Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:

Методика вивчення чотирикутників в курсі геометрії середньої школи

Виконала: студентка IV курсу,
групи МЕІ-41
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Демянчук Валерія Ігорівна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри математики з методикою викладання Генсіцька-Антонюк Н. О.

Рецензент: канд. тех. наук, доц. кафедри вищої математики Присяжнюк І.М.

Рівне – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ЧОТИРИКУТНИКІВ 6

1.1. Аналіз програми та орієнтовне календарно - тематичне планування 6

1.2. Аналіз шкільних підручників по темі «Чотирикутники» в курсі середньої школи 9

1.3. Методика викладання чотирикутників 15

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЧОТИРИКУТНИКІВ 19

2.1. Чотирикутник і його елементи 19

2.2. Паралелограм і його властивості 22

2.3. Ознаки паралелограма 24

2.4. Види паралелограмів 27

2.5. Трапеція 30

2.6. Вписані й описані чотирикутники 33

2.7. Площі чотирикутника 36

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ МУЛЬТИМЕДІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ 44

3.1.Використання презентацій на уроках геометрії 44

ВИСНОВКИ 49

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 51

ДОДАТКИ 55

ВСТУП

Актуальність теми. Одним із найважливіших видів навчальної діяльності є вміння розв’язувати математичні задачі, в тому числі й в курсі геометрії. В даній бакалаврській роботі розглянуто одну із найпоширеніших тем курсу геометрії 8 класу — це тема «Чотирикутники». Подана тема має широке застосування у практичній діяльності, а тому займає важливе місце у формуванні математичної компетентності учнів. Аналіз останніх досліджень проводили такі вчені як Слєпкань З.І., Бевз В.Г., Бурда М.І., Мерзляк А.Г., Єршова А.П., Істер О.С., Полонський В.П., Якір М.С., Тарасенкова Н.А. та інші.

Математика з’явилася серед шкільних предметів настільки давно, що в той же час тільки створювалася сама система шкільного навчання. Хоч і ставлення до даного предмету в різні історичні періоди часу було теж різним, але як би там не було, шкільна математика визнавалася завжди прогресивно мислячою спільнотою, а також одним з найважливіших загальноосвітніх предметів.

У початкових класах формуються основні арифметичні вміння і навички. У 5-9 класах значна частина матеріалу – це планіметрія чотирикутників. І те, наскільки добре та легко буде даватися навчальний матеріал даної теми в основіній школі, залежить від того, наскільки ефективною була проведена продопевдична робота ще в початковій школі.

Розділ вивчення чотирикутників в курсі геометрїї основної школи є дуже важливим, практичним, цікавим та навіть традиційним. Розглянутий матеріал даної теми – це своєрідний фундамент для вивчення інших розділів геометрії: площ многокутників, перетворення фігур, многокутники в цілому та інші, що надає актуальності для неї. Завдяки знанням про чотирикутники можна розв’язувати достатню кількість різнопланових прикладних задач, які ви обов’язково застосуєте на практиці.

Уже відомими для вас будуть окремі види чотирикутників із курсу математики 5–6 класів. Особливе місце серед чотирикутників посідають ті, які мають паралельні сторони. Серед теорем особливу роль відіграє теорема Фалеса — одна з найдавніших теорем геометрії.

Варто зазначити, що такий розділ в геометрії як «Чотирикутники» відіграє важливу роль, оскільки на нього виділено найбільше годин всієї програми геометрії 8-го класу. Вивчення теорії та практики буде актуальним при здачі іспитів ДПА, підготовки до ЗНО, олімпіад та іншому.

Мета кваліфікаційної роботи – узагальнити і систематизувати теоретико-методичні положення щодо вивчення теми «Чотирикутники» у середній школі.

Для досягнення поставленої мети були визначені такі **задачі дослідження**:

- аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження;
- проаналізувати програму, сучасні діючі підручники з геометрії.
- розкрити загальні теоретичні та методичні основи формування поняття «чотирикутник» та його властивостей;
- подати методику розв’язування типових завдань з теми дослідження;
- представити методику використання презентацій при вивченні чотирикутників.

Об’єкт дослідження – процес навчання планіметрії у курсі геометрії 8-го класу.

Предмет дослідження – особливості вивчення чотирикутників; система задач, яка спрямована на розвиток умінь і навиків розв’язувати задачі, пов’язані з чотирикутниками.

Теоретичне значення роботи полягає в тому, що вона містить важливі теоретичні та методичні узагальнення при вивченні чотирикутників у середній школі.

Для з’ясування стану проблеми в педагогічній теорії застосовувались такі **теоретичні методи**: аналіз психолого-педагогічної, наукової, методичної літератури; зміст діючих програм і підручників з теми дослідження;

порівняння, систематизація теоретичного та практичного матеріалу.

