Приклади підготовчих вправ.

1. Знайдіть 2 числа, якщо їх:

a) сума дорівнює 100, а частка 9;

b) сума дорівнює 20, а різниця 10;

c) різниця дорівнює 30, а частка 2.

d) різниця дорівнює 20, а сума 100;

2. Знайдіть числа, якщо їх сума дорівнює 60, а одне число більше за інше в 3 рази.

Методи вирішення завдань на відшукування чисел по їх сумі, різниці або кратному відношенню.

З а д а ч а. На присадибній ділянці висадили 20 ялин і туй, причому на кожну ялину приходиться 4 туї. Скільки ялин посадили?

Практичний метод:

Представимо кожне дерево певним символом. Відомо, що на кожну ялину приходяться 4 туї. Тому кожному символу, що значить ялину, поставимо у відповідність чотири символи туї.

Арифметичний метод:

$$1 + 4 = 5 \text{ (частин)} - \text{в загальній кількості};$$

$$20 \div 5 = 4 \text{ (дер.)} - \text{в одій частині};$$

$$1 \cdot 4 = 4 \text{ (ялини)};$$

$$20 - 4 = 16 \text{ або } 4 \cdot 4 = 16 \text{ (туй)}.$$

Завдання, що розв'язуються з «кінця»

Виділення даних задач в окрему групу пояснюють нестандартним способом їх розв'язування, яке проводиться з «кінця». У методичній літературі цей метод називають методом інверсії або метод звертання. Його суть полягає в наступному: потрібно знайти число, яке після проведення ряду операцій приведе до відомого числа. Для цього потрібно з даним нам числом зробити всі операції в зворотному напрямку. Індійські, а за ними західноєвропейські і арабські математики, при розв'язуванні задач користувались цим методом.

Формулювали вони його так: «Множення перетворюється в ділення, а ділення стає множенням, те що було виграшем (додаванням), перетворюється у втрату (віднімання) і навпаки».

Підготовча робота.

Мета підготовчої роботи:

- з'ясувати сенс слів чверть, половина, третя частина і т. д.;
- усвідомити суть визначення зворотна операція;
- відпрацювати спосіб знаходження чисел по відомій частині.

Приклади підготовчих вправ.

1. Загадане число, цифри якого дорівнюють 8. Яке число загадано?
2. Петро прочитав 22 сторінки, що складає 55% від всієї кількості сторінок у книжці. Скільки всього сторінок міститься в книзі?

Методи вирішення завдань з «кінця».

З а д а ч а. Чоловік продавав груші. Перший покупець купив у нього половину всіх груш і ще пів груші, другий — половину тих, що залишилися й ще пів груші, а третій купив останні 5 груш. Скільки груш продавав чоловік?

Арифметичний метод:

В ході засвоєння змісту завдання потрібно скласти схему у відрізках, ця схема надасть істотну допомогу під час розв'язування задачі.

На початковому етапі навчання знаходженню відповіді таких задач, варто запропонувати дітям готові схеми.

Розв'язування (міркування з кінця» задачі):

$$5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} - \text{груш в половині залишку};$$

$$5\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = 11 - \text{груш в залишку};$$

$$11 + \frac{1}{2} = 11\frac{1}{2} - \text{груш в половині від всієї кількості};$$

$$11\frac{1}{2} + 11\frac{1}{2} = 23 - \text{всього груш.}$$

Метод підбору:

Якщо в задачі невеликі числові дані, то під час розв'язування можна використати метод підбору. Раціональний підбір передбачає попереднє уявлення про можливу кількість груш. З умови задачі знаємо, що їх числове значення більше 20-ти, оскільки 5 груш менше, ніж чверть всієї їх кількості. Уявимо, що груш може бути 21, 22, 23, 24 або 25. Але розуміння умови «половина і ще пів груші» приводить до висновку, що кількість груш — число непарне. В залишку числа 21, 23 і 25. З решти чисел краще всього починати перевірку з першого середнього по величині — 23. В випадку виконання всіх умов, завдання виконане. Але якщо умови не виконуються, то слід продовжити перевірку до отримання позитивного результату.

Завдання на спільну роботу

Завдання цього виду відносять до завдань на процеси. Їх відмінна особливість полягає в наявності в умові задачі всього однієї величини, що описує процес роботи (часу), коли для знаходження невідомої величини потрібно, щоб були відомі дві величини. Розв'язування задач такого виду базується на умовному заданні невідомої величини (роботи) як одиниці.

Підготовча робота.

Цілі підготовчої роботи:

- актуалізувати знання школярів про такі величини: робота, об'єм, час, продуктивність і зв'язки між ними, виражених у формулі роботи;
- підтягнути неявні (без введення терміну) уявлення дітей про загальне кратне декількох чисел;
- потренувати навички розташовувати дробові числа з різними знаменниками на числовій прямій;
- закласти вміння ділити відрізок на рівні частини.

Приклади вправ:

1. Позначте на числовій прямій числа $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ і так далі. (Довжина одиничного відрізка повинна бути кратна 12).
2. Числову пряму якої довжини потрібно зобразити, щоб помітити на ній дробі: $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{5}{6}$?

Методи розв'язування задач на спільну роботу:

- Арифметичний метод;
- Графічний метод.

Завдання на рух

Ці задачі виділені в окрему групу через їх зміст. До них відносять задачі, споріднені з такими величинами як відстань, швидкість, час; на рух декількох або одного об'єкта, які переміщуються із однаковою або різною швидкістю, по кривих або, навпаки, прямих траєкторіях, із зупинками і без них, що можуть зближуватись або віддалятись, рухатись проти течії або за течією річки.

Задачі можна поділити на чотири групи:

1. Задачі на рух об'єкта між двома іншими об'єктами, що наближуються один до одного;
2. Задачі на вертикальний рух зі спуском;
3. Задачі на рух повз об'єкти з врахуванням їх протяжності;

4. Задачі на рух об'єктів, що прямують в одному напрямі (з відставанням, навздогін).

Підготовча робота

Мета підготовчої роботи:

- актуалізувати знання дітей про залежність між величинами, що описують процес руху (час, відстань, швидкість руху) і розвинути здібності до її застосування при розв'язуванні задач на рух одного об'єкта;
- актуалізувати поняття про швидкість як величину, яка характеризує швидкість руху;
- упорядкувати знання про одиниці довжини, швидкості, часу і співвідношення між ними (адже, при розв'язуванні задач на рух в дітей повинно бути розвинене вміння працювати з іменованими числами, які виражаються в різних одиницях, тобто переводити одні одиниці виміру часу, швидкості, довжини в інші).

Методи розв'язування задач на рух.

- Арифметичний метод;
- Графічний метод.

Остаточні висновки про місце, час та користь застосування кожного виду задач для учнів на уроках математики може зробити тільки вчитель для кожного класу.

2.4. Технологія підбору нестандартних задач з математики

Математичний розвиток учнів одночасно являється і метою, і результатом математичної освіти, який представляється складним розумовим процесом, інтегративним за суттю, структурно-цілісним, дискретним і диференційованим за формою. Інтелектуальна здатність учня до виконання математичних дій визначається достатнім рівнем розвитку пізнавальних процесів, досвіду навчально-творчої діяльності, мотиваційної сфери. Під час навчального процесу розвиток швидкості і гнучкості розумових операцій у дітей середньої школи здійснюється покроково з допомогою навчальних завдань з різними рівнями складності: від стандартних до нестандартних.

Підбір задач нестандартного виду слід розпочинати з вибору вимог, які мають бути узгоджені із темою поточного уроку, вивченим дітьми на попередніх уроках матеріалом і їх готовністю розв'язувати задачі підвищеної складності.

Нестандартні задачі – це тип задач, які входять до класу завдань, які не мають визначеного способу або методу розв'язування. В цих задачах метод розв'язання виявляється за допомогою проведення аналізу умови і даних в ній числових даних, встановлення логічних зв'язків між даними величинами та шуканими, моделювання за сюжетною лінією. Такі задачі часто в різних підручниках математики позначають «зірочкою». На уроках математики ці задачі розглядаються вибірково або ж пропонуються дітям для самостійного виконання.

Для педагога сучасної школи умовою його професійної компетентності являється високий рівень знання методики розв'язування нестандартних завдань в умовах класу, вміння інтерпретувати спосіб розв'язування і володіння технологією складання таких задач. Основними дидактичними цілями використання нестандартних задач на уроках математики є:

- створення дидактичних ситуацій, цілеспрямованих на розширення математичного матеріалу завданнями нових типів, а точніше, розвивального спрямування;
- стимулювання емоційного, мотиваційного та концептуального складників особистості учня при розв'язуванні нестандартних задач;
- формування пошукових структур розумової діяльності на матеріалі математичного змісту, завдячуючи активізації логічної складності.

Наскільки складною буде нестандартна задача залежить від суб'єктивних (вік учнів, ступінь розвитку пізнавальної і творчої діяльності, розвиненість математичних здібностей) та об'єктивних компонентів (зміст навчальних програм, стандарти освіти, наявна навчально-методична література)

Класифікація нестандартних задач за основу якої взято зміст навчання математики у середній школі виглядає так:

1. задачі на рух;
2. задачі на обчислення (різницеві парадокси, логіка нумерації, на залежність між компонентами, на поєднання виконання арифметичних дій, абстрактного змісту);
3. завдання з варіативними сенсорними ознаками (кольором, величиною, формою).
4. задачі на відношення між величинами (порівняння віку, довжин відрізків; на зміну маси, площ, об'ємів; на визначення дня тижня);
5. задачі з геометричним змістом (метричні і позиційні задачі, на просторову орієнтацію).

Щоб правильно підібрати нестандартні задачі для уроку слід врахувати такі параметри:

- a) визначення параметрів задачі, які закладаються в основу сюжетної лінії.

Приведемо приклад зріст учнів; довжина відрізків; відстань між двома населеними пунктами; вік тощо. Диференціація параметрів нестандартної задачі зв'язана із функціями, які вони виконують під час розв'язування та складання задач, тобто із забезпеченням логічної та предметної складових задачі;

- b) виборі зв'язків між обраними ознаками, що задаються дидактичним навантаженням завдань та конкретною темою;
- c) складності тексту задачі, з чітко сформульованою сюжетною лінією та структурної цілісності.

