Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота

бакалаврського рівня

на тему:

Основні методи та методики розв’язування планіметричних задач

Виконала:
студентка 4 курсу, групи МІ-41
Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Скиба Анна Василівна
Керівник проф. Крайчук Олександр Васильович
Рецензент: проф. Петрівський Борис Петрович

Рівне-2022 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Демократизація системи освіти вимагає від педагогічної науки пошуку нових методичних технологій, які б забезпечили поряд із високим рівнем теоретичної і практичної підготовки з математики переорієнтацію навчально-виховного процесу на особистість учня, сприятливі умови для досягнення кожним учнем обраного рівня знань.

Перебудова шкільної геометричної освіти займає важливе місце у цих процесах, оскільки геометричні знання і вміння – це один із факторів, що сприяють загальнокультурному розвитку людини, її готовності до неперервної освіти та професійної діяльності.

Вивчення геометрії пов’язане з оволодінням методами пізнання, науковим стилем мислення, розвитком інтуїції, просторової уяви і уявлень.

Поряд із цим геометрія має чітку гуманітарну спрямованість, оскільки є мовою науки і техніки, необхідна для моделювання та вивчення багатьох явищ, що відбуваються у природі та суспільстві, формує духовну сферу людини, інтелектуальні, морально-етичні складові людської особистості, що зумовлено тим великим запасом загальнолюдських і загальнокультурних цінностей, які надбала геометрична наука у процесі свого розвитку.

Вона є потужним засобом виховання творчих здібностей учнів, має значні можливості у справі естетичного виховання, відчуття гармонії у природі, навколишньому світі, розвитку художньо-графічної культури учнів.

Шкільна геометрична освіта передбачає пропедевтику систематичного курсу геометрії при навчанні математики у 5-6 класах.

У цей період учні ознайомлюються із поняттями про основні геометричні фігури та простішими їх властивостями, елементами дедуктивних доведень, виробляють вміння виконувати найпростіші вимірювання і побудови, розв’язувати задачі на обчислення значень геометричних величин (довжин, площ, об’ємів).

Формування геометричних понять, графічних умінь та навичок, розвиток просторової уяви і уявлень у дітей цього віку сприяє розвитку образного мислення, розумових дій, ґрунтовному засвоєнню математичних знань і виробленню вмінь їх застосовувати.

З пізнавальної точки зору важливу роль на цьому етапі вивчення геометрії має оволодіння навичками виконання таких розумових операцій, як узагальнення, систематизація і конкретизація найпростіших практичних ситуацій, аналіз і синтез, порівняння і протиставлення, логічне конструювання і моделювання.

Найважливішим завданням вивчення геометричного матеріалу в 5 - 6 класах є підготовка учнів до успішного засвоєння систематичного курсу геометрії. Особлива увага звертається на формування вмінь оперувати поняттями, виконувати найпростіші вимірювання та побудови, проводити дедуктивні міркування.

У зв'язку з цим істотно зростає актуальність проблеми формування в учнів геометричних понять і умінь.

Вагомий внесок у розв'язання цієї проблеми зроблений психологами Г.О. Баллом, Л.С. Виготським, В.В. Давидовим, П.Я. Гальперіним, Г.С. Костюком, Є.М. Кабановою-Меллер, О.М. Леонтьєвим, Є.І. Машбицем, Н.О. Менчинською, С.Л. Рубінштейном, Н.Ф. Тализіною, Л.М. Фрідманом, П.О. Шеварьовим, І.С. Якиманською та ін. У роботах цих авторів розкривається зміст і операційний склад умінь, виділяються прийоми і засоби керування розумовою діяльністю учнів при формуванні понять, умінь і навичок.

Питання вдосконалення процесу формування понять і вмінь учнів розглядалися у дослідженнях дидактів (А.М. Алексюк, Ю.К. Бабанський, Л.В. Занков, І.Я. Лернер, М.І. Махмутов, В.О. Онищук, В.Ф. Паламарчук, М.М. Скаткін та ін.), роботи яких визначили основу осмислення проблеми, структури і особливостей навчальної діяльності, відбору методів, прийомів і засобів її вироблення в учнів.

Методичні аспекти формування математичних понять і умінь відображені у наукових працях О.К. Артемова, Г.П. Бевза, М.І. Бурди, М.Я.

Ігнатенка, О.С. Дубинчук, М.І. Жалдака, Ю.М. Колягіна, А.А. Столяра, З.І. Слєпкань, І.Ф. Тесленка, М.І. Шкіля та інших.

Мета дослідження – розробити, теоретично обґрунтувати методичну систему (цілі, зміст, організаційні форми, методи, прийоми і засоби) вивчення геометричного матеріалу в основній школі.

Об'єкт дослідження – процес навчання геометрії учнів.

Предмет дослідження – методика вивчення геометричного матеріалу в курсі математики основної школи.

Відповідно до мети дослідження поставлено такі ***завдання***:

1. Проаналізувати: а) стан проблеми у педагогічній теорії та практиці сучасної школи; б) зміст і структуру курсу геометрії; в) методи, прийоми і засоби формування геометричних понять, умінь і навичок.

2. З'ясувати особливості, зміст і структуру навчальної діяльності учнів та вимоги до її організації при вивченні геометричного матеріалу в 5 - 6 класах.

3. Розкрити зміст і операційний склад геометричних умінь, які характеризують сучасну геометричну підготовку учнів і враховують особливості рівневої геометричної діяльності.

5. Розробити методичну систему навчання елементів геометрії в умовах рівневої диференціації.

Для розв'язання поставлених завдань використовувалися такі ***методи дослідження***: системний аналіз психолого-педагогічної та навчально-методичної літератури з проблеми дослідження (уточнення понятійного апарату, змісту геометричних умінь і закономірностей їх формування); моделювання педагогічних процесів (уточнення дидактичної структури уроків та їх типів, розробка принципів добору вправ і видів орієнтовних основ діяльності з їх розв'язування).

Наукова новизна дослідження полягає у тому, що: вперше визначено зміст і операційний склад геометричних умінь учнів 5-6 класів; з'ясовано рівні програмових вимог до їх формування; розроблено принципи добору системи геометричних вправ; виявлена необхідність застосування групової форми організації навчальної діяльності учнів для досягнення учнями обов'язкового рівня результатів навчання математики.

Теоретична значущість дослідження полягає у теоретичному обґрунтуванні особистісто-орієтованої методичної системи формування геометричних понять, умінь і навичок, яка включає в себе мету, зміст, організаційні форми, методи, прийоми і засоби навчання і враховує операційний склад умінь, програмові вимоги до їх формування в умовах рівневої диференціації навчання.

Практичне значення дослідження визначається тим, що: розроблена методична система забезпечує ефективне формування геометричних понять, умінь і навичок; виявлені напрямки удосконалення організаційних форм, методів і засобів навчання геометрії; теоретичні положення і науково-методичні матеріали, які містяться у дослідженні, поширюються на альтернативні програми і підручники з математики; матеріали і висновки дослідження можуть бути використані методистами інститутів підвищення кваліфікації учителів, викладачами вузів, учителями, студентами.

Структура дослідження. Робота складається зі вступу, основного тексту роботи, до якого входять три розділи, висновки, список використаних джерел. Загальний обсяг роботи 86 сторінок, список використаних джерел становить 50 найменування і займає 6 сторінок.

РОЗДІЛ І. НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНІ СКЛАДОВІ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ В ШКОЛІ

1.1. Вивчення елементів планіметрії на рівні пропедевтики в 5-6 класах

Проблема вивчення пропедевтичного курсу геометрії, заснованого на фузіоністському підході (фузіонізм має на увазі злите вивчення розділів, в даному випадку - двох частин геометрії - планіметрії та стереометрії), не нова. Згадував про нього ще перський мислитель Ібн Сіна Абу Алі Хусейн ібн Абдаллах (Авіценна: 980 - 1037), злите вивчення властивостей плоских та просторових фігур підтримував і французький математик XVIII ст. Ж. Даламбер.

Пропедевтика (від грец. - попередньо навчаю) - введення в якусь науку, попередній, вступний курс, систематично викладений у стиснутій та елементарній формі, що передує глибшому вивченню предмета.

Головне щодо пропедевтичного курсу – це показати красу геометрії, її унікальність у системі навчання школярів. Практика навчання математики та спеціальні дослідження свідчать, що інтерес учнів до вивчення геометрії відрізняється від інтересу до вивчення алгебри. В першу чергу поясненням тому є функціональна асиметрія півкуль головного мозку. Права і ліві півкулі відповідають за різні сфери діяльності: одна за уяву та творчість, інше за логіку та розрахунок. Права півкуля обробляє одночасно велику кількість деталей, елементів, здійснюючи одномоментне схоплювання розглянутої «картини», ліве ж обробляє інформацію, що надходить поелементно, проводячи аналіз кожної окремої порції.

Посилена увага школи до абстрактно-логічного є гальмом розвитку правої півкулі порівняно з лівим, і тому у більшої кількості учнів інтерес до алгебри та відповідно знання вищі, ніж до геометрії.

Про це свідчать і результати олімпіад різного рівня, так і результати ЗНО та ДПА з математики. Стан геометричної складової у спільній математичній підготовці відбивається і на відповідній підготовці вчителів математики.

Як відомо, у 5-6-х класах відбувається перехід від наочно-образного мислення до абстрактного, і геометрія як один із самих абстрактних розділів математики сприяє розвитку «правопівкульної» здібності до уловлювання безлічі зв'язків предметів та явищ. На думку психологів (І. С. Якиманська та ін.) та методистів (В. А. Гусєв, Г. Д. Глейзер, А. Я. Цукар та ін.), систематичний курс геометрії починають вивчати у школі пізніше сензитивного (психологічно сприятливого) періоду на її вивчення. Дослідники вважають, що наочно-образне мислення та уява найбільш повно розвиваються у учнів, починаючи з молодшого шкільного віку, а вік 10-11 років є найбільш підходящим для розвитку наочно-образного мислення та уяви. Враховуючи цю особливість (при взаємопов'язаному вивченні властивостей плоских та просторових фігур), нами виділені дидактичні блоки: 1) куб – квадрат; 2) паралелепіпед – прямокутник.

Ми узагальнили поняття «взаємопроникні фігури», що застосовується для одномірних, двомірних та тривимірних фігур, введене І. С. Якиманською для плоских (двовимірних) фігур. «Взаємопроникні фігури», на її думку, ті, що мають частину загальної площі: одними своїми частинами вони перекривають один одного, іншими – не збігаються. "Взаємопроникні фігури" мають частину загальної довжини (площі чи обсягу).

Пророблячи той самий матеріал, один учень успішно використовує словесну форму, інший - переводить їх у графічний образ і так далі. У зв'язку з цим на основі обліку відмінності учнів розглянуті завдання: 1) уяву без опори на сприйняття (завдання на уявне переміщення та реконструкцію геометричних фігур, заданих за описом); 2) на уяву з опорою на сприйняття (на осмислення креслення, перекроювання фігур).

Найбільший інтерес викликають завдання, яких потрібно самостійно скласти, а потім і вирішити ті, що розвивають ідею вихідних. Умова першого завдання (на уяву з опорою на сприйняття) може бути сформульовано, таким чином, на розсуд вчителя, що її можна віднести до завдання на уяву без опори на сприйняття.

Роль пропедевтики геометричних знань стає важливою, оскільки у державних освітніх стандартах загальної освіти другого покоління зазначено, що система математичної освіти в основній школі повинна стати більш динамічною за рахунок варіативної складової протягом усього другого ступеня загальної освіти [8]. В зразкову програму основної загальної освіти (математика) передбачено значне збільшення активних форм роботи, спрямованих в розвитку особистості школяра [9].

Перелік складових геометричної компетентності учнів 5-6 класів (пропедевтика елементів геометрії):

- Геометричні фігури, їх елементи та властивості;

Пояснює зміст понять: відрізок, пряма, промінь, кут, трикутник, квадрат, прямокутник, многокутник, площина, прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда; коло, круг, круговий сектор, циліндр, конус, куля.

Формулює означення перпендикулярних і паралельних прямих.

Класифікує: кути за їхньою градусною мірою; трикутники за видом їхніх кутів і кількістю рівних сторін; взаємне розміщення прямих на площині.

Зображує та знаходить на малюнках: прямокутний паралелепіпед, куб, піраміду, коло і круг; циліндр, конус, кулю.

- Геометричні величини їх вимірювання та обчислення;

Наводить приклади: формул, рівних фігур.

Пояснює зміст понять: рівні фігури.

Записує і пояснює формули: периметру вказаних в змісті геометричних фігур; площі прямокутника, квадрата, об’єму прямокутного паралелепіпеда та куба; довжини кола і площі круга.

Класифікує: кути за їхньою градусною мірою.

Знаходить на малюнках: відрізок даної довжини та кут даної градусної міри.

Вимірює та обчислює: довжину відрізка; градусну міру кута.

Розв'язує вправи, що передбачають: обчислення за формулами периметру зазначених геометричних фігур, площі прямокутника, квадрата і об'єму прямокутного паралелепіпеда та куба; знаходження довжини кола і площі круга; аналізує графіки залежностей між величинами (відстань, час; температура, час).

- Геометричні побудови;

Будує: відрізок даної довжини та кут даної градусної міри; бісектрису кута за допомогою транспортира; вказані в змісті геометричні фігури за допомогою лінійки, косинця, транспортира; перпендикулярні й паралельні прямі за допомогою лінійки і косинця.

- Координати та вектори;

Пояснює зміст понять: координатний промінь; координатна пряма; координатна площина.

Будує та знаходить на малюнках: координатний промінь; координатну пряму; координатну площину.

Розв'язує вправи, що передбачають: знаходження координати точки на координатній прямій та побудову точки за її координатою; знаходження координат точки на координатній площині та побудову точки за її координатами.

Тому, для ефективного засвоєння планіметричного матеріалу, необхідна достатня підготовка учнів на кожному етапі навчання.

В курсі математики 1-6 класів недостатньо відомостей про просторові фігури, тому учні основної школи повинні швидко перебудувати свою структуру психічних операцій і вчитися мислити в не звичному для них тривимірному просторі, а в площині (до вивчення стереометрії переходять тільки в 10-му класі).

Зміст курсу повинен включати матеріал відкритого типу, зокрема пропонувати відкриті завдання, вирішення яких не однозначно, а має на увазі безліч запитань і відповідно безліч відповідей, тобто неоднозначність рішення або невизначене рішення. Такий напрямок сприяє, як показує практика навчання геометрії в основній школі, формуванню багатозначності бачення, зокрема геометричне бачення. Наприклад, учень подивився у вікно і вигадав завдання на застосування розгорток. Вона може бути багатоплановою (наприклад, завдання на реальне чи уявне відтворення розгорток по конфігурації фігур або на відтворення конфігурацій фігур щодо їх розгорткам, на зіставлення розгорток) [10]. Такий зміст завдань має практико-орієнтовану спрямованість при їх рішенні учні оперують просторовими образами; відбувається розвиток практичних, в тому числі і графічних умінь учнів; з'являються навички самоконтролю, а також здійснюються внутрішньо-предметні та міжпредметні зв'язки.

Зазначимо, що з особливостей змісту навчання вітчизняної освіти, на відміну західного (зокрема і математичного), полягає в тому, що воно менш наближене до реального життя. Адже як свідчать психолого-педагогічні дослідження, привернути увагу школяра, найефективніше сформувати його мотивацію можна, якщо зміст завдань буде пов'язаний зі знайомою учням обстановкою. Природно, цей напрямок почали відображати і при складанні олімпіадних завдань різного рівня, підсумкових атестацій в основній та старшій школі у формі ДПА та ЗНО.

Тут має сенс розглядати внутрішню мотивацію, психічну щодо суб'єкту - учню, а не зовнішню (оцінку або матеріальний стимул), навчання має бути привабливим для школярів, що залежить багато в чому від успішності їх досягнень, учні можуть відчувати задоволення від вивчення тієї чи іншої фрагмента предмета. Для цього учням повинні бути зрозумілі цілі, що досягається орієнтацією процесу навчання - від зони актуальної до зони найближчого розвитку [11], яка досягається залученням конкретноісторичного матеріалу, використанням відомостей, що належать до математичного змісту, що вплинули на розвиток математики тощо.

Ще В. К. Беллюстин зазначав: «Теоретичність освіти, яка дає можливість застосування знання до справи, є шкідливим початком у сучасній системі освіти, так як виключає можливість гармонійного духовного розвитку людини, тобто паралельного розвитку розуму, почуття, волі ... » [12, с. 46]. У зв'язку з цим необхідно уявити геометричний матеріал у 5-6-х класах так, щоб зацікавити учнів, створити об'єктивні передумови для формування внутрішньої мотивації до вивчення предмета, що сприяє розвитку особи школяра.

Базова геометрична підготовка дозволяє досягти вищого рівня освіти (дедалі більше спеціальностей пов'язані з безпосереднім застосуванням геометрії: фізика, хімія, техніка, інформатика та інші), в силу цього розширюється коло учнів, котрим математика, зокрема геометрія, стає професійно значущим предметом. Цілі навчання математики в основній школі за новими стандартам, включаючи геометричну пропедевтику, визначаються її роллю у розвитку суспільства в цілому, розвитку інтелекту, формуванні особи кожного школяра.

1.2. Завдання навчальних програм щодо вивчення систематичного курсу планіметрії в основній школі

Вивчення математики в сучасній школі займає особливе місце. Цей навчальний предмет спрямований не тільки на оволодіння певними математичними знаннями, навичками і вміннями, а й на загальний, всебічний розвиток учня як повноцінної, успішної, адаптованої до сучасного соціуму особистості.

У шкільній геометрії вивчаються моделі реальних об'єктів, для яких визначаються геометрична форма, розміри, взаємне розташування з іншими об'єктами на площині і в просторі. Тобто на відміну від алгебри і початків аналізу зміст геометрії менш абстрактний, більш образний, а тому є широкі можливості продемонструвати зв'язок математичної теорії і практичних завдань, з якими учні можуть зустрітися в реальному житті.

Серед цілей навчання геометрії: розвиток логічного мислення, просторової уяви, геометричної інтуїції. Навчання геометрії в школі покликане сприяти формуванню здатності учнів обґрунтовувати, доводити твердження, навчити працювати із задачею в широкому розумінні цього поняття тощо. Відповідно до цього – викладання геометрії в школі має включати три тісно пов'язаних, але разом з тим і протилежних елементи: логіку, наочне уявлення і застосування до реальних речей.

У навчальній програмі з математики для основної школи 2017 року [20] зазначено, що курс математики 5-6 класів передбачає розвиток, збагачення і поглиблення уявлень учнів про окремі геометричні фігури і геометричні тіла.

