Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою її викладання

Кваліфікаційна робота магістерського рівня на тему:

ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Виконав: студент ІІ курсу магістратури
групи М-М-21, спеціальності:
014 Середня освіта (Математика)
Халупа Володимир Романович
Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри
математики з методикою викладання
Генсіцька-Антонюк Н. О.
Консультант:
____
Рецензент:
____

Рівне – 2021 року

Зміст

Вступ ... 3
1. Теоретичні основи викладання теорії ймовірностей та математичної статистики у профільній школі ... 5
1.1. Пропедевтичні відомості ... 5
1.2. Основні теоретичні відомості ... 7
1.2.1. Елементи комбінаторики ... 7
1.2.2. Основні поняття теорії ймовірностей ... 8
1.2.3. Поняття статистики. Характеристики рядів даних ... 12
2. Методичні особливості викладання теорії ймовірностей та математичної статистики у профільній школі ... 14
2.1. Методика формування понять комбінаторики ... 14
2.2. Методика формування основних понять теорії ймовірностей ... 18
2.3. Методика формування основних понять математичної статистики ... 21
3. Розв’язування задач ... 25
3.1. Приклади розв'язування типових задач ... 25
3.2. Список задач для самостійного розв’язання та підготовки до ЗНО ... 31
Висновки ... 37
Список використаних джерел ... 39

Вступ

Пропозиції щодо потреби включити початки теорії ймовірностей та математичної статистики у шкільну програму висловлювалися ще у кінці XIX і на початку XX століття. Вже тоді даний матеріал містився в шкільних програмах деяких країн Західної Європи.

В Україні у 1878 році було видано перший підручник з теорії ймовірностей. Його автор – професор Київського політехнічного інституту Єрмаков В. П. А у 1896 році було видано посібник «Елементарна теорія ймовірності», який призначався для читачів, не знайомих із вищою математикою. Його автор – Філіпов М. М.

Актуальність роботи обумовлена тим, що у сучасному світі закономірності масових природних, наукових, технічних, технологічних, соціально-економічних чи психологічних явищ підпорядковуються закономірностям, що мають ймовірнісний або статистичний характер. Сучасне суспільство потребує уміння аналізувати випадкові чинники, оцінювати ймовірності, прогнозувати та висувати гіпотези, приймати рішення в умовах, характер яких є ймовірнісним. На теорії ймовірностей ґрунтуються різні галузі науки і виробництва, саме тому для фахівців медичної, суспільної, біологічної та інших наук, менеджерів на виробництві, державних діячів, представників судової та законодавчої влади важливо добре орієнтуватися у ймовірнісно-статистичному математичному апараті та уміло використовувати його на практиці. Звідси і випливає потреба у загальній безперервній та багаторівневій ймовірнісно-статистичній освіті для всього населення, основу якої можна отримати у шкільному віці у старшій школі.

Об’єктом дослідження даної магістерської роботи є теорія ймовірностей та математична статистика.

Предмет дослідження – теоретичні відомості комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики, які вивчаються у профільній школі, методичні особливості їх викладання.

Метою даної роботи є аналіз та систематизування теоретичних відомостей теорії ймовірностей та математичної статистики, розробка методичних рекомендацій щодо викладання теорії ймовірностей та математичної статистики у профільній школі.

Для досягнення мети роботи поставлено такі **завдання**:

– проаналізувати відповідну наукову, педагогічну та методичну літературу;

– скласти перелік пропедевтичних теоретичних відомостей, що передують вивченню теорії ймовірностей та математичної статистики у профільній школі;

– навести основні теоретичні відомості з комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики, що вивчаються у профільній школі;

– описати методичні рекомендації щодо викладання елементів комбінаторики, основ теорії ймовірності та математичної статистики у профільній школі;

– навести приклади розв’язання типових задач з комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики;

– скласти список задач для самостійного розв’язання та підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Джерельна база роботи:

– навчальні програми;

– шкільні підручники та посібники;

– методична література для студентів та учителів;

– статті.

Робота складається із вступу, основної частини, що включає в себе 3 розділи, висновків та списку використаних джерел.

1. Теоретичні основи викладання теорії ймовірностей та математичної статистики у профільній школі

1.1. Пропедевтичні відомості

Комбінаторика – розділ математики, у якому вивчають способи вибору та розміщення елементів з деякої скінченної множини відповідно до заданих умов. Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають сполуками (Істер О. С., Єргіна О. В., 2017).

В шкільному курсі математики розглядають сполуки без повторень – сполуки, всі елементи якої різні: розміщення, перестановки, комбінації і т. д.

Основою для розв’язування багатьох задач з комбінаторики є два правила, які називають правилом суму та правилом добутку (у інших джерелах (Тарасенкова Н. А. та ін., 2017; Григулич С. М., 2014)– правилом додавання та правилом множення відповідно).

Правило суми. Якщо елемент A можна вибрати x способами, а елемент B – y способами, то зробити вибір «A або B» можна $x+y$ способами. При цьому вважається, що вибір елемента A відрізняється від вибору елемента B.

Правило добутку. Якщо елемент A можна вибрати x способами, а після цього вибрати елемент B можна y способами, то зробити вибір «A і B» можна $x \cdot y$ способами.

Дані два правила поширюються на три та більше елементів (Бевз Г. П., Бевз В. Г., 2017).

Важливим поняттям у комбінаториці є таке поняття як факторіал.

Факторіалом цілого невід’ємного числа n називають добуток усіх натуральних чисел від 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Вважається, що $0! = 0$ і $1! = 1$.

Теорія ймовірностей – розділ математики, що вивчає закономірності, які випливають із великої кількості випадкових явищ, процесів (Інститут мовознавства ім. О. О. Потебні | Словник української мови, 2021).

Випадковий дослід – це дослід (експеримент, спостереження, випробування), результат якого залежить від випадку і який можна повторити багато разів за одних і тих самих умов.

Результат випадкового досліду називають *подією*.

Випадковою подією називають такий результат випадкового досліду, який при дотриманні даного комплексу умов може відбутися, а може й не відбутися.

Подію, яка при дотриманні даного комплексу умов обов'язково відбудеться, називають *вірогідною*.

Подію, яка при дотриманні даного комплексу умов ніколи не відбудеться, називають *неможливою*.

Якщо при дотриманні даного комплексу умов проведено n випадкових дослідів і в $n(A)$ з них випадкова подія A відбулася, то число $n(A)$ називають *частотою* події A, а відношення $\frac{n(A)}{n}$ – *відносною частотою* події A.

Якщо під час проведення великої кількості випадкових дослідів значення відносної частоти випадкової події A є близьким до деякого числа, то дане число називають *статистичною ймовірністю* цієї події.

Класичне означення ймовірності. *Ймовірність* $P(A)$ випадкової події A дорівнює відношенню кількості випадків m, що сприяють появі події A, до кількості всіх рівноможливих випадків n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Ймовірність випадкової події може бути будь-яким числом від 0 до 1, причому ймовірність вірогідної події дорівнює 1, а ймовірність неможливої – 0.

Сума ймовірностей усіх можливих подій випадкового випробування дорівнює 1.

Події, ймовірність яких у даному випадковому досліді однакова, називають *рівноймовірними*.

Математична статистика – розділ математики, що вивчає математичні методи систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків (Істер О. С., 2017).

Статистичні дані визначають зазвичай за допомогою *вибірки* – скінченної сукупності незалежних результатів спостережень. Для представлення результатів статистичної обробки даних у стислому та наочному вигляді і їх наступної характеристики використовують частотні таблиці, різноманітні графіки, стовпчасті діаграми (гістограми) та кругові діаграми.

Основними *тенденціями* вибірки є середнє значення, мода та медіана.

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне усіх її значень:

Модою вибірки називають те її значення, яке трапляється найчастіше.

