Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Методика вивчення похідної та інтеграла в шкільному курсі алгебри та початків аналізу

Виконала: студентка II курсу магістратури,
групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Стельмах Надія Григорівна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри математики з методикою викладання РДГУ
Генсіцька-Антонюк Наталія Олександрівна

Рецензент: канд. пед. наук, проф. кафедри математики з методикою викладання РДГУ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: канд. техн. наук, доц. кафедри вищої математики РДГУ
Присяжнюк Ігор Михайлович

Рівне – 2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Поняття похідних є не лише фундаментальним поняттям у математичному аналізі, яке допомагає вивчати процеси та явища в природничих, соціальних та економічних науках. Двоє відомих вчених – Ньютон і Лейбніц наприкінці XVII ст. – відкрили похідні незалежно. Однак задовго до цього Архімед розв'язав задачу побудови дотичних до кривих і знайшов максимум певної функції.

Інтеграл є одним із найважливіших понять у математиці, він виник через необхідність знайти функції за їхніми похідними, з одного боку (наприклад, знайти функцію, яка представляє швидкість шляху, який рухається точка в цій точці), а з іншого боку – вимірювання площі , об'єму, довжини дуги, роботи сили за певний проміжок часу тощо.

Розділи алгебри та початки аналізу «Похідні та їх застосування» та «Інтеграл та його застосування» займають важливе місце в шкільних курсах математики, головним чином через їх велике прикладне значення.

Сучасна школа має забезпечувати виховання всебічного розвитку людини, тому, підвищуючи науково-теоретичний рівень навчання, необхідно приділяти увагу вихованню в учнів умінь застосовувати набуте на практиці, розвивати їх психологічні здібності, виховувати їхній інтерес до предметів і самостійно набувати здатність до знань.

Тема «Методика вивчення похідної та інтеграла в шкільному курсі алгебри та початків аналізу» є важливою для загального розвитку дитини. Учні розвивають: самостійний аналіз ситуацій, здатність швидко адаптуватися до нових ситуацій, здатність застосовувати те, що вони навчилися, здатність виражати графічно (правильно і охайно будувати); розвиток: інтерес до алгебри та початку аналізу, здатність аналізувати та формулювати розумно висновки. Загалом дослідження на тему застосування похідних до розв’язування задач у шкільних програмах з математики є вагомим внеском у розвиток логічної культури учнів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, 2011).

Варто зауважити, що теоретичні та практичні знання матеріалу про похідні та інтеграл включає в себе також програма зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) (Програма зовнішнього незалежного оцінювання, 2018).

Проблемою вивчення похідної та інтеграла в шкільному курсі математики займалися такі педагоги-математики, як Т. В. Думанська, Л. С. Капкаєва, О. Е. Корнійчук, В. Д. Погребний, З. І. Слєпкань та інші, всі вони дотримуються думки, що дані теми мають велике значення у розвитку учня.

Таким чином тема ***«Методика вивчення похідної та інтеграла в шкільному курсі алгебри та початків аналізу»*** є актуальною і потребує детального дослідження.

Мета роботи полягає у представлені узагальнених та систематизованих навчально-методичних матеріалів, щодо вивчення тем «Похідна» та «Інтеграл».

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри та початків аналізу учнів загальноосвітніх навчальних закладів.

Предметом дослідження є комплекс теоретичних, методичних та практичних питань, пов'язаних з похідною та інтегралом.

Згідно поставленої мети були сформульовані такі **завдання**:

1. Аналіз педагогічної, методичної та наукової літератури з теми дослідження;
2. Дослідити місце похідних та інтегралів в програмі алгебри 10-11 класу та програмі зовнішнього незалежного оцінювання;
3. Представити методику навчання учнів розв'язування задач з похідними та інтегралами на конкретних прикладах;
4. Підготувати дидактичні картки та дослідити переваги їх використання при вивченні тем дослідження.

Задля реалізації поставлених задач були використані такі **методи дослідження:** теоретичні (термінологічний аналіз, пошуково-бібліографічний, узагальнення), емпіричний (опитування).

Гіпотеза дослідження. В даному дослідженні ми виходили з того, що формуванню вмінь, навиків учнів передують стійкі теоретичні знання з тем дослідження та організація навчання, що включає використання наочності (дидактичні картки).

Джерельна база дослідження: навчальні програми, шкільні підручники та посібники, методична література для вчителів, періодичні видання, статті і нормативно-правова база.

Теоретичне значення дослідження полягає в наступному:

1) узагальнені і систематизовані теоретичні матеріали вивчення похідної та інтеграла в шкільному курсі алгебри та початків аналізу
2) здійснений аналіз методичної літератури;
3) розглянута методика розв’язування задач на застосування інтеграла та похідної;
4) проаналізовано завдання ЗНО з теми дослідження;
5) наведено використання дидактичних карток на уроках математики при вивченні теми «Інтеграл та його застосування».

Практичне значення роботи полягає в тому, що систематизовані матеріали дослідження можуть бути використані вчителями в освітній діяльності та студентами педагогічних ЗВО під час опрацювання питань з методики вивчення математики.

Апробація дослідження. Результати дослідження були представлені у матеріалах XV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Наука, освіта, суспільство: очима молодих» (Рівне, РДГУ, 2022 р.) та заслуховувались на засіданні кафедри математики з методикою викладання РДГУ.

Структура та обсяг роботи. Дипломна робота складається зі вступу, 2 розділів, висновків, списку використаних джерел (50 найменувань) та додатків. Загальний обсяг роботи складається із 122 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Аналіз програм та підручників з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (до вивчення теми «Похідна»).

Вивчення «Похідна та її застосування» в 10 класі пропонується на двох трьох рівнях: стандарту, профільний та поглиблений. Перший пропонує 54 години на рік, 7 год резерву. За другим варіантом, 210 годин на рік, 24 год резерву. Що стосується навчального плану з математики поглибленого рівня, то на алгебру виділяється 210 годин на рік, 22 год. резерву.

Зазначимо, що більша кількість годин на профільному рівні обумовлена тим, що в тему «Похідна та її застосування» входить матеріал про границю та неперервність функції, а на поглибленому рівні на вивчення границі відводиться окрема тема обсягом в 18 годин.

Порівняння навчальної програми з теми «Похідна та її застосування» рівня стандарту, профільного та поглибленого рівнях

1. Рівень стандарту (14 годин) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів рівня стандарту).

- Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст.
- Правила диференціювання.
- Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції. Екстремуми функції.
- Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їхніх графіків. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

2. Профільний рівень (54 години) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів профільного рівня).

- Границя функції в точці.
- Основні теореми про границі функції в точці.
- Неперервність функції в точці і на проміжку.
- Задачі, які приводять до поняття похідної.

- Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила диференціювання: похідна суми, добутку і частки функцій. Складена функція. Похідна складеної функції.
- Похідні степеневої та тригонометричних функцій.
- Ознака сталості функції. Достатні умови зростання і спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
- Застосування похідної для розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.
- Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.
- Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.
- Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків. Асимптоти графіка функції.

3. Поглиблений рівень (50 годин) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів поглибленого рівня).

- Задачі, які приводять до поняття похідної.
- Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Рівняння дотичної до графіка функції. Правила обчислення похідних. Складена функція. Похідна складеної функції та оберненої функції.
- Похідна степеневої, тригонометричних та обернених тригонометричних функцій.
- Основні теореми диференціального числення.
- Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
- Застосування похідної для доведення тотожностей та нерівностей, а також для розв'язування рівнянь і нерівностей.
- Похідні вищих порядків. Поняття опуклості функції та точки перегину. Знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину.
- Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій та побудови їх графіків. [Нерівність Йєнсена та її застосування.]

- Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.

Розглянемо підручники профільного та поглибленого рівнів.

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк, А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. міститься тема «Похідна та її застосування». У цей параграф входять пункти: радіанна міра кута; означення границі функції в точці та функції, неперервної в точці; задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції; поняття похідної; правила обчислення похідних; рівняння дотичної; ознаки зростання і спадання функції; точки екстремуму функції; найбільше і найменше значення функції на відрізку; друга похідна, поняття опуклості функції; побудова графіків функції. Додатково подається матеріал про деякі властивості неперервних функцій (Мерзляк А. Г. проф. рівень, 2018).

Підручник «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. для поглибленого вивчення математики містить тему «Похідна та її застосування». У зміст цієї теми входять такі підтеми: приріст функції, задачі, які приводять до поняття похідної; поняття похідної; правила обчислення похідних; рівняння дотичної; теореми Ферма, Ролля, Лагранжа; ознаки зростання і спадання функції; точки екстремуму функції; найбільше і найменше значення функції на відрізку; друга похідна, поняття опуклої функції; побудова графіків функції. Додатково подається матеріал по доведенню теорем про похідні складеної та оберненої функцій; а також про нерівність Єнсена (Мерзляк А. Г. поглиб. рівень, 2018).

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», авторів Бевз Г. П., Бевз В. Г. тема «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» в порівняні з попередніми підручниками складається з таких пунктів: границя і неперервність функції; асимптоти функції; дотична до графіка функції і похідна; техніка диференціювання; похідні тригонометричних функцій; похідна складеної функції; зростання і спадання функції; екстремуми функції; найбільше і найменше значення функції; застосування другої похідної до дослідження функції та побудови їх графіків; похідна як швидкість (Бевз Г. П. проф. рівень, 2018).

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», автора Нелін Є. П. до теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» до дається застосування похідної до розв'язування рівнянь та доведення нерівностей; застосування похідної до розв'язування завдань з параметрами. Відсутні такі пункти як: зростання і спадання функції; екстремуми функції; найбільше і найменше значення функції; застосування другої похідної до дослідження функції та побудови їх графіків; похідна як швидкість (Нелін Є. П. проф. рівень, 2018).

Навчальний матеріал підручника «Алгебра і початки аналізу», авторів Істер О. С., Єргіна О. В. схожий з попередніми підручниками, і об'єднує у собі усі пункти з теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» зрозглянутих нами підручників (Істер О. С. проф. рівень, 2018).

1.2. Похідна та її застосування.

1.2.1. Задачі, які приводять до поняття похідної.

Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 – фіксована точка з області визначення функції f.

Якщо x – довільна точка області визначення функції f і така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають приростом аргументу функції f у точці x_0 і позначають Δx (Мерзляк, 2018).

Маємо: $\Delta x = x - x_0$.

Звідси $x = x_0 + \Delta x$.

Це означає, що аргумент отримав приріст Δx у точці x_0.

Зауважимо, що приріст аргументу може бути як додатним: якщо $x > x_0$, то $\Delta x > 0$, і від'ємним: якщо $x < x_0$, то $\Delta x < 0$ (Мерзляк, 2018).

Значення функції f зміниться на величину $f(x_0 + \Delta x) – f(x_0)$, якщо аргумент у точці x_0 отримає приріст Δx (Мерзляк, 2018).

Цю різницю називають приростом функції f у точці x_0 і позначають Δx.

Маємо: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x0)$ або $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Приріст функції $y = f(x)$ позначають також Δy, тобто $\Delta y = f(x) – f(x_0)$ або $\Delta y = f(x_0 + Dx) – f(x_0)$ (Мерзляк, 2018).

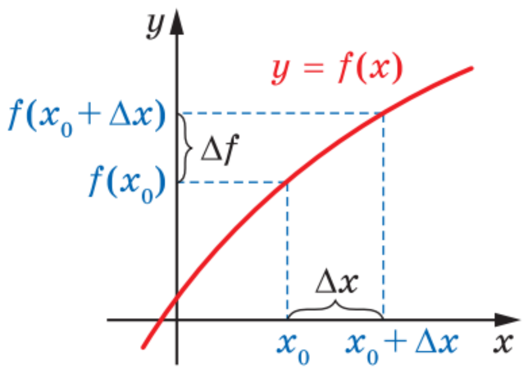


Рис. 1.1. Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δf функції

Зазначимо, що приріст функції f у точці x_0 для фіксованої точки x_0 є функцією з аргументом Δx.

Задача про миттєву швидкість

Нехай через час t після початку руху по координатній прямій, матеріальна точка має координату $s(t)$. Отже, для того щоб визначити положення точки в будь-який момент часу, існує деяка функція $y = s(t)$, яку називають законом руху точки (Мерзляк, 2018).

Наприклад, закон рівноприскореного руху у курсі фізики задається формулою $s(t) = s_0 + v_o t + \frac{\alpha t^2}{2}$, де s_0 – координата точки на початку руху (при $t = 0$), v_o – початкова швидкість, α – прискорення (Мерзляк, 2018).

Нехай, $s_0 = 0$, $v_o = 1$ м/с, $\alpha = 2$ м/с^2. Тоді $s(t) = t^2 + t$.

Розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, заздалегідь зафіксувавши деякий момент часу t_0 і надавши аргументу приріст Δt а точці t_0. За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення Δs (Мерзляк, 2018).

Маємо:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0+\Delta t)} - \underbrace{({t_0}^2 + t_0)}_{s(t_0)} =$$

$$= {t_0}^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - {t_0}^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Середня швидкість $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює відношенню $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Отримуємо:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t,$$

отже $v_{\text{сер}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t$.

Позначення для середньої швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ означає, що при заданому законі руху $y = s(t)$ і фіксованому моменті часу t0 значення середньої швидкості залежить тільки від Δt (Мерзляк, 2018).

При досить малих проміжках часу часу від від t_0 до $t_0 + \Delta t$, середні швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ будуть мало відрізняються одна від одної, тобто величина $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ майже не змінюється. Значення середньої швидкості буде ближчим до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу t_0, коли буде найменшим Δt. Тобто, якщо при $\Delta t \to 0$ значення $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ прямують до числа $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ називають миттєвою швидкістю в момент часу t_0 (Мерзляк, 2018).

Якщо в наведеному прикладі $\Delta t \to 0$, то значення виразу $2t_0 + 1 + \Delta t$ прямують до числа $2t_0 + 1$, яке є значенням миттєвої швидкості $v(t_0)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}(2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$, то її миттєву швидкість у момент часу t_0 визначають за допомогою формули $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}}(\Delta t)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Задача про дотичну до графіка функції

Нехай M – деяка точка, що лежить на параболі $y = x^2$. Проведемо пряму OM, яку назвемо січною (Рис. 1.2.).

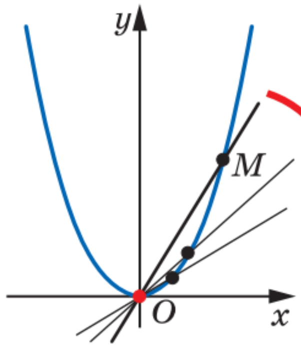


Рис. 1.2. Парабола $y = x^2$ і пряма OM

Нехай точка M, рухаючись по параболі, близька до точки O. При цьому січна OM буде обертатися навколо точки O. Тоді кут між прямою OM і віссю абсцис стане меншим, а січна OM буде прагнути зайняти положення осі абсцис. Коли точка M наближається до точки O, пряма, положення якої прагне зайняти січною OM, називається дотичною до параболи $y = x^2$ у точці O (Мерзляк, 2018).

Розглянемо графік деякої неперервної в точці x_0 функції f і точку $M_0(x_0; f(x_0))$.

У точці x_0 ми дамо аргументу приріст Δx і розглянемо точку $M(x; f(x))$ на графіку, де $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 3). Як видно з графіка, зі зменшенням Δx точка M, що рухається по графіку, наближається до точки M_0. Якщо при $\Delta t \to 0$ січна M_0M прагне зайняти положення прямої (на малюнку 1.3, пряма M_0T), то така лінія називається дотичною до графіка функції f у цій точці M_0 (Мерзляк, 2018).

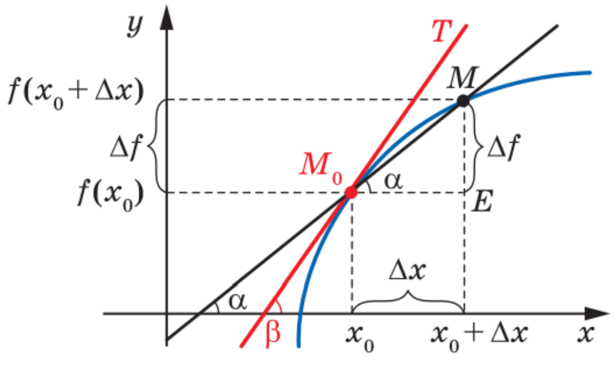


Рис. 1.3. Графік деякої неперервної в точці x_0 функції f і точка $M_0(x_0; f(x_0))$

Нехай січна M_0M має рівняння $y = kx + b$ і утворює кут α з додатним напрямком осі абсцис. Як ми всі знаємо, кутовий коефіцієнт k прямої M_0M

дорівнює $tg\alpha$, тобто $k = tg\alpha$. Зрозуміло, що $\angle M_0ME = \alpha$ (рис. 3). Тоді з трикутника M_0ME отримуємо (Мерзляк, 2018):

$$tg\ \alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Введемо позначення $k_{\text{січ}}(\Delta x)$ $ksich\ (Dx)$ для кутового коефіцієнта січної M_0M, тим самим підкреслюючи аргумент, що для заданої функції f і фіксованої точки x_0 кутовий коефіцієнт січної M_0M залежить від на приріст Δx (Мерзляк, 2018).

Маємо: $k_{\text{січ}}(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Нехай дотична M_0T утворює кут β ($\beta \neq 90°$) з додатним напрямком осі абсцис. Тоді його кутовий коефіцієнт $k(x_0)$ дорівнює $tg\beta$. Природно припустити, що чим менше Δx, тим менше різниця між значенням кутового коефіцієнта січної і значенням кутового коефіцієнта тангенса. Іншими словами, якщо $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{січ}}(\Delta x) \to k(x_0)$ (Мерзляк, 2018).

У загальному випадку кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці абсцис x_0 визначається за формулою $k(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{січ}}(\Delta x)$, тобто

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1.2.2. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називаєтся границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргумента, коли приріст аргумента прямує до нуля (Нелін, 2018).

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$ (або $y'(x_0)$). Коротко, визначення похідної функції $y = f(x)$ можна записати так (Нелін, 2018):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

З огляду на визначення приросту функції $y = f(x)$ у точці x_0, що відповідає приросту Δx, визначення похідної також можна записати так (Нелін, 2018):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функція $f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називається диференційованою функцією в цій точці. Функція $f(x)$ називається диференційованою на інтервалі, якщо вона має похідну в кожній точці інтервалу. Операція знаходження похідної називається диференціюванням (Нелін, 2018).

Для знаходження похідної функції $y = f(x)$ за визначенням можна використати таку схему (Нелін, 2018):

1. Знайти приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної.

2. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Дізнатися, до якої границі прямує відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Це буде похідна заданої функції.

Похідні деяких елементарних функцій

Покажемо, що запропонована схема використовується для знаходження похідних функції.

1. Обчислити похідну функції $y = c$ (тобто $f(x) = c$), де c є константою (Нелін, 2018).

1) Знайдемо приріст функції, який відповідає приросту аргумента Δx:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0.$$

2) Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

3) Так як співвідношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є постійним і дорівнює нулю, то границя цього співвідношення при $\Delta x \to 0$ також дорівнює нулю. Отже, $y' = 0$, тобто $c' = 0$.

2. Обчислити похідну функції $y = x$ (тобто $f(x) = x$) (Нелін, 2018).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

3) Оскільки відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є постійним і дорівнює 1, то границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ також дорівнює 1. Отже, $y' = 1$, тобто $x' = 1$.

3. Обчислимо похідну функції $y = x^2$ (тобто $f(x) = x^2$) (Нелін, 2018).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2 =$

$= {x_0}^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - {x_0}^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$. Це означає, що $y'(x_0) = 2x_0$. Тоді похідна функції $y = x^2$ у довільній точці x дорівнює $y'(x) = 2x$. Отже, $(x^2)' = 2x$.

4. Обчислимо похідну функції $y = \frac{1}{x}$ (тобто $f(x) = \frac{1}{x}$) (Нелін, 2018).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{(x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0}$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{-1}{(x_0 + \Delta x)x_0}$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $x_0 + \Delta x \to x_0$. Тоді похідна функції $y = \frac{1}{x}$ у довільній точці x з її області визначення (при $x \neq 0$) $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Отже, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

5. Обчислимо похідну функції $y = \sqrt{x}$ (тобто $f(x) = \sqrt{x}$) (Нелін, 2018).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$.

Помножимо і поділимо одержаний вираз на суму $\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}$ та запишемо так:

$$\Delta y = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $x_0 + \Delta x \to x_0$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Це означає, що $y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (зазвичай, при $x_0 \neq 0$). Тоді похідна функції $y = \sqrt{x}$ у довільній точці x з її області визначення, крім $x = 0$ (тобто при $x > 0$) $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Отже, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Геометричний зміст похідної

Розглянувши означення похідної функції $y = f(x)$, запишемо результат, отриманий при розгляді дотичної до графіка функції (рис. 4).

Як було сказано вище, тангенс кута φ нахилу дотичної в точці M відносно осі абсцис x_0 (Рис. 1.4) обчислюють за формулою $tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Отже, $f'(x_0) = tg\varphi$ (Нелін, 2018).

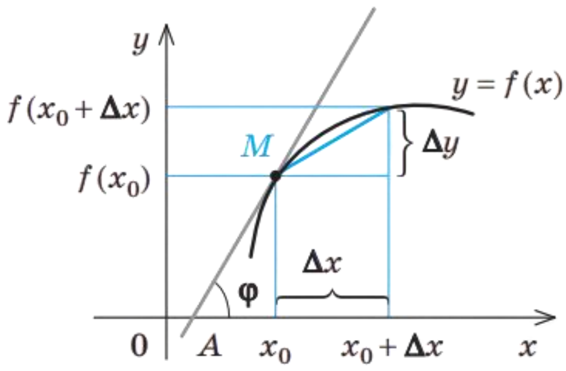


Рис. 1.4. Дотична до графіка функції

Нагадаємо, що в рівнянні прямої $y = kx + b$ кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої до осі Ox. Якщо k – кутовий коефіцієнт дотичної, то $k = tg\varphi = f'(x_0)$. Отже, значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу тангенса графіка функції до осі абсцис x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цього тангенса (кути відраховуються проти годинникової стрілки від додатного напрямку). осі Ox) (Нелін, 2018).

Фізичний зміст похідної

Записавши визначення похідної функції $x(t)$ у точці t_0: $x'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ і порівнявши отриманий результат із поняттям миттєвої швидкості прямолінійного руху: $v_{\text{меттєва}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, можна зробити висновок, що похідна характеризує при зміні параметра Швидкість зміни функції при зміні (Нелін, 2018).

Зокрема, похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, яку можна застосувати до найрізноманітніших фізичних величин. Наприклад, миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху виводиться з функції, що представляє залежність шляху s від часу t, а прискорення α є похідною функції, що представляє залежність швидкості v від часу t (Нелін, 2018).

Якщо $s = s(t)$ – це залежність від часу шляху шляху, то

$v = s'(t)$ – швидкість лінійного руху ($v = v(t)$),

$\alpha = v'(t)$ – прискорення прямолінійного руху (Нелін, 2018).

1.2.3. Правила обчислення похідних

Нехай функції u і v диференційовні в точці x, тоді їх сума і різниця також диференційовані в точці x.

Правило 1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ (похідна суми (різниці) дорівнює сумі (різниці) похідних) (Істер, 2018).

Доведення. Нехай $f = u + v$ Тоді

1) $\Delta f = \Delta(u + v) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - \big(u(x) + v(x)\big) =$

$$= \big(u(x + \Delta x) - u(x)\big) + \big(v(x + \Delta x) - v(x)\big) = \Delta u + \Delta v.$$

2) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u' + v'$.

Аналогічно можна довести, що $(u - v)' = u' - v'$.