Параметрами технологічного підходу до підбору нестандартних задач такі:


- a) об'єкти дії та кількість об'єктів, як основа складання сюжетної лінії задачі;
- b) відношення (просторові, кількісні, за величиною, подільністю, часові, логічного слідування, порядку: вище — нижче; більше - менше; важче - легше; старше – молодше; далі - ближче; швидше — повільніше; довше

— коротше; вгорі — внизу, справа — зліва;); порівняльна характеристика предметів (більший - менший, старший – молодший, довший - коротший тощо);

- с) логічні операції (кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення, імплікація, еквіваленція), форми логічного мислення (судження, висновок, поняття), прийоми логічного мислення (синтез, порівняння, аналіз, аналогія, абстрагування, конкретизація, узагальнення); закони логіки (виключеного третього, достатньої підстави, тотожності, силогізму, подвійного заперечення та інші).

Наведемо конкретні приклади підбору нестандартних задач до деяких тем уроків математики: під час вивчення теми: Степінь в 7-му класі, можна використати завдання:

запишіть в пусті клітинки степені $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9$, за умови, що їхні добутки по будь-якій вертикалі, горизонталі, діагоналі дорівнюють x^{15} .

Під час контрольної роботи по цій темі можна включити завдання на порівняння:

- 2^{50} і 5^{20} ;
- 2^{300} і 3^{200} ;
- 99^{20} і 9999^{10} ;
- 5^{15} і 3^{23} .

Якщо учні не встигають розв'язати нестандартну задачу на уроці, то її можна дати як домашнє завдання.

Під час вивчення теми Кратне в 6-му класі можна запропонувати дітям таку задачу:

«В одного короля було 7 радників. Вони радили йому щось з постійною періодичністю: 1-ший радник – кожні десять днів, 2-ий радник – кожні дванадцять днів, 3-ій – кожні чотирнадцять днів, 4-ий – кожні п'ятнадцять днів, 6-тий – кожні двадцять днів, 5-ий – кожний двадцять перший день, а 7-ий – кожний двадцять восьмий день. Скільки порад отримає король від усіх своїх радників до того дня, в який вони зберуться у нього всі разом. В який день радники зберуться всі разом? Скільки порад король отримає від кожного з них?»

Також діти з ентузіазмом розв'язують задачі з казковим змістом.

Важливими вважаються задачі на увагу, де потрібно полічити кількість кутів відрізків, квадратів. Слід навчати учнів впорядкованому рахунку, щоб вони могли швидко і легко рахувати.

Наприклад:

1. полічити кількість відрізків



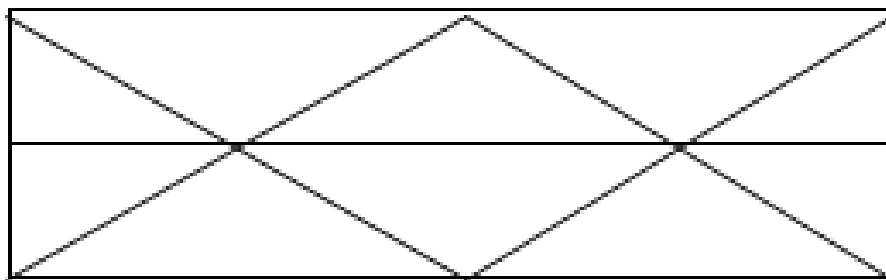
(ix 10)

2. полічити кількість прямокутників



(ix 30)

3. полічити кількість трикутників



(ix18)

Куб, в якого ребро 3см покрасили з усіх сторін, а потім розпиляли на куби з ребром 1см. Чи буде серед них кубик, в якого буде незафарбована грань? Скільки серед них матимуть зафарбовану три, дві, одну грані?

Під час розв'язування цієї задачі діти мають пояснити, чому потрібно починати рахунок з кубів з трьома зафарбованими гранями (тому що вони знаходяться при вершинах, вершин - 8, таким чином таких кубиків 8). Далі вирахувати скільки кубиків з двома зафарбованими гранями (так, як вони на ребрах, а ребер 20, а при вершинах вже взяли, тоді їх – всього 20). Приступаємо до кубиків з однією зафарбованою гранню (вони знаходитимуться на гранях куба, як ми знаємо граней 6). Далі слід провести розрахунки: $3^3 = 27$ (см²) – об'єм куба, отже в ньому 27 одиничних кубиків. Значить, $27 - (12 + 8 + 8) = -1$. Отже, 1 кубик не зафарбований.

Під час вивчення в 7-му класі теми Формули скороченого множення можна пропонувати школярам нестандартні задачі на обчислення:

1. $(100-1^2)(100-2^2)(100-3^2)\dots(100-12^2)$
2. $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$
3. $100^2-99^2+98^2-97^2+\dots+2^2-1^2$

Успіхи і невдачі дітей в розв'язуванні нестандартних задач слід обговорювати одразу на уроці. При цьому можна виставити їм оцінки за вдале розв'язування задач на уроці, а також тих, які задаються як необов'язкове домашнє завдання, задля заохочення дітей і активізації пізнавального інтересу. Це, також, може стати стимулом для розв'язування таких задач.

Слід приділити увагу і роль дидактичним іграм під час уроків математики, які є сучасним і визнаним методом виховання і навчання. Протягом усього життя людину супроводжує гра. Тому, що, в певній мірі, все життя – гра. Навіть підростаючи, потрапляючи в певні життєві ситуації, ми стикаємось із необхідністю приміряти ту чи іншу роль. В такому випадку потенціал гри має застосовуватись і у навчальному процесі. При вмілому використанні вчителем, гра може виявитись його незамінним помічником. Психологи підтверджують, що математична гра може бути й засобом самовдосконалення й стимулятором доброго настрою. Гра, як педагогічний прийом, активізує інтелектуальні процеси, збільшує інтелектуальну напруженість, розвиває пам'ять і вміння міркувати логічно, підвищує інтерес до знань. Учні можуть і не підозрювати, що вони навчаються, якщо вдасться захопити їх грою.

Під час процесу гри в дітей формується звичка мислити самостійно, прагнути до знань, розвивати уміння, бути зосередженими. Навіть пасивні учні приєднуються до гри з захопленням, прикладаючи всі зусилля, щоб не підвести товаришів. Застосування ігор на уроках робить процес навчання цікавішим, полегшує труднощі в опануванні навчального матеріалу, забезпечує бадьорий настрій. В 5-их класах можна використовувати такі ігри: під час вивчення теми Віднімання і додавання натуральних чисел учні з радістю приймають участь у грі «Магічні квадрати»; під час вивчення теми Віднімання і додавання десяткових дробів можна запропонувати учням гру «Магазин». В певному магазині є деякі товари ціна яких записана десятковим дробом. В цьому магазині слід придбати товару на загальну вартість, що не перевищує задану.

Під час проходження теми «Перетворення звичайного дробу в десятковий» пропонується гра «Вагон». Суть гри ховається в тому, що в одному вагоні подорожують звичайні і десяткові дроби, проте знаменникам звичайних дробів трохи важкувато тримати чисельники, через це вони трансформувались в десяткові дроби. Учнім потрібно в одному вагоні знайти рівні дроби. Таку гру можна використовувати, також, коли потрібно перетворити десятковий дріб в

звичайний. Провідник перевіряє білети тільки у звичайних дробів, а десяткові дробі зсаджує з вагону.

В 6-их класах під час вивчення деяких тем можна також застосовувати дидактичні ігри. Під час вивчення теми Ознаки подільності учням може сподобатись гра «Ой, не можу». Правила гри прості і полягають в тому, що від класу або декількох учнів вимагається порахувати від одного до сто, але замість чисел, які діляться на 3 або містять в своєму записі цифру 3, слід казати: «Ой, не можу». Також, вивчаючи цю ж тему можна використовувати гру «Припиши цифру». Під час гри, дітям потрібно дописати до вже заданого числа цифру, щоб можна було його поділити на вказане вчителем число.

Для закріплення теми Основна властивість дроби можна запропонувати дітям завітати до «Агентства моделей» і додумати, що будь-який звичайний дріб – модель. Дробі, як і більшість моделей дуже любляють часто змінювати зовнішній вигляд. У цій грі уявляється, що чисельник дроби - верхня частина гардеробу, тоді знаменник дроби - нижня (взуття). У дробів весь одяг повинен бути гармонійним та модним, тобто коли ми змінюємо верхню частину гардеробу, потрібно змінити і нижню частину гардеробу. Для прикладу, можна запропонувати дітям виконати таке завдання: записати дріб $\frac{2}{3}$ із різними знаменниками: 6, 12, 18, 24, 30, 60 та чисельниками 6, 12, 18, 24, 30, 60.

Під час вивчення теми Додавання раціональних чисел можна запропонувати завдання «Прогулянка з конем». Суть завдання полягає в тому, що потрібно з нижнього лівого кутка дійти у верхній лівий кут так, як ходить фігура «кінь» у шахматах, щоб сума цифр дорівнювала -1. Слід завчасно підготувати таблицю для цього завдання, його можна пропонувати на декількох уроках підряд або з деякою періодичністю. Діти можуть знайти декілька розв'язувань даної задачі.

Приклад таблиці:

-1	+2	-1	+2	
+3	-4	+3	-4	+3
-5	+6	-5	+6	-5
+7	-8	+7	-8	+7
	+10	-9	-10	-9

Відповідь: $+7 + (-9) + 6 + (-8) + 3 = -1$.

Під час засвоєння теми Координатна площина, можна запропонувати дітям завдання «Морський бій». На дошці виведено, (якщо мультимедійна), намальовано (якщо звичайна), зображено фон всім відомої дитячої забавки. Потрібно влучити в човен – назвати човен з допомогою цифри і букви, обов’язково починаючи з букви. На другому етапі дітям слід назвати місце знаходження прапорців, які розташовуються на перетині вертикальних і горизонтальних ліній. Перші прапорці позначені цифрами, другі – буквами. Так, як і на попередньому етапі спочатку потрібно назвати букви, а потім цифру. На третьому етапі: замінюємо букви, записуючи цифри, проте називаємо спочатку цифри, які появились замість букв, а саме ті, які записані по горизонталі. Під час наступних занять можна використовувати ігри: «Відгадай слово», «Знайди скарб», «Намалюй тварину», «Відгадай фігуру».

Дітям дуже подобаються завдання на побудову тварин або фігур на декартовій системі координат. Також добре сприймається і простий пошук точок по координатах. Коли двоє учнів виходять до дошки, один називає точку,

а другий шукає її, клас перевіряє правильність виконання завдання, якщо правильно піднімають руки. Виконавши поставлене завдання, вони повертаються на свої місця, а їх замінюють інші. На початку в учнів можуть виникати складнощі, пов'язані з вибором послідовності чисел (x, y) . Але виконуючи подібні нестандартні вправи вони можуть відточити свої навички і підвищити інтерес до вивчення подібних тем.