Медіаною вибірки називають те її значення, яке «поділяє» навпіл впорядковану сукупність усіх значень вибірки (тобто «серединне» значення). У випадку, якщо вибірка містить парну кількість значень, то медіаною вважать півсуму двох її середніх значень

Згідно з чинною навчальною програмою (Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів для загальноосвітніх навчальних закладів, 2017) наприкінці вивчення курсу алгебри у дев'ятому класі розглядається тема «Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики», де вивчаються подані вище теоретичні відомості.

1.2. Основні теоретичні відомості

1.2.1. Елементи комбінаторики

Означення 1. *Перестановкою* з n елементів називається будь-яка впорядкована множина з n заданих елементів. Мається на увазі така множина, для якої вказано, який елемент розташований на першому місці, який – на другому, який – на третьому, ..., а який – на n-му).

Формула *числа перестановок* (P_n) має вигляд:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n .$$

Означення 2. *Розміщенням* з n елементів по k називається будь-яка впорядкована множина з k елементів, складена з елементів заданої n-елементної множини.

Формула *числа розміщень* (A_n^k) має вигляд:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} .$$

Має місце наступна формула: $P_n = A_n^n$, оскільки перестановка з n елементів є по своїй суті розміщенням з n елементів по n.

Означення 3. *Комбінацією* з n елементів по k називається будь-яка k-елементна підмножина заданої n-елементної множини.

Формула *числа комбінацій* (C_n^k) має вигляд:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Основні властивості комбінацій:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (у тому числі $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$);

2) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

У десятому класі повторюють правило суми та правило добутку, які вже описано у попередньому підрозділі.

1.2.2. Основні поняття теорії ймовірностей

У десятому класі також повторюють такі основні поняття теорії ймовірностей як випадковий експеримент, випадкова подія, вірогідна подія, неможлива подія, рівноможливі події та класичне означення ймовірності, але подаються вони на більш ґрунтовному рівні. Новими поняттями теорії ймовірностей, які вивчаються у десятому класі, є наступні поняття.

Означення 4. Події A і B називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно у даному випадковому експерименті.

Означення 5. Події A_1, A_2, …, A_n називаються *несумісними*, якщо будь-яка пара даних події є несумісними в даному випадковому експерименті.

У десятому класі вводиться таке поняття як *простір елементарних подій* – множина U всіх попарно несумісних подій u_1, u_2, …, u_n, тільки одна з яких може бути результатом даного випадкового досліду:

$$U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}.$$

На основі даного поняття можна ввести поняття *випадкової події* як підмножина простору елементарних подій U. Також на основі поняття простору елементарних подій вводиться класичне означення ймовірності, але по своїй суті воно не відрізняється від того, яке вивчалося у дев’ятому класі:

Означення 6. Якщо розглядається простір рівноможливих елементарних подій, то *ймовірність події* A – це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій до числа всіх рівноможливих елементарних подій у даному експерименті.

Означення 7. Подію $\overline{A}$ називають *протилежною* до події A, якщо вона полягає в тому, що в даному випадковому досліді не відбудеться подія A.

Якщо відома ймовірність події A, то ймовірність протилежної події $\overline{A}$ можна визначити за формулою:

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A),$$

оскільки сума ймовірностей двох протилежних подій дорівнює 1: $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$.

Означення 8. *Сумою* (або ж *об'єднанням*) подій A та B називається подія $A + B$ ($A \bigcup B$), яка полягає в тому, що відбудеться подія A або подія B (або A, або B, або обидві події).

Означення 9. *Добутком* (або ж *перерізом*) подій A та B називається подія $A \cdot B$ ($A \bigcap B$), яка полягає в тому, що відбудуться обидві ці події.

Очевидно, поняття суми і добутку подій можна узагальнити на n подій, причому усі події, які розглядаються при означенні суми та добутку, належать до одного випадкового досліду.

Із останнього означення випливає, що дві випадкові події A та B несумісні тоді і тільки тоді, коли їх переріз (добуток) є неможливою подією $\varnothing$:

$$A \bigcap B = \varnothing \ (A \cdot B = \varnothing).$$

Таким чином, $P(A \bigcap B) = 0$ ($P(A \cdot B) = 0$).

Якщо події A та B є несумісними, то ймовірність їх суми дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Дану формулу можна узагальнити і на n попарно несумісних подій.

Для двох довільних подій справедливою ж є наступна формула:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Частоту та відносну частоту випадкової події, статистичне означення ймовірності, яке дається на їх основі, також повторюють у десятому класі, проте розглядається нове означення ймовірності – аксіоматичне, тобто таке, яке задається переліком її властивостей:

Означення 10. *Ймовірність* – це функція $P(A)$, означена на множині U всіх подій, що визначається даним випадковим дослідом, яка задовольняє такі вимоги:

1. $0 \le P(A) \le 1$ для будь-якої події з множини подій U.

2. $P(A) = 1$ для будь-якої вірогідної події A.

3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ для будь-яких двох несумісних подій.

Вимоги (або ж умови) 1-3 – *аксіоми А. М. Колмогорова теорії ймовірностей*.

Із даних аксіом випливають такі наслідки:

1) ймовірність неможливої події дорівнює 0, а ймовірність протилежної події $\overline{A}$ до події A визначається за формулою: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

2) ймовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \text{ (якщо } A_i \cdot A_j = \varnothing,\ i \ne j\text{)}.$$

Означення 11. Число, яке виражає ймовірність події A за умови, що відбулася подія B, називається *умовною ймовірністю* події A за умови B і позначається $P(A \mid B)$ або $P_B(A)$.

Обчислити умовну ймовірність можна за формулою:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Теорема множення ймовірностей. Ймовірність добутку (одночасної появи) двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої події, обчисленої за умови, що перша подія уже відбулася:

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

Дану формулу можна узагальнити і на n подій:

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 A_2}(A_3)...P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n),$$

тобто ймовірність добутку (одночасної появи) n подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється при виконанні умови, що усі попередні події уже відбулися.

Означення 12. Події A та B називаються *незалежними* подіями, якщо подія A не змінює ймовірність події B, тобто якщо виконується рівність $P(AB) = P(A)P(B)$.

Таким чином, ймовірність добутку (одночасної появи) незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Декілька подій називають незалежними (кажуть також «незалежними в сукупності»), якщо для будь-якої підмножини цих подій, яка містить дві чи більше події, ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей, зокрема, виконується наступна рівність:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Основна властивість незалежних подій. Якщо у сукупності кількох незалежних подій замінити деякі з них на протилежні їм події, то отримана сукупність подій теж буде сукупністю незалежних подій.

Ймовірність того, що відбудеться хоча б одна із n *незалежних подій* A_1, A_2, …, A_n визначається за формулою:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))\ldots(1 - P(A_n))$$

Означення 13. *Випадковою величиною* називають числову функцію, областю визначення якої є простір елементарних подій.

Означення 14. *Законом розподілу* випадкової величини X називається функція, яка кожному значенню x випадкової величини X ставить у відповідність число $P(X = x)$ – імовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина X набула значення x.

Якщо випадкова величина набуває ізольованих одне від одного значень, то такі величини називають *дискретними*.

Означення 15. Сума добутків усіх значень випадкової величини (x_1, x_2, …, x_n) на відповідні ймовірності (p_1, p_2, …, p_n) називається *математичним сподіванням* величини X і позначається $M(X)$ (або ж MX):

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

Математичне сподівання є «*середнім зваженим*» її значень за ймовірностями; воно показує, на яке середнє значення випадкової величини можна сподіватися при значній кількості повторень експерименту.

Інколи математичне сподівання називають ще *середнім значенням* випадкової величини.

