Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання математики

Кваліфікаційна робота

бакалаврського рівня

на тему

« Методика розв’язування геометричних задач з використанням методу координат»

Виконала:

Студентка ІІ-го курсу,

Групи МЕІ-41

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Леошек Ольга Володимирівна

Керівник Белешко Дмитро Тимофійович

Рецензент________________________

Рівне 2021 року

Зміст

ВСТУП

Координатний метод розв'язування задач нині найдієвіший і найзручніший, а його правильне використання надає можливість розв'язувати багато видів завдань, не лише математичних, а й фізичних, астрономічних і технічних. Однак в межах шкільної програми метод координат вивчається дуже стисло і обмежено. В цій роботі ми взяли за мету, дослідити методику навчання учнів розв'язування геометричних задач за допомогою використання координатного методу.

Останні нововведення в програмі навчання шкільного курсу математики, пов’язані здебільшого з системою вивчення функцій у 7-9 класах. Ознайомлення з координатним методом учні розпочинають ще у 7-м класі, вивчаючи тему “Функції”. На вивчення цієї теми надається 10 годин, за цей період учні ознайомлюються з поняттями: функція, її область визначення та область значень, як задається функція та, що таке графік функції, а також вивчається поняття лінійної функції. Звичайно основою вивчення цих тем є матеріал 6-го класу, а саме тема «Координатна площина та графіки залежності між величинами».

Об'єкт - навчання учнів розв'язку геометричних задач за допомогою координатного методу.

Предметом дослідження є координатно-векторний метод розв'язування геометричних задач.

Завдання дослідження:

1. Розглянути історію виникнення та розвиток координатно-векторного методу розв'язування задач.

2. Дослідити методику навчання учнів розв'язувати геометричні задачі за допомогою координатного методу.

3. Показати як застосовується метод при, розв'язуванні шкільних задач з геометрії, зрівняти і представити переваги координатного методу.

1.Історія методу координат та його розвиток.

1.1. Історія методу координат.

Історія виникнення координат та системи координат розпочинається дуже давно, перша ідея методу координат виникла ще в стародавньому світі в зв'язку з потребами астрономії, географії та живопису. Прийнято вважати, що першим засновником географічної карти був давньогрецький вчений Анаксимандр Мілетський. Він для точного опису широти та довготи місця використовував прямокутні проекції. На стіні однієї із погребальних камер Стародавнього Єгипту були знайдені сліди використання ідеї прямокутних координат у вигляді квадратної сітки. Будівництво пірамід відноситься до періоду правління IV династії фараонів Стародавнього царства. Найважливіше у будівництві пірамід вважали пропорції, а також не останнє місце займали простота і лаконізм архітектурних форм. Відомо, що висота піраміди відноситься до її основи 1 до 0,618, а кут нахилу бічних граней по відношенню до площини становив 51-52°. Всі параметри в поєднанні з ідеально гладкою поверхнею створювали враження «нерукотворності» цих споруджень, напевно, саме це і хотіли втілити давні єгиптяни. Наприклад, комплекс пірамід Гізи являє собою гармонічний ряд архітектурних споруд, розташованих на одній місцевості.

Аналіз розміщення пірамід Гізи був здійснений у 40-х роках минулого століття – дослідником Володимировим, який помітив певну систему в їхньому взаєморозміщенні. Виявилось, що за основу їхнього розміщення була взята координатна сітка, орієнтована на сторони світу. Координати північного та південного напрямків,на котрі проектувались вершини пірамід, знаходилась однаковій відстані одна від одної, і ця відстань дорівнює половині довжини основи найбільшої піраміди Хеопса, а координати західного та східного напрямку дорівнюють половині довжини основи кожної піраміди плюс довжина основи попередньої. В наслідок такого розміщення кути усіх трьох пірамід розташовані на одній прямій, яка проходить під кутом 45° до координатної сітки. Звичайно, з точністю ми не можемо вважати, що єгиптяни дотримувались методу, який відкрив Володимиров, але точно, в основі ансамблю є певний порядок та задум.

Більше ніж за 100 років до н.е. грецький учений Гіпарх запропонував поділити земну кулю на карті паралелями та медіанами і ввести добре знайомі географічні координати: широту та довготу і позначити їх числами.

Головною заслугою в створенні сучасного методу координат належить французькому математику Рене Декарту. До нашого часу лишилась історія, яка підштовхнула його до відкриття. Займаючи місця в театрі, згідно куплених квитків, ніхто навіть не здогадується, хто і як запропонував звичайний в нашому житті метод нумерації крісел по рядах та місцях. Виявляється, що ця ідея належить відомому математику та досліднику Рене Декарту, на честь якого і названі прямокутні координати. Відвідуючи паризькі театри він постійно дивувався відсутності елементарного порядку розподілення глядачів в залі. Запропонована ним система нумерації, за якою кожне місце отримувало номер ряду і порядковий номер від краю, здійняла справжній фурор серед вищого суспільства Франції.

Науковий опис прямокутної системи координат Рене Декарт вперше виконав у своїй роботі «Роздуми про метод» в 1637 році. Саме тому прямокутну систему координат називають також – Декартова система координат. Окрім того, у своїй роботі «Геометрія»(1637), зображується взаємодія алгеброю та геометрією, Декарт ввів вперше поняття змінної величини і функції. «Геометрія» здійснила сильний вплив на розвиток математики. В декартовій системі координат отримали дійсне пояснення від'ємні числа.

Окрім математики захоплення Декарта розповсюджувались і на фізику, де він дав чітке формулювання закону інерції, відкрив закон заломлення світлових променів на розламі двох різних середовищ(«Діоптрика»,1637).

«Геометрія» Декарта виявилася важкою для читання і розуміння. Її неодноразово коментували і доповнювали (Ф. Дебон, Ф. Скоотен, Дж. Валліс, Й. Бернуллі та інші). Дж. Валліс, зокрема, розглядав не тільки від'ємні ординати, але й від'ємні абсциси. У 1692 році Й. Бернуллі увів термін «декартова геометрія». На цей час робота Ферма про його систему координат не була відома широкому загалу.

Тому деякі поняття, що стосуються методу координат називають декартовими: «декартові координати», «декартова система координат», «декартове рівняння», «декартова площина».[3, ст.84]

Термін «аналітична геометрія» з'явився в 1671 р. (як назва книги І. Ньютона). Терміни «абсциса», «ордината» і «апліката» мають грецьке походження і використовувалися в теорії про конічні перерізи. В сучасному розумінні їх почав використовувати Г. Лейбніц. У кінці 17 століття він також увів термін «координати», щоб підкреслити рівноправність «абсциси» і «ординати». Але загальновживаними ці терміни стали лише з середини 18 століття. Термін «вісь абсцис» увів І. Барроу (1670), а термін «вісь ординат» – значно пізніше Г. Крамер (1750). Початок координат спочатку називали початком абсцис, а в 1679 р. Ф. де Лагір використав окремий термін «початок». Р. Декарт увів традицію невідомі величини позначати останніми буквами алфавіту, а відомі – першими. В таблиці подано, як різні вчені позначали координати точки. [3, ст.84]

Вклад в розвиток координатного методу вніс також Пьєр Ферма, однак його праці були вперше опубліковані після його смерті. Декарт та Ферма використовували координатний метод лише на площині. Координатний метод у просторі вперше здійснив Леонард Ейлер уже в XVIII столітті.

Вивчення кривих: параболи , гіперболи та еліпса теж було розпочате ще в далекі часи. Стародавній математик олександрійської школи Аполлоній Перський (III-II ст.. до н.е.)

використовував прямокутні координати для знаходження та вивчення цих кривих, котрі були відомі ще в ті часи.