Під час вивчення у 7-му класі теми Розв'язування лінійних рівнянь та у 8-му класі теми Розв'язування квадратних рівнянь слід запропонувати учням завдання «Ланцюжок». Суть завдання полягає в тому, що дитина, яка сидить за першою партою ряду отримує листівку із завданням – розв'язати рівняння. Учень виконує завдання і передає листівку учневі позаду нього. Коли завдання виконає дитина за останньою партою, вона передає листівку вчителю. Перемагає ряд, який виконав правильно найбільше рівнянь, витративши найменше часу.

Наведемо приклад завдання для однієї команди:

Розв'яжіть рівняння:

1. $9x^2 - 1 = 0$;
2. $1 - 4y^2 = 0$;
3. $(x + 3)(x - 4) = -12$;
4. $(2x + 7)^2 = 100$;
5. $4x^2 - 3x = 0$;
6. $-5x^2 + 7x = 0$.

Кожна правильна відповідь оцінюється в деяку кількість балів. Можна ввести певні санкції і знімати бали за недотримання дисципліни. Це сприятиме підвищенню відповідальності кожного учасника команди за свою роботу. Додаткові бали команди можуть отримати, якщо в команді виявляться учні, які встигнуть розв'язати додатково ще декілька задач, записаних вчителем на дошці.

Слід, також ретельно підготуватись і підібрати нестандартні задачі, завдання або ігри для підсумкових уроків за семестр або рік. Це допоможе закріпити пройдений матеріал. На одному із уроків можна запропонувати учням пограти в гру «Пантоміма». Завдання гри полягає в тому, що дітям потрібно, використовуючи жести і міміку, показати математичне визначення або правило, загадане вчителем.

Трішки гумору, фантазії, дрібка нестандартних задач і завдань, перетворення стандартних завдань у гру – і урок перетворюється у «живе дійство» і активізує інтелектуальні здібності учнів.

2.5. Принцип Діріхле. Задачі на застосування принципу Діріхле

Часто трапляється, що під час розв'язування складних задач застосовують різні інструменти: відомі методи, прийоми, теорії, принципи тощо. Завдячуючи цьому, певні класи задач перетворюються в алгоритмічні, а їхні розв'язки стають доступними широкому колу. Розглянемо принцип, що дуже доступно і просто формулюється навіть для найменших школярів. З його допомогою можна навчити дітей розв'язувати досить складні задачі. Жартівливе формулювання цього принципу звучить так: «Якщо п'ять кроликів посадити в чотири клітки, то в одній із кліток, точно, опиняться два кролики». В українській математично-методичній літературі такий принцип зветься принципом Діріхле в честь німецького математика Петера Лежена Діріхле (1805- 1859). Він перший, хто за допомогою цього простого твердження зміг отримати значущі результати по темі наближення ірраціональних чисел раціональними (pigeonhole principle – «принцип голубника», так цей принцип називають в англійській науковій літературі). Слід зауважити, що задачі в цьому розділі не претендують на оригінальність, більша кількість із них встигла стати математичним «фольклором», зараз вже складно встановити їхніх авторів.

Розглянемо кілька елементарних задач:

1. В торбинці лежать кубики чорного і білого кольорів. Яку найменшу кількість кубиків потрібно дістати з торбинки, щоб серед них два кубики точно виявились одного кольору?

Розв'язання. Зрозуміло: вийнявши три кубики, ми побачимо, що два будуть одного кольору. В даному випадку роль кроликів відіграють кубики, а роль кліток кольори - чорний та білий.

2. У лісі росте мільйон сосен. Відомо, кожна з них має не більше, ніж 800 тисяч голок. Доведіть, що в цьому лісі можна знайти дві сосни, які матимуть однакову кількість голок.

Доведення. Уявимо, що в лісі всі сосни мають різну кількість голок (а на деякій сосні могло зовсім не бути голок). Тоді в цьому лісі не більше, ніж 800001 сосна, а це суперечить умові. В цьому випадку в ролі кроликів були сосни, а в ролі кліток – всі варіанти кількості голок на соснах.

3. На 5 полицях книжкової шафи 160 підручників, при цьому на одній із полиць – 3 підручники. Доведіть, що знайдеться полиця, на якій буде не менше, ніж 40 підручників.

Доведення. Припустимо, що на кожній із 4 полиць, що залишились, не більше ніж 39 підручників. Тоді на всіх 5 полицях не більше, ніж $3 + 4 \cdot 39 = 159$ підручників, а це суперечить умові задачі. Отже, на одній із полиць не менше, ніж 40 підручників.

Найчастіше використання принципу Діріхле можна побачити в узагальненому виразі.

Узагальнений принцип Діріхле. Якщо $nk + 1$ предмет розкласти в n шухляд, то хоча б в одній з шухляд буде не менш, ніж $k + 1$ предмет.

Доведення. Нехай x_i ($i = 1, \dots, n$) – умовна кількість предметів, що містяться в i -тій шухляді.

За умовою $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nk + 1$. Допустимо, що для кожного i виконується $x_i < k$. Тоді $x_1 + x_2 + \dots + x_n < nk$, а це буде суперечити умові. З

цього слідує, що наше припущення є хибним, і в одній з шухляд міститься $k + 1$ предмет.

Такий спосіб доведення далі спрощено називатимемо **принципом Діріхле**.

4. У місті проживає більше, ніж 8 мільйонів жителів. Дослідники вважають, що кожна людина має на голові не менш, ніж 200000 волосин. Потрібно довести, що в місті є хоча б 41 житель, які мають на голові однакову кількість волосин.

Доведення. Оскільки, $40 \cdot 200000 = 8000000$ (тобто кількість волосин у людини на голові коливається від 0 до 199 999, отже, всього 200 000 варіантів), тоді згідно з принципом Діріхле в місті знайдеться принаймні 41 житель, які матимуть однакову кількість волосин. В цьому випадку роль предметів випадає жителям, а роль ящиків це всі можливі варіанти кількості волосин.

5. Доведіть, що в добутку двох многочленів знайдуться три подібних члени. Якщо дано два многочлени однієї змінної і кожен з них – сума 9 членів у парному степені, не більшого за 36.

Доведення. Припустимо, що ми перемножили два даних многочлени, тоді ми отримаємо новий многочлен степінь якого, не більший за 72, і кожний із 81 одночлена його має парний степінь. Так як парних чисел в проміжку від 0 до 72 нарахується 37, то, з принципу Діріхле слідує, що ми зможемо знайти хоча б три подібних члени.

6. Доведіть, що серед 82 кульок, кожна із яких розмальована певним кольором, існує 10 кульок різного кольору або 10 кульок одного кольору.

Доведення. Припустимо, що для розмалювання 82 кульок використали не менше ніж 10 кольорів, тоді зрозуміло, що знайдеться 10 кульок різного кольору. У випадку, коли для розмалювання 82 кульок використали не більше, ніж 9 кольорів різних відтінків, то слідує за принципом Діріхле, знайдеться хоча б 10 кульок одного кольору. В цьому випадку у ролі предметів виступають кульки, тоді як в ролі ящиків – кольори.

7. 15 дівчаток зібрали 100 яблук. Потрібно довести, що принаймні зібрали однакову кількість яблук.

Доведення. Уявимо, що умова задачі неправильна. Тоді 15 дівчаток зібрали щонайменше $0 + 1 + 2 + \dots + 14 = 14 \cdot 15 \div 2 = 105$ яблук. А це суперечитиме умові задачі.

8. Числа 1, 2, ..., 9 розподілили на три групи. Доведіть, що добуток чисел в одній із утворених груп не менший за 72.

Доведення.

$9! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9 = (8 \cdot 9)(3 \cdot 4 \cdot 6)(7 \cdot 5 \cdot 2) = 70 \cdot 722 = (712 - 1)(71 + 1) = 713 + 712 - 71 - 1 > 713$, тоді за принципом Діріхле, в одній з груп добуток цифр не менший за 72.

Інколи може бути корисним і таке формулювання принципу Діріхле: якщо існує одне з декількох чисел, яке більше за їх середнє арифметичне, то серед таких чисел знайдеться інше, яке буде меншим за їх середнє арифметичне.

9. У бригаді працює 7 людей, їх сумарний вік дорівнює 322 роки. Довести, що з цих людей можна обрати трьох, сумарний вік яких буде не менший, ніж 138 років.

Доведення. Так як середній вік людей, які працюють в бригаді дорівнює 46 років, тоді сумарний вік трьох найстарших людей бригади буде не менший за $3 \cdot 46 = 138$ років.

Допустимими є, також, і інші переформулювання та узагальнення принципу Діріхле.

Геометричні задачі на принцип Діріхле

Принцип Діріхле у геометрії. Принцип Діріхле для площ формулюється у вигляді такої теореми:

нехай, A, A_1, A_2, \dots, A_n – деякий багатокутник або будь-яка інша фігура, для яких є визначене поняття площі, $A_i \subset A$ (фігура A_i міститься в A) для $i = 1, \dots, n$.

Задано, що $S(A) < S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \dots + S(A_n)$ ($S(A_s)$ – площа фігури A_s). В такому випадку хоча б дві з фігур A_1, \dots, A_k матимуть спільні внутрішні точки. Пригадаємо, що точка X фігури A зветься внутрішньою, якщо із центром у точці X існує такий кружечок, який належить фігурі A .

Для принципу Діріхле для площ допустимим, також, є таке узагальнення: припустимо, що A, A_1, A_2, \dots, A_n – фігури, для яких існує визначене поняття площі, причому $A_i \subset A$ для $i = 1, \dots, n$. Якщо $kS(A) < S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \dots + S(A_n)$, то хоча б $k + 1$ фігура з фігур A, A_1, A_2, \dots, A_n матиме спільну внутрішню точку.

Наведемо приклад декількох елементарних задач, для розв'язування яких застосовують принцип Діріхле.

1. Довести, що деякий рівносторонній трикутник не можна буде покрити двома рівносторонніми трикутниками меншими за нього.

Доведення. Не секрет, що менший рівносторонній трикутник зможе щонайбільше покрити одну вершину даного нам рівностороннього трикутника. З цього випливає, що даний в задачі рівносторонній трикутник можна буде покрити принаймні трьома меншими.