1.2.3. Поняття статистики. Характеристики рядів даних

На початку вивчення математичної статистики повторюються поняття *статистики, генеральної сукупності та вибірки, варіанти і варіаційного ряду*, а також розглядаються *основні задачі математичної статистики*:

1. Оцінка ймовірності.
2. Оцінка закону розподілу.
3. Оцінка числових характеристик випадкової величини.
4. Перевірка статистичних припущень (гіпотез),

Далі розглядають вивчені у 9-му класі поняття *моди* (Mo), *медіани* (Me) *і середнього значення* $(\bar{x})$, звертаючи при цьому увагу на таке поняття як *розмах вибірки* – різницю між найбільшим і найменшим значеннями величини у вибірці; повторюють *графічне і табличне подання даних* та вивчають *полігон частот* – ламану, відрізки якої послідовно сполучають точки з координатами $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, …, $(x_n; w_n)$ де x_i – значення різних елементів ряду даних, а w_i – відповідні їм частоти.

Означення 16. *Середнім значенням* $\bar{x}$ вибірки x_1, x_2, …, x_n називають середнє арифметичне усіх її значень:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Означення 17. *Модою* (Mo) вибірки називають те її значення, яке трапляється найчастіше.

Означення 18. *Медіаною* (Me) вибірки називають те її значення, яке «поділяє» навпіл впорядковану сукупність усіх значень вибірки (тобто «серединне» значення). У випадку, якщо вибірка містить парну кількість значень, то медіаною вважать півсуму двох її середніх значень

Основна відмінність «міні-курсу» математичної статистики у десятому класі від аналогічного у дев'ятому полягає у більш ґрунтовній подачі теоретичних відомостей та вищій складності практичних задач.

У кінці десятого класу згідно з чинною навчальною програмою (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів, 2018) вивчаються подані вище теоретичні відомості із комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики.

2. Методичні особливості викладання теорії ймовірностей та математичної статистики у профільній школі

Згідно з чинною програмою у профільній школі елементи комбінаторики, теорію ймовірностей та математичну статистику вивчають у десятому класі. На вивчення теми відводиться 30 годин.

2.1. Методика формування понять комбінаторики

Основними завданнями вивчення елементів комбінаторики у десятому класі профільної школи є формування понять перестановки, розміщення і комбінації без повторень та вироблення уміння застосування цих знань при розв'язуванні задач комбінаторики.

Вивченню даної теми з метою пропедевтики передує вивчення елементів комбінаторики у дев'ятому класі, де вивчають лише правила суми та добутку, але не вивчають сполуки і формули для обчислення їх кількості.

Повторити правила суми і добутку можна на таких задачах.

Приклад 1. В овочевому відділі супермаркету є 4 сорти яблук червоного кольору і 3 сорти зеленого. Скількома способами можна вибрати для покупки кілограм яблук одного сорту?

Зрозуміло, що обрати яблука сорту червоного кольору можна чотирма способами, а зеленого – трьома. Таким чином, обрати один із сортів яблук можна $4+3=7$ способами.

Приклад 2. В кіоску продають ручки 4-х видів і зошити 3-х видів. Скількома способами можна обрати набір із ручки та зошита?

До кожної із п'яти ручок можна взяти будь-який із чотирьох зошитів. Тоді, очевидно, пару – ручка і зошит можна $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Далі потрібно уточнити зміст правил суми і добутку, використовуючи поняття множин та операцій над ними.

Нехай множина A складається з m елементів, а множина B – з n елементів. Якщо множини A і B не перетинаються, то множина $A \bigcup B$ складається з $m+n$ елементів – уточнення правила суми.

Нехай множина A складається з m елементів, а множина B – з n елементів. Тоді Множина всі упорядкованих пар $(a;b)$, де перший елемент належить множині A, а другий – множині B, складається з $m \cdot n$ елементів – уточнення правила добутку.

Варто зауважити, що подібну множину упорядкованих пар називають декартовим добутком множин A і B та позначають $A \times B$.

Методика формування основних понять комбінаторики починається із введення поняття сполук – різних груп, складених з певних предметів, які відрізняються одна від одної порядком даних предметів або ж самими предметами.

Після цього вводиться спочатку описово, а потім і на рівні означення поняття розміщень (див. означення 2).

Поняття перестановок можна вводити через поняття розміщення як його окремий випадок. Дійсно, перестановка – це розміщення з n елементів по n. Або ж поняття перестановок можна ввести окремим означення (див. означення 1)

Комбінацію також можна вводити або окремим означення (див. означення 3), або на основі розміщень: якщо з розміщень, що можна скласти n елементів по k, вибрати ті, які відрізняються принаймні одним елементом, то одержимо сполуки, які називаються комбінаціями.

У діючих підручниках за авторством Є. П. Неліна, О. Є. Долгової та А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, Б. В. Полонського, М. С. Якора сполуки вводяться у вказаному вище порядку, а у підручнику за авторством О. С. Істера, О. В. Єргіної спочатку дається означення розміщення, а вже потім означення перестановок і комбінацій.

Під час вивчення кожного виду сполук розглядається приклад, який наочно ілюструє суть даної сполуки, а лише потім дається чи доводиться формула, за якою можна обчислити кількість сполук. Наприклад, після означення розміщення можна розглянути множину із трьох цифр $\{1,5,0\}$ та скласти такі розміщення: $\{1,5\}$, $\{1,0\}$, $\{5,0\}$, $\{5,1\}$, $\{0,1\}$ та $\{0,5\}$.

Доведення формул для кількості розміщень, перестановок та комбінацій залежить від того, який вибрано порядок введення понять. Наведемо приклад доведення формул у порядку, який дається у діючих підручниках з алгебри та початків аналізу.

Доведемо, що кількість розміщень визначається за формулою $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Нехай нам дано множину з n елементами, а ми формуємо її впорядковану підмножину із k елементів.

Існує усього n способів як вибрати перший елемент цієї підмножини. Після вибору першого елемента, другий елемент підмножини можна вибрати $n-1$ способом. Для вибору третього елемента, після того як вибрано перший та другий елементи, залишається $n-2$. Якщо продовжити ці міркування, то отримаємо, що вибрати k-тий елемент можна $n-(k-1)$ способами. Використовуючи правило добутку, можна записати:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)).$$

Якщо поділити та помножити праву частину останньої рівності на $(n-k)!$ отримаємо формулу:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

що і потрібно було довести.

Доведення формули кількості перестановок ($P_n = n!$) виконуємо, враховуючи, що існує лише єдина n-елементна впорядкована підмножина даної n-елементної множини. Отже, $P_n = A_n^n$, тобто A_n^n – кількість перестановок n-елементної множини. Підставивши у формулу $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ n замість k, та, врахувавши, що $(n-n)! = 0! = 1$, отримаємо:

$$P_n = n!,$$

що і треба було довести.

Для доведення формули $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ складемо спочатку k-елементні підмножини n-елементної множини. Їх, як вже було доведено, усього є $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Дані підмножини є впорядкованими, а порядок не важливий для комбінацій. Елементи будь-якої із даних підмножин можна переставити між собою $P_n = n!$ способами. Таким чином, число C_n^k менше за число A_n^k у P_n разів, тобто:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

що і треба було довести.

Далі, використовуючи властивості факторіалу, можна довести основні властивості комбінацій:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (у тому числі $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$);

2) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Але це можна не робити, обмежившись лише формулою для кількості комбінацій.