Понятійний апарат, обчислювальні алгоритми, графічні уміння і навички, що мають бути сформовані на цьому ступені вивчення математики, є тим підґрунтям, що забезпечує успішне вивчення в наступних класах геометрії, а також інших навчальних предметів, де застосовуються геометричні знання.

Зміст навчального матеріалу елементів геометрії у порівнянні з попередніми програмами певним чином розширено. Зокрема, з'явилися теми: многокутники, рівні фігури, піраміда, циліндр, конус, куля, координатна площина.

У державних вимогах до рівня загальноосвітньої підготовки учнів 5-6 класів у програмах з математики 2017 року зазначено:

Уміння: оперувати числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі; встановлювати відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях.

Ставлення: усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного й оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін.

Навчальні ресурси: розв’язування математичних задач, зокрема таких, що моделюють реальні життєві ситуації.

Зміст геометричного матеріалу включає середні відомості про планіметричні (відрізок, промінь, пряма, кут, трикутник, прямокутник, квадрат, коло, круг) і стереометричні (прямокутний паралелепіпед, куб, піраміда) фігури. Учні набувають навичок вимірювання довжини відрізка й градусної міри кута, знаходження площ і об’ємів деяких фігур, побудови геометричних фігур за допомогою лінійки, косинця, транспортира і циркуля. Розширюються уявлення учнів про вимірювання геометричних величин на прикладах вимірювання і порівняння відрізків і кутів, побудови відрізків даної довжини і кутів із заданою градусною мірою, оперування формулами периметрів, площ і об’ємів геометричних фігур — знаходження невідомого компонента формули за відомими. Побудова кута за допомогою транспортира або косинця (прямого кута), прямої та відрізка за допомогою лінійки використовується при побудові трикутників, прямокутників, перпендикулярних і паралельних прямих.

Вивчення геометричних фігур має передбачати використання наочних ілюстрацій, прикладів із довкілля, життєвого досвіду учнів, виконання побудов і сприяти виробленню вмінь виділяти форму і розміри як основні властивості геометричних фігур. Закріплення понять супроводжується їх класифікацією (кутів, трикутників, взаємного розміщення прямих на площині). Властивості геометричних фігур спочатку обґрунтовуються дослідно-індуктивно, потім застосовуються в конкретних ситуаціях, що сприяє виробленню в учнів умінь доказово міркувати.

Основа інтеграції геометричного матеріалу з арифметичним і алгебраїчним — числові характеристики (довжина, площа, об’єм) геометричних фігур. Узагальнюються знання учнів про одиниці вимірювання довжини, площі, об’єму і вміння переходити від одних одиниць до інших, оскільки ці знання і вміння використовуються у вивченні предметів природничого циклу і в трудовому навчанні.

Важливим є формування в учнів умінь подавати дані у вигляді таблиць, графіків і діаграм різних типів та на основі їхнього аналізу робити відповідні висновки.

Вивчення математики у 5–6 класах здійснюється з переважанням індуктивних міркувань в основному на наочно-інтуїтивному рівні із залученням практичного досвіду учнів і прикладів із довкілля. Відбувається поступове збільшення теоретичного матеріалу, який вимагає обґрунтування тверджень, що вивчаються. Це готує учнів до ширшого використання дедуктивних методів на наступному етапі вивчення математики.

У Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти [19] зазначено, що предметна (галузева) компетентність – набутий учнями у процесі навчання досвід специфічної для певного предмета діяльності, пов’язаної із засвоєнням, розумінням і застосуванням нових знань.

Предметні (галузеві) компетентності стосуються змісту конкретної освітньої галузі чи предмета, і для їх опису використовуються такі ключові поняття: «знає і розуміє», «уміє і застосовує», «виявляє ставлення і оцінює» тощо.

Основною метою освітньої галузі «Математика» є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам’яті, логіки, культури мислення та інтуїції.

Сутнісний опис формування предметної математичної компетентності, який подано у розділі «Державні вимоги до загальноосвітньої підготовки учнів» шкільних програм з математики, представлено такими ключовими поняттями: учень пояснює зміст понять, наводить приклади, формулює означення або властивості, записує і пояснює, класифікує, зображує та знаходить на малюнках, вимірює та обчислює, розв'язує вправи тощо.

Якщо повернутися до державних документів, то у проекті нової редакції Державного стандарту середньої загальної освіти [19] зазначається, що предметну математичну компетентність слід розуміти як здатність учня створювати математичні моделі процесів навколишньої дійсності, застосовувати досвід математичної діяльності для розв'язування навчально-пізнавальних і практично зорієнтованих задач. Це складне особистісне утворення, яке включає різноманітні розумові процеси, інтелектуальні й практичні вміння, а також психологічні характеристики – мотивацію, самостійність, самоконтроль, відповідальність, упевненість.

Таким чином, у багатьох дослідженнях виділяють геометричну компетентність як складову математичної компетентності учнів.

Згідно Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти [19], компетентність – це набута у процесі навчання інтегрована здатність учня, що складається із знань, умінь, досвіду, цінностей і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці.

Геометричну компетентність учня будемо визначати як набуту у процесі навчання геометрії інтегровану здатність учня, що складається із геометричних знань та умінь учня, його досвіду, цінностей і ставлення, що формуються у процесі навчання геометрії і можуть цілісно реалізовуватися на практиці.

Курс математики 5-6 класів. На цьому етапі навчання дещо поглиблюють і розширюють відомості про відомі учням з середньої школи фігури, а також вводять нові фігури та геометричні поняття. Зокрема, учні продовжують вивчати відрізки та їх вимірювання, але при цьому їхню увагу звертають на те, що відрізок коротший за будь-яку іншу лінію, яка з’єднує його кінці, що довжина відрізка, який складається з кількох частин, дорівнює сумі довжин цих частин. Отже, всі теоретичні факти щодо геометричних величин, сформульовані в курсі геометрії у вигляді аксіом вимірювання, на цьому етапі засвоюються на рівні наочно-дійового мислення.

У п’ятому класі учнів ознайомлюють з новими геометричними фігурами: промінь (як фігура, утворена продовженням відрізка в один бік), пряма (як фігура, утворена продовженням відрізка в обидва боки), площина як образ реальних об’єктів (поверхні скла, спокійного водоймища тощо). Безпосередньою побудовою вводять поняття кута, його видів (прямий, гострий, тупий), одиницю виміру кутів. Формується уміння вимірювати кути транспортиром і будувати кути заданої величини. Учням уже відоме поняття площі, вони вміють обчислювати площі квадрата і прямокутника, отже, на цьому етапі навчання вводяться формули площі квадрата і прямокутника ($S = a^2$, $S = ab$), нові одиниці площі (гектар, квадратний кілометр). Учнів вперше ознайомлюють з геометричним тілом – прямокутним паралелепіпедом, з новою геометричною величиною – об’ємом, його одиницями, вони розв’язують вправи на обчислення об’єму прямокутного паралелепіпеда. У шостому класі вводять формули довжини кола і площі круга – відомих з середньої школи геометричних фігур. Упроваджується нова фігура – круговий сектор, нові геометричні тіла – призма, піраміда, циліндр, конус.

Важливими для підготовки до вивчення систематичного курсу геометрії є відомості про перпендикулярні і паралельні прямі, про побудову їх за допомогою лінійки та косинця. На рівні практичних дій (побудови) учнів ознайомлюють з фактами, які стверджуються в курсі геометрії аксіомою паралельних.

На відміну від середньої школи в 5 – 6 класах теоретичний рівень викладу геометричного матеріалу вищий. Окремі поняття вводять на рівні означень (розгорнутий кут, паралельні прямі тощо), здійснюють нескладні дедуктивні міркування. Водночас, як і в середній школі, при вивченні елементів геометрії мають переважати конкретно-індуктивний метод навчання, широке залучення наочності, практичних вправ учнів з моделями і виконання ними зображень фігур, побудов лінійкою, косинцем, циркулем.

1.3. Аналіз шкільних підручників з геометрії

До засобів навчання математики належать: підручник з математики, дидактичні матеріали і довідкова математична література, навчальне обладнання, зокрема наочні посібники, моделі, рисунки, схеми, таблиці, предмети оточення, інструменти, прилади, екранні засоби навчання, калькулятори, персональні комп'ютери, відповідні педагогічні програмні засоби. Вони мають утворювати єдиний комплекс, основою якого є підручник математики.

У підручниках викладено основи знань і способів діяльності відповідно до цілей навчання, визначених програмою.

Підручник призначений передусім для учнів відповідного віку. Водночас у деяких підручниках математики є матеріал, потрібний учителеві для організації навчально-пізнавальної діяльності учнів. Крім того, підручником користуються батьки, допомагаючи учням під час виконання домашніх завдань і контролюючи їхню роботу.

До підручника з математики висувається низка вимог стосовно структури викладу навчального матеріалу, зокрема педагогічна доцільність теоретичної частини і системи задач підручника, точності, стислості та ясності мови, жвавості, цікавості викладу, якості ілюстративного матеріалу.

Обов'язковими вимогами до наукової системи підручника є математична коректність викладу теоретичного матеріалу, доцільність вибору наукової схеми викладу, відповідність трактовки понять, термінології та символіки традиціям, прийнятим у математичній науці і школі.

Дидактичні вимоги потребують забезпечення доступності, наочності, систематичності, стислості викладу матеріалу, наявності засобів мотивації учіння, розвитку мислення, пізнавальної активності й цікавості До предмета, диференціації навчання, спрямованості на формування загальнонавчальних умінь.

Вимоги до методичного апарату підручника пов'язані із забезпеченням належного розвитку змістових ліній, методичної доцільності викладу теоретичного матеріалу, системи вправ і задач, рівня реалізації внутрішньопредметних і міжпредметних зв'язків, наявності можливостей для контролю та самоконтролю, застосування технічних засобів навчання і комп'ютерної підтримки, прикладної, практичної спрямованості, наявності умов для організації самостійної роботи учнів на уроці та в позаурочний час.

Важливим завданням навчання математики є формування в учнів уміння працювати з підручником. Потрібно спеціально навчати учнів читанню підручника і науково-популярної літератури з математики. Зміст, форми і місце роботи з підручником визначаються віком учнів, рівнем їхньої математичної підготовки і наявними вміннями працювати з книжкою.

Рекомендуються такі методи і форми роботи з підручником на уроці:

1. Читання тексту підручника після пояснення вчителя.
2. Розгляд прикладів підручника після пояснення їх учителем з метою закріплення, наведення власних прикладів.
3. Читання вголос учителем тексту підручника з метою навчання учнів виокремленню головного в тексті, розбиття його на змістовні частини, складання плану.
4. Читання тексту учнями, виокремлення в ньому головного і змістовних частин.
5. Самостійне читання тексту учнями, складання плану і відповідь на запитання вчителя або підручника.

Добре відомо, що успіхи в навчанні школярів багато в чому залежать від змісту й структури підручника, по якому вони займаються. По одним підручниках школярі працюють із задоволенням (читають, розглядають малюнки, активно виконують пропоновані завдання). Інші навчальні тексти сприймаються інакше; видно, що більшість учнів з небажанням відкривають підручник, знаходять потрібний текст і без ентузіазму починають працювати з ним.

Спробуємо зрівняти відомі шкільні підручники з позицій легкості сприйняття і доступності засвоєння навчального матеріалу.

У сучасній школі найбільше поширення одержали підручники наступних авторів: О. С. Істер, Г. П. Бевз, О. М. Афанасьєва та М. І. Бурда. Причому відзначається неоднозначне відношення вчителів до цих підручників. У методичній літературі є і позитивні й негативні відгуки про них; автори одних статей вважають, що деякі підручники непридатні для сучасної школи, інші ж, навпаки, захоплюються тим або іншим підходом автора до викладу шкільного курсу геометрії. Одних залучає суворий аксіоматичний підхід, інших більші можливості для організації розумової діяльності учнів.

Щоб порівнювати зміст різних підручників геометрії необхідно звернути увагу на те, які цілі навчання геометрії вибиралися як ведучих останнім часом. Сьогодні основна мета навчання геометрії не зв’язується з розвитком тільки логічного мислення школярів. Виділяють загальнокультурні, наукові (властиво геометричні) і прикладні цілі навчання геометрії. Вважається, що при навчанні геометрії потрібно прагнути до розвитку в учнів інтуїції, образного (просторового) і логічного мислення, до формування в них конструктивно-геометричних умінь і навичок.

Без сумніву, реалізація цілей навчання геометрії в школі прямо зв’язана зі структурою курсу геометрії. Сьогодні провідні вітчизняні методисти і автори підручників виділяють кілька етапів вивчення шкільного курсу геометрії.

Безумовно, на кожному щаблі навчання геометрії в школі важлива роль у досягненні намічених цілей навчання приділяється використовуваним підручникам. При цьому потрібна гарна навчальна книга - підручник, який би містив необхідний мінімум і матеріал для просунутого навчання. Причому велике значення має «зовнішня оболонка» навчального матеріалу, що втримується в підручнику. Пропонуються різні способи керування пізнавальними діями учнів при роботі із книгою, розглянемо деякі з них. Звернемо увагу на допоміжну знакову систему підручників, тобто на ті значки, які полегшують роботу школяра при рішенні завдань. Відомо, що наявність різноманітних завдань у підручниках, що як варіюються за рівнем складності, так і творчих дає учневі волю вибору й активізує його прагнення до знань. Як приклади розглянемо підручник геометрії для 7-9 класів О. В. Погорєлова, Г. П. Бевза, М. І. Бурди

Можна сказати, що в підручнику Г. П. Бевз і ін. існує градація завдань: на початку відзначається група основних завдань, а потім групи більше простих і складних завдань. Цей розподіл знаходить висвітлення у використанні спеціальних значків для позначення. У підручнику О. М. Афанасьєва й ін. судити про складності завдання можна лише прочитавши її. Аналогічна ситуація і у підручнику О. В. Погорєлова. Теж саме і в підручнику Бурди М. І. Відмінність полягає лише в тому, що до деяких завдань є підказки - підписи або пункти параграфа, до якого вони відносяться. Автори кожного підручника приділяють велику увагу зразкам рішення опорних завдань, що ілюструють корисний факт, метод чи прийом.

Серед основних позитивних характеристик будь-якого підручника виділяється розгорнення тексту підручника. Вважається, що це помітно полегшує засвоєння матеріалу. Якщо розглядати підручник Г. П. Бевз і ін., то слід зазначити, що в цьому підручнику до деяких параграфів ідуть доповнення, що дозволяють повніше розкрити тему. Таке розмежування матеріалу дозволяє учням, прочитавши параграф, не тільки усвідомити його основні поняття, але й при бажанні, ознайомитися з додатковою інформацією з даної теми. Підручники О. В. Погорєлова та О. М. Афанасьєва і ін., призначені для загальноосвітньої школи. Авторам доводиться досліджуваний матеріал викладати в короткій формі, з огляду на, що він повинен бути доступний для учнів з різним рівнем сприйняття інформації й підготовленості по предметі.

Ефективність навчання геометрії багато в чому визначається тим, яким чином кодується інформація, чи використовуються при цьому рисунки, креслення, схеми. Це пояснюється тим, що геометричний метод і полягає в тому, що сам логічний доказ або рішення завдання направляється наочним поданням; найкраще, коли доказ або рішення видно з наочної картини. Останнім часом фахівці все частіше говорять про необхідність візуалізації геометричних зв'язків у процесі формування знань школярів, і по-різному використовують принцип наочності при навчанні геометрії. Творчий колектив О. М. Афанасьєва і ін. бачить завдання викладання в школі в єдності строгої логіки і живого сприйняття реального світу. У своєму підручнику вони надають школярам можливість самостійно обробити текстову інформацію, перекладаючи її на мову малюнків, схем, креслень..

О. В. Погорєлов на перше місце ставить розвиток логічного мислення учнів. Малюнки в його підручнику займають близько 23 % від загального обсягу інформації.

Авторський колектив Г. П. Бевз і ін. акцентує свою увагу на розвитку вмінь і навичок учнів, на доступності викладу, вважаючи, що кожний елемент курсу геометрії повинен опиратися на більш просте і зрозуміле наочне подання. Тому у підручнику Г. П. Бевз і ін. міститься багато малюнків і креслень.

У підручнику М. І. Бурди також подано багато ілюстрацій і креслень, які допомагають учням у сприйняті розглядуваного матеріалу.

Отже, важливим завданням навчання математики є формування в учнів уміння працювати з підручником. Тому, кожному вчителю необхідно спеціально навчати учнів читанню підручника і науково-популярної літератури з математики.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Алгебраїчний метод

Алгебраїчний метод розв'язування задач – це така форма аналітичного методу, коли зв'язки між шуканими і даними задачі встановлюються за допомогою складання рівнянь, а їх розв'язування і дослідження розв'язків на предмет задоволення умови задачі та практики приводять до розв'язку самої задачі [7].

Суть алгебраїчного методу розв'язування задач полягає в тому, що вихідним моментом є шукане, для знаходження якого складають рівняння. Проаналізувавши складене рівняння, встановлюють, які величини відомі, а які треба знайти. Якщо рівняння ще не охоплює всіх зв'язків між даними та шуканими умови задачі, то використовуючи дані та відповідний теоретичний матеріал, складають нове рівняння для знаходження проміжних невідомих. Розв'язок цього рівняння повинен забезпечувати розв'язок попереднього рівняння. Такий процес продовжують доти, доки невідомі величини не будуть виражені через відомі. Виконавши тепер відмічені перетворення в оберненому порядку, знайдемо розв'язок задачі.

Отже, загальна схема розв'язування задач алгебраїчним методом складається з таких двох частин: складання плану розв'язання $X \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \ldots \Rightarrow U \Rightarrow A$ та здійснення плану $A \Rightarrow U \Rightarrow \ldots \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow X$, де A – дані, X – шукане, $B, C, \ldots, U$ – допоміжні задачі.

Якщо при переході від однієї допоміжної задачі до іншої перетворення були не рівносильні, то обов'язково потрібно провести перевірку розв'язання.

Правило-орієнтир розв'язування задач алгебраїчним методом можна задати так:

1) з'ясувати, що треба обчислити (довести);

2) скласти рівняння, яке найбільше підходить для знаходження шуканого (для доведення якого-небудь твердження);

3) з’ясувати, які з величин, що входять у рівняння, невідомі;

4) повернутись до другого пункту правила-орієнтира для знаходження допоміжного невідомого.

