Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Формування знань, вмінь і навиків школярів при вивченні взаємного розміщення прямих та площин у просторі

Виконала: студентка II курсу магістратури,
групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Демянчук Валерія Ігорівна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри математики з методикою викладання
Генсіцька-Антонюк Наталія Олександрівна

Рецензент: канд. пед. наук, проф. кафедри математики з методикою викладання РДГУ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: канд. техн. наук, доц. кафедри вищої математики РДГУ
Присяжнюк Ігор Михайлович

Рівне – 2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Розвиток просторової уяви учнів, зорового сприйняття є одним із пріоритетних завдань навчання геометрії як інтелектуального розвитку особистості. Ще з малечку людина вивчає світ навколо себе, вчиться розрізняти предмети та їх елементарні властивості, оцінювати її розміри та відстані до них. Таким чином, людина не опосередковано, спостерігаючи і досліджуючи навколишні предмети, що є геометричними фігурами, вивчає геометрію протягом усього життя. Вивчення взаємного розміщення прямих та площин у просторі закладає основу вимірювань у стереометрії. Орієнтування людини у просторі або просторова орієнтація, а саме, що стосується геометрії, це: розпізнавання предметів як геометричні фігури, їх форми та розмір, відстаней між ними і т.д. – це запорука успішної соціально-побутової адаптації.

На сьогодні навчання математики є компетентнісно-орієнтованим. Формуванню ключових компетентностей та їх наскрізних ліній передує сформованість предметної компетентності. Скажімо вивчення геометричних фігур на площині, в просторі та їх властивостей і відношення дає змогу сформувати такі компетентності як:

- Розпізнавати проблеми довкілля та будувати математичну модель (компетентності у природничих науках і технологіях);
- Визначати достатність даних та вміння доводити твердження (інформаційно-цифрова компетентність);
- Вміння аналізувати та оцінювати свою діяльність (уміння вчитися впродовж життя);
- Розв’язувати життєві проблеми, шукаючи оптимальні способи розв’язання (ініціативність і підприємливість);

- Зображати фігури, створювати об'ємно-просторові композиції архітектури, живопису, здійснювати необхідні розрахунки (обізнаність та самовираження у сфері культури).

Важливість теми окреслена в програмі з математики 10 класу, її значення обумовлюють отримані компетенції. Сформованість навиків розв'язувати задачі різними способами, в тому числі, розв'язуючи з допомогою будь-яких прикладних програмних математичних засобів, розширює можливість бачити і виділяти прикладні задачі, що стосуються конкретної теми, а також переносити досвід розв'язування задач на інші теми.

Формування вмінь і навиків дозволяє з високою якістю, довівши до автоматизму, розв'язувати поставлені задачі, а також дозволяє розв'язувати нестандартні задачі із зміною умови чи ситуації. Уміння, у свою чергу, обов'язково спираються на знання.

На сьогодні можна відмітити різні методики з формування знань, вмінь та навиків – це і сама організація навчання вчителем, так і використання сучасних новітніх методів та технологій навчання.

Основами теоретико-педагогічного дослідження стали праці таких вчених: Кушніра І., Неліна Є., Мерзляка А., Істера О., Ушакова Р., Бєляніної О., Роєвої Т., Хроленко Н. Методичні засади Слєпкань З., Бевз Г., Філон Л., Якимовича В. дозволили узагальнити і систематизувати методологію вивчення тем стереометрії. Узагальнені висновки психологів Павелківа Р., Сергеєнкової О., Мілеряна Є. щодо знань, вмінь і навиків дали можливість виділити методи їх формування. Праці Борейко О., Тесленко І. дозволили зробити висновки щодо формування просторової уяви на уроках геометрії. Розвідки вчених Жалдака М., Вітюка О., щодо застосування математичних програмних засобів на уроках математики, склали основу методики застосування програми GRAN 3D на уроках стереометрії.

Таким чином, обрана нами тема **«Формування знань, вмінь і навиків школярів при вивченні взаємного розміщення прямих та площин у просторі»** є досить актуальною та важливою.

Метою роботи є узагальнити і систематизувати знання щодо прямих та площин у просторі, та дослідити особливості формування знань, вмінь, навиків учнів при розв'язуванні задач.

Об'єкт дослідження – процес навчання стереометрії.

Предмет дослідження – прямі та площини в просторі.

Зважаючи на мету дослідження, були поставлені наступні **завдання**:

1. Опрацювати і систематизувати психолого-педагогічну, методичну літературу з обраної теми.
2. Узагальнити і систематизувати теоретичні та методичні основи з теми дослідження.
3. Проаналізувати актуальність теми у програмі шкільного курсу геометрії та зовнішнього незалежного оцінювання.
4. Дослідити можливість застосування математичних програмних засобів при розв'язуванні задач з стереометрії.
5. Представити методику формування знань, вмінь та навиків розв'язування задач з стереометрії з використанням програмних засобів GRAN 3D, Geogebra.

Для виконання поставлених задач нами були використанні такі **методи дослідження**:

- *Теоретичні та аналітичні*: систематизація психолого-педагогічних концепцій з теми дослідження; вивчення, аналіз і узагальнення теоретико-методичних основ;
- *Емпіричні:* вивчення педагогічної документації, спостереження, порівняльний аналіз навчальних програм, підручників.

Гіпотеза дослідження. В даному дослідженні ми виходили з того, що основою формування вмінь і навиків з теми «Взаємне розміщення прямих та площин у просторі» є достатні теоретичні знання, і задля розвитку просторової уяви, полегшення обрахунків і розв'язування більш складних задач необхідно включати в процес навчання динамічні стереометричні рисунки, використовуючи математичні програмні засоби.

Під час дослідження були використані як паперові так і електронні **матеріали**: нормативні документи, підручники та посібники, періодичні видання, дисертаційні роботи, таблиці.

Теоретичне значення дослідження полягає в наступному:

1) узагальнені і систематизовані теоретичні матеріали з теми «Взаємне розміщення прямих та площин у просторі»;
2) здійснений аналіз методичної літератури;
3) розглянута методика застосування програм GRAN 3D, Geogebra на уроках з стереометрії.

Практичне значення. Результати дослідження можуть бути використані студентами спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) при вивченні дисциплін «Елементарна математика», «Методика викладання математики», а також вчителями математики загальноосвітніх навчальних закладів.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідження були представлені у матеріалах XV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Наука, освіта, суспільство: очима молодих» (Рівне, РДГУ, 2022 р.) та заслуховувались на засіданні кафедри математики з методикою викладання РДГУ.

Структура та обсяг дослідження. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатку, та розкривається на 75 сторінках.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕМИ «ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ»

1.1. Аксіоми стереометрії

Розглянемо основні фігури в просторі, аксіоми стереометрії та наслідки з них.

Точка, пряма і площина – основні фігури стереометрії[30].

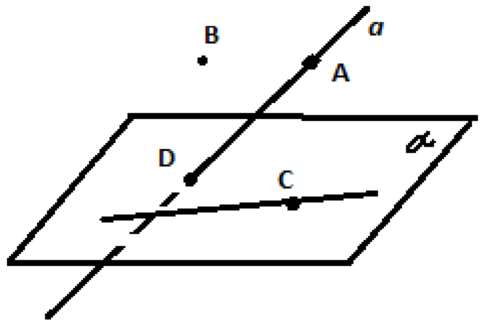
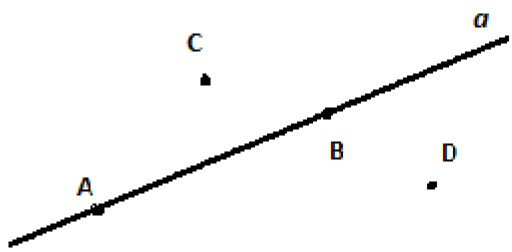


Рис.1.1.

Аксіоми стереометрії описують основні властивості основних фігур. Аксіоми стереометрії включають в себе аксіоми ***планіметрії***, що описують властивості точки та прямої. Розглянемо основні з них[33]:

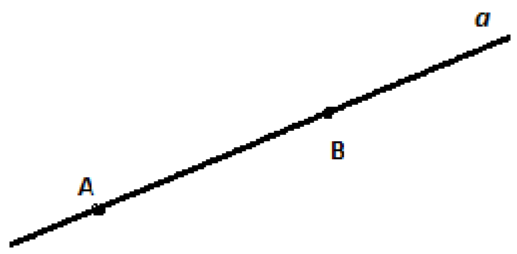
$А_{п.1.}$ Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій і точки, що їй не належать.



$$A \in a, B \in a, C \notin a, D \notin a$$

Рис.2.1.

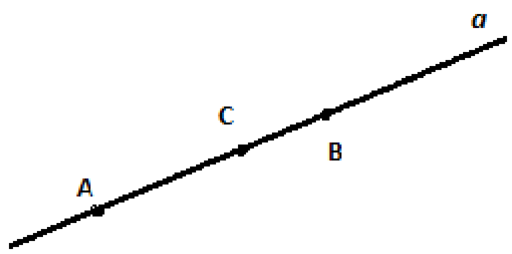
$А_{п.2.}$ Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.



$A \in a, B \in a$

Рис.3.1.

А$_{п.3.}$Серед трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

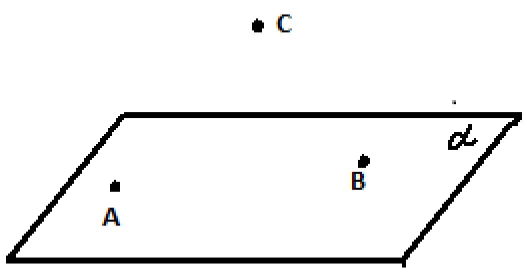


$A \in a, B \in a, C \in a, AB = AC + CB$

Рис.4.1.

Аксіоми ***стереометрії*** описують властивості площин [30]:

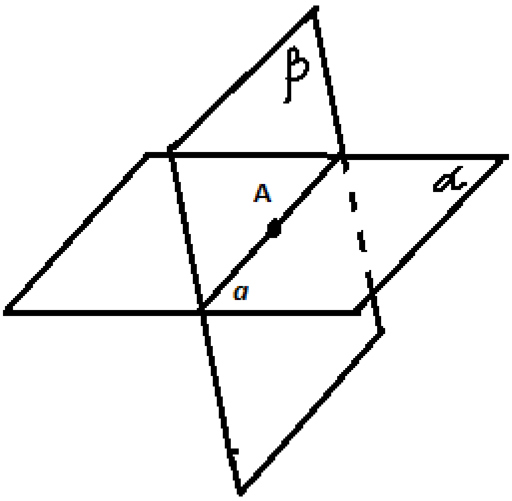
А$_{с.1.}$Яка б не була б площина, існують точки, що належать цій площині і точки, що їй не належать.



$A \in \alpha, B \in \alpha, C \notin \alpha$

Рис.5.1.

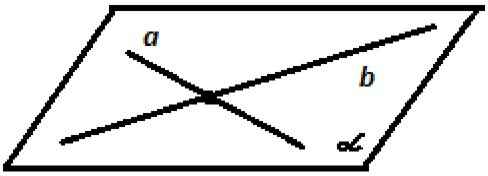
А$_{с.2.}$ Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що містить цю точку.



$\alpha \cap \beta, a \in \alpha, a \in \beta$

Рис.6.1.

$A_{c.3.}$ Якщо дві різні прямі перетинаються, то через них можна провести площину і тільки одну.

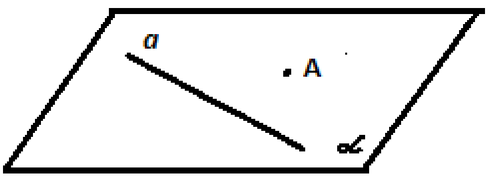


$a \cap b, a \in \alpha, b \in \alpha, \alpha -$ єдина

Рис.7.1.

Розглянемо наслідки, що випливають з аксіом стереометрії [30]:

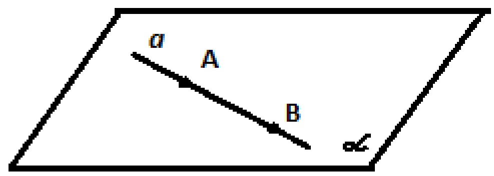
$H_{1.}$ Через пряму і точку, що їй не належить, можна провести площину і тільки одну.



$A \notin a, a \in \alpha, A \in \alpha, \alpha -$ єдина

Рис.8.1.

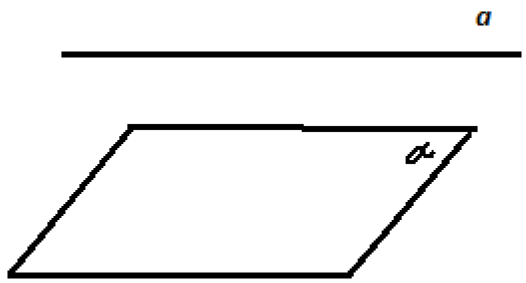
$H_{2.}$ Якщо дві точки належать площині, то і пряма, що проходить через ці точки теж належить цій площині.



$A \in \alpha, B \in \alpha,$ то $a \in \alpha$

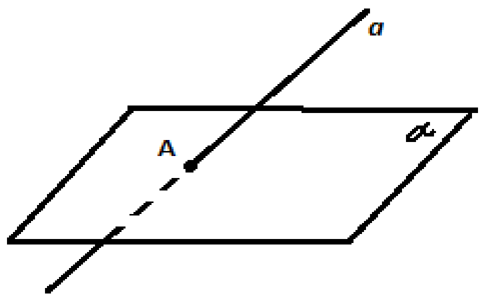
Рис.9.1.

Н$_3$. Площина і пряма, що їй не належить, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці.



$a \notin \alpha, a \,\overline{\cap}\, \alpha$

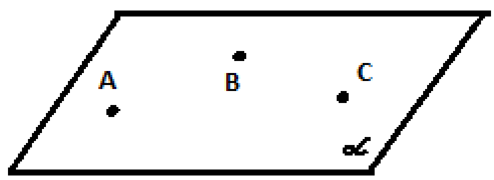
Рис.10.1.



$a \notin \alpha, a \cap \alpha, A \in a, A \in \alpha, A -$ єдина

Рис.11.1.

Н$_4$. Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і тільки одну.



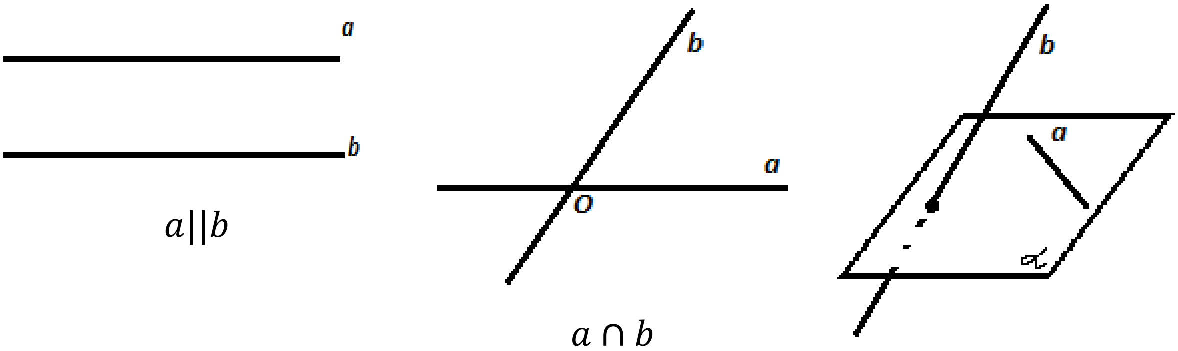
$A, B, C \notin a;\ A, B, C \in \alpha;\ \alpha -$ єдина

Рис.12.1.

1.2. Взаємне розміщення прямих у просторі

У просторі прямі або паралельні, або перетинаються, або мимобіжні (див. рис. 13.1)

Паралельні Перетинаються Мимобіжні



$a||b$ $a \cap b$ $a \in \alpha, b \cap \alpha, a \nparallel b, a \overline{\cap} b$

Рис.13.1.

Розглянемо кожне взаємне розміщення прямих

1. *Паралельність у просторі*

Дві прямі, які не перетинаються і не є мимобіжними називаються паралельними.

Розглянемо ознаки паралельності прямих у просторі. У просторі дійсні ті ж ознаки що на площині, а саме:

$О_1$. Якщо, або внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох прямих третьою у сумі дорівнюють 180°, або внутрішні різносторонні рівні, або ж відповідні кути рівні, то прямі паралельні

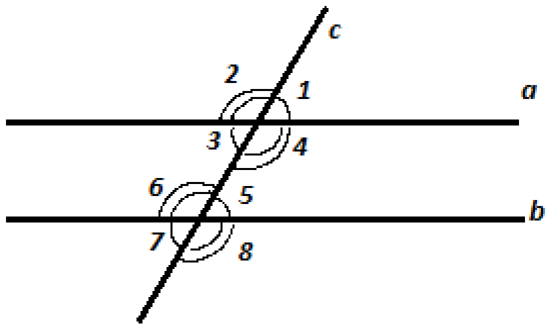


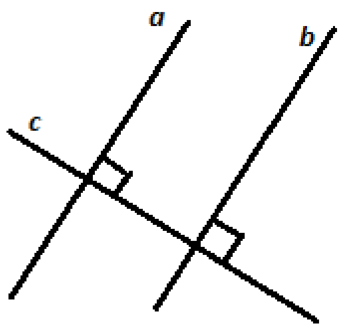
Рис.14.1

$\angle 1 = \angle 5, \angle 4 = \angle 8, \angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7$ (як відповідні);

$\angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5$ (як внутрішні різносторонні);

$\angle 4 + \angle 5 = 180°, \angle 3 + \angle 6 = 180°$ (як внутрішні односторонні).

$О_2$. Дві прямі, перпендикулярні третій, паралельні між собою[15].

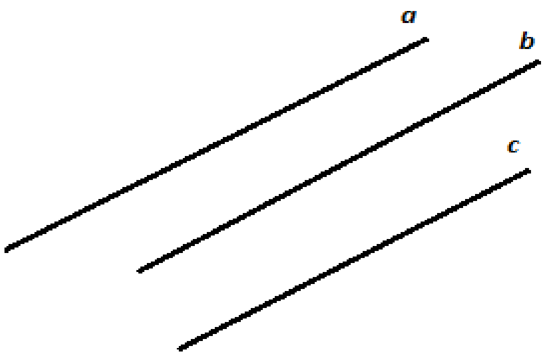


$$(a \perp c, b \perp c) \Rightarrow (a \parallel b)$$

Рис. 15.1

Доведення. За умовою, утворені прямі кути є відповідними, тоді згідно попередньої ознаки $a \parallel b$. ■

O_3. Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою[15].



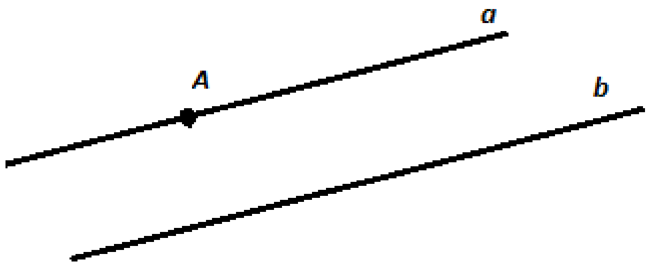
$$(a \parallel c, b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel b)$$

Рис. 16.1

Доведення. Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що $a \nparallel b$. Тоді прямі a та b перетинаються, отже, лише одна з цих прямих може бути паралельна прямій c, а це суперечить умові теореми. Таким чином, $a \parallel b$. ■

Розглянемо властивість паралельних прямих [30].

