

Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
магістерського рівня
на тему:

Дидактичне забезпечення до вивчення теми «Числові послідовності»
в класах поглибленого вивчення математики

Виконала: студентка 2 курсу магістратури
групи М-М-21
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Лопачук Юлія Юріївна

Керівник: канд. пед. наук, проф. кафедри
математики з методикою викладання
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц., викл.
Рівненського економіко-технологічного
фахового коледжу НУВГП
Сяський В. В.

Рівне – 2021 рік

Зміст

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. НАУКОВО – ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ.....	7
1.1. З історії виникнення послідовностей та прогресій.....	7
1.2. Основні вимоги до викладання теми «Числові послідовності» в поглибленому курсі алгебри	8
1.3. Особливості вивчення числових послідовностей за шкільними підручниками 9, 10 класів	13
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ»	18
2.1. Введення поняття числові послідовності. Арифметична та геометрична прогресія.....	18
2.2. Тестові завдання з теми дослідження в системі математичної підготовки школярів	21
2.3. Деякі випадки застосування числових послідовностей при розв’язуванні олімпіадних задач	23
2.5. Задачі на числову послідовність у завданнях ЗНО	28
РОЗДІЛ 3. ДИДАКТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПО ТЕМІ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ» ПРИ ДИСТАНЦІЙНОМУ НАВЧАННІ.....	45
3.1. Дидактичне забезпечення. Організація дистанційного навчання математики.....	45
3.2. Підготовка та методика створення відеоуроків з математики	59
3.3. Classtime як допомога вчителю математики для дистанційного навчання при вивченні теми «Числові послідовності»	69
3.5. Практична перевірка результатів дослідження.....	75
ВИСНОВКИ.....	77
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	79
ДОДАТКИ.....	84

ВСТУП

Нова українська школа – важлива реформа МОН. Головна мета – створити школу, яка дає змогу учням вчитися із задоволенням, не тільки надавати учням знання, а й надавати можливості застосовувати їх у житті [23, С. 38-40].

Математика займає особливе місце в системі знань, накопиченої в історії розвитку людства за сотні років, тому що вона є потужним методом універсального пізнання та вивчення світу. Однією з важливих цілей освіти є забезпечення дітей необхідним рівнем математичної підготовки, яка потрібна для успішного саморозвитку в соціальному середовищі, а також подальший відбір і розвиток спеціальностей, які потребують відповідних математичних знань, умінь і передових математичних засобів, щоб встановити і вивчити реальні закономірності та процеси.

На сьогоднішній день, відповідно до вимог Державного стандарту базової та повної середньої освіти, передбачено вивчення теми «Числові послідовності» у 9 та 10 класах поглибленого рівня.

Наразі, відповідно до вимог національних стандартів базової та повної середньої освіти, відкрито нові спеціальності з математики, які забезпечують умови для поглибленого рівня навчання «послідовності чисел» у 9 -му та 10 -му класах. Тема «Числові послідовності» – це важлива частина курсу математики в середній та старшій школі. Розвиток мислення школярів – це завдання всіх предметів у школі, але навчальна програма з математики відіграє дуже важливу роль завдяки своїм особливостям. Фактично, під час вивчення високоабстрактних предметних понять буде формуватися ідея математичного моделювання, систематично та послідовно впроваджуватись аргументація, чіткі логічні міркування, точність, лаконічність та мовна інформація.

Одним з найважливіших понять у шкільній навчальній програмі з математики є поняття функції. Числова послідовність є однією з найважливіших класів числових функцій, яка з'явилася і розвивалася задовго до створення теорії функцій і була об'єктом незалежного дослідження [5, С. 70].

Проблема числової послідовності, тобто арифметичної прогресії та геометричної прогресії, вперше виникла зі спостереження за природними явищами. Навіть давньоруська збірка «Руська правда» містить інформацію про розведення великої рогатої худоби та бджіл за певний період, про кількість зерна, зібраного з певної ділянки землі тощо.

Дидактичне забезпечення до вивчення числових послідовностей є **актуальним**, оскільки в порівнянні з традиційними методами навчання, яке організовується на основі самостійної роботи, таблиць та використання нових інформаційних технологій для вдосконалення навичок, сприятиме розвитку особистості та формуванню стійкого інтересу до предмета. На перший погляд, важливість цієї невеликої частини шкільної програми полягає в її надзвичайно широких сферах застосування:

- *прогресії у медицині* («Пацієнти приймають ліки згідно з такою схемою: прийом 5 крапель ліків у перший день, а кожного наступного – на 5 крапель більше, ніж попереднього дня. Він приймає 40 крапель ліків, потім випиває 40 крапель протягом 3 днів, а потім зменшує прийом на 5 крапель щодня, поки його прийом не становитиме 5 крапель. Якщо кожен флакон містить 20 мл ліків (тобто 250 крапель), скільки пляшечок ліків повинен купити пацієнт?»);
- *в спорті* (На змаганні по стрільбі за кожен промах з 25 пострілів поспіль в спортсмена будуть відніматись штрафні очки: перший промах – це одне штрафне очко, а кожен наступний – на 0,5 очка більше попереднього. Скільки разів спортсмен влучив у ціль, якщо він отримав 7 штрафних очок?);
- *в банківських розрахунках* («Уявіть, що ви відкрили банківський депозит у сумі a грн. Під t % річних на t років. У вас є два варіанти поведінки: або в кінці кожного року зберігання вкладу знімати відсотки за вкладом, або приходити до банку один раз наприкінці періоду депозиту. Який дохід ви отримаєте в обох випадках?» Щоб дати відповідь на це запитання, ви повинні розв'язувати задачу на геометричну прогресію.);

- *в природі* (Інтенсивність розмноження всіх організмів - це геометрична прогресія. Як ми всі знаємо, бактерії розмножуються шляхом поділу: одна бактерія поділяється на дві; ці дві діляться на дві, в результаті отримаємо чотири бактерії; з цих чотирьох шляхом поділу будемо мати вісім бактерій і т. д.).

Об'єктом дослідження є процес вивчення числових послідовностей в шкільному курсі алгебри.

Предметом дослідження є розробка дидактичних матеріалів до вивчення числових послідовностей.

Мета дослідження полягає в розробці дидактичного забезпечення до вивчення числових послідовностей, яке сприяє підвищенню розуміння, математичному і логічному мисленню в учнів та експериментальної перевірки його ефективності.

Гіпотеза дослідження полягає в тому, що організація навчання в школі на основі розробки самостійних робіт, таблиць, використання нових інформаційних технологій забезпечують покращення вмінь та навичок в порівнянні з традиційною методикою навчання, сприятиме розвитку особистості, формуванню стійкого інтересу до предмета.

Відповідно до гіпотези, мети та змісту ставляться такі основні **завдання**:

- аналіз науково -методичної літератури та шкільних підручників;
- дослідження та обробка вибраних теоретичних та практичних матеріалів;
- розкрити та систематизувати методи дослідження теми;
- розглянути завдання зовнішнього оцінювання з предмету.
- підготувати матеріали по організації дистанційного навчання з математики по темі «Числові послідовності»;
- підготовка та створення відеоуроків з математики.

Для досягнення даної мети та вирішення всіх завдань були використані такі методи дослідження:

- теоретичні: опрацювання та аналіз методичної літератури, синтез результатів;
- емпіричні: експеримент, дослідження та узагальнення досвіду роботи вчителів з цього питання, аналіз продуктів діяльності та обробка експериментів.

Дана робота включає вступ, три розділи, висновки та список використаних джерел, який містить 50 найменувань.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО – ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

1.1. З історії виникнення послідовностей та прогресій

У давнину послідовність чисел поділялася на арифметичну та геометричну. Першим хто виявив зв'язок між двома прогресіями був Архімед (287 – 212 рр. до н. е.)

У своїх працях цей термін як математичний був використаний римським філософом і державним діячем Боецієм (480-524). Першочергове завдання на прогресію пов'язують з економічною діяльністю, а саме з поділом успадкованої та розподіленої продукції [19].

Найдавніша задача була знайдена у клинописі вавилонської таблички та єгипетському папірусі Ахмеса (приблизно 2000 р. до н.е.).

«Поділіть 10 порцій ячменю на 10 осіб так, щоб друга людина отримала на $\frac{1}{8}$ порції ячменю більше, ніж перша, третя – на $\frac{1}{8}$ більше, ніж друга, ..., десята – на $\frac{1}{8}$ більше, ніж дев'ята. Скільки порцій ячменю отримає кожна людина?» [13, С. 248].

У папірусі наведені не тільки умови задачі, але також пропонуються правила, виражені у формулах $a_1 = \frac{s}{n} - \frac{d}{2}(n - 1)$.

Розв'язок даної задачі – це розв'язання арифметичної прогресії, тобто умову можна записати використовуючи сучасні позначення:

$$S_{10} = 10, \quad d = \frac{1}{8},$$

знайти a_1, a_2, \dots, a_{10} .

Відповідь: $\frac{25}{16}; \frac{23}{16}; \frac{21}{16}; \frac{19}{16}; \frac{17}{16}; \frac{15}{16}; \frac{13}{16}; \frac{11}{16}; \frac{9}{16}; \frac{7}{16}$ мір ячменю.

Задача Стародавнього Єгипту з папірусу Ахмеса (Райнд). «У семи людей по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, із кожного колоска може вирости по сім мірок ячменю. Знайдіть числа цього ряду і їх суму?» [13].

Папірус пропонує два розв'язки цього завдання:

ПЕРШИЙ – це пряме ДРУГИЙ – це множення
множення та подальше додавання чисел:

членів послідовності:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$$

$$1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4$$

Відповідь: 7, 49, 343, 2401, 16807. Сума – 19607.

Навіть єгиптяни знали загальну формулу для суми геометричної прогресії $b_1 = q$. Ця задача неодноразово зустрічалася в різних країнах текст якої був трохи перефразований.

У XVIII ст. вперше символи прогресій з'являються в підручниках з англійської мови.

Арифметична



Геометрична



Прогресії також були знайдені і в російських математичних рукописах XI – XVII століть.

1.2. Основні вимоги до викладання теми «Числові послідовності» в поглибленому курсі алгебри

Творчість, самостійність, здатність адаптуватися до умов сучасності – риси, які необхідно виробити у школярів. Навчити здійснювати вибір, вміти самостійно навчатись, застосовувати новітні технології, знаходити і використовувати необхідну інформацію для розв'язування нагальних проблем.

Математика є унікальним засобом, який може не тільки розвивати особистісний, навчальний, а й інтелектуальний потенціал учнів; інструмент дослідження багатьох інших наук та галузей виробництва.

Сучасна молодь повинна бути підготовлена до життєдіяльності, вміти творчо працювати, розвиватись та вдосконалюватись.

Розвиток математичної компетентності учнів дає спроможність бачити та застосовувати математику в реальному житті, уміння розв'язувати математичні

задачі, володіти дедуктивним методом доведення, розв'язувати задачі з використанням основних типів професійного програмного забезпечення, здійснювати дослідження прикладних практичних задач.

Викладання математики в профільних класах на поглибленому рівні забезпечує розвиток математичної компетентності.

Змістове наповнення програми реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей і ставлення, яка дає змогу обґрунтовано робити висновки про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в соціумі [47].

Навчання у таких класах рекомендується здійснювати за такими принципами:

по-перше, викладання математики має формуватися на основі базового курсу математики, щоб учні мали глибокі математичні знання.

по -друге, випускники математичних класів мають володіти глибокими та міцнішими знаннями та вміннями, які повністю відповідають вимогам школи. За цієї обставини математичний розвиток, який здобувають учні в процесі навчання, повинен дозволити їм проявляти творчість у процесі навчання математики. Учні повинні навчитися самостійно поводитися з математичною літературою та мати великий інтерес до предметів математичного циклу;

по-третє, процес навчання в таких класах ставить перед вчителем величезний виклик, тобто здатність максимально індивідуалізувати навчання. Він використовує евристичні методи навчання та проблемні форми навчання, тобто є достатні можливості активізувати навчання найкращим чином. Розв'язання задач широко використовується для вирішення нестандартних, конкурентних завдань, передбачених на вступних іспитах вищих навчальних закладів. Теоретичні та практичні завдання мають бути повністю вирішені відповідно до навчального плану.

Поглиблене вивчення математичних предметів має відповідати віку та потребам учнів.

Навчання в профільному класі старшої школи з розширеним вивченням математики в основному передбачає сильний і свідомий інтерес до алгебри та геометрії, а також бажання займатись у майбутньому професією, пов'язаною з математикою [31, С. 19-25].

Результати навчання мають підготувати старшокласників до продовження навчання в університеті. Сучасні курси з математики мають підготувати дітей до подальшої освіти у професійних галузях, де математика широко використовується. Отже, основним завданням викладання математики в класі є поступове моделювання принципу професійної діяльності математики.

Якими професійними якостями повинен володіти вчитель математики? Перш за все, це людина, яка володіє не тільки математикою, але й суміжними галузями, яка готова завжди доповнити та самостійно здобувати знання. Людина – математик має можливість досягати нових результатів у цій галузі, а також може використовувати математику для розв'язання прикладних задач. Тому, математична освіта в класі з поглибленим вивченням математики має бути органічно інтегрована з університетом і навіть сприяти вдосконаленню останнього, а також сприяти педагогічному розвитку з базової математичної підготовки, що впливає на всі рівні.

Основні курси з математики мають дещо відрізнятись від відповідних курсів середніх шкіл. Відмінність полягає в глибині дослідження матеріалу та формуванні критичного мислення. Розширення матеріалів є основою сучасного профільного курсу, який триває 4 роки з поглибленим вивчення алгебри та геометрії. Лише невелика кількість учнів математичних шкіл може усвідомлено вивчати зміст. Протягом багаторічного досвіду роботи в Україні, поглиблене вивчення математики переконало людей у тому, що немає потреби перевантажувати програму зайвими питаннями. Це в першу чергу шкодить здоров'ю учнів.

Більшу частину уваги потрібно надати математичному моделюванню. Саме в даний курс було закладено основу для формування вміння випускників

застосовувати знання з математики. Метою є не вивчення всіх частин математики на поверхні, а глибоке вивчення її частин [47].

Відповідно вимогам Міністерства освіти і науки України теоретичний рівень підручників в класах поглибленого вивчення математики в порівнянні з попередніми роками був значно покращений. Даний курс математики, допомагає:

- розвивати вміння школярів в застосованні алгебри та геометрії при дослідженні реальних процесів та явищ;
- забезпечити високий рівень математичної культури [31, С. 19-25].

Для послідовного ознайомлення школярів з новою формою організаційної роботи, рекомендується використовувати більш широкий спектр характерних курсів та курсів за вибором. Мета курсів за вибором математики – це поглибити знання, отримані учнями з базових курсів та розвинути їх логічне мислення, допитливість та оригінальність.

Факультативні курси алгебри та геометрії мають бути пов'язані з основним курсом математики. Наприклад, ви можете закінчити факультативний курс темою «Числові послідовності та метод підсумовування числових послідовностей», вивчаючи числові послідовності у 9 класі або «Послідовність чисел та її границі» у 10 класі.

Тематичний план 9 класу «Обчислення сум числових послідовностей та рядів» для 9 класу може виглядати так:

- 1) числова послідовність та основні теоретичні поняття послідовності чисел;
- 2) аналітичний метод підсумовування числової послідовності та числового ряду;
- 3) неаналітичний метод [23, С. 38-40].

У 2020/2021 навчальному році учні 10 класу профільного рівня вивчають 9 годин математики в тиждень. Для математичних класів є дві навчальні програми. Одна для учнів, які поглиблено вивчають математику в 8-9 класах, а друга програма – для учнів, які навчалися в звичайних класах і обирають математичний

профіль тільки в 10 класі. Основною метою оновлення програми є забезпечення трансформації від традиційної та інформаційної парадигми знань до компетентнісної. У програмі [46-47] розглядається компетентнісний підхід, кінцевим результатом якого є формування математичних здібностей, що дає школярам можливість виконувати успішні дії в навчальній ситуації. Результати навчально-пізнавальної діяльності організовують такі компоненти: знання, діяльність, цінності.

На сьогоднішній день інформаційні технології розвиваються швидко. Без них ми не представляємо свого життя. Це стало всебічною допомогою людству у всьому світі. Використання цих технологій у навчальному процесі може допомогти вирішити навчальне завдання, активізації мотиваційних факторів та формування позитивного ставлення до навчання.

Ефективність того, як учні засвоюють нові матеріали за допомогою інформаційних технологій, в основному залежить від навчального програмного забезпечення, яке поєднує високі моделюючі та обчислювальні здібності при дослідженні різних математичних об'єктів з уточненням результатів кожного етапу навчального процесу.

Сьогодні існують різні програмні засоби для вивчення математики. До таких програм відносяться: GRAN1, Maple, Mathematika, MathLab, Maxima, MathCAD, Reduce.

Ці програми призначені для розв'язання широкомасштабних завдань за допомогою моделювання об'єктів, присутніх у задачі.

Реалізація комп'ютерно-підтримуваного мислення в навчальному процесі зазвичай здійснюється у формі комплексної навчальної програми за допомогою міжпредметних зв'язків, таких як: «границя числової послідовності» « границя функцій»; «дослідження функцій на неперервність».

Враховуючи основні принципи навчання у 9-10 класах, ми безпосередньо звернулися до цілей і завдань навчання по темі «Числові послідовності» в програмі алгебри загальноосвітньої школи.

У 10 класі учні продовжують вивчати тему «Числові послідовності». Після вивчення даної теми слід усвідомити основні поняття, визначення та властивості, що містяться в підручниках з алгебри дев'ятого та десятого класів за змістом [2, С. 244-284; 21, С. 317-370].

Після вивчення параграфу «Числові послідовності», школярі відповідно до навчальної програми [46-47] повинні вміти:

- пояснювати, які є способи задання числової послідовності;
- виділяти основні класи послідовності;
- формулювати означення та властивості арифметичної та геометричної прогресії;
- доводити властивості та основні формули членів прогресії;
- вирішувати різні види вправ, включаючи знання всіх теоретичних матеріалів з предмету;
- застосовувати теорему про границю числової послідовності.

1.3. Особливості вивчення числових послідовностей за шкільними підручниками 9, 10 класів

Розглянувши та проаналізувавши підручники з алгебри 9-х та 10-х класів поглибленого вивчення математики за темою «Числові послідовності», можна помітити, що цю тему починають вивчати в кінці 9-го класу. Основна мета цієї теми – ознайомити учнів з поняттями послідовності та способами її задання. Послідовність чисел у підручнику з алгебри дев'ятого класу [46] починають вивчати в сьомому параграфі, який розподілений на пункти. Кожен пункт містить блоки з новою інформацією, а також практичними завданнями для їх закріплення. Усі основні правила та визначення у підручнику виділені курсивом та жирним шрифтом. Він містить завдання для самостійного вирішення.

Автори підручника алгебри 9-го класу А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір вводять визначення послідовності з урахуванням проблеми Леонардо Фібоначчі: «Пара кроликів, починаючи з двомісячного віку, щомісяця виробляє нову пару. Скільки всього пар кроликів буде в грудні, якщо перша пара

новонароджених кроликів з'явилася в січні (при умові, що всі кролики залишаються живі)?» [46], отримані при розв'язуванні числа Фібоначчі слугують яскравим прикладом числових послідовностей.

Після введення визначення наведено приклади та завдання, щоб розглянути послідовність усних, повторюваних та аналітичних завдань. Розглядаючи проблему рекурентного завдання послідовності, старшокласники вивчають арифметичну та геометричну прогресію. У наступному пункті вводиться визначення арифметичної прогресії та наводяться приклади. Цей абзац містить пункт, який показує «Сума n перших членів арифметичної прогресії», після якої є кілька прикладів, які слід детально пояснити.

Наступна тема «Вивчення геометричної прогресії» будується так само, як арифметична прогресія, оскільки автори підручника стверджують, що її так легше вивчити. Іншими словами, визначення геометричної прогресії вводиться циклічним методом завдання. Відповідно до цього визначення, виводиться «Сума n перших членів геометричної прогресії». Наприкінці цього розділу учні ознайомлюються з двома найскладнішими для них темами: «Уявлення про границю послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1» та «Сумування» [46].

Опрацьований підручник з алгебри 10 класу [47] складається з семи параграфів, які розділено на пункти, що містять теоретичний матеріал. Тема «Числові послідовності» виділена окремим параграфом, пункти якої виділено таким чином:

1. Послідовність чисел.
2. Границя числової послідовності.
3. Теорема про арифметичні дії зі збіжними послідовностями.
 - Доведення теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями.
4. Властивості збіжних послідовностей.
5. Теорема Вейерштрасса.
 - Число Ейлера.[7, С. 2-9]

Тема «Числові послідовності» вивчається в першій половині другого семестру. Вона містить важливі визначення, наведені жирним шрифтом, але також слід звернути увагу на визначення курсивом, оскільки вони також є важливими. Після ознайомлення з теоретичними матеріалами наводяться приклади розв'язання задач, які включають такі рівні складності: (●) – початковий та середній, (●●) – достатній, () – високий, та (*) – задачі для факультативів і математичних гуртків. Кожний пункт містить завдання для самостійного розв'язання [47].

Десятикласники мають не тільки підручники (А.Г. Мерзляк та ін.), а і збірник вправ та контрольних робіт [1].

У підручниках завдання слідує теоретичному матеріалу параграфа. Збірник задач укладено відповідно до введення теоретичних матеріалів до підручника і складається з двох частин:

1) навчальні вправи, кожен абзац поділений на три варіанти, кожен варіант має 229 номерів. Складні задачі мають відповіді або пояснення для розв'язання.

2) контрольні роботи є двох варіантів на основі кожної із семи тем. Вони умовно поділяються на дві частини: перша відповідає початковому та середньому рівням навчальних досягнень учнів, а друга частина – достатньому та високому рівню.

Різні рівні представлені різними символами (n° – початковий та середній, n° – достатній, n° – високий рівні навчальних досягнень). Максимальна оцінка першої частини – 6 балів, другої – 4 бали, третьої – 2 бали, тобто, за правильне виконання всіх завдань учні можуть отримати до 12 балів [1].

У третій частині цього посібника є дві контрольні роботи. Вони є необов'язковими.

Кожен з її варіантів має завдання з трьох частин з різним ступенем складності у вигляді тестування.

Оцінка цих робіт здійснюється за допомогою бальної системи, як показано в таб. 1.1.

Таблиця 1.1

Номер завдання	Кількість балів	Всього
1–16	по 1 балу	16 балів
17–20	по 2 бали	8 балів
21; 22	по 4 бали	8 балів
Всього балів		32 бали

Оцінювання знань учнів базується на 12-бальній системі, як показано в таблиці. 1.2.