Аполлоній задавав їх рівняннями:

$$y^2 = px$$

$$y^2 = px + \frac{p}{q}x^2$$

$$y^2 = px - \frac{p}{q}x^2$$

Звичайно, запис рівнянь відрізнялися від сучасного у зв’язку з відсутністю алгебраїчної символіки в стародавні часи,у своїх працях він описував ці рівняння за допомогою геометричних понять. В його термінології y^2 - це площа квадрата зі стороною y, px – це площа прямокутника зі сторонами x та p .

У царській Росії вперше початки аналітичної геометрії вводилися в курс середньої школи на рубежі 18 – 19 століть. З 1845 р. викладання основ аналітичної геометрії в гімназіях припиняється, незважаючи на те, що на підтримку курсу виступали відомі вчені С.Я. Румовський, Н.І. Фусс, Т.Ф. Осиповський, М.В. Остроградський, В.Я. Буняковський, П.Л. Чебишов, Н.В. Бугаєв, В.П. Шереметєвський та інші. [3, ст.84]

У 1905 – 1917 роках окремий курс аналітичної геометрії вивчався в 7 класі реальних училищ. З Програмою курсу можна ознайомитися в роботі . Про доцільність такого вивчення неодноразово підкреслювали видатні математики і педагоги. Проти введення такого курсу виступав професор Д.М. Синцов, хоча в 1916 р. видав у Москві підручник для середньої школи «Краткий курс аналитической геометри на плоскости», який перевидавався у

Петрограді (1922). Книга складалася з п'яти розділів (Координати. Пряма лінія. Круг. Загальні поняття про координати і геометричні місця. Конічні перерізи). [3, ст.84]

На початку 30-х років, під час уведення єдиних обов'язкових програм, елементи вищої математики, зокрема й аналітичної геометрії, не ввійшли в курс математики середньої школи. Пізніше ідею оновлення шкільного курсу геометрії за рахунок аналітичної геометрії підтримали В.Л. Гончаров, Н.О. Глаголєв, Я.С. Дубнов, О.І. Маркушевич. [3, ст.84]

У 1958 р. з новою силою розпочинається рух за реформу шкільної математичної освіти. З'являється новий радикальний проект програми і навчальний посібник В.Г. Болтянського та І.М. Яглома «Геометрія», побудований на основі векторної алгебри та геометричних перетворень. [3, ст.84]

У 1968 р. після широкого громадського обговорення кількох проектів (варіанти 1965, 1966, 1967 і 1968; автори проектів: В.Г. Болтянський, А.М. Колмогоров, Ю.Н. Макаричев, О.І. Маркушевич, Г.Г. Маслова, К.І. Нешков, О.Д. Семушин, А.І. Фетисов, І.М. Яглом та ін.) було прийнято нову програму з математики. Крім іншого, цією програмою передбачалося введення елементів аналітичної геометрії на площині і в просторі в координатній і векторній формах. [3, ст.85]

У 1977 р. модернізація шкільного курсу математики на основі обов'язкового здійснення єдиного теоретико-множинного підходу до побудови навчальних курсів математики була різко розкритикована і згодом школи перейшли на нову програму і нові підручники. Теми «Декартові координати» і «Вектори» залишилися в програмі для основної і старшої школи. [3, ст.85]

Особливість вивчення декартових координат у сучасній школі пов'язана з профілізацією старшої школи і введенням до профільної підготовки в основну школу. У класах з поглибленим вивченням математики для цієї тему відводиться більше годин, ніж у звичайних, розглядається більший обсяг питань, а також визначено більше вимог до її засвоєння учнями. Зокрема зміст навчального матеріалу у явному вигляді містить вказівку на ознайомлення учнів з методом координат. Такий підхід реалізовано і в нових підручниках. [3, ст.85]

Розвиток алгебри та геометрії протягом тисячоліть розвивалось незалежно одне від одного, між ними був дуже тонкий зв'язок. За часи Декарта ці галузі досягли високого ступеня розвитку, але лише з появою аналітичної геометрії з'явилось нове направлення у вивченні, яке встановило тісний взаємозв'язок між алгеброю та геометрією.

Будь яку точку простору або площини можна знаходити за допомогою чисел – її координат. Це означає,що будь яку фігуру можна «зашифрувати» цифрами. Відношення між координатами частіше всього знаходимо не одну точку, а деяку множину точок. Наприклад, якщо відмітити всі точки, у яких абсциса дорівнює ординаті, точки, координати яких задовольняють рівняння $x=y$, то отримуємо пряму лінію - бісектрису першого та третього координатних кутів.

Поняття «множина точок» прийнято замінювати поняттям «геометричне місце точок». Наприклад, геометричне місце точок, координати котрих задовольняють рівняння $x=y$ - це бісектриса першого та третього координатного кута. Саме відкриття зв'язку між алгеброю та геометрією було поштовхом для нового направлення в розвитку математики як єдиної науки, у якій всі її частини неподільні.

Координати дають можливість за допомогою графіка зображувати залежність однієї величини від другої. В сучасному світі дані знання широко використовуються у багатьох галузях. Саме тому велика кількість спеціалістів різних галузей мають знання про прямокутні координати на площині.

1.2. Суть методу координат.

Суть методу координат як способу розв’язування задач полягає у двосторонньому підході. З одного боку, можна розв’язувати геометричні задачі за допомогою алгебри, наприклад, задавати фігури рівняннями та виражати в координатах різні геометричні співвідношення. З іншого боку, алгебраїчні задачі можна розв’язувати за допомогою геометрії.

Метод координат поєднує в собі алгебру та геометрію, що і робить його універсальним. Такий зв'язок дає набагато кращий результат у порівнянні , що могли б дати будучи окремими.

При розв’язуванні задач у шкільному курсі геометрії використання тільки геометричного методу не зовсім раціональне. В деяких випадках координатний метод спрощує рішення. Але для цього необхідно мати достатньо досвіду та знань, щоб обирати найбільш ефективну для даного випадку систему координат. Тому що, від того чи іншого вибору одна і та ж задача отримує інший вид. Саме в цьому і є суть методу координат.

Загалом метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів.

Числа, за допомогою яких визначається положення точки, називають її координатами.[8]

Із введенням методу координат до шкільного курсу геометрії розширився набір аналітичних методів. До них, крім методу рівнянь в алгебрі, належать векторний метод і метод, що ґрунтується на використанні тригонометричних функцій. Координатний метод спрощує розв'язування багатьох геометричних задач, доведення теорем, дає можливість спростити виклад теоретичного матеріалу стосовно векторів, тригонометричних функцій. Метод координат дає змогу встановити тісні зв'язки з алгеброю, фізикою, географією, астрономією, застосовувати сучасні ЕОМ не тільки до розв'язування обчислювальних задач, а й до геометричних, дослідження геометричних об'єктів, співвідношень, графічних завдань. [8]

Зазначимо, що застосування методу координат передбачає виконання певної технічної роботи, пов’язаної з перетвореннями виразів, розв’язуванням рівнянь або систем рівнянь. Вдалий вибір системи координат може полегшити викладки. Перетворюючи площину на координатну, ми деяким точкам приписуємо координати, які в рівняннях, що складаються відіграють роль параметрів. Природно потрібно прагнути до такого вибору системи координат, щоби параметрів було якомога менше. Наприклад, може здаватися, що для задання чотирьох вершин прямокутника необхідно 8 параметрів. Проте якщо ввести систему координат так, щоб дві сторони прямокутника збігалися з осями координат, то досить двох параметрів.[11, с.112]

Координатно-векторний метод розв’язання задач порівняно з іншими методами, дуже часто дозволяє уникнути штучних побудов, спрощує розв’язання багатьох геометричних задач і доведення теорем. Він зручний також тим, що не потрібно використовувати велику кількість формул, ознак і властивостей фігур. Координатно-векторний метод в шкільному курсі геометрії застосовується досить рідко, хоч і є досить зручним. Сутність координатного методу, як і векторного, полягає в тому, що геометрична задача перекладається на мову алгебри, і її розв’язання зводиться до розв’язання рівнянь, нерівностей чи їх систем. Щоб застосовувати координатно-векторний метод до розв’язання задачі, треба виконати три кроки:

1) Сформулювати задачу на мові векторів чи координат.