B_1. Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну.



$A \notin b, A \in a, a$ – єдина

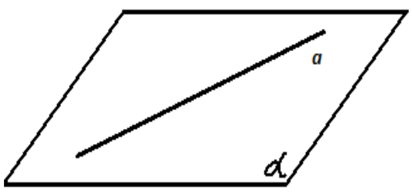
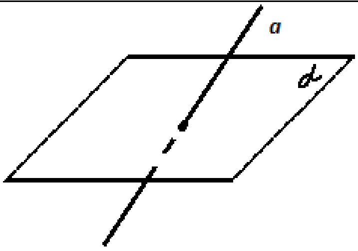
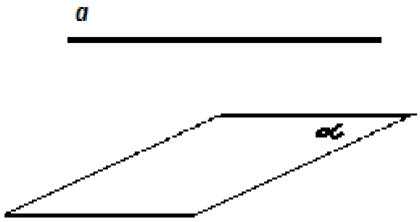
Рис. 17.1

1.3. Взаємне розміщення прямої та площини

Розглянемо взаємне розміщення прямої та площини (див. табл.1).

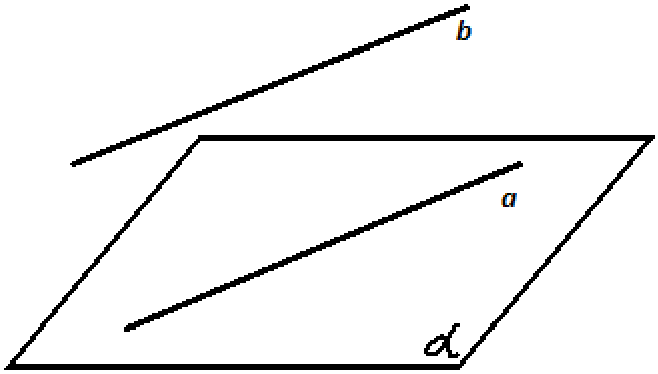
Взаємне розміщення прямої та площини

Таблиця 1

		
Пряма належить площині	Пряма перетинає площину	Пряма не належить площині і її не перетинає

Розглянемо ознаки та властивості паралельності прямої та площини [10].

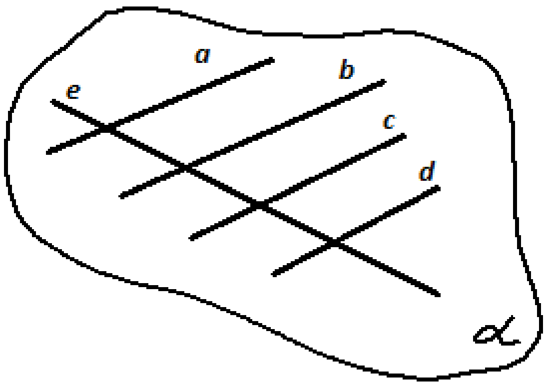
O_1. Якщо пряма, яка не належить площині паралельна будь-якій прямій цієї площини, то вона паралельна і до самої лощини.



$(b \notin \alpha, a \in \alpha, b \parallel a) \Rightarrow (b \parallel \alpha)$

Рис. 18.1

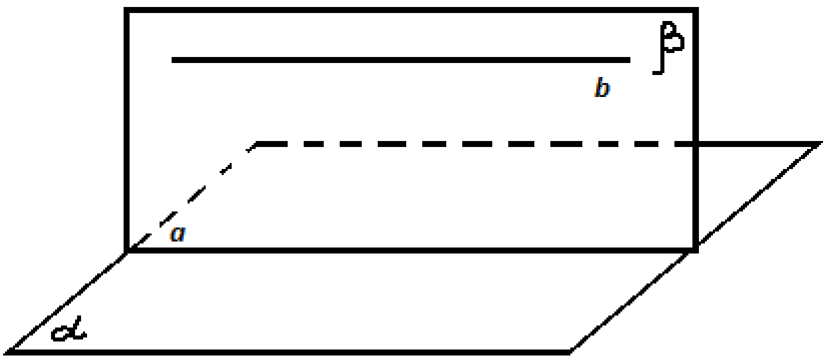
В$_1$. Всі паралельні між собою прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині



$$(a \parallel b \parallel c \parallel d, a \cap e, b \cap e, c \cap e, d \cap e) \Rightarrow (a, b, c, d, e \in \alpha)$$

Рис. 19.1

В$_2$. Якщо через пряму, що паралельна площині, проходить інша площина, що перетинає дану, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.



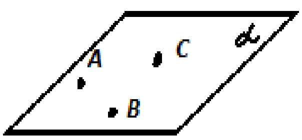
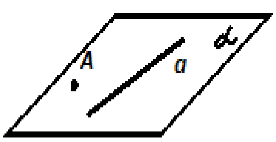
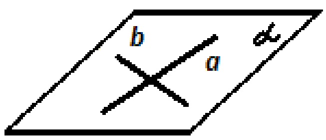
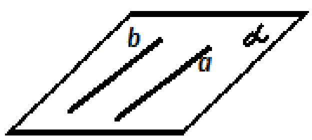
$$(b \notin \alpha, b \parallel \alpha, \beta \cap \alpha, a \in \alpha, a \in \beta) \Rightarrow (a \parallel b)$$

Рис. 20.1

Таким чином, можна виділити чотири способи задання площини (див.табл.2).

Способи задання площини

Таблиця 2 [30]

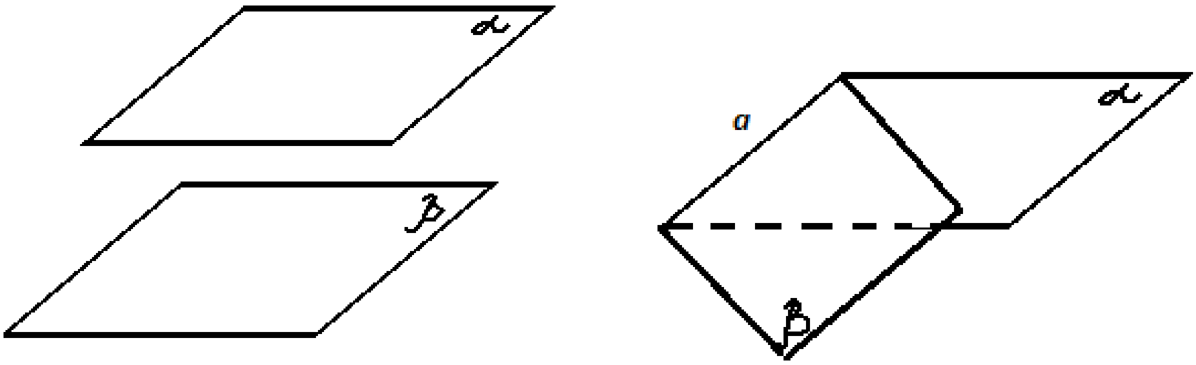
			

Через три точки, що не лежать на одній прямій	Через пряму і точку, що не належить цій прямій	Через дві прямі, що перетинаються	Через дві паралельні прямі

1.4. Взаємне розміщення площин

Розглянемо взаємне розміщення площин (рис. 21.1) [11].

Паралельні Перетинаються

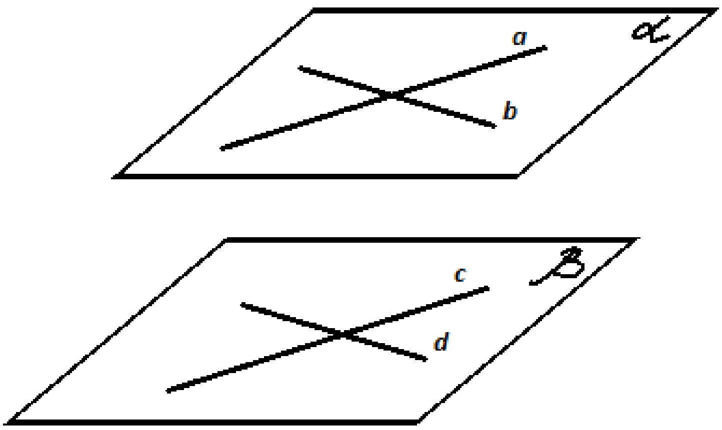


$\alpha \parallel \beta$ $\alpha \cap \beta, a$– пряма перетину

Рис. 21.1

Розглянемо ознаку паралельності площин (рис.22.1) [11].

O_1. Якщо дві прямі, що перетинаються однієї площини, відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, другої площини, то ці площини паралельні.



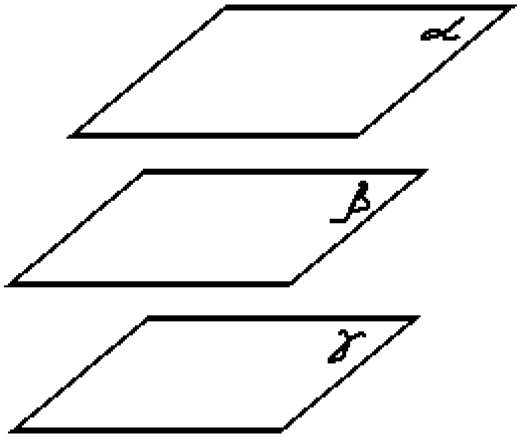
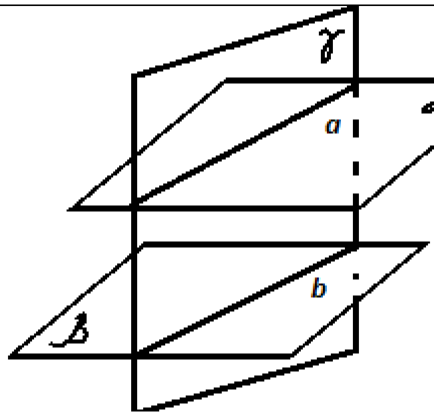
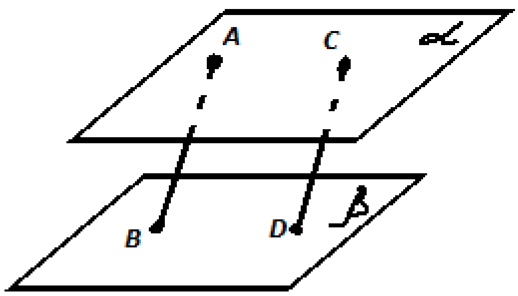
$$(a \cap b, c \cap d, a \in \alpha, b \in \alpha, c \in \beta, d \in \beta, a \parallel c, b \parallel d) \Rightarrow (\alpha \parallel \beta)$$

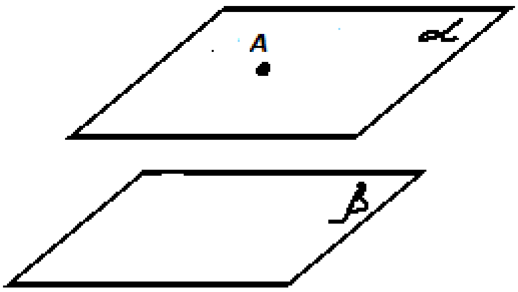
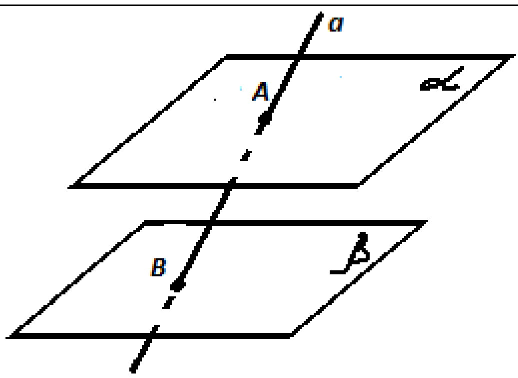
Рис. 22.1

Подамо властивості паралельних прямих у вигляді таблиці 3.

Властивості паралельних площин [30]

Таблиця 3

B_1. Якщо будь-які дві площини паралельні третій площині, то вони паралельні.	 $(\alpha \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma) \Rightarrow (\alpha \parallel \beta)$
B_2. Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину цих площин паралельні.	 $(\alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha, \gamma \cap \beta, a \in \alpha, b \in \beta)$ $\Rightarrow (a \parallel b)$
B_3. Відрізки паралельних прямих, що лежать між паралельними площинами, рівні.	 $(\alpha \parallel \beta, AB \parallel CD) \Rightarrow (AB = CD)$

В4. Через точку, що не належить площині можна провести площину паралельну даній і тільки одну	 $A \notin \beta, A \in \alpha, \alpha \parallel \beta, \alpha-$ єдина
В5. Якщо пряма перетинає одну з паралельних площин, то вона перетинає і другу площину	 $\alpha \parallel \beta, a \cap \alpha, a \cap \beta$

1.5. Зображення просторових фігур на площині

При зображенні фігур простору на площині використовуємо метод паралельного проєктування. Пряма a вказує напрям проектування. Фігура F' є проекцією фігури F на площину α в напрямку a.

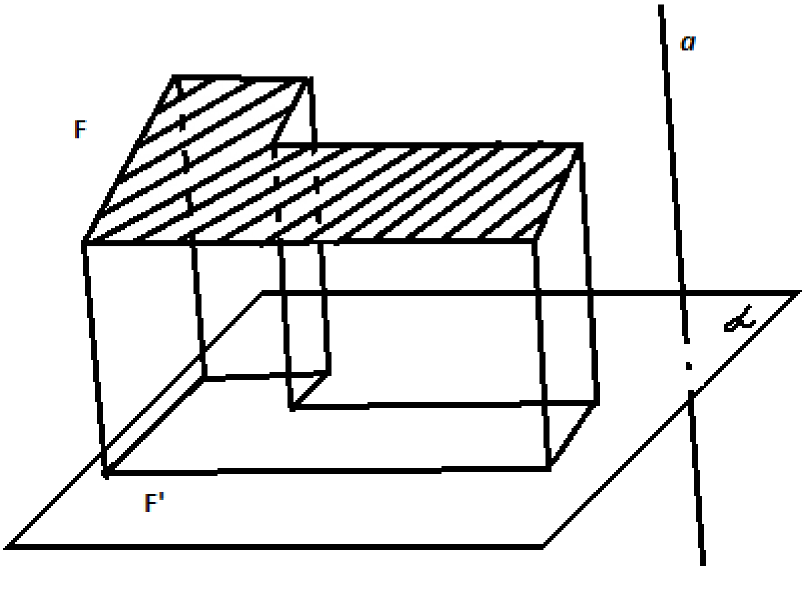
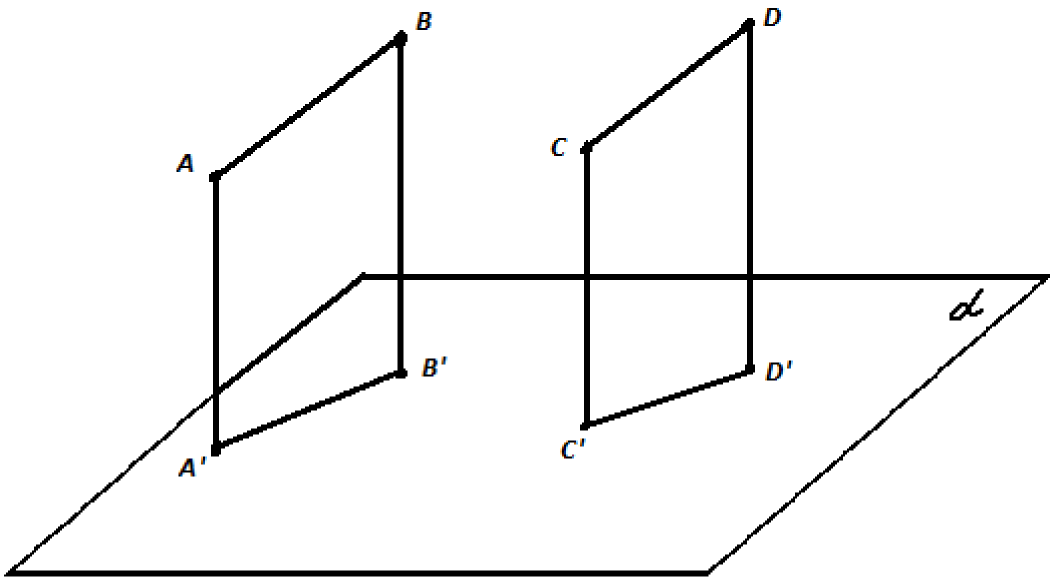


Рис.23.1.

Розглянемо *властивості паралельного проєктування*[11]:

B_1. При паралельному проєктуванні прямі проєктуються у прямі, півпрямі – у півпрямі, відрізки – у відрізки.

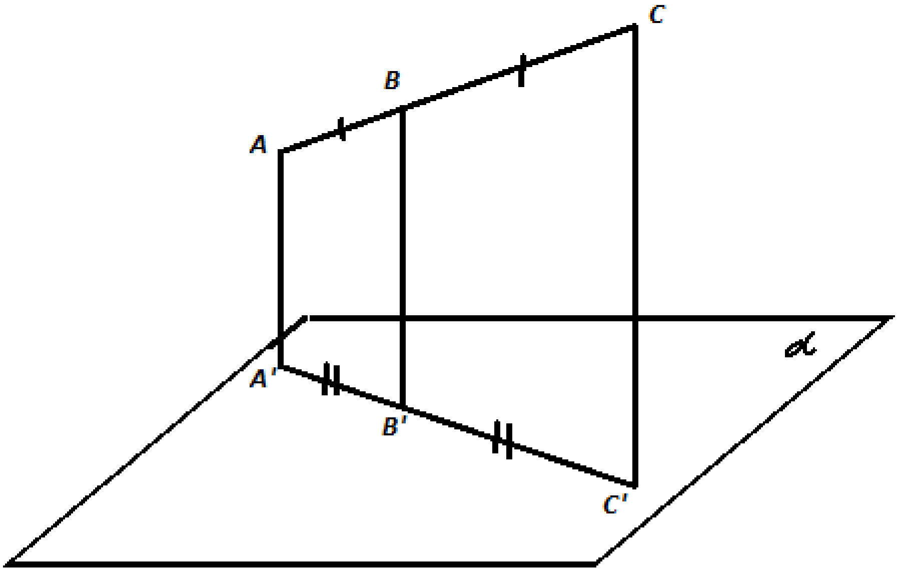
B_2. Паралельність при паралельному проєктуванні зберігається.



$AB||CD, A'B'||C'D'$

Рис.24.1.

B_3. При паралельному проєктуванні відношення відрізків прямої чи паралельних прямих зберігається. Точка середини відрізка, при паралельному проєктуванні, зображається точкою середини спроєктованого відрізка на площину.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, AB = BC, A'B' = B'C'$$

Рис.25.1.

B_4. При паралельному проєктуванні спільна точка кількох фігур є спільною точкою проєкції цих фігур.

B_5. При паралельному проєктуванні відношення непаралельних прямих і величини кутів не зберігається.