Таблиця 1.2

Кількість набраних балів	Оцінка за 12-бальною системою
1 – 2	1
3 – 4	2
5 – 7	3
8 – 10	4
11 – 13	5
14 – 16	6
17 – 19	7
20 – 22	8
23 – 26	9
27 – 28	10
29 – 30	11
31 – 32	12

Отже, проаналізувавши всі вправи в підручнику та збірнику задач по темі «Числові послідовності» в класах поглибленого вивчення математики, їх можна поділити на такі типи задач:

1. Завдання на розуміння понять, термінів та символів послідовності чисел.
2. Завдання на пошук члена прогресії.
3. Завдання на складання формули n -го члена послідовності.
4. Дослідження послідовності на обмеженість та зростання.
5. Задачі на знаходження суми n -перших доданків арифметичної та геометричної прогресії.
6. Завдання з параметром.
7. Завдання на доведення методом математичної індукції.
8. Завдання на обчислення границі послідовності.
9. Дослідити послідовність на збіжність.
10. Задачі на знаходження кількості членів послідовності.
11. Розв'язування рівнянь. [1, С. 45-114; С. 244-284; 21, С. 317-370].]

Приклади завдань з навчальних посібників [2, С. 244-284; 21, С. 317-370].] та збірника [1] по кожному перерахованому вище типу завдань наведено в Додатку А.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ»

2.1. Введення поняття числові послідовності. Арифметична та геометрична прогресія

У 10 класі учні продовжують вивчати числові послідовності, ознайомлюються з границею числових послідовностей, теоремою про арифметичні дії зі збіжними послідовностями та їх властивостями.

При вивченні границі числової послідовності потрібно сформулювати розуміння поняття границі, її властивостей та навички обчислення границь послідовностей.

Вивчення теми «Границя числової послідовності» сформулює розуміння поняття границі, її властивостей та сформулює навички обчислення границь послідовностей. Перед вивченням цієї теми учням потрібно повторити поняття функції, натуральних чисел, основних понять пов'язаних з послідовностями, вміти здійснювати елементарні перетворення в алгебраїчних виразах.

У підручнику [2, С. 244-284] після розгляду прикладів дається визначення границі послідовності на мові ε :

Означення. «Число a називають границею послідовності (a_n) , якщо \forall додатного числа ε , \exists такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ » [2, С. 244-284].

Наступний розділ містить теореми про границі суми, добутку і частки двох послідовностей, для полегшення процесу знаходження границь.

Після вивчення даних понять, учні розглядають такі властивості збіжності послідовностей [2, С. 244-284]:

Теорема 1. Збіжна послідовність є обмеженою.

Теорема 2. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $a > b$ ($a < b$), то, починаючи з деякого номера a_0 , виконується нерівність $a_n > b$ ($a_n < b$).

Теорема 3. Якщо для всіх $n \in N$ виконується нерівність $a_n \geq b_n$, причому \exists границі $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ то $a \geq b$.

Теорема 4 (про двох конвоїрів). Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується подвійна нерівність $a_n \leq c_n \leq b_n$, причому послідовності (a_n) і (b_n) збігаються до спільної границі, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ то послідовність (c_n) також є збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Теорема 5. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, де $a_n \geq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.»

Теорема 6 (границя кореня). 2Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, де $a_n \geq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$ де $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.»

«Важливою ознакою збіжності послідовності є така теорема.

Теорема (теорема Вейєрштрасса). Кожна зростаюча й обмежена зверху (спадна й обмежена знизу) послідовність має границю.»

Зазначені вище властивості учням даються з доведенням, так як школярі вже володіють необхідними знаннями. В кінці параграфу представлені завдання для самостійного розв'язання.

При вивченні послідовності учні ознайомлюються з арифметичною і геометричною прогресіями.

При підготовці до уроку вчитель аналізує логіко-математичну структуру визначення поняття, виділяючи основні характеристики цих понять, на яких засноване визначення, що дозволить навести приклади визначень.

Розкриваючи методику вивчення поняття слід працювати з ознаками поняття, зафіксованими в його визначенні на логіко-математичному аналізі.

Під арифметичною прогресією розуміють послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, складеному з одним і тим же числом.

Термін – арифметична прогресія.

Рід – послідовність.

Видові відмінності – $a_{n+1} = a_n + d$ де a_1 і d – задані, n – будь-яке натуральне число.

Це визначення є рекурсивним. Видові відмінності можна розписати докладніше: другий член дорівнює сумі першого і якогось числа, третій дорівнює другому, складеному з цим же числом, і т. д.

Виконаємо дії підведення об'єктів під визначення, результати запишемо у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Приклад	Послідовність	$a_{n+1} = a_n + d$	Висновок: даний приклад є арифметичною прогресією
0; -5; -10; -15; ...; $-5(n-1), \dots$	Так	Так	Так
1; 3; 5; 10;	Так	Ні	Ні
$x + 7$	Ні	Ні	Ні
7; 7; 7; 7;	Так	Так	Так
$\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 1\frac{1}{3};$	Так	Так	Так

У таблиці наведені всі типи арифметичних прогресій; зростаюча, спадна, постійна, кінцева, нескінченна, різницею може бути додатне, від'ємне число і нуль; члени прогресії можуть бути натуральними, цілими, дробовими. [21, С. 317-370].

Відповідно до визначення, геометрична прогресія також є послідовністю, задана рекурентним співвідношенням $b_{n+1} = b_n \cdot d$ де b_1 і d – задані, n – будь-яке натуральне число.

Дещо складніше учням дається геометрична прогресія, тому що характер її поведінки залежить від значень q . Необхідно більш детально проаналізувати різні приклади з учнями дев'ятого класу:

1) Нехай $q > 1$, тоді члени геометричної прогресії такі, що їх значення мають однаковий знак і зростають по модулю.

Приклад 1.

а) $1, 3, 9, 27, 81, \dots$ ($a_1 = 1, q = 3$);

б) $-2, -8, -32, -128, \dots$ ($a_1 = 1, q = 4$).

2) Якщо $0 < q < 1$, то члени геометричної прогресії такі, що їх значення мають такий самий знак і зменшуються по модулю.

Приклад 2.

а) $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \dots$ ($a_1 = 2, q = \frac{1}{4}$);

б) $-1, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \dots$ ($a_1 = -1, q = \frac{1}{5}$).

3) Нехай $q < -1$, тоді члени геометричної прогресії приймають знакозмінні значення, зростаючи по модулю.

Приклад 3.

$-3, 6, -12, 24, \dots$ ($a_1 = -3, q = -2$).

4) Якщо $-1 < q < 0$, то члени геометричної прогресії приймають знакозмінні значення, що спадають по модулю.

Приклад 4.

$-8, 1, -\frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \dots$ ($a_1 = -8, q = -\frac{1}{8}$).

5) При $q = 1$ всі члени геометричної прогресії однакові, b_1, b_1, b_1, \dots , а при $q = -1$ всі члени геометричної прогресії відрізняються один від одного лише знаками, $b_1, -b_1, b_1, -b_1, \dots$ [21, С. 317-370].

Знання всіх формул з теми та вміння їх перетворювати є необхідною умовою для набуття вмінь розв'язувати задачі та приклади поетапно. Тому на практиці особливу увагу потрібно приділяти навичкам, які можуть підвищити ефективність вивчення формул та вираження невідомих значень.

2.2. Тестові завдання з теми дослідження в системі математичної підготовки школярів

Відповідно до встановлення нового навчального плану з урахуванням вимог «Державного стандарту базової і повної середньої освіти» час на вивчення теми «Числові послідовності» у 5-9 класах становить 32 години [46]. Через

складність цієї теми для школярів, для кращого засвоєння цього матеріалу, пропонуються тестові завдання, які повністю відповідають вимогам навчальної програми з математики та всебічно, комплексно та систематично висвітлюють математичний зміст цього предмета.

У методиці навчання зазначено, що метою тесту є визначення рівня знань. Крім контрольної, тест виконує й інші функції навчання: розвиваючу, освітню та контрольну.

Фактично тест показує загальну ситуацію успішності в класі та визначає рівень засвоєння навчальних матеріалів для кожного учня. Тому можна продовжувати займатися індивідуальною роботою з учнями з високими та низькими знаннями.

Використання тестів для організації та керівництва роботою учнів допомагає знаходити та усувати прогалини в знаннях та формує бажання розвивати здібності.

Тестування сприяє розвитку інтуїції та логічного мислення, оскільки містить такі завдання, як культивування індивідуальності, об'єктивності, порівняння, узагальнення та пошуку альтернатив. Крім того, перед учнями стоїть вибір шукати чи відгадувати відповіді. Багато учнів обирають відповідь методом виключення: виключають неможливі варіанти, а потім перевіряють інші варіанти [22, С. 2-8]. Тести допомагають у процесі перевірки знань та дозволяють учням проводити самооцінку та рецензування. Це дає можливість не лише перевірити знання, а й перевірити розуміння навчальних матеріалів. За допомогою тесту матеріали можна легко розділити на кілька рівнів відповідно до особливостей учнів.

Об'єктивність тесту є основною перевагою. Він може не тільки визначити «проблемні зони», але й конкретні «больові точки»:

- за структурою тесту його можна використовувати як інструмент навчання для покращення здатності до самоконтролю;
- використовуючи тестові завдання, вчителі можуть визначити знання, вміння та навички учнів та аналізувати власну педагогічну діяльність;

- батьки мають можливість дізнатися результати навчання своїх дітей.

Щоб тест був ефективним, повинні бути виконані наступні умови:

1. Учні повністю самостійні в процесі виконання завдань.
2. Завдання відсортовані за складністю.
3. Чітко сформульовані питання та відповіді.

Виконання тестового завдання дасть змогу учням актуалізувати знання про числові послідовності та їх окремі види (прогресії) на рівні розпізнавання та відтворення відповідних означень й основних властивостей; оновити в пам'яті основні формули прогресій. [21, С. 317-370].

Особливості запропонованої системи тестових завдань дозволяють ефективно та різнобічно її використовувати.

Виконання даного тестового завдання (Додаток В) дозволить повністю повторити зміст вивченої теми, систематизувати і узагальнити знання про прогресії та зосередити увагу учнів на найважливішому змісті системи знань теми для забезпечення всебічного та об'єктивного контролю або самоконтролю [22, С. 2-8].

Аналіз задач ДПА з математики показує, що у відборі щорічної добірки вправ, мають бути завдання присвячені прогресіям. Тому запропонована система завдань також може бути використана як метод підготовки до ДПА з математики.

2.3. Деякі випадки застосування числових послідовностей при розв'язуванні олімпіадних задач

Числова послідовність є одним з основних об'єктів математичного аналізу. Числові послідовності мають традиційне застосування в теорії чисел, інтегралах і границь, сумах рядів, обчисленнях детермінантів, хімії, фізиці, біології, економіці та криптографії.

Розв'язування олімпіадних задач ґрунтується на найважливіших властивостях числових послідовностей. Все частіше в математичних олімпіадах з'являються задачі пов'язані з числовими послідовностями. Їх розв'язання ґрунтується на числових послідовностях [26, С.35-37].

Приклади нетрадиційного використання числових послідовностей при розв'язуванні олімпіадних задач:

Задача 1. «Барон Мюнхгаузен сказав Георгу Кантору, що він може записати всі натуральні числа в ряд без одиниці так, що тільки скінченне їх число буде більше за свій номер. Чи не хизується барон» [26, С.35-37] ?

Розв'язання. Припустимо $a_1, a_2, a_3 \dots$ – усі натуральні числа без одиниці. Для цього ми будемо нову послідовність натуральних чисел (b_n) наступним чином: $b_1 = 1, b_{n+1} = a_{b_n}$ для $n \geq 2$. Доведемо, що всі члени послідовності (b_n) різні. Дійсно, нехай $b_k = b_m, k > m > 1$, тоді $a_{b_{k-1}} = a_{b_{m-1}}$, таким чином $b_{k-1} = b_{m-1}$, тому що всі члени послідовності (a_n) різні. Продовжуючи аналогічно, отримаємо $b_{k-2} = b_{m-2}, \dots, b_{k-m+1} = b_1$, тобто $a_{b_{k-m}}$. Оскільки послідовність (a_n) не містить її, виходить суперечність. Оскільки (b_n) – це нескінченна послідовність різних натуральних чисел, то вона містить нескінченну кількість елементів, більшу за попередній елемент (інакше вона б спадала, починаючи з певного числа, що неможливо). Іншими словами, $b_{k+1} = b_k$, тобто $a_{b_k} > b_k$ є нескінченним натуральним числом k . Це означає, що кількість членів послідовності (a_n) , необмежена, а їх кількість більша за свій номер.

Відповідь. Барон хизується.

Задача 2. «Монету підкидають 10 разів. Знайдіть ймовірність того, що жодного разу не випадуть два герба поспіль [26, С.35-37].»

Розв'язання. «Загальна кількість випадків при десяти підкиданнях монети дорівнює 2^{10} . Знайдемо число комбінацій, де немає двох гербів підряд. Нехай монету кидають n раз, $f(n)$ – число варіантів підкидань без двох гербів підряд, $f(n-1)$ – число допустимих комбінацій, в яких на останньому місці стоїть цифра, $f(n-2)$ – число допустимих комбінацій, в яких стоїть герб на останньому місці, бо перед гербом на передостанньому місці обов'язково повинна стояти цифра. Таким чином, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. Оскільки $f(1) = 2, f(2) = 3$, то послідовно обчислюємо, що $f(3) = 5, f(4) = 8, \dots, f(10) = 144$. Отже, шукана ймовірність дорівнює: $\frac{144}{2^{10}} = \frac{9}{64}$. Загальна кількість справ з 10 сальто

монет дорівнює 2^{10} . Знайдіть кількість комбінацій, де немає двох знаків поспіль. Припустимо, що монета кинута n разів, $f(n)$ - кількість послідовних кидань без двох гербів, $f(n-1)$ - кількість дійсних комбінацій, де є остання цифра, а $f(n-2)$ - дійсне поєднання Геральдика знаходиться на останньому місці, тому що це має бути число перед передостанньою геральдиккою. Отже, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. Оскільки $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, послідовно обчислюємо $f(3) = 5$, $f(4) = 8$, ..., $f(10) = 144$. Отже, необхідна ймовірність дорівнює: $144/2^{10} = 9/64$. відповідь. $9/64$ » [26, С.35-37].

Відповідь. $\frac{9}{64}$.

Зауважимо, що числа $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ є членами послідовності чисел Фібоначчі. Зазвичай, особливо у сучасному вигляді, послідовність доповнюється іншим початковим членом : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$. Числа Фібоначчі – нескінченна числова послідовність (F_n) , в якій кожне наступне число – це сума двох попередніх чисел:

$$\langle F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \rangle [21, С. 317-370].$$

Задача 3. Розв'яжіть в цілих числах рівняння: $x^2 - xy - y^2 = 1$ [26, С.35-37].

Розв'язання. Зауважимо, що при підстановці пари $F_{2n+1}; F_{2n}$ в задане рівняння, ми приходимо до окремого випадку тотожності Кассіні: $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ – одне з відомих співвідношень для чисел Фібоначчі. Воно було доведено французьким астрономом Кассіні в 1680 році [2, С. 244-284]. Покажемо, що у вихідного рівняння немає інших розв'язків. Знайдемо спочатку тільки натуральні розв'язки, оскільки $f(x, y) = x^2 - xy - y^2 = f(-x, -y)$. Неважко перевірити, що тоді $y < x \leq 2y$. Крім того, кожна пара розв'язків (x, y) породжує цілий ланцюжок розв'язків за правилом:

$$(x, y) \rightarrow (x - y, 2y - x) \rightarrow (x, y) \rightarrow (2x + y, x + y) \rightarrow \dots$$

При русі по цьому ланцюжку вліво числа в парах зменшуються:

$$0 < x - y < x, 0 < 2y - x < y.$$

Тому на певному етапі вийде пара, в якій $y = 0$, $x = 1$, тобто пара $(F_1; F_0)$. Але ця пара породжує ланцюжок:

$$(F_1; F_0) \rightarrow (F_3; F_2) \rightarrow \dots \rightarrow (F_{2n+1}; F_{2n}) \rightarrow \dots$$

Значить, вихідна пара повинна мати вигляд $(x, y) = (F_{2n+1}; F_{2n})$.

Відповідь: $(x, y) = \pm(F_{2n+1}; F_{2n})$, $n \in Z$.

Розглянемо тепер дві послідовності, які мають у собі n чисел: (a_1, a_2, \dots, a_n) та (b_1, b_2, \dots, b_n) . Запишемо їх у вигляді наступної таблиці:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Такого виду послідовність будемо називати одномонотонною, якщо найбільше з чисел a_1, a_2, \dots, a_n знаходиться над найбільшим з чисел b_1, b_2, \dots, b_n , а друге за величиною з чисел a_1, a_2, \dots, a_n знаходиться над другим за величиною з чисел b_1, b_2, \dots, b_n і т. д. Наприклад, послідовність

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \dots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \text{ не є одномонотонною, а послідовність } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{1}{a_{n1}} & \frac{1}{a_{n-1}} & \dots & \frac{1}{a_1} \end{pmatrix} -$$

одномонотонною.

Якщо ввести таке позначення:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, [26, \text{ С.35-37}] \text{ тоді буде}$$

правильним наступним факт.

Теорема. «Якщо (a_1, a_2, \dots, a_n) та (b_1, b_2, \dots, b_n) – одномонотонні послідовності та $(b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ – деяка перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n . Тоді

виконується нерівність $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \dots & b'_n \end{bmatrix}$ » [26, С.35-37].

Розглянемо декілька прикладів на застосування даної теореми.

Задача 4. «Довести нерівність $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a$, якщо a, b, c, d – додатні дійсні числа» [26, С.35-37].

Доведення: Помітимо, що $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix}$, а $a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d^2 & a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$.

Зрозуміло, що послідовність (a, b, c, d) та (a^2, b^2, c^2, d^2) одномонотонні, то згідно вище зазначеної теореми, є справедливою наступна нерівність: $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d^2 & a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$, яка на основі вище зазначеного позначення рівносильна наступній:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

Задача 5. «Довести, що якщо a, b, c – додатні дійсні числа, то виконується нерівність $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$ » [26, С.35-37].

Доведення: Застосуємо до розв'язання цієї нерівності одномонотонність.

Оскільки $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \begin{bmatrix} a+b & a+c & b+c & a & b & c \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix}$ і

послідовність $(a+b, a+c, b+c, a, b, c)$ та $(\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b})$

одномонотонні, то згідно з вище зазначеною теоремою, виконується нерівність:

$$\begin{bmatrix} a+b & a+c & b+c & a & b & c \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a+b & a+c & b+c & a & b & c \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{bmatrix}, \quad \text{тобто}$$

доведено, що $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.

Задача 6. «Доведіть нерівність:

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} \geq \frac{n}{n-1},$$

якщо a_1, a_2, \dots, a_n – додатні дійсні числа, сума яких дорівнює s » [26, С.35-37].

Оскільки $\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{1}{S-a_1} & \frac{1}{S-a_2} & \dots & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix}$, а також

послідовності (a_1, a_2, \dots, a_n) та $(\frac{1}{S-a_1}, \frac{1}{S-a_2}, \dots, \frac{1}{S-a_n})$ одномонотонні, то на

основі теореми є справедливими такі $n-1$ нерівності:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \frac{1}{S-a_1} & \frac{1}{S-a_2} & \dots & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix} \geq \\ & \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & n \\ \frac{1}{S-a_k} & \frac{1}{S-a_{k+1}} & \dots & \frac{1}{S-a_{k-(n-1)}} & \frac{1}{S-a_{k-(n-2)}} & \dots & \frac{1}{S_{k-1}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Додаючи їх одержуємо потрібне.

2.5. Задачі на числову послідовність у завданнях ЗНО

Важливим етапом навчання є успішне складання ЗНО з математики учнями 11 класів.

Зовнішнє незалежне оцінювання – це процес визначення рівня знань випускників загальноосвітніх навчальних закладів, незалежних від загальноосвітніх та вищих навчальних закладів.

Діюча програма зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО), затверджена наказом МОН № 696 від 26 червня 2018 року.

Практики та дослідники рекомендують вчителям готуватися до ЗНО на різних етапах процесу засвоєння знань учнями:

- у процесі вивчення нового матеріалу;
- при перевірці знань;
- під час закріплення нового матеріалу;
- як домашнє завдання для контролю над собою.

Використання вчителем таких тестових завдань спричинить формування в учнів свідомого уявлення про особливості їх виконання.

Приклади завдань з теми «Числові послідовності», які можна знайти в ЗНО з математики [50]:

Завдання 1. (основна сесія ЗНО 2021 р.) «Арифметичну прогресію a_n задано формулою n -го члена: $a_n = 2,6n - 7$.

1. Визначте сьомий член цієї прогресії.
2. Визначте різницю $a_4 - a_1$ [50].

Розв'язання:

1.

$$a_n = 2,6n - 7;$$

$$a_1 = 2,6 \cdot 1 - 7 = -4,4$$

$$a_4 = 2,6 \cdot 4 - 7 = 3,4;$$

$$a_7 = 2,6 \cdot 7 - 7 = 11,2.$$

Відповідь: 11,2.

$$2. a_4 - a_1 = 3,4 - (-4,4) = 3,4 + 4,4 = 7,8$$

Відповідь: 7,8

Завдання 2. (пробне ЗНО 2021 р). Суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n) задано формулою $S_n = \frac{5,2 - 0,8 \cdot n}{2} \cdot n$

1. Визначте суму перших шести членів цієї прогресії.
2. Визначте четвертий член цієї прогресії [50].

Розв'язання:

$$1. \quad S_n = \frac{5,2 - 0,8 \cdot n}{2} \cdot n;$$

$$S_6 = \frac{5,2 - 0,8 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 1,2$$

Відповідь: 1,2

$$2. S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4;$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$

$$S_4 = S_3 + a_4;$$

$$a_4 = S_4 - S_3;$$

$$S_4 = \frac{5,2 - 0,8 \cdot 4}{2} \cdot 4 = 4;$$

$$S_3 = \frac{5,2 - 0,8 \cdot 3}{2} \cdot 3 = 4,2;$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = 4 - 4,2 = -0,2$$

Відповідь: -0,2

Завдання 3. (основна сесія ЗНО 2020 р.) «В арифметичній прогресії a_n відомо що $a_2 - a_5 = 7,8$

1. Визначте різницю d цієї прогресії.
2. Визначте перший член a_1 цієї прогресії, якщо її третій член $a_3 = -1,8$ [50].

Розв'язання:

$$1. \quad a_2 - a_5 = 7,8;$$

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$5 = a_1 + 4d;$$

$$a_2 - a_5 = a_1 + d - (a_1 + 4d) = 7,8$$

$$-3d = 7,8;$$

$$d = \frac{7,8}{-3} = -2,6.$$

Відповідь: -2,6.

2.

$$a_3 = a_1 + 2d;$$

$$a_1 = a_3 - 2d;$$

$$a_1 = -1,8 - 2 \cdot (-2,6) = -1,8 + 5,2 = 3,4.$$

Відповідь: 3,4

Завдання 4. (пробне ЗНО 2020 р). Добуток другого та четвертого членів геометричної прогресії дорівнює 36. Усі члени цієї прогресії є додатними.

1. Визначте третій член цієї прогресії.