2. Довести, що в кожного многогранника можна знайти дві грані, в яких буде однакова кількість сторін.

Доведення. Нехай Γ — грань, що має найбільшу кількість сторін. В такому випадку даний нам многогранник матиме принаймні $n+1$ грань, кількість сторін на кожній грані змінюється від 3 до n . З цього слідує, що згідно принципу Діріхле, можна відшукати дві грані, які матимуть однакову кількість сторін.

3. П'ять деяких точок A_1, A_2, \dots, A_5 належать одній площині, та їхні координати – цілі числа. Довести, що серед усіх трикутників, які мають вершини в даних точках знайдуться хоча б три, площі яких будуть виражатися цілими числами.

Доведення. Нехай $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ – вершини трикутника з цілими координатами. Зробимо зауваження, що якщо замінити одну із координат

парним числом, то площа відповідного трикутника стане цілим числом. Тобто, змінивши координати точок A_1, A_2, \dots, A_5 числами 0 чи 1 в залежності від їх парності, згідно принципу Діріхле, певним точкам відповідатимуть однакові координати. Припустимо, що це точки A_1 і A_2 . В такому випадку, площі трикутників $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_2A_5$, виражаються цілими числами.

4. На клумбі у формі правильного трикутника, в якого сторона 3 м ростуть 10 троянд. Довести, що знайдуться дві троянди, які знаходяться на відстані, що не перевищуватиме 1 м одна від одної.

Доведення. Розділимо клумбу на 9 рівносторонніх трикутників, в яких сторона 1 м. В такому випадку, згідно принципу Діріхле, хоча б дві точки будуть міститись в одному з них. Це значить, що відстань між ними не перевищуватиме 1 м. Слід зауважити, що у випадку розміщення 10 троянд в вершинах розбиття клумби всі відстані між ними будуть дорівнювати 1 м.

Більше прикладів задач на застосування принципу Діріхле можна знайти в Додатку А.

Розділ 3. Вплив розв'язування нестандартних задач на інтелектуальний розвиток учнів

3.1. Задача як засіб інтелектуального розвитку учня

Найбільш характерною сферою людської діяльності є розв'язування задач. Цей процес являє собою одну із основних діяльностей того, хто вивчає математику.

У психології задача подається як мета, яка задана в деяких умовах, та особлива характеристика діяльності індивіда. Задача тут трактується, як індивідуальне психологічне відображення реальної ситуації, в якій відбувається цілеспрямована діяльність індивіда [51].

Не лише текстові або сюжетні задачі, а також і вправи та приклади різного характеру, відносять до задач. Нестандартні задачі у математиці є не тільки засобом навчання.

Виділяють основні чотири функції нестандартних задач:

- навчальна;
- виховуюча;
- розвиваюча;
- контролююча;

Особлива увага останнім часом приділяється розвиваючій функції. Не випадково А. Ейнштейн, Д. Пойа, Е. Резерфорд та ін. писали, що задачі це не тільки і не стільки засіб для закріплення знань, тренування в їх застосуванні, а скоріше засіб розвитку дослідницького потенціалу розумової діяльності.

Розвиваюча функція нестандартних задач спрямована на розвиток мислення здобувачів освіти, на розвиток їх інтелектуальних здібностей і прийомів розумової діяльності, алгоритмічного мислення, просторових уявлень, уяви, вміння моделювати ситуації та ін.[26].

При розв'язування задач важливо пам'ятати, які існують типи задач, які є способи їх розв'язування і яким з них слід скористатися в тому чи іншому випадку.

За кількістю величин задачі діляться на такі: з однією, двома і трьома величинами. Кожну задачу можна розв'язати по діях (*арифметичний спосіб*) та склавши рівняння (*алгебраїчний спосіб*).

1. Задачі з однією величиною:

Задача 1 З полиці взяли 12 книг, а поставили — 9. Тоді на полиці стало 39 книг. Скільки книг стояло на полиці спочатку?

Розв'язання

Було	Взяли	Поставили	Стало
?	12 книг	9 книг	39 книг

Арифметичний спосіб

Кількість книг на полиці змінювали двічі.

1) $39 - 9 = 30$ (кн.) — стояло перед другою зміною;

2) $30 + 12 = 42$ (кн.) — було спочатку.

Отже, спочатку на полиці стояло 42 книги.

Алгебраїчний спосіб

Нехай x — кількість книг, що стояли на полиці. Тоді:

$$(x - 12) + 9 = 39,$$

$$x - 12 = 39 - 9,$$

$$x - 12 = 30,$$

$$x = 30 + 12,$$

$$x = 42.$$

Отже, спочатку на полиці стояло 42 книги.

2. Задачі з двома однойменними величинами:

Задача 2 На двох полицях стоїть 72 книги. Скільки книг на кожній полиці, якщо на другій полиці книг у 2 рази більше, ніж на першій?

Розв'язання

1 полиця	?	↑	} 72 кн.
2 полиця	?, у 2 рази більше, ніж		

Арифметичний спосіб

Книги, що стоять на першій полиці, становлять 1 частину, а на другій полиці — 2 такі частини.

1) $1 + 2 = 3$ (част.) — становлять 72 книги;

2) $72 : 3 = 24$ (кн.) — на 1-й полиці;

3) $24 \cdot 2 = 48$ (кн.) — на 2-й полиці.

Отже, на 1-й полиці стоїть 24 книги, а на 2-й полиці — 48 книг.

Алгебраїчний спосіб

Нехай на 1-й полиці — x книг, тоді на 2-й полиці — $2x$ книг. Звідси:

$$x + 2x = 72,$$

$$3x = 72,$$

$$x = 72 : 3,$$

$$x = 24.$$

Отже, якщо на 1-й полиці стоїть 24 книги, то на 2-й полиці —

$$2 \cdot 24 = 48 \text{ (кн.)}.$$

3. Задачі з трьома залежними величинами.

До задач з трьома залежними величинами входять задачі:

- на рух;
- на вартість;
- на роботу.

В таких задачах одна величина рівна добутку двох інших, таку залежність задають формулою.

3.1. на вартість:

Задача 3 За 2 кг яблук і 3 кг груш заплатили 65 грн. Скільки коштує кілограм яблук, якщо ціна кілограма груш — 15 грн?

Розв'язання

Фрукти	Ціна	Кількість	Вартість
Яблука	?	2 кг	} 65 грн
Груші	15 грн	3 кг	

Арифметичний спосіб

- 1) $15 \cdot 3 = 45$ (грн) — вартість груш;
- 2) $65 - 45 = 20$ (грн) — вартість яблук;
- 3) $20 : 2 = 10$ (грн) — ціна 1 кг яблук.

Алгебраїчний спосіб

Нехай x — вартість 1 кг яблук. Тоді: $x \cdot 2 + 15 \cdot 3 = 65$.

$$2x + 45 = 65,$$

$$2x = 65 - 45,$$

$$2x = 20,$$

$$x = 20 : 2,$$

$$x = 10.$$

Отже, 1 кг яблук коштує 10 грн.

3.2. на роботу:

Задача 4 Необхідно виготовити 24 деталі. Один майстер може виконати завдання за 3 год. Знайдіть час, необхідний для виконання цього завдання другим майстром, якщо за годину він виконує на 2 деталі менше, ніж перший майстер.

Розв'язання

Майстри	Продуктивність праці	Час	Робота
1-й майстер	?	3 год	24 дет.
2-й майстер	?, на 2 деталі менше, ніж 1 майстер	?	24 дет.

Арифметичний спосіб

- 1) $24 : 3 = 8$ (дет./год) — продуктивність праці 1-го майстра;
- 2) $8 - 2 = 6$ (дет./год) — продуктивність праці 2-го майстра;
- 3) $24 : 6 = 4$ (год) — час роботи 2-го майстра.

Алгебраїчний спосіб

Нехай x — час роботи 2-го майстра. Тоді: $(24 : 3 - 2) \cdot x = 24$.

$$6x = 24,$$

$$x = 24 : 6,$$

$$x = 4.$$

Отже, для виконання завдання 2-му майстру потрібно 4 год.

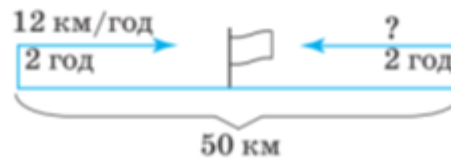
3.3. на рух:

Задача 5 Два велосипедисти одночасно виїхали назустріч один одному із сіл, відстань між якими становить 50 км. Зустрілися вони через 2 год. Перший їхав зі швидкістю 12 км/год. Знайдіть швидкість другого велосипедиста.

Розв'язання

Велосипедисти	Швидкість	Час	Шлях
1-й велосипедист	12 км/год	2 год	} 50 км
2-й велосипедист	?	2 год	

Короткий запис можна подати у вигляді графічної моделі

**Арифметичний спосіб**

- $12 \cdot 2 = 24$ (км) — шлях 1-го велосипедиста;
- $50 - 24 = 26$ (км) — шлях 2-го велосипедиста;
- $26 : 2 = 13$ (км/год) — швидкість 2-го велосипедиста.

Цю задачу можна розв'язати арифметичним способом і по-іншому.

- $50 : 2 = 25$ (км/год) — швидкість зближення;
- $25 - 12 = 13$ (км/год) — швидкість 2-го велосипедиста.

Алгебраїчний спосіб

Нехай x — швидкість другого велосипедиста. Тоді: $12 \cdot 2 + x \cdot 2 = 50$.

$$\begin{aligned} 24 + 2x &= 50, \\ 2x &= 50 - 24, \\ 2x &= 26, \\ x &= 26 : 2, \\ x &= 13. \end{aligned}$$

Отже, швидкість другого велосипедиста — 13 км/год.

Задача 6 Катер проплив 51 км за течією річки і витратив на це 3 год. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 15 км/год.

Розв'язання

Швидкість катера за течією річки дорівнює сумі власної швидкості катера і швидкості течії річки.

Рух	Швидкість	Час	Шлях
За течією	$15 + ?$	3 год	51 км

Арифметичний спосіб

- $51 : 3 = 17$ (км/год) — швидкість катера за течією;
- $17 - 15 = 2$ (км/год) — швидкість течії.

Отже, швидкість течії річки — 2 км/год.

Алгебраїчний спосіб

Нехай x — швидкість течії річки. Складемо і розв'яжемо рівняння:

$$\begin{aligned} (15 + x) \cdot 3 &= 51, \\ 15 + x &= 51 : 3, \\ 15 + x &= 17, \\ x &= 17 - 15, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Отже, швидкість течії річки — 2 км/год.