Розглянемо зображення деяких фігур [44].

1. *Зображення трикутника*

Будь-який вид трикутника у просторі зображується довільним трикутником.

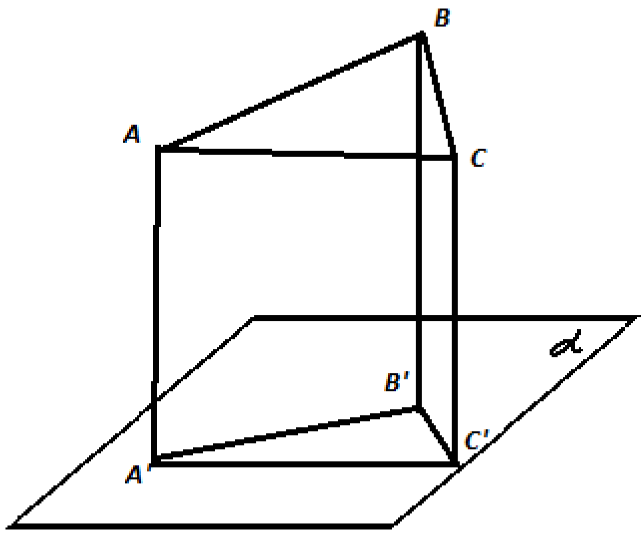


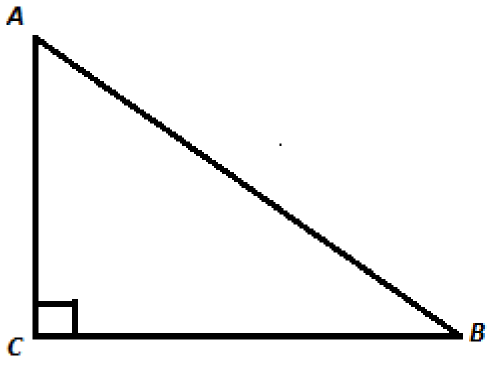
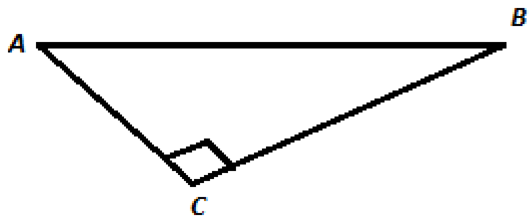
Рис.26.1.

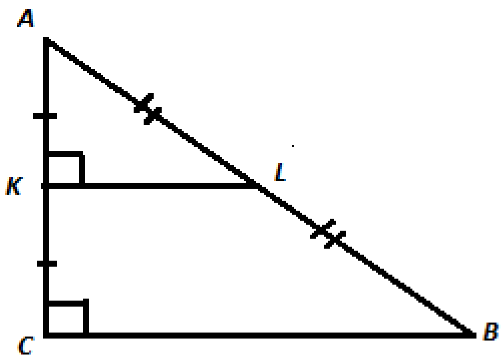
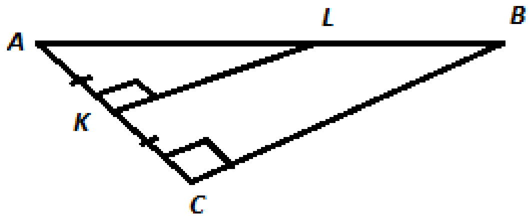
Розглянемо прямокутний трикутник і деякі побудови в ньому (табл.4).

Зображення прямокутного трикутника [44]

Таблиця 4

Побудова на площині	Зображення просторової фігури на площині
Прямокутний трикутник	

<table>
<tr><td>
</td><td>

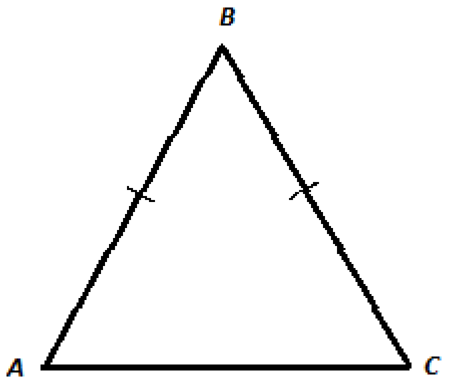
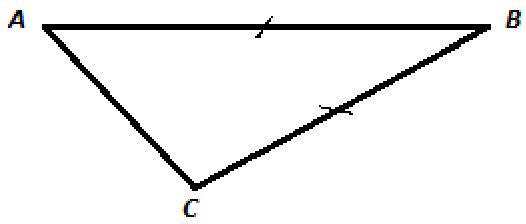
$\angle C = 90°$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Середня лінія KL</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

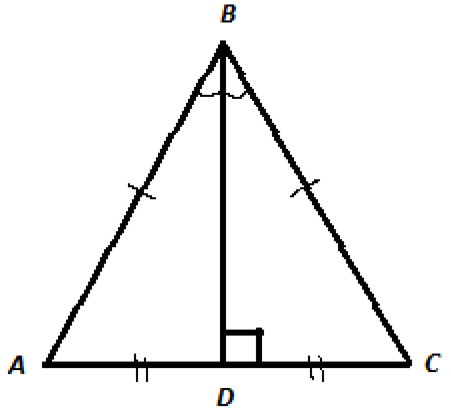
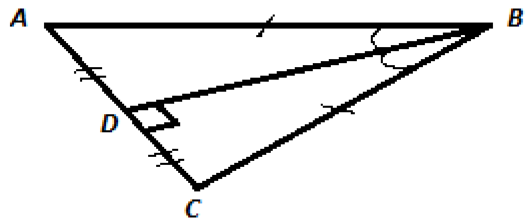
$KL \parallel CB, KL \perp AC$</td></tr>
</table>

Розглянемо рівнобедрений трикутник і деякі побудови в ньому (табл. 5).

Зображення рівнобедреного трикутника

Таблиця 5

<table>
<tr><td>Побудова на площині</td><td>Зображення просторової фігури на площині</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівнобедрений трикутник</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Висота, що опущена на основу</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

BD – бісектриса, медіана, висота, серединний перпендикуляр</td>
</tr>
</table>

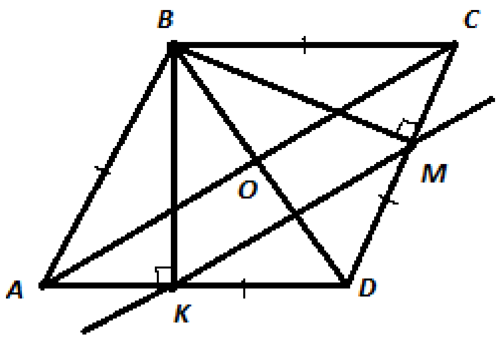
У рівнобедреному трикутнику центри вписаного і описаного кіл зображуються довільними точками, що лежать на висоті (бісектрисі та медіані) BD, так як кути в просторі не зберігаються.

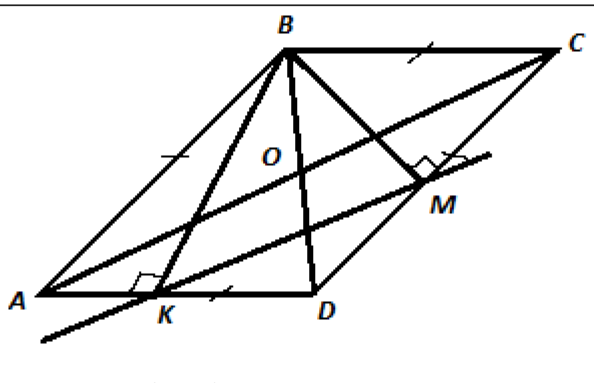
2. Розглянемо *зображення паралелограма* та його видів.

Будь-який паралелограм (також ромб, прямокутник і квадрат) зображуються довільним паралелограмом.

Зображення ромба та його висоти [44]

Таблиця 6

<table>
<tr>
<td>Побудова на площині</td>
<td>Зображення просторової фігури на площині</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Висоти ромба, що опущені з його тупого кута</td>
</tr>
<tr>
<td>

$KM||AC$</td>
<td>

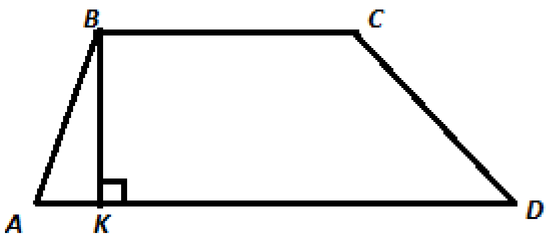
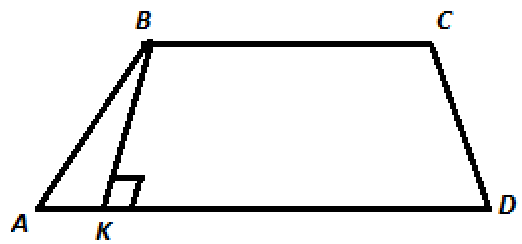
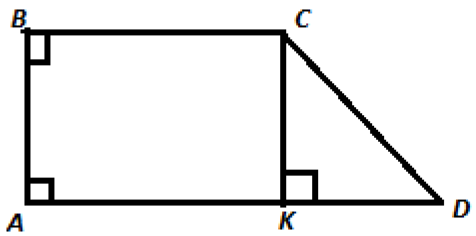
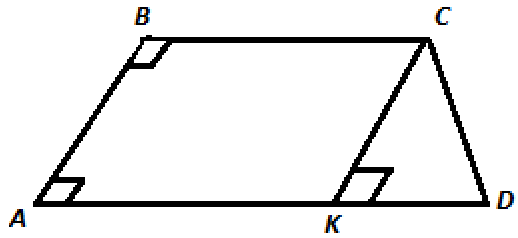
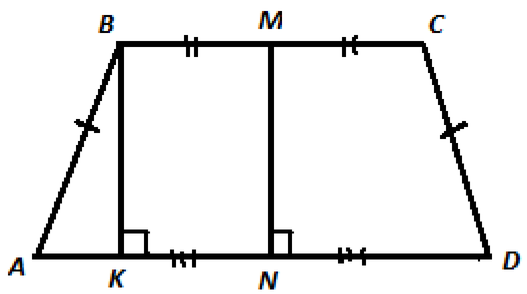
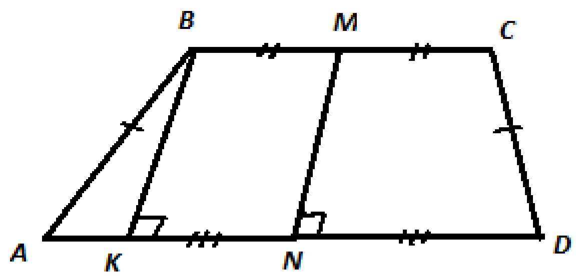
Будуємо під будь-яким кутом висоту BKі з точки K паралельно AC будуємо пряму KM</td>
</tr>
</table>

3. Розглянемо *зображення трапеції.*

Будь-який вид трапеції зображається довільною трапецією (див. табл.7)

Зображення трапеції

Таблиця 7

Побудова на площині	Зображення просторової фігури на площині
Трапеція загального виду	
	
Прямокутна трапеція	
	
Висота рівнобедреної трапеції	
	 $BM = MC, AN = ND,$ $MN \perp AD, BK \| MN, BK \perp AD$

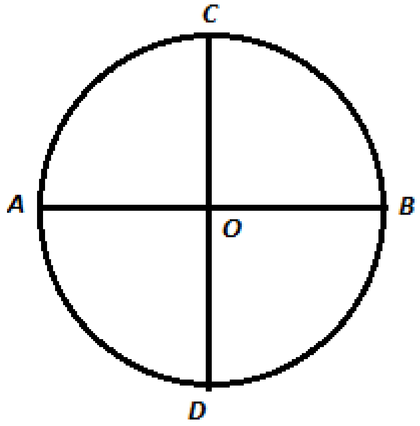
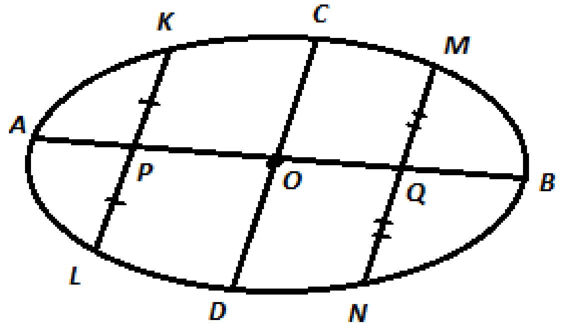
4. *Зображення кола*

Паралельною проєкцією кола є еліпс (див. табл.8).

Зображення кола [30]

Таблиця 8

Побудова на площині	Зображення просторової фігури на площині

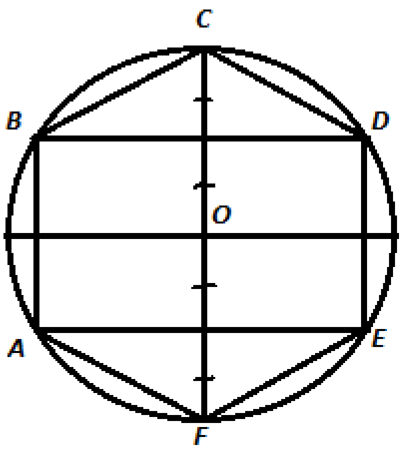
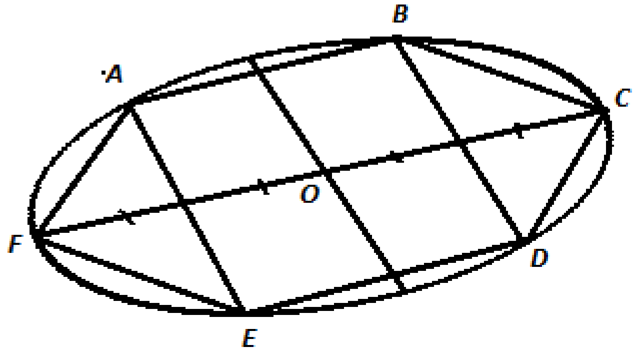
AB, CD – спряжені діаметри (взаємно перпендикулярні діаметри, які ділять діаметри). Треба побудувати довільні паралельні хорди KL і MN. Через середини цих хорд проведемо перший спряжений діаметр AB. Тоді через середину діаметра PQ, паралельно хордам KL і MN, проводимо другий спряжений діаметр.

5. *Зображення правильного шестикутника*

Для зображення правильного шестикутника будуємо зображення кола (еліпс) та два спряжених діаметри. Один із цих діаметрів FC ділимо на чотири рівні відрізки і проводимо хорди AE і BD паралельно другому спряженому діаметру. З’єднуємо точки A, B, C, D, E, F (див.табл.9).

Зображення правильного шестикутника [30]

Таблиця 9

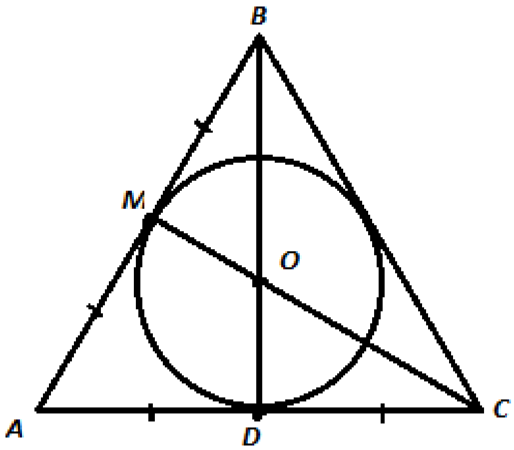
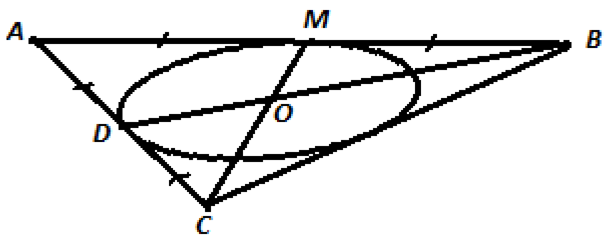
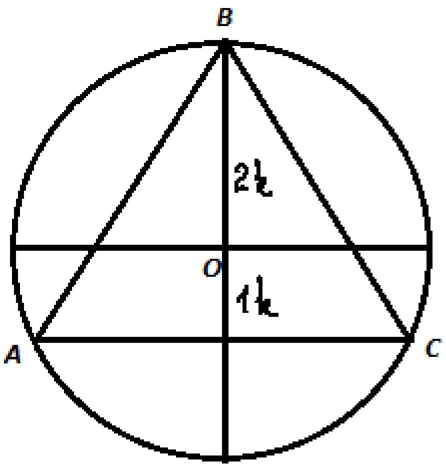
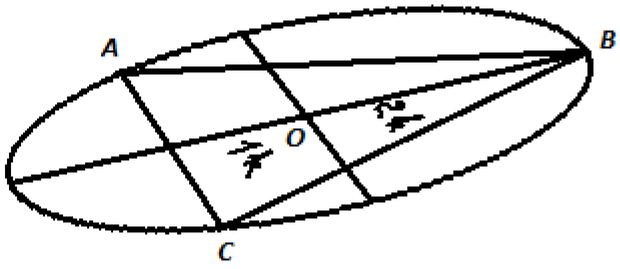
Побудова на площині	Зображення просторової фігури на площині
	

6. *Зображення деяких правильних n-кутників, трапеції в комбінацій з колом.*

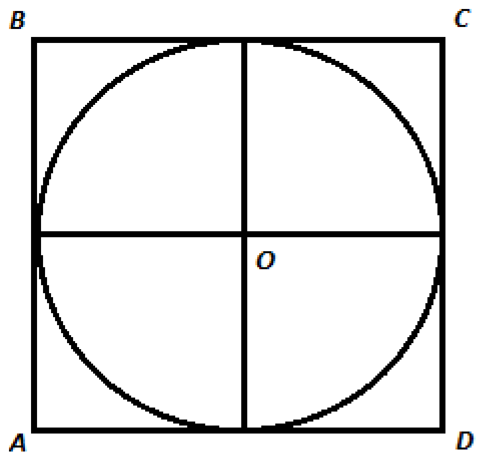
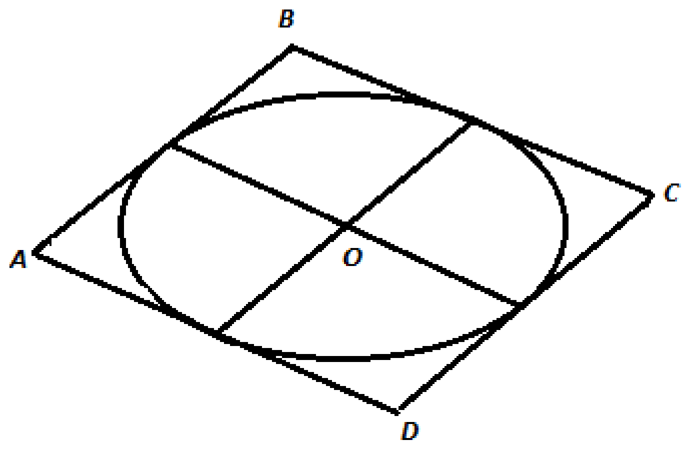
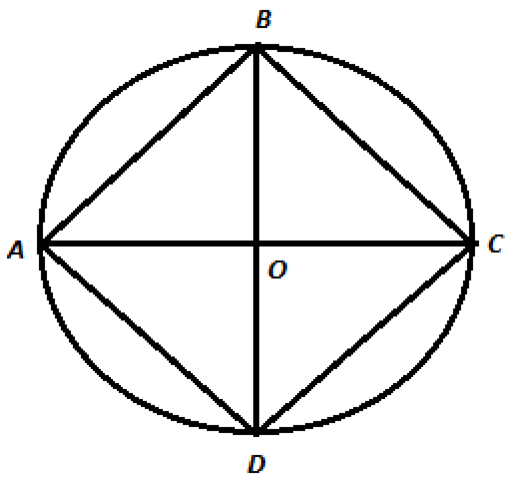
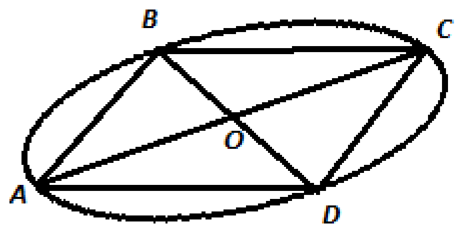
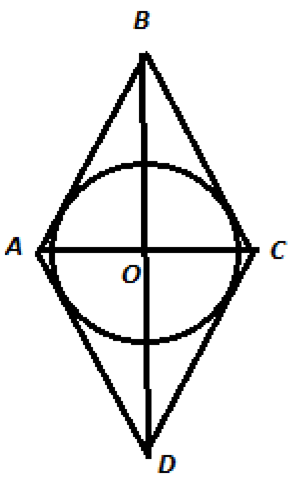
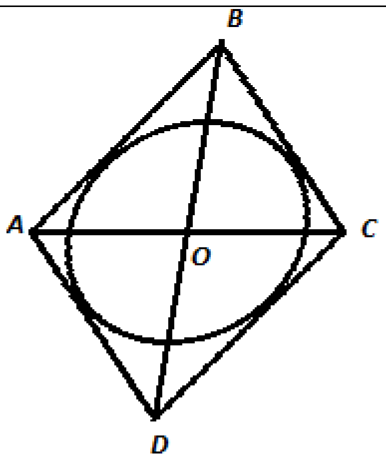
Розглянемо зображення комбінацій кола з рівностороннім трикутником, квадратом, ромбом і трапецією (див. табл.10).