2. Визначте перший член цієї прогресії, якщо він удвічі більший за другий її член.[50]

Розв'язання:

1.

$$b_2 \cdot b_4 = 36;$$

$$b_n = b_1 q^{n-1};$$

$$b_1 q \cdot b_1 q^3 = 36;$$

$$(b_1 q^2)^2 = 36;$$

$$(b_3)^2 = 36;$$

$$b_3 = 6.$$

Відповідь: 6

$$2. b_1 = 2b_2, b_2 = b_1 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2};$$

$$b_3 = 6, b_3 = b_1 q^2;$$

$$b_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6;$$

$$b_1 = 6 : \frac{1}{4} = 24.$$

Відповідь: 24

Завдання 5. (пробне ЗНО 2019 р.) «За якого від'ємного значення x значення виразів $x^2 - 4$, $3 - 5x$, та $2 - 3x$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії?» [50]

Розв'язання:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$$

$$3 - 5x = \frac{x^2 - 4 + 2 - 3x}{2} \cdot 2$$

$$6 - 10x = x^2 - 4 + 2 - 3x$$

$$-x^2 + 3x - 10x + 6 - 2 = 0$$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -8.$$

Відповідь: -8 .

Завдання 6. (ЗНО 2019 р.) «Четвертий член геометричної прогресії у 8 разів більший за перший член. Сума третього та четвертого членів цієї прогресії на 14 менша за їхній добуток. Визначте перший член прогресії, якщо всі її члени є додатними числами.» [50]

Розв'язання:

$$b_n > 0;$$

$$b_4 > b_1 \text{ у } 8 \text{ разів}$$

$$b_3 + b_4 < b_3 \cdot b_4 \text{ на } 14$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3$$

$$b_1 \cdot q^3 = 8 \cdot b_1 \mid : b_1$$

$$q^3 = 8$$

$$q = 2$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2$$

$$4b_1 \cdot 8b_1 - (4b_1 + 8b_1) = 14$$

$$32b_1^2 - 12b_1 - 14 = 0 | : 2$$

$$16b_1^2 - 6b_1 - 7 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-7) = 36 + 448 = 484 = 22^2$$

$$b_1 = \frac{6 + 22}{2 \cdot 16} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

$$b_2 = \frac{6 - 22}{2 \cdot 16} < 0$$

$$\frac{7}{8} = 0,125 \cdot 7 = 0,875.$$

Відповідь: 0,875

Завдання 7. (ЗНО 2019 р. додаткова сесія) «Укажіть ненульове значення x , за якого значення виразу $x - 8$, та $6x$ є послідовними членами геометричної прогресії.» [50]

Розв'язання: $(3x)^2 = (x - 8) \cdot 6x$

$$9x^2 = 6x^2 - 48x$$

$$3x^2 = -48x$$

$$3x^2 + 48x = 0$$

$$3x(x + 16) = 0$$

$$3x = 0; \quad x + 16 = 0$$

$$x = 0; \quad x = -16.$$

Відповідь: -16 .

Завдання 8. (пробне ЗНО 2018 р.) «Сума другого та четвертого членів зростаючої прогресії дорівнює 45, а їхній добуток -324 . Визначте перший член цієї прогресії.» [50]

Розв'язання:
$$\begin{cases} b_2 + b_4 = 45; \\ b_2 \cdot b_4 = 324. \end{cases}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

За т. Вієтта: $b_2 = 9; \quad b_4 = 36$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q = 9; \\ b_1 \cdot q^3 = 36. \end{cases}$$

$$q^2 = 4$$

$$q = 2$$

$$b_1 = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Відповідь: 4,5.

Завдання 9. (ЗНО 2018 р.) «Знаменник (b_n) дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума чотирьох перших її членів дорівнює 65. Знайдіть перший член цієї прогресії.» [50]

Розв'язання:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$65 = \frac{b_1(1 - (\frac{2}{3})^n)}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\frac{b_1(1 - \frac{16}{81})}{\frac{1}{3}} = 65$$

$$3b_1 \cdot \frac{65}{81} = 65$$

$$\frac{3b_1}{81} = 1$$

$$3b_1 = 81$$

$$b_1 = 27.$$

Відповідь: 27.

Завдання 10. (ЗНО 2018 р. додаткова сесія) «Третій член арифметичної прогресії вдвічі більший за її перший член. Визначте різницю цієї прогресії, якщо сума перших п'яти її членів дорівнює 190.» [50]

Розв'язання: $a_3 = a_1 + (3 - 1)d = a_1 + 2d$

За умовою $a_3 = 2a_1$

$$a_1 + 2d = 2a_1$$

$$a_1 = 2d$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$$

$$S_5 = \frac{2 \cdot 2d + (5 - 1)d}{2} \cdot 5 = \frac{8d}{2} \cdot 5 = 20d$$

$$20d = 190$$

$$d = \frac{190}{20} = 9,5.$$

Відповідь: 9,5.

Завдання 11. (пробне ЗНО 2017 р.) «Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -0,25$, $b_4 = 2$.» [50]

А	Б	В	Г	Д
0,5	0,25	-0,5	-1	-2

Розв'язання:

$$b_4 = b_1 q^3;$$

$$q^3 = \frac{b_4}{b_1};$$

$$q^3 = \frac{2}{-0,25} = -8;$$

$$q = -2;$$

$$b_2 = b_1 q;$$

$$b_2 = -0,25 \cdot (-2) = 0,5.$$

Відповідь: А.

Завдання 12. (ЗНО 2017 р.) «В арифметичній прогресії (a_n) : $a_1 = -4$, $a_5 = a_4 + 3$. Визначте десятий член a_{10} цієї прогресії.» [50]

А	Б	В	Г	Д
-31	-27	26	27	23

Розв'язання: $d = a_5 - a_4 = a_4 + 3 - a_4 = 3;$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -4 + 9 \cdot 3 = 23.$$

Відповідь: Д.

Завдання 13. (ЗНО 2017 р. додаткова сесія) «В арифметичній прогресії перший член $a_1 = -21$, різниця $d = 1,5$. Скільки всього *від'ємних* членів має ця прогресія?» [50]

А	Б	В	Г	Д
13	14	15	16	18

Розв'язання: $-21; -19,5; -18; -16,5; -15; -13,5; -12; -10,5; -9; -7,5; -6; -4,5; -3; -1,5.$

Відповідь: Б.

Завдання 14. (пробне ЗНО 2016 р.) «У процесі підготовки до заліку з математики студент за 9 днів розв'язав 315 задач. У перший день він розв'язав 11 задач, а кожного наступного дня розв'язував на одну й ту ж саму кількість задач більше, ніж попереднього дня. Визначте кількість задач, які студент розв'язав дев'ятого дня.» [50]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$S_9 = 315; \quad a_1 = 11;$$

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9$$

$$(11 + a_9) \cdot 9 = 2 \cdot 315$$

$$a_9 = 630 : 9 - 11 = 59.$$

Відповідь: 59.

Завдання 15. (ЗНО 2016 р.) «Задано арифметичну прогресію (a_n) , у якій різниця $d = 0,5$, п'ятнадцятий член $a_{15} = 12$. Визначте перший член прогресії a_1 .» [50]

А	Б	В	Г	Д
24	12,5	6	5	4,5

Розв'язання: $a_{15} = a_1 + 14d;$

$$a_1 = a_{15} - 14d = 12 - 14 \cdot 0,5 = 12 - 7 = 5.$$

Відповідь: Г.

Завдання 16. (ЗНО 2016 р. додаткова сесія) «В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 + a_3 = 18$, різниця $d = -4$. Визначте перший член прогресії a_1 цієї прогресії.» [50]

А	Б	В	Г	Д
5	10	13	15	22

Розв'язання:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{18}{2} = 9;$$

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_1 = a_2 - d = 9 + 4 = 13.$$

Відповідь: В.

Завдання 17. (пробне ЗНО 2015 р.) «Загальна вартість транспортної компанії на транспортування великогабаритних меблів включає вартість транспортування на перший поверх будинку і вартості підйому меблів на потрібний поверх. Вартість підйому меблів на кожний наступний поверх перевищує вартість їх підйому на попередній на одну й ту саму величину. Визначте загальну вартість (у грн) доставки меблів на 11-й поверх будинку, якщо повна вартість доставки меблів на 4-й та 7-й поверхи цього будинку становить 142 грн та 154 грн відповідно.» [50]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_4 = 142; a_7 = 154;$$

$$a_7 = a_4 + 3d;$$

$$d = \frac{a_7 - a_4}{3};$$

$$d = \frac{154 - 142}{3} = 4;$$

$$a_{11} = a_7 + 4d;$$

$$a_{11} = 154 + 4 \cdot 4 = 170.$$

Відповідь: 170.

Завдання 18. (ЗНО 2015 р.) «На першому тренуванні дистанція плавця становила 450 м. Після цього його відстань для кожного тренування була на 50 м

більше, ніж раніше, доки не було досягнуто результату – 1000 м за одне тренування. Після цього, кожного разу, відвідуючи басейн, плавець пропливає 1000 м. Скільки кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренується 3 рази на тиждень?» [50]

Розв’язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 450; \quad d = 50.$$

$$a_n = 1000;$$

$$\langle a_n = a_1 + d(n - 1) \rangle$$

$$450 + 50(n - 1) = 1000;$$

$$50(n - 1) = 550; \quad (n - 1) = 11;$$

$$n = 12.$$

$$S = S_{12} + 18 \cdot 1000;$$

$$S_{12} = \frac{450 + 1000}{2} \cdot 12 = 1450 \cdot 6 = 8700;$$

$$S = 8700 + 18000 = 26700.$$

Відповідь: 26700

Завдання 19. (ЗНО 2015 р. додаткова сесія) «У медичній інструкції щодо настою лікарських рослин зазначено, що його рекомендується приймати щоденно упродовж 20 діб. У перший день хворий повинен випити 370 мл настою, а кожного наступного дня – кількість настою буде зменшуватися на одну й ту саму кількість, ніж попереднього дня. В останній день прийом лікарського засобу повинен становити 85 мл. Якщо дотримуватися вказівок лікаря, скільки настоїв повинен випити хворий протягом 20 днів?» [50]

Розв’язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 370; \quad n = 20;$$

$$a_n = 85;$$

$$S_{20} = \frac{370 + 85}{2} \cdot 20 = 455 \cdot 10 = 4550.$$

Відповідь: 4550.

Завдання 20. (пробне ЗНО 2014 р.) «Яка з наведених послідовностей є геометричною прогресією, знаменник якої $q < 0$?» [50]

А	Б	В	Г	Д
-25; 20; -15; 10	-80; -40; -20; -10	30; 10; -10; -30	10; -20; 40; -80	-15; -30; -45; -60

Розв'язання: $\frac{-20}{10} = \frac{40}{-20} = \frac{-80}{40}$

Відповідь: Г.

Завдання 21. (ЗНО 2014 р.) «Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайдіть різницю цієї прогресії.» [50]

А	Б	В	Г	Д
8	4	-2	-4	-8

Розв'язання:

$$a_1 = 4 - 8 \cdot 1 = -4;$$

$$a_2 = 4 - 8 \cdot 2 = 4 - 16 = -12;$$

$$d = a_2 - a_1 = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8.$$

Відповідь: Д.

Завдання 22. (ЗНО 2014 р. додаткова сесія) «У геометричній прогресії (b_n) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{4}$. Визначте b_4 .» [50]

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	2	4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

Розв'язання:

$$q = \frac{b_2}{b_1};$$

$$q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$$

$$b_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}.$$

Відповідь: Г.

Завдання 23. (пробне ЗНО 2013 р.) «У першому ряді кінотеатру встановлено 15 крісел, а у кожному наступному – на 3 крісла більше, ніж у попередньому. Скільки всього крісел встановлено в сьомому ряді цього кінотеатру?» [50]

А	Б	В	Г	Д
21	27	30	33	36

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 15; \quad d = 3;$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1);$$

$$a_7 = 15 + 3 \cdot 6 = 15 + 18 = 33.$$

Відповідь: Г.

Завдання 24. (ЗНО 2013 р.) «В арифметичній прогресії (a_n) задано $a_1 = 4$, $a_2 = -1$. Вкажіть формулу для знаходження n -го члена цієї прогресії.» [50]

А	Б	В	Г	Д
$a_n = -1 + 5n$	$a_n = 7 - 3n$	$a_n = 5 - n$	$a_n = 1 + 3n$	$a_n = 9 - 5n$

Розв'язання:

$$a_n = a_1 + d(n - 1);$$

$$d = a_2 - a_1;$$

$$d = -1 - 4 = -5;$$

$$a_n = 4 - 5(n - 1) = 4 - 5n + 5 = 9 - 5n.$$

Відповідь: Д.

Завдання 25. (ЗНО 2013 р. додаткова сесія) «У геометричній прогресії (b_n) задано $b_3 = 0,2$, $b_4 = \frac{3}{4}$. Знайти знаменник цієї прогресії.» [50]

А	Б	В	Г	Д
---	---	---	---	---

$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{20}$
----------------	----------------	---------------	----------------	-----------------

Розв'язання: $q = \frac{b_n}{b_{n-1}};$

$$q = \frac{\frac{3}{4}}{0,2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{10} = \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 2} = \frac{15}{4}.$$

Відповідь: А.

Завдання 26. (пробне ЗНО 2012 р.) «З певного аеропорту за розкладом авіарейсів виконується через кожні 10 хв. Перший літак має відлітати о шостій ранку. Укажіть час відльоту за розкладом тридцятого за рахунком літака.» [50]

А	Б	В	Г	Д
10год 40 хв	10год 50 хв	11год 00 хв	11год 30 хв	12год 00 хв

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 6; \quad d = \frac{1}{6};$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1);$$

$$a_{30} = 6 + \frac{1}{6} \cdot 29 = 6 + 4\frac{5}{6} = 10\frac{5}{6} = 10\text{год } 50\text{хв}.$$

Відповідь: Б.

Завдання 27. (ЗНО 2012 р.) «Кінозал має 18 рядів. У першому ряді 7 місць, а в кожному наступному ряді кількість місць збільшується на 2 місця порівняно з переднім рядом. Скільки місць у цьому зал?» [50]

А	Б	В	Г	Д
432	438	369	450	864

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 7; \quad d = 2; \quad n = 18;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n;$$

$$S_{18} = \frac{2 \cdot 7 + 2 \cdot 17}{2} \cdot 18 = 48 \cdot 9 = 432$$

Відповідь: А.

Завдання 28. (пробне ЗНО 2011 р.) «В арифметичній прогресії (a_n) $a_2 = -9$, $a_4 = -4$. Визначте різницю цієї прогресії.» [50]

А	Б	В	Г	Д
2,5	6,5	$-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$	-2,5	-6,5

Розв'язання:

$$a_3 = \frac{a_4 + a_2}{2};$$

$$a_3 = \frac{-4 + (-9)}{2} = \frac{-13}{2} = -6,5;$$

$$d = a_3 - a_2;$$

$$d = -6,5 - (-9) = -6,5 + 9 = 2,5.$$

Відповідь: А.

Завдання 29. (ЗНО 2011 р.) «Визначте знаменник геометричної прогресії (b_n) якщо $b_9 = 24$, $b_6 = -\frac{1}{9}$.» [50]

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	3	6	-6

Розв'язання:

$$b_9 = b_6 \cdot q^3;$$

$$q^3 = \frac{b_9}{b_6};$$

$$q^3 = \frac{24}{-\frac{1}{9}} = -216;$$

$$q = -6.$$

Відповідь: Д.

Завдання 30. (пробне ЗНО 2010 р.) «Задано геометричну прогресію (b_n) , для якої другий член $b_2 = 12$ і знаменник $q = -2$. Знайдіть b_1 .» [50]

А	Б	В	Г	Д
24	14	10	-6	-24

Розв'язання:

$$b_2 = b_1 q;$$

$$b_1 = \frac{b_2}{q};$$

$$b_1 = \frac{12}{-2} = -6.$$

Відповідь: Г.

Завдання 31. (ЗНО 2010 р.) «Оператор мобільного зв'язку запусив акцію «Довше розмовляєш – менше платиш», переваги якої: відсутня плата за з'єднання; перша хвилина розмови абоненту коштуватиме 30 коп, а кожна наступна буде меншою на 3 коп ніж попередня хвилина; за одинадцяту хвилину та всі наступні хвилини не нараховується плата; ці умови діють для користувачів усіх мобільних операторів країни. Згідно з умовами акції, скільки коштуватиме 8-хвилинний дзвінок (у грн) для абонента мобільного оператора?» [50]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 0,3; \quad d = -0,03; \quad n = 8;$$

$$S_n = \frac{2a_1 - d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$S_8 = \frac{2 \cdot 0,3 - 0,03 \cdot 7}{2} \cdot 8 = 0,39 \cdot 4 = 1,56.$$

Відповідь: 1,56.

Завдання 32. (ЗНО 2010 р. додаткова сесія) «Робітники отримали замовлення викопати криницю. За один викопаний метр криниці їм платять 50 грн, за кожний наступний – на 20 грн більше, ніж попередній. Скільки заплатять робітникам за викопану криницю глибиною 12 м?» [50]

Розв'язання: Розглянемо арифметичну прогресію (a_n)

$$a_1 = 50; \quad d = 20; \quad n = 12;$$

$$S_n = \frac{2a_1 - d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$S_8 = \frac{2 \cdot 50 - 20 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 320 \cdot 6 = 1920.$$

Відповідь: 1920.

Завдання 33. (ЗНО 2009 р. основна сесія) «Яка з наведених послідовностей є арифметичною?» [50]

А	Б	В	Г	Д
9; 7; 4; 1	-4; -2; 0; 1	3; 6; 12; 24	1; 3; 6; 10	3; 7; 11; 15

Розв'язання:

$$d = a_{n+1} - a_n;$$

$$a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4;$$

$$a_3 - a_2 = 11 - 7 = 4;$$

$$a_4 - a_3 = 15 - 11 = 4.$$

Відповідь: Д.

Завдання 34. (ЗНО 2008 р. основна сесія) «Обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.» [50]

Розв'язання:

$$b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = \frac{5}{3};$$

$$b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = \frac{5}{9};$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3};$$

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{\frac{5}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Відповідь: 2,5.

Завдання 35. (ЗНО 2007 р. основна сесія) «Знайдіть суму перших дванадцяти непарних натуральних чисел» [50]

А	Б	В	Г	Д
---	---	---	---	---

9; 7; 4; 1	-4; -2; 0; 1	3; 6; 12; 24	1; 3; 6; 10	3; 7; 11; 15
------------	--------------	--------------	-------------	--------------

Розв'язання: Перші 12 непарних натуральних чисел 1, 3, ..., 23 утворюють арифметичну прогресію:

$$a_1 = 1; a_{12} = 23; d = 2;$$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{1 + 23}{2} \cdot 12 = 24 \cdot 6 = 144.$$

Відповідь: 144.

РОЗДІЛ 3. ДИДАКТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПО ТЕМІ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ» ПРИ ДИСТАНЦІЙНОМУ НАВЧАННІ

3.1. Дидактичне забезпечення. Організація дистанційного навчання математики

Використання дидактичного забезпечення на уроках алгебри у класах профільного рівня є важливим засобом в сучасному навчальному процесі.

Дидактичне забезпечення – це різновид наочних підручників, переважно карти, таблиці, набори карток з текстом, цифрами або малюнками, реактиви, рослини тощо, які роздаються учням для самостійної роботи в класі і вдома або демонструються вчителем перед усім класом.

Під електронним дидактичним матеріалом розуміють документи, які цілеспрямовано розроблені для навчального процесу за допомогою додатків загального призначення і побудовані відповідно до змісту навчальної теми і методики навчання предмету. Використання електронних навчальних матеріалів дозволяють вчителям:

- посилити мотивацію навчання шляхом використання різноманітних видів діяльності та джерел інформації;
- формувати в учнів навичок пізнавальної діяльності;
- діагностувати помилки та оцінити результати;
- здійснювати контроль із зворотним зв'язком щодо наслідків діяльності учнів;
- віалізувати навчальну інформацію;
- моделювати навчальні або дослідницькі об'єкти (комп'ютери можуть не тільки створювати моделі, але й дозволяють змінювати умови презентації для відтворення інформації з оптимальним темпом, який сприймають учні);
- формувати інформаційну компетенцію вчителя та учнів.

Організація дистанційного навчання в умовах тривалої ізоляції (лист Міністерства освіти і науки України від 23.03.2020 №1/9-173 «Щодо організації

освітнього процесу в закладах загальної середньої освіти під час карантину») - швидке, гнучке реагування вчителів України на виклики сучасного світу.

Велика кількість теоретичних і практичних зарубіжних досліджень присвячена дистанційному навчанню.

Різні підходи до визначення дидактичного забезпечення, дозволяють розглядати це поняття як:

- цілеспрямований процес діалогу, асинхронної чи синхронної взаємодії між вчителями та учнями та використання засобів навчання, незалежно від їх розташування у просторі та часі (А. Бітченко, С. Мясников);
- організаційна форма навчального процесу, в якій активні учасники (об'єкт і суб'єкт навчання) досягають навчальних цілей, в основному здійснюючи навчальну взаємодію на певній відстані (В. Биков);
- комплексна, цілісна та гуманістична форма навчання, заснована на широкому використанні традиційних та нових інформаційних технологій та її технічних засобів, що використовується для представлення навчальних матеріалів, самостійного навчання та організації діалогу між викладачами та учнями, коли процес навчання не залежить від їх положення в просторі і часі і не залежить від конкретного навчального закладу (А. Андрєєв).

Відповідно до Положення про дистанційне навчання (наказ Міністерства освіти і науки України від 25.04.2013 №466), дистанційне навчання - це персоналізований процес набуття знань, умінь, навичок пізнавальної діяльності людини, це непряма взаємодія між віддаленими учасниками освітнього процесу, яка функціонує на основі сучасної психології та викладання у професійному середовищі з інформаційно - комунікаційними технологіями.

Дистанційне навчання - це ефективна форма навчання, яка використовує традиційні та специфічні методи, засоби та форми, засновані на комп'ютерних і телекомунікаційних технологіях.

Особливостями дистанційного навчання є:

- модульний зміст навчання;
- гнучкість (зручний час, місце, темп роботи);
- інтерактивність;
- мобільність (ефективний зворотній зв'язок між учителем і учнем);
- індивідуалізація (індивідуальний підхід);
- співробітництво та співтворчість;
- масовість (доступність необмеженої кількості учнів до джерел інформації);
- технологічність (використання нових досягнень у галузі інформаційних технологій);
- новий статус учителя (координатор інформаційного процесу, консультант, керівник навчальних проєктів).

Організовуючи дистанційне навчання, необхідно неухильно дотримуватись відповідних нормативних документів.