Отже $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Наслідок. Похідна суми трьох і більше доданків дорівнює супі похідних (Істер, 2018):

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n)' = u_1{}' + u_2{}' + u_3{}' + \cdots + u_n{}'.$$

Правило 2. $(uv)' = u'v + v'u$ (Мерзляк, 2018)

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка, у якій функції u і v є диференційованими. Знайдемо приріст функції $y = u(x)v(x)$ у точці x_0. Ураховуючи рівності $u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u, v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + \Delta v$, маємо

$$\Delta y = u(x_0 + \Delta x)(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= (u(x_0) + \Delta u)(v(x_0) + \Delta v) - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= u(x_0)v(x_0) + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + \Delta u \cdot \Delta v - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Запишемо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x_0) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x_0) + \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x_0) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x_0) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x \right).$$

Оскільки функції u і v є диференційованими в точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Тепер можна записати:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$
$$= u'(x_0)v(x_0) + v'(x_0)u(x_0) + u'(x_0) \cdot v'(x_0) \cdot 0 = u'(x_0)v(x_0) + v'(x_0)u(x_0).$$

Таким чином, функція $y = u(x)v(x)$ є диференційованою в точці причому її похідна в цій точці дорівнює $u'(x_0)v(x_0) + v'(x_0)u(x_0)$.

Наслідок. $(Cu)' = Cu'$, де C – стала (сталий множник можна виносити за знак похідної (Істер, 2018).

Доведення. $(Cu)' = C'u + u'C = 0 \cdot u + C \cdot u' = Cu'$.

Правило 3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$ (Істер, 2018).

Доведення. Можна довести в той самий спосіб, яким довели правило 1, але використаємо інший спосіб.

Нехай $f = \frac{u}{v}$, звідки $u = fv$, тому $u' = f'v + v'f$.

Тоді $f'v = u' - v'f$, тобто

$$f' = \frac{u' - v'f}{v} = \frac{u' - v' \cdot \frac{u}{v}}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

1.2.4. Рівняння дотичної до графіка функції.

Нехай функція f диференційовна в точці x_0. Тоді в точці абсцис x_0 можна провести невертикальну дотичну до графіка функції f (Рис. 1.5) (Мерзляк, 2018).

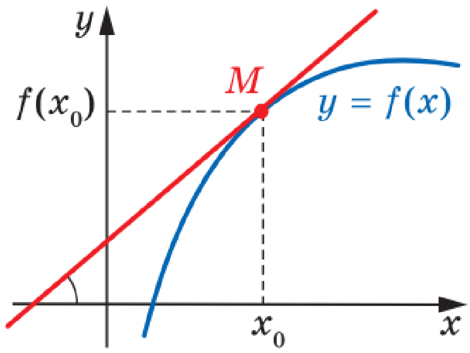


Рис. 1.5. Функція f і невертикальна дотична

Рівняння невертикальної прямої має вигляд $y = kx + b$, де k – кутовий коефіцієнт цієї прямої (Мерзляк, 2018).

Зважаючи на геометричний зміст похідної, отримуємо: $k = f'(x_0)$.

Тоді рівняння дотичної можна записати так: $y = f'(x_0) \cdot x + b$ (1).

Пряма проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$. Отже, координати цієї точки задовольняють рівняння (1) (Мерзляк, 2018).

Ми маємо: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_0) + b$.

Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x_0)$. Підставимо знайдене значення b у рівняння (1): $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x_0)$ (Мерзляк, 2018).

Перетворивши праву частину отриманої рівності, можна зробити висновок: якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

1.2.5. Складена функція. Похідна складеної та оберненої функції

Похідна складеної функції

Складеною функцією зазвичай називають функцію від функції. Якщо змінна y є функцією від u: $y = f(u)$, а u у свою чергу, – функцією від x: $u = u(x)$, то y є складеною функцією від x, тобто $y = f(u(x))$ (Бевз, 2018).

У такому разі кажуть, що y є складеною функцією незалежного аргумента x, а u – її проміжним аргументом (Бевз, 2018).

Правило (похідна складеної функції). Якщо функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $f(u)$ – похідну в точці $u_0 = u(x_0)$, то складена функція $y = f(u(x))$ також має похідну в точці x_0, причому

$$(f(u(x)))' = f_u{}'(u)u_x{}'(x) \text{ (Бевз, 2018).}$$

Доведення. Оскільки за умовою функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці, і тоді малій зміні аргумента в точці x_0 відповідають малі зміни значень функції, тобто при $\Delta x \to 0, \Delta u \to 0$ (Бевз, 2018).

З рівності $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ маємо: $u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u_0 + \Delta u$.

Тоді

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = f\big(u(x_0 + \Delta x)\big) - f\big(u(x_0)\big) =$$
$$= f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = \Delta f.$$

Подальше доведення проведемо тільки для таких функцій $u(x)$, у яких $\Delta u \neq 0$ у деякому околі точки x_0. При $\Delta u \neq 0$ подамо $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ так: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Ураховуючи, що при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u_x{}'$, а при ,$\Delta u \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(u_0) = f_u{}'$, одержуємо, що при $\Delta x \to 0$ (і відповідно при $\Delta u \to 0$) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = f_u{}'(u) \cdot u_x{}'(x)$. А це й означає, що $y_x{}' = f_u{}' u_x{}'$, тобто $(f(u(x)))' = f_u{}'(u)u_x{}'(x)$ (Бевз, 2018).

Отже, похідна складеної функції $= f(u(x))$ дорівнює добутку похідної даної функції $y = f(u)$ по проміжному аргументу u (позначено $f_u{}'$) на похідну проміжного аргумента $u = u(x)$ по незалежному аргументу x (позначено $u_x{}'$) (Бевз, 2018).

Похідна оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точках x_0 і $f'(x_0) \neq 0$. Покажемо, що коли функція $x = g(y)$, обернена до функції $y = f(x)$ є неперервною в точці $y_0 = f(x_0)$, то вона диференційовна в цій точці (Морзе 2018).

Доведення. Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то за лемою про диференційованість функції, існує неперервна функція $y = \varphi(x)$ в точці x_0 така, що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x) \qquad (*)$$

і $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Зробивши в рівності (*) підстановки $x = g(y), x_0 = g(y_0)$, отримаємо рівність

$$f\big(g(y)\big) - f\big(g(y_0)\big) = \big(g(y) - g(y_0)\big)\varphi\big(g(y)\big),$$

$$y - y_0 = \big(g(y) - g(y_0)\big)\varphi\big(g(y)\big), \qquad (**)$$

яка виконується для всіх $y \in D(g)$. З рівності (**) випливає, що $\varphi\big(g(y)\big) \neq 0$ при всіх $y \in D(g)$, де $y \neq y_0$. Крім цього, $\varphi\big(g(y)\big) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Тому $\varphi\big(g(y)\big) \neq 0$ для всіх $y \in D(g)$. Тоді рівність (**) можна переписати так (Морзе 2018):

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\varphi\big(g(y)\big)}(y - y_0).$$

Функція $x = \frac{1}{\varphi(g(y))}$ є неперервною в точці y_0. Тому за лемою про диференційованість функції, функція $x = g(y)$ є диференційованою в точці y_0 і

$$g'(y_0) = \frac{1}{\varphi\big(g(y_0)\big)} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

1.2.6. Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції. Екстремуми функції. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції.

Нехай $y = s(t)$ – закон руху частинки вздовж координатної прямої. Якщо рівняння $s'(t) = 0$. виконується в будь-який момент t від t_1 до t_2, то в розглянутому інтервалі часу миттєва швидкість дорівнює нулю, тобто точка не рухається і її координати не змінюються. Це означає, що функція $y = s(t)$ є сталою на розглянутому інтервалі (Мерзляк, 2018).

Ці міркування показують, що наступна теорема справедлива.

Теорема (ознака сталості функції). Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку (Мерзляк, 2018).

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_1 < x_2$ (Мерзляк, 2018).

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на проміжку I, то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) = 0$. Отже, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$. Звідси $f(x_2) = f(x_1)$. Ураховуючи, що числа x_1 і x_2 вибрано довільним чином, можемо зробити висновок: функція f є константою на проміжку I (Мерзляк, 2018).

На рисунку зображено функцію f на проміжку $[a; b]$. Графік цієї функції має властивість, що будь-яка дотична до графіка утворює гострий кут з позитивним напрямком осі абсцис (Мерзляк, 2018).

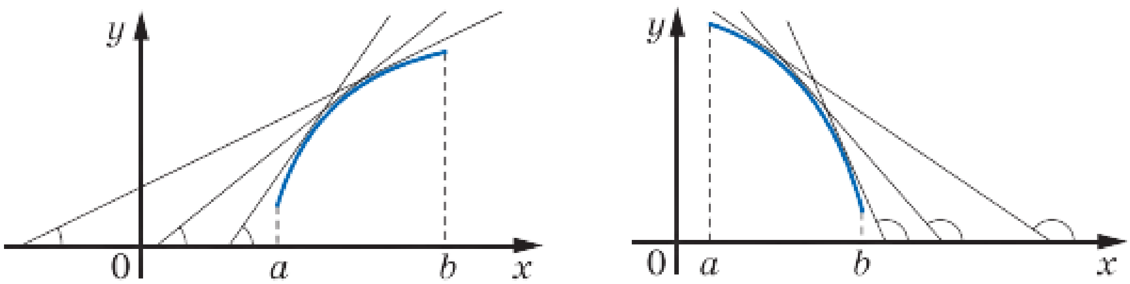


Рис. 1.6. Графік функції f і дотичні до нього

Оскільки тангенс гострого кута додатний, то кут нахилу будь-якої дотичної також додатний. Тоді з геометричного змісту похідної можна зробити висновок, що для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) > 0$ (Мерзляк, 2018).

Як видно з рисунка , функція f зростає на розглянутому інтервалі.

На малюнку 1.6. зображено інтервал $[a; b]$. Будь-яка дотична до графіка утворює тупий кут з позитивним напрямком осі абсцис (Мерзляк, 2018).

Оскільки тангенс тупого кута від'ємний, нахил будь-якої дотичної також від'ємний. то для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) < 0$ (Мерзляк, 2018).

На рисунку видно, що функція f спадає на розглянутому інтервалі.

Ці приклади показують, що знак похідної функції на деякому інтервалі I пов'язаний з тим, чи є функція зростаючою (спадною) на інтервалі I (Мерзляк, 2018).

Зв'язок між знаком похідної і зростанням (зменшенням) функції також можна виявити за допомогою механістичної інтерпретації. Якщо швидкість – похідна функції $y = s(t)$ – додатна, то точка на координатній прямій переміщується вправо (рис.). Це означає, що нерівність $t_1 < t_2$ означає нерівність $s(t_1) < s(t_2)$, тобто функція $y = s(t)$ є зростаючою. Так само, якщо швидкість від'ємна, точка рухається вліво, тобто функція $y = s(t)$ є спадною (Мерзляк, 2018).

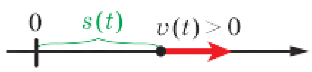


Рис. 1.7. Рух точки вліво

Зв'язок між знаком похідної і зростанням (спаданням) функції встановлюють такі дві теореми.

Теорема 1 (ознака зростання функції). Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку (Мерзляк, 2018).

Теорема 2 (ознака спадання функції). Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Доведемо теорему 1 (теорему 2 можна довести аналогічно) (Мерзляк, 2018).

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_2 > x_1$ (Мерзляк, 2018).

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на проміжку I, то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) > 0$. Отже, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція f зростає на проміжку I (Мерзляк, 2018).

Якщо диференційована функція на інтервалі I є зростаючою (спадною), було б неправильно вважати, що вона повинна мати додатну (від’ємну) похідну на цьому інтервалі (Мерзляк, 2018).

Теорема 3 (властивість зростаючої функції і спадної функції). Якщо диференційовна на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) (Мерзляк, 2018).

Доведення. Доведемо теорему для випадку, коли функція f є зростаючою (для випадку, коли функція f є спадною, доведення аналогічне) (Мерзляк, 2018).

Нехай x_0 – довільна точка, яка належить проміжку I. Надамо аргументу функції f приріст $\Delta x = x - x_0$ у точці x_0. Ураховуючи зростання функції f, отримуємо:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Тому

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Екстремуми функції

Околом точки x_0 називається будь-який інтервал, внутрішні точки якого є x_0 (Бевз, 2018).

Точка x_0 називається точкою мінімуму (максимуму) функції $y = f(x)$, якщо для всіх x $(x \neq x_0)$ в деякому околі точки x0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ $(f(x_0)) > f(x))$ (Бевз, 2018).

Точки мінімуму і максимуму позначаються через x_{min} і x_{max} відповідно. Значення функції в точці мінімуму називається мінімальним значенням функції, а значення в точці максимуму – максимальним значенням функції. Їх позначають: y_{min} і y_{max} (Бевз, 2018).

Мінімальне і максимальне значення функції разом називаються точками екстремум. Значення функції в її крайній точці є її екстримальним значенням, або екстремумом (Бевз, 2018).

Точка, в якій похідна функції додатна або від'ємна, не може бути її точкою екстремуму. Усі інші точки області визначення функції є її критичними точками. Отже, точка екстремум функції може бути лише її критичною точкою. Це необхідна умова існування екстремуму (Бевз, 2018).

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $(a; b)$, диференційовна на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$, а x_0 – її критична точка. Тоді: точка x0 , при переході через яку в напрямі зростання аргументу похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», є точкою максимуму, а точка, при переході через яку похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс», – точкою мінімуму (Бевз, 2018).

Достатні умови існування екстремумів дозволяють виділити точки екстремуму з критичних точок функції (Бевз, 2018).

Справді, якщо похідна функції $f(x)$ на проміжку $(a; x_0)$ додатна, а на проміжку $(x_0; b)$ – від'ємна, то при переході через точку x_0 зростання функції змінюється на спадання (Рис. 1.8.). У цьому випадку x_0 – точка максимуму. Якщо ж при переході через точку x0 спадання функції змінюється на зростання, то x_0 – точка мінімуму (Рис. 1.9.) (Бевз, 2018).

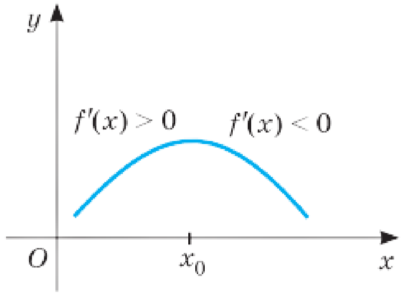


Рис. 1.8.Похідна функції $f(x)$

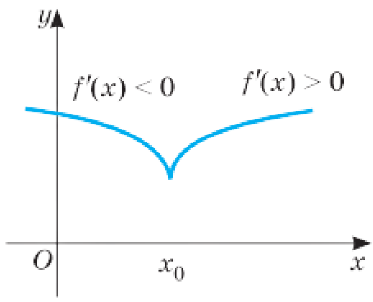


Рис. 1.9. Похідна функції $f(x)$

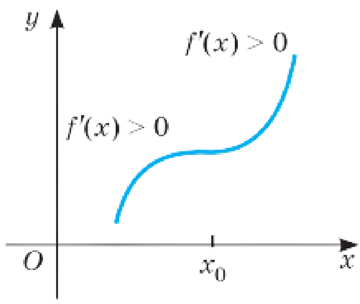


Рис. 1.10. Похідна функції $f(x)$

Якщо ж похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю, а зліва і справа від x_0 похідна функції додатна (Рис. 1.10.) або зліва і справа від'ємна, то x_0 не є точкою екстремуму (Бевз, 2018).

Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

Властивість, що функція має точку екстремуму x_0, означає: функція отримує максимальне (мінімальне) значення в точці x_0 порівняно зі значенням усіх точок, де функція знаходиться поблизу деякої (можливо, дуже малої) точки x_0. Щоб підкреслити цей факт, точки екстремуму також називають локальними точками максимуму або локальними точками мінімуму.

Неперервна на відрізку $[a; b]$ Максимальне і мінімальне значення 1 функція приймає в кінцях або точках екстремум інтервалу.

Тоді для такої функції на сегменті $[a; b]$ можна використати таку схему.

1. Знайдіть критичну точку, де функція f належить відрізку $[a; b]$.

2. Обчислити знайдену критичну точку та значення функції в кінці розглянутого відрізка.

3. Виберіть максимальне і мінімальне з усіх знайдених значень.

Зрозуміло, що лише тоді, коли розглянута функція f знаходиться у фрагменті $[a; b]$.

Якщо ви визначите, які критичні точки є екстремумами, ви можете зменшити кількість точок, необхідних для пошуку значення функції. Однак пошук екстремальних точок зазвичай вимагає більшої технічної роботи, ніж обчислення значень функції в критичних точках.

1.2.7. Друга похідна. Поняття опуклості функції. Точки перегину.

Друга похідна

Нехай матеріальна точка рухається вздовж координатної прямої за законом $y = s(t)$. Тоді миттєва швидкість $v(t)$ в момент часу t визначається за формулою $v(t) = s'(t)$ (Мерзляк, 2018).

Розглянемо функцію $y = v(t)$. Її похідна в момент часу t називається прискоренням руху і представлена $\alpha(t)$, тобто $\alpha(t) = v'(t)$ (Мерзляк, 2018).

Отже, функція прискорення руху є похідною функції швидкості руху, яка в свою чергу є похідною закону руху, а саме $\alpha(t) = v'(t) = \left(s'(t)\right)'$ (Мерзляк, 2018).

У цьому випадку функція прискорення y=a(t) називається другою похідною функції $y = s(t)$. запис: $\alpha(t) = s''(t)$ (Мерзляк, 2018).

Розглянемо функцію $y = f(x)$, диференційовану на деякій множині M. Тоді його похідна також є деякою функцією, визначеною на цій множині. Якщо функція f' є диференційовною в деякій точці $x_0 \in M$, то похідна функції f' у точці x_0 називається другою похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначається як $f''(x_0)$ або $y''(x_0)$. Сама функція f називається двічі диференційовною в точці x_0 (Мерзляк, 2018).

Функція, яка ставить у відповідність числу x_0 число $f''(x_0)$, називається другою похідною функції $y = f(x)$ і позначається як f'' або y'' (Мерзляк, 2018).

Функція f називається двічі диференційовною на множині M, якщо вона двічі диференційовна в кожній точці множини M (Мерзляк, 2018).

Функція f називається двічі диференційовною, якщо вона двічі диференційовна над $D(f)$ (Мерзляк, 2018).

Поняття опуклості функції. Точки перегину

Важливою характеристикою функції є опуклість угору (опуклість униз).

Нехай функція f диференційовна на інтервалі I. Тоді в будь-якій точці графіка з абсцисою $x \in I$ можна провести неперпендикулярну дотичну. Функція f називається опуклою на інтервалі I, якщо графік функції на інтервалі I не знаходиться над жодною з таких дотичних (рис. 1.11.), якщо графік на інтервалі I не знаходиться нижче кожної з таких дотичних (рис. 1.12.), то вона опукла униз на проміжку I (Мерзляк, 2018).

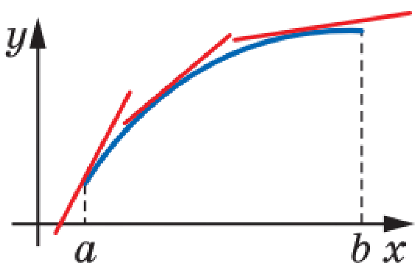


Рис. 1.11. Функція f і дотичні

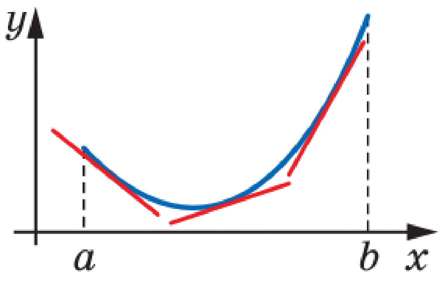


Рис. 1.12. Функція f і дотичні

На рисунку зображено графік функції f, опуклої вниз на проміжку $[a; b]$. Як видно з рисунку, зі збільшенням незалежної змінної x нахил відповідної дотичної збільшується. Це означає, що функція f' зростає на інтервалі $[a; b]$ (Мерзляк, 2018).

Нехай функція f, яка є опуклою вгору, лежить на проміжку $[a; b]$ (Рис. 1.13). З малюнках видно, що зі збільшенням незалежної змінної x нахил відповідної дотичної зменшується. Це означає, що функція f' є спадною на інтервалі $[a; b]$ (Мерзляк, 2018).

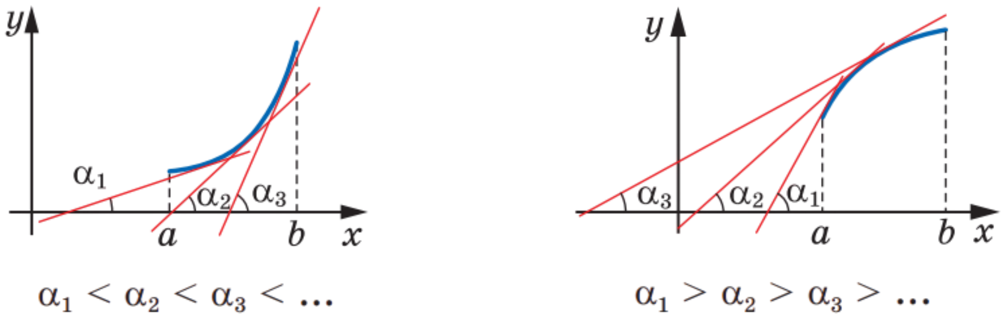


Рис. 1.13. Опукла функція f на проміжку $[a; b]$

Наведені приклади показують, що опуклість функції f на деякому інтервалі I пов'язана зі зростанням (спаданням) функції f' на цьому інтервалі (Мерзляк, 2018).

Для двічі диференційовної функції f на інтервалі I функція зростання (спадання) f' визначається знаком інтервалу I другої похідної. Отже, властивість опуклості двічі диференційованої функції пов'язана зі знаком її другої похідної.

Цей зв'язок встановлюється наступними двома теоремами (Мерзляк, 2018).

Теорема 1 (ознака опуклості функції вниз). Якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $f''(x) \geq 0$, то функція f є опуклою вниз на проміжку I (Мерзляк, 2018).

Теорема 2 (ознака опуклості функції вгору). Якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $f''(x) \leq 0$, то функція f є опуклою вгору на проміжку I(Мерзляк, 2018).

Доведемо теорему 1 (теорему 2 можна довести аналогічно) (Мерзляк, 2018).

Доведення. У точці з абсцисою $x_0 \in I$ проведемо дотичну до графіка функцію f. Рівняння дотичної має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Розглянемо функцію $r(x) = f(x) - \left(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right)$.

Значення функції r показує, наскільки ордината точки графіка функції f відрізняється від ординати відповідної точки на проведеній дотичній (Рис. 1.14.).

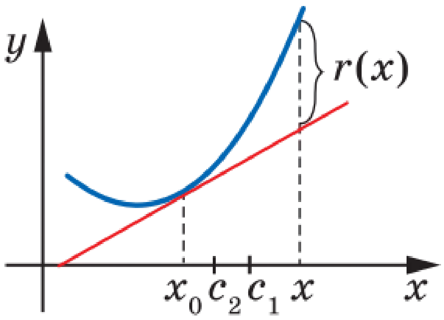


Рис. 1.14. Графік функції f

Якщо ми покажемо, що для всіх $x \in I, r(x) \geq 0$, то ми доведемо, що на інтервалі I графік функції f лежить не нижче дотичної, яка проведена до нього.

Нехай $x \in I$ і $x > x_0$ (випадок $x \leq x_0$ можна розглянути аналогічно).

Маємо: $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Для функції f і відрізка $[x_0; x]$ застосуємо теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$, де $c_1 \in (x_0; x)$.

Звідси $r(x) = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$;
$r(x) = \left(f'(c_1) - f'(x_0)\right)(x - x_0)$.

Так як функція $y = f'(x)$ є диференційованою на відрізку $[x_0; c_1]$, то можна застосувати теорему Лагранжа:

$$f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c_2)(c_1 - x_0), \text{де } c_2 \in (x_0; c_1).$$

Звідси $r(x) = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

На рисунку показано розміщення точок c_1 і c_2.

З нерівностей $x_0 < c_2 < c_1 < x$ випливає, що $(c_1 - x_0)(x - x_0) > 0$. Оскільки $c_2 \in I$, то враховуючи умови теореми отримаємо: $f''(c_2) \geq 0$. Звідки для всіх $x \in I$ виконується нерівність$r(x) \geq 0$, тому функція f є опуклою вниз на інтервалі I.