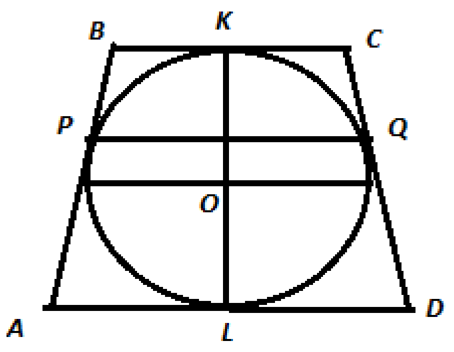
Зображення рівностороннього трикутника, квадрата, ромба і трапеції в комбінації з колом [30]

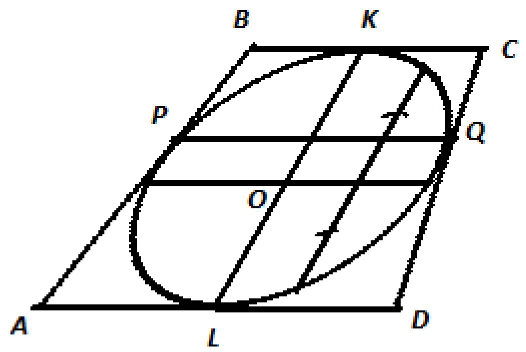
Таблиця 10

<table>
<tr><td>Побудова на площині</td><td>Зображення просторової фігури на площині</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правильний трикутник, описаний навколо кола</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правильний трикутник, вписаний в коло</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

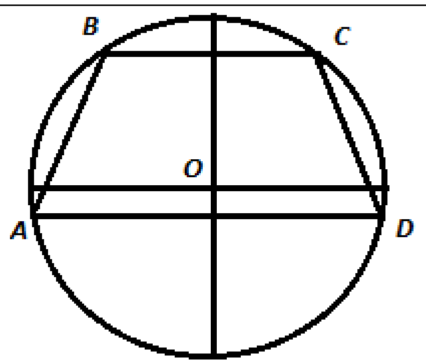
т. О – точка перетину серединних перпендикулярів, медіан, бісектрис і висот</td></tr>
<tr><td colspan="2">Квадрат, описаний навколо кола</td></tr>
</table>

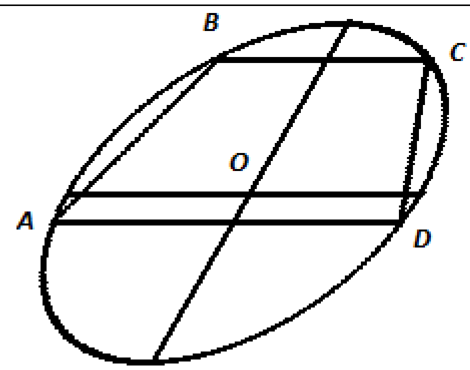
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Квадрат, вписаний в коло</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Ромб, описаний навколо кола</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Трапеція, описана навколо кола</td></tr>
</table>





Трапеція, вписана у коло

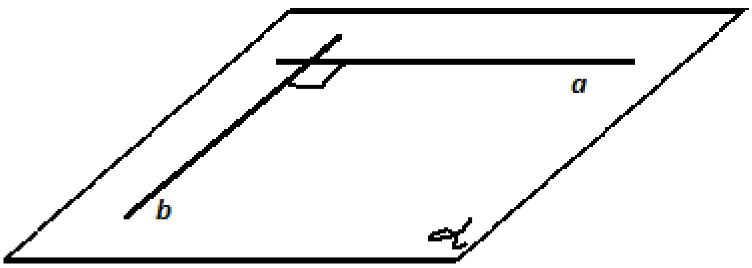




1.6. Перпендикулярність прямих і площин

Розглянемо означення, основні ознаки та властивості перпендикулярності у просторі [16].

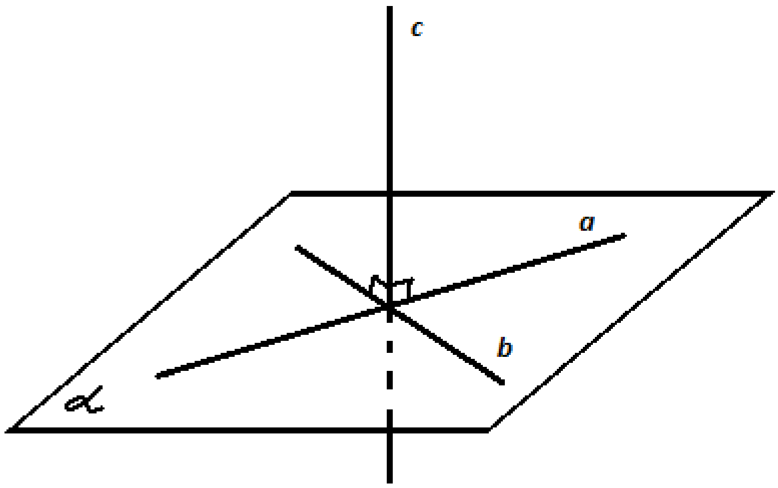
Прямі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.



$$a \perp b$$

Рис. 27.1

Пряма є *перпендикулярною* до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини, що проходить через точку перетину.



$$(c \perp \alpha) \Leftrightarrow (c \perp a, c \perp b)$$

Рис. 28.1

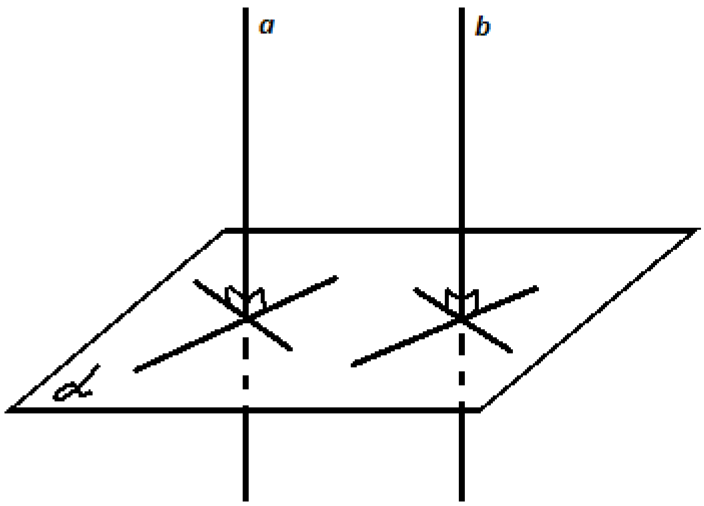
Таким чином можна сформулювати ознаки перпендикулярності прямих і прямої та плошини [16]:

якщо дві *прямі*, що перетинаються відповідно паралельні двом перпендикулярним , то ці прямі теж *перпендикулярні*;

якщо *пряма* перпендикулярна до двох прямих, що лежать в одній площині та перетинаються і проходить через точку перетину, то вона *перпендикулярна*і *до* самої *площини*.

Розглянемо властивості перпендикулярних прямої та площини [16].

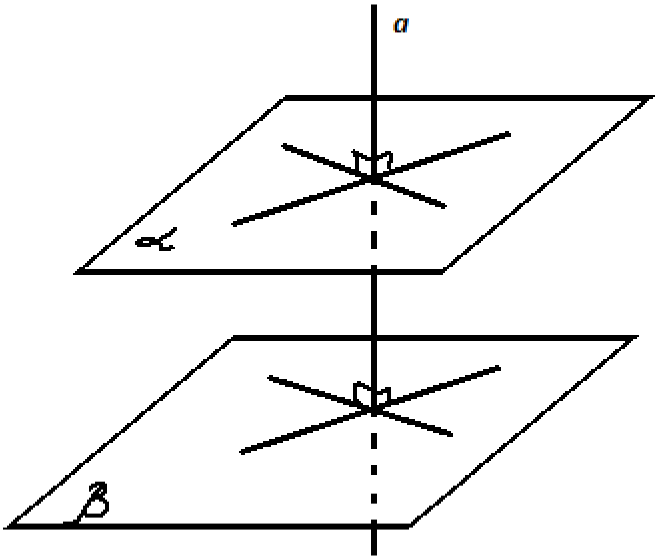
В$_1$. Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї ж площини, то прямі паралельні.



$$(a \perp \alpha, b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b$$

Рис. 29.1

В$_2$. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої площини.



$$(\alpha \parallel \beta, a \perp \alpha) \Rightarrow a \perp \beta$$

Рис. 30.1

Перпендикуляр і похила

Розглянемо рисунок 31.1

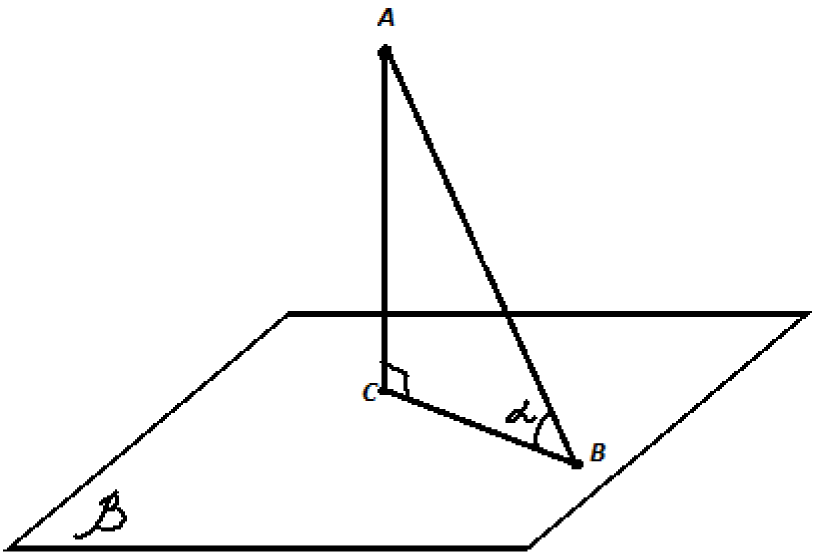


Рис. 31.1

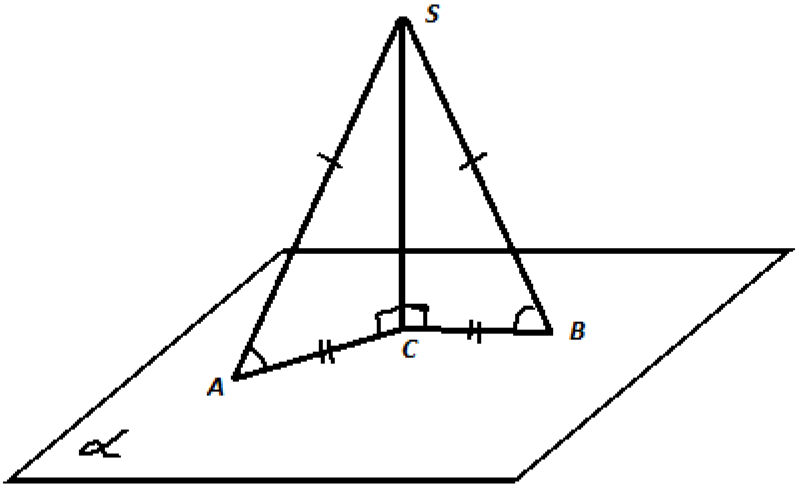
Відрізок AB– *похила* (точка B – основа похилої); AC – *перпендикуляр*, опущений з даної точки A на площину β – відрізок, що з'єднує дану точку A з точкою C площини та лежить на прямій перпендикулярній до площини (точка

C– основа перпендикуляра); відрізок CB – *проєкція* похилої AB на площину β – з'єднує основу похилої з основою перпендикуляра; кут α – кут нахилу похилої до площини, кут між похилою і її проєкцією на площину [38].

Властивості похилих [40]:

B_1. Похила завжди більша за перпендикуляр і проєкцію.

B_2. У двох рівних похилих, проведених з однієї точки, рівні проєкції, і навпаки.



$$(AS = SB) \Leftrightarrow (AC = CB)$$

$$(\angle A = \angle B) \Leftrightarrow (AC = CB)$$

Рис. 32.1

B_3. Дві похилі, проведені з однієї точки під однаковим кутом до площини, рівні, і навпаки.

B_4. З двох похилих, проведених з однієї точки, більша та у якої проєкція більша, і навпаки.

Теорема про три перпендикуляри [15].

Пряме твердження. Якщо пряма, що лежить у площині і проходить через основу похилої, перпендикулярна до проєкції похилої, то вона перпендикулярна і до самої похилої.

Обернене твердження. Якщо пряма, що лежить у площині і проходить через основу похилої, перпендикулярна до самої похилої, то вона перпендикулярна і до її проєкції.

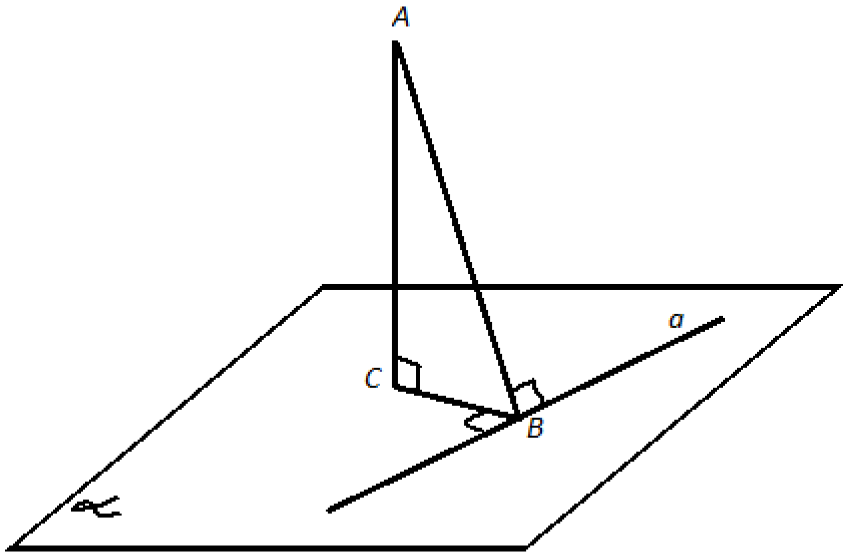


Рис. 33.1

Доведення. Виберемо на прямій a на однаковій відстані від точки B точки D і E (див. рис.).

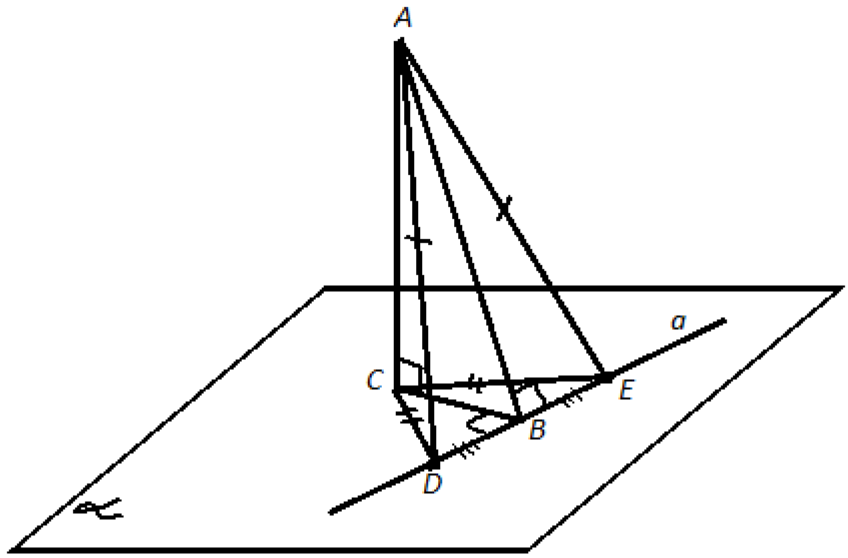


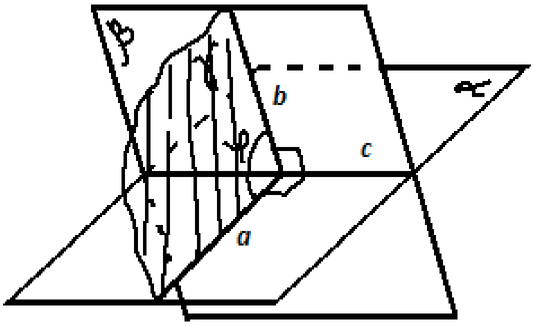
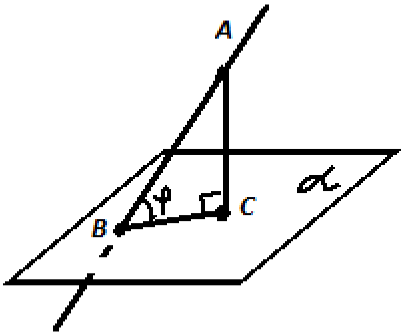
Рис. 34.1

Таким чином, якщо $AB \perp c,$ то ΔADE є рівнобедреним. За властивістю похилих якщо $AD = AE$, то $CD = CE$ і ΔCDE теж рівнобедрений, де CB– висота медіана і бісектриса. Доведено.

