Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Формування математичних компетентностей при розв'язувані тригонометричних рівнянь та нерівностей

Виконала: студентка ІІ курсу магістратури,
групи М-М-21
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Цьовка Наталія Василівна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри математики з методикою викладання Генсіцька-Антонюк Н. О.

Рецензент:

Рівне – 2021 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Основним напрямком розвитку сучасної освіти в Україні є впровадження компетентнісного підходу, який базується на формуванні ключових і життєвих компетентностей в учнів.

Сучасне суспільство ставить акцент на тому, що випускник школи має бути розвинений як особистісно так і творчо, буде спроможний продуктивно працювати та навчатися протягом життя, зможе зберігати цінності свого народу та суспільства, а також збільшувати їх, розвивати та зміцнювати свою державу, як частину світової та європейської спільноти (Державний стандарт базової та середньої освіти, 2020).

Компетентнісний підхід, який поданий у Державному стандарті поділяється на розвиток ключових, загальнопредметних та предметних (галузевих) компетентностей. Математична компетентність є предметною (для математики) та ключовою (для інших предметів). Найкраще компетентності учнів розкриваються опановуванні знань та їх ефективне застосування при розв’язувані різних задач, зокрема рівнянь та нерівностей (Державний стандарт базової та середньої освіти, 2020).

Тема «Тригонометрія» є однією з найскладніших в курсі алгебри старшої школи, тому для розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей потрібні знання методів, прийомів та методик, що сприяють формуванню математичних компетентностей.

На даний час успішну здачу зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО), що включає знання навчального матеріалу з тригонометрії та навчання в ЗВО або роботу у тій чи іншій фаховій області важко уявити без базової шкільної підготовки із математики. Тому застосування такої компетентності як математична сприяє формуванню в учнів вміння вирішувати як повсякденні так і професійні проблеми (Програма зовнішнього незалежного оцінювання, 2018).

Методиці викладання тригонометрії в школі присвячені праці Сліпкань З., Бевза Г., Неліна Є., Шкіля М. та інших.

Дослідження методів розв’язання тригонометричних рівнянь та нерівностей проводили: Фурман Ф., Шебашова О, Смоляков А., Крамаренко Т., Кушнір І. та інші.

Узагальнені теоретичні основи розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей для учнів загальноосвітніх шкіл представлені авторами А. Мерзляком А., Істером О., Роєвою Т., Капіносовим А. та ін.

Дослідження проблеми формування математичних компетентностей на уроках та при вивчені конкретної теми проводиться на різних напрямках, зокрема над питанням впровадження математичної компетентності в освіту, зокрема її реалізації на уроках працювали такі автори: Ніконова Н., Бібік Н., Бех І., Буринська Н., Ільченко В. та ін..

Таким чином тема ***«Формування математичних компетентностей при розв'язувані тригонометричних рівнянь та нерівностей»*** є актуальною і потребує детального дослідження..

Мета роботи полягає у представлені узагальнених та систематизованих навчально-методичних матеріалів, щодо вивчення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» та методики формування математичних компетентностей старшокласників.

Об’єктом дослідження є процес навчання старшокласників розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей.

Предметом дослідження є система задач, яка спрямована на формування математичних компетентностей розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей.

Згідно поставленої мети були сформульовані такі **завдання**:

1. Аналіз педагогічної, методичної та наукової літератури з теми дослідження;
2. Дослідити місце тригонометричних рівнянь та нерівностей в програмі алгебри 10 класу та програмі зовнішнього незалежного оцінювання;

3. Представити методику розв’язування тригонометричні рівнянь і нерівностей на конкретних прикладах;
4. Запропонувати методику розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей в умовах дистанційного навчання;
5. Провести педагогічний експеримент, задля перевірки ефективності використання розробленої методики.

Задля реалізації поставлених задач були використані такі **методи дослідження:** теоретичні (термінологічний аналіз, пошуково-бібліографічний, узагальнення), емпіричний (педагогічний експеримент).

Джерельна база дослідження: навчальні програми, шкільні підручники та посібники, методична література для вчителів, періодичні видання, статті і нормативно-правова база.

Гіпотеза дослідження: знання теоретичного матеріалу, видів та методів розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей сприяють формуванню математичних компетентностей при вивчені тригонометрії, як в умовах очного так і дистанційного навчання.

Практичне значення роботи полягає в тому, що систематизовані матеріали дослідження можуть бути використані вчителями в освітній діяльні та студентами педагогічних ЗВО під час опрацювання питань з методики вивчення математики.

Апробація дослідження. Результати дослідження були представлені на XVI Міжнародній науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти і молодих науковців «Наука, освіта, суспільство очима молодих» (Рівне, 2021) у статтях «Методика розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей в 10 класі рівня стандарту», «Формування математичних компетентностей» та заслуховували на кафедрі математики з методикою викладання РДГУ.

Структура та обсяг роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, 2 розділів, висновків, списку використаних джерел (53 найменувань) та додатків. Загальний обсяг роботи складається із 127 сторінок.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Компетентності в освітньому процесі та методи їх формування

Оновлення базової середньої та повної середньої освіти, зокрема впровадження компетентнісного підходу представлене в Державному стандарті базової середньої освіти. Поняття «компетентнісний підхід» включає в себе формування та розвиток компетентностей (базових та предметних), якими повинні володіти учні після закінчення школи (Державний стандарт базової та середньої освіти, 2020).

Компетентності поділяються на три рівні (див. рис. 1.1.):

Рис. 1.1. Рівні компетентностей

Формування предметної компетентності здійснюється через вивчення певного навчального предмету. Міжпредметна компетентність включає в себе групи дисциплін або освітніх галузей. Формування ключових компетентностей (здатність до навчання, використання державної, рідної та іноземної мови для спілкування, математичні та базові здібності в галузі науки і техніки, інформації та комунікації, суспільства, громадянства, культури, бізнесу та здоров'я) відбувається за допомогою предметних та міжпредметних компетентностей (Державний стандарт базової та середньої освіти, 2020).

Міжпредметні та ключові компетентності є важливими елементами при формуванні математичної компетентності, яка є одним з компонентів предметної компетентності.

Математична компетентність включає визначення простих математичних зв'язків у світі, використання математичних відношень і вимірювань для моделювання процесів і ситуацій, а також розуміння ролі математичних знань і навичок в особистому та соціальному житті (Постанова «Про затвердження Національних стандартів початкової загальної освіти», 2018).

Математична компетентність поділяється на (Раков, 2005):

1. Процедурну компетентність – вміння розв'язувати найпростіші математичні задачі;
2. Логічну компетентність – вміння використовувати метод доведення та заперечення;
3. Технологічну компетентність – вміння застосовувати математичні програми в навчанні;
4. Дослідницьку компетентність – вміння досліджувати практичні задачі за допомогою різних математичних методів;
5. Методологічну компетентність – вміння обирати та використовувати математичні методи для розв'язування задач.

Розглянемо методи навчання, які формують набуття математичних компетентностей.

Використання активних методів навчання спрямоване на формування вміння учнями висловлювати власну думку щодо проблемної ситуації. До таких методів належать: метод конкретної ситуації (розвиток мислення, вміння аналізувати та узагальнювати інформацію, складати власні завдання з використанням різних методів); метод інциденту (формування вміння долати будь-які стресові ситуації); мозковий штурм (розвиток вміння відповідати на запитання); метод занурення (створення ситуацій, коли учні зосереджуються на завданнях та ефективно вирішують проблеми); евристичні запитання (спонукання учнів думати та аналізувати); метод дослідження (розвиток вміння самостійно обирати методи та самостійно розв'язувати задачі) (Калугіна, 2008).

Інтерактивні методи спрямовані на розвиток вміння працювати в групах. До таких методів належать: рольові ігри (формування вміння висловлювати власні думки та поважати думку інших); частково-пошуковий (евристичний) метод (розвиток самостійного мислення, вміння вирішувати проблеми, що виникають, узагальнювати, аналізувати та порівнювати інформацію, робити висновки на основі аналізу, створювати і вирішувати проблемні ситуації); метод проблемної презентації знань (розвиток вміння розуміти теоретичний матеріал з математики); кейс-метод (аналіз конкретної виробничої ситуації); кооперативний метод (виконується під час групової роботи) (Калугіна, 2008).

Додатково: демонстрація, дискусія, метод круглого столу, метод ділової гри, обговорення, практичні групові та індивідуальні вправи тощо (Калугіна, 2008).

Варто виділити і продуктивні методи навчання: пізнавальний метод навчання (навчально-пізнавальний метод); метод емпатії (використання); креативні методи навчання; метод організації навчання (поділяється на метод учня, метод учителя та метод вихователя) (Калугіна, 2008).

Поєднання сучасних інноваційних технологій (інформаційно-комп'ютерних, критичного мислення, інтерактивного навчання, ігрових, проблемного навчання, проектних, особистісно орієнтованого навчання) та інших технологій навчання сприятиме інтелектуальному, соціальному та духовному розвитку учнів, формуванню ключових і предметних компетентностей у курсах математики (Раков, 2005).

Розглянемо алгоритм формування компетентностей учнів (Бібік, 2005):

1. Пов'язувати навчання з життям;
2. Мотивувати учнів до вивчення нової теми;
3. Формувати систему знань, яка була отримана при розв'язувані проблемних ситуацій на основі аналізу та узагальнення матеріалів;
4. Формувати вміння використовувати знання та особистий досвід при розв'язувані задач;
5. Формувати почуття особистої відповідальності за свою діяльність та рівень знань;
6. Контролювати та коригувати розвиток особистості шляхом навчання, самоосвіти та діагностики.

Формування ключових компетентностей на уроках математики можна проводити таким чином:

- Спілкування державною мовою – спілкування іноземними мовами.

Для формування цієї компетентності учнів слід поділити на групи чи пари, при цьому вони набудуть досвіду спілкування державною мовою та удосконалять вміння працювати з текстом. Також використовуючи такий вид діяльності, можна збільшити словниковий запас учнів з іноземної мови, перекладаючи математичні поняття з української на будь-яку іншу мову, наприклад англійську (Солодченко, 2011).

- Математична компетентність – основні компетентності у природничих науках і технологіях.

Для розвитку цих компетентностей учням потрібно представити прикладні завдання або завдання, що містять певні наукові знання. Наприклад, математика + фізика, математика + біологія, математика + хімія, математика + інформатика, математика + економіка. Потрібно задавати завдання з логічним навантаженням для кращого розвитку логічного мислення (Солодченко, 2011; Раков, 2005).

- Інформаційно-цифрова компетентність.

Щоб розвинути цю компетентність необхідно під час уроків показувати учням як застосовувати програмне забезпечення при розв’язанні певних задач, наприклад програми Microsoft Word і Excel для побудови таблиць та діаграм, Gran-2D, 3D, AGrapher для побудови графіків і розв’язування прикладів тощо (Солодченко, 2011; Раков, 2005).

- Уміння вчитися протягом життя.

Найкраще для розвитку цієї компетентності використовувати проектно-дослідницьку діяльність (Солодченко, 2011).

- Обізнаність і самовираження у сфері культури

При формуванні цієї компетентності потрібно давати творчі завдання, наприклад, використовуючи математику знайти потрібну інформацію в історії чи книгах (Солодченко, 2011).

- Ініціативність, підприємливість і фінансова грамотність – соціальна і громадська компетентності – екологічна грамотність й сталий розвиток – здоров’я і безпека.

Для формування цих компетентностей потрібно використовувати такі форми роботи: завдання, що передбачають пошук методів для самостійного розв’язування завдання; заохочення учнів до планування та проведення позакласних заходів та предметних тижнів; складання та розв’язування задач на відсотки та фінанси; розв’язування текстових задач, які пов’язані з навколишнім середовищем; виконувати фізичні вправи для розслаблення організму (Солодченко, 2011).

1.2. Порівняльна характеристика навчальних програм та підручників з математики для 10 класів загальноосвітніх начальних закладів (до вивчення теми тригонометрія)

До засобів навчання математики належать: підручники з математики, навчальні матеріали та довідники з математики, навчальне обладнання, включаючи наочні засоби навчання, моделі, малюнки, схеми, таблиці, предмети, інструменти, обладнання, екранні засоби навчання, калькулятори, персональні комп'ютери та відповідне програмне забезпечення для навчання (Слєпкань, 2006).

Для вивчення математики у старшій школі на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти з урахуванням особливостей відповідних профілів навчання були розроблені навчальні програми трьох рівнів: стандарту, профільного та поглибленого (Державний стандарт базової і повної середньої освіти, 2020).

У **навчальній програмі рівня стандарту** для 10 класу окремо виділена тема «Тригонометричні функції». Зміст навчального матеріалу складається з означень тригонометричних функцій, їх властивостей та графіків, поняття радіанного вимірювання кута, основних тригонометричних співвідношень, періодичності функцій, формул додавання та наслідків з них, а також найпростіших тригонометричних рівнянь. Варто зауважити, що тема «Тригонометричні рівняння та нерівності» не виділена окремо, а також не розглядаються різновиди тригонометричних рівнянь, найпростіші та більш складніші тригонометричні нерівності (Навчальна програма рівня стандарту, 2018).

Навчальна програма профільного рівня містить окремо виділені теми «Тригонометричні функції» та «Тригонометричні рівняння та нерівності». До змісту теми «Тригонометричні функції» додаються такі тригонометричні формули як: формули зведення, формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу, а також вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу. Тема «Тригонометричні рівняння та нерівності» складається з обернених тригонометричних функцій, найпростіших тригонометричних рівнянь та нерівностей, основних способів розв'язування рівнянь, а також тригонометричних рівнянь та нерівностей з параметром і таких, які містять обернені тригонометричні функції (Навчальна програма профільного рівня, 2018).

До змісту теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» у **навчальній програмі поглибленого рівня** додається побудова графічних образів. Зауважимо, що тема «Тригонометричні функції» залишилася незмінною (Навчальна програма поглибленого рівня, 2018).

У сучасних школах при вивчені математики використовуються підручники таких колективів авторів: Мерзляк, А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С.; Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г.; Нелін Є. П.; Істер О. С., Єргіна О. В.; Бурда, М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А.

Розглянемо підручники рівня стандарту.

У змісті підручника «Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія», авторів Мерзляк, А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. окремо виділена тема «Тригонометричні функції» до якої входять пункти: радіанна міра кутів, тригонометричні функції (знаки тригонометричних функцій, парність та непарність, властивості і графіки), основні тригонометричні співвідношення, формули додавання та зведення. У цю тему входять також найпростіші тригонометричні рівняння та тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних. Теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» немає, а також відсутній навчальний матеріал про тригонометричні нерівності (Мерзляк А. Г. рівень стандарту, 2018).

Навчальний матеріал підручника «Математика», авторів Бурда, М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. схожий з попереднім підручником, але відсутній матеріал про тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних. Додаються відомості про область визначення, множину значень тригонометричних функцій, а також про тригонометричні функції подвійного аргументу (Бурда М. І. рівень станд, 2018).

Зміст підручника «Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія», автора Нелін Є. П. меншій порівняно з попередніми підручниками. У темі «Тригонометричні функції» наведені такі пункти: радіане вимірювання кутів, тригонометричні функції (властивості та графіки), основні тригонометричні співвідношення, формули додавання та наслідки з ним, найпростіші тригонометричні рівняння. Додатково подаються теми навчальних проектів з математики, для більш поглибленого вивчення тригонометрії (Нелін Є. П. рівень стандарту, 2018).

Теоретичний і практичний матеріал підручника «Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія», авторів Бевз Г. П., Бевз В. Г. схожий з підручником автора Нелін Є. П., але відмінність полягає у відсутності матеріалу про радіане вимірювання кутів (Бевз Г. П. рівень стандарту, 2018).

У підручнику «Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія», автора Істер О. С. додатково розглядаються формули подвійного і половинного кутів, пониження степеня; формули суми й різниці тригонометричних функцій; формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму (Істер О. С. рівень стандарту, 2018).

Розглянемо підручники профільного та поглибленого рівнів.

Підручник «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк, А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. складається з тем «Тригонометричні функції» та «Тригонометричні рівняння та нерівності». У параграф «Тригонометричні функції» входять пункти: радіанна міра кута; тригонометричні функції (властивості, графіки, знаки функцій та періодичність); основні тригонометричні співвідношення; формули додавання та зведення; формули подвійного, потрійного та половинного аргументів; формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій. У параграфі «Тригонометричні рівняння та нерівності» представлені теми: найпростіші тригонометричні рівняння; обернені тригонометричні функції; тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних; розв’язування тригонометрих рівнянь методом розкладання на множники; застосування обмеженості тригонометричних функцій; тригонометричні нерівності. Додатково подається матеріал про рівносильні переходи під час розв’язування тригонометричних рівнянь (Мерзляк А. Г. проф. рівень, 2018).

Підручник «Алгебра і початки аналізу», авторів Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. для поглибленого вивчення математики складається з аналогічних тем, що і попередній підручник. У зміст теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» входять приклади розв’язання більш складних тригонометричних рівнянь та тригонометрична підстановка (Мерзляк А. Г. поглиб. рівень, 2018).

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», авторів Бевз Г. П., Бевз В. Г. тема «Тригонометричні рівняння та нерівності» в порівняні з попередніми підручниками складається з таких пунктів: обернені тригонометричні функції, найпростіші тригонометричні рівняння та нерівності, основні тригонометричні співвідношення. Зміст теми «Тригонометричні функції» ідентичний до інших (Бевз Г. П. проф. рівень, 2018).

У підручнику «Алгебра і початки аналізу», автора Нелін Є. П. до теми «Тригонометричні функції» до дається вираження тригонометрих функцій через тангенс половинного аргументу, а до теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» – системи тригонометричних рівнянь; тригонометричні рівняння з параметром, розв’язування тригонометричних нерівностей (Нелін Є. П. проф. рівень, 2018).

Навчальний матеріал підручника «Алгебра і початки аналізу», авторів Істер О. С., Єргіна О. В. схожий з попередніми підручниками, але у темі «Тригонометричні рівняння та нерівності» ще розглядається розв'язування тригонометричних рівнянь різними методами, зокрема методом заміни змінної (Істер О. С. проф. рівень, 2018).

1.3. Тригонометричні функції та обернені до них, їх властивості

Припустимо, що в прямокутній системі координат одиничний вектор OP_{α} показує додатний напрямок осі x. Нехай кут $P_0OP_{\alpha} = \alpha$, координати точки $P_{\alpha}(x; y)$ (див. рис. 1.2.) (Нелін проф. рівень, 2018).

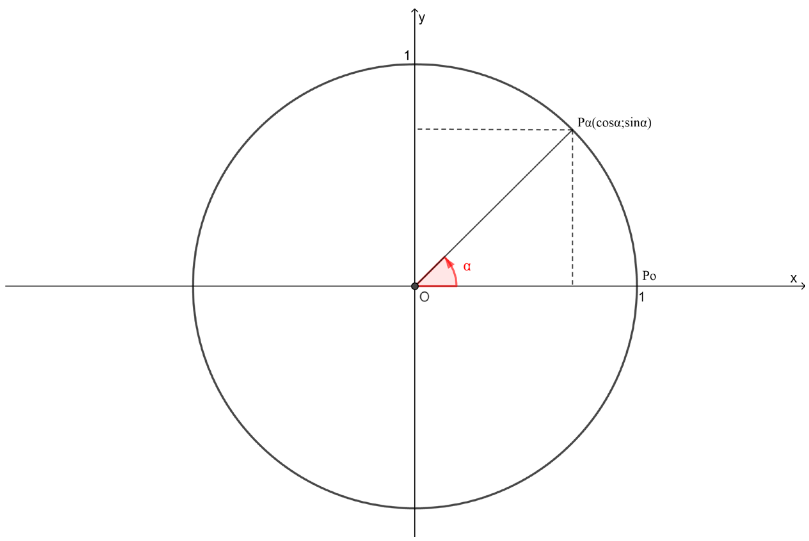


Рис. 1.2. Одиничне коло з одиничним радіусом

Синусом кута α називають ординату точки P_{α}: $sin\alpha = y$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

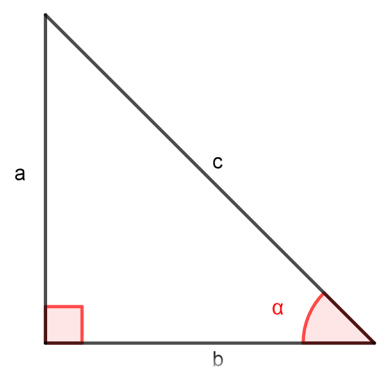
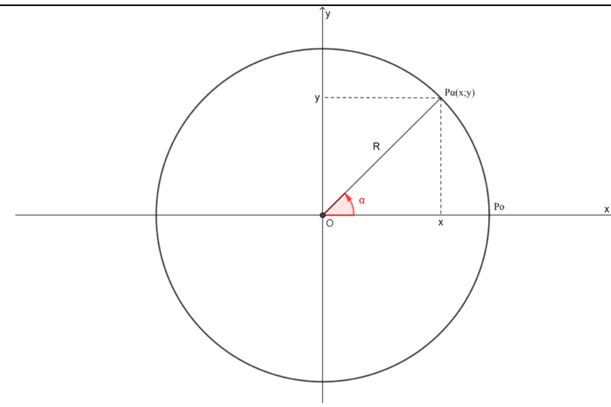
Косинусом кута α називають абсцису точки P_{α}: $cos\alpha = x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Тангенсом кута α називають відношення ординати кінця одиничного радіуса до його абсциси: $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Котангенсом кута α називають відношення абсциси кінця одиничного радіуса до його ординати: $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Означення тригонометричних функцій ми можемо ще подати через прямокутний трикутник або коло довільного радіуса R .

Таблиця 1. Означення тригометричних функцій

Через прямокутний трикутник	Через коло довільного радіуса R
	
$cos\alpha = \frac{b}{c}, sin\alpha = \frac{a}{c},$ $tg\alpha = \frac{a}{b}, ctg\alpha = \frac{b}{a}.$	$cos\alpha = \frac{x}{R}, sin\alpha = \frac{y}{R},$ $tg\alpha = \frac{y}{x}, ctg\alpha = \frac{x}{y}.$

(Нелін проф. рівень, 2018)

Розглянемо властивості тригонометричних функцій та обернених до них

Властивості тригонометричних функцій та обернених до них

Таблиця 2. Властивості функцій $y = sinx$ та $y = arcsinx$

	$y = sinx$	$y = arcsinx$
Означення:	**Синусом** кута α називають ординату точки P_α: $sin\alpha = y$.	**Арксинусом** числа α називають кут або число з відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює α.

Продовження таблиці 2. Властивості функцій $y = sinx$ та $y = arcsinx$

Область визначення	R	$[-1; 1]$
Область значень	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Парність функції	Функція непарна: $\sin(-x) = -sinx$ для всіх $x \in R$. Графік функції симетричний відносно початку координат (див. рис. 1.3.).	Функція непарна, бо $[-1; 1]$ – симетрична відносно 0; $\arcsin(-x) = -arcsinx$. Отже, графік $y = arcsinx$ симетричний відносно початку координат (див. рис. 1.4.).
Періодичність функції	Функція періодична з найменшим додатним періодом 2π.	Функція не є періодичною.
Координати точок перетину графіка функцій з осями координат	З віссю OX: $(\pi k; 0), k \in Z$. З віссю OY: $(0; 0)$.	З віссю OX: $(0; 0)$, З віссю OY: $(0; 0)$.
Проміжки знакосталості	$sinx = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$. $sinx > 0$ (додатна) для всіх $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$. $sinx < 0$ (від'ємна) для всіх $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.	$arcsinx > 0$ при $x \in (0; 1]$, $arcsinx < 0$ при $x \in [-1; 0)$.

Продовження таблиці 2. Властивості функцій $y = sinx$ та $y = arcsinx$

Проміжки зростання і спадання функції	Функція зростає від -1 до 1 на проміжках: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. Функція спадає від -1 до 1 на проміжках: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.	Функція зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на відрізку $[-1; 1]$.
Найбільше і найменше значення функції	Найбільше значення функції $sinx = 1$ в точках: $x = \frac{\pi}{2} + +2\pi k$, $k \in Z$. Найменше значення функції $sinx = -1$ в точках: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.	Найбільше значення – $\frac{\pi}{2}$, якщо $x = 1$ Найменше – $-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = -1$.
Неперервність функції	Функція неперервна в області визначення.	Неперервна в області визначення.

(Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

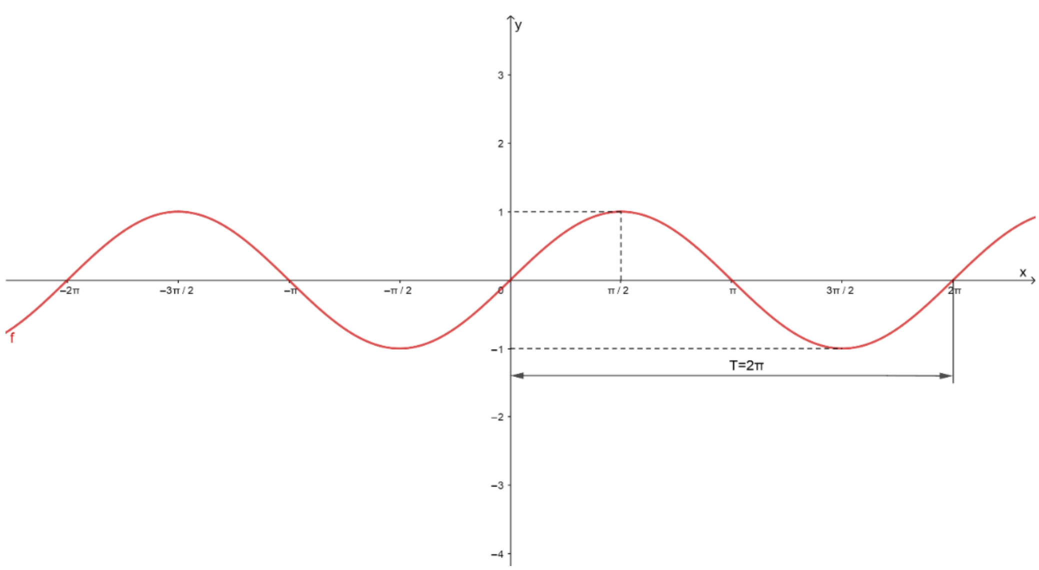


Рис. 1.3. Графік функції $y = \sin(x)$

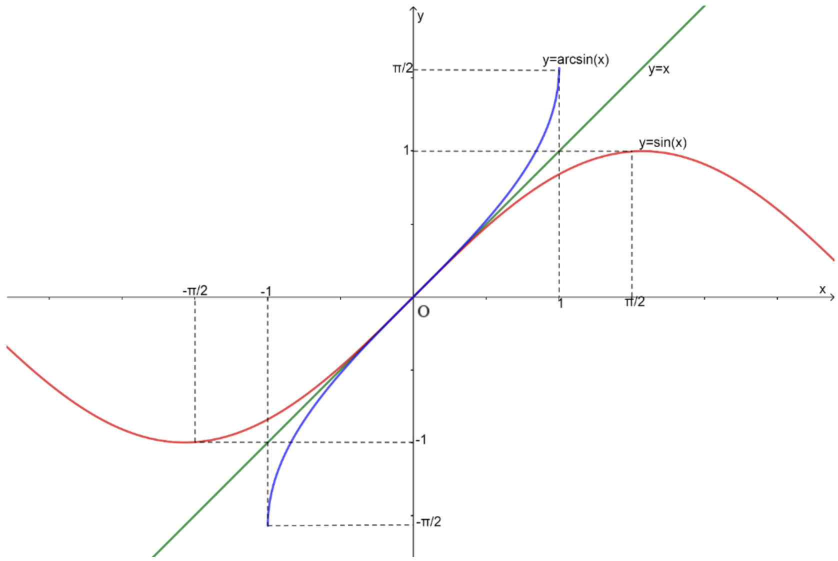


Рис.1.4. Графік функції арксинус

Таблиця 3. Властивості функцій $y = cosx$та $y = arccosx$

	$y = cosx$	$y = arccosx$
Означення:	**Косинусом** кута α називають абсцису точки P_{α}: $cos\alpha = x$.	**Арккосинусом** числа α називають кут або число з відрізку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює α.
Область визначення	R	$[-1; 1]$
Область значень	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$
Парність функції	Функція парна: $\cos(-x) = cosx$ для всіх $x \in R$. Графік функції симетричний відносно осі OY (див. рис. 1.5.).	Функція не є ні парною, ні непарною. $\arccos(-x) = \pi - arccosx$. Графік функції симетричний відносно осі OY (див. рис. 1.6.).