У процесі впровадження розробленої методичної системи та перевірки її ефективності застосовувались такі **емпіричні методи**: бесіди з учителями та учнями; спостереження за процесом навчання; аналіз ефективності дидактичних засобів навчання; аналіз і опрацювання отриманих у ході дослідження результатів.

Практичне значення даної кваліфікаційної роботи може бути використане вчителями середньої і старшої школи для викладання данного матеріалу, підвищення якості засвоєння сприйнятого матеріалу, підготовки до самостійної і контрольної робіт, а також іспитів, державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідження були впровадженні під час педагогічної практики в загальноосвітній школі І-ІІІ ст. № 24 м. Рівне. Основні положення та висновки дослідження були представленні на звітній науково-практичній конференції РДГУ (Рівне, 2021).

Структура і обсяг кваліфікаційної роботи. Робота складається зі змісту, вступу, трьох розділів (з підрозділами), висновків, списку використаних джерел (37 найменувань) та додатків. Загальний обсяг дипломної роботи – 65 сторінок друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1
МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ЧОТИРИКУТНИКІВ

1.1 Аналіз програми та орієнтовне календарно - тематичне планування

Календарно-тематичне планування займає велику роль в організації роботи вчителя. Розглянемо значення даного поняття і його завдання.

Календарно-тематичне планування – це певний розподіл окремих уроків у часі із врахуванням:

- кількості годин, які визначаються програмою на кожну тему,
- кількості тижневих, які визначаються навчальним планом,
- розкладу занять.

Календарно-тематичне планування вчитель розробляє на кожний клас відповідно до навчальної програми й вимог Державного освітнього стандарту (мінімуму змісту освіти).

Завдання календарно-тематичного планування:

– визначення взаємозв'язку між окремими уроками, темами курсу за рік;
– визначення місця кожної теми в річному курсі й місце кожного уроку в темі;
– організація раціональної роботи й нагорода учнів системою навичок, знань, умінь із предмета.

Орієнтовне календарно – тематичне планування для 8 класу

Таблиця 1

№ з/п	**ТЕМА УРОКУ**	Дата	Прим.
	Повторення вивченого матеріалу		

Продовження Таблиці 1

Тема 1. ЧОТИРИКУТНИКИ (22 години)			
Тема 1.1. Чотирикутники та їх властивості (11 годин)			
1	Чотирикутник та його елементи. Сума кутів чотирикутника.		
2	Паралелограм, його властивості. Ознаки паралелограма.		
3	Розв'язування вправ.		
4	Прямокутник та його властивості.		
5	Ромб та його властивості.		
6	Квадрат та його властивості.Самостійна робота		
7	Трапеція та її властивості.		
8	Розв'язування вправ.		
9	Узагальнення і систематизація знань.		
10	Контрольна робота «Чотирикутники та їх властивості»		
11	Аналіз контрольної роботи. Розв'язування задач прикладного змісту		
Тема 1.2. Вписані та описані чотирикутники. Теорема Фалеса (11 годин)			
12	Вписані та описані чотирикутники.		
13	Вписані та центральні кути.		
14	Розв'язування вправ. Самостійна робота		
15	Теорема Фалеса.		
16	Середня лінія трикутника та її властивості.		
17	Середня лінія трапеції та її властивості.		
18	Розв'язування типових вправ і задач.		
19	Розв'язування вправ. Самостійна робота		
20	Узагальнення і систематизація знань.		
21	Контрольна робота «Вписані та описані чотирикутники. Теорема Фалеса»		
22	Аналіз контрольної роботи. Розв'язування задач прикладного змісту		

[7].

З таблиці бачимо, що на вивчення теми «Чотирикутники» у 8 класі виділяють 22 години. Розглянемо, що являє собою зміст навчального матеріалу даного розділу.

У даному розділі виділено такі окремі теми як:

- Чотирикутник, його елементи.
- Паралелограм та його властивості. Ознаки паралелограма.
- Прямокутник, ромб, квадрат та їх властивості.
- Трапеція.
- Вписані та описані чотирикутники.

За державними вимогами до рівня учнівської загальноосвітньої підготовки учень:

- **Розпізнає** не опуклі й опуклі чотирикутники.
- **Описує** чотирикутник та його елементи.
- **Зображує** та знаходить чотирикутники різних видів на малюнках, також їх елементи.
- **Формулює:**

означення та властивості чотирикутників, вказаних у змісті; вписаного і описаного чотирикутників; *ознаки* паралелограма; а також вписаного і описаного чотирикутників.

- **Доводить** властивості й ознаки паралелограма, також прямокутника, квадрата, ромба, вписаного та описаного чотирикутників, суми кутів чотирикутника.
- **Застосовує** вивчені властивості і означення до розв’язування задач.

Отже, можна зробити висновок, що календарно-тематичне планування є досить зручним і практичним у роботі вчителів, викладачів, педагогів та організаторів [7].

Проаналізуємо програму календарно-тематичного планування в класах з **поглибленим вивченням** математики, а саме геометрії теми «Чотирикутники» у 8 класі. Дана тема розглядається повністю у перших двох розділах і частково п’ятому.