Розглянемо кути утворені при перетині площин, прямої і площини та двох мимобіжних прямих (див. табл.11) [15].

Кути у просторі [38]

Таблиця 11

<table>
<tr><th>Кут між площинами</th><th>Кут між прямою і площиною</th><th>Кут між мимобіжними прямими</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Способи побудови кута між площинами [38]:

1. З будь-якої точки прямої перетину площин (точки С на рисунку) провести перпендикуляри у двох площинах (прямі a і b). Кут φ між прямими a і b є шуканим.

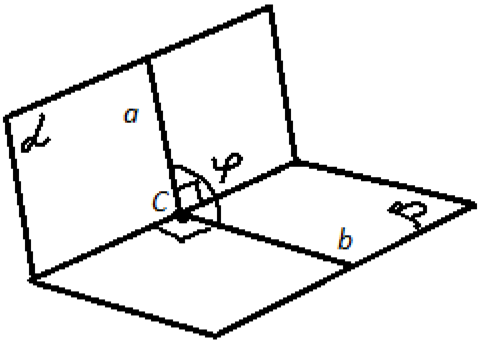


Рис. 35.1

2. Через будь-яку точку (точка A на рисунку) площини α до прямої c (перетину площин) проведемо перпендикулярну пряму a і через точку перетину проведемо перпендикулярну пряму в площині β. Кут між двома перпендикулярами є шуканим. (З Будь-якої точки A площини α проводимо два перпендикуляра: один до прямої c перетину площин, а інший на площину β. Таким чином, AC – похила, AB – перпендикуляр, BC – проєкція похилої AC на площину β. За теоремою про три перпендикуляри $AC \perp c$ і $BC \perp c$. Кут між проєкцією і похилою є шуканим.)

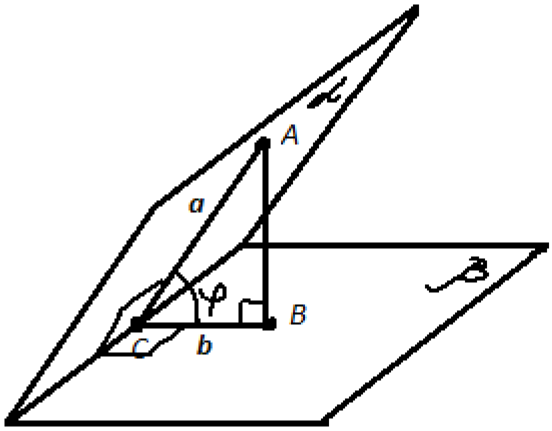


Рис. 36.1

Кут між прямою і площиною – це кут між похилою і її проєкцією на цю площину. Для його побудови виберемо будь-яку точку на прямій (точка *B*) і опустимо перпендикуляр з цієї точки на площину, з'єднаємо основу перпендикуляра (точка *C*) з точкою перетину прямої з площиною (точка *A*). Кут між відрізками *AB* і *AC* є шуканим кутом [40].

Кут між мимобіжними прямими – кут між прямими, що перетинаються та паралельними даним мимобіжним прямим [39].

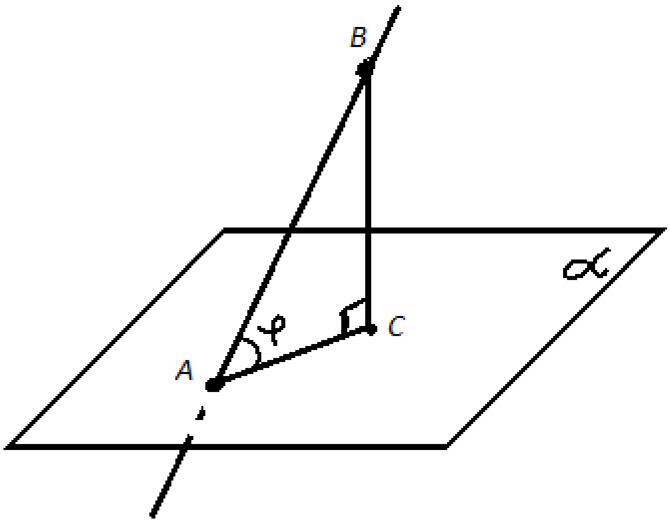


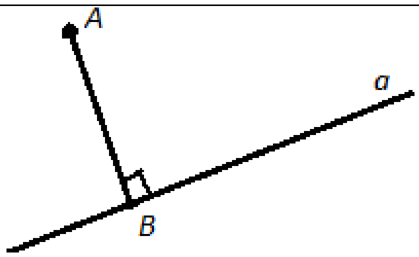
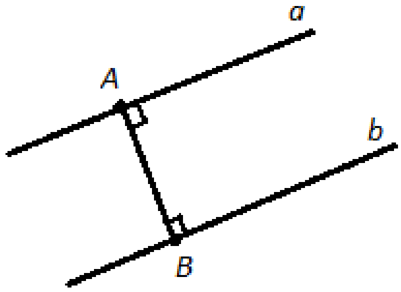
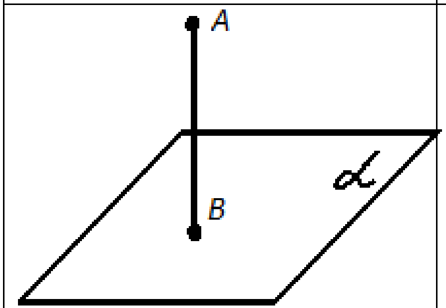
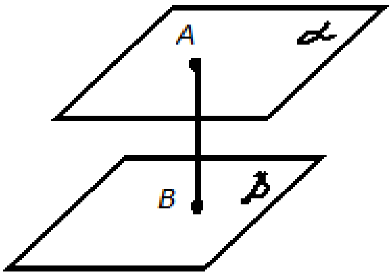
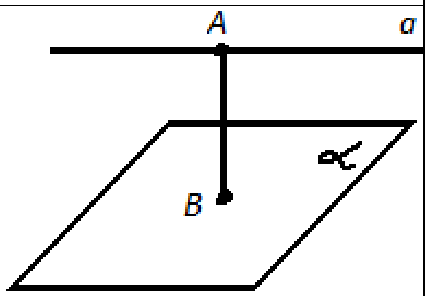
Рис. 37.1

1.7. Відстані у просторі

У просторі розрізняють: відстань між двома точками, відстань від точки до прямої, відстань між паралельними прямими, відстань між прямою і паралельною їй площиною, відстань між паралельними площинами та відстань між мимобіжними прямими (див. табл.12).

Відстані у просторі [30]

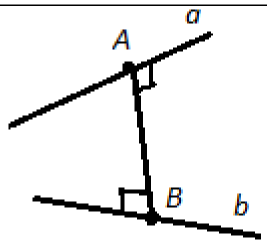
Таблиця 12

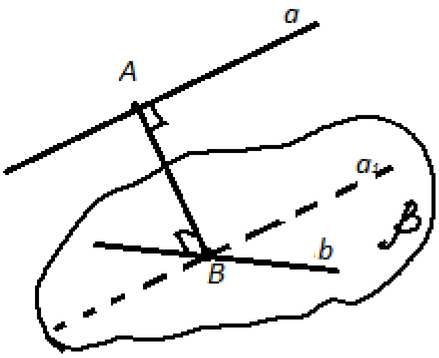
<table>
<tr>
<td>
Відстань між точками A і B – це довжина відрізка AB.</td>
<td>
Відстань від точки A до прямої a – це довжина перпендикуляра AB опущеного з точки A на пряму a.</td>
<td>
Відстань між двома паралельними прямими a і b – це довжина спільного перпендикуляра AB.</td>
</tr>
<tr>
<td>
Вістань від точки A до площини α – це довжина перпендикуляра AB опущеного з точки A на площину α.</td>
<td>
Відстань між двома паралельними площинами α і β – це довжина спільного перпендикуляра AB проведеного між двома площинами.</td>
<td>
Відстань між прямою a і паралельною їй площиною α – це довжина перпендикуляра AB опущеного з будь-якої точки A прямої a на площину α.</td>
</tr>
</table>

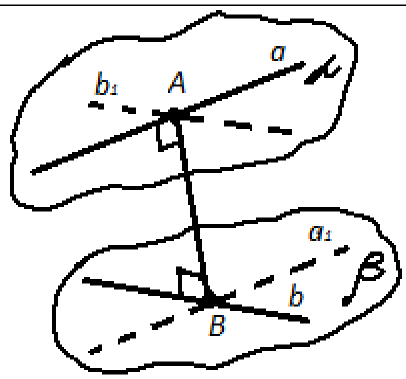
Розглянемо відстань між мимобіжними прямими та способи її знаходження (табл 13).

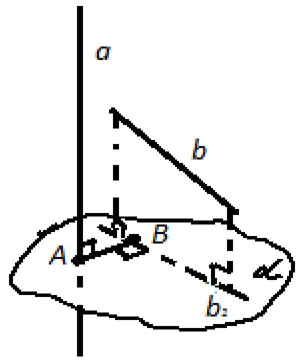
Відстань між мимобіжними прямими [39]

Таблиця 13

<table>
<tr><td colspan="3">

Відстань між мимобіжними пямими a і b – це довжина спільного перпендикуляра AB.</td></tr>
<tr><td>

Через пряму b площину $\beta \parallel a$. Відрізок AB є шуканим.</td><td>

Проводимо через прямі a і b паралельні площини $\alpha \parallel \beta$. Відрізок AB є шуканим</td><td>

Проводимо площину $\alpha \perp a$ і проєктуємо прямі a і b на цю площину: $a \longrightarrow A, b \rightarrow b_1$. Відрізок AB є шуканим</td></tr>
</table>

1.8. Побудова плоских перерізів

Побудова перерізу зводиться до побудови многокутника у площині перерізу, який перетинає грані многогранника.

Слідом перерізу на вказаній площині називається пряма, що перетинає цю площину з площиною перерізу.

Основні правила побудови перерізів

1. Якщо дано (або вже побудовані) дві точки, що належать площині перерізу (грані многогранника), то слід буде походити по прямій, що містить відрізок, який сполучає ці дві точки.

2. Якщо даний або ж побудований слід на деякій грані многогранника і є точка, що належить іншій грані многогранника, то треба знайти точку перетину цього сліду з гранню, на якій знаходиться ця точка. Якщо ж даний слід на одній грані і є точка, що знаходиться на паралельній грані, то слід на грані, де знаходиться точка, буде паралельним до даного сліду і проходитиме через цю точку.
3. Точка перетину площини перерізу з гранню многогранника – це точка перетину будь-якої прямої, що лежить в площині перерізу, з її проєкцією на площину грані многогранника [17].

Методи побудови перерізів

Метод відповідності.

Для побудови перерізу треба побудувати точки нижньої основи многогранника, які відповідають точкам шуканого перерізу.

Метод слідів.

Полягає в тому, що на грані многогранника виконується побудова слідів,за допомогою яких легко виконується побудова точок перетину січної площини з ребрами многогранника та ліній перетину січної площини з гранями многогранника [30].

Розглянемо дані методи на прикладі.

Побудувати переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, через три задані точки K, L, M.

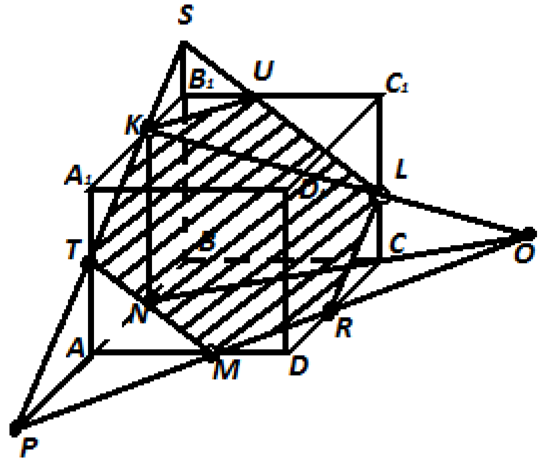


Рис. 38.1

Спроєктуємо точки K і L на площину основи $ABCD$ куба: $K \longrightarrow N, L \longrightarrow C$. Проведемо прямі KL і NC, вони перетнуться у точці O (точки K, L, N, C, O лежать в одній площині). Проведемо пряму MO (так як точки M і O належать одній площині $ABCD$), яка перетне ребро CD у точці R (MR – слід перерізу на грані $ABCD, LR$ – слід перерізу на грані CC_1D_1D) та продовження ребра AB у точці P. Проведемо пряму PK (так як точки P і K належать одній площині AA_1B_1B), яка перетне ребро AA_1 у точці T (MT – слід перерізу на грані AA_1D_1D, TK – слід перерізу на грані AA_1B_1B) та продовження ребра B_1B у точці S. З'єднаємо точки S і L (так як точки S і L належать одній площині BB_1C_1C), SL переднє ребро B_1C_1 у точці U (KU – слід перерізу на грані $A_1B_1C_1D_1$, UL – слід перерізу на грані BB_1C_1C). Таким чином, шестикутник $TKURLM$– шуканий переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

ВИСНОВКИ ДО ПЕРШОГО РОЗДІЛУ

Формуванню вмінь та навиків передує отримання відповідних знань з теми дослідження. Таким чином, у першому розділі дослідження нами було розглянуто основні теоретичні відомості з теми «Взаємного розміщення прямих та площин у просторі», а саме аксіоми, основні означення, ознаки і властивості, що стосуються паралельності та перпендикулярності прямих і площин, зображення фігур в просторі та побудова плоских перерізів. Розглянуті теми повністю відповідають програмі з математики як для рівня стандарту, так і для поглибленого. Нами представлено доведення основних теорем та побудови, що відносяться до вивчення основних фігур у просторі та їх взаємного розміщення.

Теоретичні знання є запорукою успішного практичного застосування. Знання щодо елементарних фігур простору та їх взаємного розміщення, а також вміння зображати їх на площині є основою при розв’язуванні задач з многогранниками та тілами обертання.

Систематизовані теоретичні відомості можна використати в педагогічній діяльності як дидактичні матеріали для учнів, студентів та вчителями при підготовці до уроків та підготовці до ЗНО.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИКІВ РОЗВ’ЯЗУВАТИ СТЕРЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

2.1. Аналіз навчальної програми з математики для загальноосвітніх шкіл з теми дослідження

Взаємне розміщення прямих і площин у просторі вивчається у 10 класі при вивченні дисциплін математика (для рівня стандарту) та геометрія (для профільного та поглибленого рівнів).

У пояснювальній записці навчальної програми чітко сформульовані мета та завдання вивчення взаємного розміщення прямих та площин у просторі: «Як і в основній школі, геометрія у старшій школі має навчати учнів правильному сприйманню навколишнього світу. Але для цього стереометрія має більше можливостей. Ідеться про розвиток логічного мислення, формування просторової уяви, вироблення навичок застосування геометрії до розв’язання практичних завдань. Розв’язання цих завдань розпочинається з розгляду теми «Паралельність прямих і площин у просторі». У ній закладається фундамент для вивчення стереометрії — геометрії простору. Особливу увагу необхідно приділити реалізації прикладної спрямованості теми. Головним внеском у розв’язання зазначеної проблеми є формування чітких уявлень про взаємовідношення геометричних об’єктів (прямих, площин) і відношень між ними з об’єктами навколишнього світу. Важливе місце в темі необхідно відвести навчанню учнів зображенню просторових фігур на площині і застосуванню цих зображень при розв’язуванні задач. В процесі вивчення теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» закладається фундамент для вимірювань у стереометрії. Значної уваги вимагає формування таких фундаментальних понять, як загальне поняття відстані, поняття кута як міри розміщення прямих і площин та двогранного кута як геометричної фігури. Із введенням відношення перпендикулярності прямих і площин, перпендикулярності площин, а також відстаней і кутів моделюючі можливості курсу стереометрії значно зростають…» [21, 22, 23].

У програмах профільного та поглибленого вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі поділяється на три теми: «Вступ до стереометрії», «Паралельність прямих і площин у просторі», «Перпендикулярність прямих і площин у просторі». Програмами визначено 87 годин на вивчення даних тем. Без урахуванням годин резерву обсяг вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі складає 75% від усього навчального матеріалу геометрії 10 класу. Тоді як у рівні стандарту тема «Вступ до стереометрії» входить до теми «Паралельність прямих і площин у просторі» і разом на взаємне розміщення прямих і площин у просторі відводиться 34 години, що складає 77% без врахування годин резерву[22, 23].

Слід відмітити, що пропедевтика вивчення стереометрії (початкові уявлення про фігури у просторі) відбувається у п’ятому класі при вивчені теми «Натуральні числа і дії з ними. Геометричні фігури і величини». Учні розглядають такі фігури як куб, прямокутний паралелепіпед та співвідносять дані фігури з фігурами в побуті. Розв’язують найпростіші задачі на застосування формули об’ємів [24].

Аналіз програми дав змогу виділити у дев’ятому класі з поглибленим вивченням теми, що стосується стереометрії, а саме «Початкові відомості зі стереометрії». При вивченні цієї теми учні розглядають взаємне розміщення прямих і площин у просторі, знаходять площі поверхонь та об’єми: призми, піраміди та тіл обертання. Таким чином, програмними результатами вивчення цієї теми є:

- пояснює: що таке: площина, «належати», «лежати між» у просторі; призма, піраміда, циліндр, конус, куля та їх елементи; площа поверхні та об’єм многогранника і тіла обертання; як можна задати площину;

- формулює означення: перпендикуляра, проведеного з точки до площини; відстані від точки до площини; записує і пояснює формули площ поверхонь і об'ємів зазначених у програмі геометричних тіл;
- зображує і знаходить на малюнках: взаємне розміщення прямих, площин, прямої і площини, многогранники і тіла обертання та їх елементи, розгортки призми, піраміди, циліндра, конуса;
- обчислює: відстань від точки до площини; площі поверхонь та об'єми геометричних тіл, указаних у змісті, у нескладних випадках; розв'язує задачі, що передбачають: обґрунтування взаємного розміщення двох прямих, прямої і площини, двох площин у просторі, обчислення площ поверхонь і об'ємів геометричних тіл, указаних у змісті[24].

2.2. Формування вмінь та навиків розв'язувати стереометричні задачі як психологічна складова

Розглянемо поняття «знання», «вміння» і «навички» з точки зору психології. З праць Павелківа Р. В. можемо охарактеризувати і розмежувати поняття. Таким чином, поняття «знання» ототожнюється з пізнанням людини, тобто теоретично узагальнений досвід, що і є результатом оволодіння дійсності. Поряд із знаннями не менш важливими є вміння та навички. Павелків розділяє вміння на два рівні за їх психологічною структурою: елементарні вміння та вміння, які базуються на певних навичках. Вміння – це готовність до виконання завдань, що базуються на певний знаннях і навичках, а багаторазове повторення певних дій (виконання завдань) призводить до появи певних навичок. З огляду на це, у працях вчених відбувається дискус, що є першочерговим: вміння чи навички[27].

Таким чином, можна стверджувати, що елементарні вміння учень здобуває безпосередньо після вивчення теми, отримавши основні знання, на етапі закріплення знань, а вміння, як майстерність, що сформувалися у результаті ґрунтовних знань та попереднього досвіду, на уроках узагальнення і систематизації знань, повторення вивченого матеріалу і т.п. Виконання певних завдань на уроці та домашнього завдання призводить до автоматизації дій і як результат учень здобуває навички.