В ролі основної особливості стандартних задач виступає наявність у курсі математики загальних правил і положень, які однозначно визначають програму розв'язання таких задач і виконання кожного кроку програми (мають свій певний алгоритм розв'язування).

Нестандартні задачі - це ті, для яких в курсі математики взагалі не існує загальних положень або правил, які визначають точну програму їх розв'язування.

Розв'язування задач повинне бути підтвержене аргументами, тобто не допускаються незрозумілі узагальнення необґрунтованих аналогій. При розв'язуванні задач ставиться вимога повноти диз'юнкції, тобто розглянути всі випадки даної у задачі ситуації, а, також, виконується витриманість і повнота класифікації. Під час розв'язування як стандартних задач, так і нестандартних в дітей розвивається особливий тип мислення: лаконічний вираз думок, точність символіки, чітка розчленованість ходу мислення, дотримання строго плану дій; розвиваються інтелектуальні здібності, а, також, пам'ять та сприймання.

Розв'язування математичних задач потребує використання багатьох інтелектуальних вмінь:

- аналізувати задану ситуацію, порівнювати дані та шукане; дану задачу із задачами, що розв'язувались раніше, і таким чином виявляти приховані властивості даної ситуації;
- конструювати найпростіші математичні моделі, виконуючи мисленний експеримент;
- аналізувати інформацію, відбираючи корисну та систематизуючи її;
- коротко і чітко, у вигляді тексту, графічно, символічно і т. д. оформлювати свої думки;
- вміти об'єктивно оцінювати отримані під час розв'язування задачі відповіді, узагальнювати або спеціалізувати результати розв'язування завдання та досліджувати особливі прояви даного випадку.

3.2. Вплив позаурочної роботи з математики на розвиток мислення учнів

Швидкий розвиток навколишнього світу, сучасних технологій і людства в цілому ставить перед навчальними закладами завдання - розвиток сучасної особистості здатної швидко і якісно сприймати інформацію, нестандартно і творчо мислити, вміти пристосовуватись до змін а, головне, бути творцем цих змін. Навчанню та вихованню індивіда з нешаблонним мисленням, який гнучкий до інтелектуальної новизни допомагає вивчення ряду наук. Серед них не останнє, а може і перше місце займатиме математика, що за словами М. Ломоносова «розум до ладу приводить».

Мислення людини – це за своєю суттю специфічна здатність розмірковувати. Між усіма видами мислення школярів особливу увагу варто приділити творчому мисленню, його результатом є відкриття зовсім нового чи удосконаленого розв'язування того чи іншого завдання. Нестандартне і творче мислення спрямовані на появу абсолютно нових ідей.

Виділяють такі головні особливості творчо-мислячої особистості: уява, порив думки, фантазія, сміливість думки, вміння виявляти суперечності, проблемне бачення, узагальнювати досвід та знання і переносити їх на нові ситуації, здібність генерувати ідеї, гнучкість мислення.

Творче мислення учнів залежить від всіх здібностей, які вони розвивають у дошкільному віці під час спілкування, пізнання оточуючого світу, ігор. Раніше з перших шкільних уроків творче мислення та творчість в цілому, ставилась в деякі рамки та обмежувалась шаблонним вивченням предметів. Програмне, часто тільки репродуктивне навчання не витравлює з дітей творчості, але суттєво її пригнічує. Задля розвитку творчо-мислячої особистості в наш час недостатнім буде проведення традиційних уроків, тому важливого значення набувають гурткові, позаурочні або альтернативні заняття.

До позаурочних занять відносяться всі заняття, які проводить педагог в позаурочний час і на яких розглядаються завдання і задачі математичного характеру, які спрямовані на розвиток інтересів і нахилів учня.

Основними завданнями позаурочної роботи є:

- виявлення та розвиток інтересу дитини до математики;
- розвиток математичних здібностей (просторової уяви, творчого мислення, математичної мови);
- допомога в освоєнні головних методів математики;
- знайомство з найбільшими та найважливішими відкриттями в математиці;
- формування особистісних якостей (потреби до навчання, самостійності, творчості, інтересу та ін.);
- ознайомлення з становленням історії математики, з біографіями відомих математиків;
- звернення уваги на роль, яку відіграє математика в різних галузях науки і повсякденному житті.

Цінність позаурочних занять прихована у відсутності оцінювання дітей, що значною мірою сприяє вільному ходу думки і уяви, дає впевненість у оцінці викладачем не наявності кінцевої відповіді, а похвалі за вибраний метод чи спосіб дій. Цей факт спонукає учня до творчості і до роботи без страху зробити помилку, надає можливість дитячим думкам вийти за межі стандартного. Тому творчо розвинена дитина здатна повністю пірнути в матеріал, який вивчається. Така дитина винахідлива, продукує безліч міркувань, смілива, здатна по-новому дивитись на типові ситуації. Творчість мислення, як доводиться багатьма психологами, властива кожній дитині. Саме тому основне завдання педагога не пригнічувати, а створити підходяще середовище для розвитку нового, нестандартного та нетрадиційного.

В учнів середнього шкільного віку необхідність творчого мислення здійснюється через два напрямки: ділові ігри та інтерес до пізнання (тобто навчання через дію). Під час гри у дітей працює уява, закріплюються виниклі ідеї. Гра дає можливість проявити самостійність та творчий потенціал.

Наприклад:

- гра «Математичний бій»;

- математичний ярмарок;
- «Брейн – ринг»;
- математична вікторина «Що, де, чому?»;
- гра «Поле чудес»;
- гра «О, щасливчик!»;
- гра «Щасливий випадок»;
- гра «Морський бій»;
- суд над математикою тощо.

Результативним для стимулювання інтересу до навчання та інтелектуального розвитку є розв'язування нестандартних задач. Й. Бернуллі говорив: «Ніщо так сильно не стимулює високі уми до дій як корисна задача». Розв'язувати такі задачі доречно під час групової роботи, хоча в той же час потрібно мінімізувати колективне мислення і власну думку поставити на перше місце, задля аргументованого її відстоювання. Творчість притаманна розуму, який здатний мислити самостійно, не зв'язуючи оцінку якоїсь інформації з її джерелом. Адже, в процесі колективної діяльності можливим є момент імпровізації в розв'язуванні завдань як один з проявів творчого підходу. Вона дозволяє дітям почувати себе вільніше, а це сприяє розвитку здатності до творчого мислення.

Часто педагоги плутають поняття «нестандартна задача» із поняттям «задача підвищеної складності», відносячи задачі з «двома зірочками до нестандартних». Це далеко не так, тому що, і для задачі обов'язкового рівня учень може відшукати оригінальне та нетрадиційне розв'язання. Загалом на перше місце слід поставити не об'єктиву, а навіть суб'єктивну складність та новизну нестандартного продукту. Під час роботи дитина робить величезну кількість відкриттів, а в цьому важливим являється те, що відкриття і творчі кроки належать самій дитині, тому що головним є не результат, а саме процес інтелектуального мислення, що приводить до цього результату.

Розглянемо задачу:

Половину всього тренування Іванко пробіг зі швидкістю 12 км/год. Шлях, що лишився він говорив по телефону, долаючи 4 км/год. Яка середня швидкість хлопця, тобто з якою незмінною швидкістю треба біло б рухатись, щоб на все тренування затратити такий же час?

Якщо міркувати поверхнево, звичайно можна відповісти, що середня швидкість становить 8 км/год, але це не так. Прийнемо весь шлях за 1. То першу половину шляху Іванко пробіг за $\frac{1}{2} : 12 = \frac{1}{24}$ частину часу, а другу подолав за $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$ частину часу. Тому на все тренування затрачено $\frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6}$ частину часу. Тому середня швидкість буде $1 : \frac{1}{6} = 6$ км/год.

Така задача не належатиме до задач підвищеної складності, але кожен крок цієї задачі наповнений відкриттями, навіть уміння осмислити чому середня швидкість не буде дорівнювати 8 км/год. Якраз такі задачі спонукають дітей творчо і нестандартно мислити.

Отже, позаурочна робота з математики являється невід'ємною частиною з розвитку успішної, самостійної, інтелектуально розвиненої особистості.

3.3. Організація і проведення педагогічного експерименту та аналіз його результатів

Спеціальний метод дослідження, який визначає ефективність застосування різних форм, засобів, видів і методів навчальної діяльності, та рівень засвоєння знань здобувачами з конкретної теми називається **педагогічним експериментом**. [55]

Педагогічний експеримент слід проводити під час вивчення нового матеріалу, дослідженні ефективності методів навчання, при перевірці рівня засвоєння вивченого матеріалу тощо. При проведенні експерименту дослідник спеціально втручається за допомогою різних методів в процес, який вивчає. [55]

Для проведення педагогічного експерименту була обрана найпоширеніша форма цієї діяльності – порівняльний експеримент. Експеримент проводився

паралельно в двох класах 6-А та 6-Б на базі Рівненського ліцею №5 ім. Олександра Борисенка. Кількість годин математики та об'єм матеріалу в обраних класах однаковий, відмінність полягала в методах викладення матеріалу. Для учнів 6-А класу проводились уроки з використанням нестандартних задач і завдань, тому цей клас вважався експериментальним. 6-Б, в якому використовувались стандартні методи навчання без введення додаткових нестандартних завдань, був контрольним.

При проведенні навчального експерименту ми поставили перед собою такі завдання:

- аналіз та вивчення існуючих у сучасній шкільній практиці шляхів розвитку інтелектуальних здібностей дітей;
- дослідження методичних особливостей засвоєння навчального матеріалу дітьми;
- чи сприяє розвитку в здобувачів освіти прийомів логічного пошуку розв'язування нестандартних задач; самостійності в пошуках методів розв'язання задачі;
- з'ясувати доцільність використання нестандартних задач під час проведення уроків математики.

Після закінчення експерименту на уроці систематизації і узагальнення знань з теми: Звичайні дроби. Порівняння, додавання і віднімання дробів із різними знаменниками учні 6-х класів мали виконати письмову контрольну роботу. Письмова контрольна робота розроблялась для обох класів, завдання були однакові (див. додаток Г). Результати контрольних робіт представлені у таблиці.