Алгебраїчний метод застосовується для пошуку розв’язання задач на обчислення, побудову та доведення. Він дає можливість спростувати неправильні твердження, з’ясувати, чи можливо виконати розв’язання задачі на побудову циркулем та лінійкою. Алгебраїчний метод є одним з найефективніших методів, проте він не завжди застосовний та раціональний, оскільки іноді розв’язування задач зводиться до дуже складних рівнянь, які практично не можуть бути побудовані учнями.

Кожна з розглянутих нами форм аналітичного методу має і переваги, і недоліки. Тому жодну з них не можна рекомендувати як універсальну і єдину.

Для успішного відшукання розв’язань задач необхідне знання всіх перелічених методів і вміння творчо застосовувати кожний з них. Ці вміння формуються поступово, всім ходом навчального процесу [8].

2.2. Метод допоміжних побудов

Озброєння учнів різними методами геометричних побудов сприяє формуванню творчого підходу до організації ними власної ефективної роботи в процесі розв’язування. Робота над задачами на побудову діагностує та розвиває в учнів математичну інтуїцію (здатність передбачати кінцевий результат), логічність мислення (здатність аналізувати умову і розробити план побудови; досліджувати кількість розв’язків), інтелектуальну ініціативу.

Своєчасно включено до підручника геометрії для 7 класу матеріал щодо складніших задач на побудову, введено метод допоміжного трикутника [1, 158-159], який доступно відображає поняття «визначальні точки фігури» (точки, що однозначно визначають фігуру), що було вперше запропоновано у посібнику [4, 50].

Розв'язування задач на побудову викликає як в учнів, так і у вчителів певні труднощі, перш за все, через нестачу часу. Іноді вважають задачу розв'язаною, якщо вказана послідовність основних кроків побудови. Але лише повністю виконаний учнями план розв'язування задач на побудову сприяє більш свідомому і глибокому розумінню та засвоєнню як геометрії, так і математики в цілому. Виконання етапів аналізу, доведення, дослідження сприяє розвитку здатності аналізувати, прогнозувати, критично мислити. Набуті в ході виконання самої побудови конструктивні навички часто стають професійно необхідними школярам у майбутньому. Неможна не відмітити також, що виконання учнями задач на побудову часто відбувається у групі, колективно, що виховує уміння школяра продуктивно, раціонально, оперативно співпрацювати як із вчителем, так із іншими учнями.

Можливості використання задач на побудову з метою розвитку творчого мислення будуть використовуватись більш повно за умови врахування особливостей навчання математики учнів різних груп (з різним рівнем розвитку математичних здібностей; різним рівнем навченості; різними домінуючими репрезентативними системами та ін.). Необхідною є диференційована дозована допомога учням, використання різноманітних засобів наочності.

2.3. Векторний метод

Суть методу векторів полягає в тому, щоб певне геометричне розміщення точок, прямих і площин у просторі записати мовою векторів, точніше - у вигляді векторної рівності. І навпаки, мову векторних формул і рівностей наповнити геометричним змістом, тобто перевести ту чи іншу векторну рівність на мову геометрії, надати їй геометричного звучання.

Цілі вивчення векторного методу:

- дати ефективний метод розв’язання різних геометричних задач і доведення теорем;

- показати широке застосування векторного апарату в інших областях знань: техніці, фізиці, хімії і ін.;

- показати використання векторного методу при розв’язуванні задач з метою формування в учнів уміння виконувати узагальнення і конкретизацію;

- формувати в учнів такі якості мислення, як гнучкість, цілеспрямованість, раціональність, критичність та ін.

За діючою програмою тему “Вектори на площині” учні вивчають у 9-му класі. На вивчення теми відведено 10 годин. Зміст навчального матеріалу такий: вектор, його модуль та напрям; рівність векторів; координати вектора; додавання і віднімання векторів; множення вектора на число; колінеарні вектори; скалярний добуток векторів. Вектори віднесені, як записано у пояснювальній записці до програми, до засобів, за допомогою яких доводяться математичні твердження.

У зв’язку зі зменшенням кількості годин на вивчення математики в школі, програма та автори чинних підручників з геометрії не ставлять за мету систематично використовувати векторний метод при доведенні теорем і розв’язуванні задач, а передбачають вивчати вектори із загальноосвітньою метою і послуговуватися ними лише для розв’язування найпростіших стандартних задач. Безперечно в спеціалізованих школах і класах із поглибленим вивченням математики, на факультативах векторний метод має широко застосовуватися.

Основні етапи формування векторного методу в учнів

1. Підготовчий етап. Його мета - оволодіння вказаними поняттями і основними діями.

2. Мотиваційний етап. Його завдання - показати необхідність оволодіння цим методом.

3. Орієнтувальний етап. Його мета — роз’яснення суті методу і виділити основні компоненти на прикладі розв’язаної цим методом задачі.

4. Етап оволодіння компонентами метода. Мета – використовуючи спеціально підібрані задачі, формувати окремі компоненти методу (спочатку задачі на формування одного компоненту, потім двох, трьох і т. п.).

5. Етап формування методу в “цілому”. Мета - визначення змісту вправ і їх розв’язання.

Основні компоненти векторного методу розв’язання задач:

1) переклад умови задачі на мову векторів, в тому числі: - введення в розгляд векторів, - вибір системи координат (якщо це необхідно), - вибір базисних векторів, - розклад введених векторів по базисним;

2) складення системи векторних рівностей (або однієї рівності);

3) спрощення векторних рівностей;

4) заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями і їх розв’язання;

5) пояснення геометричного смислу одержаного розв’язку цієї системи (або одного рівняння).

Векторний метод, як і будь-який інший, не є універсальним, хоча і дозволяє розв’язувати широкий круг геометричних задач. Геометричні задачі, які доцільно р о зв ‘язувати методом векторів:

1) задачі на доведення паралельності прямих та відрізків;

2) задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок в деякому відношенні;

3) задачі на доведення належності трьох точок одній прямій;

4) задачі на доведення перпендикулярності прямих та відрізків;

5) задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків;

6) задачі на знаходження величини кута.

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом-орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах двох тверджень, які учні вміють доводити і без застосування векторів.

Проілюструємо використання методу векторів для розв'язування планіметричної задачі. Для порівняння розв'яжемо задачу також без використання векторів (аналітико-синтетичним методом).

Задача 1. Довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам.

Розв'язання: Векторний метод.

Нехай $AD{:}DB = m{:}n$ (Рис. 2.1). Відкладемо на CA і CB вектори одиничної довжини: $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{l_1}$ і $\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{l_2}$.

Виразимо вектор $\overrightarrow{CD}$ двічі через вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$:

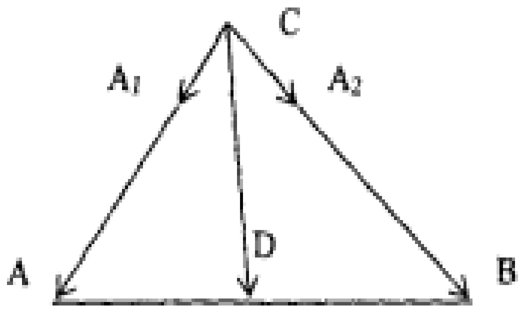

Рис.2.1

a) $\overrightarrow{CD} = \frac{m}{m+n}\,\overrightarrow{CB} + \frac{n}{m+n}\,\overrightarrow{CA} = \frac{m}{m+n} \cdot a \cdot \overrightarrow{l_2} + \frac{n}{m+n} \cdot b \cdot \overrightarrow{l_1}$, де a, b – довжини векторів $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$;

b) $\overrightarrow{CD} = x \cdot \left(\overrightarrow{l_1} + \overrightarrow{l_2}\right) = x \cdot \overrightarrow{l_1} + x \cdot \overrightarrow{l_2}$.

Отже, запишемо систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{n \cdot b}{m+n} = x \\ \frac{m \cdot a}{m+n} = x \end{cases}$. Поділимо почленно ці два рівняння системи, отримаємо: $\frac{n \cdot b}{a \cdot m} = 1$, тобто $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$. Або, остаточно: $AD{:}DB = AC{:}BC$.

Аналітико-синтетичний метод. Нехай BK – бісектриса внутрішнього кута трикутника ABC (Рис. 2.2). Доведемо, що $AK{:}KC = AB{:}BC$.

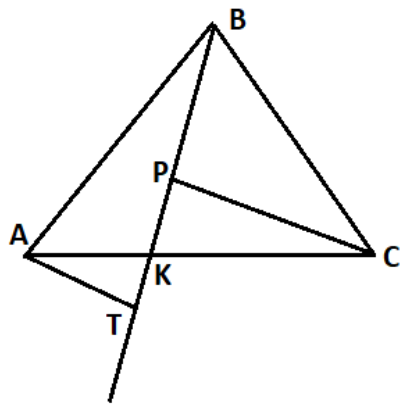

Рис.2.2

1. Проведемо $CP \perp BK$, $AT \perp BK$.
2. $\varDelta AKT \sim \varDelta CPK$ (за двома кутами) $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{TK}{PK} = \frac{AT}{PC}$.
3. $\varDelta ABT \sim \varDelta CBP$ (за двома кутами) $\Rightarrow \frac{AT}{PC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BT}{BP}$.
4. Порівнюючи рівності, тримаємо: $AK : KC = AB : BC$.

2.4. Метод координат

Метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла на площині (на прямій, у просторі) за допомогою чисел або інших символів.

Цілі і навчальні задачі вивчення координатного методу:

- показати, що координатний метод має свою мову, свої прийоми, дає можливість виражати властивості геометричних фігур аналітичною мовою в вигляді рівнянь і нерівностей і відповідно рівняння функції, нерівності перекладати на геометричну мову (графіків):

- сформувати понятійний апарат координатного методу;

-сформувати конкретні прийоми використання координатного методу при вивченні курсів алгебри і геометрії.

Координатний метод дозволяє розв’язувати геометричні задачі засобами алгебри, зводити побудови до обчислень. Координатне розв’язання дозволяє охопити всі можливі частинні випадки.

Використання координатного методу сприяє розвитку обчислювальних та графічних навичок, просторових уявлень, геометричної інтуїції учнів, оскільки його застосування пов'язане з вибором системи координат, обчисленням координат точок, із перекладом мови рівнянь на мову геометрії та навпаки. У свою чергу, координатний метод збагатив геометричною наочністю алгебру.

Використання координатного методу розв'язування задач передбачає виконання таких кроків:

1) переклад задачі на мову координат.

2) перетворення аналітичного виразу.

3) зворотній перехід, тобто переклад координатної мови на мову, в термінах якої сформульована задача.

Зауважимо, що використання координатного методу до розв'язування алгебраїчних задач не відноситься до кола питань, які розглядаються у даній темі, тому зосередимось на планіметричних задачах.

Серед планіметричних задач, які доцільно розв'язувати координатним методом, виділимо задачі двох видів.

1- й вид: на обґрунтування залежностей між елементами, особливо між довжинами цих елементів.

Приклад такої задачі: "В трикутнику ABC BD - медіана, AB = c, AC = b, BC = a. Довести, що $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

2- й вид: на знаходження множини точок, які задовольняють певним властивостям.

Приклад такої задачі: "Зайти множину точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є величина стала".

У шкільному курсі геометрії обмежуються лише розглядом прямокутної системи координат, тому координатний метод у планіметри особливо ефективний під час встановлення співвідношень між довжинами елементів трикутників і чотирикутників, діагоналі або сторони яких перпендикулярні.

Проаналізуємо розв'язання задач, які приведено вище. У процесі аналізу виокремимо вміння, які є компонентами вміння використовувати координатний метод для розв'язування задач.

Задача 1. В трикутнику ABC BD – медіана, AB = c, AC = b, BC = a. Довести, що $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

Розв'язання

1. Виберемо систему координат так, щоб точка A була початком координат, AC - віссю Ox. У вибраній системі координат точки A, C, D мають такі координати: A(0; 0), D(b/2; 0), C(b; 0). Отже, для розв'язування задачі необхідно оволодіння вмінням оптимального вибору системи координат, в якій найбільш просто знаходяться координати даних точок. Останнє, у свою чергу, визначає вміння обчислювати координати заданих точок.

2. Позначимо координати точки B через x, y: в(x;y)- Використаємо формулу для знаходження відстані між точками, які задані своїми координатами, отримаємо: $x^2 + y^2 = c^2$, $(x – \mathrm{b})^2 + y^2 = a^2$. За цією ж формулою, $BD^2 = (x - \frac{b}{2})^2 + y^2 = x^2 - xb + \frac{b^2}{4} + y^2$. Використаємо попередні рівності, отримаємо: $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$. Отже, необхідно вміти знаходити відстань між двома точками, які задані своїми координатами, та вміти обчислювати координати точок, якщо відома відстань між ними.

Задача 2. Зайти множину точок, для кожної з яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок є величина стала.

Розв'язання

1. Позначимо дані точки через A, B. Виберемо систему координат так, щоб вісь Ox співпала з прямою AB, а початком координат була точка A (вміння оптимально обирати систему координат).

2. Покладемо AB = a, тоді у вибраній системі координат A(0; 0), B(a; 0) (вміння знаходити координати заданих точок).

3. Точка M(x; y) належить шуканій множині тоді і тільки тоді, коли AM^2

$– MB^2 = b$, де b - стала величина (вміння складати рівняння даної фігури).

4. Використаємо формулу відстані між двома точками, отримаємо: $AM^2 = x^2 + y^2$, $MB^2 = (x - a)^2 + y^2$, $AM^2 - MB^2 = x^2 + y^2 - (x - a)^2 - y^2 = b$ (вміння обчислювати відстань між точками, які задані своїми координатами), звідки $x = \frac{b+a^2}{2a}$.

5. Рівняння $x = \frac{b+a^2}{2a}$ – це рівняння прямої, що паралельна до осі Oy, і знаходиться від точки A на відстані $d = \frac{|b+a^2|}{2a}$ (вміння бачити за рівнянням конкретний геометричний образ).

Таким чином, для розв'язування задач координатним методом важливо оволодіти вміннями:

1) будувати точку за її координатами;
2) знаходити координати заданих точок;
3) обчислювати відстань між точками, які задані координатами;
4) обчислювати координати середини відрізка;
5) обирати оптимально систему координат;
6) складати рівняння фігури за її характеристичною властивістю;
7) бачити за рівнянням конкретний геометричний образ;
8) перетворювати алгебраїчні рівності.

2.5. Метод площ

Метод площ полягає в застосуванні різних властивостей площ фігур для складання співвідношень, які пов`язують відомі дані задачі і шукані елементи.

В методичній літературі виділяють три типи задач, які розв'язуються за допомогою методу площ. Перший тип задач характеризується знаходженням площі фігури двома способами: складанням або рівняння, або системи рівнянь, тобто задача з геометричної перетворюється в алгебраїчну.

До другого типу відносяться задачі, при розв'язанні яких використовується властивість адитивності площі: якщо фігура розрізана на кілька частин, то її площа дорівнює сумі площі цих частин.

Задачі на застосування властивостей відношення площ, це задачі третього типу. Властивість відношення площ доцільно використовувати в тих випадках, коли мова йде безпосередньо про відношення площ або якихось відрізків.

Перерахуємо дії, які характеризують даний прийом:

1) складання виразу для площі фігури за умовою задачі;

2) складання виразу для площі фігури з використанням невідомого елемента;

3) складання рівності з отриманих виразів для отримання площі фігури;

4) розв'язування отриманого рівняння і знаходження невідомою в умові задачі величини .

Проаналізував багато задач з різних посібників й збірників, пропонуємо для розгляду найбільш типові і значущі задачі. Характерною особливістю таких задач є те, що площа може бути включена в умову або запитання задачі, а може і не фігурувати в них. Розглянемо приклади.

Задача 1. Знайти бісектрису прямого кута трикутника ABC, якщо катети AC=2, BC=3.

Розв'язання 1. Розглянемо стандартне розв'язання цієї задачі (Рис.2.3).

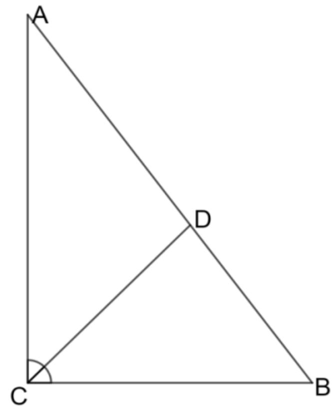

Рис.2.3

За теоремою Піфагора знайдемо гіпотенузу трикутника: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

За властивістю бісектриси кута трикутнику: $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$; $\frac{AD}{\sqrt{13}-AD}=\frac{2}{3}$;

$AD==\frac{2}{5}\sqrt{13}$.

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{13}}$. З $\Delta ACД$ за теоремою косинусів:

$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos A=2^2+(\frac{2}{5}\sqrt{13})^2-2\cdot2\cdot\frac{2}{5}\sqrt{13}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{72}{25}$.

Відповідь: $CD=\frac{6}{5}\sqrt{2}$.

Розв'язання 2. Застосуємо метод площ до цієї задачі. Підрахуємо площу ΔABC двома способами: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=3$,

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta DCB}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin 45^\circ+\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin 45^\circ=\frac{5\sqrt{2}}{4}\cdot CD$.

$\frac{5\sqrt{2}}{4}\cdot CD=3$. Отже $CD=\frac{6}{5}\sqrt{2}$.

Це рішення простіше і коротше.

Задача 2. Довести , що бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону трикутника на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам кута (властивість бісектриси кута трикутника).

Доведення. Нехай CL - бісектриса кута ACB. Позначимо h висоту, яка проведена до сторони AB (Рис.2.4). Підрахуємо площу трикутників ACL і BCL двома способами, отримуємо:

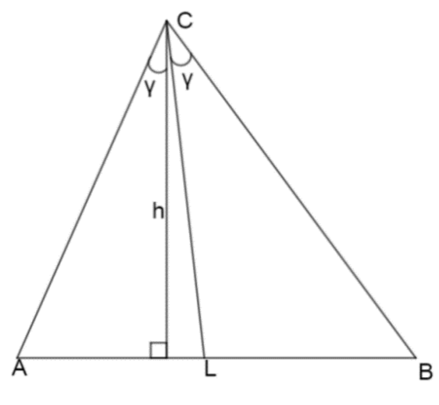

Рис.2.4

$\frac{1}{2}AL \cdot h = \frac{1}{2}AC \cdot CL \cdot \sin\gamma$; $\quad \frac{1}{2}BL \cdot h = \frac{1}{2}BC \cdot CL \cdot \sin\gamma$;

Поділимо отримані рівності: $\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC}$, що і треба було довести.

Задача 3. В трикутнику АВС висота АН дорівнює медіані ВМ. Знайдіть кут МВС (Рис.2.5).