Мілерян Е. виділяє чотири етапи формування умінь: початковий або підготовчий, проміжний або аналітичний, синтетичний та етап автоматизації[20]. Етап автоматизації можна віднести до етапу формування навиків.

Виділимо основні три етапи розв’язування завдань на взаємне розміщення прямих та площин у просторі: підготовчий, тобто на цьому етапі вчитель пропонує підготовчі вправи, які ґрунтуються на раніше засвоєних знаннях, вміннях і навиках або ж вправи, що на початковому етапі формують просторову уяву (сюди можна віднести так звані усні вправи у підручнику, завдання із вже готовими рисунками, на застосування аксіом планіметрії та стереометрії); проміжний, тобто етап на якому розглядаються завдання, які потребують розв’язувань, застосувавши аксіоми, властивості та ознаки; заключний етап формування вмінь – це етап розв’язування різних, більш складних завдань, що потребують побудову, доведення та розв’язання.

Вміння розв’язувати стереометричні задачі тісно пов’язані з розвитком просторової уяви. Просторові уявлення, як особлива група зорових уявлень, дають змогу читати стереометричні рисунки та відтворювати просторові моделі, тіла тощо. На основі зорових відчуттів та сприймань створюються в уяві учнів певні геометричні образи. Таким чином, відчуття та сприймання включаються у процес засвоєння знань, тобто пізнання: сприймаючи, учень порівнює певні об’єкти з раніше побаченими. Аналіз просторових фігур (виділення в них певних ознак, властивостей і т.п.) та синтез (об’єднання певних ознак, властивостей, співвідношень і т.п.), що призводить до створення нового уявлення, здійснюється за допомогою уяви [34].

Вітчизняний вчений І. Тесленко вважав, що перешкодою у правильності просторових уявлень є недостатньо сформоване так зване «геометричне око» - відсутнє чи недостатнє вміння бачити на рисунку певні фігури, деталі або оптичні ілюзії, створені оком, враховуючи його будову [34].

При вивченні стереометрії вчителю необхідно приділити велику увагу у формуванні правильного зорового сприйняття, зображенню фігур у просторі. Велику роль у цьому відіграє наочність та проєкційні рисунки. Наведемо приклад неправильно та правильно сформованого зорового сприйняття двох перпендикулярних прямих у просторі.

Неправильне зображення

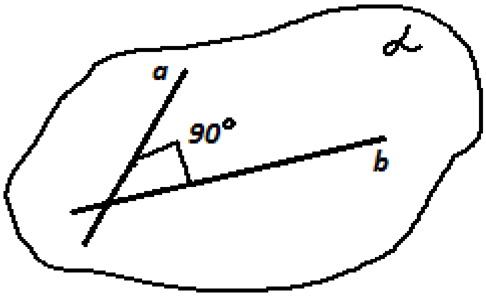


Рис.1.2

Правильне зображення

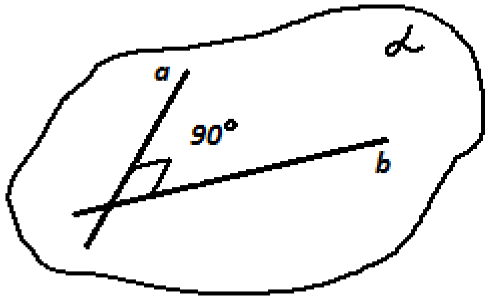


Рис. 2.2

Таким чином, в учнів на рис.1.2 спостерігається сформоване спотворене уявлення. Правильний рисунок – запорука правильного розв’язування задачі. Вивчення тем на взаємне розміщення прямих та площин у просторі, а саме правильність побудови елементарних рисунків, дає змогу в подальшому уявляти і будувати стереометричні фігури та їх комбінації.

Протягом вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі для розвитку уяви та формування початкових вмінь, варто розв’язувати усні вправи на рисунках, наприклад, без лінійних даних: знайти кут між діагоналлю куба та його бічним ребром, між діагоналлю куба та діагоналлю його бічної грані, і між діагоналлю куба та його проєкцією на площину основи і т.п.

Зрозумілим є те, що процес формування вмінь і навиків залежить від багатьох факторів, основними з яких є: психологічна здатність учня до сприйняття матеріалу та вчителя як особистості, від рівня підготовки учнів та способу організації навчання учителем (використанням ним різних методів, засобів, новітніх технологій тощо).

2.3. Аналіз методичної літератури з теми «Паралельність та перпендикулярність прямих та площин у просторі»

Вивчення взаємного розміщення прямих та площин у просторі закладає основу вимірювань у стереометрії.

Курс стереометрії як і курс планіметрії має однакові змістові лінії: властивості фігур; побудова фігур; координати і вектори; геометричні перетворення; геометричні величини. Отже, курс стереометрії узагальнює і систематизує знання з планіметрії, доповнюючи знаннями основні змістові лінії, вивчені в основній школі. Тому задля формування вмінь і навиків, при вивченні стереометрії, важливим є використання тих аналогій, які дозволяють краще усвідомити знання з стереометрії та застерегти від тих аналогій, які діють хибні твердження і уявлення. Згідно аналізу програми, учням на достатньому рівні необхідно вміти розрізняти і зображати фігури простору, їх перерізи, розв’язувати задачі на обчислення (кутів, довжин, площ та об’ємів стереометричних фігур) і доведення твердження на основі аксіом, властивостей елементарних фігур простору та фігур на площині, і їх взаємного розміщення [32].

Задля формування просторової уяви та виокремлення істотних властивостей фігур і абстрагування від неістотних, слід використовувати наочні моделі та рисунки. Наочність та побудова рисунка дозволяють виокремити зв’язки між елементарними фігурами, здійснити аналіз при розв’язуванні задач на обчислення чи доведення, поширювати твердження на фігури певного класу. Хоча рисунок і є наочною моделлю, але неправильне його виконання дає спотворене уявлення. Тому на початкових уроках зі стереометрії важливими є як логічне мислення, розвинута уява та знання властивостей фігур площини, що дозволяють правильно уявляти фігури в просторі та їх відношення [34].

Так як стереометрія вивчається у 10 класі, вік учнів дозволяє по-іншому організовувати навчальну діяльність з математики, а саме більше організовувати самостійну діяльність учнів, а також використовувати лекційнопрактичну систему навчання, особливо при вивченні взаємного розміщення прямих та площин у просторі [43].

На перших уроках, коли вивчаються аксіоми стереометрії, важливими є введення позначень у геометрії: $\in -$ належить, $\notin -$не належить, $\cap -$перетин.

При доведенні теорем стереометрії як і планіметрії використовуємо метод від супротивного або метод доведення, що спирається на аксіоми або раніше доведені теореми (ознаки, властивості). Важливим є те, що кожне твердження має бути обґрунтованим. Доведемо теорему про існування і єдиність площини, що проходить через дві прямі, що перетинаються. Вітчизняна методистка З. Слєпкань, пропонує оформлювати доведення у вигляді таблиці [32]:

Оформлення доведень на початкових уроках вивчення стереометрії

Таблиця 14

Твердження	Обгрунтування
1. Виберемо точку *A* на прямій *a*, та точку *B* на прямій *в* і позначимо точку *C* як точку перетину прямих *a* і *в*.	1. За аксіомою планіметрії про належність і не належність точок прямій
2. Проведемо через ці три точки площину α	2. За аксіомою стереометрії про існування та єдиність площини, що проходить через дві точки
3. Так як точки *A* і *C* належать прямій *a*, а точки *B* і *C* належать прямій *в*, то дві прямі *a* і *в* теж належать площині α	3. За аксіомою стереометрії, що якщо дві точки належать площині, то вся пряма належить цій площині

Доведення теорем стереометрії не є громіздкими, але вимагають обґрунтування. Однією з важливих теорем стереометрії є теорема про три перпендикуляри. Порівнюючи з планіметрією, то теорем стереометрії, що вивчаються в шкільному курсі не багато, але на перших уроках необхідно розв’язувати багато задач на доведення, що і пропонують автори підручників. При розв’язуванні даних задач на доведення можна будувати реальний рисунок на дошці або уявний рисунок, який дозволяє довести можливість існування об’єкта [1] (наприклад, див. доведення представлене в таблиці).

Відомості про прямі та площини є основами при вивченні стереометрії. Спочатку вивчається паралельність прямих, прямих та площин, площин у просторі та паралельне проєктування як спосіб зображення просторових фігур на площині. При вивченні паралельності прямих розглядаються такі їх властивості: 1) дві паралельні прямі обов’язково лежать в одній площині; 2) дві паралельні прямі в просторі не перетинаються [32].

На основі моделей площини і прямої показуємо взаємне розміщення прямих та площин. При доведенні ознаки паралельності прямої і площини використовуємо метод від супротивного, при цьому наголошуємо на мету доведення, а саме, що пряма a, яка не належить площині α і паралельна прямій, що належить цій площині ніколи її не перетне.

Розгляд паралельності прямих проводиться за тією ж методикою, з використанням моделей. На цьому етапі пропонується доведення ознаки паралельності площин, знову ж таки методом від супротивного, формулюючи мету доведення, а саме неможливість перетину площин і підвести учнів до означення паралельності площин [32].

Аналогічність доведення та означення як в планіметрії та стереометрії призводить до хибних висновків, а саме:

1) якщо $a \parallel \alpha\ i\ \alpha \parallel b$,то $a \parallel b$,
2) якщо $a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.

Перпендикулярність прямих і площин можна поділити на такі теми: перпендикулярність прямих у просторі, перпендикулярність прямих і площин та перпендикулярність площин.

Методика вивчення перпендикулярності аналогічна до паралельності прямих і площин, але особливу увагу слід приділити поняттям похилої та перпендикуляру до площини і проєкції похилої на площину. І в цій темі вивчаємо теорему про три перпендикуляри як основу при розв'язуванні задач в многогранниками і тілами обертання.

У шкільному курсі математики теорема відіграє важливе значення, оскільки є основою при розв'язуванні задач із стереометричними фігурами; особливу роль відіграє при побудові рисунків, найбільше її застосовують у задачах з пірамідою, а саме визначення видів трикутників бічних граней, при побудові кутів нахилу бічних граней тощо. До того ж теорему дуже важливо зрозуміти, оскільки вона не є легкою, особливо для тих, кому важко уявляти просторові фігури на площині. Її користь та значущість можна виділити також і в іншому [5]:

- розвиток просторової уяви учнів, їх математичної мови;
- повторення важливих понять: перпендикуляр, похила, проекція похилої на площину, відстань від точки до площини, кут між похилою і площиною, а також пряма, площина, основа перпендикуляра, основа похилої, апофема та інші;
- практичне застосування теореми, приклади в повсякденному житті;
- практичне значення побудови просторових фігур;
- розвиток навичок доведення теореми на основі почутого;
- розвиток навичок формулювання оберненого твердження та інше.

Для прикладу розглянемо методику розв'язування задачі на застосування теореми про три перпендикуляри [5].

Точка, віддалена від кожної сторони ромба на 13 см, розміщена на відстані 12 см від площини ромба. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 20 см [6, с.134].

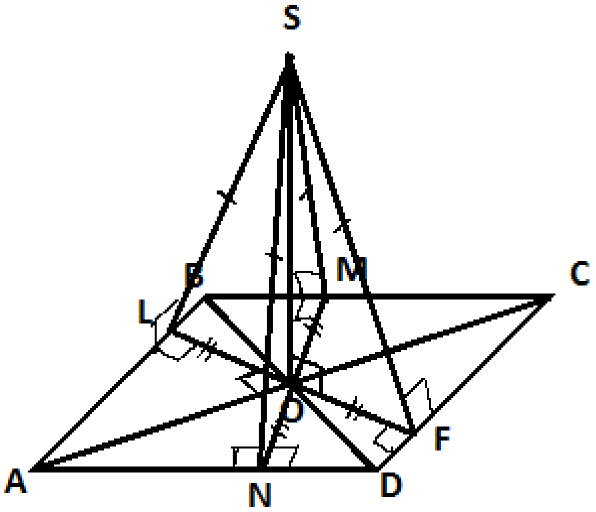


Рис. 3.2

Зобразимо на рисунку ромб $ABCD$. Точка S розміщена на відстані 12 см від площини ромба, і віддалена від кожної сторони ромба на 13 см. Таким чином, SO – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$ і за умовою SO= 12 см, $SF = SN = SM = SL$ = 13см, SF, SN, SM, SL – відстані до сторін DC, AD, BC, AB відповідно.

Також SF, SN, SM, SL є похилими до площини ромба, а OF, ON, OM, OL - проєкції цих похилих площину. За властивістю проекцій похилих проведених з однієї точки до площини, якщо похилі, проведені з однієї точки до площини рівні, то і проєкції цих похилих теж рівні.

За теоремою про три перпендикуляри, якщо SF, SN, SM, SL перпендикулярні до DC, AD, BC, AB відповідно, то і OF, ON, OM, OL теж перпендикулярні до DC, AD, BC, AB відповідно. Таким чином, розглянемо ΔSOF ($\angle O$=90°).

За теоремою Піфагора $OF^2 = SF^2 - OS^2$.

$OF = \sqrt{SF^2 - OS^2} = \sqrt{13^2 - 12^2}$ =$\sqrt{169 - 144}$ = $\sqrt{25}$ = 5 см.

За властивістю діагоналей ромба, вони перетинаються під прямим кутом, і ділять ромб на чотири рівні трикутники, а отже ΔDOC – прямокутний, де $\angle O$=90°.

Знайдемо площу ΔDOC.

$S_{\Delta DOC}$ = $\frac{1}{2} \cdot OF \cdot DC$ = $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20$ = $\frac{1}{2} \cdot 100$ = 50 см^2. Так як таких трикутників чотири, то S_{ABCD} = 4 $\cdot$ 50 = 200 см^2 [5].

У підручниках можна відмітити два означення перпендикулярності прямих, в яких зазначається про кут між прямими 90^0, але відмінність їх в тому, що в одному з них не вказується, що прямі перетинаються, таким чином охоплюються і мимобіжні прямі та згідно того є два означення перпендикулярності прямої і площини, в одному з яких є умова, що якщо пряма перпендикулярна до площини, то вона перпендикулярна до прямої, що лежить у цій площині та *проходить через точку перетину*. І це означення виключає доведення умови перетину прямих.

При означенні перпендикулярності площин часто учні проводять аналогію з прямими і означають перпендикулярні площини як площини, що перетинаються під прямим кутом. Зважаючи на дану помилку, у деяких підручниках можна побачити, що перш ніж увести означення перпендикулярності площин вводиться поняття двогранного кута [12].

Зображення просторових фігур та паралельна проєкція сприяють формуванню чітких уявлень та образів, допомагають встановити зв’язки між елементами фігур.

Рисунок в планіметрії передає реальний образ фігур, тоді як рисунки у просторі мають спотворений вид і мають певні графічні умовності. Тому при зображенні фігур простору необхідно дати учням так звані правила-орієнтири. Зрозумілим є те, що правила виконання зображень стереометричних фігур відрізняється від складних зображень нарисної геометрії, тому зображення можуть містити певні умовності. Головним є те, що рисунки в стереометрії мають відповідати певним критеріям:

- зображення має бути правильним, тобто відповідати властивостям паралельного проєктування;
- Зображення має бути простим, без додаткових побудов, що не використовуються в процесі розв’язування певної задачі;
- Зображення має бути наочним, тобто є моделлю реальної фігури і дозволяє побачити відношення між елементами фігури (немає накладання ребер) [32].

Побудову призми та циліндра слід починати в верхньої основи і рисунок має займати ¼ листка зошита. Видимі лінії слід зображати суцільними лініями, а невидимі – штрихованими [1].

2.4. Завдання зовнішнього незалежного оцінювання з теми дослідження

У завданнях зовнішнього незалежного оцінювання на тему «Взаємне розміщення прямих та площин у просторі» слід відмітити, що це задачі тестової форми, та виділити такі види задач відкритої форми, де доведення чи побудова вимагають знань про прямі та площини в просторі:

- задачі на знаходження кутів чи відстаней між елементами куба, прямокутного паралелепіпеда;
- задачі на знання і застосування аксіом стереометрії;
- задачі, які безпосередньо стосуються знань властивостей та ознак взаємного розміщення прямих, площин та прямих і площин у просторі;
- задачі на побудову перерізу куба чи прямокутного паралелепіпеда.

Наведемо приклади завдань ЗНО [35].

1. Пряма b немає спільних точок з площиною α. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Через пряму b можна провести лише одну площину, перпендикулярну площині α.

II. Через пряму b можна провести лише одну площину, паралельну площині α.

III. У площині α можна провести лише одну пряму, паралельну прямій b.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I, II	лише II, III	I, II, III

Відповідь: В.

2. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести лише одну площину.

II. Через точку, що не належить площині, можна провести безліч прямих, паралельних цій площині.

III. Якщо дві різні площини, паралельні одній і тій самій прямій, то вони паралельні між собою.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I і II	лише I, III	лише II, III	I, II, III

Відповідь: Б.

3. На рисунку 4.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між парою прямих та їх взаємним розміщенням.

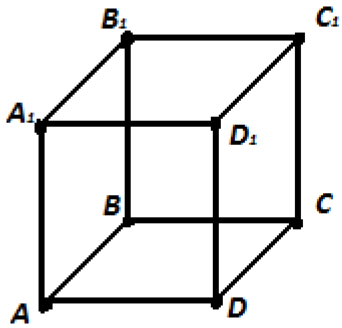


Рис. 4.2

Пара прямих — *Взаємне розміщення прямих*

1. AC і CC_1 — А. прямі паралельні
2. AB_1 і CD_1 — Б. прямі мимобіжні
3. AC і DC_1 — В. прямі перетинаються і утворюють прямий кут
4. AB_1 і C_1D — Г. прямі перетинаються і утворюють кут 45°

Д. прямі перетинаються і утворюють кут 60°

Відповідь. 1) В, 2) Б, 3) Д, 4) А.

4. На рисунку 5.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між парою прямих та їх взаємним розміщенням [35].

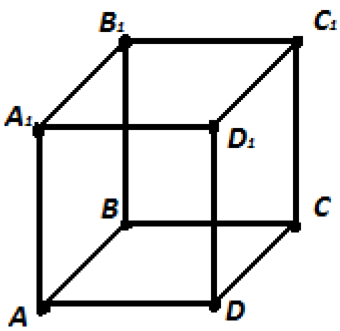


Рис. 5.2

А	Б	В	Г	Д
A_1B	C_1D	CB_1	AB	CD

Відповідь: Г.

5. На рисунку 6.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д), щоб утворилося правильне твердження.

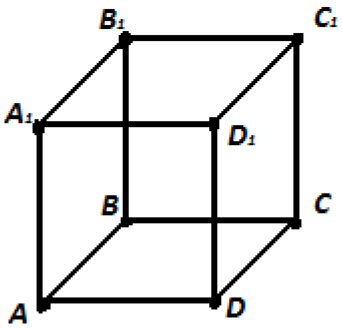


Рис. 6.2

Початок речення	*Закінчення речення*
1. Пряма CB	А. паралельна площині AA_1B_1B
2. Пряма CD_1	Б. перпендикулярна площині AA_1B_1B
3. Пряма AC	В. належить площині AA_1B_1B
4. Пряма A_1B	Г. має з площиною AA_1B_1B лише дві спільні точки
	Д. утворює з площиною AA_1B_1B кут 45°

Відповідь: 1) Б; 2)А; 3)Д; 4)В.