Для того, щоб учні правильно розв'язували комбінаторні задачі, важливо пояснити характерні ознаки сполук. Наприклад, розміщення характеризуються тим, що предмети і місце різні; $0 \le k \le n$; усі місця зайняті; порядок елементів є важливим. Автори згаданих вище підручників рекомендують користуватися наступною схемою для визначення того, формулою кількості якої сполуки потрібно користуватися в даній задачі:

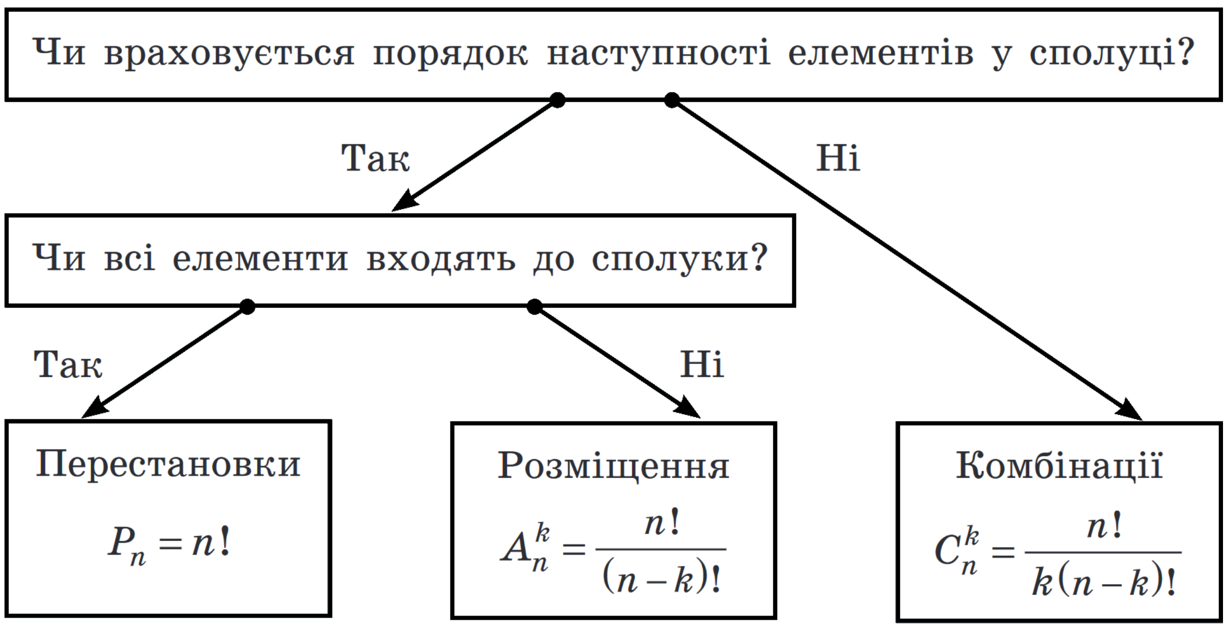

Рис. 2.1

Завершити розгляд даної теми потрібно розв'язуванням усіляких комбінаторних задач різного рівня складності (див. розділ 3).

2.2. Методика формування основних понять теорії ймовірностей

Основною метою вивчення теорії ймовірностей є введення основних теоретичних понять, поняття про теорію ймовірностей як науку, подання та доведення деяких теорем теорії ймовірностей, введення поняття класичної, статистичної і аксіоматичної ймовірності, навчання учні обчисленню ймовірності випадкових величин. При цьому учні мають отримати уявлення про випадковий експеримент та випадкову подію, простір елементарних подій, несумісні події, рівноможливі та інші події; знати означення вірогідної та неможливої події, суми, добутку двох подій, протилежну подію, класичне, статистичне і аксіоматичне означення ймовірності, теореми теорії ймовірностей; вміти обчислювати ймовірність події за класичним означенням ймовірності, використовувати теореми теорії ймовірностей при розв'язування практичних задач та інше.

Вивченню теорії ймовірностей у десятому класі передує з метою пропедевтики вивчення основ теорії ймовірностей у дев'ятому класі та вивчення комбінаторики.

Перші уроки вивчення теми «Теорія ймовірності» потрібно присвятити формуванню основних понять. До них можна віднести такі поняття як випадковий експеримент, подія, випадкова подія, сумісні подій, однаково можливі подій, вірогідні та не можливі події, простір елементарних подій та класичне означення ймовірності.

На наступних уроках потрібно розглянути статистичне означення ймовірності, аксіоматичне означення ймовірності, суму та добуток двох подій, протилежну подію. Далі розглядають незалежні події та умовну ймовірність.

На останніх уроках вивчення теорії ймовірностей розглядають поняття випадкової величини та її математичне сподівання.

До основних понять теорії ймовірностей належать поняття випадкового експерименту та події. На першому уроці потрібно ввести на конкретних прикладах дані поняття та переконати учнів, що для масових випадкових подій існують закономірності, що і вивчає теорія ймовірностей. Потрібно пояснити, що у науці, техніці та у реальному житті доводиться мати справу із подіями, які залежать від невідомих обставин або від таких, що не піддаються обліку. Наприклад, неможливо передбачити, скільки випускників загальноосвітніх шкіл України складуть на відмінно ЗНО.

Подібні події й отримали назву випадкових події, їх вивчає теорія ймовірностей.

«Практика вивчення теорії ймовірностей на факультативних заняттях доводить, що надзвичайно важливо навести учням конкретні приклади, які підтверджують існування закономірностей масових випадкових подій» (Слєпкань). Можна навести таку таблицю, де вказано частоту випадіння аверса («герба») при підкиданні монети, яка приблизно дорівнює половині кількості підкидання монети:

Таблиця 2.1

Дослідник	Кількість підкидання монети, n	Частота випадання аверса, $n(A)$
Ж. Бюффон	4040	2048
Де Морган	4092	2048
В. Феллер	10 000	4979
К. Пірсон	12 000	6019
В. Джевонс	20 480	10 379
К. Пірсон	24 000	12 012
В. Романовський	80 640	40 151

Узагальнюючи розглянуті приклади потрібно ввести поняття випадкового експерименту та події, які розглядаються в теорії ймовірностей. Далі доцільно ввести класичне означення ймовірності, використовуючи поняття простору елементарних подій.

Наприклад, А. М. Колмогоров вводить рівноможливих випадків і поняття ймовірності на прикладі підкидання двох гральних кубиків і фіксації суми очок на верхніх гранях. Тут важливо пояснити, що теорія ймовірностей розглядає математичний образ грального кубика, тобто випадіння кожної з його граней рівноможливе, а сам кубик не має ніяких фізичних властивостей, які має його реальний прообраз – він не має ні розміру, ні кольору, ні ваги і т. д. Аналогічно і монета, яка наводиться у прикладах не має ні розміру, ні ваги, ні ціни. Вона не зроблена з якогось матеріалу і не може бути використана як платіжний засіб. Вона має тільки дві сторони – «герб» та «число», а при підкиданні вона падає лише однією стороною угору. Інших властивостей у математичного образу монети немає.

Також потрібно пояснити, що у задачах практичного змісту на обчислення ймовірності за її класичним означенням умови, зазвичай, є ідеалізованими.

Варто розв’язати достатню кількість досить складних задач, в яких кількість всіх рівноможливих несумісних подій, які утворюють простір елементарних подій, і кількість сприятливих для подій наслідків, які розглядаються, обчислюються за допомогою формул комбінаторики. Тематика задач повинна бути близькою для учнів.

Під час вивчення класичного означення ймовірності варто пояснити учням поняття «практично неможливої» та «практично вірогідної» події. Дані терміни широко використовуються у практиці та в побуті. Ймовірність таких подій близька до 0 та 1 відповідно. Зробити висновок про те, відбудиться дана подія чи ні, можна лише з урахуванням відповідних умов, за яких вона відбудеться або не відбудеться. Наприклад, якщо ймовірність запізнення потягу дорівнює 0,01, то подію «потяг запізниться» можна вважати практично неможливою, але якщо ймовірність того, що під час стрибка парашутиста його парашут не розкриється, дорівнює 0,01, то відповідну подію вважати практично неможливою не можна.

Перед введенням статистичного означення ймовірності варто пояснити учням те, що класичне означення ймовірності має досить вузьке застосування. Дійсно, класичне означення ймовірності можна застосовувати лише за теоретично ідеальних умов, а на практиці не завжди є змога розрізнити однаково можливі події. Саме в таких випадках користуються статистичним означенням ймовірності, яке вводять, використовуючи поняття частоти та відносної частоти.

Також програмою передбачено розгляд аксіоматичного означення ймовірності. Його подають на основі трьох аксіом Колмогорова, а саму ймовірність розглядають як функцію, яка визначається даними аксіомами.