Продовження таблиці 3. Властивості функцій $y = cosx$та $y = arccosx$

Періодичність функції	Функція періодична з найменшим додатним періодом 2π: $\cos(x + 2\pi k) = cosx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.	Функція не є періодичною.
Координати точок перетину графіка функцій з осями координат	З віссю OX: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z.$ З віссю OY: $(0; 1)$.	З віссю OX: $(1; 0)$; З віссю OY: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
Проміжки знакосталості	$cosx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$ $cosx > 0$ для всіх $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k, 2\pi k), k \in Z.$ $cosx < 0$ для всіх $x \in (, \pi + 2\pi k, 2\,\pi + 2\pi k)$, $k \in Z.$	$arccosx > 0$ на всій області визначення.
Проміжки зростання і спадання функції	Функція зростає від -1 до 1 на проміжках: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$ Функція спадає від -1 до 1 на проміжках: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$	Функція спадає від π до 0 на відрізку $[-1; 1]$.

Продовження таблиці 3. Властивості функцій $y = cosx$та $y = arccosx$

Найбільше і найменше значення функції	Найбільше значення функції $sinx = 1$ в точках: $x = 2\pi k$, $k \in Z$. Найменше значення функції $sinx = -1$ в точках: $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.	Найбільше значення – π, якщо $x = -1$, найменше – 0, якщо $x = 1$.
Неперервність функції	Функція неперервна в області визначення.	Неперервна в області визначення.

(Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

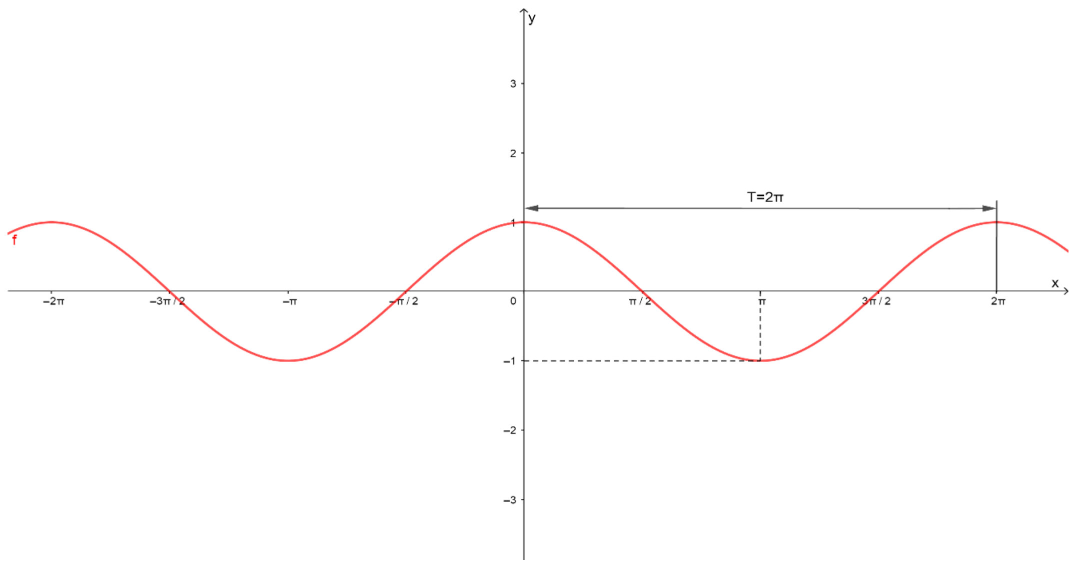


Рис.1.5. Графік функції $y = \cos(x)$

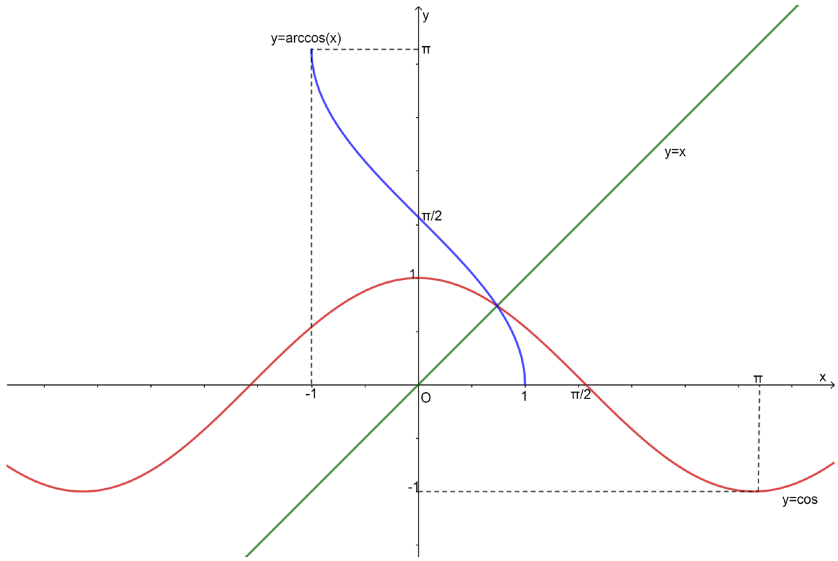


Рис.1.6. Графік функції арккосинус

Таблиця 4. Властивості функцій $y = tgx$ та $y = arctgx$

	$y = tgx$	$y = arctgx$
Означення:	**Тангенсом** кута α називають відношення ординати кінця одиничного радіуса до його абсциси: $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$.	**Арктангенсом** числа α називають кут або число з відрізку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює α.
Область визначення	Множина R всіх дійсних чисел, крім $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.	R
Область значень	R	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
Парність функції	Функція непарна: $\mathrm{tg}(-x) = -tgx$ для всіх x з області визначення. Графік функції симетричний відносно осі OY (див. рис. 1.7.).	Функція непарна, симетрична відносно 0; $\mathrm{arctg}(-x) = -arctgx$. Отже, графік симетричний відносно початку координат (див. рис. 1.8.)

Продовження таблиці 4. Властивості функцій $y = tgx$ та $y = arctgx$

Періодичність функції	Функція періодична з найменшим додатним періодом π: $\text{tg}(x + \pi k) = tgx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.	Функція не є періодичною.
Координати точок перетину графіка функцій з осями координат	З віссю OX: $(\pi k; 0), k \in Z$. З віссю OY: $(0; 0)$.	З віссю OX: $(0; 0)$, З віссю OУ: $(0; 0)$.
Проміжки знакосталості	$tgx = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$. $tgx > 0$ для всіх $x \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$. $tgx < 0$ для всіх $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k)$, $k \in Z$.	$arctgx > 0$ при $x > 0$, $arctgx < 0$ при $x < 0$.
Проміжки зростання і спадання функції	Функція зростає на проміжках: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.	Функція зростає від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.
Найбільше і найменше значення функції	Найбільшого і найменшого значень функція не має.	функція не набуває найбільшого і найменшого значень.

(Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

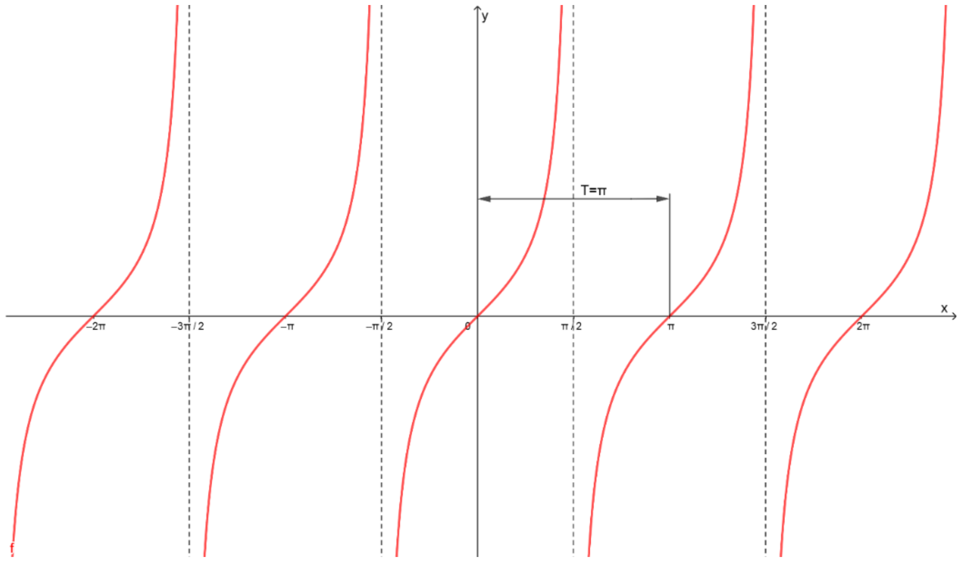


Рис.1.7. Графік функції $y = \text{tg}(x)$

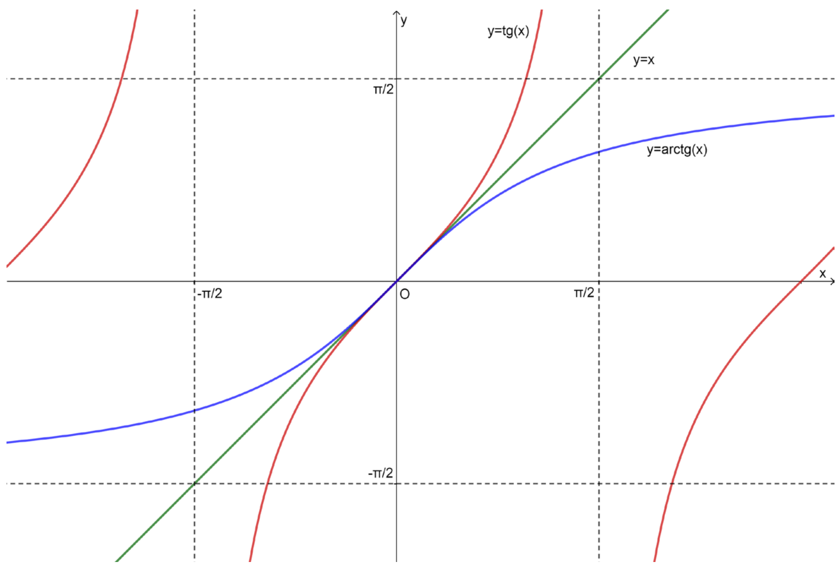


Рис.1.8. Графік функції $y = arctgx$

Табличка 5. Властивості функцій $y = ctgx$ та $y = arcctgx$

	$y = ctgx$	$y = arcctgx$
Означення:	**Котангенсом** кута α називають відношення абсциси кінця одиничного радіуса до його ординати: $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$.	**Арккотангенсом** числа α називають кут або число з відрізку $(0;\pi)$, котангенс якого дорівнює α.

Продовження таблиці 5. Властивості функцій $y = ctgx$ та $y = arcctgx$

Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, крім $x = \pi k, k \in Z$.	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	R	$(0; \pi)$
Парність функції	Функція непарна: $\mathrm{tg}(-x) = -tgx$ для всіх x з області визначення. Графік функції симетричний відносно осі OY (див. рис. 1.9.).	Функція не є ні парною, ні непарною. Графік функції симетричний відносно осі OY (див. рис. 1.10.).
Періодичність функції	Функція періодична з найменшим додатним періодом π: $c\mathrm{tg}(x + \pi k) = ctgx$, де $k \in Z$ для всіх $x \in R$.	Функція не є періодичною.
Координати точок перетину графіка функцій з осями координат	З віссю OX: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in Z$. З віссю OY: $(0; 0)$.	З віссю OX: немає; З віссю OY: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
Проміжки знакосталості	$ctgx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. $\mathrm{c}tgx > 0$ для всіх $x \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$. $ctgx < 0$ для всіх $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$.	Додатна на всій області визначення.

Продовження таблиці 5. Властивості функцій $y = ctgx$ та $y = arcctgx$

Проміжки зростання і спадання функції	Функція зростає на проміжках: $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$.	Функція спадає від π до 0 на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.
Найбільше і найменше значення функції	Найбільшого і найменшого значень функція не має.	Функція не набуває найбільшого і найменшого значень.

(Нелін проф. рівень, 2018; Бевз проф. рівень, 2018)

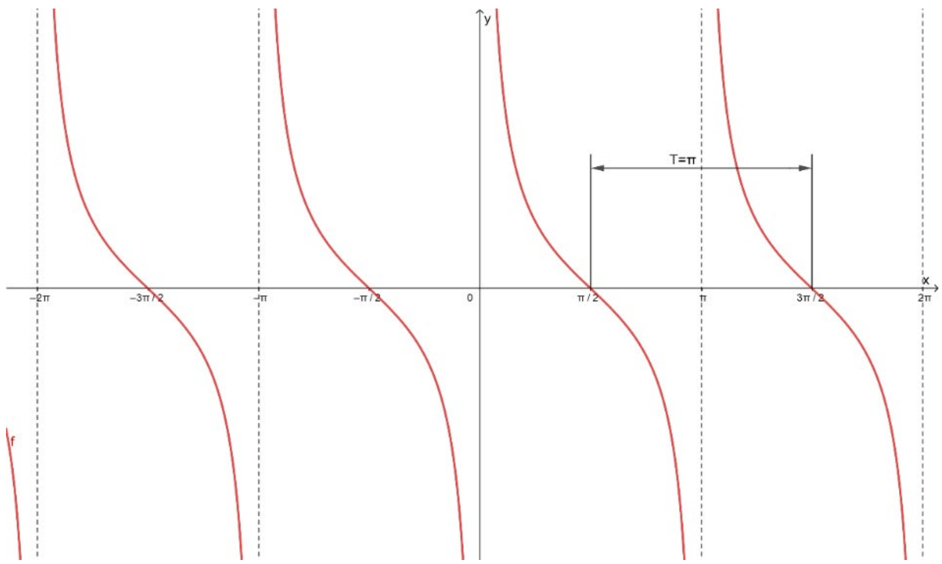


Рис.1.9. Графік функції $y = \text{ctg}(x)$

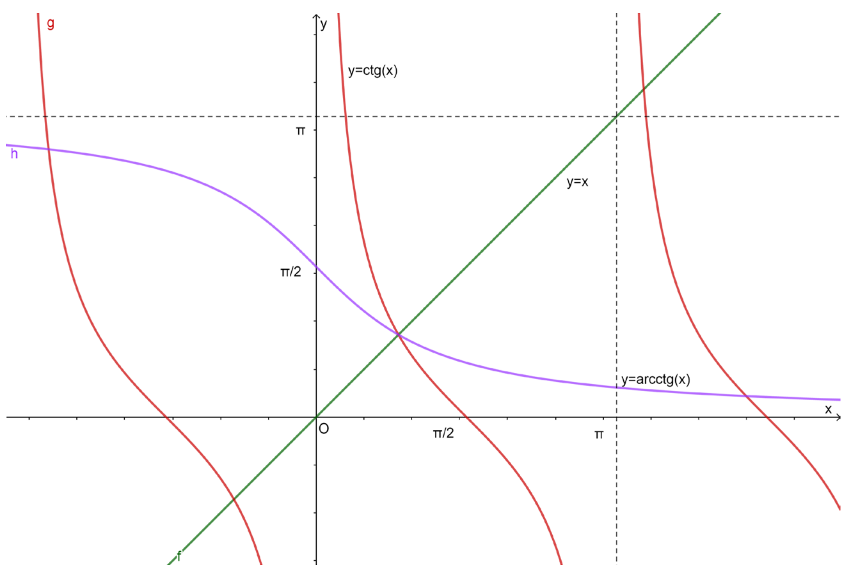


Рис.1.10. Графік функції $y = arcctgx$

1.4. Найпростіші тригонометричні рівняння та нерівності

Рівняння в якому невідома (змінна) входить під знак тригонометричної функції називається найпростішим тригонометричним рівнянням. Для того що розв'язати тригонометричне рівняння потрібно знайти множину значень невідомого, що задовольняють його (Нелін проф. рівень, 2018).

Нерівності, у яких змінна міститься під знаком тригонометричної функції, називають тригонометричними (Мерзляк поглиб. рівень, 2018).

Найпростіші тригонометричні рівняння.

До найпростіших тригонометричних рівнянь відносять рівняння виду $sinx = a, cosx = a, tgx = a, ctgx = a,$ де x – невідома величина, a – довільне число, називають найпростішими тригонометричними рівняннями. Використовуючи різні прийоми та методи більшість тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших (Бевз проф. рівень, 2018).

1. Рівняння $sinx = a$ та $cosx = a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

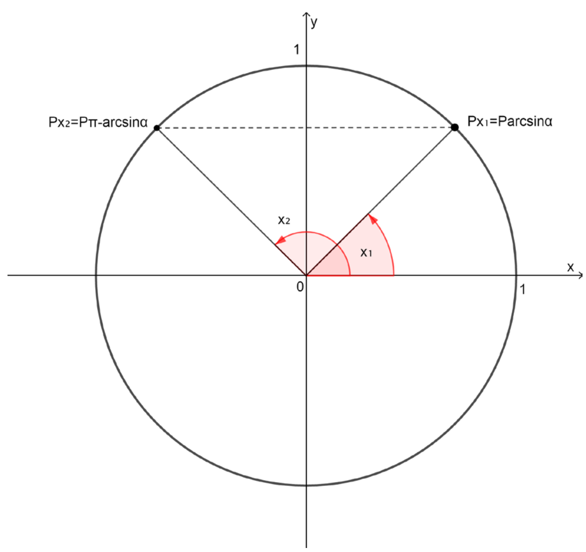


Рис.1.10. Рівняння $sinx = a$ на одиничному колі

Якщо $|a| \leq 1, \sin x = a \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = arcsina + 2\pi k, \ \ k\epsilon Z; \\ x_2 = \pi - arcsina + 2\pi k, \ \ k\epsilon Z. \end{cases}$

На практиці використовується формула, яка об'єднує дві попередніх і має вона такий вигляд: $x = (-1)^k arcsina + \pi k, k\epsilon Z.$

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|sinx| \leq 1$.

Виділяють окремі випадки розв'язання рівняння $sinx = a$.

Якщо $a = -1$, $sinx = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 0$, $sinx = 0$, то $x = k\pi,\ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 1$, $sinx = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$.

Примітка:

1) $\arcsin(-\alpha) = -arcsin\alpha$.

2) Якщо $0 < \alpha < 1$,то рівняння $sinx = -\alpha$ має таку множину розв'язків: $x = (-1)^{k+1} arcsina + \pi k, k\epsilon Z$.

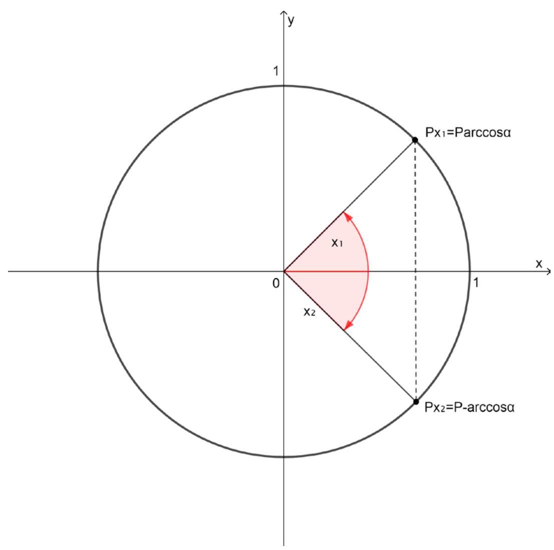


Рис. 1.11. Рівняння $cosx = a$. на одиничному колі

Якщо $|a| \leq 1, \cos x = a \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = arccosa + 2\pi k,\ \ k\epsilon Z; \\ x_2 = -arccosa + 2\pi k,\ \ k\epsilon Z. \end{cases}$

Об'єднавши ці формули ми отримаємо одну загальну: $x = \pm arccosa + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|cosx| \leq 1$.

Окремі випадки.

Якщо $a = -1$, $cosx = -1$, то $x = \pi + 2k\pi,\ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 0$, $cosx = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\epsilon Z$.

Якщо a= 1, $cosx = 1$, то $x = 2k\pi,\ k\epsilon Z.$

Примітка: $\arccos(-\alpha) = \pi - arccos\alpha.$

2. Рівняння $tgx = a\ і\ ctgx = a$ (Бурда, 2018).

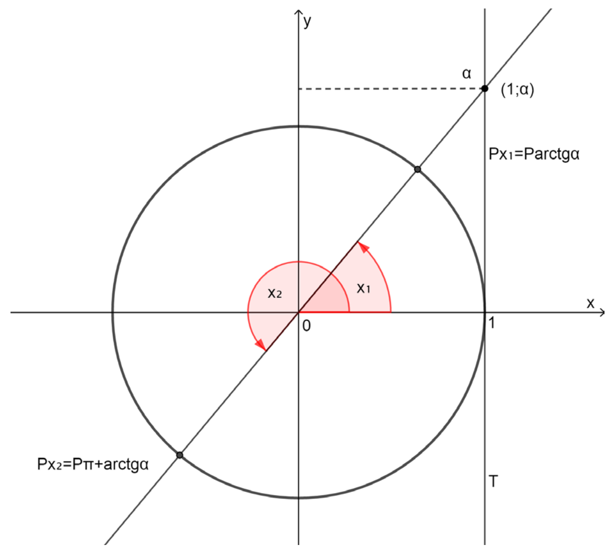


Рис. 1.12. Рівняння $tgx = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ існує тільки один кут α такий, що $tg\ x = a$. Це кут $\alpha = arctga$. Враховуючи періодичність функції $y = tg\ x$, одержуємо формулу коренів рівняння $tg\ x = a$: $x = arctga + \pi k, k\epsilon Z$ (Бурда, 2018).

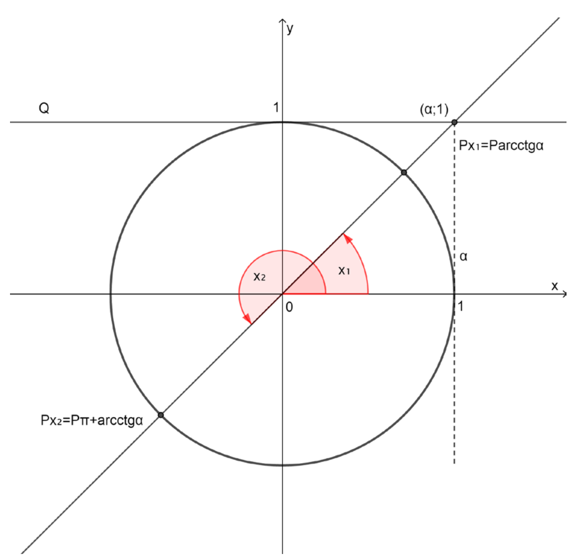


Рис. 1.13. Рівняння $ctgx = a$ на одиничному колі

Для будь якого дійсного числа a на проміжку $(0; \pi)$ існує тільки один кут α такий, що $ctgx = a$. Це кут $\alpha = arcctga.$ Враховуючи періодичність функції $y = ctgx$, одержуємо формулу коренів рівняння $ctg\, x = a$: $x = arcctga +$ $+\pi k, k\epsilon Z$ (Бурда, 2018).

Окремі випадки

Якщо $tgx = 0$, то $x = \pi k, k\epsilon Z$.

Якщо $ctgx = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

Примітка:

1) $arctg(-\alpha) = -arctg\alpha,$

2) $arcctg(-\alpha) = \pi - arcctg\alpha.$

Найпростіші тригонометричні нерівності

Найпростіші тригонометричні нерівності – це нерівності виду $\sin x <> a, \cos x <> a, tg\, x <> a, ctg <> a$ (Істер, 2018).

1. Нерівності $sinx > a; sinx < a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

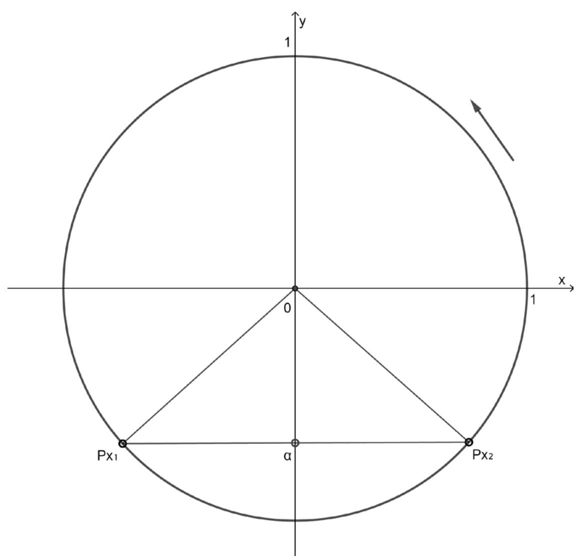


Рис. 1.14. Нерівність $sinx > a$ на одиничному колі

$x_1 = arcsina, x_2 = \pi - arcsina, x_1 < x_2.$

Якщо $a < -1$, то $x \in R$.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $arcsina + 2\pi n < x < \pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z.$

Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

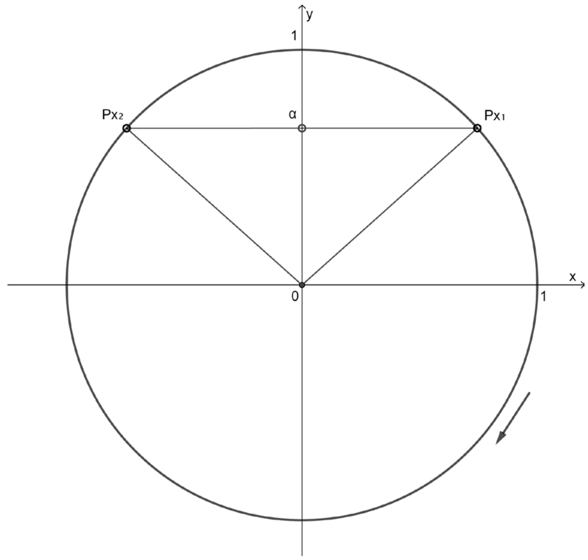


Рис. 1.15. Нерівність $sinx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcsina, x_2 = -\pi - arcsina, x_1 > x_2.$$

Якщо $a < -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-\pi - arcsina + 2\pi n < x < arcsina + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $a \geq 1$, то $x \in R$.