Засоби дистанційного навчання

Тема	Засоби дистанційного навчання
Організація дистанційного навчання	<ul style="list-style-type: none"> • Microsoft Teams (https://teams.microsoft.com/start) • Google Classroom (https://classroom.google.com) • Class Dojo (https://www.classdojo.com) • GIOS (https://gioschool.com) • МійКлас (https://cmiyklas.com.ua/info/unciteliam) • Edmodo (https://new.edmodo.com)
Організація освітнього інтерактивного простору	<ul style="list-style-type: none"> • Padlet (https://padlet.com/) • Lino It (https://en.linoit.com/) • MindMeister (https://www.mindmeister.com/)

	<ul style="list-style-type: none"> • Mindomo (https://www.mindomo.com/)
Дистанційна перевірка знань, створення навчальних тестів	<ul style="list-style-type: none"> • «На Урок» (https://naurok.com.ua/test/create) • LearningApps (https://learningapps.org/) • Kahoot! (https://kahoot.com) • Matific (https://www.matific.com/ua/uk/home/) • Google форми (https://www.google.com.ua)
Організація відеоконференцій, проведення відеоуроків	<ul style="list-style-type: none"> • Zoom (https://zoom.us/) • Google Hangouts (https://hangouts.google.com/) • Skype Meet Now (https://www.skype.com/uk/free-conference-call/) • Cisco Webex (https://www.cisco.com/)
Підготовка до ЗНО, систематизація теоретичного матеріалу	<ul style="list-style-type: none"> • EdEra (https://www.er-era.com/) • iLearn (https://ilearn.org.ua/) • Prometheus (https://prometheus.org.ua/) • Khan Academy (https://uk.khanacademy.org/) • Be smart (https://besmart.eduget.com/)
Організація дослідницької діяльності: побудова та дослідження певних об'єктів	<ul style="list-style-type: none"> • GeoGebra, GeoGebra 5.0 (https://www.geogebra.org) • Advanced Grapher 2.2 (https://www.alentum.com/agrapher) • графічний онлайн калькулятор Desmos (https://www.desmos.com/)
Електронні підручники	<ul style="list-style-type: none"> • https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/pidruchniki/elektronni-pidruchniki

Організація дистанційного навчання передбачає:

1. Згідно з календарним тематичним планом з математики сплануйте роботу та визначте методи посилення навчального процесу (поєднання

навчальних тем або закріплення навчальних модулів; перегляд або самостійне вивчення неосновних навчальних матеріалів; організація проєктної діяльності).

2. Вибір технології, форми та методу дистанційного навчання.

3. Визначте стратегії дистанційного навчання (синхронні, асинхронні).

Синхронна стратегія – вчителі та учені знаходяться в постійній взаємодії в режимі реального часу.

Асинхронна стратегія – не передбачає явного прямого контакту, тому інформацію (демонстрації, відеоуроки) можна передавати через відео, комп'ютер або іншими методами, придатними для дистанційного навчання. При цьому діти самостійно розподіляють свій власний час, виконуючи завдання у зручний для них час.

4. Вибір засобів дистанційного навчання (хмарні сервіси, онлайн-платформи, віртуальні дошки, динамічні математичні системи, відеоуроки, інтерактивні вправи, освітні мережеві ресурси).

5. Організувати інтерактивну взаємодію учасників навчального процесу (електронна пошта, форум, чат, відеоконференція, блог тощо).

6. Забезпечити зворотній зв'язок (контроль) з учнями та їхніми батьками.

7. Визначення та дотримання правил та термінів дистанційного навчального процесу, прояв завдань учня. [33, С. 4-10]

З метою забезпечення організації навчального процесу та виконання навчального плану рекомендуємо використовувати дистанційне навчання.

Для організації дистанційної взаємодії з учнями для вивчення, закріплення та засвоєння навчального матеріалу, організації самостійної роботи рекомендуємо використовувати Google Classroom, який передбачає:

- створення окремих класів для предмета або кожної групи учнів;
- створення оголошень для однієї або кількох груп;
- розмістити загальні відомості про організацію навчального процесу: теми, кількість годин тощо;

- розміщувати навчальні матеріали для учнів, включаючи відео (YouTube або відео з власного сховища файлів) або посилання на відповідні інтернет-ресурси;
- створювати завдання, що дозволяють прикріплювати посилання, мультимедійний контент, різні типи файлів, а також створювати та зберігати файли на Google Disk;
- встановити термін виконання кожного конкретного завдання до найближчої кількості хвилин;
- встановити рівні для виконаних завдань та встановити гнучку шкалу оцінок для кожного конкретного завдання;
- можливість динамічного відображення вмісту редагування в режимі реального часу, редагування та коментування завдань, які виконують учні;

Переваги Google Classroom

1. Просте налаштування: вчителі можуть додавати учнів до курсу або надсилати коди для приєднання. Після того, як учень зареєструється та отримають звичайний обліковий запис Google, вони зможуть отримати доступ до Google Classroom.. Створення курсу займає всього кілька хвилин (створення Клас Google Classroom - інструкція, відео).

2. Економія часу: створювати, перевіряти та оцінювати завдання в електронному форматі швидше та зручніше, ніж у зошитах.

3. Зручна організація: завдання надаються учням у відповідних розділах, а матеріали курсу (документи, фото, відео тощо) автоматично додаються в папки на Google Диску.

4. Швидка комунікація: вчителі можуть негайно розміщувати оголошення та створювати дискусії, а учні можуть ділитися ресурсами один з одним і відповідати на запитання у записах курсу [33, С. 4-10].

Для молодших школярів рекомендується використовувати платформу для дистанційного навчання ClassDojo, яка підходить для настільних комп'ютерів, ноутбуків, планшетів і мобільних телефонів (для останніх треба буде завантажити застосунок).

Переваги **ClassDojo**

1. Реєстрація: учитель створює свій «Клас», та надсилає посилання на його.
2. Спілкування вчителів і учнів: учасники «Класу» переглядають публікації учителя в хронологічній послідовності.
3. Учителі можуть прикріплювати PDF-файли та посилання на веб-ресурси до матеріалів і завдань.
4. Окремим варіантом для платформи є створення чотирьох типів завдань. Учні можуть писати роботи та прикріплювати файли чи малювати роботи, фотографувати чи знімати короткі відео. Вчителі відразу бачать, які завдання виконали учні.
5. Сторінка «Класу» дає учням можливість спілкуватися. Після того, як учитель створить допис, учні можуть коментувати.
6. Гейміфікація навчання: кожен учень отримує аватарку у вигляді монстра. Завдання монстра - зібрати бали за завдання, а вчитель виділяє учням певну кількість балів за кожне завдання.
7. Передбачений щоденник роздумів учня.
8. Батьків можна запросити приєднатися, вони можуть бачити своїх дітей та їх результати лише в «Класі», стрічку із завданнями й коментарями від усіх, що дає змогу відстежити успішність дитини під час дистанційного навчання в динаміці [33, С. 4-10].

ClassDojo - це зручний інструмент для оцінки ефективності роботи класу в реальному часі, це зручна та проста в управлінні система заохочення з різними ролями та рівнями доступу, де кожен може знайти мотивацію для досягнення певного досягнення.

GIOS (Global Innovative Online School) - платформа для змішаного та онлайн-навчання під час карантину. Навчання на платформі GIOS безкоштовне.

Навчальні матеріали базуються на чинній навчальній програмі з математики.

Кожен урок містить «інтерактивне» відео, опорну схему, розв'язані типові задачі, завдання в тестовій формі, на визначення відповідності, на пошук помилок

(допомагає розвивати критичне мислення), завдання для встановлення послідовності дій, на введення відповіді.

Заняття побудовані в інтерактивній формі, що дозволяє учням ефективніше вивчати матеріали.

МійКлас – це освітній ресурс, що використовується для організації дистанційного навчання, його концепція "навчання без примусу". Однією з його особливостей є його технічні складові: створення умов завдання та автоматична перевірка відповідей.

Цей ресурс забезпечує автоматичне генерування типових завдань. Вирішуючи такі завдання, учні можуть навчати нових людей розв'язувати конкретні задачі з будь-якого предмета. Кожного разу, коли завдання перезапускається МійКлас автоматично створює нові умови вправи, змушуючи учня вирішувати завдання того самого типу в режимі «нескінченного навчання».

Цей ресурс дозволяє школярам самостійно засвоювати матеріал та вчитися на своїх помилках, завдяки функції «Кроки розв'язання»: виконуючи завдання та переглядаючи результати, учні можуть отримати доступ до детальних інструкцій щодо розв'язання задачі.

Батьки можуть зареєструватися в МійКлас і зв'язати свої особисті дані з особистими даними своїх дітей, щоб вони могли відстежувати навчальне життя школяра.

Переваги МійКлас

1. Детальне пояснення теоретичного матеріалу з прикладами розв'язаних задач.
2. Умови завдання генеруються, що унеможлиблює списування.
3. Функціонал МійКлас зі створення робіт для перевірки (числового, творчого, текстового або тестового завдання) дозволяє вчителю не тільки швидко створювати особисті роботи чи проекти, а й автоматично перевіряти відповіді.
4. Автоматизована класифікація балів учнів: вчителі отримують бали з розбивкою за показниками.

Автоматичний моніторинг предметів, занять, завдань, тем і часу, витраченого учнями, без зусиль викладачів і результатів навчання часу, що сприяє прозорості показників успішності, забезпечує достовірність даних та уникає конфліктів для оцінки знань учнів. .

Edmodo – це освітня технологічна платформа для дистанційного навчання.

Можливості Edmodo:

- організація навчального процесу;
- створення класів та навчальних груп;
- організація різних завдань;
- завантаження файлів та посилань у різних форматах;
- публікація повідомлень на стіні (для всіх) або розсилка особистих повідомлень;
- проведення опитувань;
- створення та публікація тестів, вікторин;
- вбудовування посилань, відео, зображень, аудіо в повідомлення на стінах та завданнях;
- відстеження процесу виконання учнями завдань;
- користуватися електронними журналами;
- створити бібліотеку навчальних ресурсів та обмінятися матеріалами з колегами.

Для організації простору навчальної взаємодії доцільно прийняти:

- віртуальну інтерактивну дошку *Padlet Padlet* (<https://padlet.com/>)
- віртуальну онлайн дошку *LinoIt* (<http://en.linoit.com/>)
- інтелект карта *MindMeister* (<https://www.mindmeister.com/>)
- ментальну карту *Mindomo* (<https://www.mindomo.com/>)

Ви можете використовувати віртуальну інтерактивну дошку Padlet:

- як групова робоча платформа для «мозкового штурму», узагальнення та систематизації та рефлексії знань;
- для розміщення навчальної інформації та практичних завдань;
- організовувати спільні онлайн-завдання;
- для публікації ідеї проекту та обговорюйте їх в Інтернеті;
- як інструмент організації спільної діяльності учнів.

Звертаємо увагу на характеристики онлайн-тестування «На Урок»:

- безкоштовний (кількість завдань і кількість тестів – необмежена);
- відкрита підготовлена база тестів;
- інтеграція з спеціалізованим кабінетом вчителя;
- вміння створювати різні типи завдання;
- можливість друку тестової та флеш-картки;
- контроль виконання робіт;
- 12-бальна та 100-бальна система оцінювання;
- існування певних символів, які можна використовувати при створенні тесту;
- можливість розповсюдження тестів у Google Classroom;
- робота в режимі реального часу;
- можливість завантажувати результати;
- широкі можливості аналізу результатів роботи.

У звичайному робочому процесі онлайн-тести можна використовувати як карту флеш -пам'яті для роботи в режимі реального часу і як домашнє завдання.

У період ізоляції рекомендуємо використовувати онлайн-тести як домашнє завдання, оскільки вчителі мають можливість:

- налаштувати завдання на будь-яку тему та дистанційно контролювати їх виконання;
- перейменовувати тестове завдання для іншого класу;
- контролювати точний час виконання конкретними учнями завдань;
- аналізувати статистику успішності;

- завантажувати звіт про ефективність у електронній таблиці Excel.

Платформа LearningApps.org – це онлайн-сервіс, який дозволяє створювати інтерактивні вправи з:

- знайдіть потрібну пару;
- хронологічною послідовністю;
- класифікацією;
- заповненням пропусків.

Крім того, Learningapps.org забезпечує дистанційне навчання для кожного вчителя, оскільки дозволяє створювати набір курсів у власному обліковому записі, вводити дані про учнів, їх особисту інформацію, встановлювати паролі для входу та проводити практику.

Kahoot! – безкоштовний онлайн-сервіс для створення вікторин, навчальних ігор, тестів з кількома варіантами відповідей. Ефект змагання додає таймер, встановлений вчителем при створенні тестів.

Школяр, який першим відповів на онлайн-тест, отримує більше балів, ніж суперник.

Результати тестування зберігаються в таблиці MS Excel у вигляді списку, за яким можна контролювати знання учнів.

Classtime (раніше GoPollock) – онлайн-сервіс для створення різних типів завдань: одна правильна відповідь, кілька правильних відповідей, правда / неправда, текст, встановіть відповідність, визначення порядку, виділення тексту та виділення області. Функція Classtime надається безкоштовно. У безкоштовному плані Classtime вчителі можуть створювати свої запитання, проводити курси, приєднуватися до учнів і переглядати результати їх роботи в режимі реального часу, надавати особисті завдання кожному учню та відстежувати діяльність учнів протягом уроку.

Перевірка знань і зворотній зв'язок має бути організованою за допомогою Google Форм, що дозволяє створювати форми з різними елементами або типами запитань (усі представлено цими типами), причому будь-які запитання можна зробити обов'язковими. У процесі створення форми ви можете легко змінити

порядок запитань і вибрати дизайн для оформлення; посилання на форму генерується автоматично після її створення [33, С. 4-10].

Переваги Google форм:

1. Учням потрібно лише натиснути на посилання, щоб скласти тест онлайн.
2. Створений тест можна вставити в блог або веб-сайт і надіслати електронною поштою.
3. Тест містить набір тем.
4. Ви можете зібрати деяку статистичну інформацію з відповідей аудиторії.
5. Можлива автоматична оцінка відповіді, підрахунок балів, коментування відповіді та відкладення відображення результату.
6. Доступне індивідуальне налаштування – показ запитань на основі відповідей користувачів.
7. Інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, здатний копіювати запитання з текстового редактора.

Уроки онлайн рекомендуємо проводити за допомогою:

- Zoom (<https://zoom.us/>);
- Google Hangouts (<https://hangouts.google.com/>);
- Skype Meet Now (<https://www.skype.com/uk/freeconferencecall/>);
- Cisco Webex (<https://www.cisco.com/>).

Систематизований теоретичний матеріал із математики, алгебри, геометрії, алгебри та початків аналізу, завдання для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики розміщено за посиланнями:

- EdEra (<https://www.ed-era.com/>);
- iLearn (<https://ilearn.org.ua/>);
- Prometheus (<https://prometheus.org.ua/>);
- Khan Academy (<https://uk.khanacademy.org/>),
- Be smart (<https://besmart.eduget.com>).

З метою систематизації та узагальнення знань пропонуємо створювати ментальні карти Mindmeister, Popplet, Cacco. У процесі побудови ментальної

карти учні вчаться вибирати, систематизувати та запам'ятовувати ключову інформацію, аналізувати й узагальнювати, виховувати творче та креативне мислення, пам'ять та увагу.

Важливою частиною організації дистанційного навчання є те, що школярі мають доступ до електронних підручників, розміщених на сайті Міністерство освіти і науки ([https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita / pidruchniki / elektronni-pidruchniki](https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/pidruchniki/elektronni-pidruchniki)).

Для організації дистанційної наукової діяльності рекомендуємо використовувати:

- курс динамічної математики GeoGebra, GeoGebra 5.0 <http://www.geogebra.org>
- Інструменти для обробки функцій та їх графіків (побудовник графіків) Advanced Grapher, Advanced Grapher 2.2 (<http://www.alentum.com/agrapher/>);
- графічний онлайн калькулятор Desmos (<https://www.desmos.com/>).

Проектна та дослідницька діяльність учнів допомагає виховувати у початківців високого рівня креативність та критичне мислення, включаючи реалізацію аналізу, синтезу та оцінки.

На різних етапах проектної діяльності рекомендується використовувати:

- Google Форми, Kahoot! – пошук теми для дослідження (опитування, анкетування);
- Padlet (<https://padlet.com/>), LinoIt (<http://en.linoit.com/>) – організація процесу обговоріння досліджуваної проблеми;
- Google Docs (Word, Excel) – обговорювати з учнями робочий процес проекту, визначати групи та завдання, які вони виконуватимуть (створювати, редагувати, онлайн-формат документів);
- Google Docs (PowerPoint), Prezi (<https://prezi.com/>), Canvas (<https://www.canva.com/>) – організація проектної роботи; створення презентацій, публікацій, інфографіки;

- Padlet (<https://padlet.com/>), LinoIt (<http://en.linoit.com/>), Google Sites, Blogger Google – подання отриманих результатів.

З метою організації процесу обговорення проблеми, що досліджуватиметься, доцільно використовувати Padlet, Lino It – сервіси, завдяки яким є можливість:

- оформити віртуальну інтерактивну дошку та заповнити її даними;
- організувати спільний доступ користувачів до неї;
- експортувати її в різні формати;
- розмістити в соціальних мережах.

На віртуальну дошку можна додавати графічні, текстові та мультимедійні (відео або презентації) файли, посилання на веб-сторінки, нотатки.

Дистанційне навчання забезпечує учням необмежений доступ до електронних освітніх ресурсів, які надають можливості для формування навачок, необхідних у XXI столітті:

- інформаційна грамотність – здатність шукати інформацію, порівнювати її з різних джерел, визначати та відбирати найбільш потрібну інформацію;
- мультимедійна грамотність – здатність визначати та використовувати різні види медіаресурсів у роботі та навчанні;
- організаційна грамотність – вміння планувати час так, щоб встигнути все, що заплановано;
- розуміння взаємозв'язків, що існують між різними людьми, групами та організаціями;
- комунікативна грамотність – це навички ефективного спілкування і співробітництва;
- продуктивна грамотність – вміння створювати якісну продукцію, вміння використовувати інструменти планування.

3.2. Підготовка та методика створення відеоуроків з математики

Сьогодні, на допомогу вчителеві приходять сучасні психолого-педагогічні та інформаційно-комунікаційні технології, які надають учням велику кількість навчальних матеріалів, що дають їм можливість самостійно опрацювати навчальні матеріали, а також взаємодію (зворотній зв'язок) між учнями та вчителем під час навчального процесу.

Для використання цих технологій вчителі використовують: власний веб-сайт, платформу «Мій клас», «*Google Classroom*», «*Zoom*», «*YouTube*», інструменти електронної пошти тощо.

Однак у процесі навчання основним джерелом інформації залишається мова вчителя, що впливає на слуховий аналізатор і тим самим виховує почуття мови.

Прослуховування закадрового тексту може виховувати в учнів стійкість уваги, слухової пам'яті та уваги, формувати навички спостереження за словами, виховувати ключове вміння – національномовне спілкування: вміти грамотно, доречно та правильно використовувати у промові математичні терміни [25, С. 37-43].

«*Zoom*» – це сервіс, за допомогою якого можна організувати та проводити online-уроки із школярами. Такі уроки проводяться у визначений викладачем час. Звичайно, ви можете записати цей урок і дозволити відсутнім учням переглянути його. Відповідно до вимог чинного законодавства, згода батьків учнів, які беруть участь у курсі, все одно потрібна, щоб не порушувати права на навчання кожного учня.

Тому в цьому випадку найкраще не організувати онлайн-уроки, а створювати власні відеоуроки.

Відеоурок – це форма дистанційного навчання, за допомогою якої можна змінити класичну форму навчання в навчальних закладах: замість пояснення матеріалу з підручників викладачі записують необхідні дії та пояснення дій на відеокамеру або виконують дії за допомогою голосу на комп'ютері.

Час необхідний вчителю для запису відеоуроку залежить від його досвіду роботи з комп'ютером, оскільки, окрім підготовки відеофайлів його також потрібно ще відредагувати (обрізати, об'єднати в ціле тощо) та завантажити на YouTube.

Відеоуроки вигідно створювати для демонстрації нових навчальних матеріалів, підвищення рівня знань учнів, узагальнення та систематизації вивченого матеріалу [33, С. 4-10].

Для школярів відеоуроки мають такі переваги:

1. Дивитися урок в зручний час.
2. Повторний перегляд всього уроку, так і його окремих фрагментів.
3. Планування часу на навчання.
4. Вміти задавати питання та отримувати відповіді після перегляду відеоуроку.

5. Підвищити ефективність засвоєння інформації.

Створення відеоуроку складається з двох етапів:

1. Підготовка матеріалів та розробка сценарію відеоуроку.
2. Технічна реалізація (тобто запис і монтаж відеоуроку).

На першому етапі створення відеоуроку вчитель повинен:

1. Поставити собі такі запитання:

- 1) Якої мети я хочу досягти?
- 2) Що мені для цього потрібно зробити?
- 3) Як досягти цієї мети?

2. Визначити:

- 1) тему, мету курсу та очікувані результати;
- 2) мати зміст нового навчального матеріалу;
- 3) завдання та вправи, які дасть учитель при поясненні матеріалів, разом із відповідями;

- 4) самостійним розв'язуванням завдань і вправ.

3. Продумати:

- 1) як актуалізувати опорні знання учнів;

2) демонстрація доступних підручників, встановлення цікавості сюжету, можливо, надавши якоїсь несподіванки, як досягти синхронного впливу голосу вчителя, адже все це концентрує увагу учня та сприяє несвідомому запам'ятовуванню матеріалу;

3) в якому порядку подати новий навчальний матеріал та приклади розв'язування задач і вправ;

4) як виглядатиме обговорюваний об'єкт;

5) як виділити дані об'єкти, на які буде звертатися увага учнів при поданні матеріалів (підкреслити, обвести).

4. Урахувати:

1) психофізіологічні характеристики уваги:

- зосередження уваги на об'єкті;
- стійкість уваги, яка може тривати 15-20 хвилин навіть при активному спілкуванні з об'єктом дослідження;
- обсяг уваги - це кількість об'єктів і символів, які одночасно сприймаються досить чітко, зазвичай 7 ± 2 ;
- розподіл уваги - звертайте увагу на кілька об'єктів одночасно і повністю сприймайте їх одночасно. В учнів він не дуже розвинений, тому при підготовці зображень слід використовувати принцип «фон і фігура», коли досліджуваний об'єкт виступає більш помітним за решту картин на екрані, зосередьтеся на потрібному моменті;
- перевести увагу – переміщення уваги з одного предмета на інший;

2) навантаження відеоуроку як джерела інформації - з одного боку, а з іншого - здатність школяра засвоювати та передавати інформацію. Учні не зможуть обробити складну і велику кількість інформації за межами сприйняття, тому вони не зможуть її отримати взагалі. Коли буде знайдено правильне (оптимальне) співвідношення між змістом представленого навчального матеріалу та його уявною можливістю, інформація буде добре засвоєна [25, С. 37-43].

5. Написання відеоуроку.

На другому етапі створення відеоуроку вчитель повинен:

1. Поставити собі такі запитання:

1) Де зніматимуться відеоуроки (у школі біля дошки чи вдома за комп'ютером, ноутбуком, планшетом тощо)?

2) Що потрібно підготувати для запису відео (дошку, крейду, аксесуари для презентацій, проектор, мультиторд чи електронну online-дошку на моніторі комп'ютера чи ноутбука, як створити презентацію з анімацією тощо)?