У міні-курсі вивчення теорії ймовірностей передбачено розгляд кількох теорем, а саме теорема додавання ймовірностей несумісних подій, теорема множення ймовірностей, теорема множення ймовірностей для незалежних подій і теорема про ймовірність появи хоча б однієї з двох несумісних подій. Деякі з них даються у вигляді формули без доведення.

Теореми додавання та множення ймовірностей вводяться на основі класичного означення ймовірності. Перед вивчення кожної із них розглядають поняття суми і добутку двох подій та їх узагальнення на декілька подій, які належать до одного випадкового експерименту. Варто зауважити учням, що поняття суми і добутку двох подій аналогічне поняттям об’єднання і перерізу двох множин – це зменшить виникнення труднощів в учнів під час розгляду теоретичного матеріалу та розв’язування практичних задач.

Вивчення наведених вище та інших теоретичних відомостей повинно супроводжуватися розв’язуванням відповідних задач. Приклади розв’язування доцільних задач та список задач для самостійного розв’язання наведено в третьому розділі даної роботи.

2.3. Методика формування основних понять математичної статистики

Основною метою вивчення математичної статистики в десятому класі є введення поняття про математичну статистику як науку, про її методи, завдання, способи подання даних і представлення статистичного розподілу наочно, а також розгляд полігонів і гістограм, моди, медіани, середнього значення.

Добираючи зміст навчального матеріалу, потрібно враховувати функції математичної статистики:

– інформаційну, суть якої полягає у збиранні, узагальненні і поданні інформації про актуальні процеси, про природні умови і різні сторони діяльності людини;

– прогностичну, суть якої полягає в оцінці ймовірностей різних значень важливих показників та параметрів під час прогнозування умов розвитку суспільства, техніки, економіки, науки тощо;

– аналітичну, суть якої полягає у кількісному дослідженні тенденцй розвитку або зміни різник масових процесів; у вивченні варіації явищ у статиці та динаміці;

у вимірюванні та моделюванні зв'язків між явищами; у дослідженні суспільних та природніх процесів.

На першому уроці вивчення математичної статистики потрібно ознайомити учнів з поняттям статистики як науки та з її методами. При цьому слід зауважити, що такі фрази як «статистичні дані», «за даними статистики» тощо учні неодноразово могли чути у ЗМІ.

Слід звернути увагу учні на те, що статистику поділяють на пояснювальну та описову. Добір потрібної інформації – це справа описової статистики, а пояснювальна статистика використовується, коли на основі отриманих результатів описової статистики роблять висновки, будують прогнози та приймають рішення. Доцільно також дати коротку історичну довідку про виникнення та розвиток статистики, про її застосування в період її становлення.

Потрібно розповісти учням про статистичне спостереження – один із основних методів дослідження в статистиці, про його етапи (збирання первинного матеріалу, систематизація та групування даних, аналіз результатів та оформлення висновків), про його види (за часовою ознакою, за способом організації і за ступенем повноти охоплення одиниць) тощо.

Далі доцільно розглядати способи оброблення даних, ввести поняття генеральної сукупності, вибірки, варіанти, варіаційного ряду, ранжування тощо, а також наочного подання статистичного розподілу – діаграм, графіків, гістограм, полігонів частот. Даний урок потребує ґрунтовної підготовки, оскільки на ньому потрібно розглядати велику кількість зображень та таблиць.

Оформлюючи таблиці, потрібно дотримуватись певних правил. Потрібно учні познайомити з ними.

1. Таблиця повинна містити тільки ту інформацію, яка безпосередньо характеризує об'єкт дослідження. Вона не повинна містити зайву чи другорядну інформацію.

2. Назва, заголовки рядків і граф повинні бути чіткими, лаконічними і не містити скорочень.

3. У заголовках після коми потрібно зазначати одиниці виміру, використовуючи загальноприйняті скорочення, наприклад, кг, грн, $м^3$, кДж тощо.

Якщо таблиця виміру єдина для всіх даних у таблиці, то її потрібно навести у назві таблиці, відокремивши комою.

3. Рядки і графи доцільно нумерувати.

4. Інформацію, яка міститься в рядках таблиці, потрібно узагальнювати підсумковим рядком «Разом» чи «У цілому за сукупністю». Числа можна округлювати, причому в межах одного і того самого рядка чи графа з однаковою точністю.

6. Відсутність даних у таблиці позначається по-різному відповідно до причин:

а) «х», якщо клітинка таблиці не може бути заповнена (наприклад, вона є підсумковою;

б) «…» або «н. від.», якщо відомості про явища відсутні;

в) «–», якщо саме явище відсутнє.

7. Дуже малі числа записують так: «0,0» або «0,00».

8. До таблиць додають примітку, якщо потрібна якась додаткова інформація чи певні уточнення.

Приклад складання таблиці, яка характеризує склад населення (тис. осіб) за працездатністю з урахуванням поділу даних за статтю:

Таблиця 3.1. Склад наслення за працездатністю, тис. осіб

Населення	Чоловіки	Жінки	Разом
А	1	2	3
Допрацездатне			
Працездатне			
Старше за працездатне			
Разом			

Далі вивчають середнє значення, моду та медіану.

У статистиці середнє значення – це певна абстрактна і узагальнююча величина. Вона характеризує рівень варіювальної ознаки в якісно однорідній сукупності. Коливання індивідуальних значень ознаки, спричинені дією різних чинників, урівноважується в середній величині. Програмою передбачено вивчення середнього арифметичного, хоча існують ще середнє гармонічне, середнє геометричне та середнє квадратичне.

Середнє значення може бути таким, що не дорівнює жодному із спостережуваних значень, але навколо нього зосереджуються усі інші спостережувані значення. Про це варто зауважити учням.

Далі потрібно дати означення моди та медіани вибірки та розв’язати достатню кількість задач для закріплення матеріалу.

3. Розв’язування задач

3.1. Приклади розв'язування типових задач

Задача 1

Скільки всього різних двоцифрових чисел можна утворити з цифр 1, 3, 6, 9 так, щоб у кожному числі цифри не повторювалися?

Розв’язання.

Першу цифру для утворення двоцифрового числа можна обрати чотирма способами. Оскільки друга цифра повинна бути відмінною від першої, то обрати її можна лише трьома способами. За правилом добутку маємо, що усього різних двоцифрових чисел із цифр 1, 3, 6, 9 можна утворити $3 \cdot 4 = 12$ способами так, щоб у кожному числі цифри не повторювались.

Відповідь: 12.

Задача 2

Двоцифрове число складають із цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6, 9 (повтори цифр допускаються).

а) Скільки всього можна скласти чисел?

б) Скільки всього можна скласти чисел, більших 50?

в) Скільки всього можна скласти непарних чисел?

г) Скільки всього можна скласти непарних чисел, менших 55?

Розв’язання.

а) Оскільки першою цифрою двоцифрового числа не може бути 0, то всього першу цифру можна обрати шістьома способами (одну із шести цифр: 1, 3, 4, 5, 6, 9). Другою цифрою числа може бути будь-яка цифра із семи заданих: 0, 1, 3, 4, 5, 6, 9. Таким чином, за правилом добутку маємо, що із заданих цифр можна скласти $6 \cdot 7 = 42$ двоцифрових числа.

б) Вибрати першу цифру даного двоцифрового числа, більшого 50, можна трьома способами, оскільки нею може бути одна із трьох цифр – 5, 6, 9. Тоді другу цифру можна обрати сімома способами серед цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6, 9, окрім випадку, коли число дорівнює 50. Таким чином, за правилом добутку маємо, що таких двоцифрових чисел можна скласти $3 \cdot 7 - 1 = 20$.