Рис. 3.1. Результати виконання контрольної роботи у відсотках

Рівень знань учнів	Відсотковий показник рівня засвоєння знань учнями	
	Експериментальний клас	Контрольний клас
Початковий	11	14
Середній	28	31
Достатній	35	33
Високий	26	22

Таблиця 3.1. Показник рівня знань учнів під час експерименту у відсотках

Порівнявши результати, можна дійти висновку щодо позитивних змін, які відбулися в розвитку математичних здібностей здобувачів освіти експериментального класу. Отже, використання нестандартних задач під час проведення уроків математики сприяє підвищенню рівня знань школярів.

3.4. Методична розробка збірки нестандартних завдань для учнів 5-6-х класів

Математика не зводиться тільки до розв'язування задач, там нам важко буде уявити математику без цього. Захоплюючою силою математики являється те, що завдячуючи математичному мисленню, ми маємо можливість розв'язувати найрізноманітніші задачі. Задача – немов неприступна фортеця, а її розв'язок – скарб для переможця. Наука математика виникла із задач, які перед людиною ставило життя, їх потрібно було розв'язувати, щоб приборкати сили природи.

Якщо ж мати уявлення про математику тільки з шкільних підручників, то може виникнути така думка, що ця наука раз і назавжди дана, і на планеті Земля, вона з'явилась не інакше, як через інопланетян. Але насправді, математику створював людський розум, впродовж багатьох віків й продовжує створювати і досі, а її використання охоплює все ширші і ширші сфери життя. Однак, мати хоча б найменше уявлення, про те як відбувається цей розвиток, майже неможливо, якщо не зробити хоча б найменшої спроби долучитись до математичної творчості. Нестандартна математика — це математика, яка зігріта духом її творців, романтикою пошуку істини, їхнім ентузіазмом. Це математика, в якій цілковита першість дістається не пам'яті, а мисленню. Предметом такого виду математики не будуть застигли форми у вигляді старих стандартних правил, ознак і формул, теорем, які потрібно завчити, щоб потім застосувати для розв'язування задач. Це жива, одухотворена гармонійна система, до якої не можна приєднатись, не розв'язуючи цікавих, нестандартних задач.

Креативність — (з лат. creatio — створення) — новий термін, яким описують «творчі здібності людини, що характеризуються здатністю до введення принципово нових ідей, і які входять до структури обдарованості як незалежний фактор». Ще недавно у методичній літературі використовували термін «творчі здібності», проте пізніше він почав витіснятися запозиченим з англійської мови *creativity, creative*. В українській мові, цим терміном описують творчість, що не лише висуває ідеї, але і приводить ці ідеї до конкретного

практичного результату. Слово ж «творчий», так і, лишається зі своїм вихідним значенням, яке не розрізняє діяльність результативну і, навпаки, безрезультатну.

Метою створення збірника нестандартних завдань є підбір матеріалів, що сприяє розвитку креативних здібностей та інтелектуального розвитку здобувачів освіти, тобто вмінь і навичок, які приведуть до конкретного практичного результату, тобто до розв'язку задачі.

У методичній розробці подано задачі з логічним навантаженням різних типів, які можна використовувати на уроках математики у 5-6 класах, а також, розглянуті прийоми розв'язування задач різними методами. Такі прийоми не представлені у шкільних підручниках, але за допомогою них можна проводити дуже велику кількість обчислень. Діти відразу зможуть бачити результати застосування нових знань, що неодмінно сформує інтерес до предмета, а разом з тим підвищить рівень інтелектуального розвитку учнів.

Методика навчання учнів розв'язуванню нестандартних задач є досить тривалим і доволі складним процесом діяльності, який спрямовується на перетворення даного в умові задачі об'єкта; на вирішення можливих суперечностей, які виникають між запитанням і умовою задачі. Діяльність вчителя математики в процесі цієї роботи формується на пошуках теорії і системи загальноприйнятих положень, застосувавши які, з'явиться можливість сформулювати в учнів вміння розв'язувати нестандартні математичні задачі.

Варто зазначити, що мета розв'язування нестандартних задач не формується суто на отриманні відповідей, а на повному засвоєнні всіх можливих знань, які пов'язані із способами їх знаходження. Етап аналізування відповіді, під час якого школярі усвідомлюють і аналізують отримані відповіді є заключним, але не мало важливим етапом розв'язування нестандартної задачі.

Висновки

Ефективне навчання математики неможливе без пошуків шляхів інтелектуального і творчого розвитку та активізації пізнавальної діяльності здобувачів освіти. Адже, учні повинні не тільки засвоїти деякий об'єм знань, а й навчитися порівнювати, спостерігати, міркувати і виявляти взаємозв'язок між поняттями. А досягти цього можна тільки засобами, що активізують пізнавальну діяльність під час процесу розвитку інтересу до вивчення математики.

Використання під час освітнього процесу різних видів нестандартних задач сприяє підвищенню інтересу дітей до математики, розвитку їхніх інтелектуальних здібностей.

Розв'язування нестандартних задач розвиває у дітей розумові операції, а ще вимагає від дитини певної самостійності мислення, оригінального підходу, кмітливості і винахідливості, творчих пошуків та критичного відношення до власної роботи.

Розв'язування нестандартних задач та подання їх у вигляді гри має великий вплив на розвиток самостійного мислення, уваги та пам'яті учнів, лаконічної математичної мови, уяви, на виховання активності, ініціативності та волі.

Досліджуючи різні види нестандартних завдань, ми дійшли висновку, що значний вплив на розвиток математичних здібностей дітей мають вправи:

- | | |
|-----------------------------|-------------------|
| — логічного змісту; | — на кмітливість; |
| — комбінаторні; | — у вигляді ігр; |
| — з елементами дослідження; | — головоломки. |

Досвід вчителів переконує, що вже в початкових класах слід пропонувати дітям нестандартні задачі. Це дозволить показати їм роль індукції, експерименту, спостереження та дасть можливість поряд з навичками логічного мислення виховувати навички евристичного мислення, математичної творчості. Постійне опрацювання дітьми нестандартних задач спрямовується на

відточення елементарних розумових операцій, розвиток критичного мислення, швидкості та гнучкості їхнього мислення.

Набір нестандартних завдань в комплексі з традиційними сприятиме розвитку логічного мислення дітей, опануванню ними математичної мови, формуванню обчислювальних навичок, прищепленню інтересу до розв'язання задач і розширення загального світогляду. Крім того, така робота з учнями допоможе сформувати мислячу особистість.

Система розв'язування нестандартних задач має забезпечити поступове наростання складності виконуваних завдань і бути органічно зв'язаною з розвитком в здобувачів інтелектуальних здібностей.

Сама задача, в інтелектуальному розвитку здобувачів освіти, посідає не останнє місце, тому що, вона виступає одночасно і в ролі засобу, і в ролі методу навчання. Змістове наповнення умови нестандартної задачі залежить від наявних знань і пізнавальних інтересів школярів. Нестандартна задача підштовхує школяра до пошуку методів її розв'язування, співвідношення невідомого і відомого та проведення аналізу й синтезу. Процес розв'язування будь-якої задачі розпочинається із уважного ознайомлення та усвідомлення умови. Важливо мислити ширше і помічати підказки приховані в умові задачі. Важливу роль відіграють набуті раніше знання і навички, які допоможуть краще проаналізувати умову задачі та завдання, яке ставиться перед дитиною. Важливу роль, у розв'язанні, також, відводять засобам та способам розв'язання. Чим цікавіше школярам на уроці, тим жвавіший інтерес вони проявляють до предмету.

В ході дослідження та аналізу теми магістерської роботи було розроблено збірник нестандартних завдань з математики для учнів 5-6-х класів, матеріали якого можуть використовувати вчителі математики під час уроків та позакласної роботи. В збірнику можна знайти як найпростіші завдання у вигляді головоломок, так і складніші у вигляді олімпіадних завдань та завдання, які розв'язуються за допомогою кіл Ейлера.

В підсумку зазначимо, що мислення зароджується і розвивається з певної пізнавальної чи нестандартної задачі, та схоже на процес пошуку відповіді на життєві питання. Завдячуючи задачам, здобувачі освіти засвоюють математичні способи й прийоми розв'язування завдань, занурюються в сутність математичного методу пізнання світу, дізнаються про цікаві математичні факти, формують особливий вид творчого мислення та інтелектуально розвиваються.

Список використаної літератури

1. Амонашвілі Ш.О. Психологічні основи педагогіки співробітництва. Київ: Освіта, 1991.
2. Баєва Т.Ф., Руденко В.М., Мудрик О.І. Уроки розвитку логічного мислення. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2001.
3. Бачинська Р.С. Задача як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: зб. наук. пр. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2018. С. 29–33.
4. Бевз Г.П. Алгебра: підручник для 9 кл. Київ: Освіта, 2006. 206 с.
5. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Київ, 2009. 336 с.
6. Богданович М. В. Математика: підручник. Київ: Освіта, 2002. 160 с.
7. Богуш А., Пікінер В. Педагогічна спадщина К. Д. Ушинського у вимірі сучасності. Київ: Слово, 2017. 344.
8. Возняк Г.М., Маланюк К.П. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: посіб. для вчителя. Київ, 1989. 128 с.
9. Вороний О.М. Готуємось до олімпіад з математики. Харків: Основа, 2008р.
10. Гнеденко Б.В. Розвиток мислення і мовлення при вивченні математики. Математика в школі. 1991. Вип. 4. С. 17.
11. Губа Л.А. Нетрадиційні уроки математики. Харків: Основа, 2006р.
12. Демиденко В. К. Психологія вищої освіти: навчальний посібник. Бердянськ, 2003.
13. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти / Кабінет Міністрів України. Київ: Педагогічна преса, 2012. 64 с.
14. Дубініна О. М. Креативність як засіб і результат формування математичної культури. Молодь і ринок. 2014. № 1 (108). С. 51 - 56.
15. Дутко Л., Московченко В. Складання і розв'язування задач з логічним навантаженням. 2004. № 12. С. 8 – 10.