2. Визначитися:

1) з відео та аудіозаписуючою апаратурою (камери та мікрофони, вбудовані в смартфони, планшети, ноутбуки або підключені до комп'ютерів тощо);

2) при необхідності використовуйте програмне забезпечення для створення відеокурсів: електронні онлайн-дошки (наприклад, програмне забезпечення IDroo), інструменти для створення анімаційних презентацій (наприклад, знаменитий Microsoft Office PowerPoint тощо);

3) з програмним забезпеченням для запису відео. Наприклад, для запису (зйомки) відео з екрану монітора існують безкоштовні програми: UVScreenCamera, CamStudio, OBS Studio, Ezvid, ShareX та ін.;

4) з програмним забезпеченням для редагування відео. Наприклад, безкоштовна програма Windows Live MovieMaker («Кіностудія»).

3. Продумати:

1) як записувати відео: фрагментами чи повністю;

2) як виглядатиме і виділятиметься зображення предмета під час викладу навчального матеріалу;

3) як завершити відеоурок.

4. Урахувати:

1) тривалість відеоуроку (не більше ніж 15-20 хв);

2) відеоуроки – це навантаження джерела інформації. Якщо урок містить складну і дуже об'ємну інформацію, яка не сприймається учнем, то його слід розділити на кілька відеоуроків.

5. Переконайтеся, щоб у відео не було зайвого контенту, який безпосередньо не вплине на імідж і розвиток події. Навпаки, весь знятий контент має відповідати головній меті відеоуроку.

6. З'ясуйте правильний зв'язок між фоном і подіями, що відбуваються на задньому плані, і за допомогою комбінованих наочних рішень зосередьте увагу учнів на основних об'єктах зображення, що мають значення для сюжету переднього плану.

7. Відео сценаріїв розробки та відредагуйте відеоурок [33, С. 4-10].

Вдома, де немає дошки чи крейди, вчителі можуть використовувати скринкаст для створення відеоуроків.

Скринкаст (відео з екрану) - це цифровий відеозапис інформації, що відображається на екрані комп'ютера (відеозахоплення екрану), тобто відеозапис того, що відбувається на моніторі, з додаванням аудіо та коментарів вчителя.

Це практичніше, ніж текстові описи, інструкції чи підручники, оскільки учні відразу бачать, як виконати певні дії [33, С. 4-10].

Ви можете використовувати комп'ютер із зовнішнім мікрофоном або ноутбук із вбудованим мікрофоном і мінімальним набором безкоштовного програмного забезпечення, щоб створити цей відеоурок: Microsoft Office PowerPoint, UVScreenCamera та Windows Live MovieMaker («Кіностудія»).

За допомогою Microsoft Office PowerPoint ми створюємо презентацію з анімацією (за наперед заданим голосовим коментарем зовнішній вигляд або виділення об'єкта має з'являтися при натисканні миші).

Завантажуємо програму UVScreenCamera, інтерфейс якої показаний на рис. 3.1.

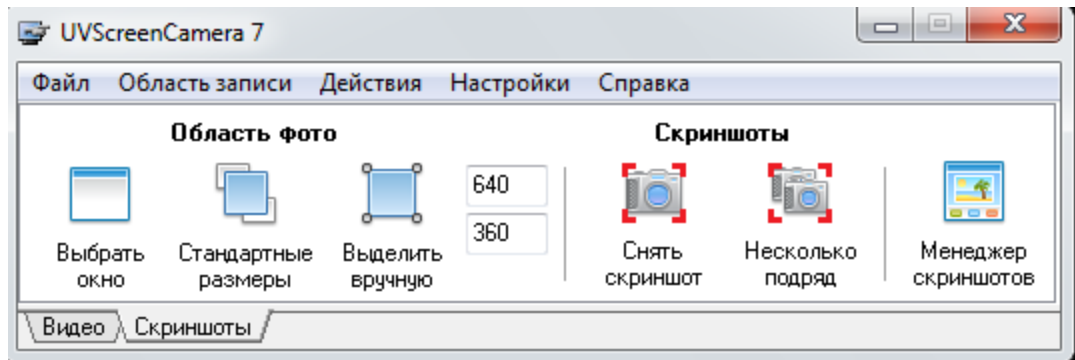


Рис. 3.1. Интерфейс програми UVScreenCamera

У меню «Джерела звуку» вибираємо джерело звуку «мікрофон» (див.рис 3.2.) і натискаємо кнопку «Ок».

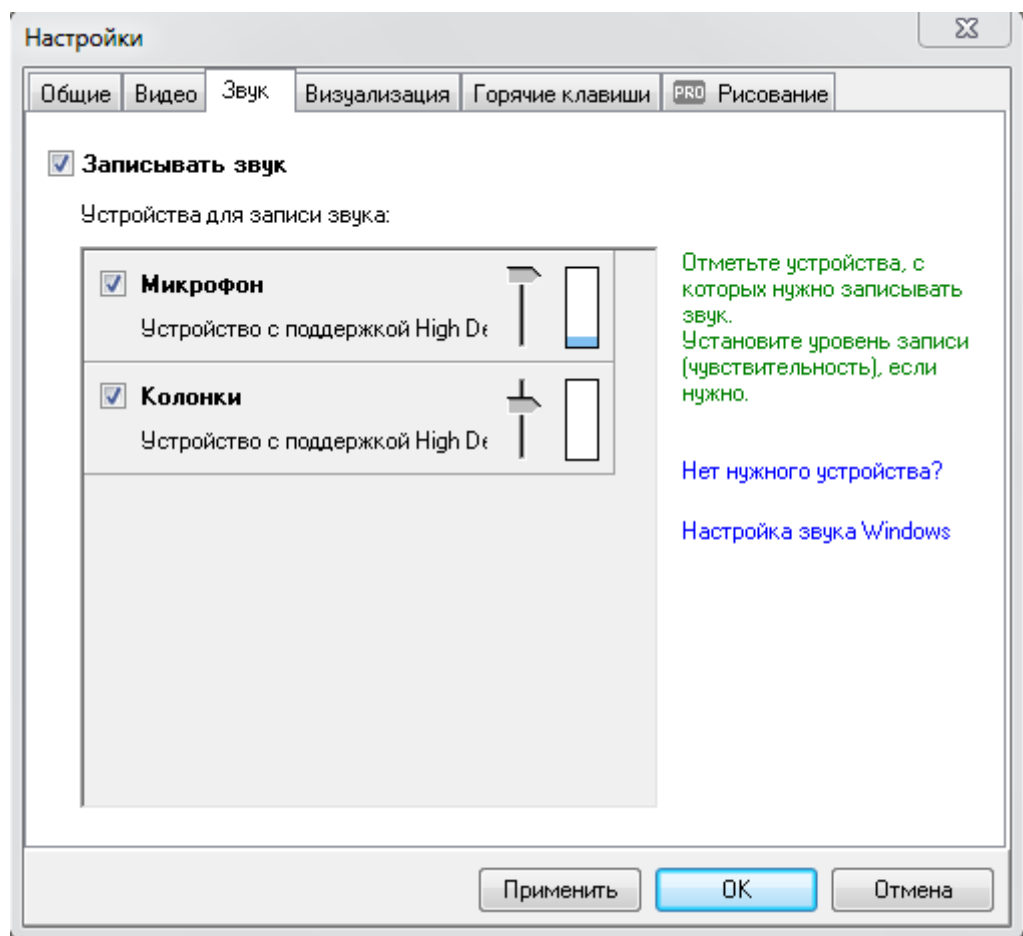


Рис. 3.2. Настройки програми UVScreenCamera

Встановлюємо область запису таку, щоб вона охоплювала весь слайд під час відображення презентації (використовуйте мишу, щоб змінити розмір і положення зеленого контуру прямокутника). Щоб розпочати запис відео та аудіо, натисніть клавішу F11, і завершіть запис – натиснувши клавішу F10, після чого з'явиться повідомлення, показане на рис. 3.3.

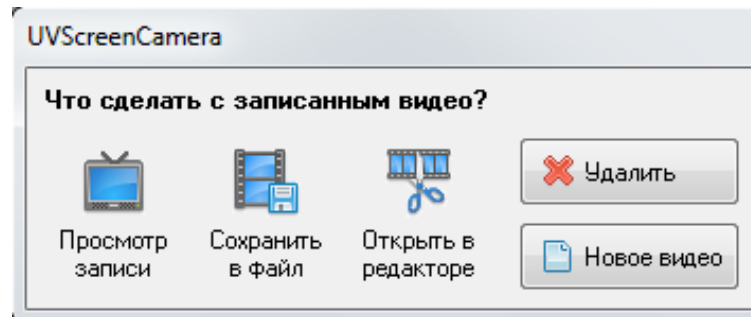


Рис 3.3. Запис відео

Якщо запис зроблено невдало, натискаємо на кнопку «Видалити». Якщо запис треба зберегти, то натискаємо кнопку «Перегляд запису». З'явиться вікно (див. рис. 3.4.).



Рис. 3.4. Попередній перегляд запису відео в програмі UVScreenCamera

Натискаємо на кнопку «Зберегти у файл», і у вікнах, що з'являються, натискаємо на кнопку «Далі» до появи вікна, зображеного на рис. 3.5. Задаємо ім'я файлу, під яким буде збережено відео, та натискаємо кнопку «Зберегти».

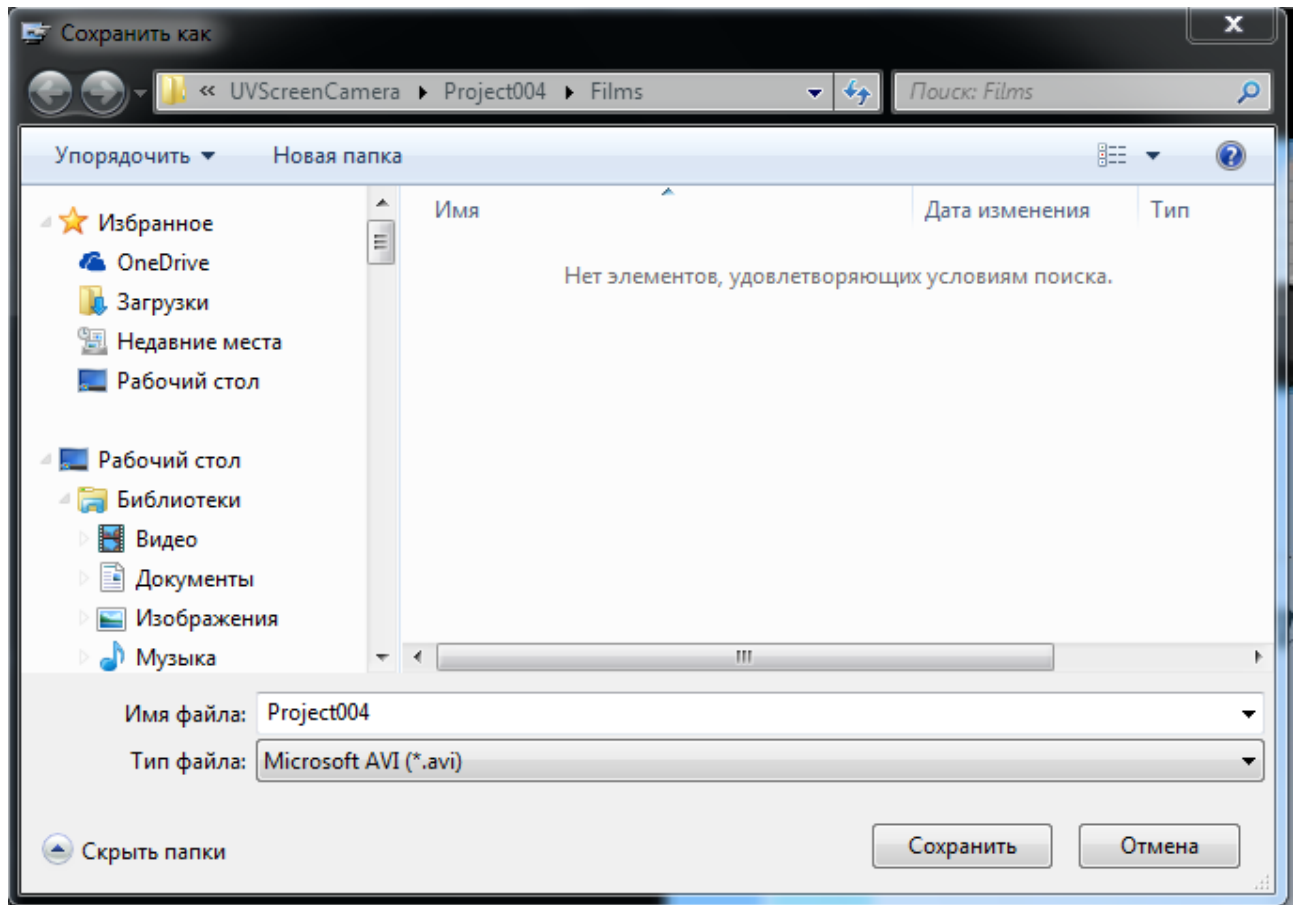


Рис. 3.5. Вікно збереження файла

Завантажити цю програму та більш детально ознайомитися з її роботою можна на сайті: <https://www.softportal.com/software-8654-uvscreencamera.html>.

Після того як всі фрагменти відеоуроку збережені на диску, приступаємо до монтування. Це можна зробити в програмі UVScreenCamera, але простіше і зручніше це робити в програмі Windows Live MovieMaker («Кіностудія»).

Завантажуємо програму Windows Live MovieMaker (рис. 3.6.).

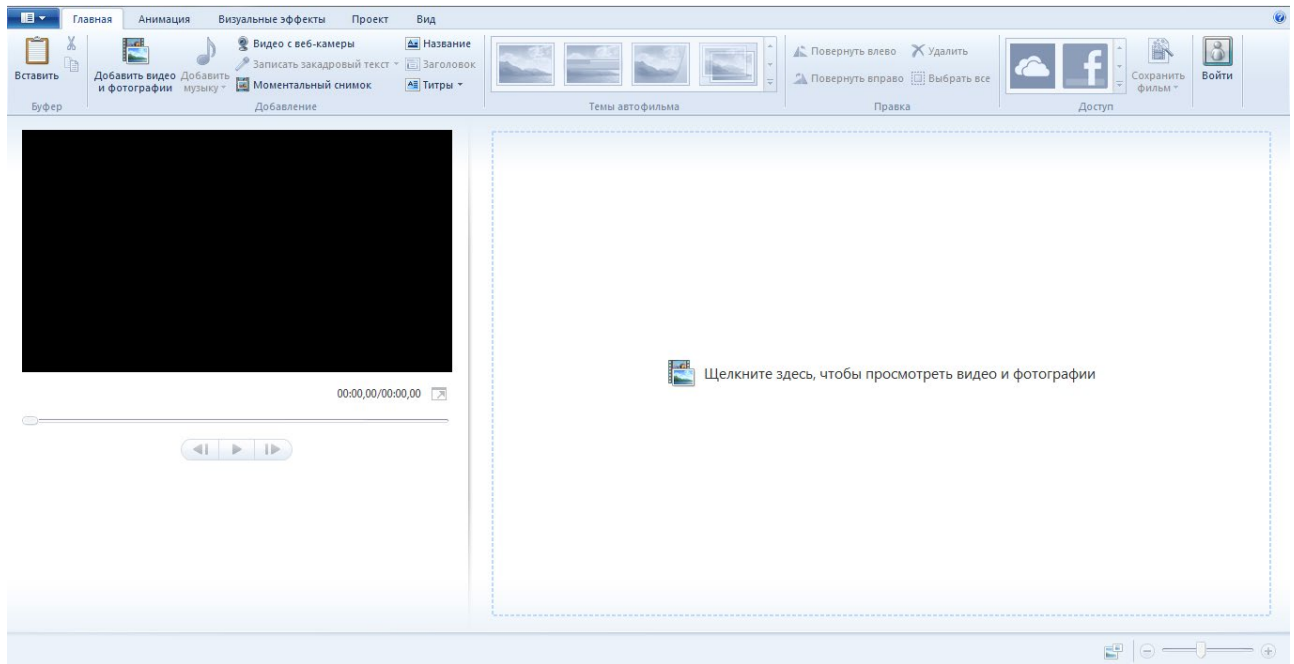


Рис. 3.6. Интерфейс програми Windows Live MovieMaker («Кіностудія») Натискаємо «Додати відео та фото», вибираємо файли, з яких потрібно додати відеофрагмент. Натискаємо курсором «Додати відео та фото», вибираємо файл, з якого додаємо наступний відеофрагмент і т. д., поки не сформуємо весь відеоурок (див. рис. 3.7).

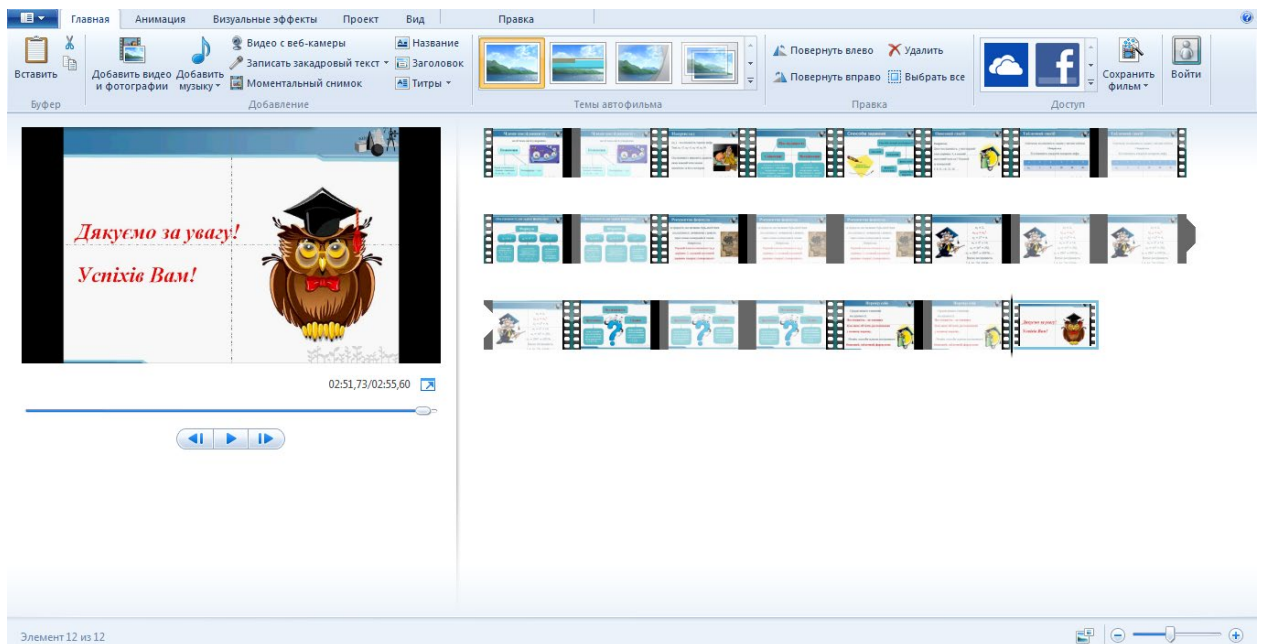


Рис. 3.7. Додавання відеофрагмента в програмі Windows Live MovieMaker Щоб зберегти відеоурок, натискаємо «Файл», «Зберегти фільм», «Комп'ютер» (див. рис 3.8.).

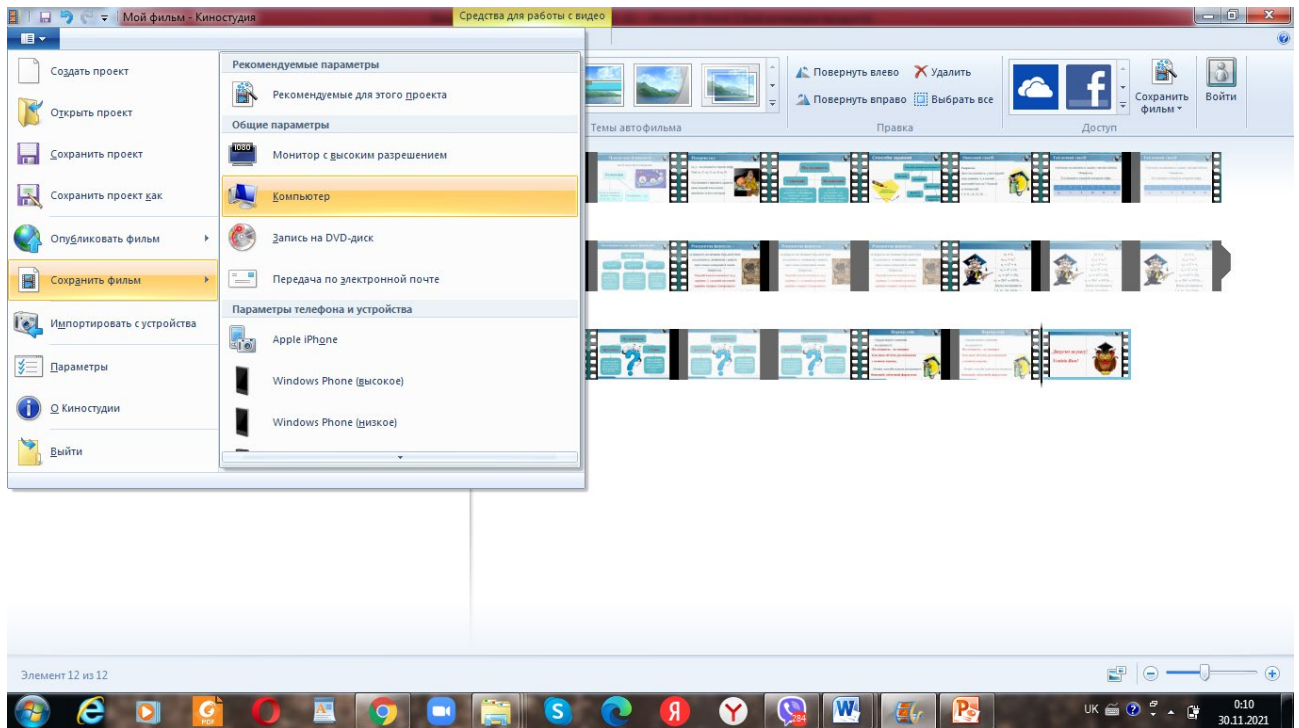


Рис. 3.8. Послідовність збереження відеоурока

Потім з'явиться вікно, в якому задаємо ім'я файлу для збереження відеоурока, та натискаємо кнопку «Зберегти» (див.рис.3.9.).