2) Перетворити алгебраїчний вираз.

3) Перекласти знайдений результат на мову геометрії.[5, с.151]

Перш ніж переводити задачу на координатно-векторну мову, необхідно встановити, чи доцільно розв’язувати задачу саме координатно-векторним методом.

Розв’язувати задачу цими методами має сенс, якщо це задачі:

• пов’язані з доведенням паралельності прямих (відрізків);

• в яких треба довести, що деяка точка ділить відрізок у певному відношенні або є його серединою;

• в яких треба обґрунтувати, що три точки A, B і C лежать на одній прямій;

• в яких треба довести, що даний чотирикутник ABCD – паралелограм;

• на знаходження довжини відрізка;

• на знаходження величини кута;

• на відшукання геометричних місць точок;

• на доведення залежностей між лінійними елементами. [5, с.151]

Для гарного оволодіння учнями координатно-векторним методом необхідно ще на пропедевтичному етапі сформувати в учнів уявлення про можливість довільного вибору системи координат, в процесі розв'язання задач. Правильний вибір осей координат потрібен в першу чергу для того, щоб спростити алгебраїчні операції, а не перетворити легку задачу на дуже складну. При відсутності цієї форми навчальної діяльності процес розв'язання задач буде відбуватися більш повільно і його результати будуть менш ефективними, що в свою чергу призведе до погіршення засвоєння навчального матеріалу. [5, с.151]

1.3.Метод координат у шкільному курсі геометрії.

Із введенням методу координат до шкільного курсу геометрії розширився набір аналітичних методів. До них, крім методу рівнянь в алгебрі, належать векторний метод і метод, що ґрунтується на використанні тригонометричних функцій. Координатний метод спрощує розв'язування багатьох геометричних задач, доведення теорем, дає можливість спростити виклад теоретичного матеріалу стосовно векторів, тригонометричних функцій. Метод координат дає змогу встановити тісні зв'язки з алгеброю, фізикою, географією, астрономією, застосовувати сучасні ЕОМ не тільки до розв'язування обчислювальних задач, а й до геометричних, дослідження геометричних об'єктів, співвідношень, графічних завдань. Відповідно до чинної програми вперше поняття «координата точки на прямій», «прямокутна система координат на площині» розглядаються в курсі математики 6 класу. У курсі алгебри 7 - 9 класів здобуті знання і вміння застосовуються до побудови графіків функцій, графічного розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. У курсі геометрії 8 класу знову передбачено вивчення декартових координат, застосування методу координат до дослідження властивостей геометричних фігур і означення тригонометричних функцій кута від 0° до 180°, вивчення функцій. [8]

У підручниках з геометрії по-різному визначено місце методу координат. У підручнику О. В. Погорєлова тема «Декартові коорди-нати на площині» пропонується у 8 класі і широко використовується для вивчення властивостей геометричних фігур, векторів, паралельного перенесення. У підручнику Л. С. Атанасяна «Метод координат» передбачено вивчати в 9 класі після вивчення векторів і застосовувати його до розкладання векторів на два неколінеарних вектори, обчислення скалярного добутку векторів, розв'язування найпростіших задач у координатах і виведення рівняння кола та прямої. Основною метою вивчення декартових координат в школі є форму-вання поняття про координати точки на прямій і площині, вміння зна-ходити точку за її координати і розв'язувати обернену задачу, знахо-дити відстань між двома точками і координати середини відрізка, застосовувати метод координат до розв'язування найпростіших задач і в подальшому вивченні курсу математики та суміжних предметів. [8]

Для оволодіння будь-якого матеріалу з довільної дисципліни, так і координатно-векторного методу, важливим є вивчення як теорії так і завдання практичного характеру. Проте враховуючи специфіку координатно-векторного методу ми вважаємо доцільним основний акцент приділяти практичній діяльності учнів, тобто розв’язування задач. використовуючи координатний та векторний методи. Для оволодіння вмінням переводити з геометричної мови на координатно-векторну та навпаки необхідно знати, як то чи інше координатно-векторне співвідношення можна виразити на геометричній мові. [5, с.152]

Для підвищення ефективності уроків геометрії необхідно використовувати як традиційні засоби наочності так і технічні, пов'язані з новими інформаційними технологіям, що полегшують роботу вчителя, підвищують пізнавальний інтерес учнів, що в свою чергу підвищує ефективність навчального процесу. При вивченні дій над векторами можливо організувати самостійну, пізнавальну діяльність учнів з використанням групових та ігрових форм її організації. Координатно-векторний метод в шкільному курсі геометрії використовується для досить легких та типових задач. Тому доречно було б розглянути на факультативних заняттях більш складні та цікаві задачі, для поглиблення знань про координатно-векторний метод. [5, с.152]

За шкільною програмою, перед вивченням координатного методу, для учнів вводиться поняття «числової осі». Що вона собою являє? Числова вісь – це промінь, на якому розташовані у порядку зростання числа і кожній точці, що міститься на цій напрямленій прямій відповідає певне число.

На прямій задамо напрямок (зліва направо), точку О (початок відліку) і одиничний відрізок (масштаб) .

Пряма, що володіє перерахованими властивостями, називається дійсною числовою віссю.

1.4.Поняття числової осі. Метод координат на площині та у просторі.

Дійсна числова вісь реалізує взаємно-однозначна відповідність між безліччю точок прямої і безліччю дійсних чисел {M} <=> R в тому сенсі, що кожному числу x є R відповідає деяка точка M числової осі і, навпаки, кожній точці M числової осі ставиться в відповідність число x?, що є її координатою на цій числової осі. Записують: M (x).[9]

Наступним кроком при вивченні геометрії є ознайомлення, безпосередньо, з самим методом координат. Учні середньої школи детально вивчають метод координат на площині, а уже в старшій школі ознайомлюються з поняттям координат у просторі. Пропоную розглянути різницю між системою координат заданою у просторі та на площині.

Основним завданням системи координат є встановлення взаємно однозначної відповідності, наприклад, між точками прямої (площини, простору) і дійсними числами (парами, трійками дійсних чисел), і на цій основі подання (описання) геометричних об’єктів у вигляді алгебраїчних виразів (рівнянь, нерівностей тощо). Подальше вивчення властивостей геометричних фігур і відношень між ними проводиться алгебраїчними методами. [14, ст. 8]

Прямокутна декартова система координат (ПДСК) вводиться на площині наступним чином. Проведемо на площині дві прямі, які при перетині утворюють прямий кут. Точка перетину прямих — точка О називається початком координат. Одну пряму називають віссю Ox. Точка О ділить вісь Ox на два промені, один вважають додатним напрямком, інший від'ємним. Додатний напрямок позначають стрілочкою. Аналогічним чином, друга пряма називається віссю Oy і має додатній напрямок.[2]

Для визначеності будемо вважати, що одна з прямих проходить горизонтально, а інша вертикально. Горизонтальна пряма називається віссю абсцис, а вертикальна віссю ординат .[13, с.12]

Через довільну точку *O* простору проведемо три попарно перпендикулярні прямі x, y, z. На кожній з них вибиремо *напрям*, позначивши його стрілкою, та *одиничний відрізок*. У такий спосіб задають *прямокутну систему координат у просторі*. Простір, у якому задано прямокутну систему координат, називають *координатним простором*. Точку *O* називають *початком координат*, а прямі з вибраними напрямами – *осями координат*. Вісь x називають *віссю абсцис*, вісь y – *віссю ординат*, вісь z – *віссю аплікат*. Початок координат розбиває кожну з осей на дві півосі – додатну й від’ємну. Площини, які проходять відповідно через осі координат x і y, y і z, x і z, називають координатними площинами xy, yz, zx. [10, с. 237]

У прямокутній системі координат у просторі кожній точці *M* простору відповідає єдина впорядкована трійка чисел, а кожній впорядкованій трійці чисел – єдина точка простору. Цю трійку чисел називають координатами точки й визначають так само, як координати точки на площині. [10, с. 237]

Проведемо через точку *M* площину, перпендикулярну до осі *x*. Вона перетинає вісь *x* у точці M . Координатою *x* точки M називають число, що відповідає точці на осі *x*. Якщо точка M_x збігається з точкою *O,* то вважатимемо,що абсциса точки *M* дорівнює нулю.