6. На рисунку 7.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1 см. Обчисліть відстань від точки A до прямої B_1C_1.

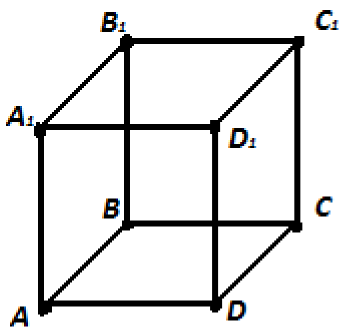


Рис.7.2

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	$\sqrt{2}$см	3см	1,5 см

Відповідь: В.

7. Точка M не належить площині α. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Через точку M можна провести лише одну площину, паралельну площині α.

II. Через точку M можна провести лише одну площину, перпендикулярну площині α.

III. Через точку M можна провести лише одну площину, яка перетинає площину α під кутом $45°$.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і III	лише II і III	I, II, III

Відповідь: А.

8. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Якщо коло з площиною має дві спільні точки, то всі точки кола належать цій площині.

II. Якщо три вершини паралелограма належать площині, то всі точки паралелограма належать цій площині.

III. Якщо круг і площина мають три спільні точки, то всі точки круга належать цій площині.

А	Б	В	Г	Д
лише II	лише III	лише I і II	лише I і III	лише II і III

Відповідь: А.

9. На рисунку 8.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між заданими кутами (1-4) та їхніми градусними мірами (А-Д).

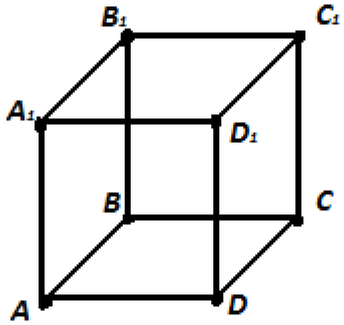


Рис. 8.2

1. Кут між прямими AA_1 і DC_1 — А. 0°
2. Кут між прямими DC і A_1C_1 — Б. 30°
3. Кут між прямими AB_1 і A_1D — В. 45°
4. Кут між прямими BB_1 і DD_1 — Г. 60°

Д. 90°

Відповідь: 1)В, 2) Д, 3) Г, 4) А.

10. На рисунку 9.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обчислити градусну міру кута між прямими AB_1 і DD_1.

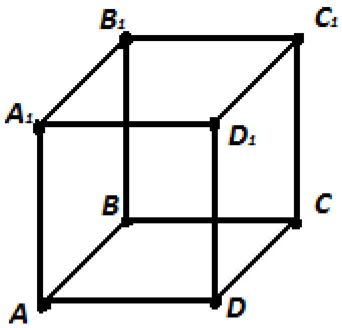


Рис. 9.2

А	Б	В	Г	Д
0°	30°	45°	60°	90°

Відповідь: В.

11. [35] З вершини B квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр SB до площини цього квадрата (див. рис.10.2). Яке з наведених тверджень є правильним?

I. $\angle SBA = 90°$

II. $\angle SAD = \angle SDA$

III. $\angle SAD = 90°$

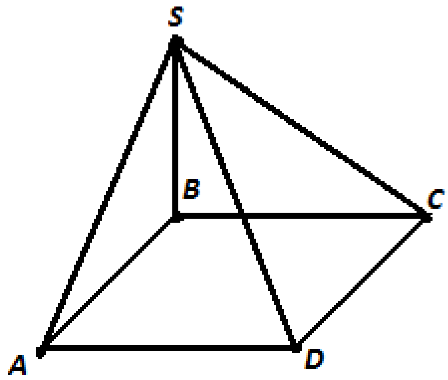


Рис.10.2

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I і II	лише I і III	лише III	I, II, III

Відповідь: В.

12. На рисунку 11.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Яка з наведених прямих паралельна площині (AA_1B_1)?

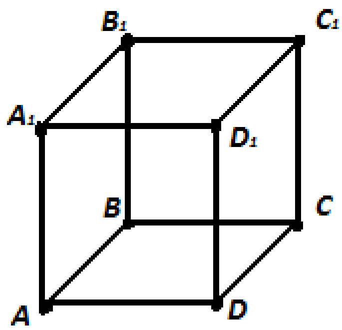


Рис. 11.2

А	Б	В	Г	Д
BC	BD	C_1D	CB_1	A_1B

Відповідь: В.

13.В просторі задано пряму a і точку M, яка не належить цій прямій. Скільки всього прямих, що перетинають пряму a, можна провести перпендикулярно до неї через точку M?

А	Б	В	Г	Д
Жодної	одну	дві	три	Безліч

Відповідь: Б.

14. У просторі задано пряму b і точку А, що не належить цій прямій. Скільки всього існує різних площин, які проходять через точку А і не мають спільних точок з прямою b?

А	Б	В	Г	Д
Жодної	лише одну	лише дві	лише три	Безліч

Відповідь: Д.

15. Прямі a і b мимобіжні. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Прямі a і b перетинаються.

II. Прямі a і b лежать в одній площині.

III. Існує пряма, паралельна прямій a, що перетинає пряму b.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і II	лише III	I, II, III

Відповідь: Г.

16. Відрізок OB є проєкцією похилої AB на площину (див. рис. 12.2). Яке з наведених тверджень є правильним?

I. Відрізки AB і OB перпендикулярні

II. Відрізки AB і OA перпендикулярні

III. Відрізки OB і OA перпендикулярні

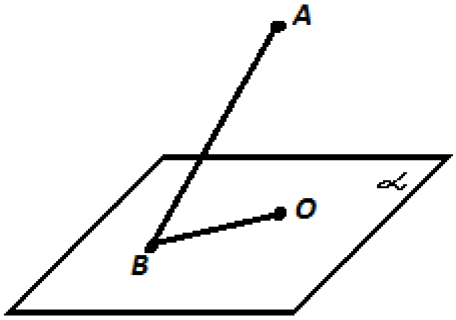


Рис. 12.2

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II та III	лише I і II	лише III	лише II

Відповідь: Г.

17. Точка A належить площині α. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Через точку А можна провести пряму, перпендикулярну до площини α.

II. Через точку А можна провести площину, перпендикулярну до площини α.

III. Через точку А можна провести площину, паралельну площині α.

А	Б	В	Г	Д

лише I	лише II та III	лише II	лише I і II	I, II і III

Відповідь: Г.

18. Площини α і β паралельні. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Існує пряма, що лежить в площині α і в площині β.

II. Якщо пряма, перпендикулярна до площини α, то вона перпендикулярна до площини β.

III. Якщо пряма лежить у площині α, то вона паралельна будь-якій прямій у площині β.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I та II	лише II	лише II і III	лише III

Відповідь: В.

19. Задано дві мимобіжні прямі a і b. Скільки існує різних площин, які проходять через пряму a та є паралельними прямій b?

А	Б	В	Г	Д
жодної	одна	дві	три	безліч

Відповідь: Б.

20. У просторі задано дві прямі m і n. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Існує площина, що містить обидві прямі m і n.

II. Існує пряма, що перетинає обидві прямі m і n.

III. Існує точка, що належить обом прямим m і n.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише II та III	лише III	лише I та II

Відповідь: Д.

21. У просторі задано пряму m і точку A, що не належить прямій m. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Через точку A і пряму m можна провести лише одну площину.

II. Через точку A можна провести лише одну площину, паралельну прямій m.

III. Через точку A можна провести лише одну площину, перпендикулярну до прямої m.

А	Б	В	Г	Д
лише I та II	лише I і III	лише III	лише II і III	I, II та III

Відповідь: Б.

22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$- прямокутний паралелепіпед. Установіть відповідність між площиною (1-4) та паралельну їй пряму (А-Д).

1.AB_1C_1 **2.** DD_1C_1 **3.** AA_1C_1 **4.** AB_1D_1

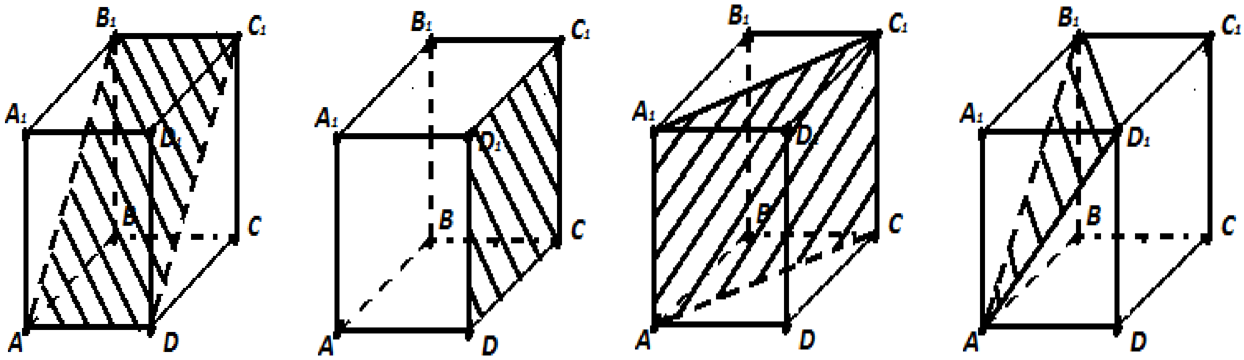


Рис.13.2

Пряма

А BC

Б A_1D

В A_1B

Г BD

Д DD_1

Відповідь: 1)А, 2)В, 3)Д, 4)Г.

23. Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Бічна грань SBC, площа якої дорівнює 24,4 см^2, перпендикулярна до площини основи піраміди. Точка M – середина ребра SB. Площина (MAD) перетинає ребро SC в точці N. Визначте довжину відрізка MN (у см), якщо об'єм піраміди дорівнює 152 см^3, а площа її основи – 57 см^2.

Розв'язання. Побудуємо рисунок до задачі.

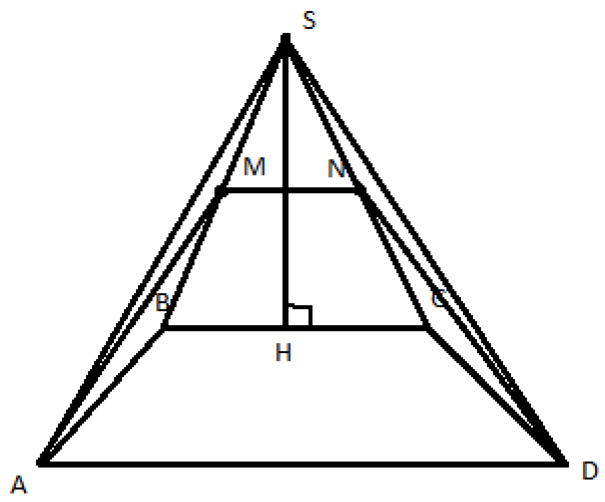


Рис. 14.2

Висота піраміди є висотою ΔSBC, адже грань $SBC \perp ABCD$. Площина (MAD) проходить по паралельним прямим AD і MN. Так як $AD \parallel BC$, то $MN \parallel BC$. Якщо з умови точка M- середина ребра SB, то точка N – середина ребра SC і MN – середня лінія трикутника SBC, де $MN = \frac{1}{2}BC$ Отже, задача звелася до знаходження BC.

Знайдемо висоту SH з формули об'єму піраміди $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH$,

$SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot 152}{57} = 8$ (см). З формули $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}BC \cdot SH$ знайдемо BC:

$BC = \frac{2S_{\Delta SBC}}{SH} = \frac{2 \cdot 24{,}4}{8} = 6{,}1$ (см). Таким чином, $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 6{,}1 = 3{,}05$ (см).

Відповідь: 3,05 (см).

24. На рисунку 15.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1-4) доберіть закінчення (А-Д) так, щоб утворилось правильне твердження.

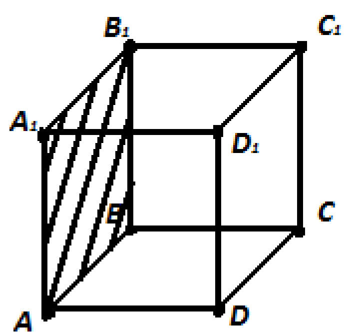


Рис.15.2

Початок речення	*Закінчення речення*
1. Пряма CB	А. Паралельна площині AA_1B_1B
2. Пряма CD_1	Б. Перпендикулярна до площини

	AA_1B_1B
3. Пряма AC	В. Належить площині AA_1B_1B
4. Пряма A_1B	Г. Має з площино AA_1B_1B лише дві спільні точки
	Д. Утворює з площиною AA_1B_1B кут 45°

Відповідь: 1)Б, 2)А, 3)Д, 4)В.

25.На рисунку 16.2 зображений прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1-3) доберіть закінчення (А-Д) так, щоб утворилось правильне твердження.

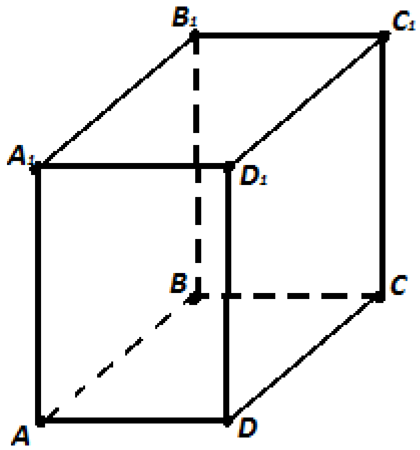


Рис. 16.2

Початок речення	*Закінчення речення*
1. Пряма BD	А. Паралельна площині ABC
2. Пряма A_1C_1	Б. Належить площині ABC
3. Площина ABC_1	В. Перпендикулярна до площини ABC
	Г. Паралельна прямій CD
	Д. Перпендикулярна до прямої CD

Відповідь: 1)Б, 2)А, 3)Г.

26. На рисунку 17.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1-3) доберіть закінчення (А-Д) так, щоб утворилось правильне твердження.

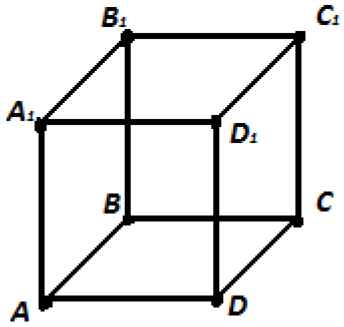


Рис. 17.2

Початок речення	*Закінчення речення*
1. Точка C_1 симетрична точці A_1 відносно площини	А. (AA_1B_1)
2. Пряма AD паралельна площині	Б. (DD_1C_1)
3. Пряма CC_1 є прямою перетину площин (BB_1C_1) та	В. $(A_1B_1C_1)$
	Г. (AA_1D_1)
	Д. (BB_1C_1)

Відповідь: 1)Д, 2)В, 3)Б.

27. Точки A, B, C і D лежать в одній площині. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Якщо точка B належить відрізку CD, то $CB + BD = CD$.

II. Якщо точка A не належить відрізку CD, то $CA + AD < CD$.

III. Якщо відрізок CD перетинає відрізок AB в точці O під прямим кутом і $AO=OB$, то $AC=CB$.

А	Б	В	Г	Д
лише I та II	лише I	лише I та III	лише II	I, II та III

Відповідь: В.

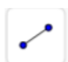
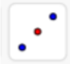
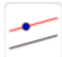
2.5. Формування вмінь та навиків учнів розв'язувати стереометричні задачі з використанням динамічних комп'ютерних моделей, використовуючи програмні засоби GRAN 3D, Geogebra

Розглянувши всі етапи та завдання слід відмітити, що формування вмінь не відбувається безпосередньо. Цей процес включає в собі також і отримання певних знань і навиків. Зрозумілим є те, що процес формування вмінь залежить від рівня підготовки учнів та способу організації навчання вчителем [31]. Сьогодення вимагає від вчителя математики вміння використовувати інформаційно-комунікаційні технології навчання. При формуванні вмінь та навиків, для розвитку просторових уявлень можна вдало використовувати пакети математичних програм як просторове моделювання.

Використання програмних засобів GRAN 3D, Geogebra підвищує ефективність проведення уроків з стереометрії [22]. Ці програми дозволяють: розв'язувати задачі на побудову; зображати та бачити просторові фігури у тривимірному просторі; вимірювати відстані, кути, площі та об'єми у просторі і т. п. завдяки динамічним можливостям програми. Систематичне залучення учнів до різних видів діяльності підвищить їх інтерес та актуалізує знання з геометрії та інформатики і сформує вміння корисно застосовувати отримані знання у реальних ситуаціях.

Покажемо застосування програми Geogebra до розв'язування стереометричних задач.

Задача 1. (№ 29.10, Мерзляк, 10 клас) Кінець відрізка *AB* належить площині α. Через точку *B* і точку *C*, що належить відрізку *AB*, проведені паралельні прямі, які перетинають α в точках *D* і *E* відповідно. Знайдіть відрізок *BE*, якщо точка *C* – середина відрізка *AB* і *CD*=2,5 см.

Розв'язання. Для побудови площини, використаємо один із способів побудови площини α , що подані в програмі. Використовуючи функцію побудови відрізка за допомогою клавіші , будуємо відрізок *AB* так, щоб один його кінець належав площині α (точка *A*), а інший не належав (точка *B*) згідно умови. За допомогою функції знаходження точки середини відрізка  будуємо точку *C* як середину відрізка *AB*. Далі, згідно задачі, будуємо пряму через точку *C*, яка перетинає площину α в точці *D*, за допомогою функціональної клавіші  - побудови прямої через дві точки і, вибравши функціональну клавішу , знайдемо довжину відрізка *CD* і рухаємо точку *D* за допомогою клавіші  до тих пір, поки відрізок *CD* дорівнюватиме 2,5 см. Використавши клавішу , через точку В будуємо пряму паралельну прямій *CD*, яка перетне площину α в точці *E*. Знову, скориставшись функціональною клавішою , знайдемо шуканий відрізок *BE*=5 см. Результат побудови можемо переглянути на рисунку 18.2.