2. Нерівності $cosx < a; cosx > a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

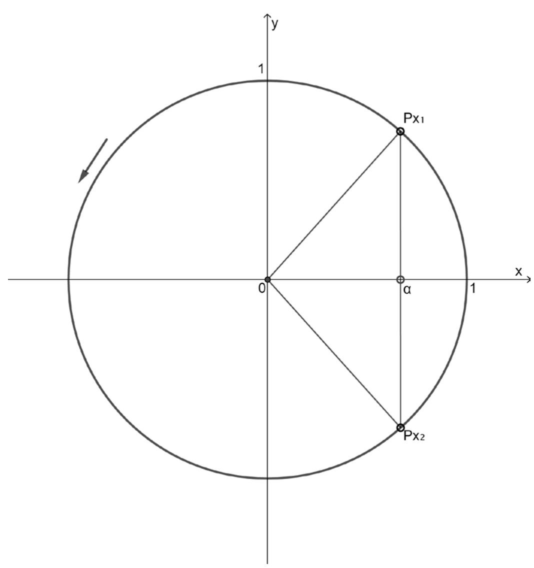


Рис. 1.16. Нерівність $cosx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arccosa, x_2 = 2\pi - arccosa, x_1 < x_2.$$

Якщо $a \leq -1$, то розв'язків немає.

Якщо $-1 < a \leq 1$, то $arccosa + 2\pi n < x < 2\pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $a > 1$, то $x \in R$.

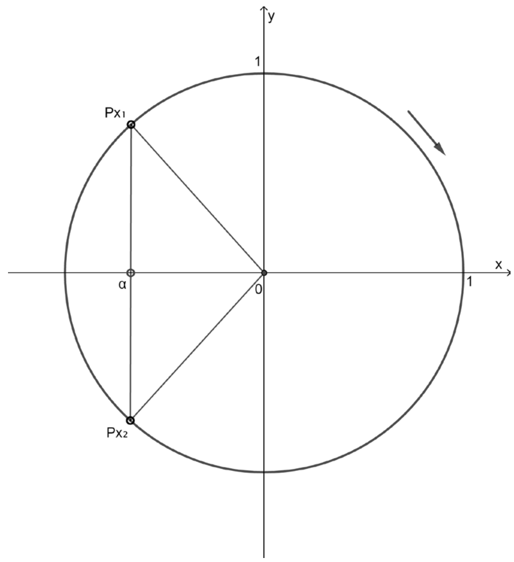


Рис. 1.17. Нерівність $cosx > a$ на одиничному колі

$x_1 = arcscosa, x_2 = -arccosa, x_1 > x_2$.

Якщо $a < -1$, то $x \in R$.

Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-arccosa + 2\pi n < x < arcscosa + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.

3. Нерівність $tgx > a; tgx < a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

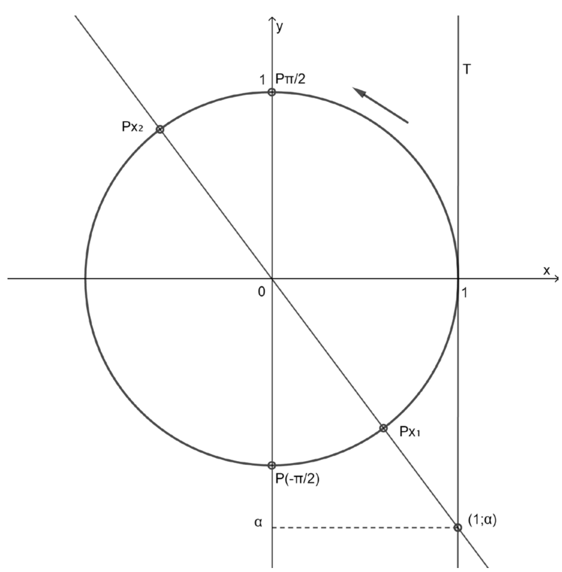


Рис. 1.18. Нерівність $tgx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arctga, x_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Множина розв'язків: $arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

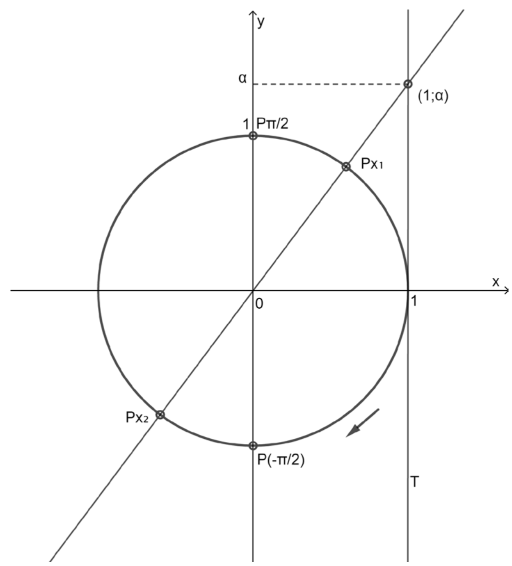


Рис. 1.19. Нерівність $tgx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arctga, x_1 > -\frac{\pi}{2}.$$

Множина розв'язків: $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n, n \in Z$.

4. Нерівність $ctgx > a; ctgx < a$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

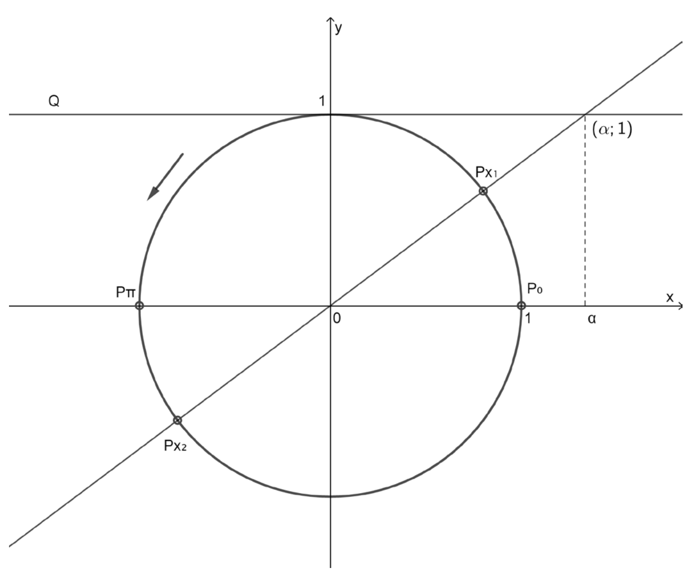


Рис. 1.20. Нерівність $ctgx < a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcctga, x_1 < \pi.$$

Множина розв’язків: $arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z.$

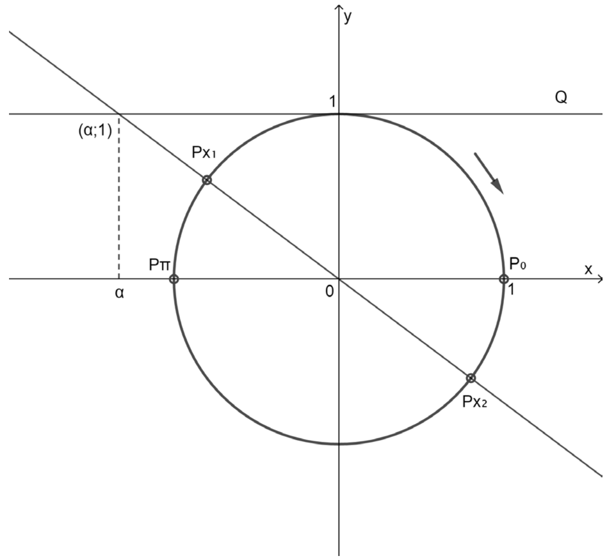


Рис. 1.21. Нерівність $ctgx > a$ на одиничному колі

$$x_1 = arcctga, x_1 > 0.$$

Множина розв’язків: $\pi n < x < arcctga + \pi n, n \in Z.$

Висновки до розділу 1

Перший розділ дипломної роботи присвячений теоретичним основам дослідження теми «Формування математичних компетентностей при розв’язувані тригонометричних рівнянь та нерівностей».

Проаналізована педагогічна, методологічна та наукова література з теми дослідження. Під час аналізу було визначено місце компетентностей в освітньому процесі, а також їх формування. Проведена порівняльна характеристика навчальних програм та підручників з математики для 10-х класі загальноосвітніх закладів до вивчення теми тригонометрія за трьома рівнями: стандарту, профільним та поглибленим. Досліджено тригонометричні функції та обернені до них, їх властивості, найпростіші тригонометричні функції та їх властивості.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1. Методика розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей, які зводяться до найпростіших

2.1.1. Види тригонометричних рівнянь та методи їх розв'язування

I.Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Приклад 2.1. $sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу $x = (-1)^k \arcsin(b) + \pi k, k \in Z$, запишемо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in Z; \frac{x}{2} = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.2. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; 3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, n \in Z;$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z; 3x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = (-1)^n \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Приклад 2.3. $\sin\left(t + \frac{\pi}{10}\right) = -1$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

За формулою коренів рівняння $sina = -1$ можемо записати:

$$t + \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Далі отримаємо:

$$t = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n, n \in Z; t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in Z$

Приклад 2.4. $sin\frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}$ (Мерзляк проф. рівень,2018).

Розв'язання.

$$sin\frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}; \frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$\frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \frac{2}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k, k \in Z;$$

$$x = \frac{2}{(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k}, k \in Z; x = \frac{12}{(-1)^{k+1} + 6k}, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{12}{(-1)^{k+1} + 6k}, k \in Z$.

Приклад 2.5. $\sqrt{3}cosx + sinx = 2$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx = 1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$sin\frac{\pi}{3}cosx + cos\frac{\pi}{3}sinx = 2.$$

Використовуючи формулу синуса суми $sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.6. $cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу $x = \pm\arccos(b) + 2\pi n, n \in Z$, можемо записати:

$4x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$.

Далі отримаємо:

$4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Відповідь. $x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Приклад 2.7. $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Маємо:

$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z; \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

$\frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in Z$.

Відповідь. $x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.8. $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Перепишемо дане рівняння так: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$.

Отримаємо:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm \arccos 0 + \pi n, n \in Z.$$

Тоді:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; 7x = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n, n \in Z;$$

$$7x = \pm\frac{7\pi}{10} + \pi n, n \in Z; x = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z.$

Приклад 2.9. $cos\pi x^2$ =1 (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Маємо:

$\pi x^2 = 2\pi n, n \in Z$;$x^2 = 2n, n \in Z.$

Оскільки $x^2 \geq 0$, то $2n \geq 0$, тобто $n \in N \cup \{0\}$.

Тепер можна записати: $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$.

Відповідь. $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$.

Приклад 2.10. $tg\,\frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$ (Мерзляк, 2018).

Розв’язання.

Маємо:

$$\frac{2x}{3} = arctg(-\sqrt{3}) + nk, k \in Z; \frac{2x}{3} = -\frac{\pi}{3} + nk, k \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z.$$

Відповідь. $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z.$

Приклад 2.11. $ctg(\frac{2\pi}{3} - x) = -1$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Маємо:

$$ctg\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1; x - \frac{2\pi}{3} = arcctg1 + nk, k; \in$$

$$x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+nk, k\in Z; x=\frac{11\pi}{12}+nk, k\in Z.$$

Відповідь. $x=\frac{11\pi}{12}+nk, k\in Z.$

Приклад 2.12. $tg2x=5$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$2x=atctg5+\pi k, k\in Z; x=0{,}5arctg5+\frac{\pi k}{2}, k\in Z.$$

Відповідь. $0{,}5arctg5+\frac{\pi k}{2}, k\in Z.$

Приклад 2.13. $ctgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

За формулою $x=arcctga+\pi k, k\epsilon Z.$ маємо:

$$x=arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi k, k\epsilon Z; x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3}+\pi k, k\epsilon Z.$

II.Спосіб розкладання на множники

Приклад 2.14. $sin2x-cosx=0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$sin2x-cosx=0; 2sinx\cdot cosx-cosx=0; cosx(2sinx-1)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx=0, \\ sinx=\frac{1}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \\ x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z.$

Приклад 2.15. $cos^2 2x-cos2x=0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$cos^2 2x-cos2x=0; cos2x\cdot(cos2x-1)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} cos2x=0, \\ cos2x=1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \\ 2x=2\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z, \\ x=\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z; \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.16. $tg^3x = tgx$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Дане рівняння визначено при $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi l, l \in Z.$

$$tg^3x = tgx; tg^3x - tgx = 0; tgx(tg^2x-1) = 0; tgx(tgx-1)(tgx+1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 0, \\ tgx = 1, \\ tgx = -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} x = \pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4}+\pi m, m \in Z; \end{array}\right.$$

Об’єднавши множини розв’язки другого і третього рівнянь сукупності, остаточно отримаємо розв’язки вихідного рівняння:

$$x_1 = \pi n, n \in Z;\ x_2 = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi p}{2}, p \in Z.$$

Відповідь. $\pi n, n \in Z;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi p}{2}, p \in Z.$

III.Спосіб розв’язання однорідних рівнянь

Приклад 2.17. $sinx - cosx = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Маємо однорідне рівняння I степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Доведемо, що $cosx \neq 0$. Це дійсно так, бо якби $cosx = 0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $sinx = 0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $cosx \neq 0$, отримаємо:

$$tgx - 1 = 0; tgx = 1; x = \frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z.$

Приклад 2.18. $3sin^2x + sinx \cdot cosx - 2cos^2x = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Маємо однорідне рівняння II степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Значення x, при яких $cosx = 0$, не є розв'язками цього рівняння, бо якби $cosx = 0$, то мала б виконуватись рівність $3sin^2x = 0$, а це неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x + sin^2x = 1$).

Поділимо обидві частини рівняння на $cos^2x \neq 0$, отримаємо:

$$3tg^2x + tgx - 2 = 0.$$

Нехай $tgx = a$, тоді маємо рівняння:

$$3a^2 + a - 2 = 0;$$

$$D = 1 + 24 = 25;\ \sqrt{D} = 5; a_1 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3};\ a_2 = \frac{-1+5}{6} = -1.$$

Повернемось до заміни:

1) $tgx = \frac{2}{3}; x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z;$

2) $tgx = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Відповідь. 1) $x = arctg\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z;$

2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.19. $sin^3x = cosx$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Помножимо праву час тину на рівняння на тригонометричну одиницю $sin^2x + cos^2x$, отримаємо:

$$sin^3x = cosx \cdot (sin^2x + cos^2x); sin^3x = cosx \cdot sin^2x + cos^3x;$$

$$sin^3x - cosx \cdot sin^2x - cos^3x = 0.$$

Дістали однорідне рівняння третього степеня, відносно $sinx$ і $cosx$. У випадку $cosx = 0$, розв'язків, очевидно, немає.

Поділивши обидві частини останнього на $cos^3x \neq 0$, отримаємо:

$$tg^3x - tg^2x - 1 = 0.$$

Нехай $tgx = y$, тоді маємо:

$$y^3 - y^2 - 1 = 0.$$

Розкладемо ліву частину рівняння на множники, використовуючи штучний спосіб:

$$y^3 - y^2 + y^3 - 1 = 0; y^2(y-1) + (y-1)\cdot(y^2+y+1) = 0;$$

$$(y-1)\cdot(2y^2+y+1) = 0; y-1=0; y=1;$$

або

$$2y^2 + y + 1 = 0;$$

$$Д = 1 - 8 = -7 < 0.$$

Отже, $2y^2 + y + 1 > 0$ для будь-якого $y \in R$. Рівняння дійсних коренів немає.

Повернемося до заміни:

$$tgx = 1; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.20. $7sin^2x - 8sinxcosx - 15cos^2x = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Якщо $cosx = 0$, то з даного рівняння випливає, що $sinx = 0$. Але $cosx$ і $sinx$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, оскільки має місце рівність $sin^2x + cos^2x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x, при яких $cosx \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на cos^2x, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7sin^2x}{cos^2x} - \frac{8sinxcosx}{cos^2x} - \frac{15cos^2x}{cos^2x} = 0; 7tg^2x - 8tgx - 15 = 0.$$

Звідси

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = \frac{15}{7}. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\left[\begin{array}{c} x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ x=-arctg\frac{15}{7}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь.

$$\left[\begin{array}{c} x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ x=-arctg\frac{15}{7}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

IV.Зведення тригонометричних рівнянь до алгебраїчних

Приклад 2.21. $cos^2x-5cosx=6$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$cos^2x-5cosx-6=0.$$

Нехай $cosx=t$, де $|t|\le 1$, тоді маємо:

$$t^2-5t-6=0; t_1=-1, t_2=6.$$

Корінь $t_2=6$ не задовольняє умову $|t|\le 1$.

Повернемося до заміни:

$$cosx=-1; x=\pi+2\pi n, n\in Z.$$

Відповідь. $x=\pi+2\pi n, n\in Z$.

Приклад 2.22. $tgx-2ctgx+1=0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$tgx-2\cdot\frac{1}{tgx}+1=0.$$

Нехай $tgx=a$, тоді маємо рівняння:

$$a-\frac{2}{a}+1=0;\ \frac{a^2+a-2}{a}=0; \begin{cases} a^2+a-2=0, \\ a\ne 0; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-2, \\ a=1, \end{array}\right. \\ a\ne 0. \end{cases}$$

Повернемося до заміни:

1) $tgx=-2; x=-arctg2+\pi n, n\in Z$;

2) $tgx=1; x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Відповідь.1) $x=-arctg2+\pi n, n\in Z$;

2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Приклад 2.23. $2sin^2x + cos4x - 2 = 0$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Можна записати: $1 - cos2x + 2cos^2 2x - 1 - 2 = 0.$

Звідси $2cos^2 2x - cos2x - 2 = 0$. Зробимо заміну $cos2x = t$. Тоді останнє рівняння набуває вигляду $2t^2 - t - 2 = 0$. Розв’язавши його, отримаємо:

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}, t_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

Оскільки $\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$, а $\frac{1-\sqrt{17}}{4} \in [-1; 1]$, то початкове рівняння рівносильне рівнянню $cos2x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, звідси

$$x = \pm\frac{1}{2}arccos\frac{1 - \sqrt{17}}{4}\pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $x = \pm\frac{1}{2}arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}\pi n, n \in Z.$

Приклад 2.24. $sinx - 3cos2x = 2$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Використовуючи формулу $cos2x = 1 - 2sin^2x$, перетворимо дане рівняння:

$$sinx - 3(1 - 2sin^2x) - 2 = 0; 6sin^2x + sinx - 5 = 0.$$

Нехай $sinx = t$. Отримаємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0.$

Звідси $t_1 = -1, t_2 = \frac{5}{6}$.

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} sinx = -1, \\ sinx = \frac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Маємо:

$$\left[\begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n arcsin\frac{5}{6} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь.$\left[\begin{array}{c} x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x=(-1)^n arcsin\frac{5}{6}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$

V.Перетворення рівняння за допомогою тригонометричних формул

1. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

Приклад 2.25. $\sin(15° + x) + \sin(45° - x) = 1$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

$$\sin(15° + x) + \sin(45° - x) = 1;$$

$$2sin\frac{15° + x + 45° - x}{2} \cdot cos\frac{15° + x - 45° + x}{2} = 1;$$

$$2sin30° \cdot \cos(x - 15°) = 1; 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x - 15°) = 1; \cos(x - 15°) = 1;$$

$$x - 15° = 360° \cdot n, n \in Z; x = 15° + 360° \cdot n, n \in Z.$$

Відповідь. $15° + 360° \cdot n, n \in Z.$

Приклад 2.26. $sin7x - sinx = cos4x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$sin7x - sinx = cos4x; 2sin\frac{7x - x}{2} \cdot cos\frac{7x + x}{2} = cos4x;$$

$$2sin3x \cdot cos4x - cos4x = 0; cos4x(2sin3x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} cos4x = 0, \\ sin3x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z, \\ 3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{c} x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z, \\ 3x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, k\in Z. \end{array}\right.$

2. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул пониження степеня

Приклад 2.27. $cos^2\frac{3x}{2} = \frac{1}{4}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$cos^2\frac{3x}{2} = \frac{1}{4}; \frac{1 + cos3x}{2} = \frac{1}{4}; 1 + cos3x = \frac{1}{2}; cos3x = -\frac{1}{2};$$

$$3x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z; 3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$$

Відповідь. $\pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$.

Приклад 2.28. $0{,}5(cos5x + cos7x) - cos^2 2x + sin^2 3x = 0$ (Резуненко, 2011).

Розв’язання.

$$0{,}5(cos5x + cos7x) - cos^2 2x + sin^2 3x = 0;$$

$$0{,}5(cos5x + cos7x) - \frac{1 + cos4x}{2} + \frac{1 - cos6x}{2} = 0;$$

$$2cos6x \cdot cosx - cos4x - cos6x = 0; 2cos6x \cdot cosx - 2cos5x \cdot \cos(-x) = 0;$$

$$2cos6x \cdot cosx - 2cos5x \cdot \cos\ x = 0; 2\cos(cos6x - cos5x) = 0;$$

$$-4cosx \cdot sin\frac{11x}{2} \cdot sin\frac{x}{2} = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ sin\frac{11x}{2} = 0, \\ sin\frac{x}{2} = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \frac{11x}{2} = \pi k, \\ \frac{x}{2} = \pi m; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = \frac{2\pi k}{11}, k \in Z, \\ x = 2\pi m, m \in Z. \end{array}\right.$$

Оскільки корені третього рівняння сукупності містяться серед коренів другого рівняння, то остаточним розв’язком даного рівняння будуть групи коренів:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;\ x_2 = \frac{2\pi k}{11}, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $\frac{2\pi k}{11}, k \in Z$.

3. Рівняння, що розв’язуються за допомогою рівності однойменних тригонометричних функцій

Приклад 2.29. $sin4x = sin3x$ (Гайшут,1997).

Розв’язання.

На основі умови рівності синусів двох кутів, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l}4x+3x=\pi+2\pi k, k\in Z,\\ 4x-3x=2\pi k, k\in Z;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}7x=\pi+2\pi k, k\in Z,\\ x=2\pi k, k\in Z;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}, k\in Z,\\ x=2\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}, k\in Z,\\ x=2\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$

Приклад 2.30. $tg3x\cdot tg\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

Поділимо обидві частини рівняння на $tg3x$.

Це можливо, бо з умови слідує, що $tg3x\neq 0$.

Отже,

$$tg\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{tg3x};\ tg\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=ctg3x; tg\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)(*)$$

На основі умови рівності тангенсів двох кутів, отримаємо:

$$5x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+3x=\pi k, k\in Z; 8x=\frac{\pi}{8}+\pi k, k\in Z; x=\frac{\pi}{48}+\frac{\pi k}{8}, k\in Z.$$

При кожному значенні x з цієї множини розв'язків кожна з частин рівняння $(*)$ існує.

Відповідь. $\frac{\pi}{48}+\frac{\pi k}{8}, k\in Z.$

4. Рівняння, що розв'язуються за допомогою формул додавання та віднімання аргументів тригонометричних функцій

Приклад 2.31. $sin6x\cdot sinx-cos6x\cdot cosx=0$ (Крамор, 2012).

Розв'язання.

$$sin6x\cdot sinx-cos6x\cdot cosx=0; -(cos6x\cdot cosx-sin6x\cdot sinx)=0;$$

$$-cos7x=0; 7x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z; x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n,}{7}n\in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n,}{7}n\in Z.$

Приклад 2.32. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ (Гайштут,1997).

Розв'язання.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0;$$

$$sin\frac{\pi}{4}\cdot cosx+cos\frac{\pi}{4}\cdot sinx+cosx\cdot cos\frac{\pi}{4}+sinx\cdot sin\frac{\pi}{4}=0;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot cosx+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot sinx+cosx\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+sinx\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0;$$

$$2cosx+2sinx=0; cosx+sinx=0.$$

Маємо однорідне рівняння I степеня відносно $sinx$ і $cosx$.

Доведемо, що $cosx\neq 0$. Це дійсно так, бо якби $cosx=0$, то з рівняння видно, що мала б виконуватися рівність $sinx=0$, що неможливо для одного і того самого аргументу (втрачає зміст тотожність $cos^2x+sin^2x=1$).

Отже, поділимо обидві частини рівняння на $cosx\neq 0$, отримаємо:

$$tgx+1=0; tgx=-1; x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

5. Рівняння, що розв’язується за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

Приклад 2.33. $sin2x\cdot sin6x=sin3x\cdot sin5x$ (Крамор, 2012).

Розв’язання.

$$\frac{1}{2}(cos4x-cos8x)=\frac{1}{2}(cos2x-cos8x); cos4x-cos8x=cos2x-cos8x;$$

$$cos4x-cos2x=0; -2\cdot sin3xsinx\cdot=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} sin3x=0,\\ sinx=0;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 3x=\pi n, n\in Z,\\ x=\pi k, k\in Z;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z,\\ x=\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Оскільки множина розв’язків другого рівняння сукупності включається в множину розв’язків першого рівняння, то остаточно маємо: $x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z.$

Відповідь. $x=\frac{\pi n}{3}, n\in Z.$

Приклад 2.34. $8sin5x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+5x\right)=1$ (Резуненко, 2011).

Розв’язання.

$$sin5x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+5x\right)=\frac{1}{8};sin5x\cdot\frac{1}{2}(cos10x-cos\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{8};$$

$$sin5x\cdot(cos10x+\frac{1}{2})=\frac{1}{4};2sin5x\cdot cos10x+sin5x=\frac{1}{2};$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot(sin15x-sin5x)+sin5x=\frac{1}{2};sin15x=\frac{1}{2};$$

$$15x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z;x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{90}+\frac{\pi k}{15},k\in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{90}+\frac{\pi k}{15},k\in Z.$

VI.Введення допоміжного кута

Приклад 2.35. $\sqrt{3}sinx-cosx=1$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

$$a=\sqrt{3},b=-1,c=1,a^2+b^2=4,c^2=1,a^2+b^2>c^2.$$

Отже, рівняння має розв’язки.