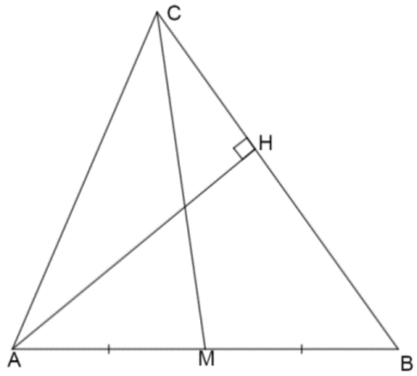

Рис.2.5

Розв’язання. Підрахуємо площу трикутника ΔABC двома способами: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH$ і $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta MBC}$ $S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2}BM \cdot BC \cdot \sin MBC = \frac{1}{2}BM \cdot BC \cdot \sin MBC$

$S_{\Delta ABC} = BM \cdot BC \cdot \sin MBC$. Прирівняємо вирази для

площ:

$\frac{1}{2}BC \cdot AH = BM \cdot BC \cdot \sin MBC$.

За умовою АН = ВМ, отже $\sin MBC = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\angle MBC = 30°$

Застосування властивості адитивності площі

Перерахуємо дії, які характеризують даний прийом:

1) розбиття фігури на частини з використанням умови задачі;

2) складання виразу для площ фігур, які отримали при розбитті (для цього варто використовувати як задані, так і шукані елементи задачі);

3) складання виразу для площі фігури як суми площ фігур, які її складають;

4) знаходження площі вихідної фігури, використовуючи дані задачі;

5)складання рівності отриманих виразів для площі фігури;

6) розв'язання отриманого рівняння і знаходження невідомої в задачі величини (або доведення заданої рівності).

Розглянемо приклади задач.

Задача 4. Площа паралелограма ABCD дорівнює S. Знайдіть площу чотирикутника AMCK, якщо точки M і K середини сторін BC і CD відповідно (Рис.2.6).

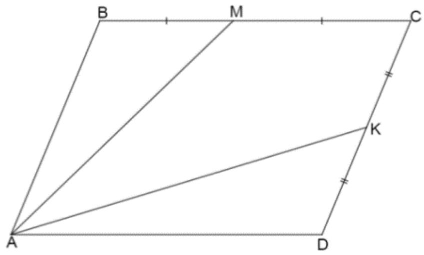

Рис.2.6

Розв'язання. Проведемо діагональ AC. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD}$, а за наслідком 1 : $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta AMC}$ і $S_{\Delta ACK} = S_{\Delta AKD}$. Отже, $S_{\Delta AMCK} = S_{\Delta AMC} + S_{\Delta ACK} = \frac{S}{2}$.

Відповідь: $\frac{S}{2}$

Задача 5. Середини двох паралельних сторін паралелограма з'єднані з протилежними вершинами. Яка частина площі паралелограма обмежена проведеними відрізками?

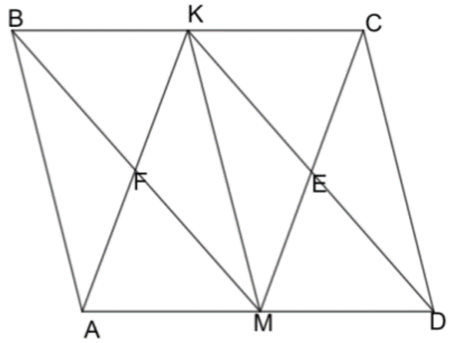

Рис.2.7

Розв'язання. Проведемо відрізок МК (Рис.2.7), отримуємо два паралелограма з однаковою площею. Діагоналі ділять кожний з них на чотири рівновеликих частини, отже

$$S_{MFKE} = S_{\Delta MFK} + S_{\Delta MKE} = \frac{2}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{4} S_{ABCD} \quad .$$

Відповідь: $\frac{1}{4} S_{ABCD}$.

Задача 6. На продовженні сторін трикутника АВС побудовані відрізки $AA_1 = AC$, $BB_1 = AB$, $CC_1 = BC$. Знайдіть $S_{\Delta A_1B_1C_1}$, якщо $S_{\Delta ABC} = S$ (Рис.2.8).

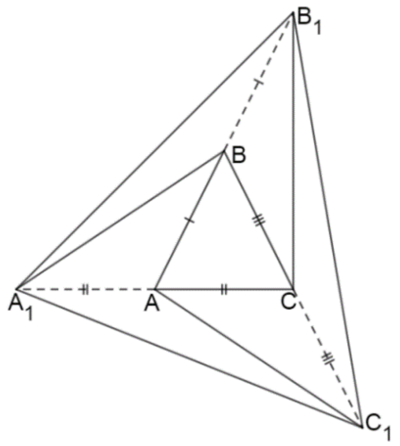

Рис.2.8

Розв'язання. Виконаємо додаткову побудову і з'єднаємо точки A_1 і B, B_1 і C, C_1 і A. Медіана трикутника ділить його на два рівновеликих трикутника, отже всі сім отриманих трикутників мають рівні площі. Отже, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = 7S$.

Використання властивостей відношень відрізків і площ при розв'язанні задач дозволяє

виділити дії, які будуть входити в цей прийом:

- співвідношення шуканих відрізків з площею фігур,елементами яких вони є (або співвідношення площ шуканих фігур з відповідними відрізками), і застосування зазначених властивостей;

- знаходження відношення площ цих фігур (довжин відрізків).

Задача 7. У трикутнику ABC точка H ділить сторону AB в відношенні 2 : 3, вважаючи від вершини B. Знайдіть площу трикутника HBC, якщо площа трикутника ABC дорівнює 15 (Рис.2.9).

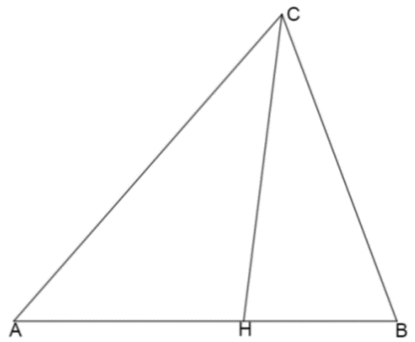

Рис.2.9

Розв’язання. ΔABC і ΔHBC мають спільний кут B, отже за властивістю 3:

$$\frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{HB \cdot BC}{AB \cdot BC} = \frac{HB}{AB} = \frac{2}{5}.$$ Отже, $S_{\Delta HBC} = \frac{2}{5} S_{\Delta ABC} = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6$.

Відповідь: $S_{\Delta HBC} = 6$.

Найбільш складний по відношенню до розглянутих прийомів є тип задач, в розв’язанні яких необхідно одночасно використовувати і властивість адитивності площ, і властивість відношень площ.

Задача 8. На сторонах трикутника взято точки M, N, P так, що AM : MB = BN : CN = CP : AP = 1 : 2. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо площа ΔMNP = 15 см (Рис.2.10).

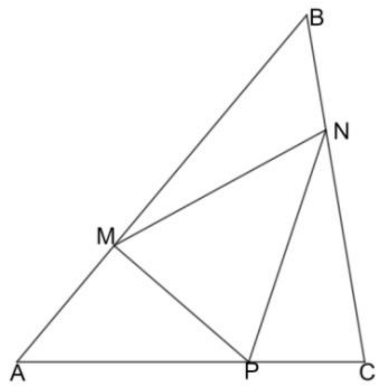

Рис.2.10

Розв'язання. За умовою $BM = \frac{2}{3}BA$, $BN = \frac{1}{3}BC$. ΔABC та ΔMBN мають спільний кут B, отже, за властивістю 3: $\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{2}{3}BA \cdot \frac{1}{3}BC}{BA \cdot BC} = \frac{2}{9}$, $S_{\Delta MBN} = \frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$

Аналогічно $S_{\Delta MAP} = \frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$; $S_{\Delta NCP} = \frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$. За властивістю адитивності: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta MNP} + 3 \cdot \frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$. Отже, $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = 15$.

Відповідь: $S_{\Delta ABC} = 45$.

2.6. Метод геометричних перетворень

Основна мета вивчення геометричних перетворень – ознайомити учнів з різними видами рухів (симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення) та подібністю і гомотетією, їх властивостями, ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворень та властивостей площ подібних фігур до розв'язування задач.

Роль матеріалу:

1) Введення в шкільний курс лінії геометричних перетворень дозволило дати "апаратне", "робоче" тлумачення рівності та подібності фігур. Якщо в діючих підручниках спочатку вводяться рівні трикутники через рівні елементи або суміщення (накладання), то аналогічне означення рівності (подібності) для довільних фігур ввести важко – потрібні геометричні перетворення.

2) Геометричні перетворення дозволяють ввести в шкільний курс динаміку, подолати деяку статичність традиційного синтетичного підходу. При цьому з'являється можливість приділити достатньо уваги розвитку певних сторін просторової уяви учнів.

3) Геометричні перетворення дають новий ефективний метод розв'язування задач, який дозволяє у певних випадках полегшити доведення

теорем і розв’язування задач.

4) Геометричні перетворення сприяють реалізації внутрішньо предметних зв’язків з алгеброю (функціональна залежність, перетворення графіків функцій), міжпредметних – з фізикою (механічний поступальний рух тощо), зауважимо, що в фізиці досліджується в основному сам процес руху, в геометрії фіксоване положення фігури, що зазнала руху (середне, кінцеве, а інколи проміжне).

5) Геометричні перетворення додають шкільній математиці естетику, витонченість. Ідея симетрії – орнаменти, сніжинки, архітектурні споруди являються втіленням цієї ідеї, що є одним з найважливіших засобів гуманітаризації навчання математики.

Теорія геометричних перетворень в школі може бути побудована традиційним – синтетичним, а також аналітичним методами. Найбільшого розповсюдження отримав змішаний: аналітико – синтетичний підхід, що використовується в діючих підручниках. Це дозволяє спростити викладання, а також формувати в учнів представлення про можливість використання різних способів завдання геометричних перетворень.

В діючих підручниках матеріал представлений у вигляді двох окремих тем: "Подібність трикутників" (8 клас) і "Геометричні перетворення" (9клас).

У діючих підручниках поняття "геометричне перетворення" вводиться по різному. Деякі автори наводять повне означення, тобто безпосередньо дається саме поняття, а в інших за допомогою розгляду певних нескладних прикладів, а також через наочний опис.

Наприклад, в підручнику [Мерзляк А. Г.] немає означення геометричного перетворення фігур, а є його наглядний опис на прикладах.

Приклад 1: На рисунку 2.11 зображено відрізок AB, пряму a і точку O, яка не належить ні прямій a, ні прямій AB. Кожній точці X відрізка AB поставимо у відповідність точку X_1 прямої a так, щоб точки O, X і X_1 лежали на одній прямій. Точці A відповідатиме точка A_1, точці B – точка B_1. Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1.

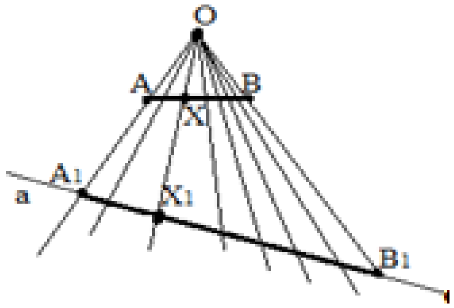

Рис. 2.11

Ми вказали правило, за допомогою якого кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність єдина точка X_1 відрізка A_1B_1. У цьому разі кажуть, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті перетворення відрізка AB

Приклад 2: На рисунку 2.12 зображено півколо AB і пряму a, паралельну діаметру AB. Кожній точці X півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої так, щоб пряма XX_1 була перпендикулярна до прямої a. Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1. Говоритимемо, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті перетворення півкола AB.

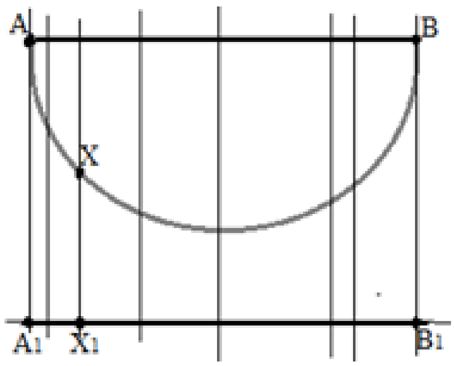

Рис. 2.12

В підручнику [Єршова А. П.] введення поняття геометричне перетворення здійснюється за допомогою приклада, але окрім цього дається чітке означення.

Означення: перетворенням фігури F у фігуру F' називається така відповідність, при якій:

1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури F';

2) кожній точці фігури F' відповідає деяка точка фігури F;

3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F'.

Фігура *F′* називається *образом* фігури *F* для даного перетворення. Автор [Мерзляк А.Г.] вводить поняття також поняття "фігура F називається *прообразом* фігури *F′*".

У шкільному курсі геометрії розглядатимуться геометричні перетворення, які не змінюють форми даної фігури. В окремий вид виділяються перетворення, які залишають незмінними і розміри фігури – рух (переміщення).

Означення: Переміщенням (або рухом) називається перетворення фігури, внаслідок якого збігаються відстані між точками даної фігури.

Зауважимо, що поняття переміщення (руху) зустрічається і у фізиці, але там воно має інший зміст. Фізичний рух характеризується траєкторією, швидкість тощо. Натомість у геометрії мають значення лише середне й кінцеве положення фігури.

Без доведень вводяться властивості руху:

– образом прямої є пряма;

– образом відрізка є відрізок, рівний даному;

– образом кута є кут, рівний даному;

– образом трикутника є трикутник, рівний даному;

– образом многокутника є многокутник, рівновеликий даному.

Кожна з властивостей розглядається при вивченні окремого виду переміщення.

Після розгляду загального поняття руху переходимо до поняття "рівність фігур". З цим поняттям учні в певній мірі знайомі: до 7-го класу питання про рівність фігур вирішувався накладанням, в 7-му класі дано означення рівних відрізків, кутів, трикутників.

Тепер необхідно дати загальне означення для довільних фігур. Вводимо його абстрактно-дедуктивним способом.

Означення: Дві фігури називаються рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом іншої (або іншими словами, якщо вони суміщаються переміщенням).

Вчитель пояснює учням, що дане означення не суперечить означенням рівних відрізків, кутів і трикутників, яке вивчалося в попередні роки. На відміну від підручника [Погорєлова], в якому поняття рівності фігур розглядалося після вивчення всіх видів рухів, за сучасною програмою вчитель вводить твердження "будь-яке накладання є переміщенням, і навпаки: будь-яке переміщення є накладанням" без обґрунтування, але на свій розсуд може повернутися до цього питання після вивчення рухів.

В шкільному курсі геометрії розглядається такі геометричні перетворення:

1) центральна симетрія;

2) осьова симетрія;

3) поворот;

4) паралельне перенесення;

5) гомотетія, перетворення подібності.

Розгляд окремих видів геометричних перетворень здійснюється за приблизним наступним планом:

1. Виконується побудова і одночасно проговорюється означення того чи іншого виду перетворення (конструктивне означення).

2. Пропонується завдання на побудову фігур, отриманих шляхом дії руху (перетворення подібності) на дані фігури: геометричне перетворення вводиться для точки, відрізка, трикутника, довільної фігури.

3. Неявно вводиться тотожне перетворення як перетворення, що переводить фігуру саму в себе (в підручнику [Мерзляк] сформульовано означення).

4. Завдання на розпізнавання.

5. Доведення того, що дане перетворення є переміщенням (перетворенням подібності) зазвичай передбачується задачею на побудову із послідовним вимірюванням або обчисленням відстаней.

6. Доведення специфічних властивостей даного виду перетворень.

Розглянемо введення окремих видів переміщень.

Центральна симетрія (Симетрія відносно точки)

1. Нехай O – фіксована точка, X – довільна точка площини (рис. 2.13).

Відкладемо на промені XO відрізок OX', який дорівнює XO. Ми отримали точку X', симетричну точці X відносно точки O.

Означення: Точки X і X' називаються *симетричними відносно точки* O, якщо точка O – середина відрізка XX'.

Очевидно, що точкою, симетричною точці X' відносно точки O, є точка X.

2. Розглянемо довільний відрізок AB, центр симетрії – точка O (рис. 2.13)

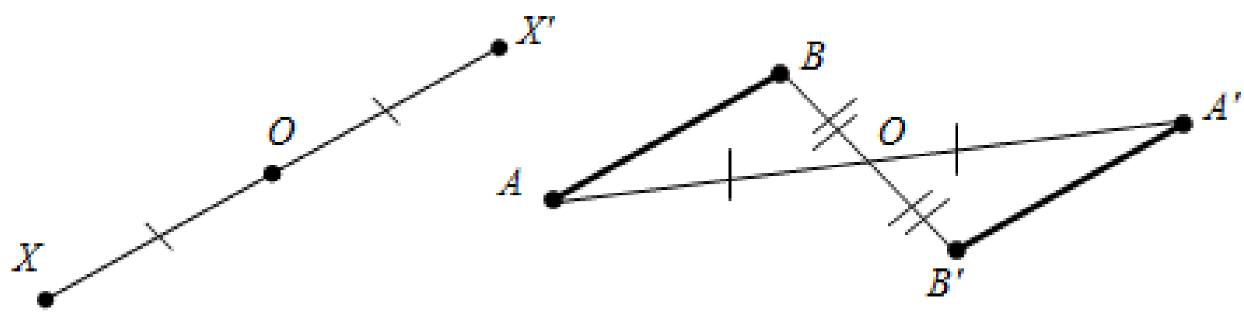

Рис. 2.13

3. Розглядаємо довільний трикутник (рис. 2.13)

4. Розглядаємо довільну фігуру (рис. 2.14)

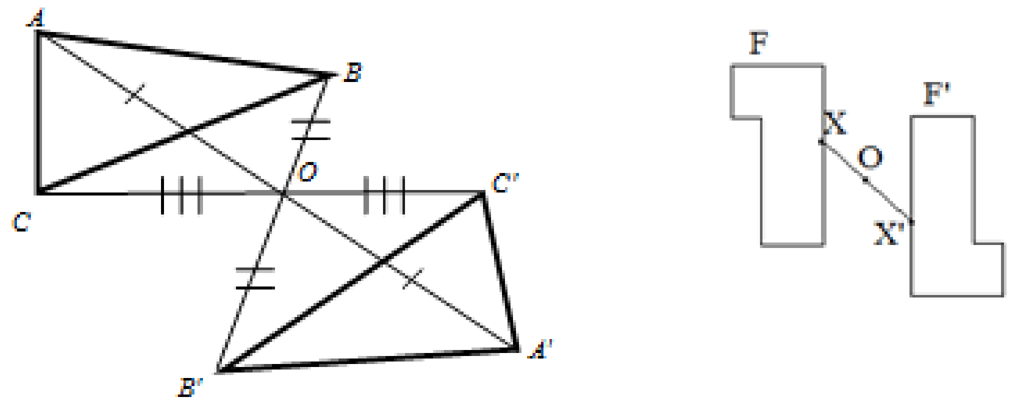

Рис. 2.14

Перетворення симетрії (симетрією) відносно точки О називають таке перетворення фігури *F* у фігуру *F′*, унаслідок якого кожна точка *X* фігури *F* переходить у точку *X′* фігури *F′*, симетричну точці *X* відносно точки *O*. При цьому фігури *F* і *F′* називають *симетричними відносно точки O.* Симетрію відносно точки називають також *центральною симетрією.*

Розглянемо довільний паралелограм, проводимо діагоналі, точка *O* – центр симетрії (Рис.2.15). Побудуємо образ паралелограма з центром симетрії – *O*. *X′* – образ точки *X*.