в) Першу цифру можна вибрати шістьома способами серед цифр 1, 3, 4, 5, 6, 9. Другу ж цифру можна вибрати чотирма способами серед цифр 1, 3, 5, 9, оскільки, якщо друга цифра двоцифрового числа є непарним числом, то і саме число теж є непарним. Таким чином, за правилом добутку маємо, що із заданих цифр можна скласти $6 \cdot 4 = 24$ двоцифрових непарних числа.

г) Першу цифру такого числа можна обрати чотирма способами (серед цифр 1, 3, 4, 5), другу – теж чотирма способами (серед цифр 1, 3, 5, 9), окрім випадків, коли число дорівнює 55 та 59. Таким чином, із заданих цифр за правилом добутку можна скласти $4 \cdot 4 - 2 = 14$ двоцифрових непарних чисел, менших 55.

Відповідь: а) 42; б) 20; в) 24; г) 14.

Задача 3

Скільки різних послідовностей можна одержати, переставляючи всі букви слова а) алгебра; б) математика?

Розв’язання.

а) У слові «алгебра» 7 букв, із них можна отримати

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 7 = 5040$$

послідовностей букв, оскільки враховується порядок букв у слові, а з семи букв у послідовність входять усі сім.

б) У слові «математика» 10 букв. Аналогічно, із них можна отримати

$$P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 10 = 3628800$$

послідовностей букв.

Відповідь: а) 5 040; б) 3 628 800.

Задача 4

Олег пише повідомлення з трьох речень. У кінці кожного з них він прикріпить один із п'ятнадцяти веселих смайликів. Скільки всього є способів вибору таких смайликів для прикріплення, якщо всі смайлики в повідомленні мають бути різними (Перестановки, комбінації, розміщення. Комбінаторні правила суми та добутку - тести для підготовки до ЗНО – сайт ЗНО.Освіта.UA, 2021)?

Розв’язання.

Порядок смайликів має значення, із 15 смайликів Олег повинен обрати 3. Таким чином, маємо розміщення з 3 по 15. Їх кількість дорівнює:

$$A_{15}^{3} = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 12} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1} = 2730 .$$

Можна міркувати по-іншому.

Смайлик для прикріплення в кінці першого повідомлення Олег може вибрати 15 способами. Оскільки всі смайлики в повідомленні повинні бути різними, то смайлик для прикріплення у кінці другого повідомлення Олег може обрати 14 способами, а для прикріплення у кінці другого повідомлення – 13. Тоді за правилом добутку маємо, що Олег може обрати 3 різні із 15 смайликів для прикріплення $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ способами.

Відповідь: 2 730.

Задача 5

У чайному кіоску в наявності є лише розфасований у коробки по 100 г листовий чорний чай 8 видів, серед яких є вид «чорна перлина». Покупець вирішив придбати в цьому кіоску для подарункового набору три коробки чорного чаю трьох різних видів, серед яких обов’язково повинен бути вид «чорна перлина». Скільки всього в покупця є варіантів такого придбання трьох коробок чаю для набору з наявних у кіоску?

Розв’язання.

У подарунковому наборі завжди повинен бути вид «чорна перлина». Таким чином, покупцю потрібно обрати лише два інші види із семи наявних, окрім «чорної перлини». Зауважимо, що подарунковий набір, наприклад, «вид 1, вид 2, чорна перлина» та «вид 1, чорна перлина, вид 2» є однаковими з точки зору покупця, тобто порядок видів у наборі не має значення. Отже, маємо комбінації з 2 по 7, а їх кількість, як відомо, становить

$$C_{15}^{3} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 3 \cdot 7 = 21 .$$

Можна міркувати по-іншому.

Покупець може обрати «чорну перлину» лише одним способом. Другий вид чаю він може обрати $8 - 1 = 7$ способами, а третій – 6 способами відповідно. Таким чином, обрати впорядкований набір із трьох видів чаю покупець може $1 \cdot 7 \cdot 6 = 42$. Оскільки порядок видів чаю неважливий для покупця, *Відповідь:* 21.

Задача 6

У фіналі шахового турніру грають шахіст 1 та шахіст 2. Шахісти грають дві партії, причому у другій партії змінюють колір фігур. Якщо шахіст 1 грає чорними фігурами, то він виграє у шахіста 2 з ймовірністю 0,4. Якщо шахіст 1 грає білими фігурами, то він виграє у шахіста 2 з ймовірністю 0,5. Знайдіть ймовірність того, що шахіст 1 виграє фінал.

Розв'язання.

Можливість виграти першу партію та другу партію шахістом 1 не залежать одна від одної. Отже, дані події є незалежними. Ймовірність добутку (одночасної появи) двох незалежних події, як відомо, дорівнює добутку ймовірностей кожної з них. Отже, Ймовірність того, що шахіст виграє фінал шахового турніру рівна $0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$

Відповідь: 0,2.

Задача 7

Стрілець робить два постріли. Спочатку він стріляє в першу мішень, а потім у другу. Ймовірність того, що він улучить тільки в першу мішень, дорівнює 0,18, тільки в другу мішень – 0,08. Знайдіть ймовірність того, що з двох пострілів стрілець улучить у мішень тільки один раз.

Розв'язання.

Подія «з двох пострілів стрілець влучить у мішень тільки один раз» полягає в тому, що стрілець влучить тільки в першу мішень або влучить тільки в другу мішень. Дані події є несумісними, отже, за формулою суми двох несумісних подій маємо, що ймовірність того, що з двох пострілів стрілець влучить у мішень тільки один раз дорівнює $0{,}18 + 0{,}08 = 0{,}26$

Відповідь: 0,26.

Задача 8

На рок-фестивалі виступають гурти – по одній від кожної із заявлених країн. Порядок виступу обирається жеребкуванням. Яка ймовірність того, що гурт із Данії буде виступати після гурту з Швеції і після гурту з Норвегії? Результат округліть до сотих.

Розв'язання.

Загальна кількість гуртів, що виступають на фестивалі, є неважливою. Скільки їх не було б, для вказаних країн є 6 способів взаємного розташування серед тих, хто виступає:

…, Данія, …, Швеція, …, Норвегія, …;

…, Данія, …, Норвегія, …, Швеція, …;

…, Швеція, …, Норвегія, …, Данія, …;

…, Швеція, …, Данія, …, Норвегія, …;

…, Норвегія, …, Данія, …, Швеція, …;

…, Норвегія, …, Швеція, …, Данія, …

Данія знаходиться після Швеції і Норвегії лише в двох випадках, тому ймовірність того, що гурти будуть виступати саме в такому порядку, дорівнює:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

Відповідь: 0,33.

Задача 9

У фірмі таксі є 50 легкових автомобілів, з яких 27 чорного кольору з жовтими написами, а інші – жовтого кольору з чорними написами. Знайдіть ймовірність того, що на випадковий виклик приїде машина жовтого кольору з чорними написами.

Розв'язання.

Оскільки всього машина 50, то машин жовтого кольору з чорними написами $50 - 27 = 23$. Тому ймовірність того, що на випадковий виклик приїде машина жовтого кольору з чорними написами, дорівнює:

$$\frac{23}{50} = 0{,}46$$

Відповідь: 0,46.

Задача 10

З коробки, у якій лежать 2 червоні та 4 сині кулі, навмання беруть спочатку одну кулю, а потім – ще одну. Подія A полягає в тому, що перша взята куля виявиться червоною, а подія B – в тому, що друга взята куля також виявиться червоною. Обчисліть $P_A(B)$.

Розв'язання.

Якщо відбулася подія A, то перша взята куля – червона. Таким чином, перед вибором другої кулі у коробці лежать одна червона куля та чотири сині. Тому ймовірність того, що в цьому випадку друга взята куля також виявиться червоною, дорівнює $\frac{1}{5}$, тобто $P_A(B)=\frac{1}{5}$.

Відповідь: $\frac{1}{5}$.

Задача 11

1% деталей, що виробляють на заводі, – браковані, серед якісних деталей 60% – вищого сорту. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь буде вищого сорту:

Розв'язання.