[10, с. 238]

Проведемо площини, перпендикулярні до осей *y* і *z,* які перетинають ці осі в точках M_y і M відповідно. Координатою y точки *M* називають число, що відповідає точці на осі *y*, а координатою *z* точки *M* називають число, що відповідає точці на осі *z*. Точку *M* з її координатами записують, як і в прямокутній системі координат на площині, а саме: *M (x;y; z)*. [10, с. 238]

1.5. Метод координат у планіметрії.

Зауважимо, що використання координатного методу до розв'язування алгебраїчних задач не відноситься до кола питань, які розглядаються у даній темі, тому зосередимось на планіметричних задачах [15, ст. 230]

Спочатку зазначимо таке. Третю програмову тему "Декартові координати на площині" учні вивчають у 9-му класі. На вивчення теми відведено 10 годин. Зміст навчального матеріалу такий: прямокутна система координат на площині; координати середини відрізка; відстань між двома точками із заданими координатами; рівняння кола і прямої. У пояснювальній записці до програми записано, що під час доведення теорем поряд із основним апаратом доведення (ознаками рівності трикутників), використовують засоби алгебри, серед яких - координати.

[15, ст. 230]

У класах з поглибленим вивченням математики, на заняттях математичного гуртка у звичайних класах доцільно ознайомити учнів з методом координат розв'язування геометричних задач. На прикладах розв'язання принаймні двох задач варто виділити правило-орієнтир методу координат.

[15, ст. 230]

Серед планіметричних задач, які доцільно розв'язувати координатним методом, виділимо задачі двох видів.

1-й вид: на обґрунтування залежностей між елементами фігур, особливо між довжинами цих елементів.

2- й вид: на знаходження множини точок, які задовольняють певним властивостям. [15, ст. 232]

У шкільному курсі геометрії обмежуються лише розглядом прямокутної системи координат, тому координатний метод у планіметрії особливо ефективний під час встановлення співвідношень між довжинами елементів трикутників і чотирикутників, діагоналі або сторони яких перпендикулярні.

[15, ст. 232]

Таким чином, для розв'язування задач координатним методом важливо оволодіти вміннями:

1) будувати точку за її координатами;

2) знаходити координати заданих точок;

3) обчислювати відстань між точками, які задані координатами;

4) обчислювати координати середини відрізка;

5) обирати оптимально систему координат;

6) складати рівняння фігури за її характеристичною властивістю;

7) бачити за рівнянням конкретний геометричний образ;

8) перетворювати алгебраїчні рівності.

Ефективним засобом формування вказаних вмінь є використання систем відповідних задач. Наведемо приклад системи задач, що сприяє формуванню окремих вмінь використовувати координатний метод . [15, ст. 233]

2.Поняття вектора.

2.1. Методика вивчення векторів на площині.

За чинною програмою вектори вивчаються в два етапи:спочатку вивчаються вектори на площині,а потім у просторі. У Погорєлова у 8 кл крім основних понять,що стосуються векторів, вивчаються всі операції над векторами (додавання, віднімання, множення вектора на число і скалярний добуток двох векторів, розкладання векторів по координатних осях). Найчастіше вектором називають напрямлений відрізок, або клас напрямлених відрізків, або паралельне перенесення. Розходження в поглядах виникає насамперед тому, що науці відомі різні поняття векторів. Залежно від тих задач,для розв’язання яких використовують вектори, розрізняють вектори прикладені (зв’язані), вільні. У шкільному курсі математики розглядаються тільки вільні вектори,а у фізиці здебільшого мають справу з прикладеними векторами. Відразу ж після формулювання означення треба зауважити,що на малюнках вектори зображають напрямленими відрізками і показати,як це робиться. Викладати вектори найзручніше в координатній формі. Вивчаючи властивості векторів не слід обмежуватися тільки алгебраїчною формою запису цих властивостей,треба ознайомити учнів і з геометричною формою дій над векторами, з геометричними ілюстраціями відповідних властивостей. Вивчення властивостей векторів тривимірного простору можна здійснювати аналогічно, показавши що вектори у просторі визначаються трьома координатами. Вивчаючи тему, треба не тільки розглядати питання теорії, а й супроводжувати її вивчення достатнім числом тренувальних вправ. В даній темі вивчається векторний метод розв'язання задач. [12, ст. 1]

До складу діяльності спрямованої на використання векторного методу входять такі специфічні розумові дії:

1) переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови на мову векторів і обернена дія;

2) дії(операції) над векторами;

3) подання вектора у вигляді суми, різниці двох векторів, добутку вектора на число;

4) перетворення векторних рівностей з використанням законів векторної алгебри і властивостей скалярного добутку;

5) перехід від співвідношень між векторами до співвідношень між їх довжинами. [12, ст. 1]

Векторний метод іноді буває досить зручним та універсальним при доведенні деяких тверджень, особливо широке застосування має у фізиці. [12, ст. 1]

Ідея вектора одна з фундаментальних ідей сучасної математичної науки та її застосувань. На векторній основі зараз будуються лінійна алгебра, аналітична і диференціальна геометрія, теорія багатовимірних просторів. Вектори широко застосовуються в сучасній фізиці, технічних науках. Тому природно, що в 50-х роках XX ст. на початку всесвітнього руху за реформу шкільної математичної освіти у всіх розвинутих країнах була висловлена одностайна думка - впровадити ідею вектора в шкільну математику. При цьому пропонувалося два підходи. [4]

1. Крайні модерністи (Ж. Дьєдонне, Л. Фелікс, Г. Шоке) наполягали на тому, щоб зробити ідею вектора базисною ідеєю шкільного курсу і, зокрема, курс геометрії будувати на основі ідеї векторного простору, наприклад, використовуючи аксіоматику Вейля. [4]

2. У колишньому СРСР А. М. Колмогоров, О. І. Маркушевич, які очолювали перебудову змісту шкільної математичної освіти, дотримувались поміркованого підходу і пропонували не розглядати ідею вектора як базисну і не будувати навіть певний розділ геометрії на векторній основі. Разом з тим передбачалось ввести поняття вектора і. необхідний апарат векторної алгебри із загальноосвітньою метою та використовувати вектори як апарат для доведення теорем і розв’язування задач геометрії, фізики. Спробу реалізувати такий погляд здійснено в посібниках з

геометрії за редакцією А. М. Колмогорова та З. А. Скопця, а також у паралельних підручниках геометрії[4].