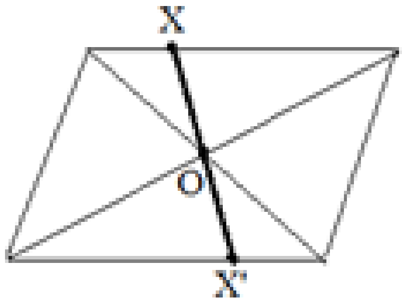

Рис. 2.15

Даємо загальне означення центрально-симетричної фігури: Якщо перетворення симетрії відносно точки *O* перетворить фігуру *F* у себе, то така фігура називається *центрально – симетричною, а точка O – центром симетрії фігури* F.

Необхідно раз граничити поняття: фігура, симетрична іншій фігурі відносно даного центру і центральносиметрична фігура, навести необхідну кількість прикладів.

Осьова симетрія (Симетрія відносно прямої)

Нехай на площі зафіксовано пряму *l* і позначено довільну точку *X* (Рис.2.16). Опустимо з точки *X* перпендикуляр *XO* до прямої *l* і відкладемо на промені *XO* відрізок *OX′*, який дорівнює *XO*. Ми отримали точку *X′*, симетричну точці *X* відносно прямої *l*.

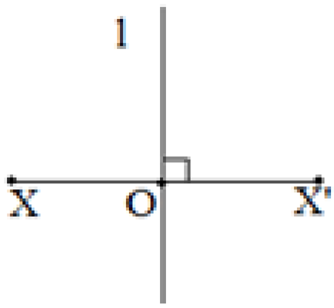

Рис.2.16

Означення: Точки X і X' називаються *симетричними відносно прямої* l, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX' і проходить через його середину.

Очевидно, що точкою, симетричною точці X' відносно прямої l, є точка X. Точки прямої l вважаються симетричними самі собі. Пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка XX' і називається *віссю симетрії*.

Далі показуємо симетрію відрізка, трикутника і довільної фігури відносно прямої.

Перетворенням симетрії (симетрією) відносно прямої l називають таке перетворення фігуру F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точки X' фігури F' симетричну X відносно прямої l (Рис.2.17). При цьому фігуру F і F' називають *симетричними відносно прямої* l.
Симетрію відносно прямої називають також *осьовою симетрією*.
Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то така фігура називається *симетричною відносно прямої* l, а сама пряма l – *віссю симетрії фігури* F.

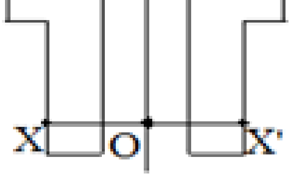

Рис.2.17

Наприклад, віссю симетрією рівнобедреного трикутника *ABC* є пряма, що проходить через вершину *B* перпендикулярно до основи *AC* (Рис.2.18), оскільки симетрія відносно цієї прямої переводить даний трикутник у себе.

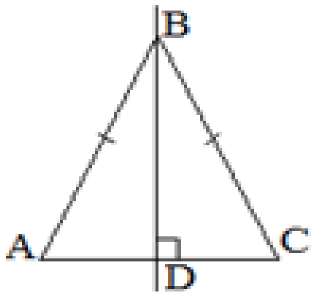

Рис. 2.18

Поворот

Зафіксуємо на площині точку *O* й оберемо точку *X* (Рис.2.19). Відкладемо від променя *OX* у заданому напрямі кут із заданою градусною мірою α і позначимо на другій стороні кута точку *X′* так, що *OX′*= *OX*. Такий перехід точки *X* у точку *X′* є *поворотом* навколо точки *O* на кут α.

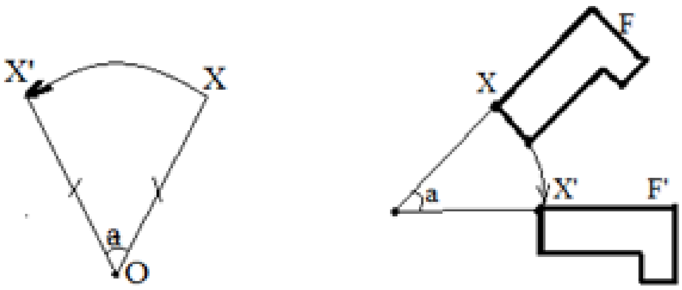

Рис.2.19

Означення: Поворотом фігури *F* навколо точки *O* на кут α називається *перетворення фігури F у фігуру* F′, унаслідок якого кожна точка *X* фігуру *F* переходить у точку X' фігури F' так, що *OX′*=*OX* і кут $\angle XOX'$= α.

Точку *O* називають центром повороту, а кут α – кутом повороту (У шкільному курсі геометрії розглядаються кути повороту в межах від 0º до 360º). Окрім центра і кута, поворот задається також напрямом – за годинниковою стрілкою або проти годинникової стрілки.

Унаслідок повороту фігури F навколо точки O на кут α кожна точка X даної фігури зміщується по дузі кола з центром O і радіусом OX (Рис.2.19). Очевидно, що внаслідок будь-якого повороту положення центра повороту не змінюється.

Паралельне перенесення

Перед введенням означення паралельного перенесення вводяться означення понять: співнапрямлені (або однаково напрямлені) промені", "протилежно напрямлені промені".

Нехай на площині задано промінь OA, причому довжина відрізка OA дорівнює a (Рис.2.20). Виберемо довільну точку X і побудуємо точку X' так, щоб промені XX' і OA були спів напрямлені і відрізок XX' дорівнював a. Таке перетворення точки X у точку X' є паралельним перенесенням в напрямі променя OA на відстань a.

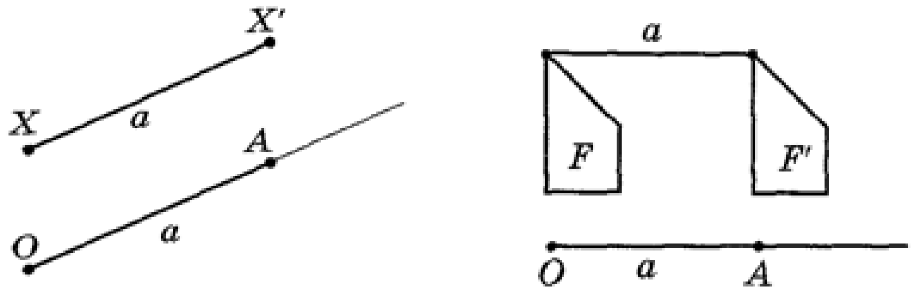

Рис. 2.20

Означення: *Паралельним перенесенням* фігури F у напрямі променя OA на відстань a називається перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що промені XX' і OA співнаправлені і $XX'= a$.

На рисунку 2.20 фігура F' отримана з фігури F унаслідок паралельного перенесення в напрямі променя OA на відстань a.

Приклади такого геометричного перетворення вдало ілюструються у прямокутній системі координат, де паралельне *перенесення* – це рух, який переводить точку $(x; y)$ у точку $(x'; y')$, заданий формулами:

$$x' = x + a,\ y' = y + b$$

Після розгляду всіх видів руху необхідно розв'язувати з учнями завдання, що направлені не тільки на виконання геометричних перетворень, а й на їх розпізнавання.

Наприклад: на яких рисунках 2.21 дані фігури симетричні відносно центра симетрії або відносно прямої?

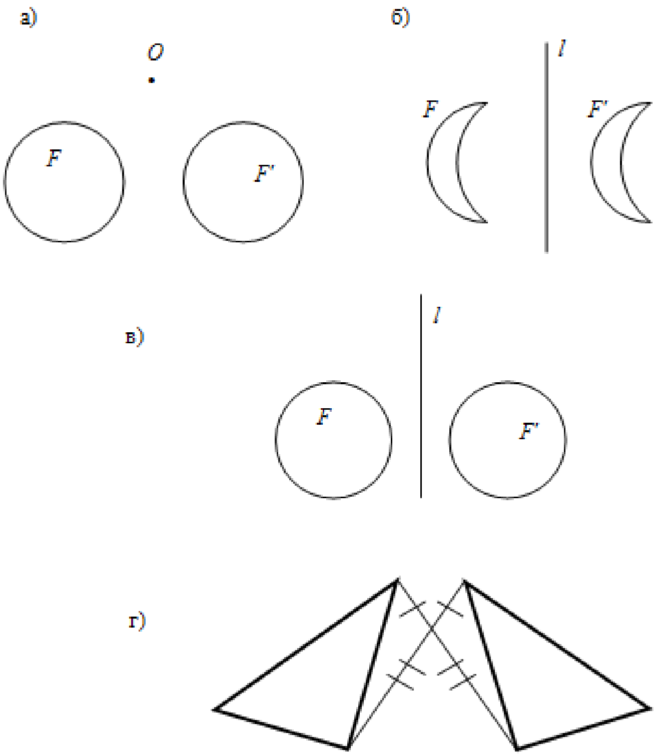

Рис. 2.21

При розгляді всіх переміщень необхідно підкреслювати збереження відстані між точками даної фігури і відповідними точками отриманої фігури.

Властивості геометричних перетворень можливо оформити у вигляді таблиці, яка заповнюється поступово: властивості руху → властивості подібності.

При вивченні властивостей руху не обов'язково, щоб учні доводили ці властивості, головне, щоб вони вміли їх виконувати.

РОЗДІЛ ІІІ. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ З ПЛАНІМЕТРІЇ

3.1. Прийоми формування вмінь розв'язувати геометричні задачі різними методами

Система завдань, спрямованих на формування логічної послідовності дій у школярів при виконанні геометричних побудов була представлена серією занять гуртка «Цікава геометрія». На етапі дослідно-експериментальної роботи нами було проведено 3 позаурочних заняття за темами: «В гостях у геометричних фігур»; «Будуємо фігуру»; «Такі різні геометричні фігури».

Плануючи і проводячи заняття на тему «В гостях у геометричних фігур», ми ставили завдання: сформувати вміння бачити геометричні фігури в навколишньому житті, а також ввести дітей в світ геометрії в ігровій формі. Основними формами роботи з учнями були: розпізнавання фігур, ігри, робота з кресленням, загадки. Також ми повторили поняття «трикутник», прямокутник», «квадрат». Регулятивним завданням виступало: формування вміння оцінювати спільно з однокласниками результат своїх дій; оволодівати вміннями виконувати навчальні дії, у співпраці з однокласниками знаходити кілька варіантів вирішення навчальної задачі. Пізнавальним завданням було використання математичної термінології в побудові невеликих висловлювань в усній формі; а також характеристика досліджуваних математичних об'єктів на основі їх аналізу; здійснення узагальнення пройденого матеріалу за допомогою вчителя.

В ході заняття ми використовували різноманітність прийомів, завдяки яким, у дітей формувалася логічна послідовність дій. Першим прийомом була загадка, заняття ми почали з загадок про геометричні фігури.

Даний метод спрямований на формування критерію «знаходити названу геометричну фігуру серед інших і називати її властивості»; ігрова форма дозволяє невимушено запам’ятати основні властивості фігур. Загадки допомагають розвивати образне мислення і уяву у дітей, допомагають їм розуміти образну мову, розвивають логічну послідовність дій.

Подальша робота передбачала виготовлення моделей досліджуваних геометричних фігур і виявлення їх основних властивостей, відшукання геометричних фігур на предметах і об’єктах оточуючих дітей.

Основним завданням другого завдання було повторення і закріплення вивченого в шкільному курсі математики. Також виконувалися такі регулятивні завдання як: застосування встановлених правил у плануванні способу вирішення. І пізнавальні завдання: визначення об’єктів і явищ навколишньої дійсності відповідно до змісту предмета: виявлення моделей геометричних фігур в навколишньому середовищі.

Відзначаючи роль даного заняття в процесі формування логічної послідовності дій, можна відзначити, що воно зробило дієвий вплив на критерії як: «володіння елементарними способами побудови і використовувати поєднання даних способів при виконанні геометричних фігур; вміння порівнювати геометричні фігури за величиною і властивостями».

Найважливішим кроком є вибір завдання: треба придумати, знайти задачу, яка приваблювала б і заслуговувала зусиль. Тому дуже важливо, щоб завдання мало цікавий, привабливий для вирішальних характер, інтригувала, збуджувала бажання неодмінно знайти рішення.

Порівняємо два способи постановки по суті однієї і тієї ж задачі.

Завдання 1.

Завдання просте: дерева в саду.

Дев’ять дерев. По три в ряду.

Їх посадити потрібно в 10 рядів.

Завдання просте... . Відповідь ваш готовий?

Завдання 2. Як розташувати 9 точок на 10 прямих так, щоб на кожній прямій лежало по три точки.

Завдання 1 викликає інтерес в учнів своєю реальною корисністю, життєвістю. Однак цей інтерес буде втрачено, якщо ми запропонуємо її у формі задачі 2, що є математичною моделлю задачі 1.

Дослідницька задача повинна бути повчальна за змістом або методом вирішення. Якщо завдання вже своїм змістом повідомляє новий і цікавий факт, який, можливо, стане в нагоді в майбутньому, при вирішенні інших завдань, то це безсумнівна перевага завдання, що виділяє її в розряд дослідницьких завдань,

Завдання 3. У нерівнобедреному трикутнику з однієї і тієї ж вершини проведені бісектриса, медіана і висота. Довести, що бісектриса лежить між медіаною і висотою.

Повідомляється цим завданням факт сам по собі викликає інтерес, але це завдання можна зробити дослідницької, якщо не вказувати властивість медіани, бісектриси і висоти трикутника, а задати наступне питання: як розташовані відносно один одного бісектриса, медіана і висота нерівнобедреного трикутника, проведені з однієї його вершини?

Мотивацію даного завдання можна посилити, якщо запропонувати учням наступне завдання 4.

Завдання 4. Відновити трикутник, маючи на окружності, описаної біля нього, три точки, які є її перетином з продовженнями бісектриси, медіани і висоти цього трикутника, проведених з однієї і тієї ж його вершини.

Вже сам порядок розташування цих точок на даній окружності викликає в учнів питання і зробить дослідження завдання необхідним.

При виборі завдання важливе значення має і наступне міркування. Щоб завдання надавала можливість для проведення дослідження, вона повинна дозволяти отримувати нові завдання, відкривати нові властивості розглянутого в задачі об’єкта і т. д.

Наприклад, наведена вище задача 3 в процесі аналізу розчленовується на завдання 5 і 6.

Завдання 5. Довести, що в нерівнобедреному трикутнику висота утворює з меншою стороною менший кут.

Завдання 6. Довести, що в нерівнобедреному трикутнику медіана утворює з меншою стороною більший кут.

1. Освіта груп

У процесі створення груп учні починають самовизначатися до майбутньої групової роботи. Групи можуть відрізнятися:

- за типом роботи: наприклад, одна група конструює, інша проводить дослідження або одна група вирішує завдання аналітичним методом, інша конструктивним ;

- за змістом дослідницьких завдань: наприклад, перша група вирішує завдання по темі «вписане в трикутник коло», друга група по темі» описана близько трикутника коло«, третя» вписана в трапецію окружність» і т. д.

Коли вчитель оголошує назви груп, він коротко роз'яснює особливості роботи в кожній з груп і дає час (2-3 хвилини) учням для вибору групи.

Щоб учні розподілилися рівномірно, вводиться норма кількості учасників на одну групу. В ході нашого дослідження з'ясувалося, що діяльність групи з чотирьох осіб більш продуктивна. Дана група більшою мірою схильна до обговорення проблем. Далі учні піднімаю руки, заявляючи про своє бажання працювати в певній групі.

У групу підбираються учні, між якими склалися доброзичливі відносини. Тільки в цьому випадку в групі виникає комфортна атмосфера взаєморозуміння, знімається тривожність учнів.

2. Робота в групі

В ході групової роботи вчитель:

- розбиває учнів на групи;

- роздає завдання для груп;

- контролює хід групової роботи;

- поперемінно бере участь у роботі груп;

- організовує виступ груп за результатами їх роботи;

- створює ситуацію для групової рефлексії, звертає увагу на помилки, разом з учнями дає оцінку роботі групи.

У групі вибирається (або призначається вчителем) організатор. В процесі групової роботи організатор:

1. Здійснювати контроль:

а) за тим, щоб обговорення відповідало меті і поставленим завданням;

б) за тим, щоб висловлювалися ставлення до версій і припущень;

в) за тим, щоб в групі було взаєморозуміння;

г) за тим, щоб були присутні альтернативні точки зору, інші версії і припущення;

д) за тим, щоб одночасно обговорювали тільки одне поставлене питання;

е) за дотриманням часу, відведеного на роботу.

2. Визначає напрямки руху роботи групи за допомогою постановки послідовних питань.

а) якщо організатор розуміє, що група відхиляється від мети, він може зупинити обговорення питаннями «Що ти зараз робиш?», «Навіщо ти це зараз робиш?», «Обраний твій спосіб роботи не найефективніший для просування групи»;

б) коли обговорення виявляє кілька різних точок зору, організатор просить обґрунтувати ці точки зору, а інших висловити ставлення до них і до способу аргументації;

в) розуміння зазвичай перевіряється питаннями: «Чи Правильно я зрозумів, що ти говориш про...?", "Що ти стверджуєш, що ...?", "Що ти припускаєш, що...?». Організатор повинен обов’язково домогтися того, щоб в ситуації утруднення розуміння, учасником було сказано приблизно наступне «Так, ось зараз ви зрозуміли мене правильно»;

г) організатор повинен прагнути, щоб до кожного припущення була опозиція і були інші точки зору, інакше кажучи, щоб працювали всі, а не хтось один. Він може сказати: «так, одна версія у нас є, давайте подумаємо, які ще версії можливі?». Або задати питання «у кого є інша точка зору?».

Якщо ці питання не дають результату, організатор може сам висловлювати протилежну точку зору, тим самим провокуючи заперечення і необхідність аргументувати і захищати висунуту версію.