Нехай подія A полягає в тому, що взята навмання деталь небракована, а подія B полягає в тому, що деталь вищого сорту. Тоді $P(A)=0{,}99$, а $P_A(B)=0{,}6$. Отже, $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=0{,}99\cdot 0{,}6=0{,}594$

Відповідь: 0,594.

Задача 12

Закон розподілу деякої випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

Таблиця 3.1

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	a	0,2	0,4

Знайти a та математичне сподівання випадкової величини X.

Розв'язання.

Оскільки $p_1+p_2+p_3+p_4=1$, маємо рівняння:

$$0{,}1+a+0{,}2+0{,}4=1.$$

Звідки $a=0{,}3$.

За формулою математичного сподівання маємо:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}9\,.$$

Відповідь: 0,3; 1,9.

Задача 13

Знайдіть розмах, моду, медіану і середнє значення ряду даних деякої величини X:

1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5.

Розв'язання.

Розмах вибірки – це різниця між найбільшим та найменшим значеннями величини: $5-1=4$.

Мода – це те значення, яке зустрічається найчастіше. У нашому випадку – це 2.

Медіана – це «серединне значення» впорядкованого ряду значення. В нашому випадку ряд впорядкований, а його серединним значенням є 2.

Середнє значення – це середнє арифметичне всіх чисел ряду даних. В нашому випадку:

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+2+2+3+4+4+5}{9} = 2\frac{2}{3}$$

Відповідь: 4; 2; 2; $2\frac{2}{3}$.

3.2. Список задач для самостійного розв'язання та підготовки до ЗНО

1. Скільки всього існує різних дробів $\frac{m}{n}$, де m набуває значень 1, 2 або 4, а n набуває значень 5, 7, 11, 13 або 17?

2 Скільки всього існує різних двоцифрових чисел, у яких перша цифра є парною, а друга – непарною?

3. Кодовий замок на дверях має десять кнопок, на яких нанесено десять різних цифр (див. рис. 3.1.). Щоб відчинити двері, потрібно одночасно натиснути три кнопки, цифри на яких складають код замка. Скільки існує варіантів коду замка, якщо коди, утворені перестановкою цифр, є однаковими?

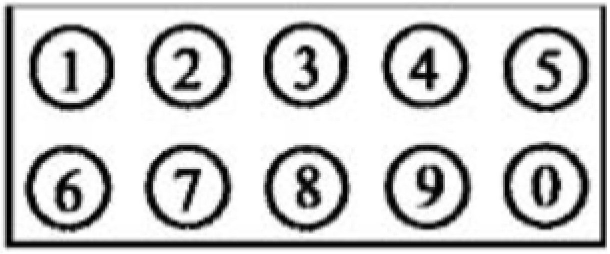

Рис. 3.1

4. Заступник директора школи складає розклад уроків для 10 класу. Він запланував на понеділок 6 уроків з таких предметів: біологія, англійська мова, геометрія, географія, хімія, фізична культура. Скільки всього існує різних варіантів розкладу уроків на цей день, якщо урок фізичної культури має бути останнім у розкладі?

5. Скільки всього різних п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 8, 9 так, щоб у числах цифри не повторювалися?

6. Студент на першому курсі має обрати одну із трьох іноземних мов, яку вивчатиме, та одну з п'яти спортивних секцій, що відвідуватиме. Скільки всього існує варіантів вибору студентом іноземної мови і спортивної секції?

7. Марійка зірвана на клумбі 9 нарцисів та 4 тюльпани. Скільки всього існує способів вибору із цих квітів 3 нарцисів та 2 тюльпанів для букета?

8.У магазині в наявності є 10 видів тортів та 15 видів пачок печива. Скільки всього є способів вибору в цьому магазині або одного торта, або трьох різних пачок печива для святкового вечора?

9. Для перевезення дітей формують колону, яка складається із п'яти автобусів і двох супровідних автомобілів: одного на чолі колони, іншого – позаду неї. Скільки всього існує різних способів розташування автобусів і супровідних автомобілів у цій колоні?

10. З натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30?

11. Піцерія пропонує послугу «Зроби піцу сам», що передбачає вибір клієнтом добавок для піци. Серед добавок – 8 м'ясних (ковбаса, шинка та ін.) і 9 овочевих (цибуля, перець та ін.). Клієнт вибирає дві м'ясні добавки, однією з яких обов'язково має бути шинка, і 3 овочевих, за винятком цибулі. Скільки всього існує варіантів такого вибору добавок клієнтом?

12. У фінал пісенного конкурсу вийшло 3 гурти та 4 солісти. Порядковий номер виступу фіналістів визначають жеребкуванням. Скільки всього є варіантів послідовностей виступів фіналістів, якщо спочатку виступатимуть гурти, а після них – солісти? Вважайте, що кожен фіналіст виступатиме у фіналі лише один раз.

13. У магазині в продажу є 6 видів тарілок, 8 видів блюдець та 12 видів чашок. Олена збирається купити бабусі в подарунок у цьому магазині або чашку та блюдце, або лише тарілку. Скільки всього є способів в Олени купити бабусі такий подарунок?

14. Довідкову інформацію почергово промовляють по одному разу п’ятьма мовами: українською, англійською, німецькою, польською та російською. Скільки всього є варіантів послідовностей озвучування цієї інформації даними мовами, якщо спочатку її промовляють українською?

15. Компанія з шести дорослих, в яких лише двоє мають посвідчення водія, сідають в автомобіль, у якому окрім місця водія є ще п’ять пасажирських місць. Скільки всього є способів у цих шести осіб зайняти місця в автомобілі, якщо на місці водія має бути особа з відповідним посвідчення?

16. На екзамен винесено 60 запитань. Студент не вивчив три з них. Знайдіть ймовірність того, що йому випаде вивчене запитання.

17. В середньому з 1 400 садових насосів, які поступають в продаж, 7 підтикають. Знайдіть ймовірність того, що один випадково вибраний для контролю насос не підтікає.

18. Фабрика випускає сумки. В середньому 8 сумок із 100 мають скриті дефекти. Знайдіть ймовірність того, що куплена сумка виявиться без дефектів.

19. При виробництві в середньому на кожні 2 982 робочі насоси припадає 18 неробочих. Знайдіть ймовірність того, що випадково вибраний насос виявиться неробочим.

20. В деякому місті із 5 000 новонароджених 2 512 хлопчиків. Знайдіть частоту народження дівчаток в цьому місті. Результат округліть до тисячних.

21. На борті літака 12 крісел розміщені біля запасного виходу і 18 – за перегородками, які розділяють салони. Всі ці місця зручні для пасажирів високого зросту. Інші місця – незручні. Пасажир В. високого зросту. Знайдіть ймовірність

того, що на реєстрації при випадковому виборі місця пасажиру В. дістанеться зручне місто, якщо в літаку усього є 300 місць.

22. На олімпіаді з математики 250 учасників розмістили в трьох аудиторіях. В перших двох вдалося розмістити по 120 людей, а усіх інших перевиле в запасну аудиторію в іншому корпусі. Знайдіть ймовірність того, що випадково вибраний учасник писав олімпіаду у запасній аудиторії.

23. Ймовірність того, що новий DVD-програвач протягом року поступить в гарантійний ремонт, дорівнює 0,045. В деякому місті із 1 000 проданих DVD-програвачів протягом року в гарантійний ремонт поступив 51 програвач. На скільки відрізняється відносна частота події «гарантійний ремонт» від його ймовірності в цьому місті?

24. Студенти двох груп (у перші 20 студентів, а у другій – 25) обирають по одному представнику з кожної групи для участі в деякому студентському заході. Знайдіть ймовірність того, що учасниками заходу будуть обрані старости цих груп. Вважайте, що всі студенти кожної групи при цьому мають однакові шанси стати учасниками заходу, а у кожній групи є один староста.