16. Жалдак М. І., Михалін Г. О. Елементи стохастички з комп'ютерною підтримкою. Київ, НПУ ім. М. Драгоманова. 2000. 70 с.
17. Задачі у навчанні математики. StudFiles: веб-сайт. URL: <https://studfile.net/preview/6795145/page:6/#12> (дата звернення: 12. 03. 2022)
18. Ізюмова А.В. Математична скарбничка. Математика. 2001. № 14-15.
19. Інтерактивні технології на уроках математики / упорядн. І. С. Маркова. Харків: Основа, 2007. 128 с.
20. Істер О. С. Алгебра: підручник для 7 кл. Київ: Генеза, 2015. 256 с.
21. Істер О. С. Алгебра: підручник для 8 кл. Київ: Генеза, 2016. 272 с.
22. Істер О. С. Алгебра: підручник для 9 кл. Київ: Генеза, 2017. 264 с.
23. Істер О. С. Геометрія: підручник для 7 кл. Київ: Генеза, 2015. 184 с.
24. Істер О. С. Геометрія: підручник для 8 кл. Київ: Генеза, 2016. 216 с.
25. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики. Харків: Основа. 2006. 144 с.
26. Касьяненко М. Д. Підвищення ефективності навчання математики. Київ, 2008.
27. Кенгуру — 2007 / Уклад.: А.С. Добосевич, М.С. Добосевич, Р.Є. Кокоружь, Х.Р. Трущак, О.Б. Таратула. Львів: Каменяр, 2007.
28. Кенгуру — 2010 / Уклад.: А.С. Добосевич, М.С. Добосевич, Р.Є. Кокоружь, Х.Р. Трущак, О.Б. Таратула. Львів: Каменяр, 2010.
29. Коваль Л.В., Скворцова С.О. Методика навчання математики: теорія і практика: Підручник. Частина І. Одеса: Видавництво—Автограф, 2008. 284 с.
30. Козира В.М. Технологія уроку з математики. Тернопіль: Астон, 2002р.
31. Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Обласні математичні олімпіади. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2004р.
32. Конфорович А.Г. Реальність і логіка математичних моделей у світі математики. Київ. С. 15-18.

33. Король Я. А. Практикум з методики викладання математики в початкових класах: навчальний посібник для студентів педагогічних університетів. Тернопіль: Мандрівець, 1998. 136 с.
34. Матюшко І.С., Федотова Н.М. Теорія і методика розв'язування текстових задач з математики в початкових класах: навчально-методичний посібник у двох частинах. Чернігів, 2003. 620 с.
35. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М. С. Алгебра: підручник для 8 кл. Харків: Гімназія, 2016. 240 с.
36. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М. С. Алгебра: підручник для 9 кл. Харків: Гімназія, 2017. 272 с.
37. Методи і способи розв'язування задач. Lib.mdpu: веб-сайт. URL: http://lib.mdpu.org.ua/e-book/ernestbook/temas/6_2.htm (дата звернення: 12.05.2022).
38. Мороз О. Г., Падалка О. С., Юрченко В. І. Педагогіка і психологія вищої школи. Київ, 2003.
39. Непомняща Г. В. Підготовка майбутнього вчителя до опрацювання задач під час вивчення освітньої галузі «Математика». *Вісник Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка*. 2018. Вип. 37. С. 1-7.
40. Перельман Я.І. Захоплююча геометрія: навчальна книга. Тернопіль: Богдан, 2008р.
41. Пометун О. Енциклопедія інтерактивного навчання. Київ: А.С.К., 2007р.
42. Пометун О., Пироженко Л. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання. Київ: А.С.К., 2003р.
43. Про організацію навчально-виховного процесу у 5 класах загальноосвітніх навчальних закладів і вивчення базових дисциплін в основній школі / Кабінет Міністрів України. Київ: Педагогічна преса, 2013. 64 с.
44. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-11 класи. Ірпінь: Перун, 2011. 64 с.

45. Прокопенко Н. С., Захарійченко Ю. О., Кінащук Н. Л. Алгебра: підручник для 9 кл. Харків: Ранок, 2017. 288 с.
46. Роганін О., Капінос А., Кондратнева Л. Геометрія: підручник для 8 кл. Тернопіль: Підручник і посібник, 2016. 256 с.
47. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів в процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу: зб. матеріалів доп. учасн. II Міжнар. наук.-метод. конф. / Сумський державний педагогічний університет. Суми: ВВП «Мрія», 2015. 131 с.
48. Сарана О.А. Математичні олімпіади. Київ: А.С.К., 2004р.
49. Слепкань З.І. Методика навчання математики: підручник. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.
50. Словник української мови в 20 томах. Київ: Наукова думка, 2010. 1670 с.
51. Сухарева Л.С. Логічні задачі та способи їх розв'язання. Харків: Основа, 2007.
52. Сухомлинський В.А. Як виховати справжню людину. Київ: Рад. школа, 1976. 235 с.
53. Тверезовська Н., Сидоренко В. Методологія педагогічного дослідження. Київ: Центр навчальної літератури, 2017. 440.
54. Формування математичної грамотності учнів. Confdbt: веб-сайт. URL: <http://www.confdbt.2007/theses/Berezin.pdf> (дата звернення: 12.03.2022)
55. Чашечникова О.С. Деякі аспекти формування математичної грамотності учнів. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики: матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції. Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2009. 105 с.
56. Шаран О.В. Особливості інтелектуального розвитку учнів на уроках математики та шляхи формування їх зацікавленості до навчання. *Молодь і ринок*. 2016. №11 (94). С. 1-3.
57. Якименко С.І. Абетка. Логіка. Математика: методичний посібник. Тернопіль: Богдан, 2007. 176 с.

58. Ясинський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль: Богдан, 2005р.

Додатки

Додаток А

Задачі на застосування принципу Діріхле

Приклад 1. У школі навчаються 400 учнів. Довести, що хоча б двоє з них народилися в один день року.

Розв'язання. Найбільше в році буває 366 днів. Якщо дні вважати клітками, як у формулюванні принципу Діріхле, а учнів — кроликами, то в деякій клітці сидять не менше як два кролики, тобто більше від одного кролика. Отже, не менше двох учнів народилися в один день року. ■

Можна міркувати від супротивного. Припустимо, що кожний день відзначають день народження не більше, ніж один учень, тоді всього учнів не більше від 366 — суперечність.

Приклад 2. Кіт Базіліо пообіцяв Буратіно відкрити велику таємницю, якщо той складе чарівний квадрат 6×6 із чисел $+1, -1, 0$ так, щоб всі суми по рядкам, по стовпцям і по великим діагоналям були різні. Чи може Буратіно скласти такий квадрат?

Розв'язання. Вказані суми чисел можуть змінюватися в межах від -6 до $+6$. Всього — 13 значень. Рядків у квадраті є 6, стовпців — 6, діагоналей — 2. Маємо 14 різних сум. За принципом Діріхле хоча б дві з цих сум мають дорівнювати одна одній. Отже, скласти такий квадрат неможливо. ■

Приклад 3. На Землі океан займає більше половини площі поверхні. Довести, що в світовому океані можна взяти дві діаметрально протилежні точки.

Розв'язання. Відобразимо океан симетрично центру Землі. Оскільки сума площ океану і його образу перевищує площу земної поверхні, то існує точка, що належить океану і його образу. Візьмемо за шукані цю точку разом з протилежною до неї. ■

Приклад 4. На співбесіду прийшли 65 школярів. Їм запропонували 3 тестові завдання. За кожне завдання ставилася одна з оцінок: 2, 3, 4 або 5. Чи вірно, що знайдуться два школярі, що одержали однакові оцінки з усіх тестових завдань?

Розв'язання. Розглянемо всі набори з трьох оцінок за відповідні завдання. Кількість таких наборів дорівнює 4^3 або 64 (4 можливості за кожне з трьох тестових завдань). Оскільки число учнів більше, ніж 64, то за принципом Діріхле деяким двом учням відповідає один набір оцінок. ■

Приклад 5. У класі навчається 29 учнів. Сашко Петренко зробив у диктанті 13 помилок, і ніхто інший не зробив більшої кількості помилок. Довести, що принаймні три учні зробили однакову кількість помилок.

Розв'язання. Прийmemo за «клітки» всі можливі варіанти кількості помилок. Їх є 14, оскільки учні можуть зробити 0, 1, ..., 13 помилок. «Зайцями» зважатимемо учнів, які писали диктант і яких за умовою є 29. Кожного з них «садимо» у «клітку», що відповідає кількості зроблених помилок. Зрозуміло, що знайдеться «клітка», в якій «сидять» принаймні три «зайці», а це й означає, що знайдуться три учні, які зробили однакову кількість помилок. ■

Приклад 6. У п'ятих класах школи навчається 160 учнів. Довести, що знайдуться 4 п'ятикласники, у яких день народження припадає на один і той самий тиждень.

Розв'язання. У році може бути максимум 53 тижні. Їх і прийmemo за «клітки», а за «зайців» — учнів. Розсаджуватимемо «зайців» у ті «клітки», що відповідають їх дням народження. Оскільки $160 : 53 = 3$, то за принципом Діріхле знайдеться «клітка», у якій є принаймні 4 «зайці». Це означає, що знайдеться тиждень, на який припадає день народження відразу у чотирьох учнів. ■

Приклад 7. У клітинках таблиці розміром 3×3 розміщено числа $-1; 0; 1$. Розглянемо вісім сум: суми всіх чисел у кожному рядку, кожному стовпці і на двох діагоналях таблиці. Чи можуть усі ці суми бути різними?

Розв'язання. Нехай «клітками» будуть усі різні значення сум трьох чисел, кожне з яких набуває значення 0, 1 або -1 . Зрозуміло, що таких значень є 7. Це $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$. «Зайцями» будуть набори із трьох чисел, що розміщені або в одному стовпці, або в одному рядку, або на одній із двох діагоналей таблиці. Таких наборів є 8.

За принципом Діріхле знайдеться «клітка», де сидять не менше двох «зайців». А це й означає, що знайдуться дві розглядувані трійки чисел, для яких суми рівні.

Відповідь. Ні. ■

Приклад 8. У ящику лежать 10 пар чорних рукавичок і 10 пар червоних одного розміру. Скільки рукавичок потрібно витягнути з ящика навмання, щоб серед них були:

- а) хоча б дві рукавички одного кольору;
- б) хоча б одна пара рукавичок одного кольору?

Розв'язання а) Якщо за «клітки» прийняти кольори рукавичок, то взявши три довільні рукавички, ми отримаємо, що в одній із «кліток» знаходяться два «зайці» — рукавички. А це і вимагається в задачі. Отже, щоб були дві рукавички одного кольору, потрібно витягнути щонайменше 3 рукавички.

б) Якщо взяти 20 рукавичок на одну руку, то з них не можна буде вибрати пару рукавичок одного кольору, тому шукана кількість рукавичок не менша, ніж 21.