1. Контроль вчителя за груповою роботою

Для контролю роботи групи і кожного її учасника використовуються карти вирішення учнями дослідницької задачі.

Якщо в групі є виражена позиція Організатора, є розуміння і вміння точно слідувати правилам групової роботи всіх учасників групи, група готова оформити результат своєї роботи, то в цьому випадку вчитель оцінює роботу групи в кінці, в ході доповіді групи про підсумки роботи. В цьому випадку дається одна карта, яка заповнюється групою.

Якщо учні роблять тільки перші кроки в груповій роботі, необхідний постійний контроль за ходом роботи групи і її організатора. В цьому випадку учням даються рекомендації по роботі в групі і карта дається кожному учневі, для фіксації його роботи в групі.

Дані карти дозволяють вчителю отримати уявлення про роботу конкретного учня на кожному етапі вирішення дослідницької задачі. Частина карти, де фіксуються задані питання і відповіді на питання, дає відомості вчителю про участь учня в обговоренні рішення завдання. У пункті «Примітки» учні вказують методи, прийоми, якими вони користувалися при вирішенні завдання.

Карта вирішення учнями дослідницької задачі

Ім'я прізвище учня:	
Розв'язувана дослідницька задача:	
Ідеї щодо вирішення дослідницької задачі:	
Висновки (результати):	
Примітка:	

Обговорення результатів групової роботи

Представник групи повідомляє:

1. Результат, отриманий групою (спосіб вирішення, зафіксовану проблему, відповідь на поставлене запитання).

2. Яким чином група прийшла до цього результату, так як групова робота вимагає, щоб результат, про який повідомляє група, був отриманий не інтуїтивно, а був продуктом певної розумової роботи. Обговорення повинно показати, чи дійсно учасники групи розмірковували.

Обговорення результатів групової роботи проводиться у формі дискусії, що дає учням можливість ознайомитися в ході обговорення з результатами інших груп; можливість допущення різних, розбіжних думок і припущень, спонукання учасників до пошуку групової угоди у вигляді спільної думки або рішення.

Роль вчителя в дискусії зводиться до того, щоб дискусія не перейшла в монолог вчителя. Для цього пропонуються наступні прийоми:

- Прийом-затвердження. Учитель повинен відреагувати, підтвердити або висловити подив з приводу сказаного, наприклад, наступним чином: «тільки я розумію, ви говорите ..."або" ви стверджуєте, що ...але, тільки що сказали ..."або" мені незрозуміло, що ...».

- Прийом-питання. Експеримент показав, що учні з великим ентузіазмом обговорюють свої виниклі питання, а не питання вчителя. Тому вчителю необхідно провокувати учнів на ці питання: "Чого ми не торкнулися в нашому обговоренні...?", "Що залишилося не ясним?».

- Прийом-сигнали. Учитель може керувати дискусією за допомогою жестів, нічого не вимовляючи вголос. Здивоване вираз обличчя вчителя служить для учнів сигналом: потрібне роз’яснення. Вираз доброзичливої зацікавленості підбадьорює учня, який насилу підшукує слова, щоб висловити свої думки.

- Прийом-мовчання. Коли питання поставлено, необхідно дати час учням на роздуми. Мовчання вчителя, що триває 3,4 секунди-стимул заповнити паузу. Якщо її не заповнює вчитель, то знайдуться добровольці серед учнів.

6. Рефлексія групової роботи

Рефлексія групової роботи – це усвідомлення способів досягнення поставлених цілей. Рефлексія серед учнів в групі виникає у випадках будь-якого труднощі в роботі групи. Така ситуація виникає, коли учні розуміють, що вони не досягли цілей групової роботи або не отримали результат, що змушує їх аналізувати свої проблеми і труднощі. Рефлексія одного учня однієї групи змушує одночасно і інших учасників, в тому числі і з інших груп, аналізувати свої дії. Як тільки хтось скаже в порядку рефлексивного Обговорення: «я робив так, тому що вважав, що...» - у цей момент інші учасники рефлексії можуть почати дивитися на себе і думати: «а я вважаю так само чи інакше?»

Відмітка за роботу виставляється самим учням як результат самоаналізу і самооцінки, і відповідальним за роботу групи (організатором).

Необхідне обладнання:

Для практичного застосування вищевикладених теоретичних аспектів, спрямованих на Розвиток дослідницької компетентності учнів у процесі вивчення геометрії, необхідні наступні ресурси:

1. Комп'ютер, проектор, документ камера (наявність даного обладнання в кожному кабінеті, де проводиться заняття).
2. Комплекс планіметричних завдань дослідницького характеру (наявність комплексу у кожної дитини).
3. Карти рішення учнями дослідницьких завдань (наявність карти у кожної дитини або у групи при груповій роботі).

3.2. Застосування евристичних прийомів до розв'язування планіметричних задач

Словесно-евристичний метод можна представити у вигляді деякої системи правил, тобто опису того, як потрібно діяти і що потрібно робити в процесі вирішення завдань певного класу.

З різноманітного набору правил діяльності у вирішенні завдань принципово можна виділити два великих класи приписів: алгоритми - алгоритмічні приписи і евристики – евристичні приписи. Якщо алгоритми жорстко детермінують наші дії і гарантую в разі їх точного виконання досягнення успіху у вирішенні відповідного типу завдань, то евристики лише задають стратегії і тактиці найбільш ймовірний напрямок пошуку ідей рішення, але не гарантують успіху рішення.

Евристичний метод дозволяє обмежувати перебір варіантів рішення, тобто скорочувати число варіантів, що вивчаються перед тим, як вибрати остаточне рішення.

Евристичні методи – це система принципів і правил, які задають найбільш ймовірні стратегії і тактики діяльності людини, що вирішує творчу задачу, які стимулюють інтуїтивне мислення, генерування нових ідей і на цій основі істотно підвищують ефективність вирішення певного класу творчих завдань. Це послідовність приписів або процедур обробки інформації, що виконується з метою пошуку більш раціональних і нових конструктивних рішень.

Хоча сам по собі евристичний метод ближче до інтуїтивного методу пошуку рішення задачі, все ж даний метод заснований на логіці, здоровому глузді і досвіді, при яких виявляється нова істотна інформація.

Метод застосовується при недоступності або відсутності умов для використання формалізованих методів.

Евристичні методи збільшують ймовірність отримання працездатного-але не завжди оптимального-рішення творчої задачі, що виникла, наприклад, через нерозробленість конкретної теорії, неповноти або недостовірності вихідних даних. Евристичні методи здатні знаходити рішення навіть в дуже складних, непередбачених ситуаціях, проте по ефективності вони поступаються точним алгоритмічним підходам.

Евристичні методи протиставляють формальним методам рішення, що спирається на точні математичні моделі.

Основу евристичних методів становить метод індукції, тобто перехід від приватного до загального. При цьому проблема розділяється на кілька відносних простих підпроблем. Для кожної підпроблеми формуються набір завдань і набір відповідних рішень. Вважається, що при успішному виконанні всіх рішень проблема буде вирішена в цілому.

Більш детально і точно методи евристики почали розроблятися порівняно недавно і спочатку призначалися для вирішення чисто технічних завдань. Однак сьогодні вони знаходять застосування в різних областях управління і бізнесу, в рекламі, дизайні, навіть в мистецтві, наприклад при підготовці театральних постановок.

Евристичні методи можуть бути широко застосовані в практиці сучасного керівника будь-якого рангу. Проведення нарад, ділових ігор з використанням даних методів відкриває принципово нові підходи до вирішення управлінських проблем, завдань в області комерційної діяльності, а також у сфері послуг.

Евристичні методи вирішення нестандартних завдань являють собою ефективні алгоритми, які дозволяють раціоналізувати різні сторони пошукової діяльності. Ці методи спираються на активізацію творчої діяльності людини і розвиток його творчих здібностей на основі інтуїтивних процедур діяльності, фантазії, аналогій та ін.

У дану групу входять: метод мозкової атаки, синектика, метод евристичних (або контрольних) питань, метод багатовимірних матриць (морфологічного аналізу), метод вільних асоціацій та ін Всі ці методи добре розроблені і можуть використовуватися як окремим фахівцем, так і сформованим для цієї мети навченим творчим колективом.

Зараз розроблено і ефективно використовується кілька десятків евристичних методів. Універсальних серед них немає, і в кожній конкретній ситуації рекомендують пробувати застосовувати ряд методів, оскільки основне їх призначення полягає в активізації творчої діяльності.

Евристичні методи притаманні тільки людині і відрізняють його від штучних інтелектуальних (мислячих) систем.

Варто відзначити, що важливою особливістю саме людської діяльності є наявність в ній елемента випадковості: незрозумілі вчинки і навіжені рішення часто лежать в основі оригінальних і несподіваних ідей.

Однак з розвитком обчислювальної техніки виконання все більшого числа функцій беруть на себе автоматичні системи, при цьому виконуючи роботу швидше і ефективніше людини.

Завдання людини як homo sapiens, перш за все, вдосконалюватися в евристичних процедурах, а не у виконанні алгоритмізованих операцій, щоб згодом не виявитися витісненим «розумною» технікою.

3. Особливості евристичних методів

У науці і техніці виділяють наступні результати евристичної (творчої) діяльності:

1. відкриття, тобто встановлення раніше невідомих об’єктивних закономірностей, властивостей і явищ матеріального світу з обов’язковим експериментальним підтвердженням. Відкриття, в основному, є продуктом наукової діяльності, але вирішальним і революційним чином визначає розвиток техніки. На відкриття існує пріоритет (право першості), але немає права власності на використання;

2. винахід, тобто нове і володіє істотними відмінностями технічне рішення задачі, яке не є очевидним наслідком відомих рішень. Винахід відноситься до об’єктів інтелектуальної власності і захищається патентним правом (головним чином - у вигляді надання патентовласнику виключного права на використання винаходу). Зміст винаходу публікується. Винахіднику видається патент, який свідчить про його право і пріоритет на винахід. Виключне право може бути уступлено (продано). Винахід може бути використано в комерційних цілях тільки з дозволу патентовласника на основі ліцензійного договору;

3. раціоналізаторська пропозиція, тобто пропозиція щодо поліпшення конструкції реального виробу або процесу його виготовлення, що не містить

істотно нових рішень (з недостатньо істотними відмінностями) і з незначною ефективністю. Часто в якості рацпропозиції оформляють застосування рішення, невідомого на даному підприємстві, але відомого в інших місцях (але слід бути обережним з можливим порушенням авторських прав). Поняття рацпропозиції існує всього в декількох країнах як спосіб заохочення винахідництва і залучення до нього широкого кола працівників підприємства;

4. ноу-хау (know-how «знаю, як зробити»). Під цим терміном мають на увазі технічну, організаційну або комерційну інформацію, що становить секрет виробництва і має комерційну цінність (ноу-хау не відноситься до державних секретів). На відміну від патенту на винахід, на ноу-хау існує тільки право на захист майнових інтересів у разі їх незаконного отримання та використання.

Розглянемо переваги евристичних методів

Евристичні методи допомагають вирішувати широке коло різних відносно простих завдань і збільшують кількість нових ідей. Дані методи досить доступні в своєму освоєнні. Лінь, рутинне мислення, раціоналізм, відсутність емоційного «вогника» в умовах застосування цих методів як би автоматично знімаються. Часто спираються на колективний досвід, що збільшує кількість висунутих ідей і припущень.

При використанні евристичних методів, заснованих на колективному обговоренні, відбувається зрівнювання всіх членів групи, так як авторитарність керівництва в процесі їх застосування неприпустима. Доброзичливий психологічний мікроклімат в ході застосування методів створює умови для розкутості, активізує інтуїцію і уяву.

Розглянемо і основні мінуси даних методів. Недоліки і обмеження методу полягають в тому, що його застосування дозволяє висунути, знайти творчу ідею в найзагальнішому вигляді. Метод не гарантує ретельну розробку ідеї. Погано вирішують складні завдання, в цьому випадку низька ймовірність отримання нової якісної ідеї. Не дають критеріїв оцінки отриманих ідей.

Вони також непридатні або мають обмеження в застосуванні, коли творча задача вимагає великих попередніх розрахунків, обчислень.

У випадку застосування колективних прийомів пошуку оригінальних ідей евристичні методи вимагають високої майстерності керівника, здатності до імпровізації, почуття гумору. Також не завжди вдається подолати інерцію мислення, тому що іноді створюється ілюзія деякого найбільш ймовірного засобу, прийому, підходу вирішення творчого завдання. Логіка мислення групи спрямовується найчастіше саме в цьому напрямку, але цей найбільш очевидний для вирішальних завдання підхід часто є помилковим.

Евристики – це правила, які допомагають вирішити проблеми. Коли проблема дуже об’ємна або складна, оптимальне рішення нелегко побачити відразу. При цьому евристичні методи допомагають хоча б почати вирішувати питання, навіть якщо людина поки не має уявлення про повний шлях від початку до мети. Евристичні методи не гарантують успіх, але, при цьому, вони досить гарні у вирішенні багатьох видів проблем. Основна їх сила в тому, що вони ламають страх перед проблемою і дозволяють почати діяти тут і зараз. І в міру того, як людина починає діяти і заглиблюватися в предметну область, перед ним відкриваються неевристичні рішення, яких він міг не помічати або не знати раніше.

Евристичні методи вирішення завдань - це система принципів і правил, які задають найбільш імовірнісні стратегії і тактики діяльності вирішального, що стимулюють його інтуїтивне мислення в процесі вирішення, генерування нових ідей і на цій основі істотно підвищують ефективність вирішення певного класу завдань.

Евристичні прийоми безпосередньо стимулюють пошук вирішення нових проблем, відкриття нових проблем, відкриття нових для суб’єкта знань і тим самим відповідають самій природі, специфіці творчого мислення. На відміну від прийомів алгоритмічного типу, евристичні прийоми орієнтують не на формально-логічний, а на змістовний аналіз проблем. Вони направляють думку вирішальних на проникнення в суть описуваного в умови предметного змісту, на те, щоб за кожним словом вони бачили його реальний зміст і по ньому судили про роль у вирішенні того чи іншого даного. Більшість евристичних прийомів стимулюють включення в процес вирішення проблем наочно-образного мислення, що дозволяє використовувати його перевагу перед словесно логічним мисленням — можливість цілісного сприйняття, бачення всієї описуваної в умові ситуації. Тим самим полегшується перебіг характерних для продуктивного мислення інтуїтивних процесів.

Найбільш часто використовуваною евристикою є метод Висхідного аналізу-рішення задачі з кінця, від вимоги – до умови. Ця евристика усвідомлено або неусвідомлено, більшою або меншою мірою використовується при вирішенні будь-якої задачі.

Евристичні методи вирішення проблем – це система принципів і правил, які встановлюють найбільш імовірнісні стратегії і тактики діяльності розв’язника, стимулюючи його інтуїтивне мислення в процесі вирішення, генеруючи нові ідеї і, виходячи з цього, значно підвищуючи ефективність вирішення певного класу завдань. Евристичні прийоми безпосередньо стимулюють пошук рішень нових проблем, відкриття нових проблем, відкриття нових знань для предмета і тим самим відповідають самій природі, специфіці творчого мислення. На відміну від методів алгоритмічного типу, евристичні методики зосереджені не на формально-логічному, а на осмисленому аналізі проблем. Вони направляють думку тих, хто вирішує проникнути в суть описуваного в умові предметного змісту, на те, щоб за кожним словом вони бачили його реальний зміст і оцінювали по ньому роль у рішенні того чи іншого даного. Багато евристичні прийоми стимулюють включення візуально-образного мислення в процес вирішення завдань, що дає можливість використовувати його перевагу перед словесно логічним мисленням - можливість цілісного сприйняття, бачення всієї ситуації, описаної в стані. Таким чином, полегшується хід інтуїтивних процесів, характерних для продуктивного мислення. Найбільш часто використовуваною евристикою є метод аналізу знизу вгору – вирішення проблеми з кінця, від вимоги до стану. Ця евристичний, свідомо або несвідомо, більшою чи меншою мірою, використовується при вирішенні будь-якої проблеми.

Завдання. Щоб довести, що в прямокутному трикутнику біссектрикса кут ділить навпіл кут між медіаною і висотою, зверненою до гіпотенузи (див. малюнок). При використанні методу аналізу постійно знаходитьться відповідь на питання, чого достатньо знайти, довести, щоб відповісти на питання. Щоб довести рівність кутів VAC і KVM, досить довести рівність кутів ABM і SVO. А оскільки кути MVA і YOU рівні, досить довести рівність кутів SVO і MVA, щоб довести рівність кутів SVO і CAB. І довести рівність цих ракурсів не складе труднощів. Досить універсальним є ще одна евристика - переформулювання. Суть цієї евристичного методики полягає в тому, що умови або вимоги, а можливо і обидва одночасно, замінюються новими, еквівалентними існуючим, але дозволяють спростити пошук рішення. У найпростіших випадках переформуляція – це заміна терміна його змістом. Давайте розглянемо приклад цієї евристики.

Завдання. Доведіть, що середини основ трапеції, точка перетину діагоналей і розширення сторін лежать на одній прямій лінії. Виходить, що пошук рішення проблеми полегшується, якщо завдання сформульовано інакше: довести, що лінія, що проходить через точку перетину трапецієподібних діагоналей і точка перетину розширень сторін, ділить основи трапеції навпіл. Проблема залишається такою ж, але нове формулювання передбачає певний метод вирішення. Іноді при пошуку рішення складної задачі допомагає аналогія з використанням методів вирішення вже вирішеної проблеми. Наприклад, необхідно вирішити наступне завдання.

Завдання. Через якусь точку, розташовану за межами кола, до цього кола тягнеться секант. Довести, що добуток сегментів AB і AC є постійним значенням для заданого кола і заданої точки. Якщо до цього моменту проблема вже вирішена: «Довести, що добуток акордових сегментів, що проходять через задану точку в межах даного кола, є постійним значенням», то можна перенести метод його вирішення на нову задачу. А саме, спочатку доцільно переформулювати вимогу: провівши інший секант через точку A, ми доведемо, що AC·AB = AE.

Щоб довести цю рівність, ми перетворюємо її в пропорцію , що призводить до пошуку подібних трикутників з іменованими сторонами.

3.3. Алгоритмічний підхід до формування вмінь учнів розв'язувати задачі різними методами

Складання алгоритму самими учнями може свідчити про підвищення його рівня навчальної культури. Вміння учнів оформити свої міркування і весь хід вирішення завдання у вигляді таблиці або блок-схеми істотно дисциплінує мислення, стає необхідною практичною якістю, сприяє більш швидкому і свідомому оволодінню алгоритмічної мови в майбутньому. Складання алгоритмів активізує розумову діяльність школярів і розвиває їх математичні здібності.