У зв'язку зі зменшенням кількості годин на вивчення математики в школі базова програма й автори чинних паралельних підручників геометрії не ставлять за мету систематично використовувати векторний метод при доведенні теорем і розв'язуванні задач, а передбачають вивчати вектори із загальноосвітньою метою і послуговуватися ними лише для розв'язування найпростіших стандартних задач. Безперечно, в старших класах фізико-математичного профілю, спеціалізованих школах і класах з поглибленим вивченням математики, на факультативах векторний метод має широко застосовуватися. [4]

За чинною програмою і проектом нової програми з математики вектори передбачено вивчати в два етапи: спочатку вивчаються вектори на площині, а потім - у просторі. У підручнику О. В. Погорєлова у 8 класі крім основних понять, що стосуються векторів, вивчаються всі операції над векторами (додавання, віднімання, множення вектора на число і скалярний добуток двох векторів, розкладання векторів по координатних осях). Дещо інше місце вектори посідають у підручнику Л. С. Атанасяна та ін. Тут вектори починають вивчатися у 9 класі, що звужує можливості їх застосування в геометрії і фізиці. [4]

Базова програма вимагає в 8-9 класах мати уявлення про вектор, рівні вектори, вміти виконувати операції над векторами, передбачені програмою, і використовувати вектори до розв'язування нескладних стандартних задач (обчислення довжин відрізків і міри кутів, додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів). [4]

Про різні можливі означення вектора. У зв'язку із введенням векторів у шкільний курс насамперед постало питання: яке означення вектора взяти в курсі геометрії? У журналі «Математика в школе» з цього приводу спеціально друкувались сіл пі (див., зокрема: Г. П. Бевз. Об определении понятия «вектор» // Математика в школе, 1980, № 2; А. Д. Александров. Так что же такое вектор? // Математика в школе, 1984, № 5). Як зазначає О. Д. Александров у згаданій вище статті, питання «Що ж Таке вектор?», «Яке означення правильне?» не точні. Відповіді на ці питання такі: вектор - це те, що називають вектором, і правильне означення те, яке прийняте, якщо тільки воно свідоме і не містить у собі суперечності. Точніше запитати не що таке вектор, а що називають вектором або що слід називати вектором, щоб означення було осмисленим, не призводило до плутанини і було плідним у застосуваннях. Г. П. Бевз звернув увагу на те, що в фізиці і геометрії розглядають різні поняття вектора. У фізиці розрізняють зв'язані і ковзні вектори. [4]

Зв'язані вектори звуться рівними, якщо вони мають не тільки рівні модулі й однакові напрями, а й спільну точку прикладання. [4]

Клас рівних між собою векторів, розміщених на одній прямій, називають ковзними векторами. Отже, ковзний вектор визначається трьома елементами: прямою, напрямом і довжиною. [4]

У геометрії розглядаються вільні вектори, тобто такі, для яких суттєвим є лише довжина і напрям. Наведемо приклад. Якщо маємо дві зчеплені шестерні , то вектори O_1F_1 і O_2F_2 з погляду фізики, різні, бо сили, що зображуються ними, обертають шестірню в протилежних напрямах. З погляду геометрії – всі чотири вектори O_1F_1, O_2F_2, O_3F_3, O_4F_4 зображують той самий вектор. Вільні вектори застосовують і в фізиці. Наприклад, швидкість і прискорення твердого тіла, що рухається поступально, - вільні вектори. [4]

У навчально-методичній літературі трапляються різні означення вільних векторів. Вектори трактуються як:

1) напрямлений відрізок прямої евклідового простору, в якого один кінець (точка *A)* називається початком вектора, а другий кінець (точка *B)* - кінцем вектора;

2) впорядкована пара точок;

3) клас еквівалентних напрямлених відрізків;

4) паралельне перенесення;

5) впорядкована пара, трійка,..., «-чисел. [4]

Множини об’єктів, що відповідають цим трактуванням, ізоморфні одна одній. Кожне з наведених трактувань є інтерпретацією більш загального абстрактного поняття вільного вектора, означення якого формулюється в теоретичних курсах геометрії: будь-яку множину об’єктів, що задовольняє перші вісім аксіом системи Вейля, називають множиною векторів, а будь-який елемент цієї множини - вектором. У школі з дидактичних міркувань звичайно розглядають одну з інтерпретацій. У посібниках вектор означається як паралельне перенесення, а в підручниках його трактують як напрямлений відрізок. О. Д. Александров у згаданій вище статті критично проаналізував різні означення векторів і звернув увагу на те, що, даючи означення через напрямлений відрізок, треба спочатку дати означення напрямленого відрізка і рівності напрямлених відрізків, а відтак – сформулювати означення: вектором в геометрії називають напрямлений відрізок, що розглядається з точністю до вибору початку, тобто рівні один одному напрямлені відрізки вважаються представниками або зображеннями того самого вектора. [4]

З метою мотивації запровадження поняття «вектор» доцільно нагадати учням, що з поняттям векторних величин вони стикались раніше, в 7 класі, в курсі фізики. У підручнику фізики векторними називають величини, які крім числового значення (модуля) мають напрям. Наприклад, сила - векторна величина. На рисунках силу зображують у вигляді відрізка прямої із стрілкою на кінці, яка вказує напрям. Взагалі поняття вектора в геометрії виникло як математична абстракція об’єктів, що характеризуються величиною і напрямом на відміну від скалярних величин, які характеризуються лише числом. Проте не будь-яка величина, що характеризується модулем (числовим значенням при даній одиниці) і напрямом, є вектором. Наприклад, потік машин на вулиці міста можна виміряти кількістю машин за 1 год, і цей потік має напрям. Однак такі величини не додаються як вектори, наприклад за правилом трикутника або паралелограма. [4]

Про векторний метод розв'язування задач. До складу діяльності, спрямованої на використання векторного методу, входять такі специфічні розумові дії:

1) переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови на мову векторів і обернена дія;
2) дії (операції) над векторами;
3) подання вектора у вигляді суми, різниці двох векторів, добутку вектора на число;
4) перетворення векторних рівностей з використанням законів векторної алгебри і властивостей скалярного добутку;
5) перехід від співвідношень між векторами до співвідношень між їх довжинами. [8]

Згідно з теорією поетапного формування розумових дій, важливе попереднє поетапне відпрацювання кожної розумової дії, що входить до складу діяльності щодо розв'язування задач векторним методом. З метою успішного засвоєння учнями першої розумової дії доцільно запропонувати учням таблицю основних відношень обома мовами . [8]

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом-орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах доведення двох тверджень, з яких перше учні вміють доводити і без застосування векторів. [8]

Внаслідок виділення суттєвого спільного в обох доведеннях учні колективно під керівництвом учителя можуть прийти до правила-орієнтира векторного методу доведення тверджень.

1. Виділити в формулюванні теореми (задачі) умови і вимоги,

виконати рисунок. Сформулювати вимоги мовою векторів і, враховуючи їх, позначити вектори на рисунку.

2. Враховуючи умови і вимоги, скласти допоміжні векторні рівності. Для цього виразити, якщо це потрібно, вектори у вигляді суми або різниці інших векторів, або у вигляді добутку вектора на число. Перетворити одержані рівності і прийти до потрібної.