Справді, якщо за «клітки» прийняти кольори рукавичок (їх два), а за «зайців» — рукавички, то за узагальненим принципом Діріхле в одній з «кліток» буде не менше 11 «зайців». Це означає, що знайдеться 11 рукавичок одного кольору. Але ми маємо лише 10 пар рукавичок одного кольору. Тому всі вони не можуть бути на одну руку. Отже, серед цих 11 рукавичок знайдеться одна пара рукавичок одного кольору. ■

Приклад 9. Довести, що серед довільних трьох цілих чисел можна знайти два числа, сума яких ділиться на 2.

Розв'язання Приймемо за «клітки» різні остачі від ділення чисел на 2. Їх є усього дві: 0 і 1. «Зайцями» будемо вважати остачі від ділення на 2 трьох даних чисел, їх є три. Розмістивши «зайців» у «клітки» (кожного «зайця» розміщуємо у «клітку», що дорівнює остачі від ділення його на 2), за принципом Діріхле отримаємо, що знайдеться «клітка» з двома «зайцями», тобто знайдуться два числа, що дають при діленні на 2 однакові остачі. Їхня сума і ділиться на 2. ■

Приклад 10. Довести, що серед довільних семи цілих чисел можна знайти три, сума яких ділиться на 3.

Розв'язання. За «клітки» приймаємо різні остачі від ділення на 3. Їх є усього три: 0, 1, 2. «Зайцями» вважатимемо остачі від ділення на 3 даних семи чисел. Їх є усього 7. Як і в попередній задачі, розмістивши «зайців» у «клітки» і використавши узагальнений принцип Діріхле, робимо висновок, що знайдуться три «зайці», що знаходяться в одній із «кліток». А це й означає, що знайдуться три числа, які дають однакові остачі від ділення на 3. Їх сума ділиться на 3. ■

Приклад 11. Дано 12 цілих чисел. Довести, що з них можна вибрати два числа, різниця яких ділиться на 11.

Розв'язання. Приймаємо за «клітки» різні остачі від ділення чисел на 11. Їх є усього 11. За «зайців» приймаємо остачі від ділення даних чисел на 11. Їх є усього 12. Розміщуючи «зайців» у «клітки» аналогічно до попередніх задач, за принципом Діріхле отримаємо, що знайдуться два «зайці» в одній із «кліток». А це означає, що знайдеться два числа, які дають однакові остачі від ділення на 11. Зрозуміло, що різниця цих чисел буде ділитися на 11. ■

Приклад 12. Кожну грань куба зафарбовано у білий або чорний колір. Довести, що знайдуться однаково зафарбовані грані, що мають спільне ребро.

Розв'язання. Розглянемо довільну вершину куба. У ній перетинаються три грані. Приймаємо за «клітки» кольори, а за «зайців» — грані, що перетинаються в цій вершині. Їх є усього три. Тому за принципом Діріхле знайдеться «клітка», у якій міститься два «зайці». А це означає, що знайдуться дві грані, які мають спільне ребро (оскільки вони мають спільну точку) і зафарбовані однаково. ■

Цікаві задачі і завдання з математики

1. Скільки Оль?

В дзеркало Оля
 Поглянула в школі,
 Скільки дівчаток з'явилося?

2. Скільки курей?

Два півниці, два півниці
 У саду в'язали вінниці.
 Дві курочки, дві курочки
 Підмітали ними вулички.
 Ти назвеш мені число:
 Скільки всіх курей було?

3. Яка сходинка?

Яка сходинка буде середньою на східцях з 8 сходинок?

4. Знайди число 7 у поданих словах

Осінь, зовсім, просинь, усім, посів, передовсім, сірий, сім я, кросівки, вісім.

5. Дятлові чобітки

Влітку дятел-швець спішив –
 Чобітки на зиму шив
 І складав їх у мішок
 Для звіряток і пташок:
 Совам - 10 чобітків,
 Ще 12 – для вовків,
 14- для синичок.
 Підкажіть мені, щоб я повірив:
 Скільки дятел взув пташок і звірів?

6. Зайві слова

Які слова в цьому ряду зайві?

Сіно, чотири, вода, трава, дев'ять, книжка, одинадцять, вісім, десять, халва, три, шість, один, літо, два, п'ять, сім.

7. Утвори слова

Зі слова математика утвори 8 нових слів, переставляючи букви у будь-якому порядку.

8. Що їх об'єднує?

Яка цифра об'єднує райдугу, музику, дні тижня, чудеса світу?

9. Знайди число

Переставляючи між собою цифри 1,2,3, ми отримали трицифрові числа. Серед поданих варіантів бракує одного числа. Знайди його.

123 312 132 321 213 ...

10. Знайди якомога більше «тришок» у поданих словах

Трал, стригти, сестри, гострити, Петрик, постріл, хитрий, настрій, тривога, старт, Дмитрик, ватра, вітрина, майстри, стриже, тритон, люстра, гетри, Стрій, трикотаж, струмінь.

11. Розділи чобітки

Чотирьом котикам мама Киця купила чобітки, однак за розміром вони їм не підійшли. Тоді Киця запропонувала їх півникам. Скільки півників можуть взути ці чобітки?

12. Індик в черевках

П'ятеро індиків

Бігло в черевках.

Скільки черевків

У п'ятьох індиків?

13. Скільки кінців?

Склади удвічі мотузку і уможовно переріж його упоперек. Скільки буде кінців у відрізаних мотузків?

14. Магічний квадрат

У порожні клітини магічного квадрата впиши такі числа, щоб сума трьох чисел у будь-якому напрямку дорівнювала 15.

		6
	5	
4		2

1. У Юрка сьогодні день народження. Він молодший за свою сестру, якій виповнилось 7 років. Скільки років може бути Юркові?
2. Є два бідони місткістю 2л і 7л. Як, використовуючи ці бідони, набрати із річки 3л води?
3. Юрко, Дмитрик, Ярослав – близнята. Вони народилися в один рік і в один день. Разом їм вісімнадцять років. Скільки років кожному?
4. В Олесі було три п'яльці: Ганнуся, Марійка та Оля. Кожна з них жила в одному з трьох будиночків.
5. Перша хатка була з високим дахом і маленьким вікном, друга хатка – з високим дахом і великим вікном, а третя – з низьким дахом і великим вікном. Ганнуся і Марійка жили в хатках з великим вікном, а Марійка і Оля – у хатках з високим дахом. Потрібно відгадати, в якій хатці живе кожна п'яльця.
6. Летіли гуси, а назустріч їм – гусак. «Добридень, десять гусей!» - мовив він. «Ні, нас не десять. Якби ти був з нами, та ще двоє гусей, тоді було б десять», - відповіли гуси. Скільки летіло гусей?
7. Білочка принесла шишки та горішки, всього чотири плоди. Горішків було більше, ніж шишок. Скільки шишок і скільки горішків принесла білочка?

9. Надворі гралося 5 дітей. Коли двоє хлопчиків пішло додому, то серед дітей, які залиш илися, більше стало дівчаток. Скільки спочатку гралося дівчаток і скільки – хлопчиків?

Хитрі запитання

1. Скільки днів сонце не світить взимку?
2. Хто більше важить: три зайці чи один слон?
3. На одній нозі півень важить 4 кілограми. Скільки важитиме півень на двох ногах?
4. Скільки днів на тиждень сова полює на мишей?
5. Що стоїть між числами 2 і 8?
6. Яке колесо під час руху не обертається?
7. На столі лежало 5 яблук. Одне Даринка розрізала на чотири частинки. Скільки яблук залишилось на столі?
8. Світланка і Василь прийшли вранці в клас, а там уже було 4 учениці. Скільки учениць стало у класі?
9. У бабусі Олени були: кіт Моряк, собака Дружок, онука Леся і онук Денис. Скільки всього онуків у бабусі?
10. Дідуся звали Григорій Васильович, його онука – Андрій Віталійович. Як звать батька онука?
11. Одне яйце можна зварити за 4 хвилини. За скільки хвилин можна зварити три таких яйця?
12. У коробці було 2 червоних і 2 зелених олівці. Художник взяв 3 олівці. Скільки олівців кожного кольору могло бути у художника?
13. Чебурашка, крокодил Гена і Шапокляк чекали потяг 3 години. Скільки годин чекав потяг кожен з них?
14. Пара коней пробігла 20 км. Скільки кілометрів пробіг кожен кінь?

15. Мама дала Сергію 4 сливи, 5 яблук і 2 цукерки. Скільки фруктів мама дала синові?
16. Як розділити три картоплини порівну між чотирма дітьми?
17. На столі стояло 3 куклі з молоком. Кіт випив один куваль молока. Скільки кукліз залишилось?
18. У школу йшло 7 дівчаток. Назустріч їм – 2 дівчинки. Скільки дітей ішло в школу?
19. Скільки кроків зробить горобець за сім років?

Контрольна робота
Порівняння. Додавання і віднімання дробів
з різними знаменниками.

Варіант 1

1. Порівняти дроби:

а) $\frac{7}{24}$ і $\frac{5}{12}$; б) $\frac{2}{3}$ і $\frac{3}{4}$.

2. Обчислити:

а) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6} + \frac{3}{8}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $12\frac{5}{6} - x = 5\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{15} + (x - \frac{3}{5}) = \frac{2}{3}$

4. Обчислити :

$$11\frac{7}{36} + 3\frac{3}{4} - (14 - 8\frac{4}{9})$$

5. Задача.

Микола, Сашко і Андрійко зібрали разом $46\frac{5}{6}$ кг макулатури. Микола і Андрійко зібрали $34\frac{1}{4}$ кг ,

Сашко і Андрійко – $28\frac{5}{16}$ кг. Скільки кг макулатури зібрав кожен хлопчик?

Контрольна робота

Порівняння. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками.

Варіант 2

1. Порівняти дроби:

а) $\frac{11}{30}$ і $\frac{7}{15}$; б) $\frac{3}{5}$ і $\frac{2}{3}$.

2. Обчислити:

а) $\frac{3}{4} - \frac{4}{7}$; б) $\frac{5}{8} + \frac{5}{6}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $9\frac{3}{4} - x = 5\frac{7}{8}$; б) $\frac{3}{8} + (\frac{5}{12} - x) = \frac{17}{24}$

4. Обчислити :

$$(63\frac{2}{3} + 3\frac{1}{8}) - (13 - 10\frac{5}{6})$$

5. Задача.

У трьох ящиках було $34\frac{23}{24}$ кг яблук. У першому і другому ящику було $22\frac{7}{12}$ кг, в першому і третьому – $23\frac{3}{16}$ кг. Скільки кг яблук було в кожному ящику?