Винесемо вираз $\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$ за дужки і отримаємо:

$$2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sinx-\frac{1}{2}cosx\right)=1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}sinx-\frac{1}{2}cosx=\frac{1}{2}.$$

Використаємо заміну $\frac{\sqrt{3}}{2}=cos\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}=sin\frac{\pi}{6}.$

Тоді вихідне рівняння набуде вигляду:

$$sinx\cdot cos\frac{\pi}{6}-cosx\cdot sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$$

$$x-\frac{\pi}{6}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z;x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z.$$

Відповідь. $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z.$

VII.Метод раціоналізації

Приклад 2.36. $5sinx-cosx=5$ (Смоляков, 2004).

Розв’язання.

Дане рівняння визначено при всіх дійсних значеннях x. Здійснюючи заміну за допомогою формул 81, 82, отримаємо рівняння:

$$5 \cdot \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5;$$

яке визначено при $x \neq \pi(2n+1), n \in Z$, тобто при переході від $sinx$ і $cosx$ до $tg\frac{x}{2}$ область визначення звузилася до значення $x = \pi(2n+1), n \in Z$.

Нехай $tg\frac{x}{2} = t$, тоді отримаємо рівняння:

$$5 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 5; 10t - 1 + t^2 = 5 + 5t^2; 4t^2 - 10t + 6 = 0;$$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0;\ t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{2}.$$

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = 1, \\ tg\frac{x}{2} = \frac{3}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \frac{x}{2} = arctg\frac{3}{2} + \pi k; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = 2arctg\frac{3}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Перевіримо, чи не будуть розв'язками рівняння значення $x = \pi(2n+1)$, $n \in Z$.

Так як 2π – період $sinx$ і $cosx$, то достатьо перевірити значення $x = \pi$:

$$5sin\pi - cos\pi = 1.$$

Отже, $1 \neq 5$.

Таким чином, значення $x = \pi(2n+1)$ не є розв'язками рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ 2arctg\frac{3}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

VIII. Зведення до однорідного відносно $sinx$ та $cosx$ (sin^2x та cos^2x).

Приклад 2.37. $4sin^2x - sin2x = 3$ (Смоляков, 2004).

Розв'язання.

$$4sin^2x - 2sinxcosx = 3(cos^2x + sin^2x), sin^2x - 2sinxcosx - 3cos^2x = 0.$$

Так як $cosx = 0$, то поділивши обидві частини рівняння на cos^2x, отримаємо

$$tg^2x - 2tgx - 3 = 0.$$

Нехай $tgx = y$, тоді

$$y^2 - 2y - 3 = 0, y_1 = 3, y_2 = -1.$$

Повернемося до заміни:

$$tgx = 3, x = arctg3 + \pi n, n \in Z,$$

$$tgx = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $arctg3 + \pi n, n \in Z, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

IX. Піднесення обох частин рівняння до квадрату.

Приклад 2.38. $sinx - cosx = 0$ (Смоляков, 2004).

Розв’язання.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(sinx - cosx)^2 = 0, sin^2x - 2sinxcosx + cos^2x = 0,$$

$$1 - sin2x = 0, sin2x = 1, 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

X. Метод заміни змінних

Приклад 2.39. $sinx - 2sinx \cdot cosx = 1 - cosx$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

$$sinx + cosx - 2sinx \cdot cosx - 1 = 0.$$

Нехай $sinx + cosx = t$, де $|t| \le \sqrt{2}$, тоді

$$2sinx \cdot cosx = t^2 - 1.$$

Отже, маємо:

$$t - t^2 + 1 - 1 = 0;\ t^2 - t = 0; t^2(t - 1) = 0; t = 0 \text{ або } t = 1.$$

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} sinx + cosx = 0, \\ sinx + cosx = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}};\end{array}\right. \left[\begin{array}{c}x+\frac{\pi}{4}=\pi n, nZ\in,\\ x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c}x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z,\\ x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Приклад 2.40. $sin^4 2x+cos^4 2x=sin2x\cdot cos2x$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

$$sin^4 2x+cos^4 2x=sin2x\cdot cos2x;$$

$$(sin^2 2x+cos^2 2x)^2-2sin^2 2x\cdot cos^2 2x=sin2x\cdot cos2x.$$

Нехай $sin2x\cdot cos2x=t$, Зрозуміло, що $|t|\le\frac{1}{2}$.

Отримаємо:

$$1-2t^2=t;\ 2t^2+t-1=0;$$

$$D=1-4\cdot 2\cdot(-1)=9;\ \sqrt{Д}=3, t_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2};\ t_2=\frac{-1-3}{4}=-1.$$

Корінь $t_2=-1$ не задовольняє умову $|t|\le\frac{1}{2}$.

Отже, повернемося до заміни:

$$sin2x\cdot cos2x=\frac{1}{2}; sin4x=1; 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z; x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

XI.Методи розв'язування деяких тригонометричних рівнянь

1. Дробово-раціональні рівняння відносно тригонометричних функцій

Приклад 2.41. $\frac{sin^4 x-1}{cos^4 x}=1$ (Смоляков, 2004).

Розв'язання.

ОДЗ рівняння: $cosx\ne 0; x\ne\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

$$sin^4 x-1=cos^4 x; sin^4 x-cos^4 x=1; (sin^2 x-cos^2 x)(sin^2 x+cos^2 x)=1;$$

$$-(cos^2x - sin^2x) = 1; cos2x = -1; 2x = \pi + 2\pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Оскільки множина розв’язків рівняння не задовольняє ОДЗ, то рівняння розв’язків не має.

Відповідь. Розв’язків немає.

2. Рівняння, що містять обернені тригонометричні функцій

Приклад 2.42. $4arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0$ (Крамор, 2012).

Розв’язання.

$$4arctg(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0; arctg(x^2 - 3x - 3) = \frac{\pi}{4}.$$

Так як значення арктангенса знаходиться у проміжку $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то у цьому випадку із рівності кутів випливає рівність функцій. Отримаємо:

$$x^2 - 3x - 3 = 1; x^2 - 3x - 4 = 0; x_1 = -1;\ x_2 = 4.$$

Відповідь. $-1; 4$.

Приклад 2.43. $arcsin4x + \arcsin(1 - 4x) = \frac{\pi}{3}$ (Гайштут,1997).

Розв’язання.

Взявши від обох частин синус, дістанемо рівняння:

$$\sin(\arcsin(1 - 4x)) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - arcsin4x\right),$$

яке є наслідком початкового рівняння.

$$1 - 4x = sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos(arsin4x) - cdos\frac{\pi}{3} \cdot \sin(arcsin4x);$$

$$1 - 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - 16x^2} - \frac{1}{2} \cdot 4x; 2 - 4x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - 16x^2};$$

$$4 - 16x + 16x^2 = 3 - 48x^2; 64x^2 - 16x + 1 = 0;\ (8x - 1)^2 = 0; x = 0{,}125.$$

Перевіркою переконуємось, що знайдене значення $x = 0{,}125$ є коренем початкового рівняння.

Відповідь. $0{,}125$

3. Розв’язування нестандартних тригонометричних рівнянь

Приклад 2.44. $cos3x + cos\frac{5x}{2} = 2$ (Гайштут,1997).

Розв'язання.

Оскільки $|cos3x| \leq 1$ і $\left|cos\frac{5x}{2}\right| \leq 1$, то

$$\left|cos3x + cos\frac{5x}{2}\right| \leq 2.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} cos3x = 1, \\ cos\frac{5x}{2} = 1; \end{cases} \begin{cases} 3x = 2\pi n, \\ \frac{5x}{2} = 2\pi k; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z, \\ x = \frac{4\pi k}{5}, k \in Z. \end{cases}$$

Система має розв'язки лише тоді, коли рівняння $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$ має розв'язки на множині цілих чисел.

Отже, $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$;

$$5\pi n = 6\pi k; 5n = 6k.$$

Маємо: $n = 6m; k = 5m, m \in Z$.

Отже, $x = 4\pi m, m \in Z$.

Відповідь. $4\pi m, m \in Z$.

Приклад 2.45. $sin^n x + cos^n x = 1, n \in Z$ (Резуненко, 2011).

Розв'язання.

Якщо $n = 1$, то рівняння зводиться до вигляду $sinx + cosx = 1$ (IX тип)

Якщо $n = 2$ маємо тотожність $sin^2 x + cos^2 x = 1$, де x – будь-яке дійсне число.

При $n \geq 3$, якщо $|sinx| \neq 1$ і $|cosx| \neq 1$, маємо

$$\begin{cases} sin^n x < sin^2 x, \\ cos^n x < cos^2 x, \end{cases}$$

бо показникова функція з основою, меншою за одиницю, спадна. Додавши почлено отримані нерівності, знайдемо, що:

$sin^n x + cos^n x < 1, n \geq 3$, при всіх ч,для яких $|sinx| \neq 1$ і $|cosx| \neq 1$.Таким чином:

a) Якщо n – непарне число, то можливі випадки

$\begin{cases} sinx = 1, \\ cosx = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} sinx = 0, \\ cosx = 1, \end{cases}$

з яких відповідно отримаємо розв'язки даного рівняння $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ або $x = 2\pi n, n \in Z$.

b) Якщо n – парне число, то можливі випадки

$\begin{cases} sinx = \pm 1, \\ cosx = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} sinx = 0, \\ cosx = \pm 1, \end{cases}$

з яких отримуємо розв'язки даного рівняння у вигляді $x = \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in Z$.

4. Розв'язування тригонометричних рівнянь з параметрами

Приклад 2.46. $cos3x = m \cdot cosx$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Використовуючи формулу 20, отримаємо:

$$4cos^3 x - 3cosx - mcosx = 0; cosx \cdot (4cos^2 x - 3 - m) = 0;$$

$$cosx = 0 \text{ або } 4cos2x - 3 - m = 0.$$

1) $cosx = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$

2) $4cos^2 x - 3 - m = 0; 4 \cdot \frac{1 + cos2x}{2} - 3 - m = 0;$

$$2 + 2cos2x - 3 - m = 0; 2cos2x = m + 1; cos2x = \frac{m+1}{2}.$$

$2x = \pm arccos\frac{m+1}{2} + 2\pi n, n \in Z,$ якщо $-1 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1;$

$x = \pm\frac{1}{2} arccos\frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z,$ якщо $-3 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1.$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \pm\frac{1}{2} arccos\frac{m+1}{2} + \pi n, n \in Z,$ якщо $-3 \leq \frac{m+1}{2} \leq 1.$

Приклад 2.47. Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння $sin^6 x + cos^6 x = a$ (Нелін проф. рівень, 2018).

Розв'язати.

Здійснюючи перетворення виразу, що стоїть у лівій частині рівняння:

$$sin^6x + cos^6x = (sin^2x + cos^2x)^3 - 3sin^2x \cdot cos^2x(sin^2x + cos^2x) =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}sin^2 2x = 1 - \frac{3(1 - cos4x)}{8} = \frac{5 + 3cos4x}{8}.$$

Отже, $\frac{5+3cos4x}{8} = a$;

$$3cos4x = 8a - 5;$$

$$cos4x = \frac{8a - 5}{3}.$$

Це рівняння має розв’язки:

$$x = \pm\frac{1}{4}arccos\frac{8a - 5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

якщо $-1 \leq \frac{8a-5}{3} \leq 1$, тобто $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

При інших значеннях параметра a розв’язки немає

Відповідь.

Якщо $a \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (1; \infty)$, то розв’язків немає;

якщо $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$, то $x = \pm\frac{1}{4}arccos\frac{8a-5}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

XII. Розв’язування тригонометричних рівнянь графічним способом

Приклад 2.48. $sinx = 1 - x$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = sinx$ і $y = 1 - x$ (див. рис. 2.1.).

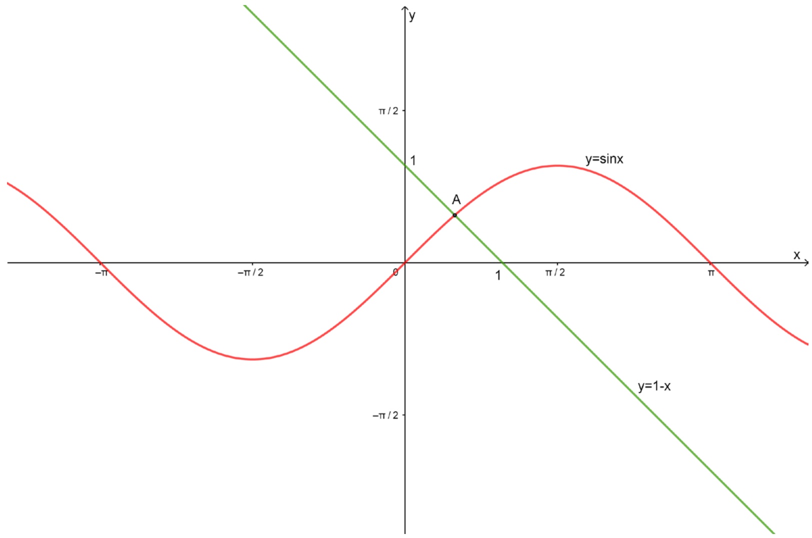


Рис. 2.1. Графіки функцій $y = sinx$ і $y = 1 - x$

Ці графіки перетинаються в одній точці A. Абсциса цієї точки і дає нам єдиний корінь рівняння: $x \approx 0{,}5$.

Для уточнення отриманого результату корисно використовувати тригонометричні таблиці. При $x = 0{,}5 \to sinx \approx 0{,}4794, 1 - 5 = 0{,}5$. Отже, $sinx < 1 - x$. Але тоді з рисунку видно, що корінь рівняння $sinx = 1 - x$ буде більший ніж $0{,}5$.

Перевіримо значення $x = 0{,}6$. Маємо: $sinx \approx 0{,}5446, 1 - x = 0{,}4$. Отже, $sinx > 1 - x$. Але тоді, як легко зрозуміти з рисунку, шуканий корінь x_0 повинен бути менший, ніж $0{,}6$.

Тепер ми знаємо, що знаходиться в інтервалі $[0{,}5; 0{,}6]$. Тому з точністю до $0{,}1$:

$x_0 \approx 0{,}5$ (з недостачею), $x_0 \approx 0{,}6$ (з надлишком).

Відповідь. $x \approx 0{,}5$

XIII. Зведення рівняння до рівносильної системи

Приклад 2.49. $\frac{2sin^2x+3sinx}{1-cosx} = 0$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2sin^2x + 3sinx = 0, \\ 1 - cosx \neq 0; \end{cases} \begin{cases} 2sinx(sinx + 1{,}5) = 0, \\ cosx \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} sinx = 0, \\ sinx = -1{,}5, \end{array}\right. \\ cosx \neq 1; \end{cases} \begin{cases} sinx = 0, \\ cosx \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, n \in Z, \\ x \neq 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Нанесемо на одиничне коло числа, які є розв'язками системи (див. рис. 2.2.). Потім виберемо ті числа, які задовольняють умову $x \neq \pi + 2\pi k, k \in Z$.

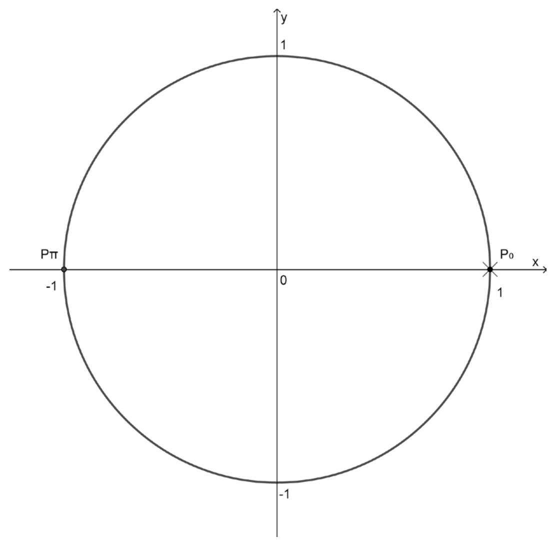


Рис. 2.2. Одиничне коло з розв'язками системи

Отже, це числа $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Відповідь. $\pi + 2\pi n, n \in Z$.

2.1.2. Види тригонометричних нерівностей та методи їх розв'язування

I.Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Приклад 2.50. $sinx < \frac{\sqrt{2}}{3}$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв'язання.

Виконаємо перевірку входження правої частини нерівності в ОДЗ синуса: $\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right| \leq 1$, отже розвязок нерівності існує.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна х них відповідає куту $\pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$ або $\frac{2\pi}{3}$, а друга – куту $arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$або $\frac{\pi}{3} + 2\pi$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{\sqrt{2}}{3}$, другої дуги – меншу (рис. 2.3.).

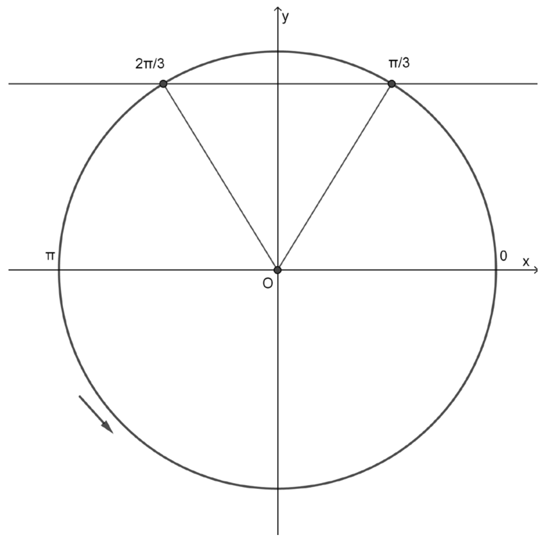


Рис. 2.3. Одиничне коло з прямою $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = cosx$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n\right), n \in Z.$$

Відповідь. $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi n\right), n \in Z.$

Приклад 2.51. $cosx \geq \frac{1}{2}$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $x = \frac{1}{2}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна х них відповідає куту $arccos\frac{1}{2}$ або $\frac{\pi}{3}$, а друга – куту $-arccos\frac{1}{2}$ або

$-\frac{\pi}{3}$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{1}{2}$, другої дуги – меншу (рис. 2.4.).

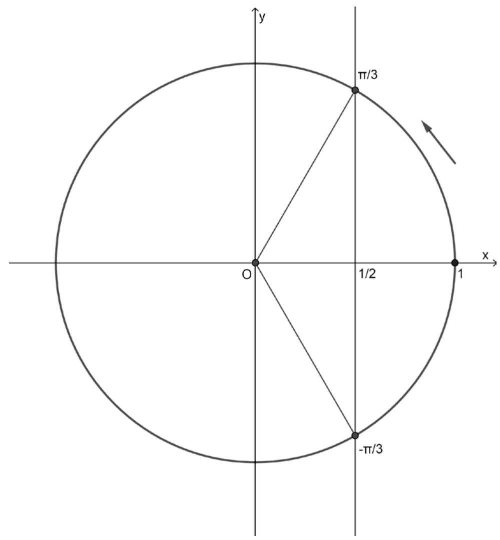


Рис. 2.4. Одиничне коло з прямою $x = \frac{1}{2}$

Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = cosx$, отримаємо відповідь:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

Відповідь. $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z$.

Приклад 2.52. $tgx \geq 2$ (Мерзляк проф. рівень, 2018).

Розв’язання.

Враховуючи, що функція $y = tgx$ є зростаючою на кожному з проміжків виду

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z,$$

отримаємо:

$$arctg2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Відповідь. $arctg2 + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

II.Використання рівносильних перетворень, зокрема зведення до алгебраїчної нерівності за схемою:1) до одного аргумента; 2) до однієї функції; 3) заміна змінної

Приклад 2.53. Розв'язати нерівність $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Бевз, 2018).

Уведемо нову змінну $t = 2x$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (див. рис. 2.5.)

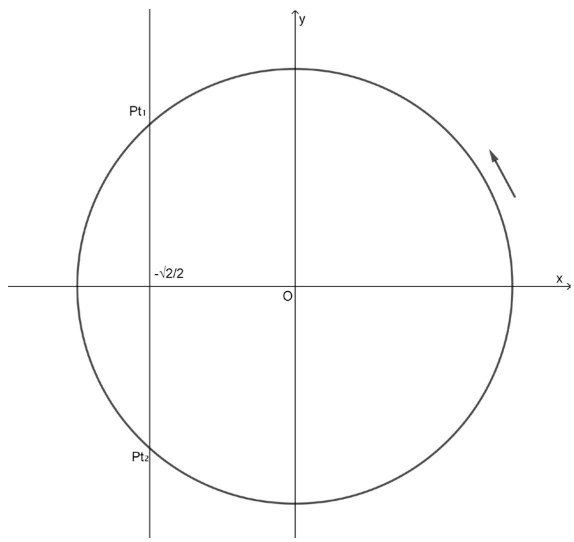


Рис. 2.5. Одиничне коло з множиною точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Знайдемо значення $t_1 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ і $t_2 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$.

Запишемо умову, за якої точка t належить дузі P_1P_2:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z.$$

Повернемося до початкової змінної: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

$$-\frac{3\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right], k\epsilon Z$.

Приклад 2.54. Розв’язати нерівність $\frac{1}{2} < sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Уведемо нову змінну $t = \frac{x}{2}$ й одержимо нерівність $\frac{1}{2} < \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. На одиничному колі виділимо множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4) (див. рис. 2.6.).

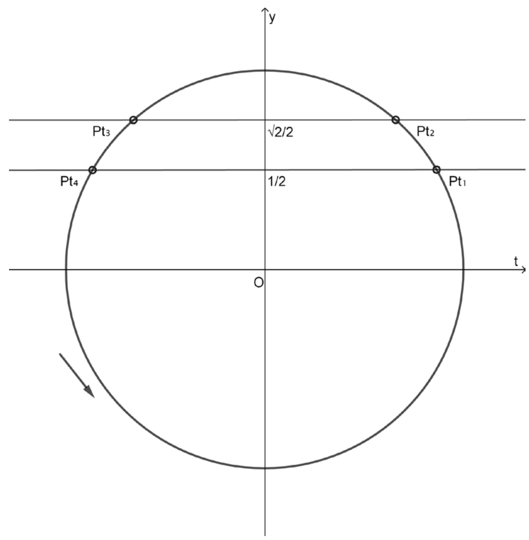


Рис. 2.6. Одиничне коло з множиною точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Знайдемо значення t_1, t_2, t_3, t_4 здійснюючи обхід кола проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2, t_3 < t_4$.

$$t_1 = arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};\ t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4};\ t_3 = \pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$t_4 = \pi - arcsin\ \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Тоді маємо: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k\epsilon Z$ і $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$. Розв’яжемо одержані нерівності відносно X: $\frac{\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 4\pi k, k\epsilon Z$ і $\frac{3\pi}{2} + 4\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi k, k\epsilon Z$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 4\pi k;\ \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right), k\epsilon Z$.

ІІІ.За допомогою тригонометричного кола

Приклад 2.55. Розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$ (Бевз проф. рівень, 2018).

Запишемо задану нерівність у вигляді подвійної нерівності: $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$. Для цього виділимо на одиничному колі множини точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4) (див. рис.2.7.).

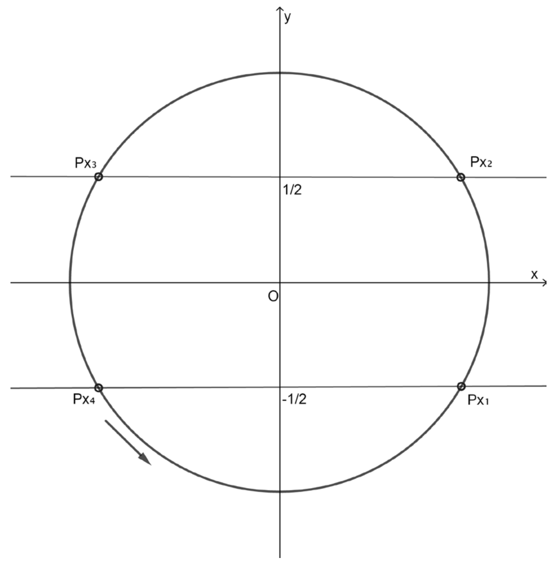


Рис. 2.7. Одиничне коло з множиною точок,

ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$

Знайдемо значення x_1, x_2, x_3, x_4, виконуючи обхід проти годинникової стрілки $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$, $x_1 = arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $x_2 = arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $x_3 = \pi - arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$; $x_4 = \pi + arcsin\frac{1}{2} = \frac{7\pi}{6}$.

Запишемо умови, за яких точка x є розв'язком нерівності: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon Z$.

Запишемо відповідь, врахувавши, що дуги P_1P_2 і P_3P_4 симетричні відносно початку координат.

Відповідь. $(-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k)$, $k\epsilon Z$.

IV.Використання методу інтервалів

Приклад 2.56. Розв'язати нерівність $sin2xcos4x > 0$ (Істер проф. рівень, 2018).

Розв'язання

1. ОДЗ: $x \in (-\infty : +\infty)$.

2. Нулі функції $f(x) = sin2xcos4x$.

Розв'яжемо рівняння $sin2xcos4x = 0$

$$sin2x = 0, 2x = \pi k, k \in Z, x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z;$$

$$cos4x = 0, 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

3. Знаходимо точки розриву: функція неперервна на всій числові осі.

4. Знаходимо період нерівності, який дорівнює періоду функції $f(x)$

$$T = \text{НСК}(T_1; T_2), \text{де } T_1 = \pi, T_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $T = \pi$.

5. Визначаємо, які з коренів рівняння $sin2xcos4x = 0$ заходиться на відрізку довжини в період π.

Якщо $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, то на відрізку $[0; \pi)$ знаходяться: $x = 0$ (при $k = 0$), $x = \frac{\pi}{2}$ (при $k = 1$), $x = \pi$ (при $k = 2$).

Якщо $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$, то на відрізку $[0; \pi)$ знаходяться: $x = \frac{\pi}{8}$ (при $n = 0$), $x = \frac{3\pi}{8}$ (при $n = 1$), $x = \frac{5\pi}{8}$ (при $n = 2$), $x = \frac{7\pi}{8}$ (при $n = 3$).

6. Позначаємо нулі функції $f(x)$ на відрізку $[0; \pi)$ і визначаємо знак функції $f(x)$ на кожному з утворених проміжків (див. рис. 2.8.).