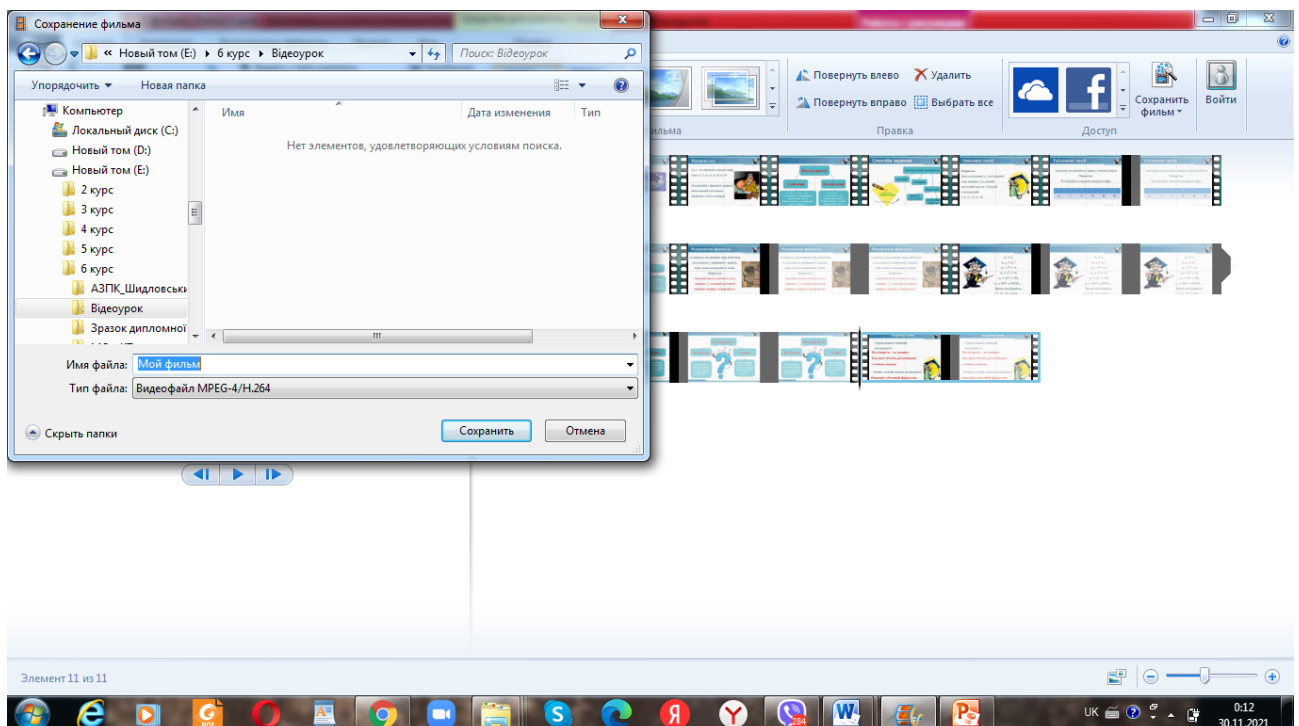


Рис.3.9. Задання ім'я та збереження файлу

Використовуючи Windows Live MovieMaker («Кіностудія»), також можна обрізати відео, додавати анімацію, візуальні ефекти тощо.

Завантажити програму та дізнатися більше про її роботу можна на сайті: <http://home-soft.com.ua/1363-windows-movie-maker-2012.html>.

Відеоурок створено. Завантажуємо його на YouTube та надаємо посилання учням.

3.3. Classtime як допомога вчителю математики для дистанційного навчання при вивченні теми «Числові послідовності»

Сучасний світ часто ставить перед нами нові виклики, тому вміння швидко адаптуватися до змін і бути гнучким стає все більш важливим. У сфері освіти ця проблема особливо актуальна. Багатотижневий карантин у школах та необхідність негайного переходу на дистанційне навчання є дуже серйозним викликом для української системи шкільної освіти [32, С. 11-17].

Сьогодні спостерігається тенденція використання дистанційного навчання як методу організації, заснованого на використанні сучасних інформаційно-телекомунікаційних технологій, що дозволяє організувати навчальний процес дистанційно – без прямого контакту вчителя та учня.

Необхідність упровадження технології дистанційного навчання зумовлена наступними факторами:

- робота з дітьми з обмеженими можливостями;
- робота з учнями, які захворіли;
- організація процесу під час самоізоляції;
- необхідність взаємодії учнів і вчителів;
- реалізація проектів та науково-дослідницьких робіт;
- робота з обдарованими дітьми та ін.

Існує велика кількість засобів дистанційного навчання: електронна пошта, соціальні мережі, системи відеоконференцій, гіпертекстові середовища, спеціальне програмне забезпечення, кожне з яких можна використовувати окремо або в поєднанні з іншими методами.

Рекомендуємо розглянути Classtime як один із корисних інструментів дистанційного навчання для вчителів.

Classtime – дуже цікавий цифровий інструмент оцінювання, нещодавно створений *Pollock Technologies*.

Програма проста у доступі та проста у використанні, що заощаджує час і енергію, а також відстежує роботу учнів протягом усього курсу. Клас ведеться в режимі реального часу, а сервіс передбачає окремий режим роботи для кожного слухача.

Звичайно, багатьом вчителям сподобається те, що *Classtime* має ще й україномовну версію.

Щоб скористатися послугою, вчитель повинен створити свій обліковий запис. Це займе кілька хвилин. Ви можете використовувати бібліотеки або впорядковувати свої папки із завданнями. Навіть у безкоштовній версії сервіс має велику кількість інструментів тестування учнів.

Конструктор дозволяє вводити зображення завдань і посилання з Інтернету, а також відео з каналів YouTube зі свого комп'ютера.

У цих завданнях, крім звичайних тестів на вибір однієї чи кількох правильних відповідей «так-ні», є також тести, яких немає в інших сервісах або мають інший вигляд (рис.3.10.).

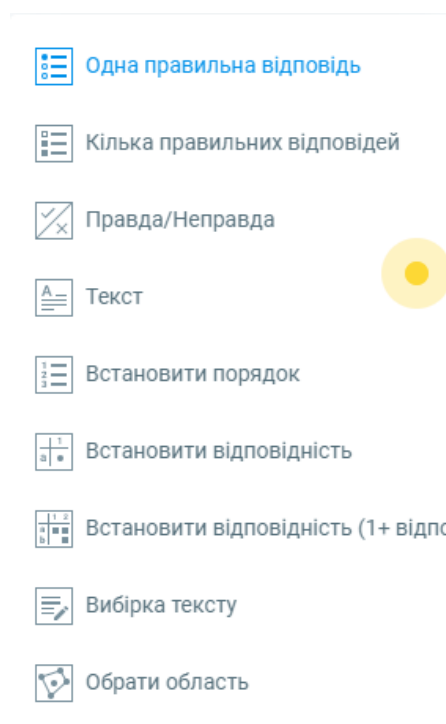


Рис. 3.10. Можливі види тестування

Розглянемо класичний варіант тесту, який полягає у створенні запитання з правильною відповіддю. Створіть завдання, щоб воно виглядало так (рис.3.11.):

The screenshot shows a question editor window. At the top right is a blue button labeled "Зберегти питання". Below it, the question text is "Яка з наведених послідовностей є арифметичною прогресією?". The question ID is "57 / 170". There is a link "Опційно, додайте більше деталей тут...". Below the question are three buttons: "Додати зображення", "Додати YouTube відео", and "Додати аудіо". A dropdown menu shows "Одна правильна відповідь" with a value of "1 бал". There are four radio button options: "3; 6; 12; 24; ...", "7; 10; 12; 13; ...", "-10; 0; 10; -10; ...", and "20; 17; 14; 11; ...". The last option is selected and has a checkmark icon. At the bottom left is a "+ Додати варіант відповіді" button.

Рис. 3.11. Створення питання з однією правильною відповіддю

Зазначайте завдання, вказуйте правильні та неправильні варіанти відповіді. Позначте правильний варіант на початку.

Щоб оцінити рівень знань учнів, можна використовувати довільне введення тексту для створення запитань. Звичайно, ця опція не буде автоматично оцінена. Учитель повинен розглянути домашнє завдання учня та його відповідь на запитання (рис. 3.12.).

The screenshot shows a question editor window. At the top right is a blue button labeled "Зберегти питання". Below it, the question text is "Знайдіть суму перших чотирьох членів геометричної прогресії (bn), якщо b1=2, q= 3". The question ID is "81 / 170". There is a link "Опційно, додайте більше деталей тут...". Below the question are three buttons: "Додати зображення", "Додати YouTube відео", and "Додати аудіо". A dropdown menu shows "Текст" with a value of "1 бал". Below the question is a text input field. A speech bubble at the bottom says "Учні матимуть можливість вільно ввести текст у відповідь на це питання."

Рис. 3.12. Створення питання з довільним уведенням тексту

Кожному завданню вчителі можуть поставити певні бали.

Після створення банку запитань учителю слід натиснути кнопку «Почати нову сесію», а потім він зможе його налаштувати (рис. 3.13.).

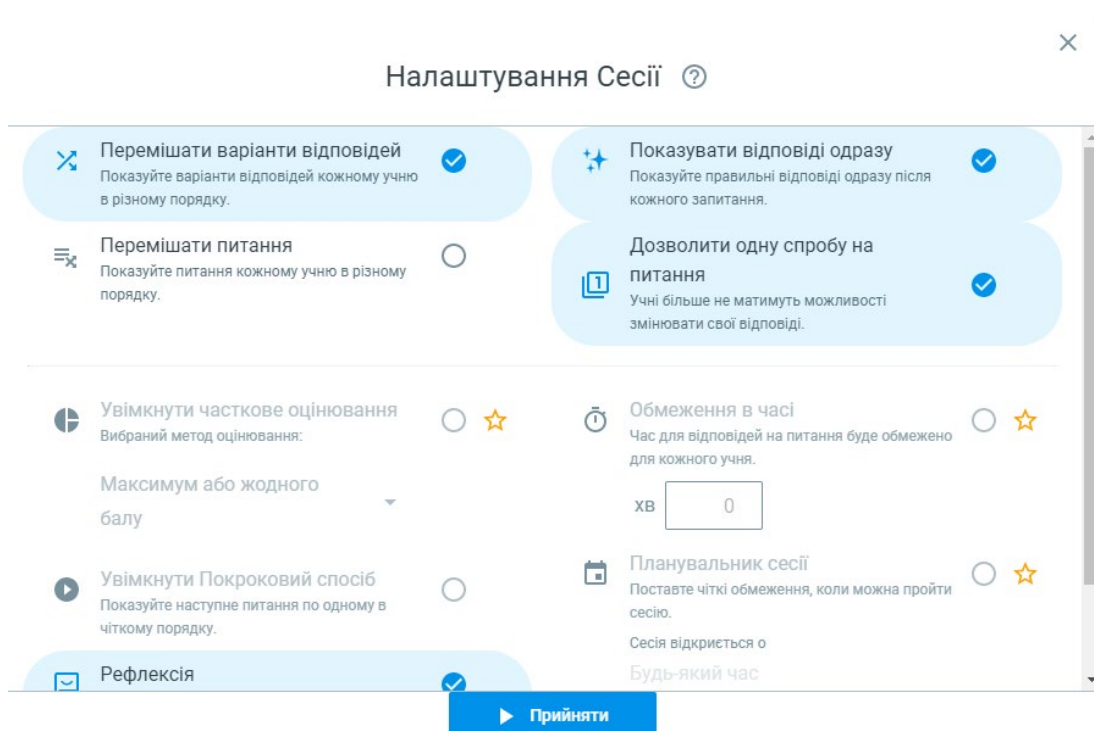


Рис. 3.13. Налаштування сесії

Як бачимо, більшість налаштувань надаються безкоштовно.

Після налаштувань потрібно натиснути «Прийняти», і тоді вчитель зможе:

- 1) провести тестування на уроці, указавши код сесії;
- 2) скопіювати URLадресу та відправити її учням віддалено;
- 3) змінити налаштування сесії;
- 4) надати можливість учням в участі в «Командній грі»;
- 5) експортувати звіт про випробування, проведений відповідно до таких параметрів:
 - повний звіт в Excel або PDF;
 - звіти кожного учня у PDF;
 - перегляд шкільної аналітики.
- 6) вимкнути деякі або всі запитання;
- 7) після закінчення сесії учні не матимуть можливості приєднатися та відповісти на запитання;
- 8) переглянути моделювання сесії. (Див. рис. 3.14.-3.17.)

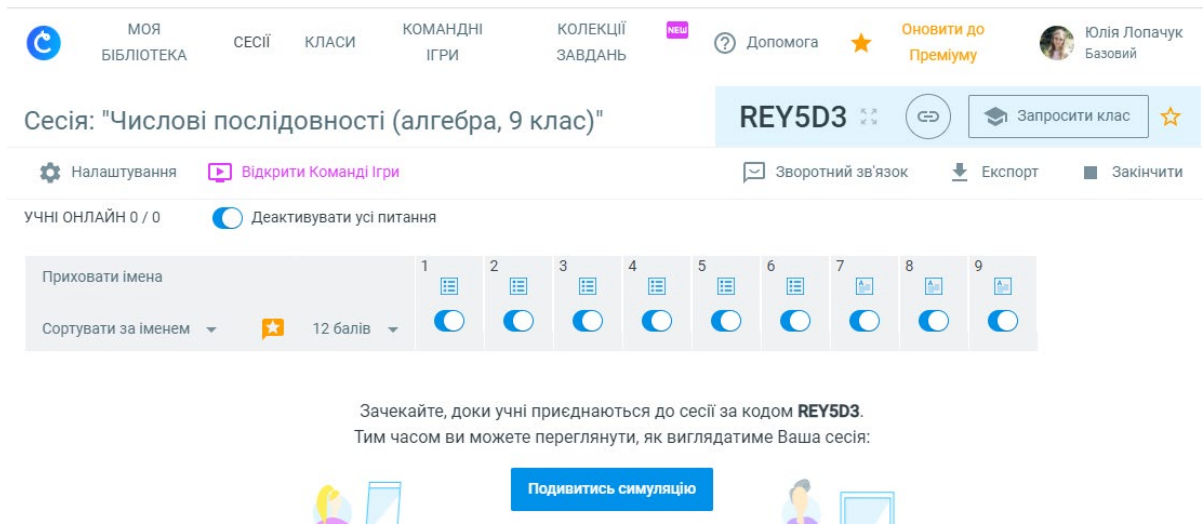


Рис. 3.14. Сесія в кабінеті вчителя

Учні входять за посиланням Classtime або ж вводять код сесії і приступають до виконання завдань (див. рис. 3.15.).

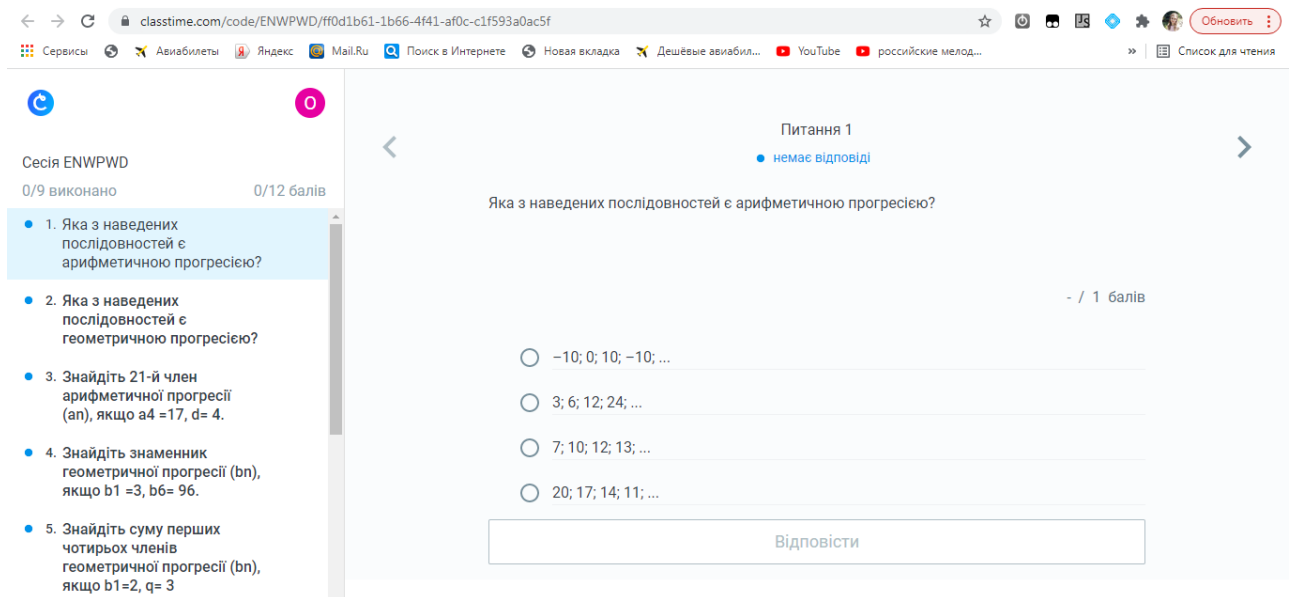


Рис.3.15. Вигляд сесії учня на РС

Після входу кожного учня вчитель має змогу контролювати їх реєстрацію на своєму моніторі (див. рис. 3.16.).

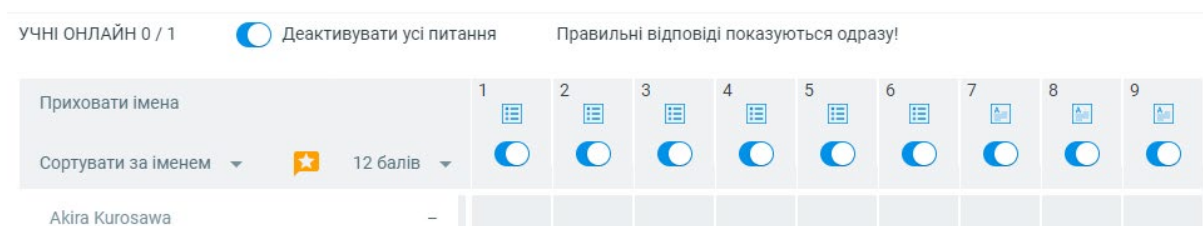


Рис. 3.16. Сесія в кабінеті вчителя. Реєстрація учнів

Під час виконання завдання учитель також у реальному часі може спостерігати за відповідями учнів (див. рис. 3.17.).

Приховати імена		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сортувати за іменем	12 балів	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢
Akira Kurosawa	1.10			✓			✗	👁️		👁️
Caroline Herschel	0.30						✗	👁️		
Chien-Shiung Wu	2.00			✓			✓	👁️		
Émilie du Châtelet	0.50					✗		👁️		👁️
George Gamow	2.00			✓		✓		👁️		
Georges Lemaître	0.60				✗					👁️
Grace Hodder	2.00	✓			✓				👁️	

Рис. 3.17. Сесія в кабінеті вчителя. Проходження тестування

Після завершення виконання завдань невизначеними лишаються лише запитання з відкритими відповідями. Вони позначаються жовтою міткою. (див. рис. 3.18).

Приховати імена		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сортувати за іменем	12 балів	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢
Akira Kurosawa	4.50	✗	✗	✓	✗	✓	✗	👁️	👁️	👁️
Caroline Herschel	5.00	✓	✗	✓	✓	✓	✗	👁️	👁️	👁️
Chien-Shiung Wu	5.90	✓	✓	✓	✓	✗	✓	👁️	👁️	👁️
Émilie du Châtelet	5.40	✓	✓	✓	✓	✗	✗	👁️	👁️	👁️
George Gamow	4.00	✗	✗	✓	✗	✓	✓	👁️	👁️	👁️
Georges Lemaître	4.40	✗	✓	✓	✗	✓	✗	👁️	👁️	👁️
Grace Hodder	6.00	✓	✓	✓	✓	✓	✓	👁️	👁️	👁️

Рис. 3.18. Сесія в кабінеті вчителя. Проміжні результати

Учитель має натиснути на одну з них, щоб побачити всі можливі варіанти відповіді (див. рис. 3.19. - 3.20.).

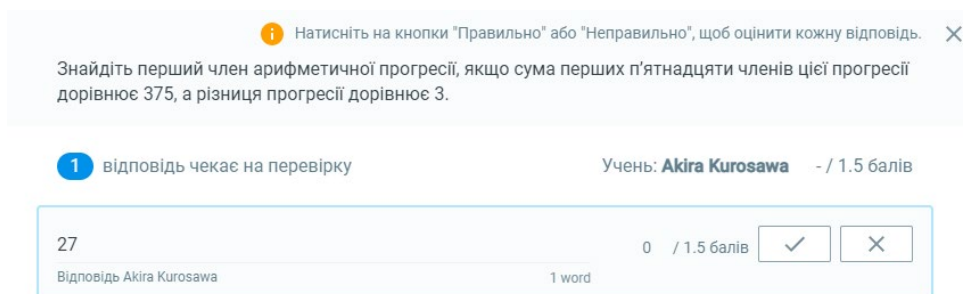


Рис. 3.19. Варіанти відповіді на відкрите запитання

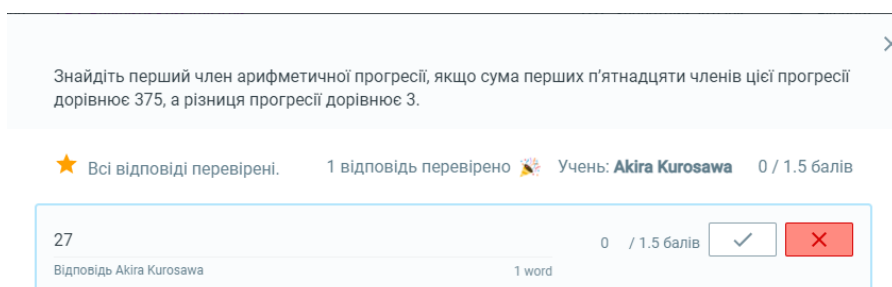


Рис. 3.20. Оцінювання відповідей на відкрите запитання

3.5. Практична перевірка результатів дослідження

Аналіз різних видів інформаційних джерел, наукової, навчальної, методичної літератури та Інтернет-ресурсів дав можливість розглянути особливості дидактичного забезпечення при вивченні числових послідовностей.

Основні завдання даного дослідження — з'ясувати, як використовувати дидактичне забезпечення при дослідженні даної теми, тобто як створити умови для організації навчально-виховного процесу для підвищення його ефективності, порівняння впливу різних факторів, а також визначати основні закономірності і специфіку протікання педагогічного процесу в конкретних умовах. Основна мета – дослідити рівень знань при розв'язуванні завдань.

Експериментальна перевірка відбулася на базі Рівненської ЗОШ I-III ст. №22 з учнями 10 класу, які мають різний рівень навчальних досягнень.

Формування практичних умінь і навичок здійснювалось за допомогою електронної інформаційно-освітньої системи «МІКЛАС», що дозволяє підбирати різні завдання відповідно до рівня успішності учня, організувати успішне засвоєння теоретичних матеріалів та практичні навички розв'язування задач

(Додаток В). Ефективність цього дослідження було перевірено у вигляді онлайн-тесту (Додаток Г).

Використання дидактичного забезпечення позитивно впливає на учнів, оскільки дозволяє врахувати особистісні особливості кожної дитини та підібрати матеріали, які відповідають її рівню знань, забезпечуючи при цьому рівень індивідуалізації та диференціації навчального процесу. Учні працюють у зручному для них темпі, вдосконалюють навички саморозвитку та самоосвіти, виховують творчі здібності. І це одне із завдань, яке ставить перед собою сучасна школа – сформувати всебічно розвинену особистість. Тому актуальність цього дослідження не викликає сумнівів.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання роботи розкрито тему «Дидактичне забезпечення до вивчення числових послідовностей в класах поглибленого вивчення математики»; була опрацьована велика кількість методичної та психолого-педагогічної літератури, також були реалізовані такі завдання:

- 1) аналіз науково -методичної літератури та шкільних підручників;
- 2) систематизовано теоретичний матеріал з відповідного курсу алгебри;
- 3) розроблено дидактичне забезпечення по числових послідовностях у вигляді тестів, контрольних робіт, опорних таблиць, мультимедійних презентацій тощо.