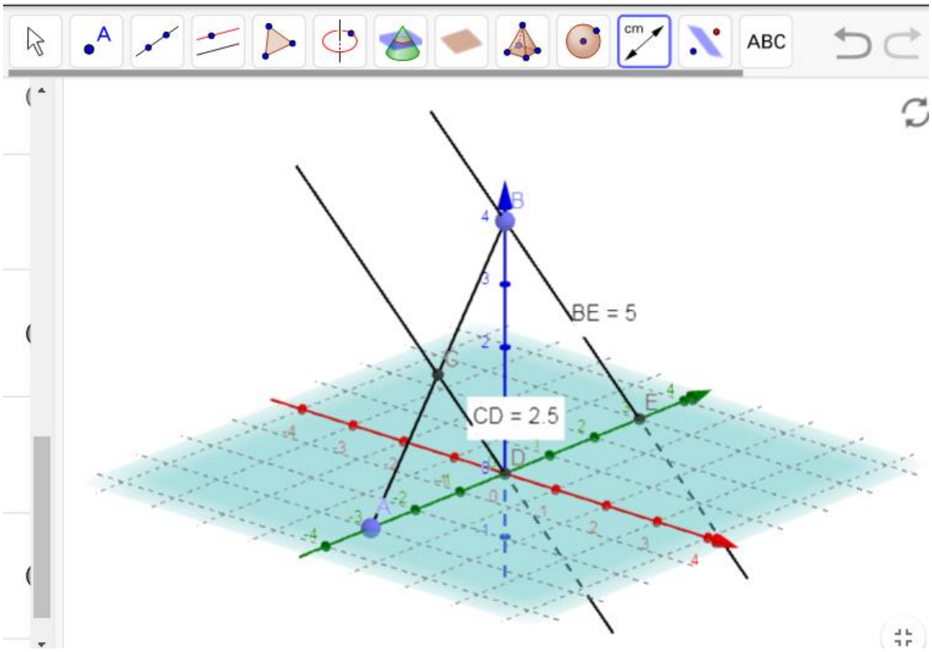


Рис.18.2

Наведемо приклад застосування програмного засобу GRAN 3D до розв’язування стереометричної задачі [7, 8].

Задача 2. (Мерзляк, 11 клас) Із посудини, що має форму конуса з висотою 4 см і діаметром основи 6 см, наповненої до країв водою, перелили воду в посудину, що має форму циліндра. Діаметр основи циліндра дорівнює 4 см.

Якою має бути найменша висота циліндричної посудини, щоб вода з неї не виливалася [17]?

Аналіз задачі. Якщо вміст конуса має вміститися в міст циліндра, то об'єм конуса має дорівнювати об'єму циліндра. А маючи об'єм циліндра і його радіус, ми знайдемо його висоту.

Розв'язання. За даними елементами конуса будуємо у програмі GRAN 3D конус, використовуючи функціональну клавішу – «створення базового просторового об'єкта»: $H = 4$ см, $R = \frac{d}{2} = 3$ см.

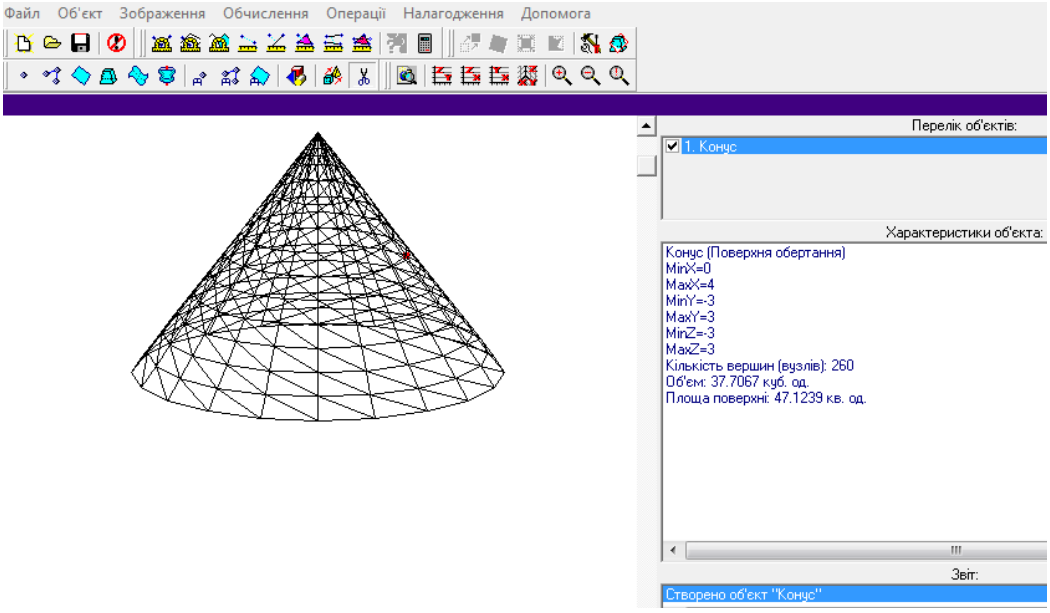


Рис.19.2

В характеристиках об'єкта вказано об'єм і площу поверхні конуса. Отже, $V_{\text{конуса}} = 37{,}7067$ куб. од. Побудуємо циліндр з таким самим об'ємом і радіусом основи $R = \frac{d}{2} = 2$ см за допомогою функціональної клавіші – «відстані між двома точками» і знайдемо висоту циліндра.

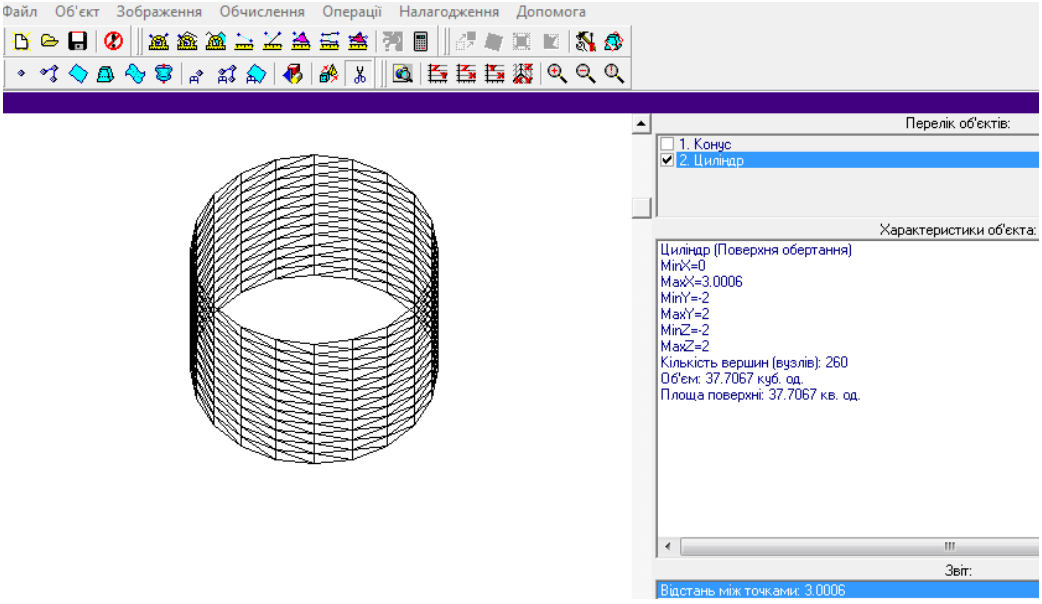


Рис. 20.2

Таким чином у звіті видно, що висота циліндра дорівнює 3,0006 см і це є найменшою висотою, щоб вода з циліндричної форми не виливалась.

Як бачимо, розв’язування стереометричних задач за допомогою прикладних математичних засобів не потребує великих знань самих програм, адже кожна функціональна клавіша доповнена підказкою. Зрозумілим є те, що учні мають мати базові знання предмету з відповідних тем.

Отже, використання програмних засобів дозволяє розв’язувати певні задачі, навіть, учням з початковим і середнім рівнями знань, розв’язування яких стимулює їх пізнавальну активність [7].

ВИСНОВКИ ДО ДРУГОГО РОЗДІЛУ

У другому розділі нами проаналізовано програми з геометрії трьох рівнів вивчення. Аналіз дав можливість стверджувати, що теми вивчення геометрії у трьох рівнях збігаються, лише різняться за кількістю відведених годин.

Дослідивши психолого-педагогічну літературу нами було окреслено поняття знання, вміння та навики і виокремлено три етапи формування вмінь розв'язування задач з стереометрії: підготовчий, початковий і заключний. Етап автоматизації відноситься до набуття учнями навиків. Також нами досліджено, що формування вміння розв'язувати стереометричні задачі тісно пов'язані з розвитком просторової уяви. Зрозумілим є те, що умовами успішного формування вмінь та навиків є отримані знання та організація роботи вчителя. Застосування вчителем різних новітніх технологій навчання дає можливість активізувати пізнавальну діяльність учнів, заохотити до самостійної роботи, викликати інтерес до вивчення теми і як результат є формування компетентностей зазначених у програмі з математики.

Проаналізувавши методичну літературу, нами узагальнено основні методичні особливості вивчення досліджуваної теми, а саме роль рисунка при розв'язуванні задач та формуванні просторової уяви, побудова фігур та їх взаємного розміщення у просторі, специфіка доведень та запис задач на доведення, виокремлено основні методичні особливості при вивченні взаємного розміщення прямих і площин у просторі.

У цьому розділі нами було представлені завдання ЗНО з попередніх років, що дозволило нам стверджувати те, що тема є актуальною, адже у більшості років проведення ЗНО мінімум три завдання стосується стереометрії. Це завдання і тестової форми, і завдання на встановлення відповідності, і завдання відкритої форми, де перша частина стосується лише тем взаємного розміщення прямих та площин у просторі.

Зважаючи на тему роботи, нами запропоновано один з варіантів організації навчального процесу при вивченні стереометрії – це використання математичних програмних засобів GRAN 3D, Geogebra. Це дозволяє використовувати динамічні рисунки вчителем як наочність при безпосередньому формуванні знань та при розв'язуванні задач як засіб формування вмінь і навиків та викликати інтерес до навчання геометрії.

ВИСНОВКИ

Систематичне вивчення геометрії в школі, властивостей фігур на площині, у просторі дає можливість сформувати просторову уяву, розвинути логічне мислення, засвоїти знання і їх застосовувати при вивченні таких дисциплін як фізика, хімія, трудове навчання, географія тощо. Геометрична наочність, логічна чіткість і послідовність вивченого матеріалу, використання різних методів і засобів разом з педагогічною майстерністю, а також мотивацією учнів – все це дозволить засвоїти знання та сформувати вміння і навики застосовувати геометричний апарат при розв'язуванні задач на побудову, обчислення і доведення, задач прикладного та міжпредметного змісту як реалізація практичного спрямування курсу геометрії.

В даній роботі нами представлені теоретичні знання та методичні основи при викладанні геометрії з тем на взаємне розміщення прямих та площин у просторі. Розглянуті психолого-педагогічні та методичні особливості формування знань, вмінь та навиків із вказаних тем. Представлений один із засобів наочності, формування певних компетентностей при вивченні стереометрії, а саме математичні програмні засоби GRAN 3D, Geogebra.

Також нами було проведене опитування вчителів з метою аналізу перспектив використання альтернативних методик, а саме використання програмних математичних засобів навчання у старшій школі, задля формування вмінь та навиків учнів розв'язувати стереометричні задачі. Результати якого вказують, що вчителі рідко користуються математичними програмними засобами по причині незнання їх, або ж браком часу, або з пандемією, або зі станом війни в нашій державі (тривалий час навчання проводиться дистанційно або асинхронно). Але разом з тим, ті вчителі, які раніше користувалися динамічними програмами, а саме GRAN 3D, Geogebra відмічають, що учні із задоволенням працюють на цих уроках, активізується їх пізнавальна активність, самостійність та цілеспрямованість при розв'язуванні задач. Зрозумілим є те, що дані програми часто не використовувалися, адже вимагають багато часу, в більшості використовують резервний час зазначений у календарному плануванні та у 10 класі, адже 11 клас вимагає інтенсивної підготовки до ЗНО.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. (1989) Методика викладанння математики. К.: Вища школа. 160 с.
2. Біляніна О., Білянін Г., Швець В. (2010) Геометрія 10 клас. К.: Генеза. 259 с.
3. Борейко О. (1991) Розвиток просторових уявлень учнів X-XI класів при вивченні стереометрії: дис.канд.пед.наук: 13.00.02 «Теорія та методика навчання». К. 166 с.
4. Вітюк О. (2005) Використання засобів новітніх інформаційних технологій навчання під час розв'язування стереометричних задач обчислювального характеру // Математика в школі. К. №5. С. 95-149
5. Демянчук В. І., Генсіцька-Антонюк Н. О. (2022) Значущість теореми про три перпендикуляри в шкілньому курсі матема тики // Матеріали XV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Наука, освіта, суспільство: очима молодих». Рівне: РДГУ. С. 14
6. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. (2018) Геометрія: проф. рівень : підруч. Для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. :Видав-тво «Ранок». 288 с.
7. Жалдак М. І., Вітюк О. В. (2004) Комп'ютер на уроках геометрії. Посібник для вчителів. К.:РННЦ ДУМТ. 168 с.
8. Жалдак М. І., Горошко Ю. В. (1992) Програми GRAN 1, GRAN 2, GRAN 3 для вивчення математики в школі і вузі: Метод. Рек. К.: КДПУ. 52 с.
9. Істер О. (2018) Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза. 384 с.
10. Істер О., Єргіна О. (2018) Геометрія: (поглибл. Рівень): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза. 384 с.
11. Істер О., Єргіна О. (2018) Геометрія: (проф. рівень): підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза. 368 с.

12. Кобко Л. (2014) Аналогія: планіметрія – стереометрія // Математика в рід. Шк. : наук.-метод. Журн. № 11. С. 16-24
13. Крамаренко Т. (2013) Використання мультимедійної дошки під час навчання геометричних перетворень на площині // Математика в сучас. Шк. : наук.-метод. Журн. № 9. С. 38-43.
14. Кушнір І. (1994) Методи розв'язання задач з геометрії//Книга для вчителя. К. : Абрис..464 с.
15. Кушнір І. (1996) Геометрія. Теореми і задачі. Стереометрія. К. : Астрата.Т. 2.477 с.
16. Ленчук І. (2013) Перпендикулярність прямих і площин : конструкт. Складова теми // Математика в сучас. Шк. : наук.-метод. Журн. № 11. С. 16-21.
17. Мерзляк А., Номіровський Д., Полонський В., Якір М. (2018) Геометрія: профільний рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія. 240 с.
18. Мерзляк А., Номіровський Д., Полонський В., Якір М. (2018) Геометрія: початок вивчення на поглибл. Рівні з 8 кл, проф. рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія. 272 с.
19. Мерзляк А., Номіровський Д., Полонський В., Якір М. (2018) Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія. 256 с.
20. Милерян Е. (2013) Психология труда и профессионального образования. Избранные научные труды / Автор-составитель В. Милерян. К.: НПП «Интерсервис». 290 с.
21. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-

11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx [Дата звернення 10.10.2021].

22. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx [Дата звернення 10.10.2021].

23. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx [Дата звернення 10.10.2021].

24. Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas [Дата звернення 10.10.2021].

25. Навчальна програма з математики для учнів 8-9 класів загальноосвітніх закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL:https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf [Дата звернення 10.10.2021].

26. Нелін Є. (2010) Геометрія: дворівневий підручник для 10 кл. загальноосв. навч. закладів : академ. І проф. рівні. Х: Гімназія. 240 с.

27. Павелків Р. (2009) Загальна психологія. Підручник. К.: Кондор. 576 с.

28. Рабінович Ю. М. (2000) Геометрія 9-10 кл. Задачі на готових кресленнях. Х.: Кімо. 52 с.

29. Раухман А. С., Сень Я. Г. (1989) Усні вправи з геометрії для 7-11 класів. К.: Рад.шк. 160 с.

30. Роєва Т. Г., Хроленко Н. Ф. (2001) Геометрія в таблицях. 10-11 класи: Навч. Посібник. Х.: Видавнича група «Академія». 152 с.
31. Сергєєнкова, О., Столярчук, О., Коханова, О., Пасєка, О. (2012). Педагогічна психологія: Навчальний посібник. К.: Центр учбової літератури. 168 с.
32. Слєпкань З. (2002) Методика викладання математики. Київ: Педагогічна преса. 512 с.
33. Сокол І. (2014) Застосуваня аксіом стереометрії до розв'язування задач // Математика в рід. Шк. : наук.-метод. Журн. № 6. С. 20-21.
34. Тесленко І. (1954) Формування геометричних уявлень і розвиток просторової уяви учнів // Радянська школа. К. № 10. С. 27-34
35. Тести ЗНО онлайн. Завдання за темами з математики. URL:https://zno.osvita.ua/mathematics/tema.html. [Дата звернення 10.10.2021].
36. Толок В. О. (2000) Математика для вступників до вузів: Навчальний посібник. Запоріжжя : Просвіта.656 с.
37. Трофімов Ю. Л., Рибалка В. В., Гончарук П. А. (1999) Психологія: Підручник. К.: Либідь. 558 с.
38. Ушаков Р. (1957) Кути в стереометрії. К. : Техніка. 120 с.
39. Ушаков Р. (1999) Повторювальний курс математики. Навчальний посібник; за ред. М. Й. Ядренка. Київ: Техніка. 504 с.
40. Ушаков Р. П. (2015) Кути в стереометрії. Кут між мимобіжними прямими // Математика в шк. України : наук.-метод. Журн. № 6. С. 21-23.
41. Ушаков Р. П.(2015) Кути в стереометрії. Кут між прямою і площиною // Математика в шк. України : наук.-метод. Журн. № 7-8. С. 13-19.
42. Філон Л. Вивчення елементів стереометрії в курсі математики основної школи: автореф. Дис. На здобуття наукового ступеня канд. Пед. Наук: 13.00.02 «Теорія та методика навчання». К. 19 с.

43. Фіцула М. М. (2002) Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. К.: Видавничий центр «Академія». 528 с.

44. Швець Л. (2013) Розвиток умінь старшокласників виконувати просторові зображення: вступ до стереометрії // Математика в сучас. Шк. : наук.-метод. Журн. № 1. С. 17-23.

45. Якимович В. (2008) Теоретико-педагогічні засади розробки змісту навчання методів розв'язування стереометричних задач на побудову // Математика в школі. К. № 11-12. С. 55-61

46. Ясінський В. (2005) Метематика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ»; за ред. Чл.-кор. НАН України В. С. Мельника. Київ: НТУУ «КПІ». 372 с.

Додаток

АНКЕТА

Шановні вчителі, Ви приймаєте участь в опитуванні, метою якого є дослідження того, що одним із засобів формування певних компетентностей, зазначених в Державному стандарті є розв'язування задач з використанням математичних програмних засобів.

Просимо Вас відповісти на всі запитання анкети. Результати опитування будуть використані для аналізу перспектив використання альтернативних методик, а саме використання програмних математичних засобів навчання у старшій школі, задля формування вмінь та навиків учнів розв'язувати стереометричні задачі.

1. Якими засобами наочності ви користуєтесь при вивчення стереометрії? (перерахуйте)
2. Чи доводилось вам працювати з математичними програмними засобами при поясненні чи розв'язуванні задач з стереометрії? (Якщо не користувалися, то напишіть причину?)
3. Якщо ви використовували математичні програмні засоби, то назвіть якими саме ви користувалися програмами?
4. Яку мету ви переслідували, користуючись зазначеними програмами?
5. Опишіть реакцію учнів на використання таких математичних програмних засобів на уроках геометрії
6. Чи варто систематично використовувати математичні програмні

засоби на уроках стереометрії? Чому?
7. Виберіть, на якому рівні вивчення краще використовувати математичні програмні засоби, на Вашу думку? А) у класах, де математика вивчається на рівні стандарту; Б) у класах з профільним або поглибленим рівнями; В) у всіх класах з різним рівнем вивчення математики.
8. Чи є можливість використання програмних засобів в реаліях сьогодення (дистанційне, асинхронне навчання)? Яка ваша думка?
9. Ваші побажання щодо покращення якості уроку в сучасних умовах.