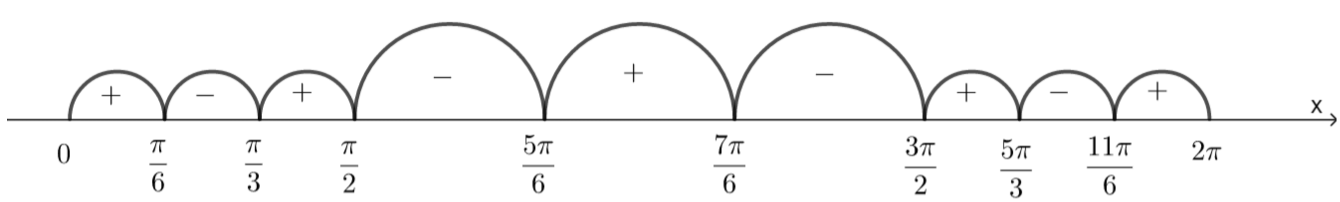


Рис. 2.8. Нулі функції на числовому проміжку.

7. У відповідь записуємо відповідь як об'єднання проміжків, на яких функція $f(x)$ набуває додатних значень, враховуючи період функції

$$x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k\right), k \in Z.$$

Відповідь. $\left(\pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k\right), k \in Z.$

2.2. Аналіз завдань зовнішнього незалежного оцінювання з теми дослідження

Сертифікаційна робота зовнішнього незалежного оцінювання з математики складається із завдань чотирьох форм:

I.Розв'язання завдань ЗНО з готовою відповіддю.

В кожному завдані цього розділу по п'ять відповідей, із яких лише одна правильна. Оберіть правильний, за Вашою думкою, варіант відповіді.

Приклад 2.57. Укажіть найменший додатній корінь рівняння $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ (Пробне ЗНО, 2013).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$

Розв'язання

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0; x + \frac{\pi}{3} = \pi n, n \in Z; x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Найменший додатній корінь буде при $n = 1$.

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Відповідь. $-\frac{2\pi}{3}$.

Приклад 2.58. Розв'яжіть рівняння $tg(3x) = \sqrt{3}$ (ЗНО, 2014).

А	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Б	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$
В	$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$
Г	$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$
Д	$x = \frac{\pi}{9} + \pi n, n \in Z$

Розв'язання

$$3x = arctg\sqrt{3} + \pi n, n \in Z, 3x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Приклад 2.59. Яке з наведених рівнянь не має коренів (Математика. Комплексна підготовка до ЗНО та ДПА, 2020)?

А	Б	В	Г	Д
$sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$tgx = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$ctgx = \frac{-2}{\sqrt{3}}$	$tgx = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$cosx = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Розв'язання

Оскільки найпростіші тригонометричні рівняння з tgx і $ctgx$ завжди мають корені, то шукаємо відповідь лише в А і Д. Найпростіші тригонометричні рівняння з $sinx$ і $cosx$ мають корені лише тоді, коли число після знака рівності лежить в межах відрізку $[-1; 1]$. Оскільки $\sqrt{3}$ менше за 2, то дріб $\frac{\sqrt{3}}{2}$ менше за одиницю і рівняння А має корені, а дріб $\frac{2}{\sqrt{3}}$ більше за одиницю і рівняння Д не має коренів.

Приклад 2.60. Розв'яжіть рівняння $2sinx = 1$ (ЗНО, 2009).

А	$\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$
Б	$(-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$
В	$(-1)^k\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$

Г	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$
Д	$(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$

Розв’язання

З даного рівняння маємо $sinx=\frac{1}{2}$. Тоді $x=(-1)^k arcsin\frac{1}{2}+\pi k, k\in Z$. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

Відповідь: $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

Приклад 2.61. Розв’яжіть рівняння $3\cdot\frac{sinx}{cosx}=\sqrt{3}$ (ЗНО, 2016).

А	$\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$
Б	$\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$
В	$\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$
Г	$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$
Д	$\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$

Розв’язання

$$3\cdot\frac{sinx}{cosx}=\sqrt{3}; 3\cdot tgx=\sqrt{3}; tgx=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi n, n\in Z, x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

Приклад 2.62. Розв’яжіть рівняння $sinx-\sqrt{3}cosx=0$ (ЗНО, 2008).

А	$-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$
Б	$-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

В	$\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$
Г	$\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$
Д	$\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$

Розв'язання

$$sinx-\sqrt{3}cosx=0|:cosx, tgx-\sqrt{3}=0, tgx=\sqrt{3},$$

$$x=arctg\sqrt{3}+\pi n, n \in Z, x=\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.63. Розв'яжіть рівняння $tg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ (ЗНО, 2007).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$	$\frac{2\pi}{3}+\pi n, n \in Z$	$\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$	інша відповідь

Розв'язання

$$\frac{x}{2}=arctg\sqrt{3}+\pi n, n \in Z; \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z; x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$.

Приклад 2.64. Розв'яжіть рівняння $\cos(3x)=\frac{1}{2}$ (Додаткова сесія ЗНО, 2019).

А	$\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k, k \in Z$
Б	$(-1)^k\pi+3\pi k, k \in Z$
В	$\pm\pi+6\pi k, k \in Z$
Г	$(-1)^k\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\pi k, k \in Z$
Д	$\pm\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\pi k, k \in Z$

Розв'язання

$$3x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z; 3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z; x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k, k \in Z.$$

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k, k \in Z.$

Приклад 2.65. Якщо $2cosa - 5sina = 0$, то $tga =$ (ЗНО, 2020).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-3	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$

Розв'язання

$$2cosa - 5sina = 0|: cosa, 2 - 5tga = 0, -5tga = -2, tga = \frac{2}{5}.$$

Відповідь: $tga = \frac{2}{5}$.

II.Розв'язання завдань ЗНО на відповідність («логічні пари») :

В завданнях даного розділу в кожному із чотирьох рядків інформації, позначених цифрами, оберіть один правильний, за Вашою думкою, варіант відповіді, відмічений буквою.

Приклад 2.66. Установіть відповідність між виразом (1-4) та тотожно рівним йому виразом (А-Д) (Пробне ЗНО, 2015).

1. $1 - cos^2\alpha$ — **А.** $cos^2\alpha$

2. $2\ sin\alpha\ cos\alpha$ — **Б.** $cos2\alpha$

3. $cos^2\alpha - sin^2\alpha$ — **В.** $sin2\alpha$

4. $cos^4\alpha + sin^2\alpha cos^2\alpha$ — **Г.** $-cos2\alpha$

Д. $sin^2\alpha$

Розв'язання

1) $1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha$ Д);

2) $2\ sin\alpha\ cos\alpha = sin2\alpha$ В);

3) $cos^2\alpha - sin^2\alpha cos2\alpha$ Б);

4) $cos^4\alpha + sin^2\alpha\ cos^2\alpha = cos^2\alpha\ (cos^2\alpha + + sin^2\alpha) = cos^2\alpha$ А).

Відповідь:

	А	Б	В	Г	Д
1					X
2			X		
3		X			
4	X				

III.Розв'язання завдань ЗНО з короткою відповіддю :

Розв'яжіть завдання, отримані числові відповіді запишіть у бланк відповідей лише десятковим дробом.

Приклад 2.67. Знайти значення параметра a, при якому корінь рівняння $\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16 + a - x}$ належить проміжку $(\frac{3}{2}; 2)$ (ЗНО, 2013).

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} \sin 5\pi x > 0; \\ 16 + a - x \geq 0. \end{cases}$

Так як квадратний корінь завжди додатній, то $\lg(\sin 5\pi x) \geq 0$ або $\sin 5\pi x \geq 1$, але $|\sin 5\pi x| \leq 1$ значить $\sin 5\pi x = 1$. Тоді $\lg(\sin 5\pi x) = 0$, звідси і $\sqrt{16 + a - x} = 0$.

$\sin 5\pi x = 1$ – найпростіше тригонометричні рівняння.

$$5\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; x = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}k, k \in Z.$$

За умовою $x \in (\frac{3}{2}; 2)$.

$$\frac{3}{2} < \frac{1}{10} + \frac{2}{5}k < 2, k \in Z; \frac{3}{2} - \frac{1}{10} < \frac{2}{5}k < 2 - \frac{1}{10}, k \in Z;$$

$$\frac{7}{5} : \frac{2}{5} < k < \frac{19}{10} : \frac{2}{5}, k \in Z; 3{,}5 < k < 4{,}45, k \in Z; k = 4.$$

Тоді $x = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \cdot 4, x = \frac{17}{10}$.

$1{,}5 < 1{,}7 < 2$ – правильно.

$\sqrt{16 + a - x} = 0 \rightarrow 16 + a - 0 = 0 \rightarrow a = x - 16 \rightarrow a = 1{,}7 - 16 = -14{,}3.$

Відповідь. $-14{,}3$.

Приклад 2.68. Знайдіть найменше значення a,при якому моє розв'язки рівняння $\frac{1}{2}\left(sinx+\sqrt{3}cosx\right)=6-5a-2a^2$ (ЗНО, 2011).

Розв'язання

Перетворимо рівняння

$$\frac{1}{2}sinx+\frac{\sqrt{3}}{2}cosx=6-5a-2a^2; sinxcosx\frac{\pi}{3}+sinx\frac{\pi}{3}=6-5a-2a^2;$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=6-5a-2a^2.$$

Дане тригонометричне рівняння має розв'язки за умови, що права частина рівняння лежить в межах $[-1;1]$.

Маємо систему:

$$\begin{cases}6-5a-2a^2\le 1,\\ 6-5a-2a^2\ge -1;\end{cases}\begin{cases}2a^2+5a-6\ge 1,\\ 2a^2+5a-6\le -1;\end{cases}\begin{cases}2a^2+5a-5\ge 0,\\ 2a^2+5a-7\le 0.\end{cases}$$

Розв'яжемо першу нерівність. $2a^2+5a-5=0$. Знайдемо корені цього рівняння.

$$D=25-4\cdot 2\cdot(-5)=25+40=65, a_1=\frac{-5+\sqrt{65}}{4}, a_2=\frac{-5-\sqrt{65}}{4}.$$

Оцінимо приблизно корені першої нерівності. Оскільки $\sqrt{65}\approx\sqrt{64}=8$, то $a_1\approx\frac{-5+8}{4}\approx 0{,}75;$ $a_1\approx\frac{-5-8}{4}\approx -3{,}25.$ Маємо рисунок (див. рис. 2.9.):

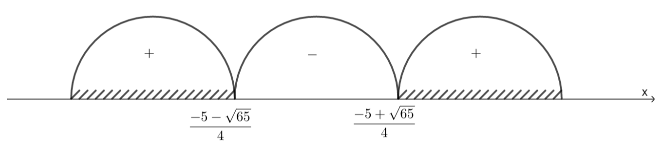


Рис. 2.9. Корені нерівності $2a^2+5a-5\ge 0$

Розв'яжемо другу нерівність. $2a^2+5a-7=0$. Знайдемо корені цього рівняння.

$$D=25-4\cdot 2\cdot(-7)=25+56=81.$$

$$a_1=\frac{-5+\sqrt{81}}{4}=\frac{-5+9}{4}=1, a_2=\frac{-5-\sqrt{81}}{4}=\frac{-5-9}{4}=-3{,}5.$$

Маємо рисунок (див. рис. 2.10.):

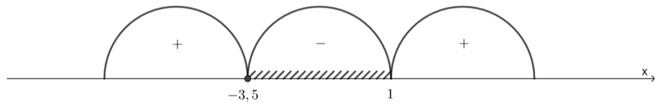


Рис. 2.10. Корені нерівності $2a^2 + 5a - 7 \leq 0$.

Для знаходження розв'язку системи, нанесемо відповіді на одну координатну вісь (див. рис. 2.11.).

Рис. 2.11. Корені системи на числовій прямі

Найменшим значенням із спільної заштрихованої області є число $-3{,}5$.

Відповідь. $-3{,}5$.

IV. Розв'язання завдань ЗНО з розгорнутою відповіддю:

Приклад 2.69. Розв'яжіть систему $\begin{cases} 5cos\frac{\pi y}{2} = x^2 - 8 + 21, \\ y + 5x - 4 = 0. \end{cases}$. Якщо система має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$,то у відповідь запишіть суму $x_0 + y_0$, якщо рівняння має більше, ніж один розв'язок, то у відповідь запишіть кількість усіх розв'язків. (ЗНО, 2010).

$$\begin{cases} 5cos\frac{\pi y}{2} = x^2 - 8 + 21, \\ y + 5x - 4 = 0. \end{cases}$$

1) $-1 \leq cos\frac{\pi y}{2} \leq 1$, тому $-5 \leq 5cos\frac{\pi y}{2} \leq 5$.

Значить, $-5 \leq x^2 - 8 + 21 \leq 5$. Одержимо систему:

$$\begin{cases} x^2 - 8 + 21 \leq 5, \\ x^2 - 8 + 21 \geq -5. \end{cases} \begin{cases} x^2 - 8 + 16 \leq 0, \\ x^2 - 8 + 26 \geq 0. \end{cases} \begin{cases} (x-4)^2 \leq 0, \\ x^2 - 8 + 26 \geq 0. \end{cases}$$

Квадрат числа – величина невід'ємна, тому зпершої нерівності маємо, що $x = 4$. Дискримінант квадратного тричлена $x^2 - 8 + 26$ від'ємний:

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 64 - 104 = -40$, значить, друга нерівність справджується для всіх дійсних значень змінної x. Тоді система набуде вигляду:

$$\begin{cases} x = 4, \\ x \in R. \end{cases}$$

Звідки $x = 4$. Отже, рівняння $5cos\frac{\pi y}{2} = x^2 - 8 + 21$ має зміст лише при $x = 4$. Тоді воно набере вигляду

$$5cos\frac{\pi y}{2} = 5, cos\frac{\pi y}{2} = 1.$$

2) Розглянемо при $x = 4$ друге рівняння заданої в умові системи.

$$y + 5x - 4 = 0; y + 5 \cdot 4 - 4 = 0; y + 16 = 0; y = -16.$$

3) При $y = -16$ рівняння $cos\frac{\pi y}{2} = 1$ є правильною рівністю:

$$cos\frac{\pi y}{2} = cos\frac{\pi \cdot (-16)}{2} = \cos\left(-\frac{16\pi}{2}\right) = \cos\frac{16\pi}{2} = cos8x = cos0 = 1.$$

Отже, розв'язком заданої в умові системи рівнянь є пара чисел $(x_0; y_0)$ таких, що $x_0 = 4, y_0 = -16$.

Їх сума – $x_0 + y_0 = 4 + (-16) = -12$.

Відповідь: 12.

Приклад 2.70. Знайти найбільше значення параметра a, при якому система рівнянь $\begin{cases} (2a-1)sinx + cos = 2, \\ asinx + (2a-1)cosx = a+1 \end{cases}$ має безліч розв’язків (ЗНО, 2014).

$$\begin{cases} (2a-1)sinx + cos = 2, \\ asinx + (2a-1)cosx = a+1, \end{cases} \begin{cases} cos = 2 - (2a-1)sinx, \\ asinx + (2a-1)(2 - (2a-1)sinx) = a+1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} cos = 2 - (2a-1)sinx, \\ (a + (2a-1)^2)sinx = a + 1 - 2(2a-1), \end{cases} \begin{cases} cos = 2 - (2a-1)sinx, \\ (4a^2 - 5a + 1)sinx = 3a - 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} cos = 2 - (2a-1)sinx, \\ (a-1)(4a-1)sinx = 3(a-1). \end{cases}$$

Зауважимо, що при $a = \frac{1}{4}$ друге рівняння системи не має розв’язків; при $a = 1$ друге рівняння системи перетворюється на тотожність, а перше перетворюється на $sinx + cosx = 2$, що не має розв’язків.

$$\begin{cases} cos = 2 - (2a-1)sinx, \\ sinx = \frac{3}{4a-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} cos = \frac{2a+1}{4a-1}, \\ sinx = \frac{3}{4a-1}. \end{cases}$$

Для того, щоб система мала розв'язки, має виконуватись основна тригонометрична тотожність $sin^2x + cos^2x = 1$:

$$(\frac{3}{4a-1})^2 + (\frac{2a+1}{4a-1})^2 = 1,9 + 4a^2 + 4a + 1 = 16a^2 - 8a + 1,$$

$$4a^2 - 4a - 3 = 0, (2a-3)(2a+1) = 0.$$

Отже, система має розв'язки при $a = -0,5$ і при $a = 1,5$, з яких найбільше значення $a = 1,5$.

Відповідь: 1,5.

Приклад 2.71. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x^2 + 7x - 9} + |\sin(\pi x) + 1| = 0$. Якщо рівняння має один корінь , то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше, ніж один корінь, то у відповідь запишіть суму всіх коренів (ЗНО, 2010).

1) Знайдемо область допустимих значень змінної x.

$$2x^2 + 7x - 9 \geq 0.$$

Коренями квадратного тричлена є числа $2x^2 + 7x - 9 = 0$ є числа $-4,5; 1$.

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 49 + 72 = 121.$$

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 + 11}{4} = 1; x_1 = \frac{-7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 - 11}{4} = \frac{-18}{4} = -4,5.$$

Тоді $2(x + 4,5)(x - 1) \geq 0$ (див. рис. 2.12.).

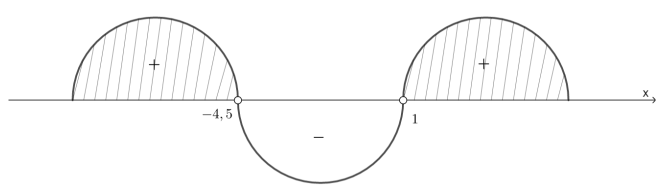


Рис.2.12. Корені нерівності на числовій прямі

Отже, $x \in (-\infty; -4,5] \cup [1; +\infty)$.

2) $\sqrt{2x^2 + 7x - 9} \geq 0$, якщо $x \in (-\infty; -4,5] \cup [1; +\infty)$.

$|\sin(\pi x) + 1| \geq 0$ для всіх дійсних значень x.

Тому їх сума дорівнює нулю, якщо на множині допустимих значень змінної z виконується умова

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+7x-9}=0,\\ |\sin(\pi x)+1|=0.\end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases}2x^2+7x-9=0,\\ \sin(\pi x)+1=0.\end{cases}\begin{cases}x=-4{,}5,\\ x-1,\\ \sin(\pi x)=-1.\end{cases}\begin{cases}x=-4{,}5,\\ x-1,\\ \pi x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.\end{cases}\begin{matrix}x=-4{,}5,\\ x-1,\\ x=-\dfrac{1}{2}+2n, n\in Z.\end{matrix}$$

$$1\neq-\frac{1}{2}+2n, n\in Z. -4{,}5=-\frac{1}{2}+2n, n\in Z, \text{якщо } n=2.$$

Отже, розв’язком системи є число $-4{,}5$.

3) $-4{,}5$ належить області допустимих значень змінної тому воно є коренем заданого в умові рівняння.

Відповідь. $-4{,}5$.

Приклад 2.72. Задано графік $f(x)=1$ та $g(x)=\sin(x)$ (ЗНО, 2020).

Завдання (1-3) виконайте на одному рисунку.

1. Побудуйте графік функції f.
2. Побудуйте графік функції g на проміжку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
3. Позначте на рисунку точку, що є спільною для обох побудованих графіків функцій f й g, і запишіть її координати.
4. Знайдіть множину всіх коренів рівняння $f(x)=g(x)$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$.

Розв’язання

1. $f(x)=1$ – пряма, параллельна осі Ox (див. рис. 2.13.).
2. $g(x)=\sin(x)$ – тригонометрична функція (див. рис. 2.13.).
3. т. $A(\frac{\pi}{2};1)$ – спільна точка.

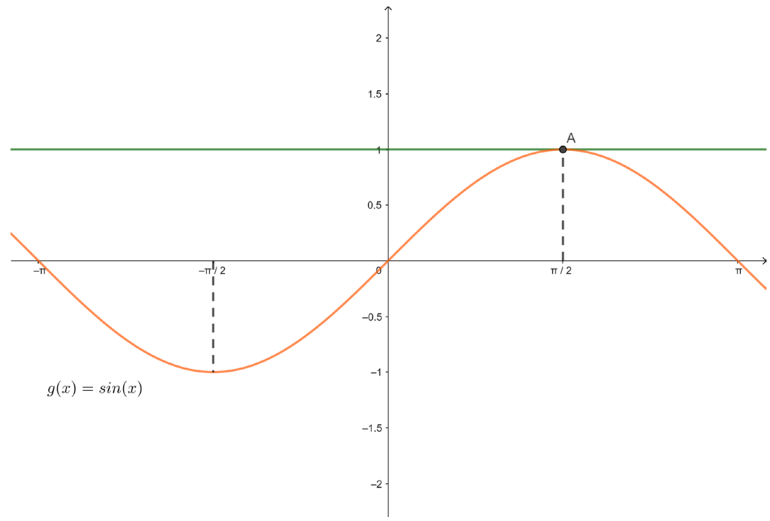


Рис.2.13. Графіки функцій f і g

4. $\sin(x) = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

2.3. Формування математичних компетентностей при вивчені тригонометричних рівнянь та нерівностей в умовах дистанційного навчання

Перевага використання дистанційного навчання в освітньому процесі полягає в можливості підтримувати зв'язок на відстані, коли немає можливості для офлайн навчання. Тоді навчальний процес для учня стає більш індивідуальним, а також потребує активної та якісної самостійної роботи. Під час дистанційного навчання у вихованців формуються такі якості: активність, самовдосконалення, самоконтроль, самостійність, творчість, самоорганізація тощо. Складність дистанційного навчання полягає не тільки в стимулюванні самостійної роботи, а й у вихованні навичок діалогу, щоб учні могли висловлювати різноманітні пропозиції (Методичні рекомендації: організація дистанційного навчання в школі, 2020).

В Україні існують онлайн-сервіси для вивчення математики. Але найкраще віддавати перевагу тим, які відповідають українському плану, рекомендовані МОН, забезпечують зворотній зв'язок та надають доступ вчителю до результатів виконання завдання (Методичні рекомендації: організація дистанційного навчання в школі, 2020).

Для організації та здійснення навчального процесу навчання математики, зокрема вивчення тригонометричних рівнянь та нерівностей необхідно проаналізувати різні онлайн сервіси та вибрати такі, які найкраще допоможуть викласти навчальний матеріал.

Для організації дистанційного навчання можна використовувати портал «NZ.UA», який призначений для всіх учасників навчального процесу: учнів, вчителів, батьків. Переваги та можливості цього порталу полягають у веденні електронного обліку відвідуваності, класних журналів, учнівських щоденників, публікації новин, створення сайту закладу, перегляд розкладу та інформації про школу, статистичні вибірки з внесених даних, зручне спілкування та обмін інформацією між усіма учасниками освітнього процесу.

Для відеоконференції великою популярністю користується сервіс Google Meet. Цей сервіс призначений для індивідуальних та групових занянь (уроків). Користуватись можна як на комп'ютері, так і на планшеті чи смартфоні скачавши спеціальний додаток. До відеоконференції може підключитися будь-який користувач за посиланням або ідентифікатором конференції. Заняття можна запланувати заздалегідь, а також зробити посилання для постійних зустрічей у певний час. При цьому можливе спільне використання екрану для надання документів, електронних таблиць або презентацій.

Для інтерактивних вправ цікавим є сервіс LearningApps.org, у якому можна самостійно створювати завдання різних типів та на різні теми або користуватись уже готовими. Можна використовувати під час демонстрації екрану або для індивідуальних завдань (див. додаток Б).

Варто зауважити що в інтернеті наявні відеоролики з потрібної вам теми, зокрема на каналі Міністерства освіти України, курсах платформ Prometheus, EdEra, та інших джерелах. На YouTube у межах проєкту МОН «Всеукраїнська школа онлайн» розміщуються уроки для учнів 1-11 класів.

Для роботи з відео можна використовувати такі сервіси: screencast-o-matic для запису скрінкастів, edpuzzl для створення інтерактивних відео з запитаннями, вбудованими в хід ролика.

Під час навчання математики важливим інструментом є дошка. Під час дистанційного навчання її заміняють онлайн-дошкою, наприклад IDroo або Drawchat. IDroo містить велику кількість інструментів для введення математичних формул та малювання. Користуватись дошкою можна спільно з учнями, надіславши при цьому посилання-запрошення або під час демонстрації екрану (див. додаток В). Drawchat дозволяє писати та малювати, завантажувати PDF-файли і зображення, а також зберігати створену вами дошку, якою можна ділитись в соціальних мережах. У цьому сервісі можна працювати з камерою та мікрофоном, а для запрошення учасників достатньо відправивши їм URL-посилання (див. додаток В).

Для перевірки знань учнів за допомогою тестів використовуються тести «На урок», «Всеосвіта», сервіс майстер-тест, Google Форми тощо (Додаток Г). Для побудови та демонстрації графіків можна використати програму GeoGebra (Додаток Ж), а для демонстрації навчального матеріалу за допомогою презентацій – Canva, Prezi, PowerPoint, Google Presentations та інші (Додаток Д).

Наведемо декілька цікавих сервісів для вивчення математики: quizizz (популярні вікторини, тести, логічні завдання), mathsisfun (ігри, головоломки та візуалізація).

Використовуючи ці сервіси вчителі можуть розробити цікавий урок в умовах дистанційного навчання (див. додаток А).

2.4. Організація і проведення педагогічного експерименту та аналіз його результатів

Педагогічний експеримент є спеціальним методом дослідження, який визначає ефективність використання різних методів, засобів, форм та видів навчальної діяльності, а також рівень засвоєння знань учнів з конкретної теми (Тверезовська, 2013).

Варто проводити педагогічний експеримент при вивчені нового навчального матеріалу, вивчені результативності методів навчання або нового обладнання, перевірці рівня засвоєння раніше вивченого матеріалу тощо. Під час експерименту дослідник навмисне втручається в процес, який вивчає за допомогою різних методів (Тверезовська, 2013).

Для проведення педагогічного експерименту ми вибрали найпоширенішу форму такої діяльності – порівняльний експеримент, так як робота проводилась паралельно в двох класах, а саме в 10 класі Рівненської ЗОШ 20 та в 10 класі Рівненської ЗОШ 13. Об'єм матеріалу та кількість годин в цих класах однакові, але відмінність полягала у методах навчання. Учні 10 класу Рівненської ЗОШ 20 навчалися за розробленою нами методикою, тому цей клас був експериментальним. 10 клас Рівненської ЗОШ 13 був контрольним, оскільки тут використовувались традиційні методи навчання.

Під час проведення педагогічного експерименту ми ставили перед собою такі завдання:

- сприяти закріпленню знань та умінь учнів з теми дослідження;
- зафіксувати рівень знань учнів з конкретної мети;
- перетворити вивчення нового матеріалу на такий, який буде зрозумілий для всіх учнів;
- перевірити розроблену методику для вивчення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності».