3. Перекласти одержану рівність на мову геометрії. [8]

Найважчим для учнів є позначення векторів на рисунку. Досвід раціонального позначення векторів набувається на практиці, однак певні орієнтири в цьому дає аналіз формулювання теореми (задачі). Для формування навичок використання правила-орієнтйра варто запропонувати учням розв’язати векторним методом відомі з планіметрії твердження про властивість середньої лінії трикутника, про суму квадратів діагоналей паралелограма, про властивість діагоналей ромба, прямокутника. [8]

Слід звернути увагу школярів на те, що векторний метод доведення теорем не універсальний, його зручно застосовувати для доведення паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, подільності відрізка в даному відношенні для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів. [8]

При розв’язуванні метричних задач, зокрема на визначення довжини відрізка і міри кута векторним методом, доцільно запропонувати учням відповідні алгоритми [8]

У темі, присвяченій векторам на площині, вводиться значна кількість нових для учнів понять - абсолютна величина (або модуль вектора), нульовий вектор, рівні вектори, координати вектора, кут між ненульовими векторами, колінеарні вектори та ін. Викладений в підручнику О. В. Погорєлова теоретичний матеріал, що стосується векторів на координатній основі, вигідно відрізняється чіткістю, економністю, простотою доведень законів **дій** над векторами. Водночас тут мало геометричних ілюстрацій, які розвивали б просторові уявлення і уяву, вправ на побудову. Одним з найважливіших для подальшого викладу теоретичного матеріалу є поняття про координати вектора. Не можна обмежуватися лише формальним введенням означення цього поняття. Доцільно мотивувати потребу в ньому, дати учням наочне уявлення про координати вектора на координатній площині. Розглянемо один з можливих методичних варіантів запровадження поняття координат вектора. [4]

Учитель звертає увагу учнів на те, що сьогодні на уроці вони ознайомляться з новим для них поняттям - координатами вектора. Координати вектора, як і координати точки, дають можливість визначати положення вектора на координатній площині. Координати вектора дадуть змогу означити дії (операції) над векторами, довести їхні властивості і застосувати до розв’язування задач, а також встановити зв’язок між геометричними закономірностями в розміщенні векторів і арифметичними закономірностями між їхніми координатами, навпаки. [4]

Учням пропонується розглянути положення трьох векторів на $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$ на координатній площині і порівняти їх розміщення. Учні помічають, що вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ рівні (мають рівні модулі і однаково напрямлені). Вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ - різні і за довжиною, і за розміщенням на координатній площині. Щоб схарактеризувати помічені закономірності за допомогою чисел, введемо координати векторів, які задаються за допомогою координат початку і кінця вектора. Внаслідок розв'язування цієї вправи учні дістали два факти:

1) виявилось, що координати рівних векторів однакові, а різних - різні;

2) учні визначають за допомогою формули відстані між двома точками довжину вектора і роблять висновок, що модуль вектора *а* дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат. [4]

Отже, $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, тобто учні дійшли потреби довести необхідну і достатню умови рівності двох векторів. Далі доцільно поставити перед учнями запитання: чи можна визначати координати вектора за рисунком? Виявляється, що можна. Для цього досить порахувати кількість клітинок під час руху від початку вектора до кінця спочатку вздовж осі *x,* а потім - вздовж осі *y.* [4]

На наступному уроці учням пропонується знайти за рисунком вже відомі координати вектора $\overline{c} = \overline{AB}$ і векторів *BC і AC, а* відтак співвідношення між координатами векторів *AB, BC* і *AC,* які

утворюють трикутник. Це підведе учнів до означення суми двох векторів. За рисунком учні визначають координати векторів:
AB(-6; -6), *BC(5; 2), AC* (-1; -4). Помічаємо, що координати вектора *AC* є сумою координат векторів *AB* і ВС, які разом з вектором *AC* утворюють трикутник. [4]

В и в ч е н н я д і й (о п е р а ц і й) н а д в е к т о р а м и. Вище наведено методичний варіант, за якого учні конкретно-індуктивним методом самостійно підводяться до формулювання означення суми двох векторів. Аналогічно можна підвести і до формулювання означення різниці двох векторів через їх координати. Для векторного методу розв'язування задач важливо, щоб учні навчились вільно шляхом відповідних побудов знаходити суму і різницю векторів. Тут виявляється ефективним алгоритмічний підхід - вміння знайти суму двох векторів за правилом трикутника або правилом паралелограма.

Задачу про побудову різниці двох векторів *a* і b корисно розглянути теж двома способами. Слід мати на увазі, що в підручнику О. В.. Погорєлова скалярний добуток двох векторів означається через їхні координати. [4]

Прийняте в багатьох посібниках за означення скалярного добутку твердження про властивість його дорівнювати добутку числових значень довжин на косинус кута між векторами в підручнику О. В.. Погорєлова доводиться. Введення скалярного добутку і поняття колінеарності векторів дає можливість розв'язувати різноманітні задачі, пов'язані з перпендикулярністю і паралельністю відрізків, метричні задачі на визначення довжин відрізків і величин кутів.

Про векторний метод розв'язування задач. До складу діяльності, спрямованої на використання векторного методу, входять такі специфічні розумові дії:

1) переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови на мову векторів і обернена дія;

2) дії (операції) над векторами;

3) подання вектора у вигляді суми, різниці двох векторів, добутку вектора на число;

4) перетворення векторних рівностей з використанням законів векторної алгебри і властивостей скалярного добутку;

5) перехід від співвідношень між векторами до співвідношень між їх довжинами.

Згідно з теорією поетапного формування розумових дій, важливе попереднє поетапне відпрацювання кожної розумової дії, що входить до складу діяльності щодо розв'язування задач векторним методом. З метою успішного засвоєння учнями першої розумової дії доцільно запропонувати учням таблицю основних відношень обома мовами [4]

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом-орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах доведення двох тверджень, з яких перше учні вміють доводити і без застосування векторів. [4]

Внаслідок виділення суттєвого спільного в обох доведеннях учні колективно під керівництвом учителя можуть прийти до правила-орієнтира векторного методу доведення тверджень. [4]

4. Виділити в формулюванні теореми (задачі) умови і вимоги,

виконати рисунок. Сформулювати вимоги мовою векторів і, враховуючи їх, позначити вектори на рисунку.

5. Враховуючи умови і вимоги, скласти допоміжні векторні рівності. Для цього виразити, якщо це потрібно, вектори у вигляді суми або різниці інших векторів, або у вигляді добутку вектора на число. Перетворити одержані рівності і прийти до потрібної.

6. Перекласти одержану рівність на мову геометрії.

Найважчим для учнів є позначення векторів на рисунку. Досвід раціонального позначення векторів набувається на практиці, однак певні орієнтири в цьому дає аналіз формулювання теореми (задачі). Для формування навичок використання правила-орієнтйра варто запропонувати учням розв’язати векторним методом відомі з планіметрії твердження про властивість середньої лінії трикутника, про суму квадратів діагоналей паралелограма, про властивість діагоналей ромба, прямокутника. [4]

Слід звернути увагу школярів на те, що векторний метод доведення теорем не універсальний, його зручно застосовувати для доведення паралельності і перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, подільності відрізка в даному відношенні для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів. [4]

При розв’язуванні метричних задач, зокрема на визначення довжини відрізка і міри кута векторним методом, доцільно запропонувати учням відповідні алгоритми [4]

Відрізок, для якого визначено напрям називають вектором . Вектор зручно зображувати відрізком із стрілкою, що показує напрям векторів. Точку А називають початком вектора, точку В - кінцем вектора. Вектори позначають двома великими латинськими літерами із стрілкою над ними. Вектор записують так: $\vec{AB}$. Перша буква позначає початок вектора, а друга - кінець. Інколи вектори позначають однією малою латинською буквою, наприклад, вектор $\vec{m}$.[6]

Вектор, у якого початок збігається з кінцем, називають нульовим вектором. На малюнку такий вектор зображують точкою. Якщо, наприклад, точку, що зображує нульовий вектор, позначити буквою С, то даний нульовий вектор можна позначити $\vec{CC}$. Нульовий вектор позначають також символом $\vec{0}$. Напрям нульовий вектор не має. [6]

Довжиною (або модулем, або абсолютною величиною) вектора $\overline{AB}$ називають довжину відрізка АВ. [6]

Модуль вектора $\vec{AB}$ позначають так: $|\vec{AB}|$, модуль вектора $\vec{p}$ позначають так: $\vec{p}$. Довжина нульового вектора дорівнює нулю: $|\vec{0}| = 0$. [6]

Колініарними називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колініарні вектори можуть бути співнапрямленими, тобто однаково напрямленими, або протилежно напрямленими. Записують це так: ↑↑ , ↑↓ $\vec{d}$. Два вектори називають рівними, якщо вони співнапрямлені і їх довжини рівні. [6]