Тоді, алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ на опуклість та точки перегину може мати такий вигляд (Істер, 2019):

1) знайти область визначення функції $y = f(x)$;

2) знайти другу похідну $f''(x)$;

3) знайти внутрішні точки область визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує;

4) позначити знайдені точки на області визначення функції $y = f(x)$ та з'ясувати знак другої похідної $f''(x)$ на кожному з отриманих проміжків;

5) за отриманими знаками дійти висновку, про опуклість функції та абсциси точок перегину і записати відповідь.

1.2.8. Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.

Застосування похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей

1. Оцінка значень лівої і правої частин рівняння

Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x) = g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x) \geq a, g(x) \leq a$, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива тоді й тільки тоді, коли одночасно $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють a (Нелін, 2018).

$$\begin{matrix} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq a \\ g(x) \leq a \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$$

2. Використання зростання і спадання функцій

Схема розв'язування рівняння (Нелін, 2018):

1) підбираємо один або декілька коренів рівняння;

2) доводимо, що це рівняння не має інших коренів (за допомогою теореми про корені рівняння, або оцінки значень лівої та правої частин рівняння, або такої властивості функції: зростаюча або спадна функція отримує кожне своє значення лише в одній точці своєї області).

Теореми про корені рівняння:

1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку (Нелін, 2018).

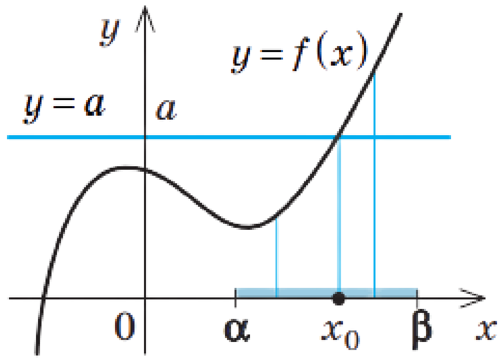


Рис. 1.15. Рівняння $f(x) = a$, функція $f(x)$

2. Якщо функція $f(x)$ у рівнянні $f(x) = g(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає (або навпаки), то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку (Нелін, 2018).

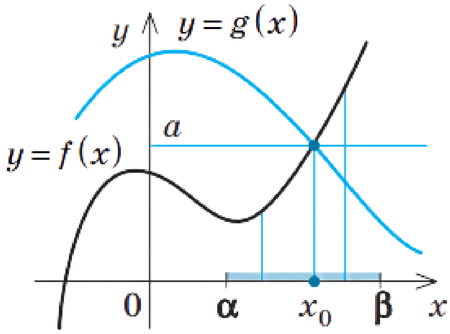


Рис. 1.16. Функція $f(x)$ і рівняння $f(x) = g(x)$

Застосування похідної до доведення нерівностей

Похідні іноді використовуються при доведенні нерівностей для змінної.

Пропонується апроксимаційна схема для доведення нерівностей виду $\varphi(x) > g(x)$ (або $\varphi(x) < g(x)$) за допомогою похідних (Нелін, 2018).

1. Розглянемо допоміжну функцію $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ (на її області визначення чи заданому інтервалі) (Нелін, 2018).

2. За допомогою похідної дослідити поведінку функції $f(x)$ на досліджуваному інтервалі (зростання чи спадання або її максимум чи мінімум) (Нелін, 2018).

3. Обґрунтувати (спираючись на поведінку функції $f(x)$), що $f(x) > 0$ (або $f(x) < 0$) на розглянутому проміжку, і зробити висновок, що $\varphi(x) > g(x)$ (або $\varphi(x) < g(x)$) на цьому проміжку (Нелін, 2018).

Зауважимо, що при доведенні деяких нерівностей цю схему потрібно використовувати кілька разів, іноді зручніше використовувати другу похідну та опуклість відповідної функції (Нелін, 2018).

Застосування похідної до розв'язування завдань із параметрами

Розв'язуючи задачі з параметрами, за допомогою похідних можна досліджувати монотонність і екстремуми функцій, а також досліджувати функції та будувати їх графіки, записувати рівняння, дотичні до графіка функцій, знаходити максимуми та мінімуми функцій. Зокрема, якщо в параметричній задачі йдеться про кількість розв'язків рівнянь (нерівностей чи систем), зручно використати графічну ілюстрацію розв'язку в тій чи іншій ситуації (Нелін, 2018).

Приклад 1.1. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $y = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ спадає для всіх $x \in R$.

Розв'язання

Область визначення функції $D(y) = R$.

Функція диференційовна на всій числовій прямій: $y' = 3(a+2)x^2 - 6ax + 9a$.

Задана функція буде спадати для всіх $x \in R$, якщо $y' \leq 0$ на всій числовій прямій (причому рівняння $y' = 0$ має тільки скінченну множину коренів).

Якщо $a = -2$, то $y' = 12x - 18$ і нерівність $y' \leq 0$ не виконується на всій числовій прямій ($12x - 18 \leq 0$ тільки при $x \leq 1{,}5$). Якщо $a \neq -2$, то похідна є квадратичною функцією відносно змінної x, яка набуває значень $y' \leq 0$ на всій числовій прямій тоді й тільки тоді (таблиця в коментарі), коли виконуються умови $\begin{cases} a+2 < 0, \\ D \leq 0 \end{cases}$ (1) (при цьому рівняння $y' = 0$ може мати хіба що один корінь).

З нерівності $a + 2 < 0$ одержуємо $a < -2$.

З нерівності $D \leq 0$ маємо:

$$36a^2 - 4 \cdot 3(a+2) \cdot 9a \leq 0,$$

$$36a(a - 3a - 6) \leq 0,$$

$$36a(-2a - 6) \leq 0,$$

$$-72a(a+3) \leq 0.$$

Ураховуючи одержану умову $a < -2$, отримуємо, що $(-72a) > 0$. Тоді з нерівності (2) маємо $a + 3 \leq 0$, тобто $a \leq -3$. Отже, система (1) рівносильна системі $\begin{cases} a < -2, \\ a \leq -3. \end{cases}$

Звідси одержуємо $a \leq -3$.

Відповідь: $(-\infty;\ 3]$.

Похідна в механіці

Механічний рух – це зміна положення об'єкта в просторі відносно інших об'єктів з часом. Основною характеристикою механічного руху є швидкість.

Розглянемо алгоритм знаходження швидкості об'єкта за допомогою похідних. Якщо закон руху об'єкта задано рівнянням $s = s(t)$, то для того, щоб знайти миттєву швидкість об'єкта в будь-який момент часу, необхідно:

1. Знайдіть похідну $s'' = f''(t)$.

2. Підставте задане значення часу в отриману формулу.

Задача 1. Автомобіль наближається до мосту зі швидкістю 72 км/год. Біля мосту стоїть дорожній знак «$36\ \text{км/год}$». За 7 сек до в'їзду на міст, водій натиснув на гальмівну педаль. Чи заїде на міст з дозволеною швидкістю автомобіль, якщо гальмівний шлях визначається формулою $s = 20t - t^2$?

Розв'язання

$$v(t) = s'(t) = 20 - 2t.$$

Далі обчислимо швидкість автомобіля, яка буде через 7 секунд:

$$v(7) = 20 - 2 \cdot 7 = 20 - 14 = 6\ (\text{м/с})$$

$$6\ \text{м/с}\ =\ 21{,}6\ \text{км/год}.$$

Відповідь: Так, тому що швидкість через 7 сек. буде дорівнювати 21,6 км/год.

Задача 2. Вантажівка, яка на початку руху знаходиться в точці В і прямує до пункту D по шосе зі швидкістю 60 км/год, порушує правила дорожнього руху. На початку руху полем патрульний мотоцикл, який знаходиться в пункті А, що за 2 км від шосе, може розвивати швидкість до 40 км/год. А на шосе швидкість мотоцикла складає 80 км/год. Під яким кутом φ до напрямку АВ слід виїхати патрульному мотоциклу, щоб якомога швидше наздогнати вантажівку? За який мінімальний час патруль наздожене порушника?

Розв'язання

Геометричною моделлю даної задачі є прямокутний трикутник ABD, в якому А – точка за 2 км від шосе, в якій знаходиться патруль, В – точка з якої виїжджає вантажівка, С – точка в яку повинен потрапити патрульний мотоцикл, щоб якомога скоріше наздогнати вантажівку, D – точка на шосе в якій мотоцикл наздожене вантажівку. Нехай ця подія відбудеться через t годин. За цей час порушник проїде відстань $60t$ км , а патруль

$$AC + CD = \left(\sqrt{4+x^2} + (60t - x)\right) \text{ км},$$

де C – точка на шосе, $BC = x$. Оскільки на проміжку AC швидкість патрульного мотоцикла 40 км/год , а на проміжку CD – 80 км/год , то на весь шлях він витратить $\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{40} + \frac{60t-x}{80}\right)$ годин, що дорівнює часу t.

Отже, маємо $t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{40} + \frac{60t-x}{80}$, звідки $t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{10} + \frac{x}{20}$. Тобто цільовою функцією даної задачі є функція $t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{10} + \frac{x}{20}$, де $x > 0$.

Дослідимо її на найменше значення. Знайшовши похідну функції $t(x)$ та виконавши необхідні тотожні перетворення, будемо мати $t'(x) = \frac{x}{10\sqrt{4+x^2}} + \frac{1}{20}$. Розв'язавши рівняння $\frac{x}{10\sqrt{4+x^2}} + \frac{1}{20} = 0$ з'ясовуємо, що дана функція, яка визначена на множині додатних чисел, має єдину критичну точку $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Оскільки друга похідна $t'(x) = \frac{2}{5(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ додатна, зокрема і в точці $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то на основі достатньої ознаки екстремуму функції (в термінах другої похідної) можна стверджувати, що точка $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ є точкою мінімуму функції $t(x)$ на проміжку $(0; +\infty)$, то в ній функція $t(x)$ набуває найменшого значення $t\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}17(\text{год}) \approx 10{,}2(\text{хв})$. З прямокутного трикутника ABC маємо: $tg\varphi = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Звідси $\varphi = \frac{\pi}{6} = 30°$. Отже, якщо патрульний мотоцикл виїде під кутом $30°$ до напряму AB, то він наздожене порушника за найкоротший час, що дорівнює 10,2 хв.

Відповідь. $\varphi = 30°, t = \frac{\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}17(\text{год}) \approx 10{,}2$ (хв).

Похідна в електротехніці

У наших, будинках, у транспорті, на заводах: електрика всюди. Електричний струм – це спрямований рух вільних заряджених частинок. Сила струму є кількісною характеристикою електричного струму.

У ланцюзі струму заряд змінюється з часом за законом $q = q(t)$. Сила струму I є похідною за часом від заряду q

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t).$$

Робота змінного струму в основному використовується в електротехніці. Струм, який змінюється з часом, називається змінним. Коло змінного струму може містити різні елементи: нагрівачі, котушки, конденсатори. Отримання змінного струму засноване на законі електромагнітної індукції, формула якого містить похідну від магнітного потоку.

Задача 3. Заряд, що протікає через провідник, змінюється за законом $q = sin \cdot (2t - 10)$. Знайти силу струму в момент часу $t = 5$ сек.

Розв’язання

Знайдемо похідну q.

$$q' = cos(2t - 10) \cdot 2 = 2cos(2t - 10)$$

Згідно з умовами задачі, t дорівнює 5 секундам, отже: $q' = 2cos(2 \cdot 5 - 10) = 2cos0 = 2(A)$.

Відповідь: Сила струму І дорівнює 2 (А).

Похідна в хімії

У хімії обчислення широко використовується для побудови математичних моделей хімічних реакцій і подальшого опису їх властивостей.

Хімія – наука про речовину, наука про хімічні перетворення речовини. Хімія вивчає закономірності різноманітних реакційних процесів.

Наприклад, інженери-техніки, які визначають ефективність хімічного виробництва, хіміки, які розробляють фармацевтичні та сільськогосподарські препарати, лікарі та агрономи, які використовують ці препарати для лікування людей і вносять їх у ґрунт. Деякі відповіді майже миттєві, а інші дуже повільні. Тому в реальному житті для вирішення виробничих завдань у таких галузях, як медицина, сільське господарство та хімія, необхідно лише розуміти швидкість реакції хімічних речовин.

Швидкість хімічної реакції – це зміна концентрації реагуючих речовин в одиницю часу або похідна від концентрації реагуючих речовин у часі (математичною мовою концентрація – це функція, а час – параметр).

Якщо $P(t)$ – закон зміни кількості речовини, що вступає в хімічну реакцію, то швидкість $v(t)$ хімічної реакції в момент часу t дорівнює похідній:

$$V(t) = p'(t).$$

Задача 4. Нехай кількість речовини, що вступили в хімічну реакцію, задаються залежністю: $\mathrm{p}(t) = \frac{t^2}{2} + 3t - 3$ (моль). Знайти швидкість хімічної реакції через 3 секунди.

Розв'язання

Знайдемо похідну даної функції: $p'(t) = t + 3$.

Підставами значення часу 3 с в похідну: $p'(3) = 3 + 3 = 6$ (моль/с).

Відповідь: 6 моль в секунду.

Похідна в біології

Популяція – це сукупність особин даного виду, що займають певну ділянку території всередині ареалу виду, що вільно схрещуються між собою і частково або повністю ізольованих від інших популяцій, а також є елементарною одиницею еволюції.

Ефективна чисельність популяції – це сукупність особин, які беруть участь у відтворенні потомства (Ne).

Щільність популяції – це чисельність популяції на одиницю площі.

Формула Ферсхюльца: $N1 = (Ne\text{–}\,К_{смерт})(К_{народж} + N0)$.

Швидкість чисельності популяції: $v(t) = N'(t)$.

Задача 5. Розрахуйте на підставі наявних даних, як буде змінюватися щільність популяції синиць через рік і 2 роки, якщо щільність синиць становить 260 особин/га. За період розмноження з однієї кладки яєць в середньому виживає 3 пташенята. У популяції рівне число самців і самок. Смертність синиць постійна, в середньому за рік гине 27 особин. Знайти швидкість росту чисельності популяції в рік.

Розв’язання

За умовою щільність популяції $N_0 = 260$ особин/га. У популяції рівне число самців і самок, а значить ефективна чисельність популяції дорівнює 100. $Ne = 100\%$, тоді $Ne = 1$.

Коефіцієнт смертності: $К_{смерт} = К_{народж} = 27\% = 0{,}27$.

За рік 130 пар дає 390 пташенят, тобто $(260{:}\,2) \cdot 3 = 390$.

$N1 = (Ne - \text{Ксмерт})(\text{Кнародж} + N0) = (1 - 0{,}27)(390 + 260) = 474$ особин всього за 1-ий рік $N1$.

Відносний приріст чисельності популяції $\Delta N = 474/260 = 1{,}82$ рази.

Тоді чисельність популяції буде визначатися функцією: $N = 260 \cdot 1{,}82t$, де $t = 1{,}2{,}\ldots$

Знайдемо тоді швидкість росту чисельності популяції:

$$v(t) = N'(t) = (260 \cdot 1{,}82t)' = 260 \cdot (1{,}82t)' =$$
$$= 260 \cdot 1{,}82t \cdot ln1{,}82(\text{особин/рік})$$
$$N(1) = 260 \cdot 1{,}82 \cdot t = 260 \cdot 1{,}82 = 474 \text{ особини}$$
$$N(2) = 260 \cdot 1{,}82 \cdot 2 = 260 \cdot 3{,}3124 = 861 \text{ особина.}$$

Відповідь: $260 \cdot 1{,}82t \cdot ln\ 1{,}82$ особин/рік.

Похідна в географії

У багатьох прикладних задачах роль математичної моделі відіграють трикутники. Цей тип проблеми також має різний ступінь складності. Для включення їх у навчальний процес слід правильно визначити послідовність завдань за принципом «від простого до складного» відповідно до індивідуальних особливостей і можливостей учнів.

Задача 6. Чотири населених пункти, розташовані у вершинах квадрата $ABCD$, з'єднані системою доріг. При якому х сумарна довжина доріг мінімальна, якщо сторона квадрата дорівнює 20 км?

Розв’язання

З’ясовуємо, що система доріг складається з $4 -$ х однакових ділянок, довжиною $\sqrt{100+x^2}$ км , та п’ятої ділянки, довжиною $(20-2x)$ км.

Отже, цільова функція, що визначає сумарну довжину доріг $S(x) = 4\sqrt{100+x^2} + 20 - 2x$, де $x \epsilon [0; 10]$.

Дослідимо її на найменше значення. Знайшовши похідну функції S та виконавши необхідні тотожні перетворення, будемо мати

$$S(x) = \frac{4x - \sqrt{100-x^2}}{\sqrt{100-x^2}}.$$

Розв’язавши рівняння $4x - \sqrt{100-x^2} = 0$, з’ясовуємо, що дана функція, яка визначена на множині додатних чисел, має єдину критичну точку $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з «–» на «+», то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці, робимо висновок, що точка $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$ є точкою мінімуму функції S. Виходячи з єдності такої точки на відрізку $[0; 10]$, можемо стверджувати, що в ній функція $S(x)$ набуває найменшого значення.

Відповідь. При $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$ сумарна довжина доріг є мінімальною.

Похідна в економіці

Для вирішення деяких питань потрібно побудувати функції зв'язку входять змінних, які потім вивчаються методами диференціального обчислення. Також за допомогою екстремуму функції (похідної) в економіці можна знайти найвищу продуктивність праці, максимальний прибуток, максимальний випуск і мінімальні витрати.

Задача 7. (тип №1)

Розглянемо ситуацію: нехай y – витрати виробництва, а x – кількість продукції, тоді x_1 – приріст продукції, а y_1 – приріст витрат виробництва.

В цьому випадку похідна виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції, де:

MC – граничні витрати (marginal costs);

TC – загальні витрати (total costs);

Q – кількість .

(тип № 2) Продуктивність праці

Через похідну можна визначити і продуктивність праці.

Нехай функція $u = u(t)$ висловлює кількість виробленої продукції u за час t. Необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0.

За період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тоді, середня продуктивність праці за цей період часу $Z_{\text{ср}} = \Delta u : \Delta t$.

Очевидно, що продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто $z = lim Z_{\text{ср}} = lim \frac{\Delta u}{\Delta t} = u"(t)$ при $\Delta t \to 0$.

(тип №3) Завдання з економічної теорії.

Підприємство виробляє Х одиниць деякої однорідної продукції в місяць. Встановлено, що залежність фінансових накопичення підприємства від обсягу випуску виражається формулою

$$f(x) = -0{,}02x^3 + 600x - 1000.$$

Дослідити потенціал підприємства. Функція досліджується за допомогою похідної. Отримуємо, що при $\mathrm{X} = 100$ функція досягає максимуму.

Висновок: фінансові накопичення підприємства зростають зі збільшенням обсягу виробництва до 100 одиниць, при $\mathrm{x} = 100$ вони досягають максимуму і обсяг накопичення дорівнює 39000 грошових одиниць. Подальше зростання виробництва призводить до скорочення фінансових накопичень.

Задача 8. Для будівництва будинку прямокутної форми, зображеного на плані темним прямокутником, з площею 400 м^2 відведено ділянку у вигляді прямокутника, межі якої повинні знаходитись від будинку на відстані 36 і 16 м. Які розміри потрібно надати будинку, щоб площа ділянки $ABCD$ була найменшою?

Розв’язання

В задачі необхідно визначити довжину і ширину прямокутника, що має площу 2 400 м, який розташований в середині площини прямокутника $ABCD$, так що площа прямокутника $ABCD$ буде найменшою. Сторони прямокутників взаємно паралельні і відстоять одна від іншої на 16 м і 36 м відповідно. Позначимо довжину прямокутника x, а ширину – y. Його площа $xy = 400$, звідки $y = \frac{400}{x}$. Площа прямокутника $ABCD$ дорівнює $(72 + x)(32 + y) =$

$= (72 + x)(32 + \frac{400}{x})$.

Отже, маємо цільову функцію $S(x) = (72 + x)(32 + \frac{400}{x})$, де $x>0$.

Дослідимо її на найменше значення. Знайшовши похідну функції S і розв’язавши рівняння $32 - \frac{28800}{x^2} = 0$, з’ясуємо, що дана функція, яка визначена на множині додатних чисел, має єдину критичну точку $x = 30$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з «–» на «+», то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці, робимо висновок, що точка $x = 30$ є точкою мінімуму функції S. Виходячи з єдності такої точки на інтервалі $(0; +\infty)$, можемо стверджувати, що в ній функція $S(x)$ набуває найменшого значення: $S(30)\approx 4620$. Отже, для того щоб площа ділянки була найменшою, будинок повинен мати розміри 30 м×$13\frac{1}{3}$ м.

Відповідь: 30 м×$13\frac{1}{3}$ м.

1.2.9. Застосування першої та другої похідних до дослідження функцій і побудови їх графіків.

Загальна схема дослідження функції для побудови її графіка (Нелін, 2018):

1. Знайти область визначення функції.
2. З'ясувати, чи є функція парною або непарною (чи періодичною).
3. Знайти точки перетину графіка з осями координат (якщо можна знайти).
4. Похідна і критичні точки функції.
5. Проміжки зростання і спадання функції та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).
6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення та знайти всі асимптоти графіка (якщо вони існують).
7. Дослідити функцію на опуклість та точки перегину.
8. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Приклад 1.2. Побудуйте графік функції $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ (Нелін, 2018).

Розв'язання

1. Область визначення: $x \neq 0$

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

2. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$.

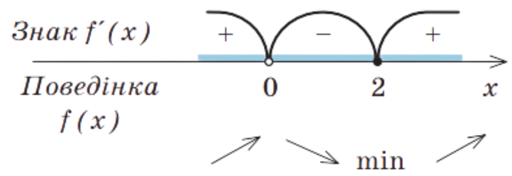
3. Графік не перетинає вісь Oy $(x \neq 0)$. На осі Ox $y = 0$: $x + \frac{4}{x^2} = 0$; $x^3 = -4, x = -\sqrt[3]{4}$ $(\approx 1{,}6)$ – абсциса точки перетину графіка з віссю Ox.

4. $f'(x) = x' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 1 - \frac{8}{x^3}$.

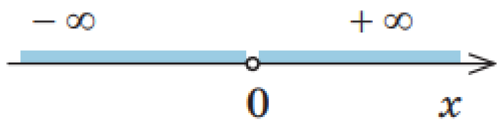
Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення).

$f'(x) = 0;\ 1 - \frac{8}{x^3} = 0$. При $x \neq 0$ маємо: $x^3 = 8; x = 2$ – критична точка.

5. Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.



Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $[2; +\infty)$ і спадає на проміжку $(0; 2]$. Оскільки в критичній точці 2 похідна змінює знак «–» на «+», то $x = 2$ – точка мінімуму: $x_{min} = 2$. Тоді $y_{min} = f(2) = 3$.

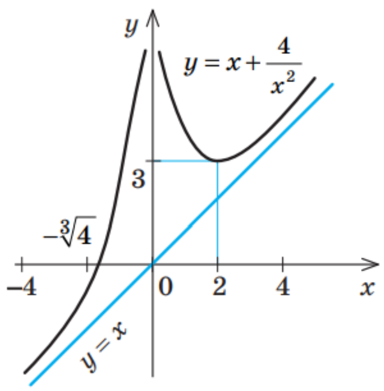
6. 

При $x \to 0$ справа (і при $x \to 0$ зліва) $f(x) = x + \frac{4}{x^2} \to \left(\frac{4}{+0}\right) \to +\infty$.

При $x \to -\infty$ (і при $x \to +\infty$) значення $\frac{4}{x^2} \to 0$, тоді $f(x) \to x$ (тобто при $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ і при $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$).

7.

x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	-4
y	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	$-3\frac{3}{4}$

8. 

1.3. Аналіз програм та підручників з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (до вивчення теми «Інтеграл»).

Вивчення теми «Інтеграл та його застосування» в 11 класі пропонується на двох трьох рівнях: стандарту, профільний та поглиблений. Перший пропонує 54 години на рік, 18 год резерву. За другим варіантом, 210 годин на рік, 80 год резерву. Що стосується навчального плану з математики поглибленого рівня, то на алгебру виділяється 210 годин на рік, 74 год. резерву.

Порівняння навчальної програми з теми «Інтеграл та його застосування» рівня стандарту, профільного та поглибленого рівнях

1. Рівень стандарту (10 годин) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів рівня стандарту).