25. У відділі працює певна кількість чоловіків і жінок. Для анкетування навмання вибрали одного із співробітників. Ймовірність того, що це чоловік дорівнює $\frac{2}{7}$. Знайдіть відношення кількості жінок до кількості чоловіків, які працюють у цьому відділі.

26. Пасічник зберігає мед в однаков их закритих металевих бідонах. Їх у нього 12: у 3-ох бідонах міститься квітковий мед, у 4-ох – мед з липи, у 5-ти – мед з гречки. Знайдіть ймовірність того, що перший навмання відкрити бідон буде містити квітковий мед.

27. На полиці розміщено 16 книг, з яких 6 книг – історичні романи, а решта – детективи. Знайдіть імовірність того, що перша книга, навмання взята з полиці, буде детективом.

28. У лотереї 10 виграшних білетів і 290 білетів без виграшу. Яка ймовірність того, що перший придбаний білет цієї лотереї буде виграшним?

29. Яка ймовірність того, що випадково вибраний номер телефону закінчується двома парними цифрами?

30. Ймовірність того, що у випадковий момент часу температура тіла здорової людини виявиться нижче ніж 36,8 ºС, дорівнює 0,81. Знайдіть ймовірність того, що у випадковий момент часу в здорової людини температура виявиться 36,8 ºС або вище.

31. Майстер обслуговує лише три верстати: 20% робочого часу він обслуговує перший верста, 30% – другий, 50% – третій. Обчисліть ймовірність того, що в навмання вибраний момент робочого часу майстер обслуговує перший або третій верстат.

32. У туриста є 10 однакових за розмірами консервних банок, серед яких 4 банки – з тушкованим м'ясом, 6 банок – з рибою. Під час зливи етикетки відклеїлися. Турист навмання взяв одну банку. Яка ймовірність того, що вона буде з рибою?

33. Кожну грань кубика пофарбували або в синій, або в жовтий колір. Ймовірність того, що при підкиданні кубика випаде синя грань, дорівнює $\frac{1}{3}$. Скільки всього граней кубика пофарбували в жовтий колір?

34. Комп'ютерна програма видаляє у восьмицифровому числі одну цифру навмання. Яка ймовірність того, що в числі 12506975 буде видалено цифру 5?

35. У торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки – однакової форми та розміру. Якого найменшого значення може набувати m, якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша за 0,25.

36. Спортсмен робить один постріл у мішень. Ймовірність того, що він влучить у мішень, у 7 разів більша за ймовірність того, що він у неї не влучить. Обчисліть ймовірність того, що спортсмен влучить у мішень.

37. У кіоску продають морозиво 12 різних видів, з яких 4 види – з горіхами, а решта – фруктові. Яка ймовірність того, що вибраний навмання покупцем один вид морозива буде фруктовим (Тести для підготовки до ЗНО – сайт ЗНО.Освіта.UA, 2021)?

38. На екзамені з геометрії учень відповідає на одне запитання із списку екзаменаційних питань. Ймовірність того, що це буде питання з теми «Вписане коло», дорівнює 0,2. Ймовірність того, що це буде питання з теми «Паралелограм», дорівнює 0,15. Питань, які належать до даних двох тем одночасно немає. Знайдіть ймовірність того, що на екзамені учневі дістанеться питання з однієї із даних тем.

39. В магазині стоять два платіжних автомата. Кожен з них може бути несправним з ймовірністю 0,05 незалежно іншого автомата. Знайдіть ймовірність того, що хоча б один автомат несправний.

40. Знайдіть розмах, моду, медіану й середнє значення ряду даних деякої величини X: –3, –2, –2, –1, 0, 2, 2, 2, 3, 5. Побудуйте полігон частот значень величини X. Укажіть на рисунку розмах, моду й медіану заданого ряду даних.

Висновки

Елементи комбінаторики, основи теорії ймовірностей та вступ у статистику вивчаються у дев’ятому класі з метою пропедевтики.

У десятому класі профільної школи програмою передбачено вивчення комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики. До сновних теоретичних відомостей, які вивчаються у десятому класі, належать правила суми і добутку, сполуки без повторень (перестановки, розміщення, комбінації) та формули їх кількості, випадковий експеримент, випадкова подія, класичне, статистичне та аксіоматичне означення теорії ймовірностей, деякі теореми теорії ймовірностей, випадкова величина, закон розподілу, математичне сподівання, основні тенденції вибірки (середнє значення, мода, медіана) та інші.

Методика викладання наведених вище понять залежить від використання різних підходів та навіть від порядку розгляду понять, що було добре проілюстровано на сполуках (перестановки, розміщення, комбінації).

Основні завдання дипломної роботи виконано:

Для досягнення мети роботи поставлено такі **завдання**:

– проаналізовано відповідну літературу;

– складено перелік пропедевтичних теоретичних відомостей, що передують вивченню теорії ймовірностей та математичної статистики у профільній школі;

– наведено основні теоретичні відомості з комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики, що вивчаються у профільній школі;

– описано методичні рекомендації щодо викладання елементів комбінаторики, основ теорії ймовірності та математичної статистики у профільній школі;

– наведено приклади розв’язання типових задач з комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики;

– складено список задач для самостійного розв’язання та підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Дана магістерська робота носить методичних характер та може бути рекомендована для використання учнями при підготовці до ЗНО, студентами при підготовці до семінарських та практичних занять на суміжні теми і вчителями для розробки уроків на відповідні теми.

Список використаних джерел

1. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Тарасенкова Н. А та ін. Київ : Оріон, 2017. 272 с.

2. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2 : задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович и др. Москва : Мнемозина, 2007. 336 с.

3. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Мерзляк А. Г. та ін. Харків : Гімназія, 2019. 352 с.

4. Астахов В. М., Буланов Г. С., Паламарчук В. О. Теорія ймовірностей і математична статистика : навчальний посібник. Краматорська : ДДМА, 2009. 64 с.

5. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Освіта, 2017. 272 с.

6. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для студентов вузов. Москва : Высшая школа, 2004. 404 с.

7. Донченко В. С., Сидоров М. В.-С. Теорія ймовірностей та математична статистика для соціальних наук : навч. посіб. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2015. 400 с.

8. Імовірність. *Інститут мовознавства ім. О. О. Потебні | Словник української мови* : веб-сайт. URL: http://www.inmo.org.ua/sum.html?wrd=імовірність (дата звернення: 15.11.2021)

9. Істер О. С. Алгебра : підруч для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2017. 264 с.

10. Істер О. С., Єргіна О. В., Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 416 с.

11. Ймовірність випадкової події. Вибіркові характеристики. *Тести для підготовки до ЗНО – сайт ЗНО.Освіта.UA* : веб-сайт. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/tag-jmovirnist_vypadkovoyi_podiyi/ (дата звернення: 15.11.2021).

12. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. 264 с.

13. Мерзляк А. Г., Полонський Б. В., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 272 с.

14. Михайленко В. В. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові функції : навчальний посібник. Житомир : ЖІТІ, 2003. 292 с.

15. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. : Міністерство освіти і науки. Чинна від 01.09.2018 р. 2018. 25 с.

16. Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів для загальноосвітніх навчальних закладів : Міністерство освіти і науки. Чинна від 07.06.2017 р. 2017. 40 с.

17. Нелін С. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. Загал. серед. освіти. Харків : Ранок, 2019. 240 с.

18. Перестановки, комбінації, розміщення. Комбінаторні правила суми та добутку. *Тести для підготовки до ЗНО – Сайт ЗНО.Освіта.UA* : веб-сайт. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/tag-kombinatorni_pravila/ (дата звернення: 15.11.2021).

19. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник. Київ Вища школа, 2006. 582 с.

20. Теорія ймовірностей та математична статистика : зб. задач. Григулич С. М. Київ : КНЕУ, 2014. 277 с.

21. Устимчук Г. В., Матвіюк Л. В., Вартанян Г. М. Теорія ймовірностей та математична статистики. Одеса : Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2015. 136 с.