При додаванні векторів і, можна використовувати правило трикутника або правило паралелограма. За правилом трикутника:

1) від кінця вектора, відкладаємо вектор, що дорівнює вектору;

2) вектор, початок якого збігається з початком вектора, а кінець з кінцем вектора, є сумою векторів і. [6]

Координатами вектора з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ і $y = y_2 - y_1$. Записують вектор, вказуючи його координати так: (x; y). Наприклад, (3;-2), (-2;0). [13]

Цілі вивчення векторного методу:

- дати ефективний метод розв'язання різних геометричних задач і доведення теорем;

- показати широке застосування векторного апарату в інших областях знань: техніці, фізиці, хімії і ін.;

-показати використання векторного методу при розв'язуванні задач з метою формування в учнів уміння виконувати узагальнення і конкретизацію;

- формувати в учнів такі якості мислення, як гнучкість, цілеспрямованість, раціональність, критичність та ін. [15, ст. 240]

За діючою програмою тему "Вектори на площині" учні вивчають у 9-му класі. На вивчення теми відведено 10 годин. Зміст навчального матеріалу такий: вектор, його модуль та напрям; рівність векторів; координати вектора; додавання і віднімання векторів; множення вектора на число; колінеарні вектори; скалярний добуток векторів. Вектори віднесені, як записано у пояснювальній записці до програми, до засобів, за допомогою яких доводяться математичні твердження. [15, ст. 240]

У зв'язку зі зменшенням кількості годин на вивчення математики в школі, програма та автори чинних підручників з геометрії не ставлять за мету систематично використовувати векторний метод при доведенні теорем і розв'язуванні задач, а передбачають вивчати вектори із загальноосвітньою метою і послуговуватися ними лише для розв'язування найпростіших стандартних задач. Безперечно в спеціалізованих школах і класах із поглибленим вивченням математики, на факультативах векторний метод має широко застосовуватися. [15, ст. 240]

2.2.Дії над векторами.

Вектор - поняття математичне, що знаходить своє застосування в фізиці та в інших прикладних науках. В математиці розглядають вільні вектори (вектор не зв'язаний ні з якою прямою і ні з якою фіксованою точкою). Різні направлені відрізки, які мають однакову довжину напрям, є зображенням одного й того ж вільного вектора. В різних підручниках геометрії (діючих та тих, що використовувались раніше) є різні трактовки поняття вектора: вектор - паралельне перенесення (О. Н. Колмогоров), вектор - напрямлений відрізок (А. В.

Погорєлов, Л. С. Атанасян, Г. П. Бевз), вектор — множина однаково напрямлених відрізків однакової довжини (В. Г. Болтянський) і т.д. Що являється причиною для різних трактувань вектора? Яка із трактовок є найбільш допустима для шкільного курсу геометрії і чому? [15, ст. 240]

Введення поняття вектор може бути здійснено в рамках конкретної інтерпретації векторного простору, а саме “вектор - напрямлений відрізок”. Така точка зору на вектор прийнята в усіх діючих підручниках геометрії середньої школи. В деяких підручниках по методиці викладання математики виділяються позитивні і негативні підходи до цього, але автори виходять при цьому із міркувань простоти, доступності, додатків, не залучаючи до обґрунтувань своїх тверджень серйозні теоретичні положення. [15, ст. 241]

Отже, трактовка вектора як напрямленого відрізка, надає цим об’єктам і операціям над ними виразну наочність, це дійсно дуже важливо, так як в процесі формування поняття велику роль відіграє образний компонент в результаті чого бажані такі означення, які дозволяють уяві легко конструювати зразки означених об’єктів. Такий висновок погоджується з результатами психологічних досліджень: в згорнутому вигляді розпізнання може здійснюватися за зовнішніми ознаками об’єктів, а не за ознаками, за якими воно здійснювалось на рівні розгорнутого виконання дії (або за ознаками, які використані в означенні поняття). [15, ст. 241]

Операції над векторами, які вивчаються в школі, такі: додавання векторів (віднімання), множення векторів на число, скалярний добуток векторів.

Ці операції вводяться:

1) в геометричній формі;

2) в координатній формі. [15, ст. 241]

Центральним в даній темі є поняття координат вектора. При доведенні теорем даної теми застосовуються як координатний, так і традиційно-синтетичні методи. Загальна ідея доведення векторних рівностей за допомогою координат така: для доведення векторної рівності досить встановити рівність відповідних координат векторів, записаних в обох його частинах. [15, ст. 241]

Основні поняття: вектор, початок вектора, кінець вектора, співнаправлені вектори, протилежно напрямлені вектори, абсолютна величина вектора (модуль вектора), рівні вектори, нульовий вектор, координати вектора, проекція вектора на вісь, колінеарні вектори, одиничний вектор, координатні вектори (орти), скалярний добуток векторів, кут між двома ненульовими векторами. [15, ст. 242]

Основні дії: додавання векторів (правило трикутника або паралелограма), віднімання векторів, множення вектора на число; зображення вектора в вигляді суми, різниці двох векторів; в вигляді добутку вектора на число; заміна вектора йому рівним за допомогою паралельного перенесення; розкладання вектора по осях; перехід від співвідношення між векторами до співвідношення між довжинами і виконання оберненої дії; вираження довжини вектора через скалярний квадрат; вираження величини кута між векторами через скалярний добуток векторів і довжин цих векторів. [15, ст. 242]

Основні етапи формування векторного методу в учнів

1. Підготовчий етап. Його мета - оволодіння вказаними поняттями і основними діями.

2. Мотиваційний етап. Його завдання - показати необхідність оволодіння цим методом.

3. Орієнтувальний етап. Його мета — роз'яснення суті методу і виділити основні компоненти на прикладі розв'язаної цим методом задачі.

4. Етап оволодіння компонентами метода. Мета — використовуючи спеціально підібрані задачі, формувати окремі компоненти методу (спочатку задачі на формування одного компоненту, потім двох, трьох і т. п.).

5. Етап формування методу в "цілому". Мета - визначення змісту вправ і їх розв'язання. [15, ст. 242]

Основні компоненти векторного методу розв'язання задач:

1) переклад умови задачі на мову векторів, в тому числі:- введення в розгляд векторів,- вибір системи координат (якщо це необхідно),- вибір базисних векторів,- розклад введених векторів по базисним;

2) складення системи векторних рівностей (або однієї рівності);

3) спрощення векторних рівностей;

4) заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями і їх розв'язання;

5) пояснення геометричного смислу одержаного розв'язку цієї системи (або одного рівняння). [15, ст. 242]

Для визначення змісту вправ, які формують вміння застосовувати вектори необхідно виділити дії, адекватні цій діяльності.

Специфічні розумові дії, які входять до складу діяльності,спрямованій на використання векторного методу

1. Перекладати геометричні терміни на мову векторів та навпаки (здійснювати перехід . від співвідношення між фігурами до співвідношення між векторами та навпаки).

2. Виконувати операції над векторами (знаходити суму, різницю векторів, добуток вектора на число).

3. Представляти вектор у вигляді суми, різниці векторів.

4. Представляти вектор у вигляді добутку вектора на число.

5. Перетворювати векторні співвідношення.

6. Переходити від співвідношення між векторами до співвідношення між їх довжинами та навпаки.