- Первісна та її властивості.
- Визначений інтеграл, його геометричний зміст.
- Обчислення площ плоских фігур.

2. Профільний рівень (30 години) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів профільного рівня).

- Первісна та її властивості. Таблиця первісних.
- Невизначений інтеграл та його властивості.
- Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст. Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об’ємів тіл обертання.

3. Поглиблений рівень (30 годин) (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів поглибленого рівня).

- Первісна та її властивості. Методи знаходження первісних.
- Невизначений інтеграл та його властивості.
- Приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла.
- Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст.
- Обчислення визначеного інтеграла. О
- Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об’ємів тіл.

- Використання інтеграла для розв’язування прикладних задач.

Розглянемо підручники профільного та поглибленого рівнів.

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк, А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. міститься тема «Інтеграл та його застосування». У цей параграф входять пункти: первісна; правила знаходження первісних; площа криволінійної трапеції, визначений інтеграл; обчислення об’ємів тіл. (Мерзляк А. Г. проф. рівень, 2019).

Підручник «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. для поглибленого вивчення математики містить аналогічні підтеми, що і попередній підручник (Мерзляк А. Г. поглиб. рівень, 2019).

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», автора Нелін Є. П. до теми «Інтеграл та його застосування» міститься тема «Інтеграл та його застосування». У цей параграф входять пункти: первісна та її властивості; визначений інтеграл та його застосування (Нелін Є. П. проф. рівень, 2019).

Навчальний матеріал підручника «Алгебра і початки аналізу», авторів Істер О. С., Єргіна О. В. схожий з попередніми підручниками, але додатково містить пункти: обчислення визначених інтегралів, основні властивості визначених інтегралів; обчислення площ плоских фігур та інші застосування інтеграла (Істер О. С. проф. рівень, 2019).

1.4. Інтеграл та його застосування

1.4.1. Первісна та її властивості. Правила знаходження первісних.

Інтегрування – це знаходження функції за її похідною (Мерзляк, 2019).

Означення. Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$ (Мерзляк, 2019).

Мета інтегрування – знайти всі первісні для заданої функції на заданому інтервалі (Мерзляк, 2019).

Наступна теорема показує, як усі первісні цієї функції пов'язані один з одним.

Теорема (основна властивість первісної). Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C – довільне число, то функція $y = F(x) + \mathrm{C}$ також є первісною функції f на проміжку I (Мерзляк, 2019).

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C – деяке число (Мерзляк, 2019).

Доведення. Оскільки функція F – первісна функції f на проміжку I, то для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Нехай C – довільне число. Тоді $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$ (Мерзляк, 2019).

Отже, функція $y = F(x) + C$ є первісною функції f на проміжку I (Мерзляк, 2019).

Нехай функція G – одна з первісних функції f на проміжку I. Тоді $G'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$. Маємо: $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ (Мерзляк, 2019).

Згідно з ознакою сталості функції отримуємо, що функція $y = G(x) - F(x)$ є константою на проміжку I, тобто $G(x) - F(x) = C$, де C – деяке число (Мерзляк, 2019).

Звідси $G(x) = F(x) + C$.

З основної властивості первісної випливає що, паралельним перенесенням по осі ординат можна отримати графік будь-яких двох первісних цієї функції (Мерзляк, 2019).

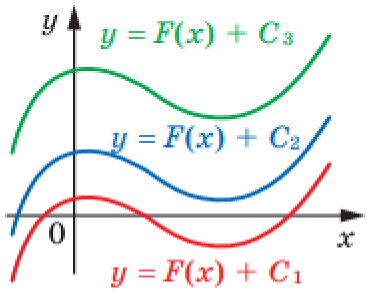


Рис. 1.17. Графіки кількох первісних

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, то запис $F(x)+C$, де C – довільне число, називають загальним виглядом первісних функції f на проміжку I (Мерзляк, 2019).

Правило 1. Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y=F(x)+G(x)$ є первісною функції $y=f(x)+g(x)$ (Мерзляк, 2019).

Доведення. З умови випливає, що для будь-якого $x \in I$ виконуються рівності $F'(x)=f(x)$ і $G'(x)=g(x)$. Тоді для всіх x із проміжку I маємо: $(F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$ (Мерзляк, 2019).

Правило 2. Якщо F – первісна для f, c – стала, то cF – первісна для функції cf (Нелін, 2019).

Доведення. Справді, якщо F – первісна для f, то $F'=f$. Ураховуючи, що сталий множник можна виносити за знак похідної, маємо $(cF)'=cF'=cf$, а це й означає, що cF – первісна для cf (Нелін, 2019).

Правило 3. Якщо F – первісна для f, а k і b – сталі (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первісна для функції $f(kx+b)$ (Нелін, 2019).

Доведення. Справді, якщо F – первісна для f, то $F'=f$. Ураховуючи правило обчислення похідної складеної функції, маємо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=\frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k=f(kx+b),$$

а це й означає, що $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первісна для функції $f(kx+b)$ (Нелін, 2019).

1.4.2. Невизначений інтеграл та його властивості.

Нехай функція $f(x)$ має на деякому проміжку первісну $F(x)$. Тоді за основною властивістю первісної сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на заданому проміжку задається формулою $F(x)+C$, де C – довільна стала (Нелін, 2019).

Означення. Сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом (Нелін, 2019).

Невизначений інтеграл позначають символом $\int f(x)dx$, тоді $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, а C – довільна стала (Нелін, 2019).

У наведеній рівності знак $\int$ називають знаком інтеграла, функцію $f(x)$ – підінтегральною функцією, вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, змінну x – змінною інтегрування і доданок C – сталою інтегрування (Нелін, 2019).

Символ dx, який входить до запису невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$, називається диференціалом (Нелін, 2019).

З правила 1 випливає, що $\int\big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C$ де C – довільне число. Тобто інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків. (Мерзляк, 2019).

Аналогічно можна довести, що $\int\big(f(x) - g(x)\big)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C$ (Мерзляк, 2019).

За допомогою невизначеного інтеграла правило 2 можна записати так: $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, де c – стала, тобто сталий множник можна виносити за знак інтеграла (Нелін, 2019).

За допомогою невизначеного інтеграла правило 3 можна записати так: $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$ (Нелін, 2019).

1.4.3. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.

Задача 1 (про площу криволінійної трапеції)

Нехай на відрізку $[a; b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на цьому відрізку тільки невід’ємних значень (Істер, 2019).

Означення. Фігура, обмежена графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a;\ b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, називається криволінійною трапецією (Рис. 1.18.) (Істер, 2019).

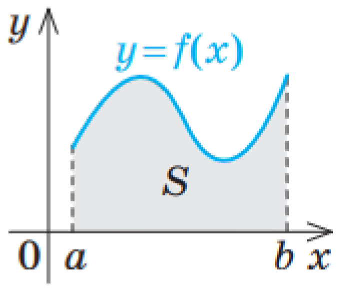


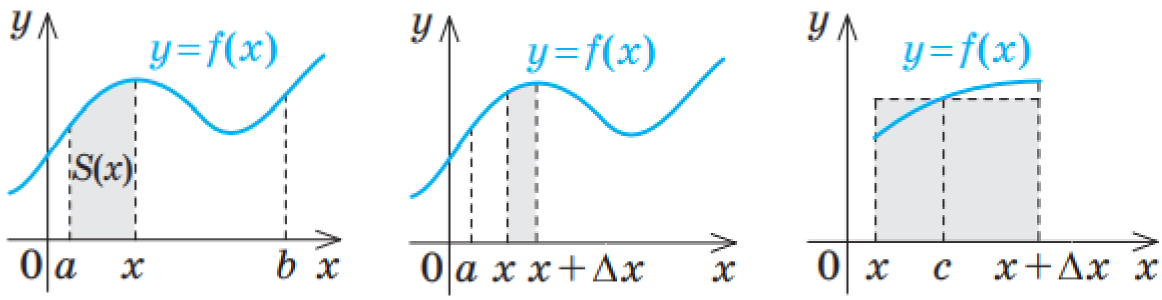
Рис. 1.18. Криволінійна трапеція

Відрізок $[a; b]$ називають основою криволінійної трапеції.

Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції з основою $[a;\ x]$; (Рис., 1.19., а), де x – будь-яка точка відрізка $[a;\ b]$. При $x = a$ відрізок $[a;\ x]$ вироджується в точку, і тому $S(a) = 0$; при $x = b$ маємо $S(b) = S$, де S – площа криволінійної трапеції з основою $[a;\ b]$ (Істер, 2019).

Покажемо, що функція $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, тобто що $S'(x) = f(x)$. Відповідно до означення похідної потрібно довести, що $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Для спрощення міркувань розглянемо випадок $\Delta x > 0$ (випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно) (Істер, 2019).

Оскільки $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, то з точки зору геометрії ΔS – площа фігури, виокремленої на Рис. 1.19., б (Істер, 2019).



а б в

Рис. 1.19. Функція $f(x)$ і фігура

Розглянемо тепер прямокутник із такою самою площею ΔS, однією зі сторін якого є відрізок $[x; x + \Delta x]$ (Рис. 1.19., в). Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то верхня сторона цього прямокутника перетинає графік функції в деякій точці з абсцисою $c \in [x; x + \Delta x]$ (інакше розглянутий прямокутник або містить криволінійну трапецію, виокремлену на рис. , в, або міститься в ній, і, відповідно, його площа буде більшою або меншою від площі ΔS). Висота прямокутника дорівнює $f(c)$. За формулою площі прямокутника маємо: $\Delta S = f(c)\Delta x$. Тоді $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(c)$. (Ця формула буде правильною і при $\Delta x < 0$.) (Істер, 2019).

Оскільки точка c лежить між точками x і $x + \Delta x$, то c прямує до x, якщо $\Delta x \to 0$. Ураховуючи неперервність функції $f(x)$, одержуємо також, що $f(c) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$ (Істер, 2019).

Отже, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Це означає, що $S'(x) = f(x)$, тобто $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$ (Істер, 2019).

Оскільки функція $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то за основною властивістю первісних будь-яка інша первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$ відрізняється від $S(x)$ на постійну C, тобто $F(x) = S(x) + C$. (1) (Істер, 2019).

Щоб знайти C, підставимо $x = a$. Одержуємо $F(a) = S(a) + C$. Оскільки $S(a) = 0$, то $C = F(a)$ і рівність (1) можна записати так: $S(x) = F(x) - F(a)$. (2)

Ураховуючи, що площа криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$, підставляємо у формулу (2) $x = b$ і одержуємо $S = S(b) = F(b) - F(a)$. Тобто площу криволінійної трапеції (рис.) можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, (3) де $F(x)$ – довільна первісна для функції $f(x)$ (Істер, 2019).

Отже, обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної $F(x)$ для функції $f(x)$, тобто до інтегрування функції $f(x)$ (Істер, 2019).

Задача 2 (про обчислення переміщення точки)

Нехай швидкість точки, що рухається прямолінійно, у кожний момент часу $t \in [a;\ b]$ можна задати функцією $v = v(t)$. На прямій, уздовж якої рухається

точка, виберемо систему координат і позначимо через $s(t)$ координату точки в момент часу t. Тоді переміщення точки за проміжок часу [a; b] буде дорівнювати $s(b)$–s(a). Оскільки швидкість є похідною від координати, тобто $v(t) = s'(t)$, то $s(t)$ – первісна для функції $v(t)$ (Істер, 2019).

Отже, переміщення точки, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$ за проміжок часу $[a;\ b]$, дорівнює різниці $s(b) – s$(a), де $s(t)$ – первісна для $v(t)$, тобто дорівнює інтегралу $\int_a^b v(t)dt$ (Істер, 2019).

1.4.4. Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст.

Нехай $F(x)$ – первісна для функції f(x) на проміжку $[a;\ b]$ (Істер, 2019).

Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на проміжку $[a;\ b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$ (Істер, 2019).

Для обчислення різниці $F(b) - F(a)$ можна користуватися будь-якою з первісних функції $f(x)$, загальний вигляд яких $F(x) + \text{C}$. Але $(F(b) + \text{C}) – (F(a) + \text{C}) = F(b) – F(a)$. Тому прийнято використовувати ту первісну, у якій $\text{C} = 0$ (Істер, 2019).

Геометричний зміст визначеного інтеграла такий: інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від функції $\text{y} = f(x)$, яка неперервна на проміжку $[a;b]$ і набуває на цьому проміжку лише невід'ємних значень, і площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком цієї функції та прямими $\text{y} = 0, \text{x} = a$ і $\text{x} = b$ (Істер, 2019).

Геометричний зміст інтеграла можна використати, коли вихідну функцію $y = f(x)$ отримати важко або неможливо, але легко отримати площу фігури відповідно до геометричних міркувань (Істер, 2019).

Фізичний зміст визначеного інтеграла такий: інтеграл $\int_a^b v(t)dt$ є переміщенням за проміжок часу $[a;b]$ матеріальної точки, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$ (Істер, 2019).

1.4.5. Обчислення визначеного інтеграла.

Рівність $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ називають формулою Ньютона-Лейбніца (Мерзляк, 2019).

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона-Лейбніца потрібно (Мерзляк, 2019):

1) знайти будь-яку первісну F функції f на відрізку $[a;\ b]$;

2) обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;

3) знайти різницю $F(b) - F(a)$. Під час обчислення визначених інтегралів різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)|_a^b$ (Мерзляк, 2019).

Властивість 1. При перестановці меж інтегрування інтервал змінює знак (Істер, 2019):

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Доведення. Оскільки $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ і $-\int_b^a f(x)dx. = -\big(F(a) - F(b)\big) = F(b) - F(a)$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (Істер, 2019).

Властивість 2. Для будь-якого a маємо (Істер, 2019):

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Доведення. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$ (Істер, 2019).

Властивість 3. Інтеграл суми функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій, тобто (Істер, 2019),

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$. тоді $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$. Маємо: $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = (F(x) + G(x))|_a^b = \big(F(b) + G(b)\big) - \big(F(a) + G(a)\big) = \big(F(b) - F(a)\big) + \big(G(b) - G(a)\big) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (Істер, 2019).

Властивість 4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто (Істер, 2019),

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\,.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді функція $kF(x)$ буде первісною для $kf(x)$. Маємо $\int_a^b kf(x)dx = kF(x)|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)dx$ (Істер, 2019).

Властивість 5. Якщо с $\in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(x)|_a^c + kF(x)|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ (Істер, 2019).

Деякі штучні методи можуть бути використані для знаходження певного інтеграла, що дозволить виразити інтегральну функцію у формі, зручній для інтегрування, наприклад у формі суми або різниці ніж функція, яка є простішою за умову, тобто має примітивні табличні функції (Істер, 2019).

1.4.6. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об'ємів тіл.

Обчислення площ плоских фігур

Обчислимо площу фігури, зображеної на Рис. 1.20.

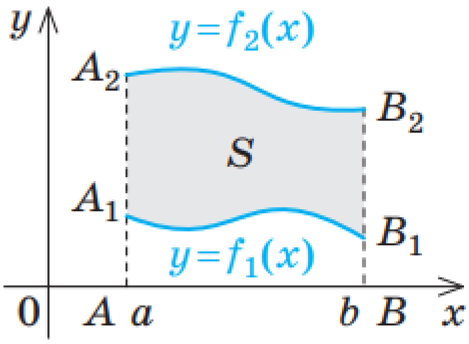


Рис. 1.20. Фігура, обмежена лініями

Ця фігура обмежена зверху графіком функції $y = f_2(x)$, знизу – графіком функції $y = f_1(x)$, а також вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$ функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні та невід'ємні на відрізку $[a;\ b]$ і $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всіх $x \in [a;\ b]$.

Площа S цієї фігури дорівнює різниці площ S_2 і S_1 криволінійних трапецій (S_2 – площа криволінійної трапеції AA_2B_2B, а S_1 – площа криволінійної трапеції AA_1B_1B). За геометричним змістом визначеного інтеграла

$$S_1 = \int_a^b f_1(x)dx\,, S_2 = \int_a^b f_2(x)dx.$$

Отже, $S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \big(f_2(x)dx - f_1(x)\big)dx.$

Таким чином, площу заданої фігури можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b \big(f_2(x)dx - f_1(x)\big)dx.$$

Ця формула буде правильною і в тому випадку, коли задані функції не є невід'ємними на відрізку $[a;\ b]$ – достатньо виконання умов, що функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні на відрізку $[a;\ b]$ і $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всіх $x \in [a;\ b]$ (Рис. 1.21., а).

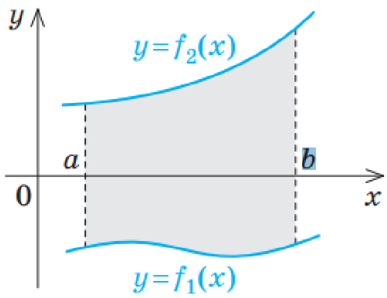


Рис. 1.21. а. Фігура, обмежена лініями

Для обґрунтування достатньо перенести задану фігуру паралельно вздовж осі Oy на m одиниць так, щоб вона розмістилася над віссю Ox (Рис. 1.21., б).

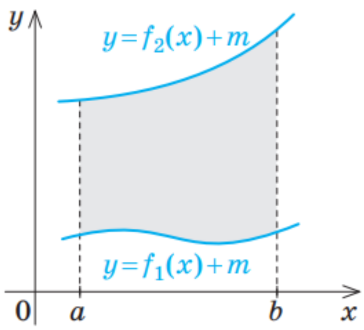


Рис. 1.21. б. Фігура, обмежена лініями

Таке перетворення означає, що задані функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ замінили відповідно на функції $y = f_1(x) + m$ і $y = f_2(x) + m$. Площа фігури, обмеженої графіками цих функцій та прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює площі заданої фігури. Отже, шукана площа

$$S = \int_a^b \big((f_2(x) + m) - (f_1(x) + m)\big)dx = \int_a^b \big(f_2(x)dx - f_1(x)\big)dx\,.$$

Обчислення об'ємів тіл

Задача обчислення об'єму тіла за допомогою певних інтегралів схожа на задачу знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай дано тіло об'ємом V, є така пряма (вісь Ox на малюнку 1.22.), незалежно від того, яку площину ми візьмемо, перпендикулярну до цієї прямої, ми знаємо площу S її поперечного перерізу тіла літак.

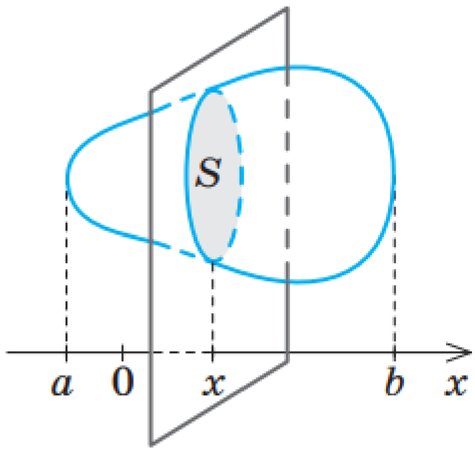


Рис. 1.22. Тіло об'ємом V

Але площина, перпендикулярна до осі Ox, перетинає її в деякій точці x. Таким чином, кожному числу x на відрізку $[a;\ b]$ (див. рисунок) відповідає одне число $S(x)$ – площа перерізу тіла цією площиною. Тому на відрізку $[a;\ b]$ задана функція $S(x)$. Якщо функція S неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то справджується формула

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Поділимо відрізок $[a;\ b]$ на n відрізків однакової довжини точками x_k такими, що $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{n-1} = b$, і припустимо, що

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{n-1}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Через кожну точку x_k проведемо площину α_k, перпендикулярну до осі Ox. Ці площини розрізають дане тіло на шари (Рис. 1.23., а). Об'єм шару між площинами α_{k-1} і α_k (Рис. 1.23., б) при достатньо великих n наближено дорівнює площі $S(x_{k-1})$ перерізу, помноженій на «товщину шару» Δx, і тому

$$V = S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \cdots + S(x_n)\Delta x = V_n.$$

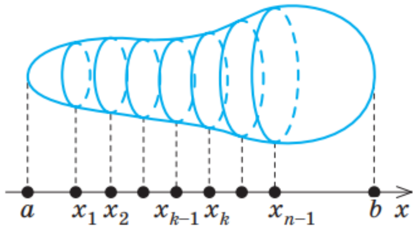


Рис. 1.23. а. Площина α_k

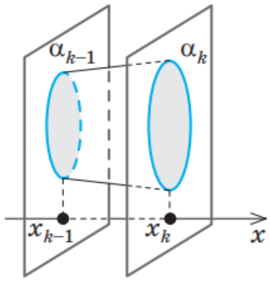


Рис. 1.23. б. Шар між площинами α_{k-1} і α_k

Точність цієї наближеної рівності тим вища, чим тонші шари, на які розрізане тіло, тобто чим більше n.

Тому $V_n \to V$, якщо $n \to \infty$. За означенням визначеного інтеграла через інтегральні суми одержуємо, що $V_n \to \int_a^b S(x)dx$, якщо $n \to \infty$. Отже,

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Нехай криволінійна трапеція спирається на відрізок $[a;\ b]$ осі Ox і обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, яка невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;\ b]$. Унаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox утворюється тіло (Рис. 1.24., а), об'єм якого можна знайти за формулою

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

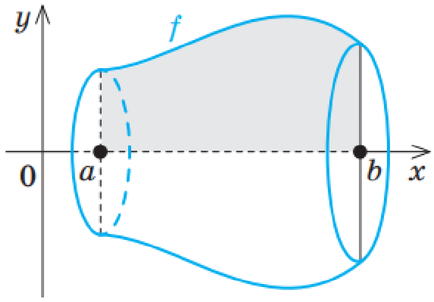


Рис. 1.24., а. Тіло, утворене обертанням криволінійної трапеції навколо осі Ox

Справді, перерізом тіла кожною площиною, яка перпендикулярна до осі Ox і перетинає відрізок $[a;\ b]$ цієї осі в точці x, є круг радіусом $f(x)$ і площею $S(x) = \pi f^2(x)$ (Рис. 1.24., б).

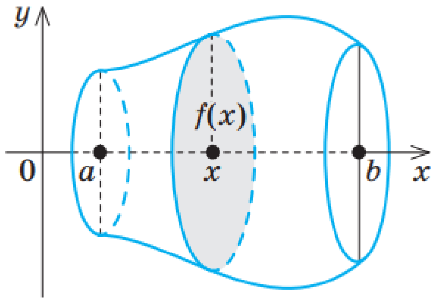


Рис. 1.24., б. Тіло з перерізом, який перпендикулярний до осі Ox

1.4.7. Використання інтеграла для розв'язування прикладних задач.

Інтегрування використовується не тільки для знаходження площ плоских фігур і об'ємів тіл. Давайте розглянемо інші випадки використання балів.

Часто для математичного моделювання різних процесів необхідно розглядати рівняння, в яких функція невідома. Наприклад, задача знаходження шляху $s(t)$ із заданою швидкістю $v(t)$ зводиться до розв'язання рівняння $s'(t) = v(t)$, де $v(t)$ – задана функція, а $s(t)$ – шукана функція. Такі рівняння розв'язуються інтегруванням. У процесі розв'язування слід враховувати, що розв'язок є неоднозначним із постійною точністю. Часто до рівняння, що містить похідну невідомої функції, додають умови для визначення цієї константи.

Розглянемо приклади розв'язування практичних задач за допомогою інтегрування.

Приклад 1.3. Циліндричний бак, висота якого 4,5 м, а радіус основи 1 м, заповнений водою. За який час вода витече з бака через круглий отвір у дні, якщо радіус отвору дорівнює 0,05 м?

Розв'язання

Позначимо висоту бака H (Рис. 1.25.), радіус його основи R, радіус отвору r (довжини вимірюємо в метрах, час – у секундах). Швидкість витікання рідини v залежить від висоти стовпа рідини x, її обчислюють за формулою Бернуллі:

$$v = \sigma\sqrt{2gx}, \qquad (1)$$

де $g = 9{,}8$ м/с^2, σ — коефіцієнт, що залежить від властивостей рідини (для води $\sigma = 0{,}6$). Зі зменшенням рівня води в баці швидкість витікання зменшується (тобто не є постійною).

Нехай $t(x)$ – час, за який із бака висотою x і радіусом основи R витікає вода через отвір радіуса r (рис.).