Крім того, вміння «бачити» алгоритм і працювати за ним дозволяє уникати супутніх проблем: не змішувати кроки і їх послідовність при запам'ятовуванні правил або вирішенні завдань [35, с. 2].

Алгоритмічний підхід - це навчання учнів методу вирішення завдання через застосування алгоритму, який описує цей метод [35, с. 2].

Застосування певної послідовності команд і процедур закладає елементи алгоритмічної культури. Існує два способи алгоритмічного підходу до навчання:

- застосування конкретних алгоритмів до вирішення завдань;

- створення алгоритмів для вирішення класів завдань.

У школі бажана як та, так і інша реалізації, але в різних пропорціях для різних класів і різних учнів всередині класу. На одному етапі може переважати перший підхід, на іншому - другий. Учень повинен мати знання деяких алгоритмів у готовому вигляді, оскільки відомо, що в мисленні в діалектично суперечливій єдності переплетені його творчі та репродуктивні компоненти. Оволодіння учнями творчими вміннями являє собою якісний стрибок у їхньому розумовому розвитку і є результатом кількісного накопичення більш простих репродуктивних умінь [35, с.2].

Можна виділити два способи навчання алгоритмічній діяльності:

- ознайомлення з готовими алгоритмами;

- створення проблемної ситуації з метою підвести учнів до самостійного відкриття необхідних алгоритмів.

Ці шляхи не виключають один одного. Більш того, формування алгоритмічної діяльності йде більш успішно, якщо ці два шляхи поєднуються.

З педагогічної точки зору набагато більш цінно, коли учень відкриває відповідні алгоритми сам (якщо, звичайно, завдання для нього посильне) або за допомогою вчителя, а не отримує їх у готовому вигляді [35].

Є наступні етапи формування алгоритмічної діяльності:

1 етап. Введення алгоритму (актуалізація знань, необхідних для введення та обґрунтування алгоритму. Відкриття алгоритму учнями під керівництвом вчителя. Формулювання алгоритму. Блок - схема, таблиця, список).

2 етап. Засвоєння (відпрацювання окремих операцій, що входять в алгоритм і засвоєння їх послідовності).

3 етап. Застосування алгоритму (відпрацювання алгоритму в знайомій і незнайомій ситуаціях) [35].

Л.А. Атлуханова виділяє чотири етапи формування алгоритмічної діяльності:

1 етап. Мотивація «відкриття» алгоритму. Основна мета цього етапу -

актуалізація в учнів знань, необхідних і достатніх для складання розглянутого алгоритму, показ необхідності його введення для вирішення практичних завдань;

2 етап. Введення алгоритму. Мета етапу - підведення учнів до «відкриття» потрібного алгоритму, його формулювання.

3 етап. Засвоєння алгоритму. Головна мета цього етапу полягає у відпрацюванні операцій, що входять в алгоритм, і засвоєння їх послідовності.

4 етап. Застосування алгоритму. Мета - відпрацювання алгоритму в знайомих і незнайомих ситуаціях [18].

Н.Л. Стефанова у посібнику «Методика і технологія навчання математики» виділяються такі основні етапи роботи щодо запровадження правил, їх застосування та щодо навчання вирішенню алгоритмічних завдань:

1 етап. Виконання вчителем логіко- математичного аналізу правила;

2 етап. Розроблення алгоритмічного припису (у разі потреби);

3 етап. Розробка та проведення етапу актуалізації знань, необхідних для обґрунтування необхідності та запровадження алгоритму;

4 етап. Введення алгоритмічного припису (навчальний етап);

5 етап. Етап закріплення (застосування введеного алгоритму при вирішенні типових завдань) [26].

У нашій роботі під час формування алгоритмічної діяльності ми використовуватимемо чотири етапи на підставі етапів виділених Л. А. Атлухановою [3]:

I. Етап, спрямований на те, щоб мотивувати учнів на формування алгоритмічної діяльності.

2. Етап, націлений на відкриття алгоритму в процесі алгоритмічної діяльності.

3. Етап засвоєння алгоритму в процесі алгоритмічної діяльності.

4. Етап застосування алгоритму в процесі алгоритмічної діяльності.

Основні методи вирішення планіметричних задач є наступними. Завдання можна розділити на стандартні і нестандартні. Нестандартне завдання – це завдання, вирішення якої не є для вирішального відомим ланцюгом відомих дій. Для її вирішення учень сам повинен винайти (скласти, придумати) спосіб вирішення. Більшість завдань планіметрії є евристичними, тобто для них немає алгоритму вирішення. Значить, для учнів вони є нестандартними. Тому, як показує практика, вони являють собою найбільші труднощі на вступних іспитах і ЦТ. На етапі заключного повторення курсу планіметрії ставиться мета-систематизувати знання, отримані школярами, виділити загальні методи і прийоми вирішення планіметричних завдань, вказавши в них стандартні елементи. Доцільно познайомити школярів з основними методами і прийомами вирішення завдань, щоб зробити пошук рішення завдання не таким скрутним.

Методи розв’язання задач:

- Метод рівних трикутників

Характеристика методу. Шляхом логічних міркувань за допомогою використання різних теорем доводиться рівність трикутників. За допомогою отриманого рівності роблять висновок про рівність кутів, відрізків, які цікавлять в даній ситуації.

- Метод опорних задач

Під опорними завданнями будемо розуміти завдання, які часто є частиною іншого, більш складного завдання.

Виділяють два види опорних задач: задача-теорема і задача-метод.

Задача-теорема. Доводяться факти, які за важливістю для вирішення задач є теоремами, але в навчальному посібнику теорія не будується з опорою на ці факти, тому вони мають статус задачі. Наприклад. Відрізок, що з’єднує підстави висот гострокутного трикутника, відсікає від цього трикутника трикутник подібний даному. Коефіцієнт подібності цих трикутників дорівнює косинусу кута, до сторін якого проведені висоти.

Задача-метод – це завдання, яке ілюструє який-небудь метод вирішення геометричних задач, прийом або конструкцію, яка часто зустрічається при вирішенні інших завдань. При цьому мова йде про методи, які не вимагають спеціальних теоретичних обґрунтувань. Наприклад. Додаткова побудова – продовжено медіану. Характеристика методу. Досить часто, коли в умові завдання фігурує медіана трикутника, буває корисним продовжити її за точку, що лежить на стороні трикутника, на відрізок, рівний самій медіані. Отримана нова точка з’єднується з вершиною (вершинами) вихідного трикутника, в результаті чого утворюються рівні трикутники. Рівність відповідних елементів цих трикутників допомагає знайти невідому величину або довести запропоноване твердження.

Метод площ. Характеристика методу. З назви випливає, що головним об’єктом даного методу є Площа. Для ряду фігур, наприклад для трикутника, площа досить просто виражається через різноманітні комбінації елементів фігури (трикутника). Тому ефективним виявляється прийом, коли порівнюються різні вирази для площі даної фігури. В цьому випадку виникає рівняння, що містить відомі і шукані елементи фігури, вирішуючи яке ми визначаємо невідоме. Тут і проявляється основна особливість методу площ-з геометричної задачі він «робить» алгебраїчну, зводячи все до вирішення рівняння (а іноді системи рівнянь). Саме порівняння виразів для площі фігури може бути різним. Іноді площа фігури представляється у вигляді суми площ її частин. В інших випадках прирівнюються вирази, засновані на різних формулах площі для однієї і тієї ж фігури, що дозволяє отримати залежність між її елементами. Суть методу площ не обмежується тільки описаним вище прийомом. Іноді буває корисно розглянути відношення площ фігур, одна з яких (або обидві) містить в собі шукані елементи.

Алгебраїчний метод. Характеристика методу. Шукана величина знаходиться за допомогою рівняння (або системи рівнянь), яке складається за умовою задачі. Для складання рівняння використовуються різні геометричні факти, формули, теореми.

Метод допоміжних фігур. Допоміжний трикутник. Характеристика методу. За допомогою деякого додаткового побудови (продовження відрізка, геометричне перетворення і ін.) отримують трикутник, який дає можливість отримати рішення задачі. Зазвичай такий трикутник володіє двома важливими для вирішення завдання властивостями:

1) його елементи певним чином пов’язані з елементами, що фігурують в

умові завдання;

2) для його елементів легше знайти характеристики, що дозволяють отримати рішення, ніж для фігур безпосередньо заданих умовою. Наприклад. Додаткова побудова-продовжено медіану.

Характеристика методу. Досить часто, коли в умові завдання фігурує медіана трикутника, буває корисним продовжити її за точку, що лежить на стороні трикутника, на відрізок, рівний самій медіані. Отримана нова точка з’єднується з вершиною (вершинами) вихідного трикутника, в результаті чого утворюються рівні трикутники. Рівність відповідних елементів цих трикутників допомагає знайти невідому величину або довести запропоноване твердження.

3.4. Роль рисунка в розв’язуванні планіметричних задач

Рисунок у геометрії являє собою умовне графічне зображення фігури чи комбінації кількох фігур. Це не розкраска і не твір живопису фарбами, не картина й не ілюстрація до книги. Його призначення однозначно чітке: візуальне поінформування учня про істинне взаємне розміщення, форму та розміри геометричної конструкції та її окремих елементів. Рисунок на інтуїтивному рівні ефективно сприяє «баченню» розумом ситуації, що склалася, формує в уявленнях й упорядковує закономірну логіку міркувань, підказує покроковий шлях до розв’язку задачі. Саме тому до геометричних зображень висувають дві надважливі вимоги: правильності та наочності.

Отже, якщо мова йде про креслення різних споруд, технічних пристроїв, зображень до задач і теорем навчальних дисциплін геометричного циклу, треба вживати слово рисунок, якщо ж ідеться про твори образотворчого мистецтва, то треба вживати слово малюнок.

Правильно виконаний рисунок спроможний продукувати несуперечливі закономірні міркування, спонукати до істинного розуміння суто геометричних міжелементних зв’язків і формальних співвідношення елементів фігури, мотивувати навчально-пізнавальний інтерес до геометрії. У цілому стиль конструктивізму, як форма візуалізації геометрії, мало поцінований, ним майже не переймаються; знаючи напевне, що об'єктом геометрії ЗОШ є фігура, а головним засобом навчання — рисунок, учитель традиційно не приділяє належної уваги якісному виконанню рисунків учнями.

Маємо на меті продемонструвати прикладами стрижневу роль ретельно виконаних рисунків у творчому конструюванні правилорієнтирів образно-уявлюваних, побудовних і формально-логічних дій учня в пошуку шляхів розв'язування планіметричних задач. Пояснити чому так важлива увага до задач «із родзинкою» зовсім не складно, оскільки ніхто немає сумнівів, що геометричні пропозиції в одиндва кроки, за усталеним зразком, мінімального рівня складності не відповідають діяльнісному принципу навчання, не розвивають особистість. Вправами, які не мають геометрично завуальованого підтексту, неможливо об'єктивно оцінити стиль мислення учня, знання фактичного матеріалу, його інтуїтивні та творчі здібності. Разом із тим, структура, геометрична суть задачі в будь-якій ситуації піддається покроковому розшифруванню виключно завдяки старанному виконанню адекватного умові рисунка та добре поставленому образному і логічному мисленню.

Наведемо приклади розв'язування кількох задач на обчислення, доведення та побудову з акцентом на їх рисункову складову.

Задача 1. У рівнобедреному трикутнику ABC (AB = BC) кут ABC дорівнює 20°. На стороні AB узято точку M так, що ∠MCA = 60°; на стороні CB — точку N так, що ∠NAC = 50°. Знайти кут NMA.

Специфіка задачі полягає в тому, що в її умові задано градусну міру двох кутів і вимагається знайти градусну міру ще одного кута. Для ліпшого унаочнення ситуації, доцільно модель зображення геометричної фігури зі всіма елементами робити не лише з використанням циркуля та лінійки, але також — транспортира. Нехай кут B у рівнобедреному трикутнику ABC справді дорівнює 20°, а точки M і N розташовуються на його бічних сторонах AB і CB відповідно так, що ∠MCA = 60° і ∠NAC = 50° (рис. 1). З'єднавши точки M і N відрізком, легко помітити, що ∠NMA = ∠NMC + ∠CMA, де ∠CMA = 40° (адже ∠BAC = 80°, що очевидно). Тож задачу зведено до відшукання кута NMC.

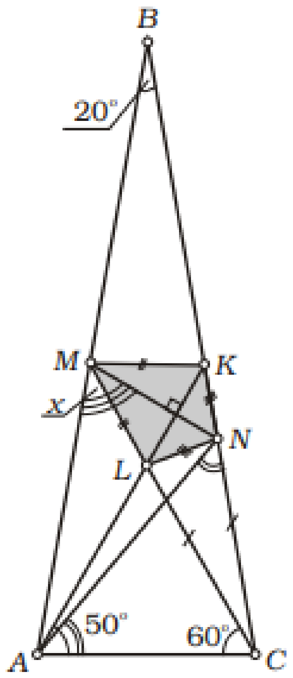

Рис. 3.1

Виконаємо додаткові побудови: візьмемо на стороні BC точку K так, щоб ще й ∠KAC = 60°, а відрізок MK був паралельним AC; точку L = AK ∩ CM з'єднаємо з точкою N.

Тепер уважно поглянемо на чотирикутник MKNL. Він візуально надто схожий на дельтоїд. Потрібно довести зримо прочитаний факт.

Трикутник ALC — рівносторонній, що теж очевидно, а трикутник ANC — рівнобедрений, оскільки ∠ANC = 180° – (80° + 50°) = 50°. Отже, AC = CL = CN, а ∠CLN = ∠CNL = (180° – 20°) : 2 = = 80°. Кут MLC — розгорнутий, тому ∠MLN = = 180° – 80° = 100°. З іншого боку, прямі MK і AC паралельні, а KC – січна, отже й ∠MKN=100°. Окрім того, легко помітити, що ∠KLN = ∠LKN = = 100° – 60° = 40°, адже трикутник MKL теж рівно сторонній. Таким чином, як з'ясувалося, в чотирикутнику MLNK кути у протилежних вершинах K і L, а також прилеглі до них пари сторін MK і ML, NK і NL відповідно рівні, тому цей чотирикутник справді є дельтоїдом, що й було очевидячки зрозуміло з акуратно виконаного рисунка. Залишається лише кут при вершині M трикутника MKL розділити навпіл (∠NML = 60° : 2 = 30°) і додати його градусну міру до градусної міри кута NML: ∠NMA = ∠NMC + + ∠CMA = 40° + 30° = 70°. Задачу розв’язано.

Задача 2. Сторони гострокутного трикутника ABC рівні a, b і c. Знайти периметр трикутника, вершинами якого є основи висот трикутника ABC.

Нехай задано гострокутний трикутник ABC, а точки P, Q і R є основами його висот і вершинами трикутника, периметр якого потрібно знайти (рис. 2).

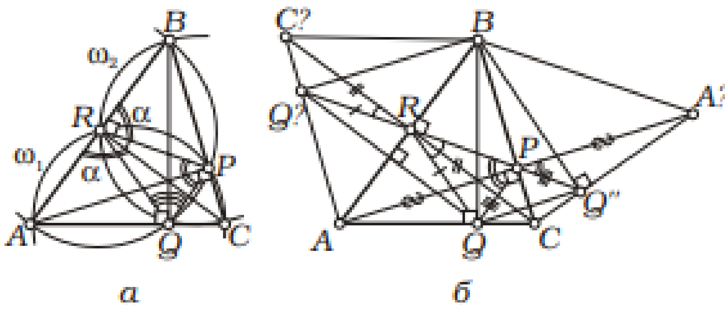

Рис. 3.2

Якщо до виконання рисунка поставитися відповідально, витримавши перпендикулярність висот і відповідних сторін заданого трикутника, то неважко візуально зафіксувати надто суттєву реальність: висоти трикутника ABC виглядають водночас бісектрисами трикутника PQR. Можна припустити, що цей факт, за умов його строгого обґрунтування та принагідно вмілого застосування, може виявитися одним із визначальних у пошуку шляху до результату.

Розглянемо, наприклад, висоту CR до сторони AB. Прямі кути ARC і APC спираються на відрізок AC, тому чотирикутник ARPC є вписаним у коло ω1, отже, ∠ARP + ∠ACP = 180°. Проте кут ARB — розгорнутий, а це означає, що ∠ARP + ∠BRP = 180°. Із цих двох рівностей отримуємо:

∠ACP = ∠BRP = α. (1)

Аналогічні міркування слід провести стосовно чотирикутника BRQC і кола $\omega 2$ (рис. 2, a). Тут

$$\angle ACP = \angle ARQ = \alpha. \ (2)$$

З рівностей (1) і (2) випливає, що $\angle ARQ = \angle BRP$. Далі легко побачити, що $\angle PRC = 90° – \alpha$ і $\angle QRC = = 90° – \alpha$, тому $\angle PRC = \angle QRC$, а це якраз і засвідчує те, що RC є бісектрисою кута PRQ.

Міркуючи аналогічно, доводимо, що висоти AP і BQ трикутника ABC є бісектрисами кутів RPQ і PQR відповідно. Отже, завдячуючи якісному рисунку, образноінтуїтивно висловлене припущення набуло статусу геометричної закономірності.

Тепер пригадаємо евристичний припис відшукання довжини відрізка в геометрії. Як правило, відрізок відносять до деякого вдало вибраного трикутника й шукають рівний чи подібний до нього трикутник, який обов’язково або вже є метрично розмірним, або ж порівняно просто може бути приведеним до такого. Наразі в нашій ситуації саме трикутник PQR варто розгорнути на пряму, тобто подати його периметр сумою сторін ($2p = QR + RP + PQ$), а потім працювати з розгорткою як із відрізком за вже сформульованим щойно приписом. До того ж, уже зараз на рисунку можна помітити, що зримо сформована і підкріплена чіткою логікою міркувань геометрична закономірність дієво посприяє як у виконанні розгортки, так і в розв’язанні задачі в цілому (рис. 2, b).

Таким чином, скористаємося перетворенням осьової симетрії відносно сторони AB трикутника ABC: $S_{AB}(AC) = AC'$; $S_{AB}(QR) = Q'R$, де $Q' \in AC'$ і Q та Q′ лежать з одного боку від CC′. Оскільки трикутник ABC гострокутний, точки Q і P розміщені з різних боків відносно CC′, отже й Q′ та P — з різних боків від CC′. За властивістю симетрії $Q'R = QR$, а $\angle Q'RC' = \angle QRC$. Але ж RC — бісектриса кута QRP, тому $\angle QRC = \angle CRP$, отже точки Q′, R, P — лежать на одній прямій. Далі аналогічно розглядаємо симетрію відносно сторони BC трикутника ABC і доводимо, що $Q''P = QP$, а точки Q″, P, R теж лежать на одній прямій. Відрізок Q″ – P – R – Q′ й буде розгорткою трикутника PQR. Тепер 2p = QR + RP + PQ = = Q′R + RP + PQ″.