Після проведення експерименту на уроці узагальнення та систематизації знань з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності», де учні 10-х класів повинні були виконати письмову контрольну роботу, нами були виявлені наступні результати дослідження:

Таблиця 6. Відсотковий показник рівня знань учнів під час експерименту

Рівень знань учнів	Відсотковий показник рівня знань учнів	
	Експериментальний 10 клас	Контрольний 10 клас
Початковий	11	16
Середній	27	31
Достатній	41	37
Високий	21	16

Отримані результати можна також побачити на діаграмі (див. рис. 2.14.):

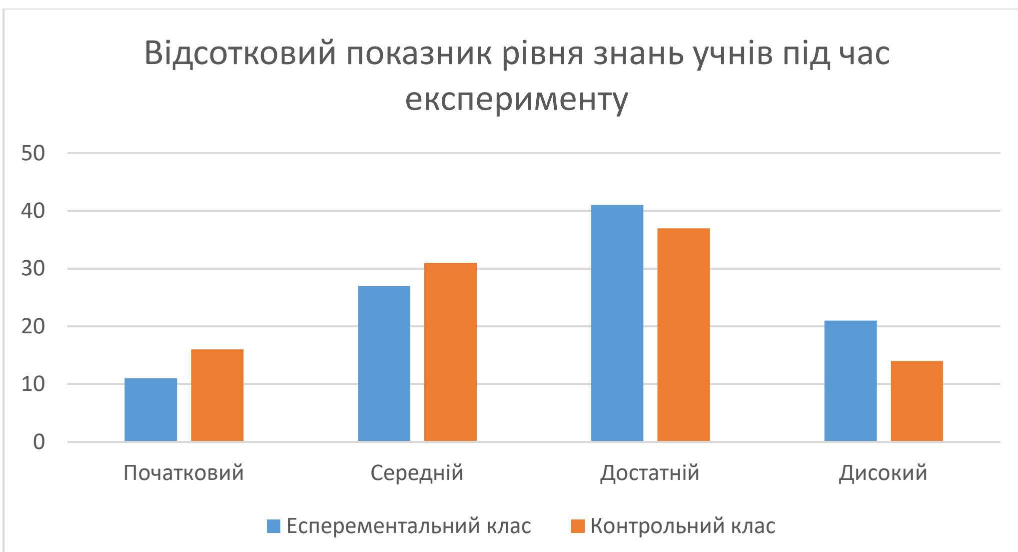


Рис. 2.14. Діаграма

На основі результатів дослідження можна зробити висновок, що учні експериментально класу, які навчалися за розробленою нами методикою засвоїли навчальний матеріал дещо краще, в порівняні з учнями контрольного класу, які навчалися за традиційними методами навчання. Використання алгоритму для розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей значно спрощує засвоєння та розуміння навчального матеріалу.

Висновки до розділу 2

Другий розділ дипломної роботи присвячений методологічним основам дослідження теми «Формування математичних компетентностей при розв’язувані тригонометричних рівнянь та нерівностей», а також розробці методики вивчення тригонометрих рівнянь та нерівностей в умовах дистанційного навчання.

Розроблено та представлено методику розв’язування тригонометричних рівнянь і нерівностей на конкретних прикладах. Досліджено місце тригонометричних рівнянь та нерівностей в програмі зовнішнього незалежного оцінювання. Проведено педагогічний експеримент, задля перевірки ефективності використання розробленої методики.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження, присвячене представленню узагальнених і систематизованих навчально-методичних матеріалів, щодо вивчення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» та методики формування математичних компетентностей старшокласників.

Проаналізована педагогічна, методологічна та наукова література з теми дослідження. Під час аналізу було визначено місце компетентностей в освітньому процесі, а також їх формування. Проведена порівняльна характеристика навчальних програм та підручників з математики для 10-х класі загальноосвітніх закладів до вивчення теми тригонометрія за трьома рівнями: стандарту, профільним та поглибленим. Досліджено тригонометричні функції та обернені до них, їх властивості, найпростіші тригонометричні функції та їх властивості.

Розроблено та представлено методику розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей на конкретних прикладах та в умовах дистанційного навчання. Досліджено місце тригонометричних рівнянь та нерівностей в програмі зовнішнього незалежного оцінювання. Проведено педагогічний експеримент, задля перевірки ефективності використання розробленої методики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Київ: Вища шк., 1989. 367 с.

2. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.

3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: алгебра і початки аналізу. рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.: іл.

4. Бібік Н. М., Єрмаков І. Г., Овчарук О. В. Компетентнісна освіта – від теорії до практики. Київ: Плеяда, 2005. 120 с.

5. Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія): підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту. Київ: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.

6. Вишенський В. А., Іерестюк М. О., Самойленко А. М. Конкурсні задачі з математики: навч. посіб. Київ: Вища школа, 2001. 432 с.

7. Гайштут О. Г., Ушаков Р. П. Тригонометрія. Довідник-задачник. Київ: Магістр, 1997. 256 с.

8. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. [Чинний від 23.11.2011]. Вид. офіц. Київ, 2011. 50 с.

9. Збірник задач з математики з розв'язками / Геворкян Ю. Л. та ін. Харків: Прапор, 1999. 448 с.

10. Зовнішнє незалежно оцінювання 2007 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/296/ (дата звернення 16.11.2021)

11. Зовнішнє незалежно оцінювання 2008 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/292/ (дата звернення 16.11.2021)

12. Зовнішнє незалежно оцінювання 2009 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/151/ (дата звернення 16.11.2021)

13. Зовнішнє незалежно оцінювання 2010 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/123/ (дата звернення 16.11.2021)

14. Зовнішнє незалежно оцінювання 2011 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/122/ (дата звернення 16.11.2021)

15. Зовнішнє незалежно оцінювання 2013 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/1/ (дата звернення 16.11.2021)

16. Зовнішнє незалежно оцінювання 2014 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/138/ (дата звернення 16.11.2021.

17. Зовнішнє незалежно оцінювання 2016 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/191/ (дата звернення 16.11.2021)

18. Зовнішнє незалежно оцінювання 2019 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/346/ (дата звернення 16.11.2021)

19. Зовнішнє незалежно оцінювання 2020 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/400/ (дата звернення 16.11.2021)

20. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і потачки аналізу: (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. заг серед. освіти. Київ: Генеза, 2018. 488 с.: іл.

21. Істер О. С., Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти Київ: Генеза, 2018. 384 с.: іл.

22. Калугіна О. Р. Шляхи формування предметної компетенції на уроках математики. *Освітянин*. 2008. №1

23. Капіносов А. М. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО та ДПА. Профільний рівень і рівень стандарту. Тернопіль: Підручники і посібники, 2020. 480 с.

24. Конет І. М. Тригонометрія: теорія і практика: посібник : Кам'янець-Подільський держ. ун-т. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006. 243 с.

25. Крамор В. С. Повторюємо і систематизуємо шкільний курс алгебри і початків аналізу. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2012. 412 с.: іл.

26. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: поглиблений рівень. Харків: Гімназія, 2018. 416 с.

27. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень. Харків: Гімназія, 2018. 400 с.

28. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.

29. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Тригонометрія: Вчимося розв'язувати задачі. Київ: Генеза, 2008. 352 с.

30. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: https://cutt.ly/5TXyf8j (дата звернення: 10.11. 2021).

31. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://cutt.ly/sTXylyI (дата звернення: 10.11. 2021).

32. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: https://cutt.ly/lTXycZZ (дата звернення: 10.11. 2021).

33. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. Харків: Гімназія, 2010. 416 с.

34. Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Ранок, 2018. 328 с.

35. Організація дистанційного навчання в школі: методичні рекомендації. URL: https://cutt.ly/gTXyuL9 (дата звернення: 10.11. 2021).

36. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів / Машбиць Ю. І., Гокунь О. О, Жалдак М. І. та ін.; за ред. Машбиця Ю. І. / Інститут психології ім. Г.С. Костюка АПН України. Київ: ІЗМН, 1997. 264 с.

37. Перехейда О. М., Ушаков Р. П. Доведення нерівностей. Харків: Основа, 2003. 96 с.

38. Постанова «Про затвердження Державного стандарту початкової освіти». [Чинний від 21.02.2018]. Вид. офіц. Київ, 2018. 35 с.

39. Пробне зовнішнє незалежно оцінювання 2013 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/126/ (дата звернення 16.11.2021).

40. Пробне зовнішнє незалежно оцінювання 2015 рік. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/142/ (дата звернення 16.11.2021)

41. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти: наказ Міністерства освіти і науки України від 26 червня 2018. №696. URL: https://osvita.ua/doc/files/news/11/1126/Math.pdf (дата звернення: 16.11.2021)

42. Раков С. А. «Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти». *Математика в школі.* 2005 р. №5. С. 2-7

43. Резуненко В. О., Ярмак В. О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів. Харків: Основа, 2011. 94 с.

44. Слєпкань З. І Методика навчання математики. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

45. Смоляков А. Н., Севрюков П. Ф. Прийоми розв‘язання тригонометричних рівнянь. *Математика в школі*. 2004. № 1. С. 24-26.

46. Солодченко Л.О. Розвиток життєвих компетентностей на уроках математики. Харків: Ранок, 2011.

47. Тверезовська Н. Т. Методологія педагогічного дослідження: навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури. 2013. 440 с

48. Токарева А. Тригонометричні нерівності. Математика. Додаток до газети «Перше вересня» № 44, 2002 р.

49. Тригонометричні функції. Завдання та розв'язки. Київ: Видавничий дім «Перше вересня», 2016. Серія «Бібліотека «Шкільного світу»».

50. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики. Навчальний посібник; за ред. М. Й. Ядренка. Київ: Техніка, 1999. 504 с.

51. Цукарь А. Я. Вправи практичного характеру з тригонометрії. Математика в школах України. 1993. №3. С. 45–50.

52. Шабашова О. В. Прийоми відбору коренів в тригонометричних рівняннях. Математика в школі. 2004. №1. С.20–24.

53. Шарапа В. Цикл уроків з теми «Тригонометричні рівняння та нерівності». *Математика в школі*. 2007. №1. С. 10-16

ДОДАТКИ

Додаток А

Конспект уроку в умовах дистанційно навчання

Тема уроку: Розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Формування компетентностей:

***Предметна (математична) компетентність*:** розвивати та удосконалювати вміння розв’язувати найпростіші тригонометричні рівняння.

***Соціальна та громадська компетентність*:** самостійне виконання завдань з використанням різних методів та способів із вибором найпростіших, а також застосування самооцінки та взаємооцінки.

Спілкування іноземними мовами: порівнювати математичні терміни з їх походженням з іноземної мови, правильно використовувати терміни в навчальній діяльності.

***Інформаційно-цифрова компетентність*:** створення та використання таблиць та схем, знаходження та застосування додаткової інформації.

***Обізнаність та самовираження у сфері культури*:** співвідношення математики з іншими дисциплінами та з життєвими ситуаціями.

***Спілкування державною мовою*:** правильно та доцільно вживати математичні терміни, аналізувати та робити висновки на основі отриманої інформації, яка подана в різних формах, розширювати словниковий запас під час навчання.

***Ініціативність і підприємливість*:** демонструвати почуття відповідальності та впевненості в собі.

Уміння вчитися впродовж життя: вибирати та використовувати раніше засвоєні знання для виконання завдання.

Основні компетентності у природничих науках і технологіях: визначати важливість математики для інших наук.

Екологічна грамотність і здорове життя: вміння слухати та приймати думку інших, уміло висловлювати власні міркування на основі аналізу інформації.

Очікувані результати: *формулює* означення обернених тригонометричних функцій; *обґрунтовує* формули коренів тригонометричних рівнянь $sinx = a$, $cosx = a, tgx = a, ctgx = a$, *розв'язує* найпростіші тригонометричні рівняння.

Тип уроку: комбінований.

Час проведення уроку: 30 хв. – онлайн-урок; 15 хв. – самостійна робота учнів.

Обладнання*:* роздатковий матеріал: таблиці «Значення тригонометричних функцій деяких кутів», «Тригонометричні формули», «Формули для розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь», підручник, презентація.

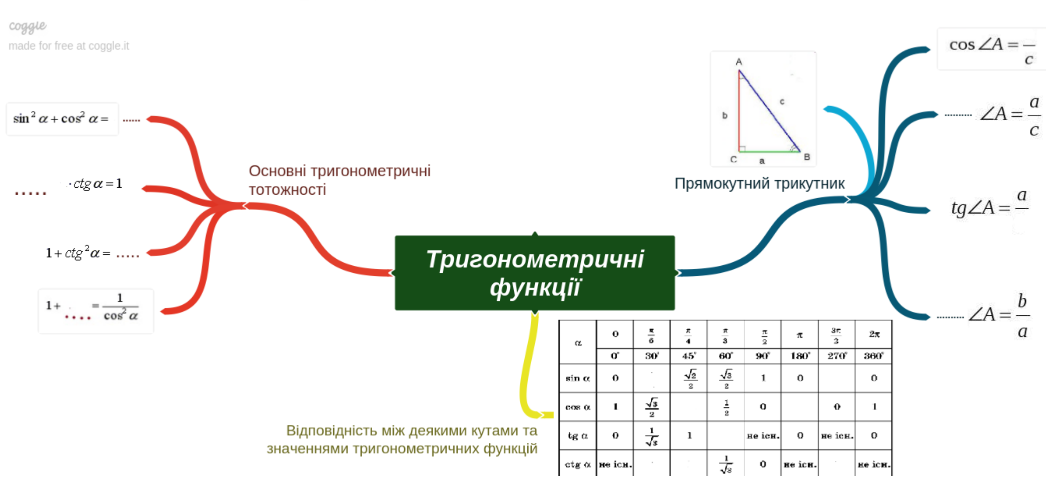
ХІД УРОКУ:

I.Організаційна частина *(онлайн-урок з використання сервісу Google Meet)*

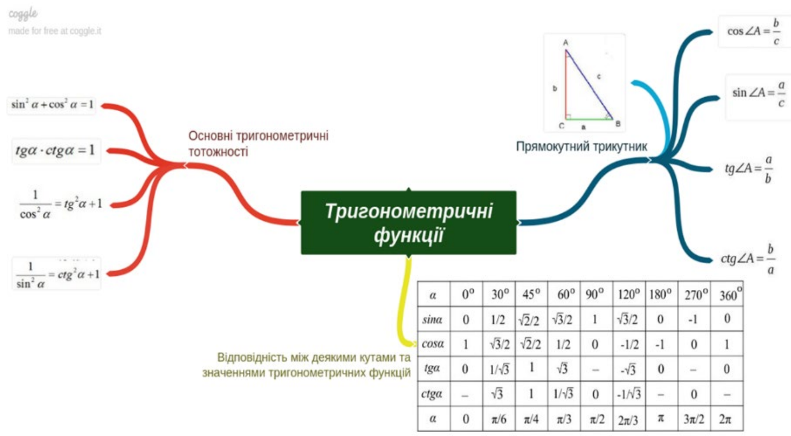
Привітання, перевірка присутності учнів і готовності класу до уроку.

II.Перевірка домашнього завдання *(проходження тесту з прикладами домашнього завдання на сервісі Learning Appshttps: //learningapps.org/2175014)*

III.Актуалізація опорних знань учнів *(онлайн-урок з використання сервісу Google Meet з демонтацією екрана)*



Після роботи з карткою виконується взаємоперевірка з демонстрацією екрану вчителя.



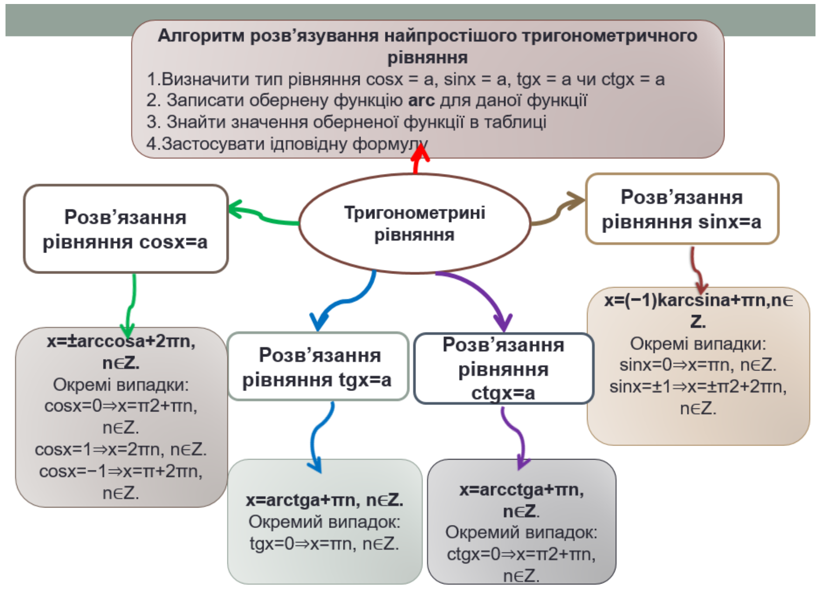
IV.Мотивація навчальної діяльності *(онлайн-урок з використання сервісу Google Meet)*

Розв’язування будь-якого тригонометричного рівняння зводиться до розв’язування найпростіших рівнянь, тому дуже важливо мати навички розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь

V.Повідомлення теми і мети уроку *(онлайн-урок з використання сервісу Google Meet з демонтрацією презентації)*

Найпростіші тригонометричні рівняння та їх розв’язання.

VI.Повідомлення нових знань за планом та побудова інтелект-карти *(онлайн-урок з використання сервісу Google Meet з демонтрацією презентації; складання учнями інтелект-карти з використанням будь-якого сервісу на вибір)*



Розв'язування рівнянь виду $sinx = a$.

Розв'язки рівняння $sinx = a$:

$$x = (-1)^k arcsina + \pi k, k\epsilon Z.$$

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|sinx| \leq 1$.

Окремі випадки розв'язання рівняння $sinx = a$.

Якщо $a = -1$, $sinx = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 0$, $sinx = 0$, то $x = k\pi,\ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 1$, $sinx = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\epsilon Z$.

Розв'язування рівнянь виду $cosx = a$.

Розв'язки рівняння $cosx = a$:

$$x = \pm arccosa + 2\pi k, k\epsilon Z.$$

Якщо $|a| > 1$, то рівняння розв'язків немає, бо $|cosx| \leq 1$.

Окремі випадки

Якщо $a = -1$, $cosx = -1$, то $x = \pi + 2k\pi,\ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 0$, $cosx = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\epsilon Z$.

Якщо $a = 1$, $cosx = 1$, то $x = 2k\pi,\ k\epsilon Z$.

Розв'язування рівнянь виду $tg\ x = a$.

Розв'язки рівняння $tg\ x = a$:

$$x = arctga + \pi k, k\epsilon Z.$$

Якщо $tgx = 0$, то $x = \pi k, k\epsilon Z$.

Розв'язування рівнянь виду $ctg\ x = a$.

Розв'язки рівняння $ctg\ x = a$:

$$x = arcctga + \pi k, k\epsilon Z.$$

Якщо $ctgx = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

VII. Узагальнення набутих знань *(онлайн-урок з використання сервісу Google Meet з демонстрацією онлайн дошки).*

Виконання вправ на дошці і в зошитах (приклади 3,5,7 виконати самостійно).

Розв'яжіть рівняння:

1. $cosx = \sqrt{2}$.

Розв'язання

Оскільки $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, а $cosx \in [-1; 1]$, то рівняння немає розв'язків на множині дійсних чисел: $x \notin R$.

Відповідь. $x \notin R$.

2. $cos4x = \frac{1}{3}$.

Розв'язання

Нехай $4x = t$, тоді $cost = \frac{1}{3}$ – найпростіше тригонометричне рівняння.

Знайдемо корені цього рівняння:

$$t = \pm arccos\frac{1}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z.$$

Повернемося до заміни:

$$4x = \pm arccos\frac{1}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z, x = \pm\frac{arccos\frac{1}{3}}{4} + \frac{\pi k}{2}, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $\pm\frac{arccos\frac{1}{3}}{4} + \frac{\pi k}{2}, k\epsilon Z$.

3. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Розв'язання

$$2x-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi k, k\epsilon Z, 2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z,$$

$$2x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\epsilon Z, x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z.$$

$$x=\frac{7\pi}{24}+\pi k, k\epsilon Z, x=\frac{\pi}{24}+\pi k, k\epsilon Z$$

Відповідь. $\frac{7\pi}{24}+\pi k, \frac{\pi}{24}+\pi k, k\epsilon Z$

4. $2sin\frac{x}{2}=-1.$

Розв'язання

$$2sin\frac{x}{2}=-1;\ sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2};\frac{x}{2}=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k, k\epsilon Z;$$

$$\frac{x}{2}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z|\cdot 2; x=(-1)^{k+1}\frac{2\pi}{6}+2\pi k, k\epsilon Z;$$

$$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\epsilon Z.$

5. $\sin\left(\frac{x}{2}-30\right)=-1.$

Розв'язання

$$\frac{x}{2}-30=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z;\ \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}+30+2\pi k, k\epsilon Z|\cdot 2;$$

$$x=-\pi+60+4\pi k, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $-\pi+60+4\pi k, k\epsilon Z.$

6. $tg\left(\frac{x}{2}-\pi\right)=1.$

Розв'язання

$$\frac{x}{2}-\pi=arctg1+\pi k, k\epsilon Z;\ \frac{x}{2}-\pi=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z;$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi + \pi k, k\epsilon Z;\ \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z| \cdot 2;$$

$$x = \frac{5\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

7. $ctg\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1.$

Розв'язання

$$3x + \frac{\pi}{4} = arcctg(-1) + \pi k, k\epsilon Z;\ 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z;$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z;\ 3x = \frac{2\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z;\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z;$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k\epsilon Z.$

8. $sinxcos2x - cosxsin2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Розв'язання

$$sinxcos2x - cosxsin2x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(x - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(-x) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k\epsilon Z;$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$

VIII.Підбиття підсумків уроку. Рефлексія

Проходження тесту «Найпростіші тригонометричні рівняння» з використанням сервісу На урок (https://naurok.com.ua/test/nayprostishi-trigonometrichni-rivnyannya-31968.html)

Рефлексія

«Дерево успіху» – зелений лист – без помилок, жовтий лист – 1 помилка, червоний лист – 2-3 помилки.

IX.Домашнє завдання.

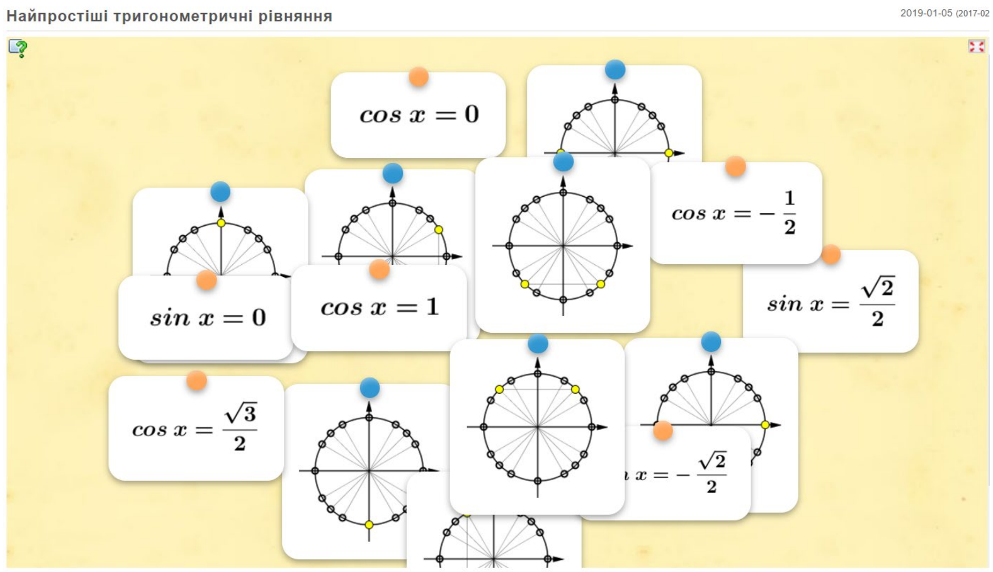
Розв’язати рівняння:

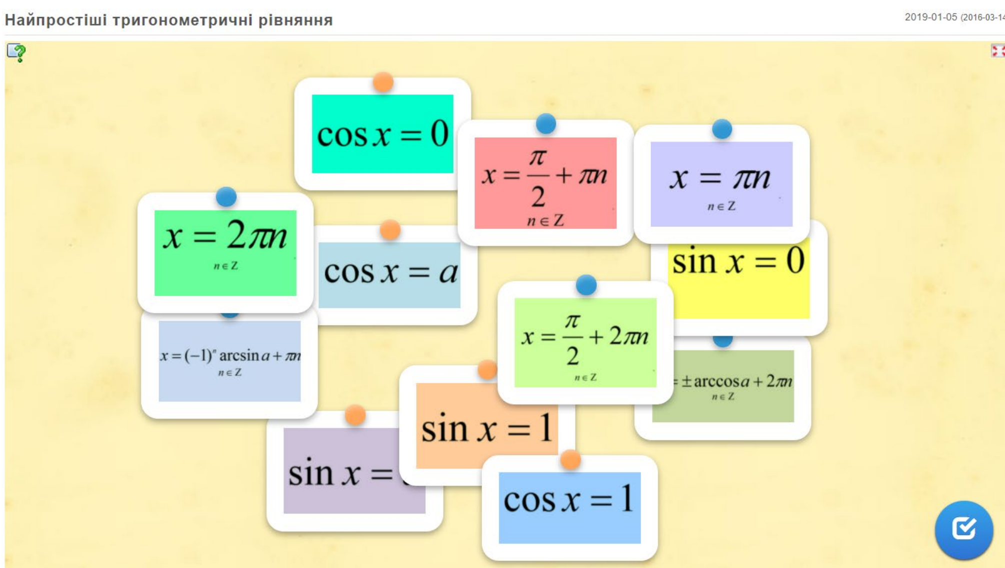
1. $sin\frac{x}{5} = -1$ 2. $2cosx + 3 = 0$ 3. $\sqrt{3}tg2x = 1$.