Знайдемо наближено відношення $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, уважаючи, що в період часу $\Delta t = t(x + \Delta x) - t(x)$ швидкість витікання води є постійною і виражається формулою (1).

Об'єм води, що витекла з бака за час Δt, дорівнює об'єму циліндра висотою Δx з радіусом основи R (див. Рис.1.25), тобто дорівнює $\pi R^2 \Delta x$. З іншого боку, цей об'єм дорівнює об'єму циліндра, основою якого служить отвір у дні бака, а висота – добутку швидкості витікання v на час Δt, тобто об'єм дорівнює $\pi R^2 v \Delta t$.

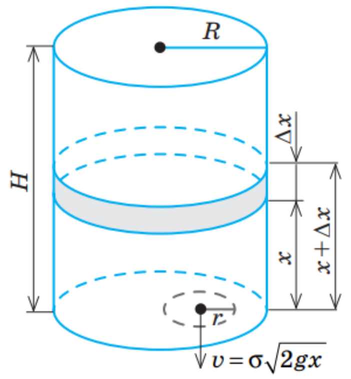


Рис. 1.25. Бак з водою

Отже,

$$\pi R^2 \Delta x = \pi R^2 v \Delta t.$$

Ураховуючи формулу (1), одержуємо:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{R^2}{r^2 v} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2gx}} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Тоді при $\Delta x \to 0$ одержуємо рівність

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Остання рівність означає, що функція $t(x)$ є первісною для одержаної функції.

Тоді,

$$t(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} 2\sqrt{x} + C.$$

Якщо $x = 0$ (у баці немає води), то $t(0) = 0$, тому $C = 0$. При $x = H$ знаходимо шуканий час:

$$t(H) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \sqrt{2H}.$$

Використовуючи дані задачі, одержуємо:

$$t(4{,}5) = \frac{1^1}{(0{,}05)^2 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{9{,}8}} \sqrt{9} \approx 639\ (c).$$

Відповідь. $639\ c$.

Приклад 1.4. Обчисліть роботу сили F під час стискування пружини на 0,06 м, якщо для її стиску на 0,01 м потрібна сила 5 Н.

Розв’язання

За законом Гука сила F пропорційна розтягу або стиску пружини, тобто $F = kx$, де x – величина розтягу чи стиску (у метрах), k – постійна.

З умови задачі знаходимо k. Оскільки при $x = 0{,}01$ м сила $F = 5$Н, то

$k = \frac{F}{x} = 500$ Н/м. Отже, $F(x) = kx = 500x$.

Знайдемо формулу для обчислення роботи, що була виконана під час переміщення тіла (яке розглядається як матеріальна точка), що рухається під дією змінної сили $F(x)$, напрямленої вздовж осі Ox. Нехай тіло перемістилося з точки $x = a$ в точку $x = b$.

Позначимо через $A(x)$ роботу, яку виконано під час переміщення тіла з точки a в точку x. Надамо x приросту Δx. Тоді $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$ – робота, яка виконується силою $F(x)$ при переміщенні тіла з точки x у точку $x + x\Delta$. Якщо $\Delta x \to 0$, то силу $F(x)$ на відрізку $[x;\ x + \Delta x]$ будемо вважати постійною і рівною $F(x)$. Тоді $\Delta A = F(x)\Delta x$. Звідси $\frac{\Delta A}{\Delta x} = F(x)$. При $\Delta x \to 0$ одержуємо $A'(x) = F(x)$. Остання рівність означає, що $A(x)$ є первісною для функції $F(x)$.

Ураховуючи, що $A(a) = 0$, за формулою Ньютона-Лейбніца одержуємо:

$$\int_a^b F(x)dx = A(x)\Big|_a^b = A(b) - A(a) = A(b) = A.$$

Отже, робота змінної сили $F(x)$ під час переміщення тіла з точки a в точку b дорівнює

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Використовуючи дані задачі, одержуємо:

$$A = \int_0^{0,06} 500x dx = 500\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,06} = 0,9\ (\text{Дж}).$$

Відповідь. 0,9 Дж.

Висновки до першого розділу

Аналіз наукової, педагогічної та методичної літератури дав змогу у першому розділі узагальнити і систематизувати знання з теми дослідження.

Порівняльний аналіз навчальних програм та підручників 10-11 класів дав можливість підтвердити, що в поглибленому і профільному рівнях вивчення тем «Похідна та її застосування» та «Інтеграл та його застосування» проводиться більш розширено та детально, на відмінну від рівня стандарту.

Представлено означення похідної та інтеграла через задачі які приводять до їх визначення. Розглянуто правила обчислення похідних та інтегралів. Продемонстровано застосування першої і другої похідної до дослідження функцій, розв'язування рівнянь та доведення нерівностей, а також застосування інтеграла до обчислення площ фігур та об'ємів тіл.

Таким чином, у першому розділі наведені узагальнені та систематизовані теоретичні матеріали про похідні та інтеграли, їх властивості та застосування їх до розв'язування вправ.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1. Методика навчання учнів розв'язування задач на застосування похідної.

Приклад 2.1. Знайдіть похідну функції(Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $y = \frac{1}{x} - sinx + 4x^2$;

2) $y = x^3 cosx$;

3) $y = \frac{2x^2+1}{3x-2}$.

Розв'язання

1) Користуючись теоремою про похідну суми та наслідками з теореми про похідну добутку, маємо:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - sinx + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (sinx)' + 4 \cdot (x^2)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - cosx + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - cosx + 8x;$$

2) Маємо:

$$y' = (x^3 cosx)' = (x^3)' \cdot cosx + (cosx)' \cdot x^3 =$$

$$= 3x^2 cosx - sinx \cdot x^3 = 3x^2 cosx - x^3 sinx;$$

3) За теоремою про похідну частки отримаємо:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2) - (3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x(3x-2) - 3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x-2)^2}.$$

Відповідь. 1) $-\frac{1}{x^2} - cosx + 8x,$ 2) $3x^2 cosx - x^3 sinx,$ 3) $\frac{6x^2-8x-3}{(3x-2)^2}$.

Приклад. 2.2. Знайдіть похідну функції $y = tgx$ (Мерзляк, проф. рівень, 2018).

Розв'язання

$$y' = (tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)' \cdot cosx - (cosx)' \cdot sinx}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{cosx \cdot cosx - (-sinx) \cdot sinx}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}.$$

Відповідь. $\frac{1}{cos^2x}$.

Приклад 2.3. Знайдіть похідну функції(Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $y = 2x^5 - x$;

2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$;

3) $y = sinx + 2cosx$;

4) $y = x - \frac{5}{x}$;

5) $y = 12 - ctgx$;

6) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$.

Розв’язання

$$1)\ y' = (2x^5 - x)' = 2 \cdot (x^5)' - x' = 2 \cdot 5x^4 - 1 = 10x^4 - 1;$$

$$2)\ y' = \left(x^7 - 4\sqrt{x}\right)' = (x^7)' - 4 \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = 7x^6 - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 7x^6 - \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$3)\ y' = (sinx + 2cosx)' = (sinx)' + 2 \cdot (cosx)' = cosx - 2sinx;$$

$$4)\ y' = \left(x - \frac{5}{x}\right)' = x' - 5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{5}{x^2};$$

$$5)\ y' = (12 - ctgx)' = 12' - (ctgx)' = -\left(-\frac{1}{sin^2x}\right) = \frac{1}{sin^2x};$$

$$6)\ y' = \left(0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}\right)' = 0{,}4 \cdot (x^{-5})' + \left(\sqrt{3}\right)' = 0{,}4 \cdot (-5x^{-6}) = -2x^{-6}.$$

Відповідь. 1) $10x^4 - 1,$ 2) $7x^6 - \frac{2}{\sqrt{x}},$ 3) $cosx - 2sinx,$ 4) $1 + \frac{5}{x^2},$ 5) $\frac{1}{sin^2x},$ 6) $-2x^{-6}$.

Приклад 2.4. Знайдіть похідну функції(Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;

2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;

3) $y = x^4cosx$;

4) $y = xtgx$.

Розв’язання

1) $y' = \left((x^3-2)(x^2+1)\right)' = (x^3-2)'(x^2+1) + (x^3-2)(x^2+1)' =$
$= 3x^2(x^2+1) + (x^3-2)\cdot 2x = 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 - 4x = 5x^4 + 3x^2 - 4x;$

2) $y' = \left((x+5)\sqrt{x}\right)' = (x+5)'\cdot\sqrt{x} + (x+5)\cdot\left(\sqrt{x}\right)' =$

$$= \sqrt{x} + (x+5)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} + x + 5}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x + 5}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+5}{2\sqrt{x}};$$

3) $y' = (x^4 cosx)' = (x^4)'\cdot cosx + x^4\cdot(cosx)' =$

$$= 4x^3\cdot cosx + x^4\cdot(-sinx) = 4x^3cosx - x^4sinx;$$

4) $y' = (xtgx)' = x'\cdot tgx + x\cdot(tgx)' = tgx + \frac{x}{cos^2x}$.

Відповідь. 1) $5x^4 + 3x^2 - 4x$, 2) $\frac{3x+5}{2\sqrt{x}}$, 3) $4x^3cosx - x^4sinx$, 4) $tgx + \frac{x}{cos^2x}$.

Приклад 2.5. Знайдіть похідну функції(Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $y = \frac{3x+5}{x-8}$;

2) $y = \frac{2x^2}{1-6x}$;

3) $y = \frac{sinx}{x}$;

4) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Розв’язання

$$1)\ y' = \left(\frac{3x+5}{x-8}\right)' = \frac{(3x+5)'\cdot(x-8) - (3x+5)\cdot(x-8)'}{(x-8)^2} =$$

$$= \frac{3(x-8) - (3x+5)}{(x-8)^2} = \frac{3x - 24 - 3x - 5}{(x-8)^2} = -\frac{29}{(x-8)^2} = -\frac{29}{x^2 - 16x + 64};$$

$$2)\ y' = \left(\frac{2x^2}{1-6x}\right)' = \frac{(2x^2)'(1-6x) - 2x^2(1-6x)'}{(1-6x)^2} =$$

$$= \frac{4x(1-6x) - 2x^2\cdot(-6)}{(1-6x)^2} = \frac{4x - 24x^2 + 12x^2}{(1-6x)^2} = \frac{4x - 12x^2}{(1-6x)^2};$$

$$3)\ y' = \left(\frac{sinx}{x}\right)' = \frac{(sinx)'\cdot x - (sinx)\cdot x'}{x^2} = \frac{x\cdot cosx - sinx}{x^2};$$

$$4)\ y' = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Відповідь. 1) $-\frac{29}{x^2-16x+64}$; 2) $\frac{4x-12x^2}{(1-6x)^2}$; 3) $\frac{x\cdot cosx-sinx}{x^2}$; 4) $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

Приклад 2.6. Знайдіть похідну функції(Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $y=(3x-5)^6$;

2) $y=sin\frac{x}{3}$;

3) $y=cos^2x$;

4) $y=2tg4x$;

5) $y=cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

6) $y=\sqrt{1-x^2}$;

7) $y=\sqrt[4]{6x+8}$;

8) $y=(9x-2)^{-3}$;

9) $y=\sqrt{cosx}$.

Розв’язання

$$1)\ y'=((3x-5)^6)'=6(3x-5)^5\cdot(3x-5)'=6(3x-5)^5\cdot 3=18(3x-5)^5;$$

$$2)\ y'=\left(sin\frac{x}{3}\right)'=cos\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'=cos\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x'=\frac{1}{3}cos\frac{x}{3};$$

$$3)\ y'=(cos^2x)'=2cosx\cdot(cosx)'=-2sinxcosx=-sin2x;$$

$$4)\ y'=(2tg4x)'=2\cdot(tg4x)'=2\cdot\frac{1}{cos^2 4x}\cdot(4x)'=\frac{2}{cos^2 4x}\cdot 4=\frac{8}{cos^2 4x};$$

$$5)\ y'=\left(cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)'=-sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)'=-sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right);$$

$$6)\ y'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$7)\ y'=\left(\sqrt[4]{6x+8}\right)'=\left((6x+8)^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}(6x+8)^{\frac{1}{4}-1}\cdot(6x+8)'=$$

$$=\frac{6}{4}(6x+8)^{-\frac{3}{4}}=\frac{6}{4\sqrt[4]{(6x+8)^3}}=\frac{3}{2\sqrt[4]{(6x+8)^3}};$$

$$8)\ y'=((9x-2)^{-3})'=-3(9x-2)^{-4}\cdot(9x-2)'=-27(9x-2)^{-4};$$

$$9)\ y' = \left(\sqrt{cosx}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{cosx}} \cdot (cosx)' = -\frac{sinx}{2\sqrt{cosx}}.$$

Відповідь.1) $18(3x-5)^5$; 2) $\frac{1}{3}cos\frac{x}{3}$; 3) $-sin2x$; 4) $\frac{8}{cos^2 4x}$; 5) $-sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

6) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 7) $\frac{3}{2\sqrt[4]{(6x+8)^3}}$; 8) $-27(9x-2)^{-4}$; 9) $-\frac{sinx}{2\sqrt{cosx}}$.

Приклад 2.7. Знайдіть похідну функції(Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $y = x\sqrt{x+3}$;

2) $y = sin2x \cdot cosx$;

3) $y = (x+2)^5(x-3)^4$.

Розв’язання

$$1)\ y' = \left(x\sqrt{x+3}\right)' = x'\sqrt{x+3} + x\left(\sqrt{x+3}\right)' =$$

$$= \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot (x+3)' = \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} =$$

$$= \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}};$$

$$2)\ y' = (sin2x \cdot cosx)' = (sin2x)' \cdot cosx + sin2x \cdot (cosx)' =$$

$$cos2x \cdot (2x)' \cdot cosx - sin2x \cdot sinx = 2cosx \cdot cos2x - sinx \cdot sin2x;$$

$$3)\ y' = ((x+2)^5(x-3)^4)' = ((x+2)^5)' \cdot (x-3)^4 + (x+2)^5 \cdot ((x-3)^4)' =$$

$$= 5(x+2)^4 \cdot (x+2)' \cdot (x-3)^4 + (x+2)^5 \cdot 4(x-3)^3 \cdot (x-3)' =$$

$$= 5(x+2)^4 \cdot (x-3)^4 + 4(x-3)^3 \cdot (x+2)^5.$$

Відповідь. 1) $\frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$; 2) $2cosx \cdot cos2x - sinx \cdot sin2x$;

3) $5(x+2)^4 \cdot (x-3)^4 + 4(x-3)^3 \cdot (x+2)^5$.

Приклад 2.8. Знайдіть похідну функції в точці x_0 (Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $y = (3x-7)^6,\ x_0 = 2$;

2) $y = \sqrt{4x^2+1}, x_0 = 0$;

Розв’язання

3) $y = sin\frac{x}{2}, x_0 = \pi$;

4) $y = tg^3 5x, x_0 = \frac{\pi}{15}$.1) Знайдемо похідну функції:

$$y' = ((3x-7)^6)' = 6 \cdot (3x-7)^5 \cdot (3x-7)' = 6(3x-7)^5 \cdot 3 = 18(3x-7)^5.$$

Знайдемо тепер похідну функції в точці $x_0 = 2$:

$$y'(x_0) = y'(2) = 18(3 \cdot 2 - 7)^5 = 18 \cdot (6-7)^5 = 18 \cdot (-1) = -18.$$

2) Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\sqrt{4x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \cdot (4x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \cdot 8x = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

Знайдемо тепер похідну функції в точці $x_0 = 0$;

$$y'(x_0) = y'(0) = \frac{4 \cdot 0}{\sqrt{4 \cdot 0^2 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{0+1}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = \frac{0}{1} = 0.$$

3) Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(sin\frac{x}{2}\right)' = cos\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}cos\frac{x}{2}.$$

Знайдемо тепер похідну функції в точці $x_0 = \pi$:

$$y'(x_0) = y'(\pi) = \frac{1}{2}cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

4) Знайдемо похідну функції:

$$y' = (tg^3 5x)' = 3tg^2 5x \cdot (tg5x)' = 3tg^2 5x \cdot \frac{(5x)'}{cos^2 5x} = \frac{15tg^2 5x}{cos^2 5x}.$$

Знайдемо тепер похідну функції в точці $x_0 = \frac{\pi}{15}$:

$$y'(x_0) = y'\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15tg^2 5 \cdot \frac{\pi}{15}}{cos^2 5 \cdot \frac{\pi}{15}} = \frac{15tg^2 \frac{\pi}{3}}{cos^2 \frac{\pi}{3}} = 15 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 : \frac{1}{4} = 180.$$

Відповідь. 1) -18; 2) 0; 3) 0; 4) 180.

Приклад 2.9. Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 (Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x, x_0 = \frac{1}{4}$;

2) $f(x) = \frac{cosx}{1-x}, x_0 = 0$;

3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}, x_0 = 2$;

4) $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x+1}, x_0 = 1$.

Розв'язання

1) Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} - 16x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' - 16 \cdot x' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 16.$$

Обчисліть значення похідної функції у точці x_0

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} - 16 = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} - 16 = 1 - 16 = -15.$$

2) Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = \left(\frac{cosx}{1-x}\right)' = \frac{cos'x \cdot (1-x) - cosx \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{sinx \cdot (1-x) + cosx}{(1-x)^2}.$$

Обчисліть значення похідної функції у точці x_0

$$f'(x_0) = f'(0) = \frac{sin0 \cdot (1-0) + cos0}{(1-0)^2} = \frac{0 \cdot 1 + 1}{1} = 1.$$

3) Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = (x^{-2} - 4x^{-3})' = (x^{-2})' - 4 \cdot (x^{-3})' = -2x^{-3} + 12x^{-4} = -\frac{2}{x^3} + \frac{12}{x^4}.$$

Обчисліть значення похідної функції у точці x_0

$$f'(x_0) = f'(2) = -\frac{2}{2^3} + \frac{12}{2^4} = -\frac{2}{8} + \frac{12}{16} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

4) Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 3x - 1}{x+1}\right)' = \frac{(2x^2 - 3x - 1)'(x+1) - (2x^2 - 3x - 1)(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(4x-3)(x+1) - 2x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2} = \frac{4x^2 + 4x - 3x - 3 - 2x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - 2}{(x+1)^2}.$$

Обчисліть значення похідної функції у точці x_0

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 + 4x - 2}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1.$$

Відповідь. 1) $-15; 2)$ $1; 3)$ $\frac{1}{2}; 4)$ 1.

Приклад 2.10. Обчисліть (Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $f'(0)$, якщо $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}$;

2) $f'(0)$, якщо $f(x) = (cos3x + 6)^3$

Розв'язання

1) Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}} \cdot \left(\frac{x-1}{2x-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}} \cdot \frac{(x-1)' \cdot (2x-1) - (x-1) \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}} \cdot \frac{2x-1+2x+2}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{2x-1}} \cdot (2x-1)^2}.$$

Обчисліть значення похідної функції $f'(0)$:

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{0-1}{2\cdot 0-1}} \cdot (2\cdot 0-1)^2} = \frac{1}{2}.$$

2) Знайдемо похідну функції:

$$f'(x) = ((cos3x+6)^3)' = 3(cos3x+6)^2 \cdot (cos3x+6)' =$$

$$= 3(cos3x+6)^2 \cdot sin3x \cdot 3 = 9(cos3x+6)^2 \cdot sin3x.$$

Обчисліть значення похідної функції $f'(0)$:

$$f'^{u}(0) = 9(cos0+6)^2 \cdot sin0 = 0.$$

Відповідь. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0.

Приклад 2.11. Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом

$s(t) = (t+2)^2(t+5)$ (переміщення вимірюють у метрах, час – у секундах). Знайдіть її швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ с (Мерзляк, проф. рівень, 2018).

Розв'язання

$$s'(t) = \left((t+2)^2(t+5)\right)' = ((t+2)^2)'(t+5) + (t+2)^2(t+5)' =$$

$$= 2(t+2)(t+5) + (t+2)^2 = (t+2)(2t+10+t+2) = (t+2)(3t+12).$$

Знайдемо швидкість матеріальної точки в момент часу $t_0 = 3$ с:

$$v(t_0) = s'(t_0) = s'(3) = (3+2)(3\cdot 3+12) =$$

$$= 5 \cdot (9+12) = 5 \cdot 21 = 105 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь. 105 м/с.

Приклад 2.12. Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (переміщення вимірюють у метрах, час – у секундах). Знайдіть кінетичну енергію $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тіла в момент часу $t_0 = 4$ с (Мерзляк, проф. рівень, 2018).

Розв'язання

$$s'(t) = (3t^2 - 4t + 2\ )' = (3t^2)' - (4t)' + 2' = 6t - 4.$$

Швидкість матеріальної точки буде дорівнювати:

$$v(t) = s'(t) = 6t - 4.$$

Знайдемо кінетичну енергію:

$$E(t) = \frac{mv^2(t_0)}{2} = \frac{2 \cdot (6 \cdot 4 - 4)^2}{2} = \frac{2 \cdot 20^2}{2} = 20^2 = 400\ (\text{Дж}).$$

Відповідь. 400 Дж.

Приклад 2.13. Знайдіть у точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$ похідну функції (Мерзляк, проф. рівень, 2018):

1) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$;

2) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

Розв'язання

$$1)\ x_1 = -1;\ f(x) = x^2 + 4x + 3; f'(x) = (x^2 + 4x + 3)' = 2x + 4;$$

$$f'(x_1) = f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2.$$

$$x_2 = 2;\ f(x) = x^2 - 4x + 3; f'(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4;$$

$$f'(x_2) = f'(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 4 - 4 = 0.$$

$$2)\ x_1 = -1;\ x^2 - 4x + 3 = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 > 0;$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3;\ f'(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4;$$

$$f'(x_1) = f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -2 - 4 = -6.$$

$$x_2 = 2;\ x^2 - 4x + 3 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 < 0;$$

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3;\ f'(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4;$$

$$f'(x_1) = f'(-1) = -2 \cdot 2 + 4 = -4 + 4 = 0.$$

Відповідь. 1) $2; 0, 2) - 6; 0$.

2.2. Методика навчання старшокласників розв'язування задач на застосування інтеграла.

Приклад 2.14. Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = x^5$ (Мерзляк, проф. рівень, 2019).

Розв'язання

Оскільки $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$, то однією із первісних функції $f(x) = x^5$ є функція $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Тоді за основною властивістю первісних запис $\frac{x^6}{6} + C$, де C – довільне число, є загальним виглядом первісних.

Відповідь. $\frac{x^6}{6} + C$

Приклад 2.15. Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ (Мерзляк, проф. рівень, 2019).

Розв'язання

На проміжку $(0; +\infty)$ має місце рівність $(lnx)' = \frac{1}{x}$; на проміжку $(-\infty; 0)$ мають місце рівності $\big(ln(-x)\big)' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$.

Отже, функція $y = lnx$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$, а функція $y = ln(-x)$ є первісною $f(x) = \frac{1}{x}$ функції на проміжку $(-\infty; 0)$.

Оскільки

$$ln|x| = \begin{cases} lnx, \text{якщо } x \in (0; +\infty), \\ ln(-x), \text{якщо } x \in (-\infty; 0), \end{cases}$$

то на будь-якому проміжку, що не містить точку 0, запис

$ln|x| + C$, де С – довільне число,

є загальним виглядом первісних функції.

Відповідь. $ln|x| + C$.

Приклад 2.16. Для функції $f(x) = 2cosx$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{5\pi}{6}; 3\right)$ (Мерзляк, проф. рівень, 2019).

Розв'язання

Оскільки $(2sinx)' = 2cosx$ то функція $y = 2sinx$ є однією з первісних функції $f(x) = 2cosx$. Отже, шукана первісна має вигляд $F = 2sinx + C$, де C – довільне число. Знайдемо це число.

З умови випливає, що $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3$. Тоді $2sin\frac{5\pi}{6} + C = 3$. Звідси $C = 2$.

Таким чином шукана первісна має вигляд $F = 2sinx + 2$.

Відповідь. $2sinx + 2$.