Далі, як планувалося вище, оберемо відрізок Q′Q″ стороною трикутника Q′BQ″ та порівняємо його за формою із трикутником C′BC. За властивостями осьової симетрії матимемо BQ′ = BQ = BQ″. Це означає, що трикутник Q′BQ″ — рівнобедрений. Оскільки C′B = BC, то трикутник C′BC теж рівнобедрений. Очевидно також, що ∠C′BR = ∠CBR і ∠C′BC = 2∠ABC, а ∠Q′BQ″ = 2∠ABQ + 2∠QBC = 2∠ABC. Отже, ∠Q′BQ″ = ∠C′BC. Із таких міркувань випливає, що трикутники Q′BQ″ і C′BC подібні.

Задача 3. Задано трапецію ABCD. Відомо, що відстань між серединами основ AB і CD дорівнює відстані між серединами діагоналей AC і BD. Довести, що кут ADB є тупим. Нехай рисунок 3 задовольняє умову задачі, а саме: точки P і Q є серединами основ трапеції, а M і N — серединами її діагоналей. Зображення, виконане візуально правильно, прямо підказує шлях розв’язання задачі.

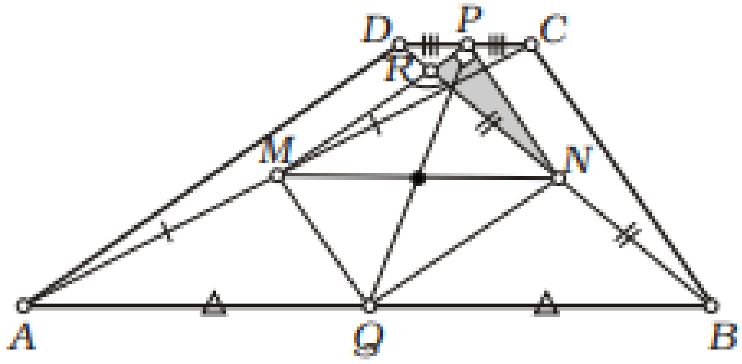

Рис.3.3

Помічаємо, що відрізок MP є середньою лінією трикутника ADC, а QN — трикутника ADB. Обидва відрізки паралельні спільній стороні трикутників AD і дорівнюють її половині. Таким чином, чотирикутник MPNQ — паралелограм із рівними діагоналями, тобто це — прямокутник. Неважко також побачити, що ∠ADB = ∠MRN, як відповідні кути при паралельних прямих AD і MP. Але кут MRN є зовнішнім для трикутника RPN і дорівнює сумі двох внутрішніх не суміжних із ним кутів: $\angle MRN = \angle RPN + \angle RNP$, де $\angle RPN = 90°$, а кут RNP — гострий. Таким чином, кут ADB справді є тупим.

Сьогодні вчитель математики, який звичайно ж отримав диплом про вищу педагогічну освіту, практично не навчає правилам виконання рисунків до теорем і задач геометрії, не демонструє прикладами прийомів роботи з ними. Учні малознайомі з олімпіадними, творчими задачами, в яких рисунку відводиться визначальна роль. Переконатися в цьому надто просто, досить запропонувати студентам першого курсу фізико-математичного факультету університету перевірочну контрольну роботу середнього ступеня складності. За роки навчання у школі учні (майбутні вчителі) звикли мати справу з найпростішими, елементарними ситуаціями, де будь-як виконаний рисунок малозначущий на шляху до результату. Проте, це ще півбіди. Прикро інше: студенти не без участі вчителя розучилися слухати («не чують» викладача), не навчені аналізувати і вникати в суть справи, їх важко налаштувати на розуміння обов’язково правильного, старанного виконання рисунка, який ще в 7-му класі мав би природно ввійти у шкільний курс геометрії незамінним складовим елементом кожної більш-менш серйозної пропозиції.

Вивчення математики формує багато позитивних якостей особистості: кмітливість, настирність, акуратність, критичність і т. ін. Серед них учителю варто вирізняти логічне мислення і просторове уявлення, вміння осмислити, «побачити розумом» певні фігури, предмети не лише статичними, а й динамічними (у процесі та як результат перетворень). Зокрема в геометрії, при розв’язуванні задач «із родзинкою» за рисунком, доводиться це робити постійно. Дякуючи чому поступово виробляються потрібні житейські якості, без яких не можна обійтися у повсякденному плануванні вже дорослої діяльності з тим, щоб її результати були виваженими, раціональними, безпомилковими. До того ж, геометричні задачі розвивають інтуїцію, здатність розумного, правильного вибору шляху в непростих, заплутаних ситуаціях.

Цілеспрямоване навчання і самонавчання розв’язувати нестандартні, різного ступеня складності геометричні задачі з ефективним використанням у пошуковому, творчому стилі візуально якісних рисунків здатне розбурхати і закріпити пізнавальний інтерес до науки, яка виникла із практичних і духовних потреб, є феноменом загальнолюдської культури. Геометризація, візуальне унаочнення, моделювання в уяві та на рисунку різнохарактерних задач покликані принести відчутну користь учню.

Немає сумнівів, що гучний вислів «Геометрія є вітаміном для мозку» завжди залишатиметься актуальним на освітянській ниві.

ВИСНОВКИ

Найважливішим завданням математичної освіти є озброєння учнів загальними прийомами мислення, просторової уяви, розвиток здатності розуміти сенс поставленого завдання, вміння логічно міркувати, засвоїти навички алгоритмічного мислення. Кожному важливо навчитися аналізувати, відрізняти гіпотезу від факту, чітко висловлювати свої думки, а з іншого боку - розвинути уяву та інтуїцію (просторове уявлення, здатність передбачати результат і передбачити шлях вирішення). Саме математика надає сприятливі можливості для виховання волі, працьовитості, наполегливості в подоланні труднощів, завзятості в досягненні цілей.

Сьогодні математика як жива наука з багатосторонніми зв’язками, що робить істотний вплив на розвиток інших наук і практики, є базою науково-технічного прогресу і важливою компонентою розвитку особистості.

Однією з основних цілей вивчення математики є формування і розвиток мислення людини, перш за все, абстрактного мислення, здатності до абстрагування і вміння "працювати" з абстрактними, «невловимими» об’єктами.

В якості одного з основоположних принципів нової концепції в "математиці для всіх" на перший план висунута ідея пріоритету розвиваючої функції навчання математики. Відповідно до цього принципу центром методичної системи навчання математики стає не вивчення основ математичної науки як такої, а пізнання навколишнього людини світу засобами математики і, як наслідок, до динамічної адаптації людини до цього світу, до соціалізації особистості.

Основною метою математичної освіти має бути розвиток вміння математично усвідомлено досліджувати явища реального світу.

Вивчивши і проаналізувавши методичну і наукову літературу по темі нашого дослідження, ми виявили значення геометричного матеріалу в середній школі. І перш за все це формування логічної послідовності дій.

З точки зору класифікації психічних явищ, логічна послідовність дій не відноситься до жодного з традиційно виділяються психічних процесів, а являє собою єдність, симбіоз уваги, мислення, уяви і пам’яті.

Незважаючи на виняткову важливість логічної послідовності дій в структурі психіки дитини, ця здатність не формується в рамках шкільної програми цілеспрямовано. Вимоги, які пред’явлені до учнів, в основному орієнтовані на формування універсальних навчальних дій. Однак вони не включають в структуру пізнавальної діяльності проблему формування логічної послідовності дій. Про цю причину дана проблема набуває особливої актуальності.

В умовах школи логічна послідовність дій може формуватися тільки стихійно, а це означає, що процес її формування протікає не оптимально і отриманий результат далеко не завжди відповідає максимально можливому рівню її розвитку у кожної конкретної дитини. І використання геометричного матеріалу більш ефективно підходить для її формування, оскільки використання наочних образів дозволяє неодноразово аналізувати вироблену дію.

Провівши дослідно-експериментальну роботу і проаналізувавши її результати, ми констатували, що збільшення вмісту геометричного матеріалу сприяло швидшому формуванню логічної послідовності дій. В ході дослідження знайшла підтвердження висунута гіпотеза: якщо на заняттях з позаурочної діяльності з математики зі школярами буде організована цілеспрямована і грамотна робота, пов’язана з геометричними побудовами, то це сприятиме формуванню логічної послідовності дій в учнів і поліпшить їх успішність. В ході роботи з даною ВКР нами були зроблені наступні висновки:

По-перше в середньому шкільному віці бурхливо розвивається логічна послідовність дій – це фундаментальна інтелектуальна здатність, яка серйозно впливає на розвиток пізнавальної та особистісної сфер школяра, багато в чому визначає успішність навчання.

По-друге саме безперервне і цілеспрямоване педагогічний вплив, що включає систему завдань з використанням геометричного матеріалу сприяють його формуванню.

По-третє необхідно внести поправки в систему освіти і збільшити частку геометричного матеріалу в середній школі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адрова И. А. Методика создания и использования системы повторительных математических диктантов как средства повышения прочности усвоения базовых знаний учащихся : автореф. дис. канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / Ирина Анатольевна Адрова. – М. – 2008. – 20 с.

2. Акопян А. В. Проблема формирования и развития профессионально-педагогической культуры в работах И. Ф. Исаева / Акопян А. В. // Проблемы и перспективы развития образования : материалы III междунар. науч. конф. (г. Пермь, январь 2013 г.. – П. : Меркурий, 2013. – С. 1–4.

3. Аксютина И. В. Формирование творческой деятельности учащихся при изучении систематического курса геометрии в основной школе : автореф. дис. канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / Ирина Владимировна Аксютина. – М. – 2008. – 20 с.

4. Актуальні проблеми методики навчання математики. Компетентнісна модель професійної підготовки майбутнього вчителя математики : матеріали IV –VI регіон. Наук.-практ. Конф., Одеса, 22-23 квітня 2012 р., 13-14 квітня 2011 р., 4-5 квітня 2012 р. / піл ред.. С. В. Іванової; ДЗ «ПНПУ ім. К. Д. Ушинського». – О. : АО Бахва, 2012. – 316 с.

5. Акуленко І. А. Компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект) : монографія / І. А. Акуленко. – Ч. : видавець Чабаненко Ю., 2013. – 460 с.

6. Акуленко І. А. Система диференційованих вправ з логічним навантаженням як засіб розвитку логічного мислення учнів 5–6 класів при вивченні математики : автореф. дис. канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / І. А. Акуленко. – К., 2000. – 20 с.

7. Атанасян Л. С. Геометрия 7-9 класс/ Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. - Москва: Издательство «Просвещение», 2008-2010р.р. – 380 с.

8. Баданова Т. А. Методика формирования пространственного мышления учащихся при изучении геометрии на основе синергетического похода : дис. ... канд. пед. наук : спец. 13.00.02 / Татьяна Александровна Баданова. – Калуга. – 2009. – 305 с.

9. Балл Г. А. Теория учебных задач : Психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – М. : Педагогика, 1990. – 184 с.

10. Басова Н. В. Педагогика и практическая психология: учеб. пособие/ Н. В. Басова. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2000. – 416 с.

11. Бевз В. Г. Ідеї розвивального навчання математики у творчій спадщині З. І. Слєпкань / В. Г. Бевз, Н. М. Калідуб // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 35. – Д. : ДонНУ, 2011. – С. 15–20.

12. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія / В. Г. Бевз. – К., 2005. – С. 310–313.

13. Бевз В. Г. Історія математики як інтеграційна основа навчання предметів математичного циклу у фаховій підготовці майбутніх учителів : автореф. дис. доктора пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія і методика навчання (математика)» / Валентина Григорівна Бевз. – К., 2007. – 40 с.

14. Бевз В. Г. Олександр Матвійович Астряб – засновник школи з методики математики в Україні / В. Г. Бевз, Г. Ф. Олійник, В. О. Швець // Математика в школі. – 2004.– № 8 – С. 51–55.

15. Бевз Г П. Геометрія.8 клас/ Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г - К.: Видавництво "Вежа", 2008 - 260 с.

16. Бевз Г. П. Геометрія.7 клас/ Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г - К.: Видавництво "Вежа", 2008 - 224 с.

17. Бібік Н. М. Компетентність у навчанні / Н. М. Бібік // Енциклопедія освіти / АПН України, гол.ред. В. Г. Кремень. – К. : Юрінком Інтер, 2008. – 408 с.

18. Бурда М. І. Геометрія. Підручник для 9 класу загальноосв. навч. Закладів/ М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова – К.: «Зодіак – ЕКО», 2009 – 239 с.

19. Бурда М. І. Геометрія: навч. посіб. для 8-9 кл. шк. з поглиб. вивченням математики / М. І. Бурда. – 2- ге вид. – К.: Освіта, 1998. – 240 с.

20. Бурда М. І. Геометрія: підручник для 7 класу загальноосвіт. навч. закладів/ М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. Зодіак-ЕКО, 2007. – 206 с.

21. Бурда М. І. Геометрія: підручник для 8 класу загальноосвіт. навч. закладів/ М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. Зодіак-ЕКО, 2008. – 240 с.

22. Вересова Е. Е. Практикум по решению математических задач: Учебное пособие для институтов/ Е. Е. Вересова, Н. С. Денисова, Т. Н. Полякова. – М.: Просвещение, 1979. – 240 с.

23. Виноградова Л. В. Методика преподавания математики в средней школе./ Л. В. Виноградова — Ростов-на-Дону: Феникс, 2005 – 251 с.

24. Власенко К. Формування прийомів евристичної діяльності на уроках геометрії/ К. Власенко// Рідна школа. – 2003. – № 7. – С. 41-43.

25. Вozняк О. Г. Метод координат у геометричних задачах. навч. посібник./О. Г. Возняк — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. — 64 с.

26. Габович І. Г. Алоримический подход к решению геометрических задач:кн. для учащихся./ Габович І. Г.– М.:Просвещение: АО «Учеб.лит»,1996. – 192 с. 72

27. Галузяк В. М. Педагогіка: Навчальний посібник./ Галузяк В. М., Сметанський М. І., Шахов В. І.— Вінниця: ДП "Державна картографічна фабрика", 2006. — 400 с.

28. Гальперин П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий/ П. Я. Гальперин// Исследования мышления в советской психологии. – М.: Наука, 1966. – С.236 – 277

29. Геометрія. 9 клас: підручник для загальноосвіт. навч. заклад./ А. П. Єршова, В. В. Голобородько, А. П. Крижановський, С. В. Єршов. –Х: Видавництво «Ранок», 2009 - 256 с.

30. Гокова Т. В. Узагальнення і систематизація знань учнів про площу трикутника через пошук різних розв’язань геометричної задачі/ Гокова Т. В.,

Кобко Л. М.// Вісник Чернігівськ. національн. педагогічн. університ. Серія: Педагогічні науки/ Чернігівський національний педагогічний університет ім. Т. Г. Шевченка. – Чернігів: Вид-во ЧДПУ, 1998.- с. 303-308.

31. Головань М. С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М. С. Головань // Математика в сучасній школі. – 2013. – №4. – С. 23–27

32. Горошко Ю. В. Методика вивчення ППЗ GRAN 2D на уроках інформатики та його застосування в планіметрії / Л. В. Грамбовська, Ю. В. Горошко // Комп’ютер в школі та сім’ї. – 2008. –№ 3. – С. 14–22.

33. Готман Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся./ Э. Г. Готман — М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996.— 240 с.

34. Гусев В. А. Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей/ В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Просвещение, 1992.— 352 с

35. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [електронний ресурс] – Режим доступу: http://mon.gov.ua/content/%D0%9E%D1%81%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%B0 /post-derzh-stan-(1).pdf

36. Драч І. І. Компетентнісний підхід як засіб модернізації змісту вищої освіти / І. І. Драч // Проблеми освіти: [наук. зб.]. – К. : Інститут інновац. технологій і змісту освіти МОН України. – 2008. – Вип. 57. – С. 44–48.

37. Дяченко Н. О. Сутність процесу розв’язування педагогічних задач [Електронний ресурс] – Н. О. Дяченко// Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology – 2015. – Випуск 57. - Режим доступу: http://seanewdim.com/uploads/3/2/1/3/3213611/dyachenko_n.the_essence_of_the_pr ocess_of_solving_educational_problems.pdf 73

38. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках геометрії: [посіб. для вчителів] / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2000. – 168 с.

39. Забазнова А. О. До питання використання різних методів розв'язування задач з планіметрії/ Забазнова А. О. - Матеріали І Всеукраїнської дистанційної науково-практичної конференції «Методичний пошук вчителя математики». – Вінниця, 2017.

40. Зеленяк О. П Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal/ О. П. Зеленяк. — Киев, Москва: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. — 336 с.

41. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навчальний посібник / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг : Кн. вид-во Кирєєвського, 2009. – 316 с

42. Монько О. Ю. Методи розв'язування планіметричних задач/ Монько О. Ю. - Матеріали І Всеукраїнської дистанційної науково-практичної конференції «Методичний пошук вчителя математики». – Вінниця, 2017.

43. Мусейібова Т. А. Методика формування елементарних математичних уявлень у дітей./ Мусейібова Т. А., Корнєєва Г. А. - М., 1989. - 159 с.

44. Наконечна Л. Й. Система задач для формування вмінь студентів розв'язувати задачі координатним методом/ Наконечна Л. Й. - Матеріали І Всеукраїнської дистанційної науково-практичної конференції «Методичний пошук вчителя математики». – Вінниця, 2017.

45. Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти [Постанова Кабінету міністрів України від 23 листопада 2011 року №1392] Електронний ресурс. Режим доступу: http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/1392–2011–п

46. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-11 кл. – К. : Шкільнийсвіт. – 2001. – 110 с.

47. Проект Національної стратегії розвитку освіти в Україні на 2012–2021 роки [Електронний ресурс].– Режим доступу: www.mon.gov.ua

48. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. … д-ра. пед. наук : 13.00.02 / Сергій Антолійович Раков. – К., 2005. – 381 с.

49. Слєпкань З. І. Методика навчання математии: Підручник – 2-ге видання, допов. і перероб. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.

50. Татьянченко Д. В. Программа общеучебных умений: совершенствование эффективности формирования познавательной компетентности школьников/ Татьянченко Д. В., Воровщиков С. Г.// Образование в современной школе - №6.-2002. - с. 44-57.