7. Виражати довжину вектора через його скалярний квадрат.8. Виражати величину кута між векторами через їх скалярний добуток. [15, ст. 243]

З метою успішного засвоєння учнями такої розумової дії як переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови та навпаки, доцільно запропонувати учням таблицю осно. вних відношень обома мовами. [15, ст. 243]

Нехай у просторі дано вектори і $\bar{b}$. Відкладемо від довільної точки А простору вектор $\overline{AB}$, рівний вектору $\bar{a}$. Далі від точки В відкладемо вектор $\overline{BC}$, рівний вектору $\bar{b}$. Вектор $\overline{AC}$ називають сумою векторів $\bar{a}+\bar{b}$ і записують: $\bar{a}+\bar{b}=\overline{AC}$.Описаний алгоритм додавання двох векторів називають правилом трикутника. Можна показати, що сума $\bar{a}+\bar{b}$ не залежить від вибору точки А. [7, ст. 168]

Зазначимо, що для будь -яких трьох точок А, В і С виконується рівність $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$. Вона виражає правило трикутника.

Теорема. Якщо координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнюють відповідно $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $(b_1;\ b_2;\ b_3)$, то координати вектора $\bar{a}$ дорівнюють $(a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3)$. [7, ст. 168]

Властивості додавання векторів аналогічні властивостям додавання чисел.

Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ виконуються рівності:

$\bar{a};$

$\bar{a}+\ =$

$\bar{a};$

$=\bar{b}+$ (переставна властивість);

$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ (сполучна властивість). [7, ст. 168]

Суму трьох і більшої кількості векторів знаходять так: спочатку додають перший і другий вектори, потім до отриманої суми додають третій вектор і т. д. [7, ст. 168]

Для додавання двох неколінеарних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ зручно користуватися правилом паралелограма. Відкладемо від довільної точки А вектор $\overline{AB}$, рівний вектору $\bar{a}$ і вектор $\overline{AD}$, рівний вектору . Побудуємо паралелограм ABCD. Тоді шукана сума

дорівнює вектору $\overline{AC}$ [15, ст. 169]

Розглянемо вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{OC}$, які не лежать в одній площині. Знайдемо суму цих векторів. Побудуємо паралелепіпед так, щоб відрізки OA, OB і OC були його ребрами. Відрізок OD є діагоналлю цього паралелепіпеда. Доведемо, що $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OD}$.

Оскільки чотирикутник OBKA — паралелограм, то $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OK}$

Маємо: $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OK}+\overline{OC}$. Чотирикутник OCDK також є паралелограмом, тому $\overline{OK}+\overline{OC}=\overline{OD}$. Описаний спосіб додавання трьох векторів, які відкладені відоднієї точки та не лежать в одній площині, називають правиломпаралелепіпеда. [7, ст. 169]

Означення. Різницею векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають такий вектор $\bar{c}$, сума якого з вектором $\bar{b}$ дорівнює вектору $\bar{a}$. Записують: - $\bar{b}$. [7, ст. 169]

2.3.Актуальність вивчення методу координат в шкільному курсі стереометрії

Завдання з стереометрії - прекрасні вправи, які сприятимуть розвитку просторових уявлень, уміння логічно мислити, сприяють глибшому засвоєнню всього шкільного курсу математики. Рішення стереометричних завдання найчастіше зводиться до вирішення планіметричних задач. Тому, вирішуючи завдання, весь час доводиться повертатися до планіметрії, повторювати теореми, згадувати формули, необхідні для вирішення. При вирішенні стереометричних задач ще в більшій мірі, ніж в планіметрії, використовуються засоби алгебри і тригонометрії, застосовуються векторний и координатний, диференціювання та інтегрування. Таким чином, стереометричні завдання сприяють творчому оволодінню всією сукупністю математичних знань. [1]

При вирішенні завдань в стереометрії застосовуються різні методи, як наприклад: геометричний метод, метод перетворень, векторний, метод координат. Метод рішень задач, тісно пов'язаний з алгеброю і займає найбільш високе положення, в геометрії класифікується як синтетичний. Він є основним. Синтетичний метод вимагає інтуїції, здогадок, додаткових побудов. Координатний метод цього не потребує: рішення задач багато в чому алгоритмизировать, що в більшості випадків спрощує пошуки саморешеніе завдання. При вирішенні завдань координатним методом необхідний навик алгебраїчних обчислень і непотрібна висока ступінь кмітливості, а це всвою чергу позитивно позначається на результаті. Тому необхідно вивчати метод координат, що дозволяє учням навчитися вирішувати різноманітні завдання координатним методом. Цими визначається актуальність обраної теми: «Вивчення методу координат у шкільному курсі геометрії основної школи» [1]

ВИСНОВКИ

Отже, координатний метод розв'язування задач є найдієвіший і найзручніший, а його правильне використання надає можливість розв'язувати багато видів завдань. В цій роботі ми розглянули, методику навчання учнів розв'язування геометричних задач за допомогою використання координатного методу.

Розглянули історію виникнення та розвиток координатно-векторного методу розв'язування задач.

Дослідили методику навчання учнів розв'язувати геометричні задачі за допомогою координатного методу.

Показали як застосовується метод при, розв'язуванні шкільних задач з геометрії, зрівняти і представити переваги координатного методу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Актуальность изучения метода координат в школьном курсе стереометрии [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://docplayer.ru/39292687-Aktualnost-izucheniya-metoda-koordinat-v-shkolnom-kurse-stereometrii.html.
2. Аналітична геометрія/Прямокутні декартові координати на площині/Визначення координат на площині [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikibooks.org/wiki/Аналітична_геометрія/Прямокутні_декартові_координати_на_площині/Визначення_координат_на_площині.
3. Бевз, В. Г. МЕТОД КООРДИНАТ І ЙОГО ВИВЧЕННЯ В ШКОЛІ / В. Г. Бевз,. – 1509.
4. ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ І В ПРОСТОРІ [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://viktoriya-onyschak.edukit.mk.ua.
5. ВИКОРИСТАННЯ КООРДИНАТНОГО ТА ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ [Електронний ресурс]. – 2013. – Режим доступу до ресурсу: https://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/2013/150.pdf.
6. ВИКОРИСТАННЯ КООРДИНАТНОГО ТА ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

[Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://subject.com.ua/mathematics/zno/426.html.

7. Геометрія. 10 клас. Профільний рівень. / А. Г.Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, Д. А. Номіровський., 2018. – 240 с. – (ТОВ ТО "Гімназія"). – (ISBN 978-966-474-312-6).
8. Декартові координати і вектори на площині [електронний ресурс]. Режим доступу: http://lib.mdpu.org.ua/e-book/ernestbook/temas/12_9.htm
9. ДІЙСНА ЧИСЛОВА ВІСЬ І СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ - СИНТЕЗ АЛГЕБРИ І ГЕОМЕТРІЇ [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://stud.com.ua/166179/prirodoznavstvo/diysna_chislova_vis_sistema_koordinat_ploschini_sintez_algebri_geometriyi
10. Істер О. С. Геометрія 10 клас Істер / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2018. – 368 с. – (ISBN 978-966-11-0225-4).
11. Мерзляк А. Г. Геометрія 9 клас (Поглиблене вивчення) / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2017. – 304 с. – (ТОВ ТО "Гімназія"). – (ISBN 978-966-474-296-9).
12. Методика вивчення векторів на площині [Електронний ресурс] // Полтавский национальный педагогический университет им. В. Г. Короленко. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://studfile.net/preview/9291982/page:21/.
13. Потрягін Л. С. Метод координат / Л. С. Потрягін. – Москва: Эдиториал УРСС, 2004. – 140 с. – (Издательство научной и учебной литературы УРСС). – (ISBN 5-354-00615-5).

14. Томусяк А. А. ГЕОМЕТРІЯ Частина 1: Аналітична геометрія посібник для випускників фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та інститутів / А. А. Томусяк, В. С. Трохименко, Н. М. Шунда. – Вінниця: Вінницький державний педагогічний університет ім. Михайла Коцюбинського, 2002. – 245 с.
15. Швець В. О. ПРАКТИКУМ З МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ.ОСНОВНА ШКОЛА / В. О. Швець. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. – 267 с.