Приклад 2.17. Доведіть, що функція F є первісною функції f на проміжку I (Мерзляк, проф. рівень, 2019):

1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6, f(x) = 4x^3 - 4x, I = (-\infty; +\infty)$;

2) $F(x) = \frac{1}{x^3}, f(x) = -\frac{3}{x^4}, I = (-\infty; 0)$;

3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}, f(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}, I = (0; +\infty)$;

4) $F(x) = 3tg\frac{x}{3} + 6, f(x) = \frac{1}{cos^2\frac{x}{3}}, I = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Розв'язання

1) Обидві функції визначені на проміжку I.

$$F'(x) = (x^4 - 2x^2 + 6)' = (x^4)' - 2 \cdot (x^2)' + 6' = 4x^3 - 4x = f(x).$$

2) Обидві функції визначені на проміжку I.

$$F'(x) = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3 \cdot x^{-4} = -\frac{3}{x^4} = f(x).$$

3) Обидві функції визначені на проміжку I.

$$F'(x) = \left(5 - 3\sqrt{x}\right)' = 5' - 3 \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = -3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

4) Обидві функції визначені на проміжку I.

$$F'(x) = \left(3tg\frac{x}{3} + 6\right)' = 3 \cdot \left(tg\frac{x}{3}\right)' + 6' = 3 \cdot \frac{1}{cos^2\frac{x}{3}} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{cos^2\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{cos^2\frac{x}{3}} = f(x).$$

Відповідь. Доведено, що функція F є первісною функції f на проміжку I.

Приклад 2.18. Перевірте, що

1) $\int xcosxdx = cosx + xsinx + C,$

2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \sqrt{x^2+4} + C,$

де C – довільне число (Мерзляк, проф. рівень, 2019).

Розв'язання

1) Функції F і f визначені на $(-\infty; +\infty)$:

$$F'(x) = (cosx)' + (xsinx)' = -sinx + x' \cdot sinx + x \cdot (sinx)' =$$

$$= -sinx + sinx + xcosx = xcosx,$$

$$F(x) = cosx + xsinx + C.$$

2) Функції F і f визначені на $(-\infty; +\infty)$:

$$F'(x) = \left(\sqrt{x^2+4}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot (x^2+4)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}},$$

$$F(x) = \sqrt{x^2+4} + C.$$

Відповідь. Перевірено.

Приклад 2.19. Для функції знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку (Мерзляк, проф. рівень, 2019):

1) $f(x) = x^3, M\left(1; \frac{5}{4}\right);$

2) $f(x) = cosx, N(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{2})$

3) $f(x) = 3^x, K\left(2; \frac{9}{ln3}\right).$

Розв'язання

$$1)\ F(x) = \frac{x^4}{4} + C;\ \frac{5}{4} = \frac{1^4}{4} + C; C = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1 \to F(x) = \frac{x^4}{4} + 1;$$

$$2)\ F(x) = sinx + C;\ \frac{5}{2} = sin\frac{\pi}{6} + C;\ \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + C;\ C = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \to$$

$$\to F(x) = sinx + 2;$$

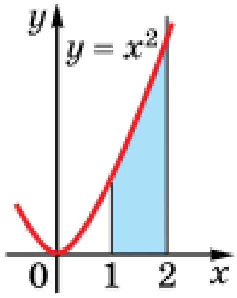
$$3)\ F(x) = \frac{3^x}{ln3} + C;\ \frac{9}{ln3} = \frac{3^2}{ln3} + C; C = \frac{9}{ln3} - \frac{9}{ln3}; C = 0 \to F(x) = \frac{3^x}{ln3}.$$

Відповідь. 1) $\frac{x^4}{4} + 1;$ 2) $sinx + 2;$ 3) $\frac{3^x}{ln3}.$

Приклад 2.20. Обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) = x^2$ та прямими $y = 0; x = 1; x = 2$ (Істер, 2019).

Розв'язання.

На малюнку зображено дану криволінійну трапецію. Для функції $f(x) = x^2$ однією з первісних є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тоді $S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ (Істер, 2019).



Відповідь. $2\frac{1}{3}$.

Приклад 2.21. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 3t^2 + 1$ (м/с). Знайти переміщення точки за перші дві секунди руху (Істер, 2019).

Розв'язання

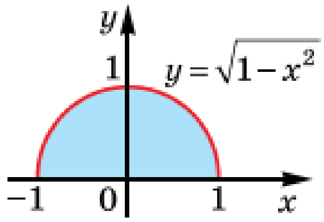
Маємо $s(t) = t^3 + t$ —один з можливих законів руху даної матеріальної точки. Обчислимо переміщення з точки за перші дві секунди руху: $s = s(2) - s(0) = (2^3 + 2) - (0^3 + 0) = 10$(м). Відповідь. 10 м

Приклад 2.22. Обчислити $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2 dx}$, використовуючи геометричний зміст інтеграла.

Розв'язання

Шуканий інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sqrt{1 - x^2}$ і $y = 0$. Піднесемо обидві частини рівності $y = \sqrt{1 - x^2}$ до квадрата і запишемо її у вигляді

$x^2 + y^2 = 1$, де $y > 0$. Отже, ця криволінійна трапеція є півкругом радіуса 1 . Тому $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2 dx} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.



Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2.23. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ (Істер, 2019).

Розв'язання

Для функції $f(x) = \sin x$ однією з первісних є$F(x) = -\cos x$,тому за формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$$

Відповідь. 1.

Приклад 2.24. Обчислити $\int_{-1}^{1} (2x - 3x^2) dx$ (Істер, 2019).

Розв'язання

Для функції $f(x) = 2x - 3x^2$. Використовуючи правила знаходження первісних та таблицю первісних, матимемо:

$F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^2 - x^3$. Отже,

$$\int_{-1}^{1} (2x - 3x^2) dx = (x^2 - x^3) \Big|_{-1}^{1} = (1^2 - 1^3) - ((-1)^2 - (-1)^3) = 0 - 2 = -2.$$

Відповідь. -2.

Приклад 2.25. Обчислити інтеграл $\int_0^4 \sqrt{2x + 1 dx}$ (Істер, 2019).

Розв'язання

Подамо підінтегральну функцію $f(x) = \sqrt{2x + 1}$.

У вигляді, зручному для інтегрування: $f(x) = (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$. Для знаходження первісної використовуємо правило 3 і таблицю первісних.

Матимемо: $F(x) = \frac{1}{2} . \frac{(2s+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} . \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2x + 1)^{\frac{3}{2}}$.

Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, отримаємо:

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}(2\cdot 4+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(2\cdot 0+1)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left((3^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{3}(3^3 - 1) = 8\frac{2}{3}.$$

Відповідь.$8\frac{2}{3}$

Приклад 2.26. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \left(\frac{8}{x} 4x^3\right) dx$ (Істер, 2019).

Розв'язання

Послідовно застосовується властивості 4 і 3, матимемо:

$$\int_1^2 \left(\frac{8}{x} - 4x^3\right) dx = \int_1^2 \frac{8}{x}dx - \int_1^2 4x^3 dx = 8\int_1^2 \frac{dx}{x} - 4\int_1^2 x^3 dx = 8\ln|x|\,\Big|_1^2 - 4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 =$$

$= 8(\ln 2 - \ln 1) - (2^4 - 1^4) = 8\ln 2 - 15.$ Відповідь. $8\ln 2 - 15.$

Приклад 2.27. Обчислити $\int_{-2}^4 f(x)dx,$ якщо (Істер, 2019):

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{якщо} -2 \le x \le 0, \\ 2\sqrt{x}, \text{якщо } 0 < x \le 4. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\int_{-2}^4 f(x)dx = \int_{-2}^0 (-x)dx + \int_0^4 2\sqrt{x}dx = -\int_{-2}^0 xdx + 2\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^0 + 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^4 = = -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = 2 + \frac{4}{3}\cdot 8 = 12\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $12\frac{2}{3}$.

Приклад 2.28. Обчислити інтеграл $\int_2^5 x\sqrt{x-1}dx$ (Істер, 2019).

Розв'язання

Перетворимо вираз $x\sqrt{x-1}$ так:

$$x\sqrt{x-1} = (x-1+1)\sqrt{x-1} = (x-1)\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_2^5 \left((x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_2^5 =$$

$$= \left(\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_2^5 = \left(\frac{2}{5}\cdot 4^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 1^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) =$$

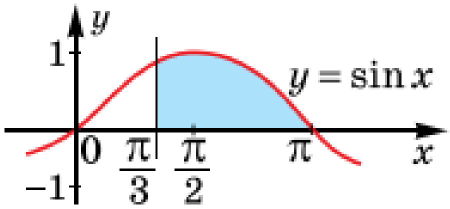
$$= \frac{2}{5}\cdot 32 + \frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}(32-1) + \frac{2}{3}(8-1) = 17\frac{1}{15}.$$

Відповідь. $17\frac{1}{15}$.

Приклад 2.27. Обчислити за допомогою визначеного інтеграла площу криволінійної трапеції обмеженої лініями $y = \sin x,\ x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \pi$ (Істер, 2019).

Розв’язання

Маємо:



$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = -\cos\pi - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5.$$

Відповідь. 1,5.

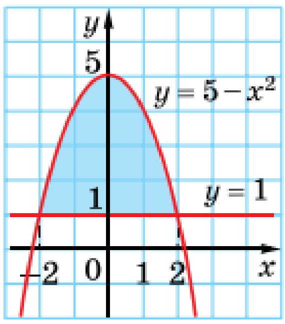
Приклад 2.28. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 5 - x^2$ і $y = 1$ (Істер, 2019).

Розв’язання

1) Знайдемо абсциси точок перетину графіків, розв’язавши рівняння:

$5 - x^2 = 1$, звідки $x_{1,2} = \pm 2$ Ординати обох точок перетину дорівнюють 1.

2) Зобразимо схематично графіки функцій і абсцис їх точок перетину



3) Тоді:

$$S = \int_{-2}^{2}(5 - x^2 - 1)dx = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= 10\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $10\frac{2}{3}$.

Приклад 2.29. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2x$ і $y = 4 - x$ (Істер, 2019).

Розв'язання

1) Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій:

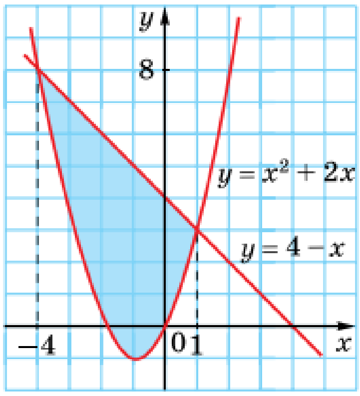
$$x^2 + 2x = 4 - x;$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0;$$

$$x_1 = 1; x_2 = -4.$$

Ординати точок перетину $y_1 = 3;\ y_2 = 8$.

2) Зобразимо графік функцій схематично.



3) Отже,

$$S = \int_{-4}^{1}\big((4 - x) - (x^2 + 2x)\big)dx = \int_{-4}^{1}(4 - x^2 - 3x)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= \left(4 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} - \frac{3 \cdot 1^2}{2}\right) - \left(4 \cdot (-4) - \frac{(-4)^3}{3} - \frac{3 \cdot (-4)^2}{2}\right) = 2\frac{1}{6} + 18\frac{2}{3} = 20\frac{5}{6}.$$

Відповідь. $20\frac{5}{6}$.

Приклад 2.30. Нехай дано криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної на $[a;b]$, функції $y=f(x)$такої, що $f(x)\geq 0$ для кожного $x\in[a;b]$, та прямими $y=0, x=a$ і $x=b$. Довести, що об'єм тіла, яке утворилося внаслідок обертання цієї трапеції навколо осі абсцис, можна обчислити за формулою (Істер, 2019)

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

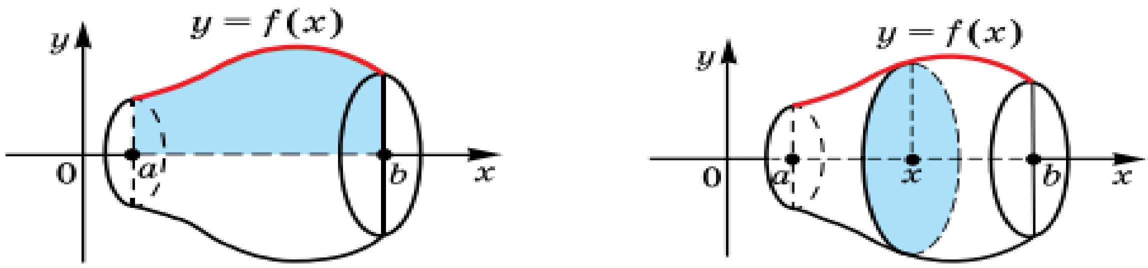
Доведення

Розглянемо тіло, завдане в умові.

Кожна площина, що перпендикулярна до осі абсцис і перетинає відрізок $[a;b]$ у точці x, дає в перерізі тіла круг, радіус якого дорівнює $f(x)$. Тоді маємо площу такого круга:

$S(x)=\pi f^2(x)$. Отже, для об'єму тіла обертання отримаємо:

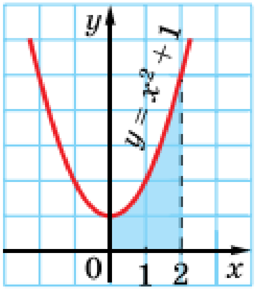
$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \pi f^2(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$



Приклад 2.31. Знайти об'єм тіла, яке утворилося внаслідок обертання навколо осі утворилося внаслідок обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=x^2+1, y=0, x=0$ і $x=2$ (Істер, 2019).

Розв'язання

Криволінійну трапецію, яку обертають навколо осі y, зображено на малюнку. Знайдемо об'єм утвореного тіла обертання:



$$V = \pi \int_0^2 (x^2+1)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4+2x^2+1)dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi\left(\left(\frac{2^5}{5} + \frac{2\cdot 2^3}{3} + 2\right) - 0\right) = \frac{206\pi}{15}.$$

Відповідь. $\frac{206\pi}{15}$.

Приклад 2.32. Обчислити роботу сили f під час розтягнення пружини на 0,05 м, якщо для розтягнення пружини на 0,02 м потрібна сили 4 Н (Істер, 2019).

Розв'язання

1) За законом Гука, сили f пропорційна розтягненню (або стисканню) пружини, тобто $f = kx$, де x – величина розтягнення (або стискання), k – стала.

2) Оскільки для $x = 0{,}02$ м маємо, що $f =$ 4 Н, то можемо знайти k. Тоді $k = \frac{f}{x} == \frac{4}{0{,}02} = 200$. Отже, $F(x) = 200x$.

3) Знайдемо роботу A для розтягнення пружини на 0,05 м:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_0^{0{,}05} 200x dx = 200 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}05} = 100x^2\Bigg|_0^{0{,}05} = 100(0{,}05^2 - 0^2) =$$

$= 0{,}25$(Дж).

Відповідь. 0,25 Дж.

2.3. Аналіз завдань зовнішнього незалежного оцінювання з теми дослідження

Суттєвих змін зазнала структура складання зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) у 2021 році. Однією з особливостей є впровадження обов'язкового ДПА з математики у формі ЗНО. Крім цього воно буде дворівневе, тобто міститиме два рівня складності – рівень стандарту та профільний рівень.

Для випускників які вивчали математику на рівні стандарту, створений окремий тест рівня стандарту для складання державної підсумкової атестації, який буде складатися з 28 завдань різної форми. Для випускників у яких математика викладалась на профільному рівні розроблений тест профільного рівня для складання ДПА, куди будуть входити 28 завдань рівня стандарту та 6 додаткових завдань поглибленого рівня, загалом 34 завдання(Програма ЗНО з математики, 2019).

Варто зауважити, що тільки результати тесту профільного рівня будуть використовуватись під час вступу до закладів вищої освіти України.

Сертифікаційна робота з математики складається з таких типів завдань (Характеристика сертифікаційної роботи, 2022):

1) завдання з вибором однієї правильної відповіді;

Завдання такого типу складається з умови та чотирьох або п'ятьох варіантів відповідей, серед яких лише один правильний.

2) завдання на встановлення відповідності;

Завдання містить умову та два стовпчики інформації, які позначені цифрами (ліворуч) і буквами (праворуч). Зміст завдання полягає у встановлені відповідності (утворення «логічних пар») між інформацією, яка позначена цифрами та буквами.

3) завдання відкритої форми з короткою відповіддю;

– структуроване завдання складається з умови, яка розділена на дві частини й передбачає розв'язування задачі.

– неструктуроване завдання має умову та передбачає розв'язування задачі.

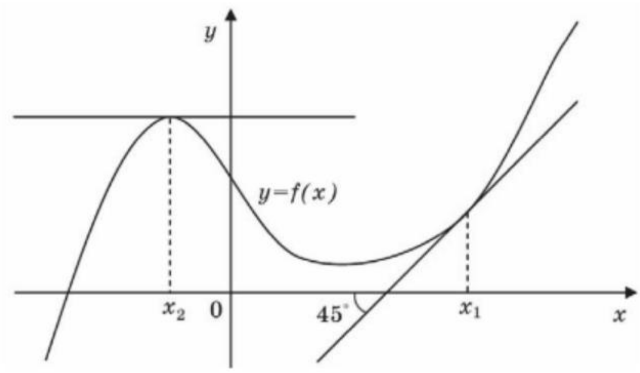
4) завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю.

Завдання має умову та передбачає розв'язування задачі з записом усіх етапів виконання.

1. Застосування похідної

Приклад 2.33. На рисунку зображений графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 та x_2. Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть $f'(x_1) + f'(x_2)$ (ЗНО, 2007).

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



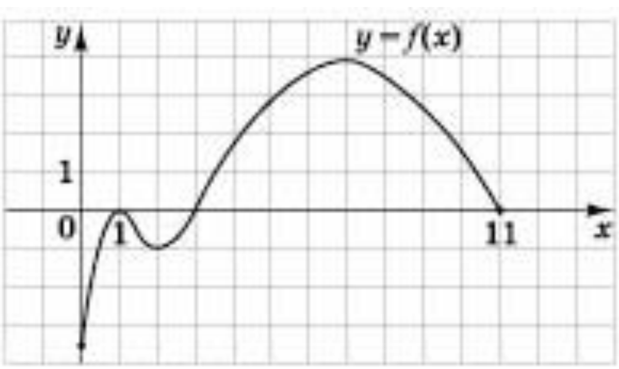
Розв'язання

Геометричний зміст похідної полягає в наступному: похідна функції у точці дорівнює тангенсу кута, який утворює дотична, проведена через цю точку до кривої, з додатним напрямком осі x. Детально розглянувши рисунок, можемо отримати такий результат:

$$f'(x_1) + f'(x_2) = tg45° + tg0° = 1 + 0 = 1.$$

Відповідь. 1.

Приклад 2.34. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[0; 11]$ та диференційованої на проміжку $(0; 11)$. Установіть відповідність між числом (1-4) та проміжком (А-Д), якому належить це число (ЗНО, 2013).



Число		Проміжок	
1	$f(8)$	А	$(-\infty; -2]$
2	$f'(7)$	Б	$(-2; -0{,}5]$
3	найменше значення функції $y = f(x)$ на її області визначення	В	$(-0{,}5; 2]$
4	$\int_1^3 f(x)dx$	Г	$(2; 4]$
		Д	$(4; +\infty)$

Розв'язання

1) Як видно з графіка, $f(8) = 3{,}5; 3{,}5 \in (2; 4]$.

2) $x = 7$ є точкою максимуму функції $f(x)$, тому $f'(7) = 0, 0 \in (-0{,}5; 2]$.

3) Найменше значення функції $f(x)$ на її області визначення дорівнює $-3{,}5$; $-3{,}5 \in (-\infty; -2]$.

4) $\int_1^3 f(x)dx$ чисельно рівний площі фігури, яка знаходиться між графіком $f(x)$ та віссю Ox на проміжку $[1; 3]$, взятій з протилежним знаком. Оскільки, ця площа менша 2 кв. од., але більша 0,5 кв. од., тому $\int_1^3 f(x)dx \in (-2; -0{,}5]$.

Відповідь. 1-Г, 2-В, 3-А, 4-Б.

Приклад 2.35. Знайдіть похідну функції $y = e^{-2x}$ (ЗНО, 2013).

А	Б	В	Г	Д
$y' = e^{-2x}$	$y' = -2e^{-2x}$	$y' = -2e^{-2x-1}$	$y' = 2e^{-2x}$	$y' = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

Розв'язання.

$y' = (e^{-2x})' = e^{-2x} \cdot (-2x)' = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$.

Відповідь. $y' = -2e^{-2x}$.

Приклад 2.36. Функція $f(x)$ в точці $x_0 = 5$ має похідну $f'(5) = -1$. Обчисліть значення похідної функції $g(x) = f(x) \cdot x$ в точці x_0, якщо $f(5) = 3$ (ЗНО, 2012).

А	Б	В	Г	Д
$g'(5) = -2$	$g'(5) = -1$	$g'(5) = -5$	$g'(5) = 14$	$g'(5) = 15$

Розв'язання.

$$g'(x) = f'(x) \cdot x + f(x) \cdot (x)' = f'(x) \cdot x + f(x);$$

$$g'(x_0) = g'(5) = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) = -1 \cdot 5 + 3 = -5 + 3 = -2.$$

Відповідь. $g'(5) = -2$.

Приклад 2.37. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де sвимірюється в метрах, а t у секундах . Знайдіть значення t (у секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 76 м/с (ЗНО, 2011).

Розв'язання

Миттєва швидкість – це похідна функції $s(t)$:

$$v(t) = s'(t) = (2t^2 + 3t)' = 4t + 3 = 76;$$

$$4t = 76 - 3; 4t = 73; t = 18{,}28.$$

Відповідь. $18{,}28$.

Приклад 2.38. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = 4cosx + 5$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (ЗНО, 2010).

А	Б	В	Г	Д
-4	-1	1	4	5

Розв'язання

$$f'(x) = (4cosx + 5)' = (4cosx)' + 5' = 4(cosx)' + 0 = 4 \cdot (-sinx) = -4sinx;$$

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4sin\frac{\pi}{2} = -4 \cdot 1 = -4.$$

Відповідь. -4.

Приклад 2.39. Функція $f(x)$ має в точці x_0 похідну $f'(x_0) = -4$. Визначте значення похідної функції $g(x) = 2 \cdot f(x) + 7x - 3$ в точці x_0 (ЗНО, 2012).

А	Б	В	Г	Д
15	12	-1	-4	-8

Розв’язання

$$g'(x) = (2 \cdot f(x) + 7x - 3)'; g'(x) = \left(2 \cdot f(x)\right)' + (7x)' - 3';$$

$$g'(x) = 2 \cdot f'(x) + 7;$$

$$g'(x_0) = 2 \cdot f'(x_0) + 7; g'(-4) = 2 \cdot (-4) + 7 = -8 + 7 = -1.$$

Відповідь. -1.

Приклад 2.40. Знайти значення похідної функції $f(x) = 2x^3 - 5$ в точці $x_0 = -1$ (ЗНО, 2010).

А	Б	В	Г	Д
-11	-7	1	3	6

Розв’язання

$$f'(x) = (2x^3 - 5)';\ f'(x) = (2x^3)' - 5';\ f'(x) = 6x^2;$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 = 6.$$

Відповідь. 6.

Приклад 2.41. Знайти похідну функції $y = x^7 lnx$ (Пробне ЗНО, 2014)

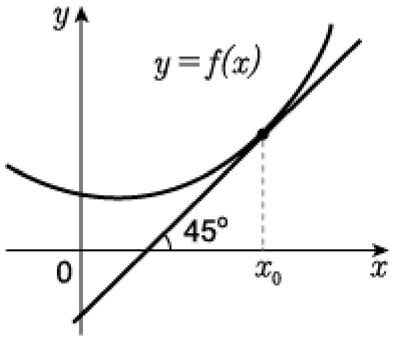
А	$y' = 7x^5$
Б	$y' = 7x^6 lnx + x^6$
В	$y' = x^6 lnx + x^6$
Г	$y' = 7x^6 lnx$
Д	$y' = 7x lnx + x^6$

Розв’язання

$$y' = (x^7 lnx)' = (x^7)' lnx + x^7 (lnx)' = 7x^6 \cdot lnx + x^7 \cdot \frac{1}{x} = 7x^6 lnx + x^6.$$

Відповідь. $7x^6 lnx + x^6$.