Додаток Б

Використання сервісу LearningApps.org

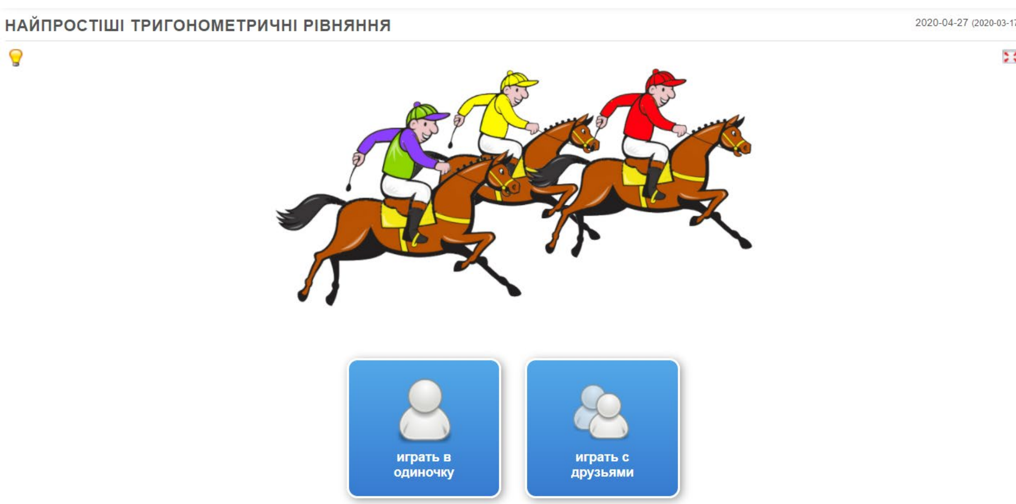
1. Знайди пару – найпростіші тригонометричні рівняння

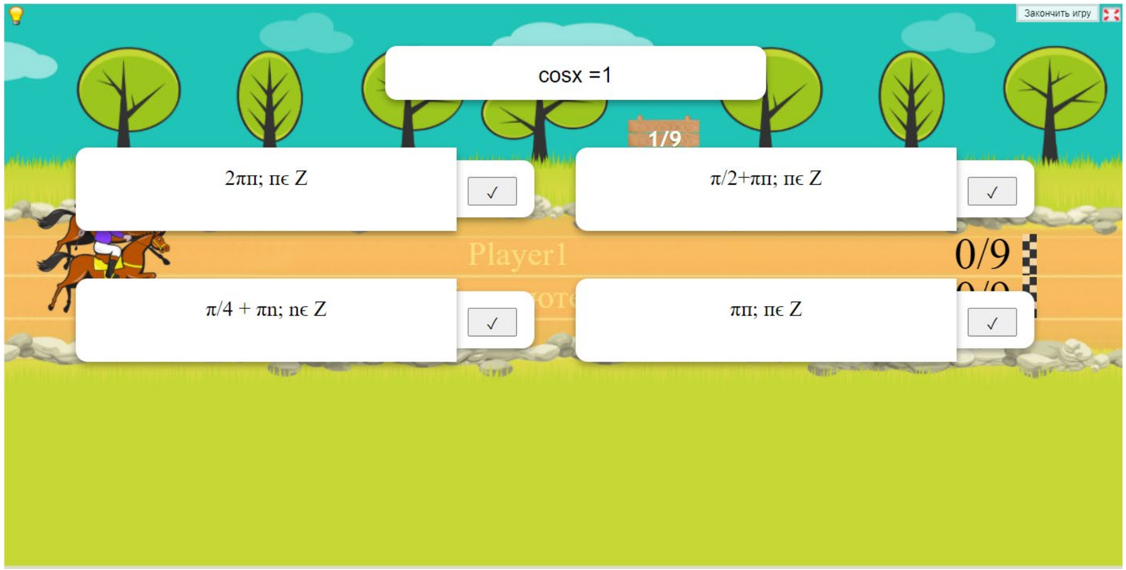


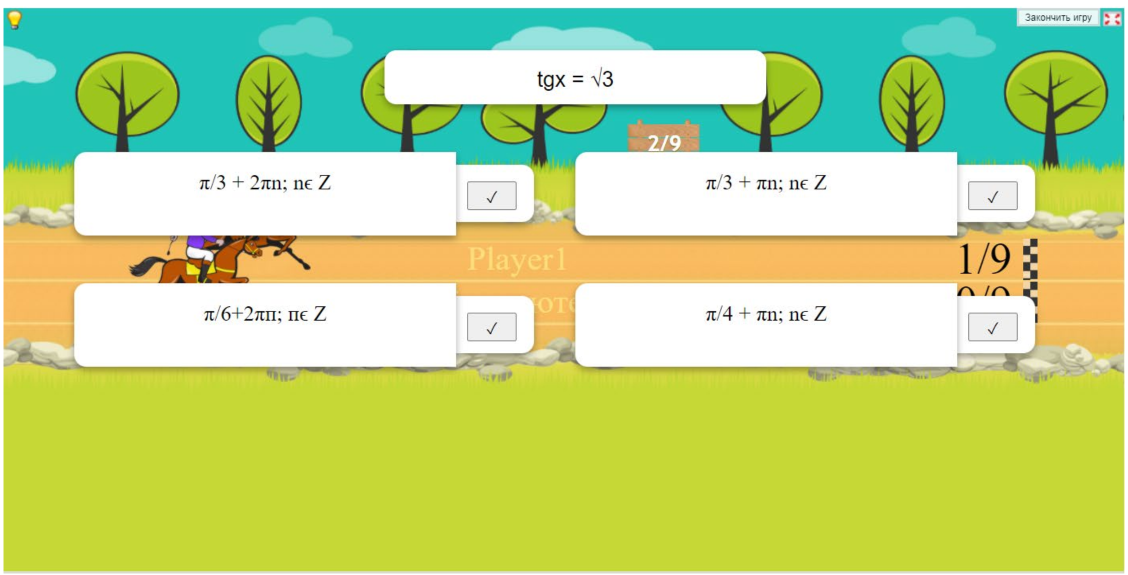


2. Таблиця відповідностей

3. Скачки



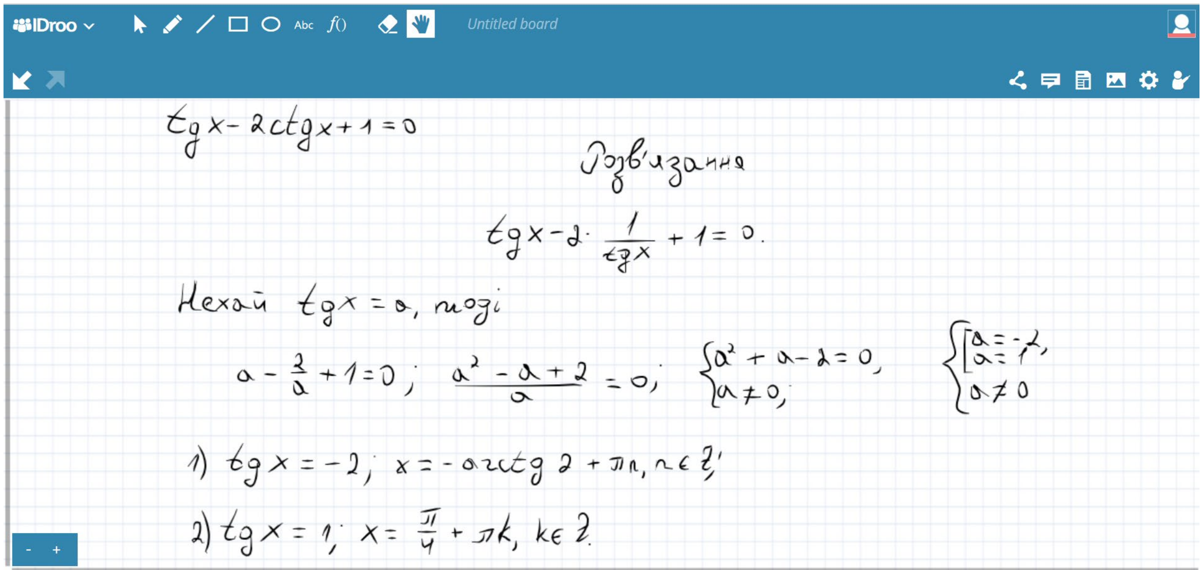

Закончить игру
cosx =1
1/9
2πn; nϵ Z
π/2+πn; nϵ Z
Player1
0/9
π/4 + πn; nϵ Z
πn; nϵ Z

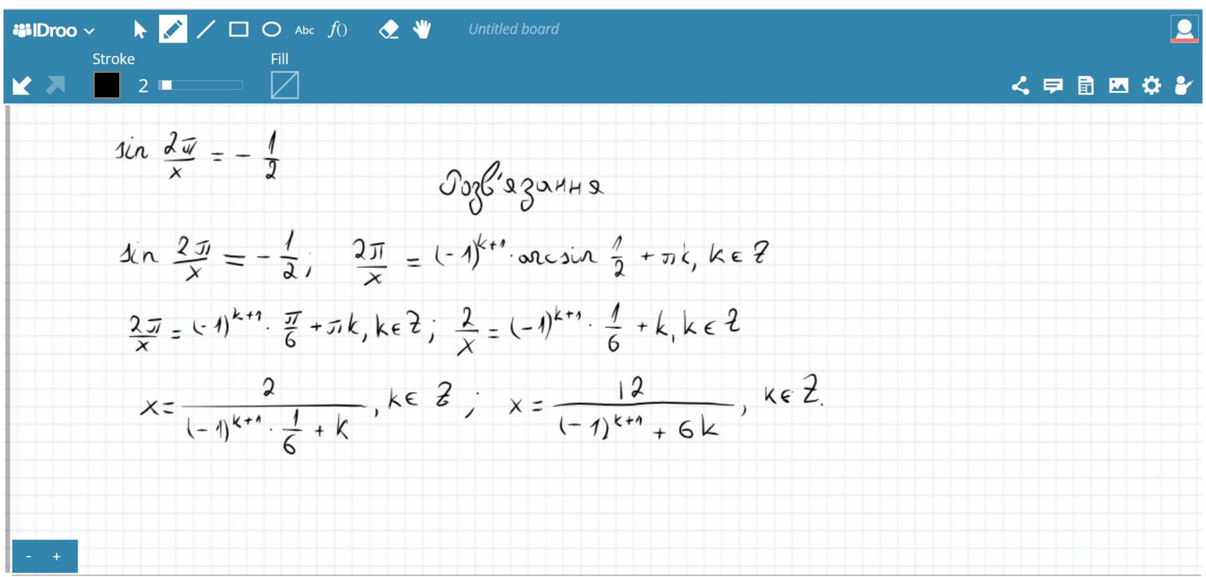

Закончить игру
tgx = √3
2/9
π/3 + 2πn; nϵ Z
π/3 + πn; nϵ Z
Player1
1/9
π/6+2πn; nϵ Z
π/4 + πn; nϵ Z

Додаток В

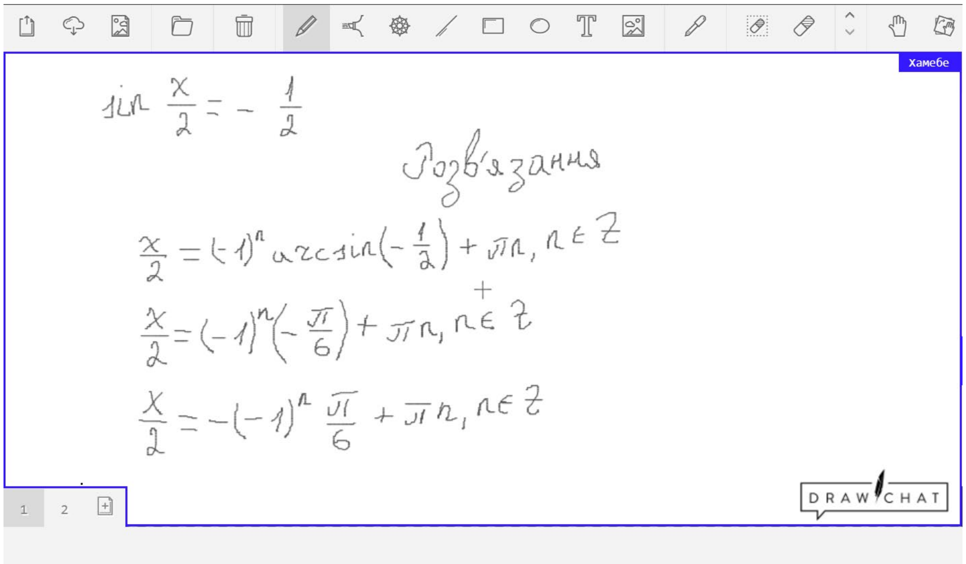
Використання онлайн дошок

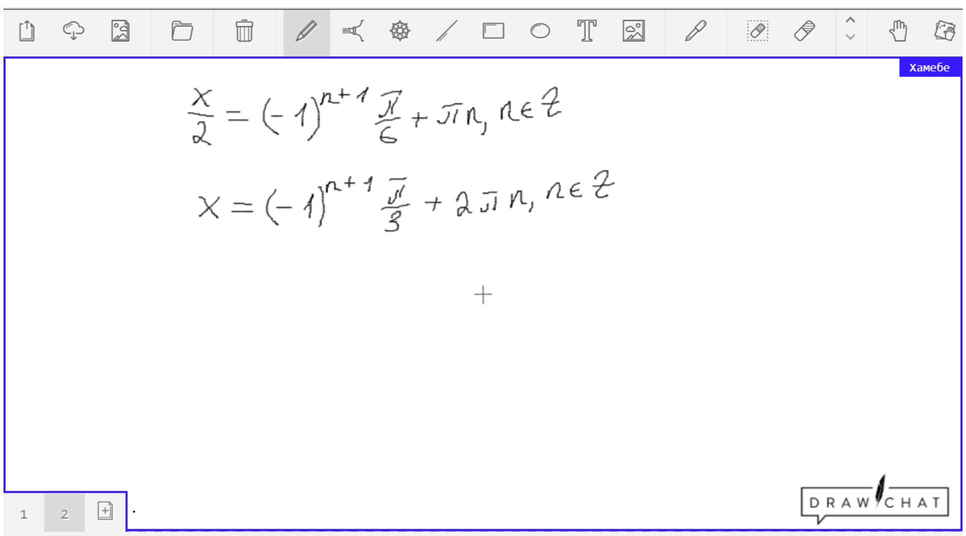
1. IDroo





2. Drawchat


Хамебе
$\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$
Розв'язання
$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in Z$
$\frac{x}{2} = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, n \in Z$
$\frac{x}{2} = -(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$
1
2
DRAWCHAT


Хамебе
$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$
$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
1
2
DRAWCHAT

Додаток Г

Приклади тестування

1. Сервіс MyTest

Тригонометричні рівняння та нерівності

Тест

Завдання 1. Яке з наведених рівнянь не має розв'язків?

Виберіть один із 4 варіантів відповідей:

1) $sinx = \frac{3}{7}$

2) $tgx = 5$

3) $cosx = \frac{7}{5}$

4) $ctgx = -10$

Завдання 2. Знайти корені рівняння $6cosx = 5$.

Виберіть один із 4 варіантів відповідей:

1) $\pm arccos\frac{5}{6} + 2\pi k, k \in Z$

2) Розв'язків немає

3) $(-1)^k arccos\frac{5}{6} + \pi k, k \in Z$

4) $\pm arccos\frac{5}{6} + \pi k, k \in Z$

Завдання 3. Розв'яжіть рівняння $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Виберіть один із 4 варіантів відповідей:

1) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

2) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

3) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

4) $(-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Завдання 4. Розв'яжіть рівняння $sinx = \frac{1}{2}$.

Виберіть один із 4 варіантів відповідей:

1) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

2) $x = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

3) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

4) $x = (-1)^n\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Завдання 5. Розв'яжіть рівняння $8sinx = 7$.
Виберіть один із 4 варіантів відповідей:

1) $\pm arcsin\dfrac{7}{8} + \pi k, k \in Z$

2) $(-1)^k arcsin\dfrac{7}{8} + \pi k, k \in Z$

3) Розв'язків немає

4) $(-1)^k arcsin\dfrac{7}{8} + 2\pi k, k \in Z$

Завдання 6. При яких значеннях x правильна рівність $\dfrac{cosx}{sinx} = 9$?
Виберіть один із 4 варіантів відповідей:

1) $arcctg9 + \pi k, k \in Z$

2) Розв'язків немає

3) $arctg9 + 2\pi k, k \in Z$

4) $arcctg9 + 2\pi k, k \in Z$

Завдання 7. Укажіть відповідність між рівнянням та його розв'язками
Вкажіть відповідність для всіх 4 варіантів відповідей:

1) $2\pi k, k \in Z$

2) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

3) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

4) $\pi k, k \in Z$

5) $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$

__ $cos2x = 1$

__ $ctg\frac{x}{2} = 1$

__ $sin2x = 0$

__ $tg\frac{x}{2} = 0$

Завдання 8. Укажіть відповідність між рівнянням та його розв'язками

Вкажіть відповідність для всіх 4 варіантів відповідей:

1) $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

3) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

4) $x = \pi n, n \in Z$

__ $cosx = -1$

__ $sinx = 1$

__ $tgx = 0$

Завдання 9. Установити відповідність між нерівністю та її розв'язками

Вкажіть відповідність для всіх 4 варіантів відповідей:

1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

3) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

4) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$

$cosx<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$sinx<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tgx<\frac{\sqrt{3}}{3}$

Завдання 10. Розв'язати рівняння $2sinxcosx=0$.

Виберіть один із 4 варіантів відповідей:

1) $x=2\pi n, n \in Z$

2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$

3) $x=\frac{\pi n}{2}, n \in Z$

4) $x=\pi+2\pi n, n \in Z$

Завдання 11. Розв'язати рівняння $3ctg\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$.

Виберіть один із 4 варіантів відповідей:

1) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$

2) $x=\frac{2\pi}{3}+\pi n, n \in Z$

3) $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n, n \in Z$

4) $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$

Завдання 12. Розв'язати нерівність $2sinx-\sqrt{3}\geq 0$.

Виберіть один із 4 варіантів відповідей:

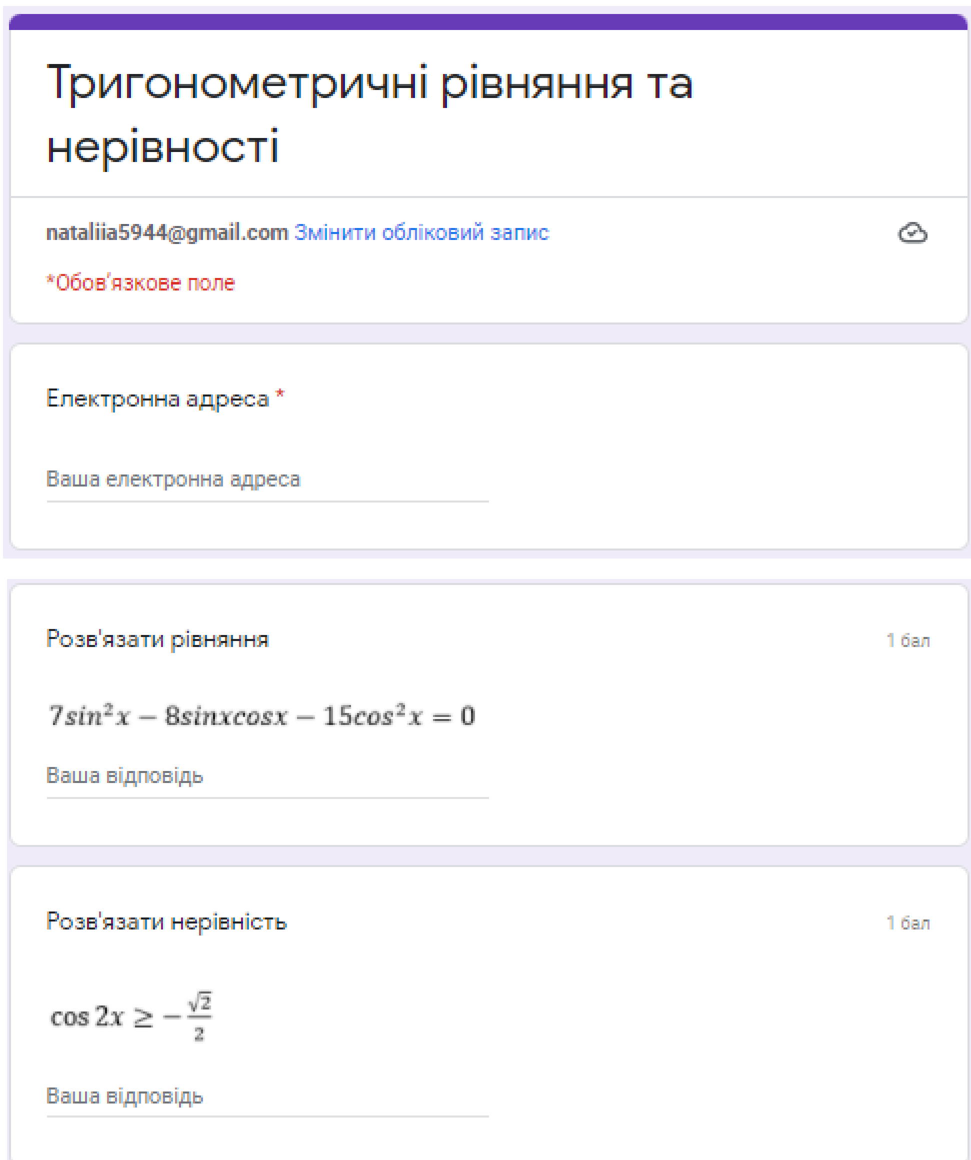
1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

4) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

2. Google Форми



Тригонометричні рівняння та нерівності

nataliia5944@gmail.com Змінити обліковий запис

*Обов'язкове поле

Електронна адреса *

Ваша електронна адреса

Розв'язати рівняння — 1 бал

$7sin^2x - 8sinxcosx - 15cos^2x = 0$

Ваша відповідь

Розв'язати нерівність — 1 бал

$\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ваша відповідь

Розв'яжіть рівняння ctg (3x) = 9. 1 бал

$\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}9+\frac{\pi k}{3}, k \in Z$

1

$3+\pi k, k \in Z$

2

$\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}9+\pi k, k \in Z$

3

$\operatorname{arcctg}3+\pi k, k \in Z$

4

$\frac{\pi}{3}+\pi k, k \in Z$

5

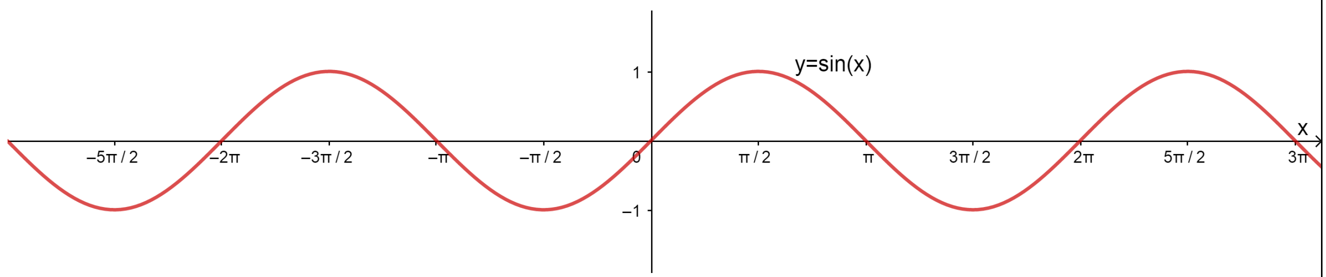
Додаток Д

Використання програми GeoGebra

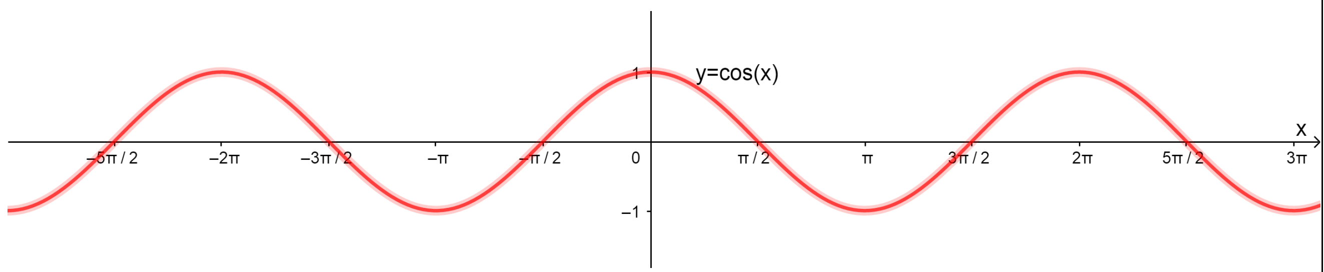
Графіки тригонометричних функцій

Таблиця 1

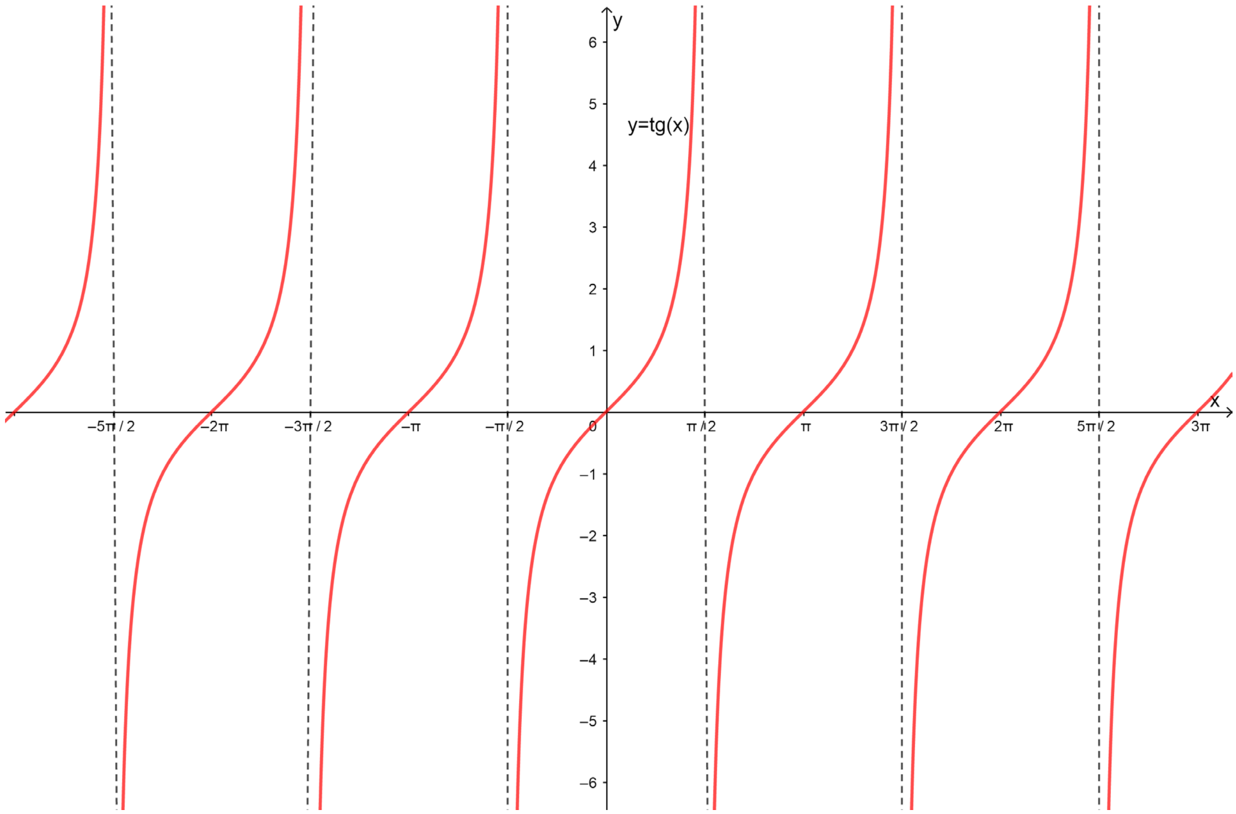
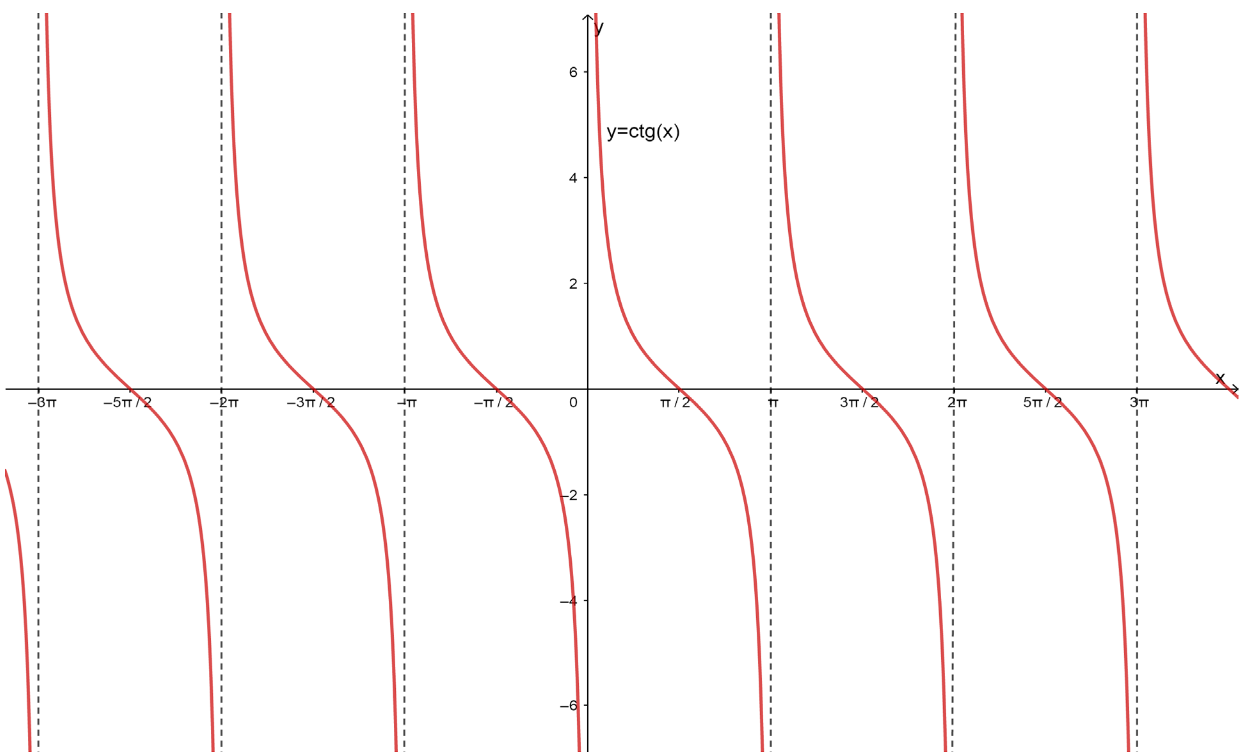
Графік функції $y = sinx$ називається синусоїдою.