- 4) розроблено зміст занять та експериментально його перевірено.

На основі проведеного дослідження можемо стверджувати:

1. Дидактичне забезпечення до вивчення числових послідовностей допомагає учням оволодіти новими і складнішими знаннями, індивідуалізувати процес навчання, розвивати мислення, візуалізацію навчальної інформації, виховати в учнів уміння використовувати прогресії для розв'язування задач, посилювати мотивацію навчання за рахунок використання різних видів діяльності і джерел інформації, формуванню інформаційної компетентності вчителя та учня.

2. Широке використання мультимедійних технологій підвищує ефективність активних методів навчання для всіх форм організації навчального процесу.

3. Впровадження в навчальний процес платформ для змішаного та онлайн-навчання, заснованих на комп'ютерній підтримці та пізнавальній діяльності, розкриває перспективи гуманізації навчального процесу, розширення та поглиблення бази теоретичних знань і надання результатам навчання практичної значущості.

Дана тема дає широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості, логічного мислення, спостережливості та уяви, пізнавальної та творчої діяльності, розвитку математичних мовленнєвих навичок.

За допомогою дидактичного забезпечення розв'язування задачі на числову послідовність ефективно стимулює творчість і самостійність учнів, формує їх мислення в процесі оволодіння математикою.

В роботі розглянуто використання різних платформ для дистанційного навчання на уроках математики. Також розглядається використання опорних таблиць та мультимедійних презентацій; описується застосування тестів, самостійних та контрольних робіт для перевірки та контролю знань учнів.

Застосування інформаційних технологій (платформа Classtime, UVScreenCamera, МІЙКЛАС) дозволяє учням краще засвоїти програмні матеріали за менший час, дає можливість розв'язувати більше вправ, виховувати логічне мислення, звертаючись до таблиць.

Навчальні матеріали цієї роботи спрямовані розвивати мислення та пам'ять учнів, інтелектуальні і пізнавальні здібності школярів, а також переносити отримані знання та вміння в нову ситуацію.

Дану роботу можна використовувати на математичних гуртках та факультативних заняттях. Матеріали даної магістерської роботи служать джерелом додаткової інформації для вчителів загальноосвітньої школи для використання при викладанні математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : збірник задач і контрольних робіт / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Харків: Гімназія, 2011. 144 с.
2. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл., закладів загальної середньої освіти / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Харків, 2018. 512 с.
3. Бевз В. Г., Буковська О. І. Математика: у 2 ч. Комплексне видання для підготовки до ЗНО та ДПА. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2019. 176 с.
4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Вид. 3-тє. Київ: Вища школа, 1989. 397 с.
5. Бевз Г. П. Методика навчання математики. Харків: «Основа», 2003. 96 с.
6. Биков В. Ю., Кухаренко В. М. Технологія створення дистанційного курсу. Київ: Міленіум, 2008. 324 с.
7. Бурда М. І., Васильєва Д. В. Особливості навчання математики за новими програмами. *Математика в рідній школі*. 2017. №7-8. С. 2-9.
8. Вовковінська Н. В. Інформатизація середньої освіти: програмні засоби, технології, досвід, перспективи. Київ: Педагогічна думка, 2003. 272 с.
9. Воєвода А. Л. Зацікавити математикою: (методичні матеріали для підвищення інтересу до математики): Методичний посібник. Вид. 2-ге, допов. і перероб. Вінниця: ФОП «Легкун В.М.», 2012. 181с.
10. Глейзер Г. И. История математики в школе 9-10 классов: пособие для учителей. Москва, 1853. 351 с.
11. Гуревич Р. С. Інформаційно-комунікаційні технології в освіті: енциклопедія освіти, акад. пед. наук України. Київ: Юринком Інтер, 2008. 1040 с.
12. Гуревич Р. С., Кадемія М. Ю. Інформаційно-комунікаційні технології в навчальному процесі: посібник для педагогічних працівників і студентів педагогічних вищих навчальних закладів. Вінниця: ДОВ «Вінниця», 2002. 116 с.

- 13.Депман. И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. Москва, 1966. 415 с.
- 14.Долинський Є. В. Дистанційне навчання – одна з прогресивних форм підготовки фахівців. Теоретичні питання культури, освіти та виховання: збірник наукових праць. Київ: Вид. центр КНЛУ, 2010. С. 202-207
- 15.Істер О. С., Глобін О. І., Комаренко О. В. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики : 9 кл. Вид. 2-ге, доопрац. Київ, 2012. 112 с.
- 16.Коваль В. В., Крайчук О. В., Клекоць О. В. Загальна методика викладання математики. Рівне: РДГУ, 2005. 165 с.
- 17.Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: метод. посібник / О. І. Глобін та ін. Київ: Центр навч.-метод. л-ри, 2015. 245 с.
- 18.Кухаренко В. М., Рибалко О. В., Сиротенко Н. Г. Дистанційне навчання та умови застосування. Харків, 2002. 320 с.
- 19.Лов'янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях: навч. посіб. для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Кривий Ріг, 2016. 78 с.
20. Максимюк С. П. Педагогіка: навч. посіб. Київ: Кондор, 2005. 667 с.
- 21.Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків: Гімназія, 2017. 416 с.
- 22.Москаленко О., Черкаська Л., Коваленко О. Числові послідовності в системі математичної підготовки школярів. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2018. №2. С. 2-8.
- 23.Нежива О. О., Пихтар М. П. Методи підсумування числових послідовностей та числових рядів. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2018. №10. С. 38–40.
- 24.Нюкіна Т. *Геометрична прогресія. Урок алгебри в 9-му класі. Газета Математика*. Київ: Шкільний світ, 2018. №22 (850). С. 19 – 22

25. Панченко С. Ю. Методика підготовки та створення відеоуроків із математики. *Математика в школах України*. Київ: Педагогічна преса, 2020. №113-15. С. 37–43.
26. Пехоти О. М. Освітні технології: навч. метод. посіб. Київ: «А.С.К.», 2002. 255 с.
27. Пихтар М. П., Чеберяко К. М. Про деякі нетрадиційні застосування числових послідовностей при розв'язуванні олімпіадних задач у шкільному курсі математики. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2019. №16. С. 35 – 37.
28. Пихтар М. П. Методична система розвитку математичних здібностей школярів – членів Малої академії наук України: навчально-методичний посібник. Чернігів, 2014. 224 с.
29. Плис Т. Значення прикладних задач під час вивчення шкільного курсу алгебри на прикладі тем "Нерівності" та "Прогресії". *Математика в рідній школі*. 2016. № 7/8. С. 26–29.
30. Полонський В., Якір М., Мерзляк А. Новий підхід до викладання алгебри та геометрії у 9-му класі (геометрична прогресія). *Газета Математика К.*: Педагогічна преса, 2017. №16 (820). С. 5 – 7
31. Програма поглибленого вивчення математики в 10-11 профільних класах. *Математика в рідній школі*. / Бурда М. І. та ін. 2016. №6. С. 19–25.
32. Руденко Л. В. Знання VS Карантин: Classtime як допомога вчителю математики для дистанційного навчання. *Математика в школах України*. Київ: Педагогічна преса, 2020. №113-15. С. 11–17.
33. Светлова Т. В. Організація дистанційного навчання математики. *Математика в школах України*. Київ: Педагогічна преса, 2020. №113-15. С. 4–10.
34. Слепкань З. І. Методика навчання математики підручник. Вид. 2-ге, допов. і переробл. Київ: Вища шк, 2006. 240 с.
35. Слепкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль, 2004. 240 с.

36. Средства дистанционного обучения. Методика, технология, инструментарий / С. В. Агапонов та ін. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 336 с.
37. Старова О. О. Готуємося до державної підсумкової атестації. Математика. 9 клас (тестові завдання за темою «Арифметична та геометрична прогресії». *Журнал Математика в школах України*. Київ: Основа, 2016. №12 (492). С. 33 – 34
38. Фіцула М. М. Педагогіка: навч. посіб. Вид. 3-тє. Київ: Академвидав, 2009. 559 с.
39. Хортон У., Хортон К. Электронное обучение: инструменты и технологии. Пер. с англ. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2005. 640 с.
40. Черкаська Л. П., Москаленко О. А., Коваленко О. В. Тестові завдання як засіб формування в школярів математичної компетентності. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2018. №2. С. 2 –4.
41. Шолом Г. Оновлення прийомів навчання математики в контексті розвитку навичок критичного мислення. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2019. № 6 (209). С. 2–3.
42. Абрамова И. А. Некоторые аспекты разработки электронных образовательных ресурсов средствами программы UVScreenCamera. URL: <http://www.ict.edu.ru/vconf/files/10914.doc>. (дата звернення: 24.08.2021).
43. ЗАКОН УКРАЇНИ «Про освіту» (Відомості Верховної Ради, 2017, №38-39, ст. 380). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19> (дата звернення: 01.10.2020).
44. Лист МОН України від 23. 03. 2020 №1/9-173 «Щодо організації освітнього процесу в закладах загальної середньої освіти під час карантину». URL: https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/71997/ (дата звернення: 04.08.2021).
45. Міністерство освіти і науки України. Наказ від 25.04.2013 р. № 466 *Про затвердження Положення про дистанційне навчання*: URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0703-13#Text> (дата звернення: 11.02.2021).

46. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya>. (дата звернення: 17.11.2020).
47. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: <https://ru.osvita.ua/doc/files/news/309/30993/42>. (дата звернення: 19.12.2020).
48. Наказ МОН України від 16. 03. 2020 № 406 «Про організаційні заходи для запобігання поширенню коронавірусу COVID-19» URL: <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0406729-20#Text> (дата звернення: 02.03.2021).
49. Нова українська школа. URL: <https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola> (дата звернення: 28.09.2020).
50. Тести ЗНО з предмета «математика». URL: <https://zno.osvita.ua/mathematics/> (дата звернення: 02.07.2021).

ДОДАТКИ

Додаток А

Різні види задач по темі «Числові послідовності» у діючих підручниках з алгебри 9-го та 10-го класів поглибленого вивчення математики

1. Завдання на розуміння поняття числова послідовність, використання термінів і символіки.

Задача 1. 30.1. «Запишіть у порядку зростання п'ять перших членів послідовності:

- 1) двоцифрових чисел, кратних числу 4;
- 2) неправильних звичайних дробів із чисельником 11;
- 3) натуральних чисел, що дають при діленні на 8 остачу 5;

Укажіть, скінченними чи нескінченними є ці послідовності.» [21, С. 317-370]

Розв'язання:

- 1) 12; 16; 20; 24; 28;
- 2) $\frac{11}{10}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{11}{8}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{11}{6}$;
- 3) 13; 21; 29; 37; 45;

Перша і друга послідовності скінченні, а третя нескінченна.

Задача 2. №31.17. «Як зміниться різниця скінченної арифметичної прогресії, якщо переставити її члени у зворотному порядку?» [21, С. 317-370]

Розв'язання: Давайте розглянемо таку скінчену арифметичну прогресію:

1; 3; 5; 7; 9; 11;

Переставивши її члени у зворотному порядку, ми отримаємо: 11; 9; 7; 5; 3; 1;

Отже, проаналізувавши дані прогресії, очевидно, що різниця змінить знак на протилежний.

Задача 3. №31.30. «Чи можуть утворювати арифметичну прогресію довжини сторін і периметр трикутника?» [21, С. 317-370]

Розв'язання: Припустимо, що це так. Тоді a – довжина однієї із сторін трикутника, $a + d$ – довжина другої сторони, $a + 2d$ – довжина третьої сторони, а $a + 3d$ – периметр даного трикутника.

Периметр трикутника також можна виразити через суму довжин всіх сторін:
 $a + 3d = a + a + d + a + 2d$.

Якщо: $a + 3d = 3a + 3d, a = 0$. Це означає, що сторона трикутника являється точкою, чого бути не може. Отже, довжини сторін і периметр трикутника не можуть утворювати арифметичну прогресію.

2. Завдання на знаходження члена прогресії.

Задача 4. «№30.6. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (b_n) , якщо:

$$1) b_1 = 18; b_{n+1} = -\frac{b_n}{3};$$

$$2) b_1 = -1; b_2 = 2; b_{n-2} = b_n^2 + 2b_{n+1};$$

$$3) b_1 = -1; b_{n-1} = \frac{1}{b_n}; \text{» [21, С. 317-370]}$$

Розв'язання:

$$1) b_1 = 18; b_{n+1} = -\frac{b_n}{3};$$

$$b_2 = -\frac{18}{3} = -6; b_3 = \frac{-6}{3} = -2; b_4 = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}; b_5 = \frac{-\frac{2}{3}}{3} = -\frac{2}{9};$$

Отже, перших п'ять членів послідовності (b_n) мають такий вигляд:
 $-6; -2; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{9}; -\frac{2}{27}$.

$$2) b_1 = -1; b_2 = 2; b_{n-2} = b_n^2 + 2b_{n+1};$$

$$b_3 = 1 + 2 \cdot 2 = 5; b_4 = 2^2 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14; b_5 = 25 + 2 \cdot 14 = 53$$

$$b_6 = 196 + 2 \cdot 53 = 196 + 106 = 302;$$

Отже, перших п'ять членів послідовності (b_n) мають такий вигляд:
 $-1; 2; 5; 14; 53; 302$.

$$3) b_1 = -1; b_{n-1} = \frac{1}{b_n};$$

$$b_2 = -\frac{1}{-1} = -1; b_3 = \frac{1}{-1} = -1; b_4 = \frac{1}{-1} = -1; b_5 = \frac{1}{-1} = -1.$$

Отже, перших п'ять членів послідовності (b_n) мають такий вигляд:
 $-1; -1; -1; -1; -1$.

Задача 5. «31.24. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо: $a_7 + a_{13} = -104$; $a_2 \cdot a_6 = -240$.» [21, С. 317-370]

Розв'язання:

$$\begin{cases} a_7 + a_{13} = -104 \\ a_2 \cdot a_6 = -240 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 6d + a_1 + 12d = -104 \\ (a_1 + d)(a_1 + 5d) = -240 \end{cases}$$

$$2a_1 + 18d = -104; \quad a_1 + 9d = -52; \quad a_1 = -52 - 9d;$$

$$(-52 - 8d) \cdot (-52 - 9d + 5d) = -240;$$

$$(-52 - 8d) \cdot (-52 - 4d) = -240;$$

$$-4(13 + 2d) \cdot (-4)(13 + d) = -240;$$

$$(13 + 2d)(13 + d) = 15;$$

$$169 + 26d + 13d + 2d^2 - 15 = 0;$$

$$2d^2 + 39d + 154 = 0;$$

$$D = 39^2 - 4 \cdot 2 \cdot 154 = 1521 - 1232 = 289 = 17^2;$$

$$d_1 = \frac{-39+17}{4} = -\frac{22}{4} = -\frac{11}{2} = -5,5;$$

$$d_2 = \frac{-39-17}{4} = -\frac{56}{4} = -14;$$

$$a_1 = -52 - 9 \cdot (-5,5) = -52 + 49,5 = -2,5;$$

$$(a_1)' = -52 - 9 \cdot (-14) = -52 + 126 = 74;$$

Відповідь: $a_1 = -2,5$; $d = -5,5$; або $a_1 = 74$; $d = -14$.

Задача 6. «№ 33.14. Знайдіть перший член геометричної прогресії (c_n) , якщо:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$, а знаменник $q = \frac{2}{7}$;

2) $c_6 = 100$, $c_9 = 100\,000$.» [21, С. 317-370]

Розв'язання:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$; $q = \frac{2}{7}$; Знайти c_1

$$c_4 = c_1 \cdot q^3; \quad c_1 = \frac{c_4}{q^3} = \frac{1}{98} : \frac{8}{49 \cdot 7} = \frac{7}{2 \cdot 8}; \quad c_1 = \frac{7}{16}.$$

2) $c_6 = 100$, $c_9 = 100\,000$;

$$c_9 = c_6 \cdot q^3; \quad q^3 = \frac{100\,000}{100} = 1000; \quad q = 10;$$

$$100 = c_1 \cdot 10^5; \quad c_1 = \frac{100}{10^5} = \frac{1}{10^3} = 0,001; \quad c_1 = \frac{1}{1000}.$$

Відповідь: 1) $c_1 = \frac{7}{16}$; 2) $c_1 = \frac{1}{1000}$.

3. Завдання на складання формули n -го члена послідовності.

Задача 7. «№ 30.28. Знайти формулу n -го члена послідовності, заданої рекурентно:

1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$;

2) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$;

3) $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$ » [21, С. 317-370]

Розв'язання:

1) Якщо $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ то:

а) $n = 1; a_2 = 2 + 1 = 3$;

б) $n = 2; a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$;

в) $n = 3; a_4 = 15$;

Маємо: 1; 3; 7; 15; отже $a_n = 2^n - 1$;

$a_1 = 2 - 1 = 1; a_2 = 3; a_3 = 2^3 - 1 = 7$;

$a_4 = 16 - 1 = 15; a_5 = 32 - 1 = 31$; отже, $a_n = 2^n - 1$;

2) Якщо $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ то:

а) $n = 1; a_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$;

б) $n = 2; a_3 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;

в) $n = 3; a_4 = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$;

Отже, можна припустити, що $a_n = \frac{n}{n+1}$;

3) Якщо $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$ то:

а) $n = 1; a_2 = 0 + 2 \cdot 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$;

б) $n = 2; a_3 = 3 + 2\sqrt{3+1} + 1 = 3 + 4 + 1 = 8 = 3^2 - 1$;

$$\text{в) } n = 3; a_4 = 8 + 2\sqrt{9} + 1 = 8 + 6 + 1 = 15 = 4^2 - 1;$$

$$\text{г) } n = 4; a_4 = 15 + 2\sqrt{16} + 1 = 15 + 8 + 1 = 24 = 5^2 - 1;$$

$$\text{д) } n = 5; a_4 = 24 + 2\sqrt{25} + 1 = 24 + 10 + 1 = 35 = 6^2 - 1.$$

$$\text{Отже, } a_n = n^2 - 1.$$

$$\text{Відповідь: 1) } a_n = 2^n - 1; \text{ 2) } a_n = \frac{n}{n+1}; \text{ 3) } a_n = n^2 - 1.$$

Задача 8. «№ 31.8. Знайдіть формулу n -го члена послідовності:

$$1) -5, -7, -9, -11, \dots;$$

$$2) 2, 2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{2}, \dots;$$

$$3) a^2, 2a^2, 3a^2, 4a^2, \dots;$$

$$4) a + 3, a + 1, a - 1, a - 3, \dots \text{ [21, С. 317-370]}$$

Розв'язання:

$$1) -5, -7, -9, -11, \dots;$$

$$a_1 = -5; d = -7 + 5 = 2$$

$$a_n = -5 - 2(n - 1);$$

$$2) 2, 2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{2}, \dots;$$

$$a_1 = 2; d = 2\frac{1}{6} - 2 = \frac{1}{6};$$

$$a_n = 2 + \frac{1}{6}(n - 1);$$

$$3) a^2, 2a^2, 3a^2, 4a^2, \dots;$$

$$a_1 = a^2; d = 2a^2 - a^2 = a^2;$$

$$a_n = a^2 + a^2(n - 1);$$

$$4) a + 3, a + 1, a - 1, a - 3, \dots$$

$$a_1 = a + 3; d = a + 1 - (a + 3) = -2;$$

$$a_n = a + 3 - 2(n - 1) = a + 5 - 2(n - 1).$$

$$\text{Відповідь: 1) } a_n = -5 - 2(n - 1); \text{ 2) } a_n = 2 + \frac{1}{6}(n - 1);$$

3)

$$a_n = a^2 + a^2(n - 1); \text{ 4) } a_n = a + 3 - 2(n - 1) = a + 5 - 2(n - 1).$$

4. Дослідження послідовності на обмеженість та зростання.

Задача 9. «№32.10. Доведіть, що послідовність (x_n) є необмеженою:

$$1) x_n = (-1)^n \cdot n; 2) x_n = \frac{n}{n+1+(-1)^n \cdot n} \text{» [2, С. 244-284]}$$

Розв'язання:

$$1) x_n = (-1)^n \cdot n;$$

$$x_1 = -1; x_2 = 2; x_3 = -3; x_4 = 4; x_5 = -5 \dots$$

Отже, послідовність не є обмеженою ні зверху ні знизу.

$$2) x_n = \frac{n}{n+1+(-1)^n \cdot n}$$

$$x_1 = \frac{1}{2-1}; x_2 = \frac{2}{2+1+2} = \frac{2}{5}; x_3 = \frac{3}{4-3} = 3 \dots$$

Отже, послідовність не є обмеженою.

Задача 10. «№32.1. Доведіть, що послідовність (a_n) є зростаючою, якщо:

$$1) a_n = 5n-12; 2) a_n = n^2 + n - 1; 3) a_n = 3^n - 2^n; 4) a_n = \frac{n}{n+1} \text{» [2, С. 244-284]}$$

Розв'язання:

$$1) a_n = 5n-12;$$

Числова послідовність називається зростаючою, якщо для будь-якого натурального числа n виконується $a_n < a_{n+1}$;

$$\text{Нехай } n = 1; a_1 = -7; a_2 = 10 - 12 = -2; -2 > -7;$$

$$\text{Взагалі: } a_n = 5n - 12; a_{n+1} = 5(n+1) - 12 = 5n - 7;$$

$$5n - 12 < 5n - 7; a_n < a_{n+1};$$

$$2) a_n = n^2 + n - 1 - \text{зростаюча};$$

$$n+1; a_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 1 = n^2 + 3n + 1;$$

$$n^2 + 3n + 1 > n^2 + n - 1; \text{ для } n \in N.$$

$$3) a_n = 3^n - 2^n;$$

$$\text{Отже, } a_n = 3^n - 2^n; a_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n; a_{n+1} > a_n;$$

$$4) a_n = \frac{n}{n+1}; a_{n+1} - \frac{n+1}{n+2}; \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0; \text{ отже,}$$

$a_{n+1} > a_n$ - зростаюча.

5. Задачі на знаходження суми n -перших членів арифметичної і геометричної прогресії.

Задача 11. «№32.12. Знайдіть суму двадцяти п'яти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_{10} = 44$, а різниця прогресії $d = 4$.» [21, С. 317-370]

Розв'язання: $a_{10} = 44$; $d = 4$ Знайти S_{25}

$$a_1 + 9d = 44; \quad a_1 + 36 = 44; \quad a_1 = 8;$$

$$S_{25} = \frac{2 \cdot 8 + 4 \cdot 24}{2} \cdot 25 = \frac{16 + 96}{2} \cdot 25 = 56 \cdot 25 = 1400.$$

Відповідь: $S_{25} = 1400$.

Задача 12. «№32.13. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_6 + a_8 - a_{14} = -17$ і $a_5 + a_{22} = 101$.» [21, С. 317-370]

Розв'язання: $\begin{cases} a_6 + a_8 - a_{14} = -17 \\ a_5 + a_{22} = 101 \end{cases}$ Знайти S_{20} .