Приклад 2.42. Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0, нахилена до додатного напряму осі Ox від кутом $45°$ (див. рисунок). Знайдіть $f'(x_0)$ (Пробне ЗНО, 2013).



А	Б	В	Г	Д
-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Розв’язання

Похідна дорівнює тангенсу кута нахилу $tg\alpha = f'(x_0)$.

$$tg\alpha = tg45° = 1;\ f'(x_0) = 1.$$

Відповідь. 1.

Приклад 2.43. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (Пробне ЗНО, 2011).

А	$f'(x) = \frac{1+3x^2}{(x^2+1)^2}$
Б	$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
В	$f'(x) = \frac{1}{2x}$
Г	$f'(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$
Д	$f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

Розв’язання

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Відповідь. $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Приклад 2.44. Укажіть похідну функції $y = -\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14$ (ЗНО, 2018)

А	$y' = -\dfrac{x^7}{6} + x^5 - 14x$
Б	$y' = -7x^5 + 20x^3 - 14$
В	$y' = -7x^5 + 20x^3$
Г	$y' = -7x^7 + 25x^5$
Д	$y' = -\dfrac{7}{36}x^5 + \dfrac{5}{4}x^3$

Розв'язання

$$y' = \left(-\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14\right)' = (-\frac{7}{6}x^6)' + (5x^4)' - 14' =$$

$$= -\frac{7}{6} \cdot 6x^5 + 5 \cdot 4x^3 = -7x^5 + 20x^3.$$

Відповідь. $-7x^5 + 20x^3$

Приклад 2.45. Укажіть похідну функції $f(x) = x(x^3 + 1)$ (ЗНО, 2018)

А	$f'(x) = 4x^3 + 1$
Б	$f'(x) = 4x^3$
В	$f'(x) = 3x^2$
Г	$f'(x) = 3x^2 + 1$
Д	$f'(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^2}{2}$

Розв'язання

$$f'(x) = \left(x(x^3 + 1)\right)' = x'(x^3 + 1) + x(x^3 + 1)' =$$

$$= 1 \cdot (x^3 + 1) + x \cdot ((x^3)' + 1') = x^3 + 1 + x \cdot 2x^2 = x^3 + 1 + 3x^3 = 4x^3 + 1.$$

Відповідь. $4x^3 + 1$.

Приклад 2.46. Укажіть похідну функції $y = sinx - cosx + 1$ (ЗНО, 2017).

А	$y' = cosx + sinx + 1$
Б	$y' = cosx - sinx$
В	$y' = -cosx - sinx + x$

Г	$y' = -cosx - sinx$
Д	$y' = cosx + sinx$

Розв'язання

$$y' = (sinx - cosx + 1)' = (sinx)' - (cosx)' + 1' =$$
$$= cosx - (-sinx) + 0 = cosx + sinx.$$

Відповідь. $cosx + sinx$.

Приклад 2.47. Якщо $y = (4x - 1)^3$, то $y' =$ (ЗНО,2015).

А	Б	В	Г	Д
$3(4x-1)^2$	$3(4x-1)$	$\frac{(4x-1)^4}{16}$	$12(4x-1)^2$	$\frac{3}{4}(4x-1)^2$

Розв'язання

$$y' = ((4x-1)^3)' = 3(4x-1)^2 \cdot (4x-1)' = 3(4x-1)^2 \cdot 4 = 12(4x-1)^2.$$

Відповідь. $12(4x-1)^2$.

Приклад 2.48. Укажіть рівняння прямої, яка може бути дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$, якщо $f'(2) = -3$ (ЗНО, 2015).

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{3}{2}x + 1$	$y = 3x - 2$	$y = 2x + 3$	$y = \frac{3}{2}x - 1$	$y = -3x + 2$

Розв'язання

$f'(x_0)$ – кутовий коефіцієнт в рівнянні дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0.

За умовою: $f'(x_0) = f'(2) = -3$.

Тому рівняння $y = -3x + 2$ може бути рівнянням дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $x_0 = 2$.

Відповідь. $y = -3x + 2$

Приклад 2.49. Укажіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, якщо $f(x) = 5, f'(x_0) = 2$ (ЗНО, 2014).

А	$y = 1 + 2(x - 5)$
Б	$y = 5 + 2(x + 1)$
В	$y = 2 + 5(x - 1)$
Г	$y = 2 + 5(x + 1)$
Д	$y = 5 + 2(x - 1)$

Розв’язання

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 має вигляд:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Підставивши відповідні значення, одержимо $y = 5 + 2(x - 1) + 5$.

Відповідь. $y = 5 + 2(x - 1)$

Приклад 2.50. Знайдіть похідну функції $y = x^4 + 3cosx$ (ЗНО, 2009).

А	$y' = 4x^3 + 3sinx$
Б	$y' = 4x - 3sinx$
В	$y' = 4x^3 - 3sinx$
Г	$y' = \frac{x^5}{5} + 3sinx$
Д	$y' = x^3 - 3sinx$

Розв’язання

$$y' = (x^4 + 3cosx)' = (x^4)' + (3cosx)' = 4x^3 - 3sinx.$$

Відповідь. $4x^3 - 3sinx$.

Приклад 2.51. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (час t вимірюється у секундах, шлях s – у метрах). Визначте прискорення його руху у момент $t = 10$ с (ЗНО, 2008).

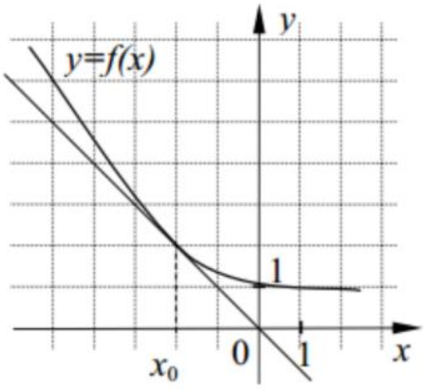
А	Б	В	Г	Д
162 м/с^2	60 м/с^2	36 м/с^2	20 м/с^2	10 м/с^2

Розв'язання

Швидкість тіла $s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = 2t^2 - 4t + 4$, отже, прискорення тіла $s''(t) = (2t^2 - 4t + 4)' = 4t - 4$. У момент часу $t = 10$ с прискорення дорівнює $s''(10) = 4 \cdot 10 - 4 = 36$ м/с^2.

Відповідь. 36 м/с^2.

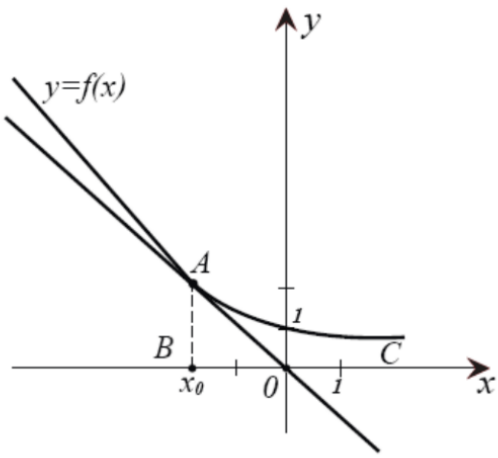
Приклад 2.52. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього у точці з абсцисою x_0. Знайдіть значення $f'(x)$ (ЗНО, 2006).



А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	2

Розв'язання

Похідна функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ в точці з абсцисою x_0, до додатного напрямку осі Ox.



Тобто

$$f'(x_0) = tg\angle AOC = tg(180° - \angle AOB) = -tg\angle AOB = -\frac{AB}{BO} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Відповідь. -1.

Приклад 2.53. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 4t^2 + 9t + 8$ (шлях s вимірюється в метрах, час t – у секундах). Визначте швидкість (у м/с) цієї точки в момент часу $t = 4$ с (ЗНО, 2016).

Розв’язання

$$v(t) = s'(t) = (4t^2 + 9t + 8)' = 8t + 9;$$

$$v(4) = 8 \cdot 4 + 9 = 32 + 9 = 41 \text{ м/с}.$$

Відповідь. 41 м/с.

Приклад 2.54. Обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{19 - 5x}$ в точці $x_0 = 3$ (ЗНО, 2016).

Розв’язання

$$y' = \left(\sqrt{19 - 5x}\right)' = \frac{(19 - 5x)'}{2\sqrt{19 - 5x}} = \frac{-5}{2\sqrt{19 - 5x}};$$

$$y'(3) = \frac{-5}{2\sqrt{19 - 5 \cdot 3}} = \frac{-5}{2\sqrt{19 - 15}} = \frac{-5}{2\sqrt{4}} = \frac{-5}{2 \cdot 2} = -\frac{5}{4} = -1{,}25.$$

Відповідь. $-1{,}25$.

Приклад 2.55. До графіка функції $y = -0{,}5x^2$ проведено дотичну у точці з абсцисою $x_0 = -3$. Обчисліть тангенс кута нахилу цієї дотичної до додатного напряму осі абсцис (Пробне ЗНО, 2008).

А	Б	В	Г	Д
$-4{,}5$	-3	0	3	$4{,}5$

Розв’язання

Тангенс кута нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис дорівнює значенню похідної функції, до графіка якої проведено дотичну, в точці дотику. За умовою функція $y = -0{,}5x^2$.Точка дотику $x_0 = -3$.

Знайдемо похідну заданої функції при $x = -3$.

$$y' = (-0{,}5x^2)' = -0{,}5 \cdot 2x = -x;$$

$$y'(-3) = -(-3) = 3.$$

Отже, шуканий тангенс кут нахилу дотичної дорівнює 3.

Відповідь. 3.

Приклад 2.56. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = 4xlnx + 5$ при $x = e$.

Розв’язання

$$f'(x) = (4xlnx + 5)' = (4xlnx)' + 5' = 4(xlnx)' + 0 =$$
$$= 4(x'lnx + x(lnx)') = 4\left(1lnx + x\frac{1}{x}\right) = 4(lnx + 1);$$
$$f'(e) = 4(lne + 1) = 4(1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8.$$

Відповідь. 8.

Приклад 2.57. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$ у точці $x_0 = -2$ (Пробне ЗНО, 2010).

Розв’язання

$$f'(x) = (\sqrt{10 - 3x})' = \frac{(10 - 3x)'}{2\sqrt{10 - 3x}} = \frac{-3}{2\sqrt{10 - 3x}} = -\frac{3}{2\sqrt{10 - 3x}};$$
$$f'(x_0) = f'(-2) = -\frac{3}{2\sqrt{10 - 3 \cdot (-2)}} = -\frac{3}{2\sqrt{10 + 6}} = -\frac{3}{2\sqrt{16}} = -\frac{3}{2 \cdot 4} =$$
$$= -\frac{3}{8} = -0{,}375.$$

Відповідь. $-0{,}375$.

Приклад 2.58. Укажіть похідну функції $f(x) = \frac{2x-3}{x}$ (Пробне ЗНО, 2021)

А	Б	В	Г	Д
$f' = \frac{3}{x^2}$	$f' = \frac{3}{x}$	$f' = \frac{4x - 3}{x^2}$	$f' = -\frac{3}{x^2}$	$f' = 2$

Розв’язання

$$f'(x) = (\frac{2x - 3}{x})' = \frac{(2x - 3)'x - x'(2x - 3)}{x^2} = \frac{2x - (2x - 3)}{x^2} =$$
$$= \frac{2x - 2x + 3}{x^2} = \frac{3}{x^2}.$$

Відповідь. $\frac{3}{x^2}$.

Приклад 2.59. Укажіть похідну функції $f(x) = 4x^3 + tgx$ (ЗНО, 2021).

А	$f'(x) = 12x^2 + \frac{1}{tgx}$
Б	$f'(x) = 12x - \frac{1}{tgx}$
В	$f'(x) = x^4 + \frac{1}{cos^2x}$
Г	$f'(x) = 12x^2 + \frac{1}{cos^2x}$
Д	$f'(x) = x^4 - \frac{1}{tgx}$

Розв'язання

$$f'(x) = (4x^3 + tgx)' = (4x^3)' + (tgx)' = 4 \cdot 3x^2 + \frac{1}{cos^2x} = 12x^2 + \frac{1}{cos^2x}.$$

Відповідь. $12x^2 + \frac{1}{cos^2x}$.

2. Застосування інтеграла

Приклад 2.60. Знайдіть первісну функції $f(x) = 2x + 2$, графік якої проходить через точку з координатами $(1; 4)$ (ЗНО, 2007).

А	$F(x) = x^2 + 2x$
Б	$F(x) = x^2 + 2x + 1$
В	$F(x) = x^2 + 2x + 2$
Г	$F(x) = x^2 + 2x - 4$
Д	$F(x) = x^2 + 2x - 23$

Розв'язання

$$F(x) = \int (2x + 2)dx$$

Використаємо формулу для знаходження невизначеного інтеграла від суми двох функцій: $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$. Маємо:

$$F(x) = \int (2x + 2)dx = \int 2xdx + \int 2dx = \frac{2x^2}{2} + 2x + C = x^2 + 2x + C.$$

Підставивши координати точки $(1; 4)$, отримаємо:

$$4 = 1^2 + 2 \cdot 1 + \text{C}, 4 = 3 + \text{C}, \text{C} = 4 - 3 = 1.$$

Таким чином, первісна, що задовольняє вказану умову буде мати вигляд: $F(x) = x^2 + 2x + 1$.

Відповідь. $F(x) = x^2 + 2x + 1$.

Приклад 2.61. Яка з наведених функцій є первісною для функції $f(x) = x^{-4}$ (ЗНО, 2021).

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = -\frac{1}{5x^5}$	$F(x) = -\frac{3}{x^5}$	$F(x) = -\frac{4}{x^5}$	$F(x) = -\frac{5}{x^5}$	$F(x) = -\frac{1}{3x^3}$

Розв'язання

$$F(x) = \frac{x^{-4+1}}{-3} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

При $C = 0$, маємо $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$.

Відповідь. $-\frac{1}{3x^3}$

Приклад 2.62. Функція $F(x) = 10x^5 - 4$ є первісної функції $f(x)$. Укажіть функцію $G(x)$, яка є також первісною функції $f(x)$ (ЗНО, 2020).

А	$G(x) = 10x^5 + 7$
Б	$G(x) = 2x^6 - 4x$
В	$G(x) = 50x^6$
Г	$G(x) = 50x^4$
Д	$G(x) = x^5 - 4$

Розв'язання

Так як $F(x)$ та $G(x)$ є первісними функції $f(x)$, то вони можуть відрізнятися лише константою (число без x). Із запропонованих підходить лише $G(x) = 10x^5 + 7$.

Відповідь. $10x^5 + 7$.

Приклад 2.63. Функція $F(x) = 5x^4 - 1$ є первісної функції $f(x)$. Укажіть функцію $G(x)$, яка є також первісною функції $f(x)$ (ЗНО, 2020).

А	$G(x) = x^5 - x$
Б	$G(x) = 5x^4 - x$
В	$G(x) = 20x^3$
Г	$G(x) = 5x^4 + 1$
Д	$G(x) = x^4 - 5$

Розв’язання

Так як $F(x)$ та $G(x)$ є первісними функції $f(x)$, то вони можуть відрізнятися лише константою (число без x). Із запропонованих підходить лише $G(x) = 5x^4 + 1$.

Відповідь. $5x^4 + 1$.

Приклад 2.64. Обчисліть інтеграл $\int_0^2 (f(x) + 6)dx$, якщо $\int_0^2 f(x)dx = 8$ (ЗНО, 2017).

А	Б	В	Г	Д
20	14	2	28	48

Розв’язання

$$\int_0^2 (f(x) + 6)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 6dx = 8 + 6x \Big|_0^2 =$$

$$= 8 + 6(2 - 0) = 8 + 12 = 20.$$

Відповідь. 20.

Приклад 2.65. Використовуючи формулу Ньютона – Лейбніца, обчисліть $\int_1^2 6x^2dx$ (ЗНО, 2016).

А	Б	В	Г	Д
42	22	18	14	12

Розв’язання

$$\int_1^2 6x^2dx = 6\int_1^2 x^2dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = 2x^3\Big|_1^2 = 2 \cdot 8 - 2 \cdot 1 = 16 - 2 = 14.$$

Відповідь. 14.

Приклад 2.66. Функція $F(x) = 6\sin(2x) - 1$ є первісною функції $f(x)$. Знайдіть функцію $f(x)$ (ЗНО, 2011).

А	$f(x) = -12\cos(2x)$
Б	$f(x) = 6\cos(2x)$
В	$f(x) = 12\cos(2x)$
Г	$f(x) = -3\cos(2x) - x + C$
Д	$f(x) = -6\cos(2x) - x + C$

Розв'язання

$$f(x) = F'(x) = (6\sin(2x) - 1)' = 2 \cdot 6\cos(2x) = 12\cos(2x).$$

Відповідь. $12\cos(2x)$.

Приклад 2.67. Знайдіть первісну функції $f(x) = 2x + 2$, графік якої проходить через точку з координатами $(1; 4)$ (ЗНО, 2007).

А	$F(x) = x^2 + 2x$
Б	$F(x) = x^2 + 2x + 1$
В	$F(x) = x^2 + 2x + 2$
Г	$F(x) = x^2 + 2x - 4$
Д	$F(x) = x^2 + 2x - 23$

Розв'язання

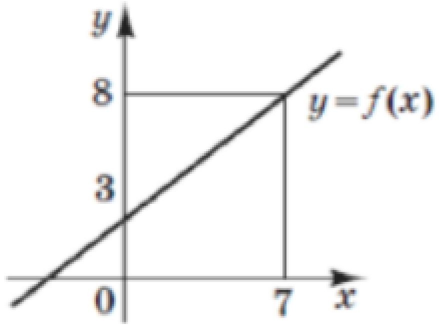
$$F(x) = \int (2x + 2)dx = \frac{2x^2}{2} + 2x + C = x^2 + 2x + C.$$

Підставивши координати точки $(1; 4)$, отримаємо: $4 = 1^2 + 2 \cdot 1 + C$, $4 = 3 + C,\ C = 1$.

Отже, первісна що задовольняє вказаній умові, має вигляд $F(x) = x^2 + 2x + 1$.

Відповідь. $x^2 + 2x + 1$.

Приклад 2.68. Обчисліть $\int_0^7 f(x)dx$ використовуючи зображений на рисунку графік лінійної функції $y = f(x)$ (ЗНО, 2012).



Розв’язання

$\int_0^7 f(x)dx$ чисельно рівний площі фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox та прямими, рівняння яких $x = 7, x = 0$.

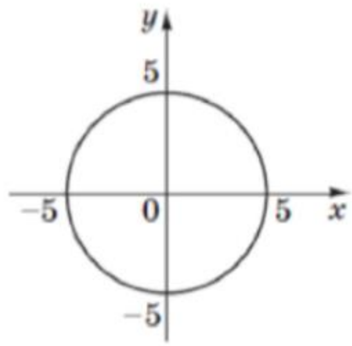
Ця фігура — трапеція з вершинами в точках $(0;0), (0;3), (7;8), (7;0)$. Тобто, основи трапеції завдовжки 3 і 8, а висота 7.

Тоді площа трапеції:

$$S_{\text{трапеції}} = \frac{3+8}{2} \cdot 7 = 5{,}5 \cdot 7 = 38{,}5\ (\text{см})^2$$

Відповідь. 38,5.

Приклад 2.69. Обчисліть $\frac{1}{\pi}\int_{-5}^{0} \sqrt{25 - x^2}dx$ 1, використовуючи рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$, зображеного на рисунку (ЗНО, 2012).



Розв’язання

$\frac{1}{\pi}\int_{-5}^{0} \sqrt{25 - x^2}dx$ чисельно рівний чверті площі круга, обмеженого колом, рівняння якого $x^2 + y^2 = 25$.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-5}^{0} \sqrt{25 - x^2}dx = \frac{1}{4} \cdot S_{\text{круга}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25\pi}{4}.$$

Тоді

$$\frac{1}{\pi}\int_{-5}^{0}\sqrt{25-x^2}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{25\pi}{4}=\frac{25}{4}=6{,}25.$$

Відповідь. 6,25.

Приклад 2.70. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^{1}(x^2-4x)dx$ (ЗНО, 2010).

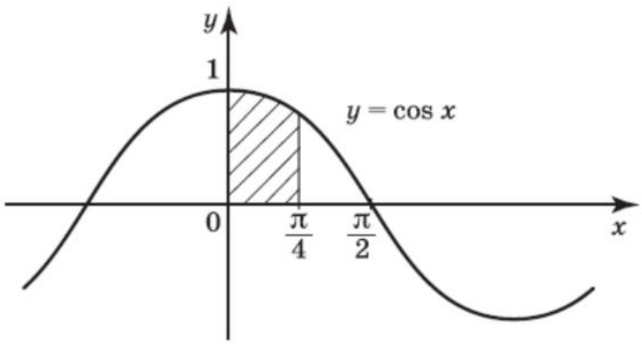
Розв'язання

$$\int_{-2}^{1}(x^2-4x)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}-2\right)-\left(-\frac{8}{3}-8\right)=\frac{1}{3}-2+\frac{8}{3}+8=6+\frac{9}{3}=6+3=9.$$

Відповідь. 9.

Приклад 2.71. Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку (Пробне ЗНО, 2008).



А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

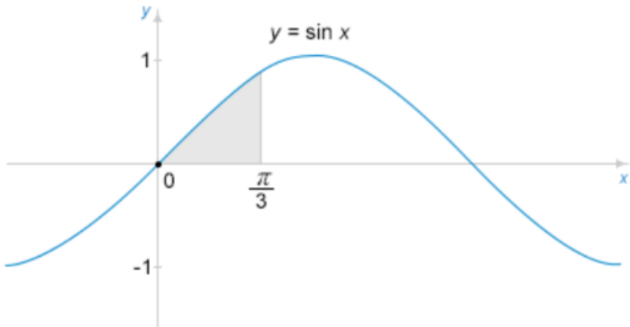
Розв'язання

Шукана площа криволінійної трапеції

$$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}cosxdx=sinx\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=sin\frac{\pi}{4}-sin0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 2.72. Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку (Пробне ЗНО, 2010).



А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Розв’язання

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}} sinxdx=-cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-cosx\frac{\pi}{3}+cos0=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

Приклад 2.73. Обчисліть $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 5ctgx\cdot sinxdx$ (Пробне ЗНО, 2014).

Розв’язання

Оскільки $5ctgx\cdot sinx=\frac{5cosx}{sinx}\cdot sinx=5cosx$ при $x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, то

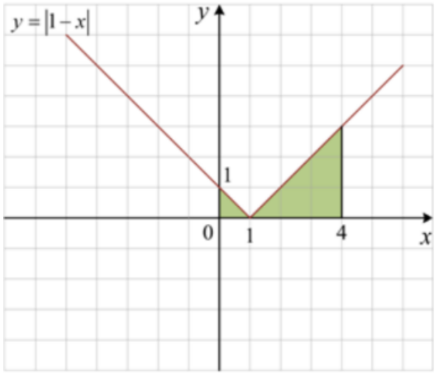
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 5ctgx\cdot sinxdx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 5cosxdx=5sinx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=5sin\frac{\pi}{2}-5sin\frac{\pi}{6}=5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

Відповідь. 2,5.

Приклад 2.74. Обчисліть значення інтеграла $\int_0^4|1-x|dx$ (Пробне ЗНО, 2015).

Розв’язання

Обчислимо інтеграл як площу фігури, обмеженої віссю абсцис, графіком функції $y=|1-x|$ і прямими $x=0, x=4$. Як можна побачити з рисунка, фігура складається із двох рівнобедрених прямокутних трикутників з катетами 1 і 3 відповідно.



Отже, значення інтегралу дорівнює

$$\frac{1\cdot 1}{2}+\frac{3\cdot 3}{2}=5.$$

Відповідь. 5.

Приклад 2.75. Укажіть первісну $F(x)$ для функції $f(x)=\frac{1}{2x}$ (Пробне ЗНО, 2016).