Графік функції $y = cosx$ називається косинусоїдою.

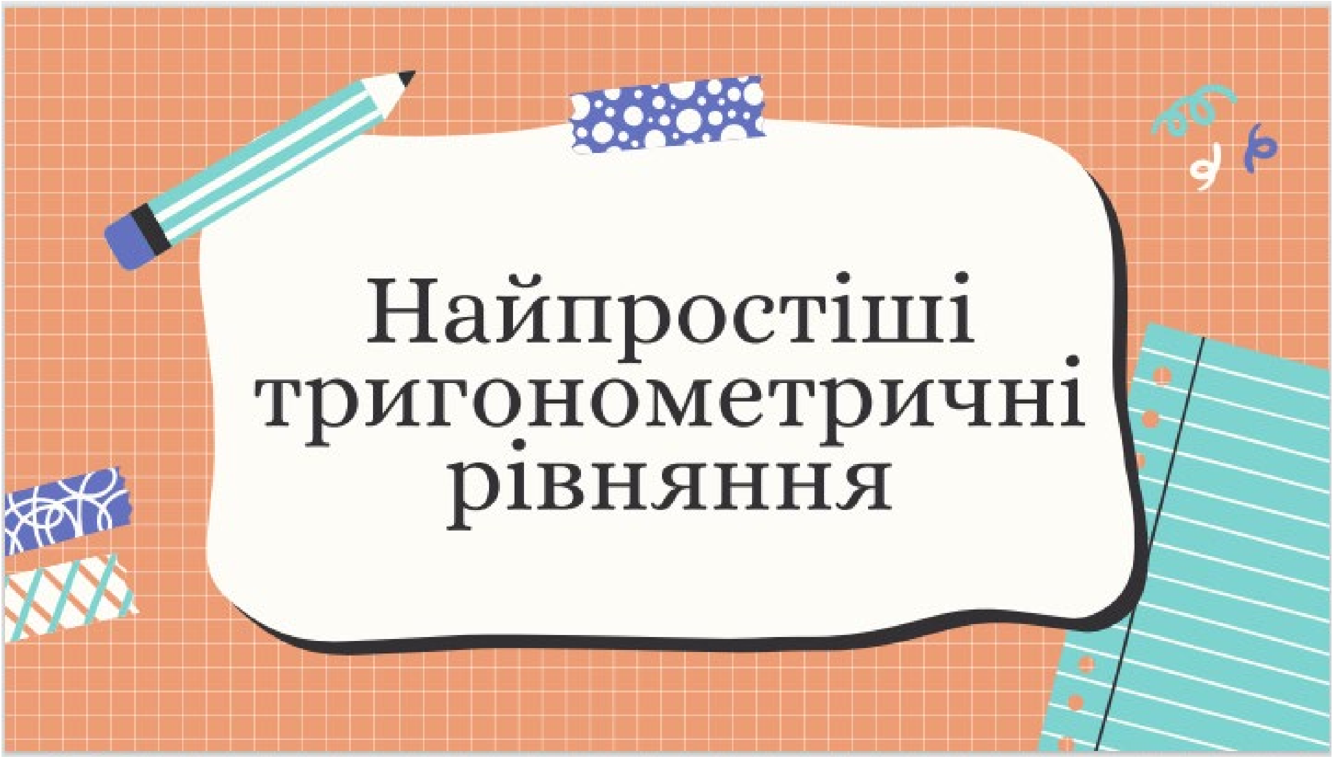


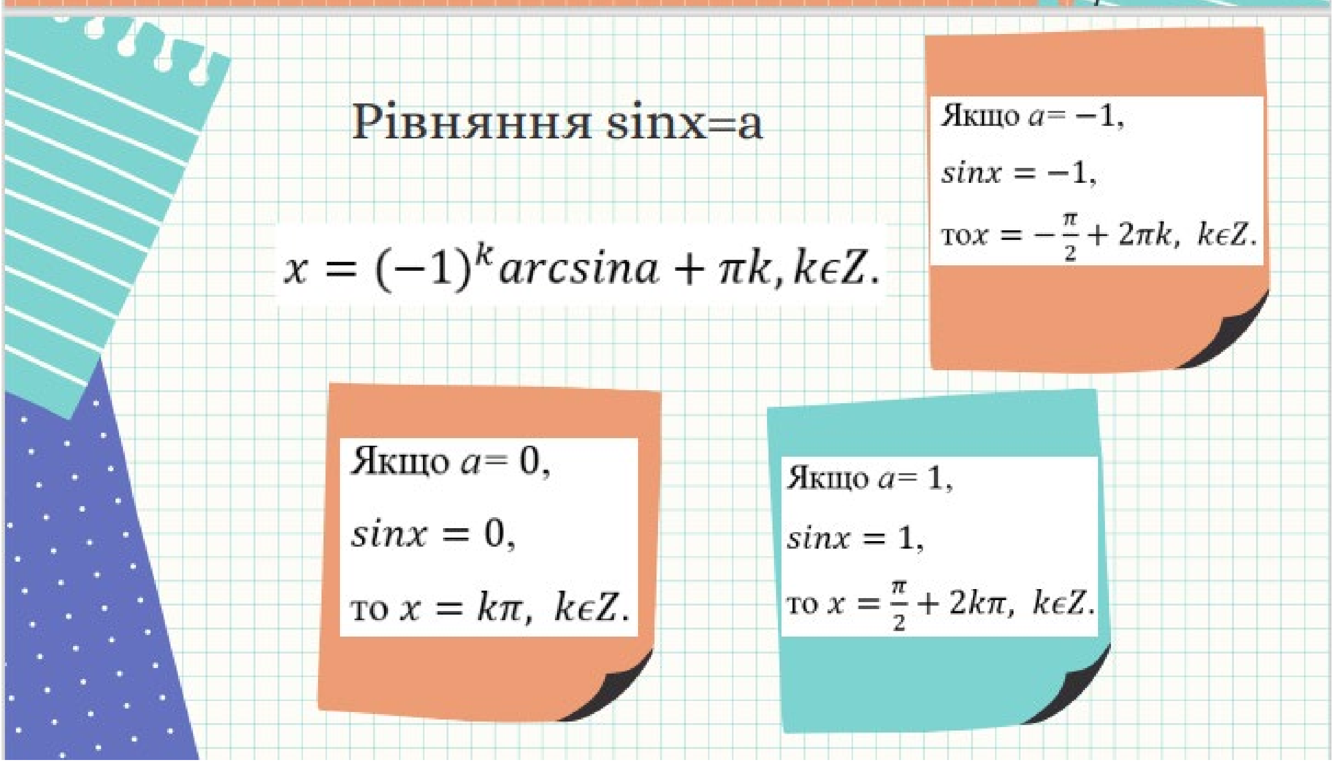
Продовження таблиці 1

Графік функції $y = tgx$ називається тангенсоїдою. 
Графік функції $y = ctgx$ називається котангенсоїдою. 

Додаток Ж

Використання програми Canva для створення презентацій





Рівняння cosx=a

$$x = \pm arccosa + 2\pi k, k\epsilon Z.$$

Якщо $a = -1$,
$cosx = -1$,
то $x = \pi + 2k\pi,\ k\epsilon Z.$

Якщо $a = 0$,
$cosx = 0$,
то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\epsilon Z.$

Якщо $a = 1$,
$cosx = 1$,
то $x = 2k\pi,\ k\epsilon Z.$

Рівняння tgx=a

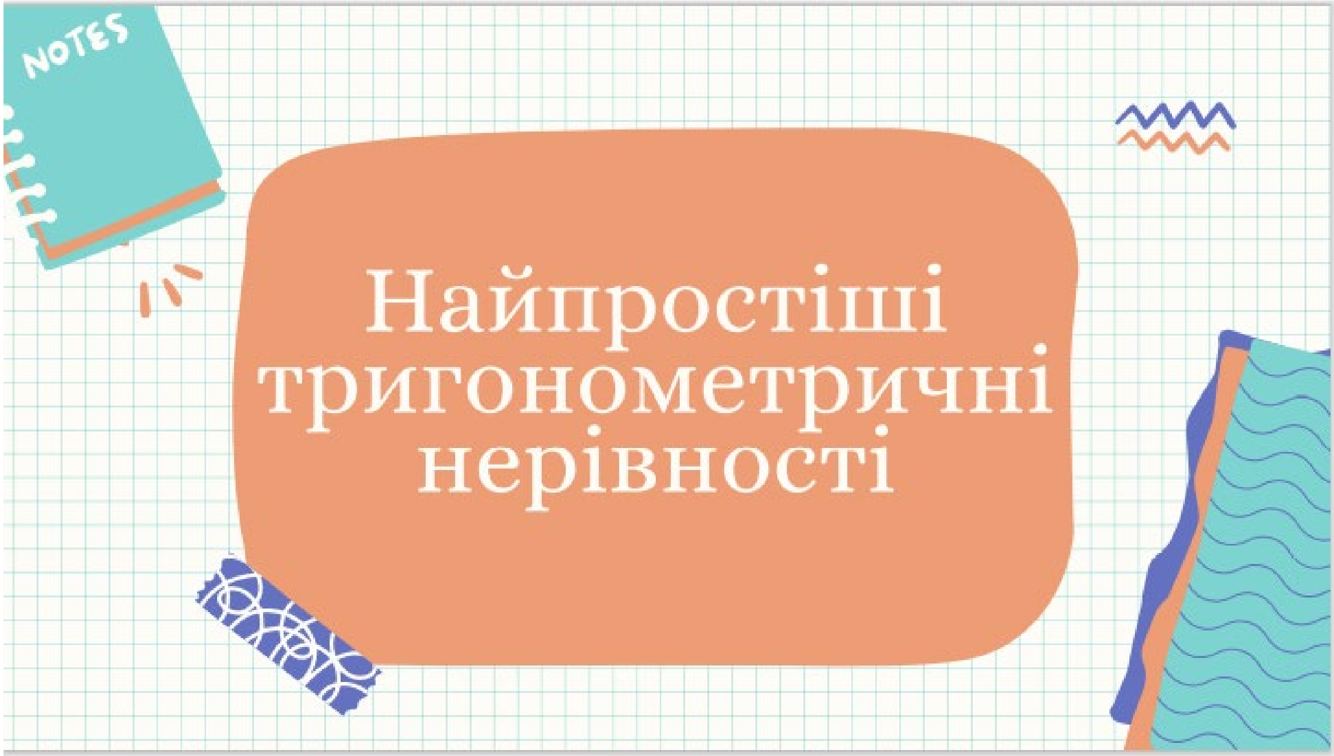
$$x = arctga + \pi k, k\epsilon Z.$$

Рівняння ctgx=a

$$x = arcctga + \pi k, k\epsilon Z.$$

Якщо $tgx = 0$, то $x = \pi k, k\epsilon Z.$

Якщо $ctgx = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z.$


NOTES
Найпростіші тригонометричні нерівності


Нерівності sinx>a; sinx<a
Якщо $a < -1$, то $x \in R$.
Якщо $a < -1$, то розв'язків немає.
Якщо $-1 \leq a < 1$, то $arcsina + 2\pi n < x < \pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z$.
Якщо $-1 \leq a < 1$, то $-\pi - arcsina + 2\pi n < x < arcsina + 2\pi n, n \in Z$.
Якщо $a \geq 1$, то розв'язків немає.
Якщо $a \geq 1$, то $x \in R$.

Нерівності cosx<a; cosx>a

Якщо $a \leq -1$,

то розв'язків немає.

Якщо $a < -1$,

то $x \in R$.

Якщо $-1 < a \leq 1$,

то $arccosa + 2\pi n < x < 2\pi - arcsina + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $-1 \leq a < 1$,

то $-arccosa + 2\pi n < x < arcscosa + 2\pi n, n \in Z$.

Якщо $a > 1$,

то $x \in R$.

Якщо $a \geq 1$,

то розв'язків немає.

$$arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n, n \in Z.$$

Нерівністі tgx>a;tgx<a

Нерівністі ctgx>a;ctgx<a

$$arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z.$$

$$\pi n < x < arcctga + \pi n, n \in Z.$$

Приклад. $cos\pi x^2 = 1$.

Розв'язання.

Маємо:

$$\pi x^2 = 2\pi n, n \in Z; x^2 = 2n, n \in Z.$$

Оскільки $x^2 \geq 0$, то $2n \geq 0$, тобто $n \in N \cup \{0\}$.

Тепер можна записати: $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$

Відповідь. $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in N \cup \{0\}$.

Приклад. $sin\frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання.

$$sin\frac{2\pi}{x} = -\frac{1}{2}; \frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$\frac{2\pi}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \frac{2}{x} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k, k \in Z;$$

$$x = \frac{2}{(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{6} + k}, k \in Z; x = \frac{12}{(-1)^{k+1} + 6k}, k \in Z.$$

Відповідь. $\frac{12}{(-1)^{k+1}+6k}, k \in Z$.

Приклад. $tg\frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$.

Розв'язання.

Маємо:

$$\frac{2x}{3} = arctg(-\sqrt{3}) + nk, k \in Z; \frac{2x}{3} = -\frac{\pi}{3} + nk, k \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z.$$

Відповідь. $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}nk, k \in Z$.

Приклад. $ctgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання.

За формулою $x = arcctga + \pi k, k\epsilon Z$. маємо:

$$x = arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, k\epsilon Z; x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k\epsilon Z.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} + \pi k, k\epsilon Z$.

Додаток К

Контрольна робота

Тема. Тригонометричні рівняння і нерівності

Варіант 1

1. Знайдіть $arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$

2. Які з рівнянь: а) $sinx = 0$; б) $3sinx = 6$; в) $cosx = -\sqrt{5}$; г) $tgx - 3 = 0$ мають розв'язки ?

А	Б	В	Г	Д
а)	а), в) і г)	б) і в)	в)	а) і г)

3. Які з кутів: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $600°$; г) $390°$ є розв'язками рівняння $tgx - \sqrt{3} = 0$?

А	Б	В	Г	Д
а) і б)	в)	б) і г)	а), в) і г)	б) і в)

Розв'яжіть рівняння (4-7)

4. $tg\frac{x}{4} - 1 = 0.$

А	$\pi + \pi n, n \in Z$
Б	$\pi + 4\pi n, n \in Z$
В	$\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$
Г	$\pm\pi + 2\pi n, n \in Z$
Д	$\pi + 2\pi n, n \in Z$

5. $2sin3x + \sqrt{2} = 0.$

А	$\pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$
Б	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$
В	$(-1)^{n}\pi + 3\pi n, n \in Z$
Г	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$
Д	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$

6. $ctg\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0.$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi n}{3}, n \in Z$	$\pi n, n \in Z$	$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$	$\frac{3\pi}{8} + 3\pi n, n \in Z$	$3\pi n, n \in Z$

7. $sin^2 2x + 2sinxcosx = 2.$

А	$(-1)^{n}\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
Б	$-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$
В	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
Г	$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$
Д	$\pi + 4\pi n, n \in Z$

8. **Розв'яжіть нерівність:** $\sqrt{3}tg(\pi - x) - 1 < 0.$

А	$-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$
Б	$\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$
В	$-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$
Г	$\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$
Д	$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Варіант 2

1. Знайдіть $arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$

2. Які з рівнянь: а) $cosx=0{,}3$; б) $2sinx=3$; в) $tgx=-7$; г) $cosx-2=0$ мають розв’язки ?

А	Б	В	Г	Д
а) і в)	а), в) і г)	б) і в)	а), б), в) і г)	в) і г)

3. Які з кутів: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $-30°$; г) $225°$ є розв’язками рівняння $2tgx+1=3$?

А	Б	В	Г	Д
а) і б)	б) і г)	б)	а), в) і г)	в) і г)

Розв’яжіть рівняння (4-7)

4. $2cosx-\sqrt{2}=0.$

А	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$
Б	$(-1)^n\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$
В	$\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$
Г	$\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$
Д	$\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

5. $tg2x+\sqrt{3}=0.$

А	$\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z$
Б	$-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$
В	$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$
Г	$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$
Д	$-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

6. $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=1.$

А	$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$
Б	$\frac{\pi}{6}+2\pi n, \pi k; k, n\in Z$
В	$\frac{2\pi}{3}+2\pi n, 2\pi k; k, n\in Z$
Г	$\frac{4\pi}{3}+4\pi n, 4\pi k; k, n\in Z$

Д	$\pm\frac{\pi}{2}+6\pi n, n \in Z$

7. $cos2x+5sinx+2=0.$

А	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$
Б	$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$
В	$\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$
Г	$\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$
Д	$\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$

8. **Розв'яжіть нерівність:** $2sin3x+\sqrt{3}>0.$

А	$(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3};\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi n}{3})$
Б	$(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3};\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3})$
В	$(-\frac{\pi}{9}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n)$
Г	$(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3})$
Д	$(-\frac{2\pi}{3}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n)$

Додаток Л

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

Таблиця 1.

Аргумент α		Функції			
градуси	радіани	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$0°$	0	0	1	0	∞ (не визначений)
$15°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18°$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36°$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54°$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$75°$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞ (не визначений)	0

Продовження таблиці 1

$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
$180°$	π	0	-1	0	∞ (не визначений)
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞ (не визначений)	0
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	1
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$
$360°$	2π	0	1	0	∞ (не визначений)

Додаток М

Тригонометричні тотожності

Основні тригонометричні тотожності:

1. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1,$
2. $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha},$
3. $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha},$
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$
5. $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha},$
6. $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}.$

I.Формули додавання:

7. $\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta,$
8. $\sin(\alpha - \beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta,$
9. $\cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta,$
10. $\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta,$
11. $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}, \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$
12. $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}, \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$
13. $ctg(\alpha + \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}, \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$
14. $ctg(\alpha + \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}, \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$

II.Формули кратних аргументів

15. sin2α = 2sinαcosα,
16. $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha,$
17. $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, n, k, \in Z,$
18. $ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \alpha \neq \pi k, n, k, \in Z,$
19. $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha;$

20. $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$;

21. $tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n, \in Z$;

22. $ctg3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1-3ctg^3\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n, \in Z$.

III. Формули пониження степеня

23. $cos^2\alpha = \frac{1+cos2\alpha}{2}$;

24. $sin^2\alpha = \frac{1-cos2\alpha}{2}$;

25. $tg^2\alpha = \frac{1-cos2\alpha}{1+cos2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

26. $ctg^2\alpha = \frac{1+cos2\alpha}{1-cos2\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z$;

27. $cos^3\alpha = \frac{3cos\alpha + cos3\alpha}{4}$;

28. $sin^3\alpha = \frac{3sin\alpha + sin3\alpha}{4}$.

IV. Формули половинного аргументу

29. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$;

30. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$;

31. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$;

32. $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}}, \alpha \neq 2\pi n, n \in Z$;

Зауваження. У цих формулах знак «+» або «–» обирається в залежності від того, який чверті знаходиться кут $\frac{\alpha}{2}$.

33. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z$;

34. $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z$.

V. Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток

35. $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

36. $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;

37. $cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

38. $cos\alpha - cos\beta = -sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\beta-\alpha}{2}$;

39. $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

40. $tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{cos\alpha cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

41. $ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha sin\beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z$;

42. $ctg\alpha - ctg\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{sin\alpha sin\beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z$;

43. $cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45° - \alpha) = \sqrt{2}sin(45° + \alpha)$;

44. $cos\alpha - sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45° - \alpha) = \sqrt{2}cos(45° + \alpha)$;

45. $tg\alpha + tg\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha \cdot sin\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \pi n, n, k \in Z$;

46. $tg\alpha - tg\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot sin\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \pi n, n, k \in Z$;

47. $tg\alpha + ctg\alpha = \frac{2}{sin2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z$;

48. $tg\alpha - ctg\alpha = -2ctg2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Зауваження. Деякі допоміжні тригонометричні тотожності:

49. $1 + cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2}$;

50. $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$;

51. $1 + sin\alpha = 2cos^2(45° - \frac{\alpha}{2})$;

52. $1 - sin\alpha = 2sin^2(45° - \frac{\alpha}{2})$;

53. $1 + tg\alpha = \frac{\sin(45°+\alpha)}{cos45° \cdot cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45°+\alpha)}{cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

54. $1 - tg\alpha = \frac{\sin(45°-\alpha)}{cos45° \cdot cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45°-\alpha)}{cos\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

55. $1 + tg\alpha tg\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

56. $1 - tg\alpha tg\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

57. $ctg\alpha ctg\beta + 1 = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{sin\alpha \cdot sin\beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z;$

58. $1 - tg^2\alpha = \frac{cos2\alpha}{cos^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

59. $1 - ctg^2\alpha = -\frac{cos2\alpha}{sin^2\alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in Z;$

60. $sin^2\alpha - sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta);$

61. $cos^2\alpha - cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\beta-\alpha);$

62. $sin^2\alpha - cos^2\beta = -\cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta);$

63. $sin^4\alpha - cos^4\beta = 1 - \frac{1}{2}sin^2 2\alpha = \frac{1}{4}(3 + cos4\alpha);$

64. $sin^6\alpha - cos^6\beta = 1 - \frac{3}{4}sin^2 2\alpha = \frac{1}{8}(5 - cos4\alpha);$

65. $sin^8\alpha - cos^8\beta = \frac{1}{32}(cos^{24}\alpha + 14cos4\alpha - 17);$

66. $tg^2\alpha - tg^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)}{cos^2\alpha \cdot cos^2\beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

67. $ctg^2\alpha - ctg^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\beta-\alpha)}{sin^2\alpha \cdot cin^2\beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in Z;$

68. $tg^2\alpha - sin^2\alpha = tg^2\alpha \cdot sin^2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

69. $ctg^2\alpha - cos^2\alpha = ctg^2\alpha \cdot cos^2\alpha, \alpha \neq \pi n, n \in Z.$

VI. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

70. $sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$

71. $cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)];$

72. $sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)];$

73. $sin\alpha \cdot sin\beta \cdot sin\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta) - -\sin(\alpha+\beta+\gamma)];$

74. $sin\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta) + +\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$;

75. $sin\alpha \cdot sin\beta \cdot cos\gamma = \frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta) - -cos(\alpha+\beta+\gamma)]$;

76. $cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha- -\beta) + cos(\alpha+\beta+\gamma)]$;

Зауваження. Деякі допоміжні тригонометричні тотожності:

77. $sin\alpha \cdot \sin(60° - \alpha) \cdot \sin(60° + \alpha) = \frac{1}{4} sin3\alpha$;

78. $cos\alpha \cdot \cos(60° - \alpha) \cdot \cos(60° + \alpha) = \frac{1}{4} cos3\alpha$;

79. $tg\alpha \cdot \mathrm{tg}(60° - \alpha) \cdot \mathrm{tg}(60° + \alpha) = tg3\alpha$;

80. $ctg\alpha \cdot \mathrm{ctg}(60° - \alpha) \cdot \mathrm{ctg}(60° + \alpha) = ctg3\alpha$.

VII. Формули, що виражають тригонометричні функції через тангенс половинного аргументу

81. $sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$;

82. $cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$;

83. $tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}, \alpha, \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

84. $ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}, \alpha, \neq \pi n, n \in Z$.

VIII. Формули зведення (таблиця 2.)

Формули зведення

Таблиця 2.

Кути / Функції	$90° - \alpha$ $\frac{\pi}{2} - \alpha$	$90° + \alpha$ $\frac{\pi}{2} + \alpha$	$180° - \alpha$ $\pi - \alpha$	$180° + \alpha$ $\pi + \alpha$	$270° - \alpha$ $\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$270° + \alpha$ $\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$360° - \alpha$ $2\pi - \alpha$	$360° + \alpha$ $2\pi + \alpha$
sin	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$
cos	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$	$cos\alpha$
tg	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
ctg	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$