Використаємо формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$; тоді:

$$\begin{cases} a_1 + 5d + a_1 + 7d - a_1 - 13d = -17 \\ a_1 + 4d + a_1 + 21d = 101 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 - d = -17 \\ 2a_1 + 25d = 101 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ - \end{array} \right. \quad \begin{cases} 2a_1 - 2d = -34 \\ -2a_1 + 25d = 101 \end{cases}$$

$$\hline -27d = -135;$$

$$d = 5$$

$$a_1 - 5 = -17; \quad a_1 = 12;$$

$$S_{20} = \frac{2 \cdot (-12) + 5 \cdot 19}{2} \cdot 20 = (-24 + 95) \cdot 10 = 71 \cdot 10 = 710.$$

Відповідь: $S_{20} = 710$.

Задача 13. «№34.8. Геометричну прогресію (y_n) задано формулою n -го члена $y_n = \frac{(-2)^{n+1}}{20}$ знайдіть суму десяти перших членів прогресії.» [21, С. 317-370]

Розв'язання: щоб знайти суму десяти перших членів прогресії, необхідно в першу чергу знайти :

$$y_1 = \frac{(-2)^2}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}; \quad y_2 = \frac{(-2)^3}{20} = \frac{-8}{20} = \frac{-2}{5};$$

$$\text{тоді } q = \frac{-2}{5} : \frac{1}{5} = -2; \quad y_1 = \frac{1}{5}; \quad q = -2;$$

$$S_{10} = \frac{\frac{1}{5}((-2)^{10}-1)}{-2-1} = \frac{1024-1}{5 \cdot (-3)} = -\frac{341}{5} = -68,2.$$

Відповідь: $S_{10} = -68,2$

6. Завдання з параметром

Задача 14. «№31.38. При якому значенні x значення виразів $x^2 - 4$; $5x + 3$ і $3x + 2$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? знайдіть члени цієї прогресії.» [21, С. 317-370]

Розв'язання: нехай $x^2 - 4$; $5x + 3$; $3x + 2$ – буде арифметичною прогресією.

Використаємо властивість членів арифметичної прогресії $\frac{x^2-4+3x+2}{2} =$

$5x + 3$;

$$x^2 + 3x - 2 = 10x + 6; \quad x^2 + 3x - 10x - 2 - 5 = 0;$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0; \quad x_1 = 8; \quad x_2 = -1; \text{ (за т.Вієта)}$$

Отже, 60; 43; 26 або -3 ; -2 ; -1 ;

Відповідь: $x = 8$; $x = -1$

7. Завдання на доведення методом математичної індукції.

Задача 15. « Доведіть рівність: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.» [2, С. 244-284]

Доведення: розглянемо дану рівність справа наліво при $n = 2$:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 = 1 + 2, \text{ таким чином, отримаємо, що існує } n, \text{ для}$$

якого дана нерівність виконується. Далі розглянемо цю ж саму рівність для $n + 1$:

$$\ll \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)(n+1+1)}{2} = 1 + \dots + n + n + 1 \gg. \quad \text{Тепер}$$

підставимо в дану формулу $m = n + 1$, отримаємо: $\frac{m(m+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + m$, що і потрібно було довести.

8. Завдання на обчислення границі послідовності.

Задача 16. «№34.1. Обчисліть границю:

$$1) \log_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1};$$

$$2) \log_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n+4};$$

$$3) \log_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n}{n^2+1} \text{ » [2, С. 244-284]}$$

Розв'язання:

$$1) \log_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = \log_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2-2}{n+1} = \log_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{n+1} \right) = 2;$$

$$2) \log_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n+4} = \log_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+4} \right) = 1;$$

$$3) \log_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n}{n^2+1} = \log_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n}{n+\frac{1}{n}} = 0;$$

Задача 17. «№35.15. Обчисліть границю: $\log_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 3n})$ » [2, С. 244-284]

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \log_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 3n}) &= \log_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1-n^2-3n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+3n}} = \log_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+1}{n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}} \right)} \\ &= \log_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-3+\frac{1}{n})}{n \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}} \right)} = \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

9. Дослідити послідовність на збіжність

Задача 18. «№33.18. У збіжній послідовності змінили 100 перших членів. Чи залишиться послідовність збіжною? Чи може змінитися границя послідовності?» [2, С. 244-284]

Розв'язання: послідовність залишається збіжною, границя не зміниться.

Задача 19. «№33.23. Відомо, що послідовність $(|a_n|)$ є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) також є збіжною?» [2, С. 244-284]

Розв'язання: Ні

10. Задачі на знаходження кількості членів послідовності.

Задача 20. «№33.16. Число 96 є членом геометричної прогресії $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \dots$ Знайдіть номер цього числа.» [21, С. 317-370]

Розв'язання: $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \dots, b_n = 96;$

$$b_1 = \frac{3}{8}; \quad q = \frac{3}{4} : \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 3} = 2; \quad 96 = \frac{3}{8} \cdot 2^{n-1};$$

$$2^{n-1} = 96 : \frac{3}{8} = \frac{96 \cdot 8}{3} = 32 \cdot 8 = 2^5 \cdot 2^3 = 2^8;$$

$$2^{n-1} = 2^8; \quad n - 1 = 8; \quad n = 9.$$

Відповідь: $n = 9$.

11. Розв'язання рівнянь.

Задача 21 «№35.18. Розв'яжіть рівняння:

$$1 + x + x^2 + \dots = 4, \text{ якщо } |x| < 1 \text{» [21, С. 317-370]}$$

Розв'язання:

$$1 + x + x^2 + \dots = 4, \text{ якщо } |x| < 1;$$

$$b_1 = 1; \quad q = x; \quad \frac{1}{1-x}; \quad 1 = 4 - 4x; \quad 4x = 3; \quad x = \frac{3}{4};$$

Відповідь: $x = \frac{3}{4}$.

Додаток Б

Тестові завдання з теми «Числові послідовності»

Для завдання 1-13 існує п'ять варіантів відповідей, лише один з яких є правильним.

Завдання 14-15 містить чотири рядки інформації, до кожного з яких потрібно вибрати правильний на Вашу думку варіант позначений буквою.

1 варіант

1. (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 2$; $a_2 = 7$. Знайдіть a_{21} .

А	Б	В	Г
97	102	107	інша відповідь

2. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії $\frac{1}{3}$; -1 ; 3 ; ...

А	Б	В	Г
-9	9	27	-27

3. Обчисліть різницю арифметичної прогресії 8 ; 3 ; -2 ; -7 ; ...

А	Б	В	Г
5	-5	8	3

4. Знайдіть порядковий номер члена a_n арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 5$, $d = 3$, $a_n = 29$.

А	Б	В	Г
8	9	7	10

5. Дано геометричну прогресію (b_n) . Знайдіть b_4 , якщо $b_1 = -32$, $q = -\frac{1}{2}$

А	Б	В	Г
-4	4	-2	2

6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії -6 ; 1 ; $-\frac{1}{6}$; ...

А	Б	В	Г
$-7\frac{1}{5}$	$5\frac{1}{7}$	$7\frac{1}{5}$	$-5\frac{1}{7}$

7. Серед поданих послідовностей укажіть арифметичну прогресію.

А	Б	В	Г
5; 8; 13; 18	45; 40; 33; 27	0,1; 0,2; 0,3; 0,4	7; 9; 12; 14

8. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 2,3$ $a_2 = 3,2$.

А	Б	В	Г
0,9	-0,9	9	-9

9. Знайдіть сьомий член арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 8$, а $d = 0,5$.

А	Б	В	Г
11	10	10,5	9,5

10. Обчисліть суму десяти перших членів a_n , перший член якої $a_1 = -11$, а різниця $d = 4$.

А	Б	В	Г
55	60	65	70

11. Яка з наступних послідовностей є геометричною прогресією?

А	Б	В	Г
2; 6; 18; 36	80; 40; 20; 5	4; 8; 16; 32	2; -10; 50; 250

12. Обчисліть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_6 = \frac{14}{15}$; $b_7 = \frac{2}{3}$.

А	Б	В	Г
$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{3}$

13. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = \frac{1}{27}$, а знаменник $q = -3$.

А	Б	В	Г
-1	1	3	-3

14. Укажіть відповідність між формулою та її визначенням

1	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$	А	Різниця арифметичної прогресії
2	$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2n}$	Б	Сума членів арифметичної прогресії
3	$g = \frac{b_2}{b_1}$	В	Член арифметичної прогресії
4	$S = \frac{b_1}{1 - g}$	Г	Сума членів нескінченної геометричної прогресії
		Д	Знаменник геометричної прогресії

15. Укажіть відповідність між формулами і першим членом даної послідовності

1	$a_n = 3n - 2$	А	0
2	$a_n = n + 7$	Б	1
3	$a_n = n^3 - 6$	В	8
4	$a_n = 2n^2 - 2$	Г	-5
		Д	-1

2 варіант

1. Яка з даних послідовностей є арифметичною прогресією?

А	Б	В	Г
2; 6; 10; 15	14; 17; 20; 23	-7; 5; -3	12; 9; 6; 4

2. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = 5$, а знаменник $q = 2$.

А	Б	В	Г
70	85	80	75

3. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = -2$, $a_2 = 3$.

А	Б	В	Г
1	-1	5	-5

4. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = 18$, а знаменник $q = \frac{2}{3}$.

А	Б	В	Г
6	36	54	58

5. Чому дорівнює десятковий член арифметичної прогресії, перший член якої $a_1 = 11$, а різниця $d = -5$.

А	Б	В	Г
-34	-39	-29	-44

6. Чому дорівнює сума шести перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 20$, і $a_6 = 15$.

А	Б	В	Г
-1	1	3	-3

7. Укажіть серед наведених послідовностей геометричну прогресію.

А	Б	В	Г
6; 18; 54; 162	1; 2; 3; 5	3; 8; 13; 18	21; 19; 17; 15

8. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -\frac{2}{9}$, $b_2 = \frac{1}{12}$.

А	Б	В	Г
-1	1	3	-3

9. Чому дорівнює четвертий член геометричної прогресії, якщо $b_1 = 6$, а $q = -2$.

А	Б	В	Г
-48	48	24	-24

10. Чому дорівнює сума чотирьох перших членів b_n -го, перший доданок $b_1 = 0,8$, а знаменник $q = 3$.

А	Б	В	Г
10,4	-10,4	32	3,2

11. Віднайдіть суму нескінченної геометричної прогресії, якщо перший член $b_1 = 12$, знаменник $q = \frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г
15	16	9	18

12. Обчисліть суму перших п'яти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 3$, $d = -2$.

А	Б	В	Г
-4	20	-5	-10

13. Знайдіть порядковий номер члена a_n арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 5$, $d = 3$, $a_n = 29$.

А	Б	В	Г
8	9	7	10

14. Укажіть відповідність між даними та сумою перших 10 членів арифметичної прогресії

1	$a_1 = -7, a_{10} = 2$	А	-5
2	$a_1 = -5, a_{10} = 4$	Б	-25
3	$a_1 = 11, a_{10} = -1$	В	50

4	$a_1=5, a_{10}=23$	Г	-50
		Д	140


15. Знайдіть відповідність між геометричними прогресіями та сумою перших шести членів .

1	5,10, ...	А	21
2	32, -16,...	Б	315
3	3, 3, 3, 3,...	В	7812
4	2, 10,....	Г	6250
		Д	24

Теоретичні відомості про числову послідовність в програмі «МІЙКЛАС»



Теорія:

 Функції, область визначення яких є множиною натуральних чисел або його частиною, називаються числовими послідовностями.

Приклад:

Числовою послідовністю є **1,3,5,7,9,...**

Числа, записані в послідовності, називаються членами послідовності. Зазвичай, їх позначають маленькими буквами, наприклад, **$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$** , де індекс **1,2,3,4, ..., n, ...** після букви **a** вказує на порядковий номер кожного члена послідовності.

Загальний вигляд послідовності, це **(a_n)** або

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

a_n називається загальним членом послідовності або **n**-им членом, де **n** - порядковий номер члена послідовності.

У натуральних чисел, рахуючи від **1**, десятий член послідовності, це **$a_{10} = 10$** .

Послідовність можливо задати, вказавши всі її члени або вказавши загальну формулу. Формула показує, як знайти будь-який член послідовності, якщо відомий порядковий номер **n**.

Приклад:

У послідовності, де загальна формула **$a_n = 3n$** , написати:

а) перші чотири члени; б) двадцятий член.

а) Якщо **n = 1**, тоді замість **n** в формулу підставляється **1**: **$a_1 = 3 \cdot 1 = 3$**

$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 = 12$$

б) Якщо **n = 20**, тоді замість **n** в формулу підставляється **20**: **$a_{20} = 3 \cdot 20 = 60$** .

Числова послідовність нескінченна, якщо замість **n** можна підставляти будь-які числа (нескінченну множину).

Довідка 



Теорія:



Функцію $y = f(x)$, $x \in N$ називають функцією натурального аргументу або **числовою послідовністю** і позначають: $y = f(n)$ або $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, або $y(n)$.

Послідовності можна задавати:

1. словесно

коли правило послідовності описано словами, без вказівки формули;
послідовність простих чисел:
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,...

2. аналітично

коли вказана формула її n -го члена

Довідка



3. рекурентно

коли вказують правило, що дозволяє обчислити n -й член послідовності, якщо відомі її попередні члени.

- Арифметична прогресія - (a_n) , задана рекурентно співвідношеннями:

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$$

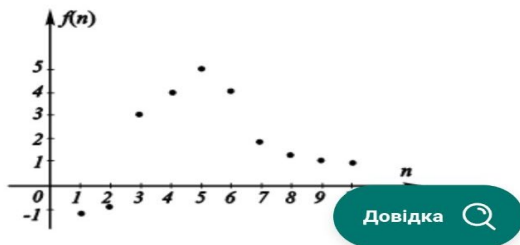
- Послідовність Фібоначчі - кожне наступне число дорівнює сумі двох попередніх чисел.

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

4. графічно

Графік послідовності утворений з точок з абсцисами **1,2,3,4,...**



Довідка



Приклад:

$$1. y_n = n^2$$

послідовність **1,4,9,16,...**, n^2, \dots

Кроки розв'язку: $n = 1, 2, 3, \dots$

$$y_1 = 1^2 = 1$$

$$y_2 = 2^2 = 4$$

$$y_3 = 3^2 = 9$$

$$y_4 = 4^2 = 16$$

$$y_5 = \dots$$

$$2. y_n = 5 (y_n = C)$$

послідовність

5,5,5,..., $5, \dots$ (C, C, C, \dots, C, \dots)

Кроки розв'язку:


$$y_1 = 5; y_2 = 5; y_3 = 5; y_4 = \dots$$



Послідовність $y_n = C$ називають **постійною** або **стаціонарною**.

Теорія:

Числова послідовність - окремий випадок числової функції, тому деякі властивості функцій можна перенести і на послідовності.


 Послідовність називається **зростаючою**, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$.

Послідовність називається **спадною**, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n > a_{n+1}$.

Зростаючі і спадні послідовності називаються **монотонними**.

Приклад:

1. Послідовність задана формулою $a_n = n$; (1,2,3,...,n,...) обмежена знизу, але не обмежена зверху.
2. Послідовність задана формулою $a_n = (-1)^n n$; (-1,2, -3,4,...,(-1)ⁿn, ...) не обмежена ні зверху, ні знизу.

 Послідовність називається **обмеженою**, якщо вона одночасно обмежена і зверху, і знизу.

Приклад:


1. Послідовність задана формулою $a_n = \frac{n}{n+1}$ є монотонною, зростаючою, тому що різниця

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} > 0$$

Тобто $a_n < a_{n+1}$.

2. Послідовність із спільним членом

$a_n = 1 + (-1)^n$ не є монотонною, тому що $a_1 < a_2, a_2 > a_3$.

 Послідовність називається **обмеженою зверху**, якщо існує таке число $M \in \mathbb{R}$, що $a_n \leq M$. При цьому число M називається **верхньою границею** послідовності.

Послідовність називається **обмеженою знизу**, якщо існує таке число $m \in \mathbb{R}$, що $a_n \geq m$. Число m називається **нижньою границею** послідовності.

Тестові завдання з теми «Числові послідовності» в програмі «МІЙКЛАС»

МІЙКЛАС 6

1. Знаходження членів послідовності, дана загальна формула

Умова завдання: 1,5б.

Запиши перші п'ять членів послідовності, якщо загальна формула послідовності: $a_n = 2,3n$.

Відповідь:

$$a_1 = \boxed{}$$

$$a_2 = \boxed{}$$

$$a_3 = \boxed{}$$

$$a_4 = \boxed{}$$

$$a_5 = \boxed{}$$

МІЙКЛАС 6

3. Аналітично задана послідовність

Умова завдання: 1,5б.

Знайди три перші члена послідовності $a_n = (-1)^{4n} + 4n$ і обчисли їх суму.

Відповідь:

$$a_1 = \boxed{}$$

$$a_2 = \boxed{}$$

$$a_3 = \boxed{}$$

$$S_3 = \boxed{}$$

МІЙКЛАС 6

2. Знаходження членів послідовності, дано попередні члени

Умова завдання: 1б.

Кожен наступний член числової послідовності виходить, якщо скласти два попередні:

$2, 3, 5, 8, 13, \dots$

Чотирнадцятий член цієї послідовності дорівнює:

МІЙКЛАС 6

4. Рекурентно задана послідовність

Умова завдання: 2б.

Обчисли три подальші члени послідовності, якщо

$a_1 = 9$ і $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 3$

Відповідь:

$$a_2 = \boxed{}$$

$$a_3 = \boxed{}$$

$$a_4 = \boxed{}$$

МІЙКЛАС 6

5. Визначення виду послідовності

Умова завдання: 2Б.

Дана послідовність, у якій $a_1 = 5, a_2 = 8$ і $a_n = 5 \cdot a_{n-2} - a_{n-1}$. Обчисли четвертий член послідовності.

Відповідь:

четвертий член послідовності дорівнює

Як задана послідовність? Обери правильну відповідь:

- графічно
- рекурентно
- словесно
- аналітично

МІЙКЛАС 6

7. Знаходження номера члена послідовності, який дорівнює даному числу

Умова завдання: 3Б.

Вкажи номер члена послідовності

$$y_n = \frac{18 - n}{5n + 6}, \text{ який дорівнює } \frac{16}{16}.$$

Відповідь:

$n =$

МІЙКЛАС 6

9. З'ясування обмеженості послідовностей

Умова завдання: 1Б.

Чи обмежена задана послідовність

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n+1}; \dots?$$

Відповідь:

- не знаю
- так
- ні

МІЙКЛАС 6

6. Знаходження членів послідовності (аналітична формула)

Умова завдання: 3Б.

За заданою формулою n -го члена обчисли перші три члени послідовності (y_n).

$$y_n = 8n^2 - 4n.$$

Відповідь:

$$y_1 =$$

$$y_2 =$$

$$y_3 =$$

МІЙКЛАС 6

8. Обчислення члена послідовності, якщо дана нижня межа

Умова завдання: 3Б.

Починаючи з якого номера усі члени послідовності (x_n), будуть не менше заданого числа A :

$$x_n = 4n - 2; A = 20.$$

Відповідь:

$$n =$$

МІЙКЛАС 6

10. Використання властивостей функції в обчисленні членів послідовності

Умова завдання: 4Б.

Знайди найменший член послідовності і вкажи його номер

$$y_n = 5n^2 - 12n + 7$$

Номер найменшого члена послідовності $n =$

Найменший член послідовності:

$$y$$
 $=$

МІЙКЛАС 6

11. Обчислення значення параметра p .
Обмежена послідовність

Умова завдання: 3б.

При яких значеннях параметра p послідовність

$$y_n = \frac{10n + p}{11n - 1}$$

обмежена згори числом 1 ?

(У відповіді обері знак нерівності, потім введи число)

Відповідь:

- $<$
 $>$
 \leq
 p \geq

МІЙКЛАС 6

12. Доказ монотонності послідовності

Умова завдання: 6,5б.

З'ясуй, якою є послідовність: зростаючою або спадною?

$$x_n = \frac{n^2}{10^n}$$

У своїх міркуваннях використовуй доказ. Запиши, чому дорівнює різниця даних членів послідовності (спочатку спрости вираз):

$$y_{n+1} - y_n = \frac{\boxed{} n + \boxed{} - \boxed{} n^2}{\boxed{}^{n+1}}$$

Запиши у вигляді формули нерівність, яка підтверджує або спростовує характер монотонності:

$$y \boxed{} \boxed{} y \boxed{}$$

Відповідь:


- послідовність не є монотонною


Довідка 🔍


Контрольна робота на тему «Числові послідовності» в програмі «Classtime»

1. Запишіть три перші члени числової послідовності, яка задана формулою $y_n = 4n^2 - 3n$.

 Додати зображення

 Додати YouTube відео

 Додати аудіо

 Одна правильна відповідь ▾

1 бал

$y_1 = 1; y_2 = 10; y_3 = 27$

$y_1 = -1; y_2 = 10; y_3 = 27$


$y_1 = 1; y_2 = 27; y_3 = 10$


$y_1 = 10; y_2 = 27; y_3 = 1$

2. Запишіть перші три члени геометричної прогресії, в якій $b_1 = 5; q = -2$.

 Додати зображення

 Додати YouTube відео

 Додати аудіо

 Одна правильна відповідь ▾

1 бал


5; 10; 20...


5; -10; 20...


5; 10; -20

3. Тіло за першу секунду пододало 21 м, а за кожну наступну - на 2 м менше, ніж за попередню. Яку відстань пододало тіло за шосту секунду?

 Додати зображення

 Додати YouTube відео

 Додати аудіо


 Текст ▾


1 бал


Учні матимуть можливість вільно ввести текст у відповідь на це питання.

4. Знайти суму нескінченної геометричної прогресії: $6; -2; \dots$

 Додати зображення

 Додати YouTube відео

 Додати аудіо


 Текст


1 бал


Учні матимуть можливість вільно ввести текст у відповідь на це питання.

5. Знайдіть a_9 і S_{20} для арифметичної прогресії: $-7; -4; -1; \dots$
Відповідь запишіть через ";"

 Додати зображення

 Додати YouTube відео

 Додати аудіо

 Текст


2 бали


Учні матимуть можливість вільно ввести текст у відповідь на це питання.

6. У геометричній прогресії $b_3 = 9; b_6 = 243$. Знайдіть $b_1; q; S_6$.
Відповідь записати через ";"

 Додати зображення

 Додати YouTube відео

 Додати аудіо


 Текст


2 бали


Учні матимуть можливість вільно ввести текст у відповідь на це питання.

7. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 5 і не перевищують 450.

 Додати зображення

 Додати YouTube відео

 Додати аудіо

 Текст


2 бали


Учні матимуть можливість вільно ввести текст у відповідь на це питання.

8. При якому значенні x числа $x - 1$; $2x - 5$; $4x - 19$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа і запишіть їх через “,”

 Додати зображення

 Додати YouTube відео

 Додати аудіо

 Текст ▼

2 бали

Учні матимуть можливість вільно ввести текст у відповідь на це питання.