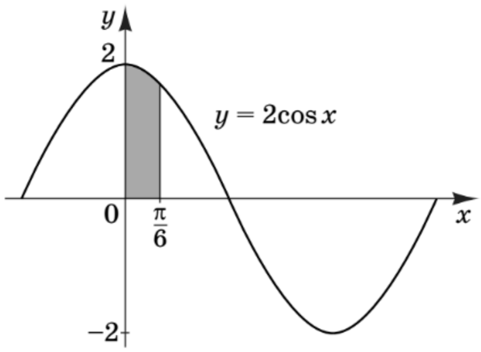
А	Б	В	Г	Д
$F(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=\frac{1}{2}ln\|x\|$	$F(x)=-\frac{1}{2x^2}$	$F(x)=2ln\|x\|$	$F(x)=ln\|2x\|$

Розв'язання

Функція $F(x)=ln|x|$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{x}$. Тому функція $F(x)=\frac{1}{2}ln|x|$ первісною для функції $f(x)=\frac{1}{2x}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}ln|x|$.

Приклад 2.76. Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку (Пробне ЗНО, 2018).



А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

Розв'язання

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2cosxdx = 2sinx \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2sin\frac{\pi}{6} - 2sin0 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Відповідь. 2.

Приклад 2.77. Функція $F(x) = 2x^3 - 1$ є первісною функції $f(x)$. Укажіть функцію $f(x)$ (Пробне ЗНО, 2020).

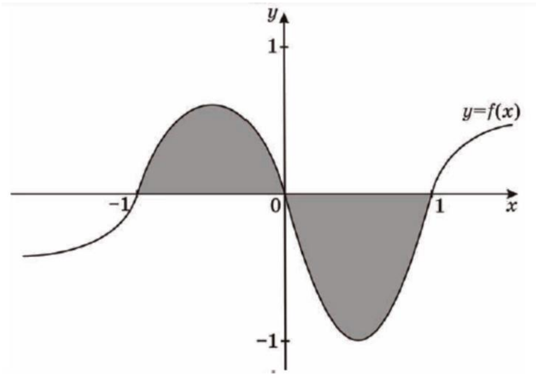
А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 6x^2 - 1$	$f(x) = 6x - 1$	$f(x) = 4x^2$	$f(x) = \frac{x^4}{2} - x$	$f(x) = 6x^2$

Розв'язання

$$F'(x) = (2x^3 - 1)' = (2x^3)' - 1' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

Відповідь. $6x^2$.

Приклад 2.78. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури (ЗНО, 2008, 2014).



А	$\int_{-1}^{1} f(x)dx$
Б	$\int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$
В	$\int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{0} f(x)dx$
Г	$2\int_{-1}^{0} f(x)dx$
Д	$2\int_{0}^{1} f(x)dx$

Розв'язання

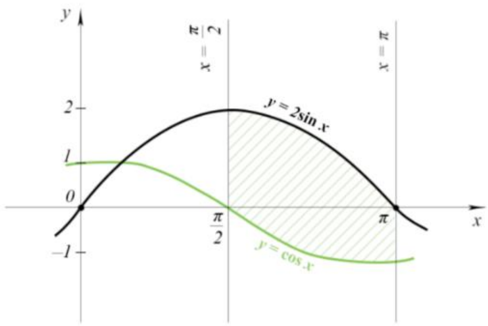
Очевидно, що функція не є непарною, отже шукана площа

$$S = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} (-(f(x))dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx.$$

Відповідь. $\int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$.

Приклад 2.79. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = 2sinx$, $y = cosx$, $x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$ (ЗНО, 2010).

Розв'язання

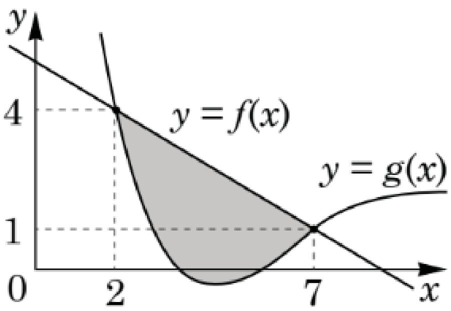


$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2sinxdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}cosxdx=-2cosx\left|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-sinx\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-2cos\pi+2cos\frac{\pi}{2}-$$

$$-sin\pi+sin\frac{\pi}{2}=2+0-0+1=3.$$

Відповідь. 3.

Приклад 2.80. На рисунку зображено графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури (ЗНО, 2016, 2019).



А	$S=\int_{1}^{4}\big(f(x)-g(x)\big)dx$
Б	$S=\int_{1}^{4}\big(g(x)-f(x)\big)dx$
В	$S=\int_{2}^{4}\big(f(x)+g(x)\big)dx$
Г	$S=\int_{2}^{4}\big(f(x)-g(x)\big)dx$

Д	$S = \int_2^4 \big(g(x) - f(x)\big)dx$

Розв'язання

$$S_{\text{фігури}} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_2^4 \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

Відповідь. $\int_2^4 \big(f(x) - g(x)\big)dx$.

Приклад 2.81. На рисунку зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{x}{2}$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури (ЗНО, 2019).

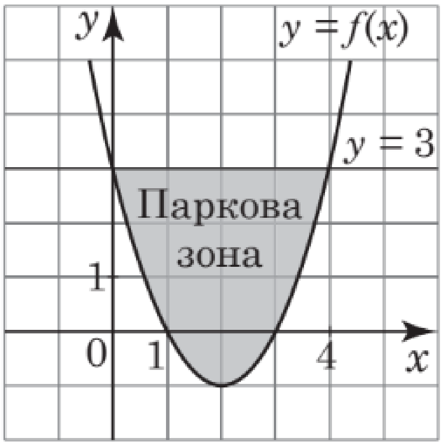
А	$\int_0^2 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx$
Б	$\int_0^2 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right) dx$
В	$\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx$
Г	$\int_0^4 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right) dx$
Д	$\int_0^4 \left(\frac{x}{2} + \sqrt{x}\right) dx$

Розв'язання

$$S_{\text{фігури}} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx.$$

Відповідь. $\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx$.

Приклад 2.82. У прямокутній системі координат на площині зображено план паркової зони, що має форму фігури, обмеженої графіками функцій $y = f(x)$ і $y = 3$ (див. рисунок). Укажіть формулу для обчислення площі S цієї фігури (ЗНО, 2012).



А	$S = \int_{-1}^{3} (f(x) - 3)dx$
Б	$S = \int_{-1}^{3} \left(3 - f(x)\right)dx$
В	$S = \int_{0}^{4} (f(x) + 3)dx$
Г	$S = \int_{0}^{4} (f(x) - 3)dx$
Д	$S = \int_{0}^{4} \left(3 - f(x)\right)dx$

Розв'язання

$$S_{\text{фігури}} = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_0^4 \left(3 - f(x)\right)dx.$$

Відповідь. $\int_0^4 \left(3 - f(x)\right)dx$.

2.4. Використання дидактичних карток на уроках математики при вивченні теми «Інтеграл та його застосування»

На теренах сучасної шкільної освіти актуальним залишається питання Зовнішнього Незалежного Оцінювання. Кожен учень бажає успішно скласти майбутній іспит, і тому потребує якісної та ретельної підготовки. В свою чергу, педагог прагне реалізувати та розкрити всі можливості дитини, застосовуючи та використовуючи найефективніші способи та методи.

Аналізуючи результати ЗНО з математики останніх років чітко прослідковується спад отриманих балів серед загальної кількості учасників. Тому, одним із важливих завдань педагога – систематизувати навчальний матеріал та подати в доступному вигляді для учнів.

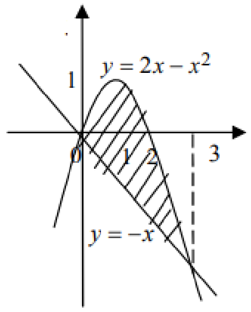
В епоху розквіту новітніх технологій, ефективним та актуальним залишається дидактичний матеріал. Особливої популярності набувають дидактичні картки, які можна використовувати на уроці для індивідуальної, парної та групової роботи, також зручно реалізовувати самостійну роботу учня (особливо під час дистанційного навчання). Такі картки мають чітку структуру і поєднують в собі короткий конспект матеріалу (зразок виконання або теоретичні відомості) та практичне завдання. В залежності від виду роботи компоненти карток можуть варіюватися. Наприклад, на уроці систематизації та узагальнення знань в 11 класі при вивчення теми «Інтеграл та його застосування» зручно використати дидактичну картку, основні елементи якої наведено на зразку (див.табл.2.4.1.).

Оскільки дидактична картка містить короткий конспект матеріалу або зразок запропонованого завдання, то учень опрацювавши його, може самостійно відтворити алгоритм і відшукати розв'язок. Коли учні працюють самостійно, вони зазвичай краще аналізують та вивчають зміст опрацьованого матеріалу, більше зосереджують свою увагу на сутність завдання, ніж при поясненнях учителя. Тому знання, навички та уміння, які набувають школярі в процесі самостійної роботи, як правило є міцними і ґрунтовними. В процесі добре організованої самостійної діяльності в учнів значно розвивається наполегливість, креативність (Авраменко, 2009).

Таблиця 2.4.1

Найменування елемента	**Основна частина**	**Приклад застосування**
Таблиця основних інтегралів	1. $\int 0\,dx = C$ 2. $\int dx = x + C$ 3. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1$ 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ 5. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$ 6. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$ 7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$ 8. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$ 9. $\int e^x\,dx = e^x + C$ 10. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int 2\,dx = C$ $\int 5\,dx = 5x + C$ $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$ $\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$
Формула Ньютона-Лейбніца	*Якщо функція* $f(x)$ *визначена та неперервна на відрізку* [a; b] і $F(x)$ - *будь-яка первісна для функції* $f(x)$ *на відрізку* [a; b], *то* $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$	<u>Завдання</u>: обчислити визначені інтеграли: $$\int_{-3}^{2} x^4 dx \text{ та } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x} dx \ [4].$$ <u>Розв'язання:</u> $$\int_{-3}^{2} x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Bigg\|_{-3}^{2} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$ $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x} dx = tg\,x\|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\ \frac{\pi}{4} - tg\ 0 = 1 - 0 = 0$$
Застосування визначеного інтегралу при знаходженні площі криволінійної трапеції	*Площа криволінійної трапеції, що обмежена прямими* $x = a$ і $x = b$, *віссю* Ox *та графіком неперервної і невід'ємної функції* $y = f(x)$ *на відрізку* [a; b]*:* $$S = \int_a^b f(x)dx$$	<u>Завдання:</u> обчислити площу фігури обмеженої лініями: $y = -x^2 + 2x$ і $y = -x$ [3, с. 45].

Продовження таблиці 2.4.1

	Площа криволінійної трапеції, що обмежена двома вертикальними лініями $x = a$ і $x = b$, віссю Ox *та графіками двох неперервних і невід'ємних функцій* $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ *на відрізку* [a; b], *причому* $f_1(x) \geq f_2(x)$ *:* $$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$ *Якщо плоска фігура лежить під віссю* Ox, *то дана формула набуде вигляду:* $$S = -\int_a^b f(x)dx$$	Розв'язання: побудуємо фігуру, площу якої необхідно знайти та відшукаємо абсциси точок перетину.  В результаті отримуємо $x = 0$ і $x = 3$. Тоді, значення $f_2(x) = -x^2 + 2x$ та $f_1(x) = -x$ підставимо у формулу: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$, знайдемо площу шуканої фігури: $$S = \int_0^3 \left(-x^2 + 2x - (-x)\right)dx$$ $$= \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx =$$ $$= -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} \text{ (кв. од)}$$ Відповідь: $S = \frac{9}{2}$ (кв. од).

Завдання сучасного вчителя – не тільки дати учням певну базу знань зі свого предмету, але й розвивати та стимулювати їх інтерес до навчання. Виникнення зацікавленості учнів до вивчення математики у значної кількості учнів також залежить від методики її викладання та від того, яким чином побудована навчальна робота. Значну роль відіграють дидактичні матеріали, адже розвиваючі і пізнавальні картки сприяють розвитку у дітей логічного мислення, просторового уявлення, інтуїції, фантазії, конструктивних здібностей, волі, пам'яті та уваги (Дидактичні картки як один із видів самостійної роботи, 2022).

Всесвітня мережа Інтернет надає доступ до значної кількості різноманітних ресурсів та сервісів для створення даного матеріалу. Зручним, ефективним та відкритим є онлайн платформа Canva. Дана платформа є безкоштовною для користувачів, а також вчителі мають змогу подати заявку на отримання безкоштовної pro-версії. Запропонований ресурс зручний тим, що містить безліч готових естетично оформлених шаблонів для всіх видів робіт.

У закладах загальної освіти в класах навчаються учні з різним рівнем математичної підготовки - це вказує на те, що вчитель повинен бути свідомим і повинен усвідомлювати важливість кожної дитини та її навчання протягом усього курсу. Використання дидактичних карток дає змогу реалізувати індивідуальний підхід до кожного учня та робить навчальний процес більш цікавим, ефективним. Також, підвищує якість навчання і сприяє формуванню ключових компетентностей.

Висновки до другого розділу

У другому розділі нами було досліджено методику застосування похідної та інтеграла. На конкретних прикладах представлено різні способи використання похідної до розв'язування задач. Таким чином, зважаючи на задачі, що пропонують автори діючих підручників, тема похідної широко використовується при розв'язуванні задач з фізики, хімії, біології та економіки.

В цьому ж розділі, на конкретних прикладах, представлено різні способи використання інтеграла до розв'язування задач. Як бачимо, що ця тема широко використовується при знаходженні, зокрема, площ фігур та об'ємів тіл обертання та ін.

Досліджено місце похідних та інтегралів в програмі зовнішнього незалежного оцінювання. Зокрема розглянуто приклади завдань чотирьох рівнів: розв'язування завдань з готовою відповіддю, на встановлення відповідності, з короткою та розгорнутою відповідями. Аналіз ЗНО показав, що теми «Похідна» та «Інтеграл» є актуальними, пропонуються завдання щороку і в різних рівнях складності.

В даному розділі нами наголошено на важливості використання дидактичних карток на уроках математики та представлено приклад дидактичних карток при вивченні однієї з досліджуваної теми.

ВИСНОВКИ

Поняття похідних є фундаментальним поняттям у математичному аналізі, яке допомагає вивчати процеси та явища в природничих, соціальних та економічних науках. Інтеграл також є одним із найважливіших понять у математиці, він виник через необхідність знайти функції за їхніми похідними, з одного боку (наприклад, знайти функцію, яка представляє швидкість шляху, який рухається точка в цій точці) , а з іншого боку – вимірювання площі, об'єму, довжини дуги, роботи сили за певний проміжок часу тощо.

Розділи алгебри та початки аналізу «Похідні та їх застосування» та «Інтеграл та його застосування» займають важливе місце в шкільному курсі математики, головним чином через їх велике прикладне значення, особливо детальне їх вивчення потребує у профільних класах та у класах поглибленого вивчення.

Нами визначено, що наочність відіграє важливу в процесі навчання математики. Практика показує, що в алгебрі доречно користуватися дидактичними картками та алгоритмами дій при виконанні певних завдань. Провівши анкетування серед вчителів Полянського ліцею Малинської сільської ради Рівненського району Рівненської області, можна зробити висновок, що вчителі часто використовують дидактичні картки на уроках алгебри, в яких коротко представлені систематизовані теоретичні знання та паралельно до них приклади їх застосування, де чітко поданий алгоритм їх розв’язання. Відповіді вчителів вказують на те, що дітям до вподоби ці картки, адже теорія подана доступно, коротко і систематизовано, що з легкістю дозволяє розв’язувати задачі середнього рівня та певні задачі достатнього рівня і застосовувати їх при виконанні домашньої роботи, що служить допомогою при організації самостійної роботи учня. Крім того постійне споглядання на матеріал дидактичної картки тренується зорова пам'ять, що дозволяє запам’ятовувати теоретичний матеріал.

Систематизовані матеріали дослідження можуть бути використані вчителями в освітній діяльні та студентами педагогічних ЗВО під час опрацювання питань з методики вивчення математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авраменко О.В., Лутченко Л.І., Ретунська В.В., Ріжняк Р.Я., Шлянчак С.О. Інноваційні та сучасні педагогічні технології навчання математики: Посібник для спецкурсу. Кіровоград: КДПУ, 2009. 200 с.
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Київ: Вища шк., 1989. 367 с.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
4. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу. рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.: іл.
5. Вишенський В. А., Ієрестюк М. О., Самойленко А. М. Конкурсні задачі з математики: навч. посіб. Київ: Вища школа, 2001. 432 с.
6. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. [Чинний від 23.11.2011]. Вид. офіц. Київ, 2011. 50 с.
7. Дидактичні картки як один із видів самостійної роботи : веб-сайт. URL: http://www.rusnauka.com/15_APSN_2010/Pedagogica (дата звернення: 04.06.2022).
8. Збірник задач з математики з розв’язками / Геворкян Ю. Л. та ін. Харків: Прапор, 1999. 448 с.
9. Зовнішнє незалежно оцінювання 2007 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/296/ (дата звернення 16.11.2022)
10. Зовнішнє незалежно оцінювання 2008 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/292/ (дата звернення 16.11.2022)
11. Зовнішнє незалежно оцінювання 2009 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/151/ (дата звернення 16.11.2022)
12. Зовнішнє незалежно оцінювання 2010 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/123/ (дата звернення 16.11.2022)
13. Зовнішнє незалежно оцінювання 2011 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/122/ (дата звернення 16.11.2022)

14. Зовнішнє незалежно оцінювання 2012 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/138/ (дата звернення 16.11.2022)

15. Зовнішнє незалежно оцінювання 2013 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/1/ (дата звернення 16.11.2022)

16. Зовнішнє незалежно оцінювання 2014 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/144/ (дата звернення 16.11.2022)

17. Зовнішнє незалежно оцінювання 2015 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/191/ (дата звернення 16.11.2022)

18. Зовнішнє незалежно оцінювання 2016 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/191/ (дата звернення 16.11.2022)

19. Зовнішнє незалежно оцінювання 2017 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/346/ (дата звернення 16.11.2022)

20. Зовнішнє незалежно оцінювання 2019 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/346/ (дата звернення 16.11.2022)

21. Зовнішнє незалежно оцінювання 2018 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/298/ (дата звернення 16.11.2022)

22. Зовнішнє незалежно оцінювання 2020 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/400/ (дата звернення 16.11.2022)

23. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і потачки аналізу: (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. заг серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 488 с.: іл.

24. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і потачки аналізу: (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг серед. освіти. Київ: Генеза, 2019. 416 с.: іл.

25. Істер О. С., Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти Київ: Генеза, 2018. 384 с.: іл.

26. Капіносов А. М. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО та ДПА. Профільний рівень і рівень стандарту. Тернопіль: Підручники і посібники, 2020. 480 с.

27. Крамор В. С. Повторюємо і систематизуємо шкільний курс алгебри і початків аналізу. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2012. 412 с.: іл.

28. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: поглиблений рівень. Харків: Гімназія, 2018. 416 с.

29. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: поглиблений рівень. Харків: Гімназія, 2019. 304 с.

30. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.

31. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень. Харків: Гімназія, 2019. 352 с.

32. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.

33. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: https://cutt.ly/5TXyf8j (дата звернення: 10.11. 2022).

34. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://cutt.ly/sTXylyI (дата звернення: 10.11. 2022).

35. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: https://cutt.ly/lTXycZZ (дата звернення: 10.11. 2022).

36. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. Харків: Ранок, 2010. 416 с.

37. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. Харків: Ранок, 2019. 240 с.

38. Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Ранок, 2018. 328 с.

39. Постанова «Про затвердження Державного стандарту початкової освіти». [Чинний від 21.02.2018]. Вид. офіц. Київ, 2018. 35 с.

40. Пробне зовнішнє незалежно оцінювання 2008 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/142/ (дата звернення 16.11.2022)

41. Пробне зовнішнє незалежно оцінювання 2010 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/126/ (дата звернення 16.11.2022).

42. Пробне зовнішнє незалежно оцінювання 2011 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/128/ (дата звернення 16.11.2022)

43. Пробне зовнішнє незалежно оцінювання 2013 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/126/ (дата звернення 16.11.2022).

44. Пробне зовнішнє незалежно оцінювання 2014 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/125/ (дата звернення 16.11.2022).

45. Пробне зовнішнє незалежно оцінювання 2021 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/142/ (дата звернення 16.11.2022)

46. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти: наказ Міністерства освіти і науки України від 26 червня 2018. №696. URL: https://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/Math.pdf (дата звернення: 16.11.2022)

47. Слєпкань З. І Методика навчання математики. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

48. Стельмах Н.Г., Генсіцька-Антонюк Н. О. Використання дидактичних карток на уроках математики при вивченні теми «Інтеграл та його застосування». *Наука, освіта, суспільство очима молодих*: тези доп. всеукр. наук.-практ. конф. (м. Рівне, 17 травня 2022 р.). Рівне, 2022. С. 75-76.

49. Тверезовська Н. Т. Методологія педагогічного дослідження: навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури. 2013. 440 с

50. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики. Навчальний посібник; за ред. М. Й. Ядренка. Київ: Техніка, 1999. 504 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Похідних елементарних функцій

$C' = 0, x' = 1, (kx + b)' = k;$

$(x^n)' = nx^{n-1};$

$(e^x)' = e^x;$

$(a^x)' = a^x lna;$

$(lnx)' = \frac{1}{x};$

$(lgx)' = \frac{1}{x} lge;$

$(\log_a x)' = \frac{1}{xlna};$

$(sinx)' = cosx; (cosx)' = -sinx;$

$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x};$

$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x};$

$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2};$

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2};$

$(x^x)' = x^x(1 + lnx).$

Додаток Б

Похідних складених функцій

$(ku+b)' = k \cdot u';$

$(u^n)' = nu^{n-1}u';$

$(e^u)' = e^u \cdot u';$

$(a^u)' = a^u lnau';$

$(lnu)' = \frac{1}{u}u';$

$(lgu)' = \frac{1}{u}lgeu';$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{ulna};$

$(sinu)' = cosu \cdot u';$

$(cosu)' = -sinu \cdot u';$

$(tgu)' = \frac{u'}{cos^2u};$

$(ctgu)' = -\frac{u'}{sin^2u};$

$(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$

$(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$

$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2};$

$(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2};$

$(u^u)' = u^u(1+lnu)u'.$

Додаток В

Таблиця первісних

Таблиця 1. Первісні

Функція $f(x)$	Первісні $F(x) + c$
0	C
1	$x + C$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\| + C$
$sinx$	$-cosx + C$
$cosx$	$sinx + C$
$\frac{1}{cos^2 x}$	$tgx + c$
$\frac{1}{sin^2 x}$	$-ctgx + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{lna} + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctgx + C$ $-arcctgx + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx + C$ $-arccosx + C$

Додаток Г

Невизначені інтеграли

$$\int 0dx = C;$$

$$\int dx = x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C;$$

$$\int sinxdx = -cosx + C;$$

$$\int cosxdx = sinx + C;$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C;$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C, \\ -arcctgx + C; \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} arcsinx + C, \\ -arccosx + C. \end{cases}$$

Додаток Д

АНКЕТА

Шановні вчителі, Ви приймаєте участь в опитуванні, метою якого є дослідження того, що одним із засобів формування певних компетентностей, зазначених в Державному стандарті є розв’язування задач з використанням різноманітних наочностей, в тому числі і дидактичних карток.

Просимо Вас відповісти на всі запитання анкети. Результати опитування будуть використані для аналізу перспектив використання альтернативних методик, а саме використання запропонованих методик вивчення інтеграла і похідної та використання дидактичних карток на уроках алгебри.

Якими засобами наочності ви користуєтесь при вивченні похідної та інтеграла? (перерахуйте)
Чи доводилось вам працювати з дидактичними картками (Якщо не користувалися, то напишіть причину?)
Якщо ви використовували дидактичні картки, то вкажіть основні частини з яких вони складалися?
Яку мету ви переслідували, користуючись зазначеними картками?
Опишіть реакцію учнів на використання таких дидактичних карток на уроках алгебри.
Чи варто систематично використовувати подібні наочності при вивченні нового матеріалу? Чому?
Виберіть, на якому рівні вивчення краще використовувати картки, що поєднують теоретичні відомості і практичні завдання, на Вашу думку?

А) у класах, де математика вивчається на рівні стандарту; Б) у класах з профільним або поглибленим рівнями; В) у всіх класах з різним рівнем вивчення математики.
Чи є можливість використання дидактичних карток в реаліях сьогодення (дистанційне, асинхронне навчання)? Яка ваша думка,
Ваші побажання щодо покращення якості уроку в сучасних умовах.