Перший розділ називається «Многокутники» і на нього виділяється 17 класних годин. Він містить в собі теоретичну частину як і в не профільних класах, проте набагато більше практики. Щодо другого розділу, то він називається «Вписані та описані чотирикутники» і на нього виділяється 16 годин. Коли у звичайній програмі на вивчення даної теми приділяється мізерна кількість часу, то в профільних класах на кожному уроці вивчають не просто теорію, а й розглядають окремо всі властивості, їх застосування, практичне значення, а також необхідну і достатню умови існування кіл, навколо яких описаний чотирикутник, або ж кіл, в яких вписаний чотирикутник.

1.2 Аналіз шкільних підручників по темі «Чотирикутники» в курсі середньої школи

Вперше, в шкільному курсі математики, з чотирикутниками школярі зустрічаються ще у початковій школі. Вивчення чотирикутників, а саме прямокутника та квадрата, йде поверхнево. В основному вивчається периметр та площа, оскільки при вирішенні завдань для того, аби знайти площі і периметр, відпрацьовується вміння застосувати такі операції, як: множення, ділення, додавання, віднімання. А це вважається одне з основних умінь, які мають виробитися в початковій школі. У 5 і 6 класах зустрічаються школярі також і з чотирикутниками. Вивчення йде поверхнево, як і в початковій школі. До квадрату і прямокутника додаються паралелограм і трапеція. Більш докладно дана тема «Чотирикутники» вивчається у восьмому класі в курсі геометрії. Розглянемо, як пропонують в підручниках геометрії вивчення даної теми різні авторські колективи, рекомендовані Міністерством освіти України.

До переліку підручників з геометрії відносять підручники таких авторів (рекомендовано Міністерством освіти та науки України для використання в основній школі закладів загальної середньої освіти у 2020–2021 навчальному році):

1) Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. [2];

2) Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. [4];

3) Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М. С. [23];

4) Істер О. С. [20];

5) Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. [17].

Для початку у підручниках зазначених авторів виконаємо порівняльний аналіз вивчення теми «Чотирикутники» . Перш ніж перейти до загального аналізу, зауважимо, що в підручнику **Г. П. Бевза** перед вивченням теми ми помічаємо статтю з заголовком «Для чого вивчати чотирикутники та їх властивості?» (Рис.1.1). Давайте погодимося, що таке вдале розміщення даної статті підвищить мотивацію учнів для вивчення теми.

Рис. 1.1

Розглянемо схеми розгортання змістової теми «Чотирикутники» в різних підручниках:

1)**Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. [2];**

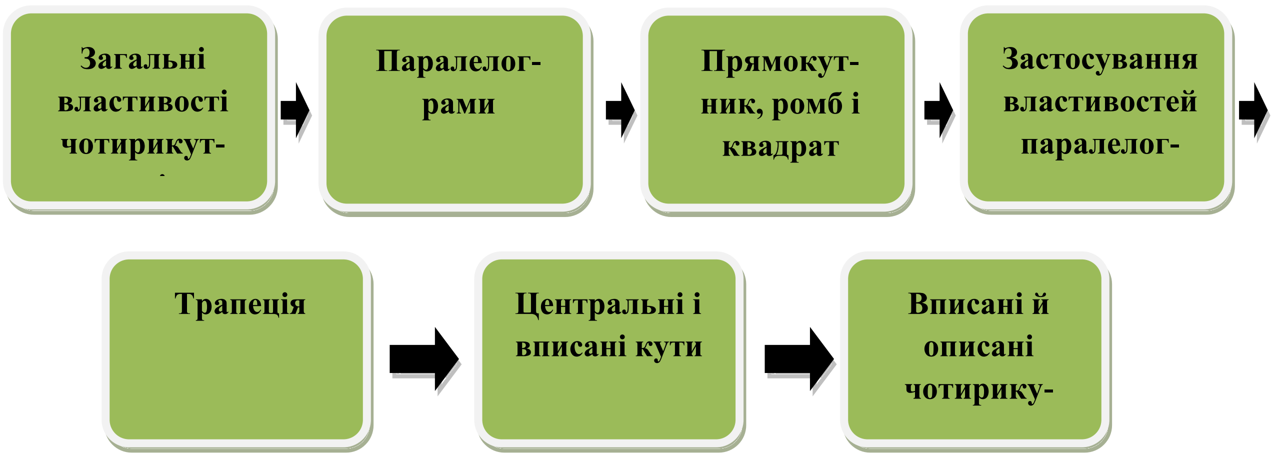


Схема 1.1 розгортання змістової теми «Чотирикутники» за підручником

Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. ;

2) Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. [4];

Схема 1.2 розгортання змістової теми «Чотирикутники» за підручником ***Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.;***

3) Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М. С. [23];

Схема 1.3 розгортання змістової теми «Чотирикутники» за підручником ***Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М. С. ;***

4) Істер О. С. [20];

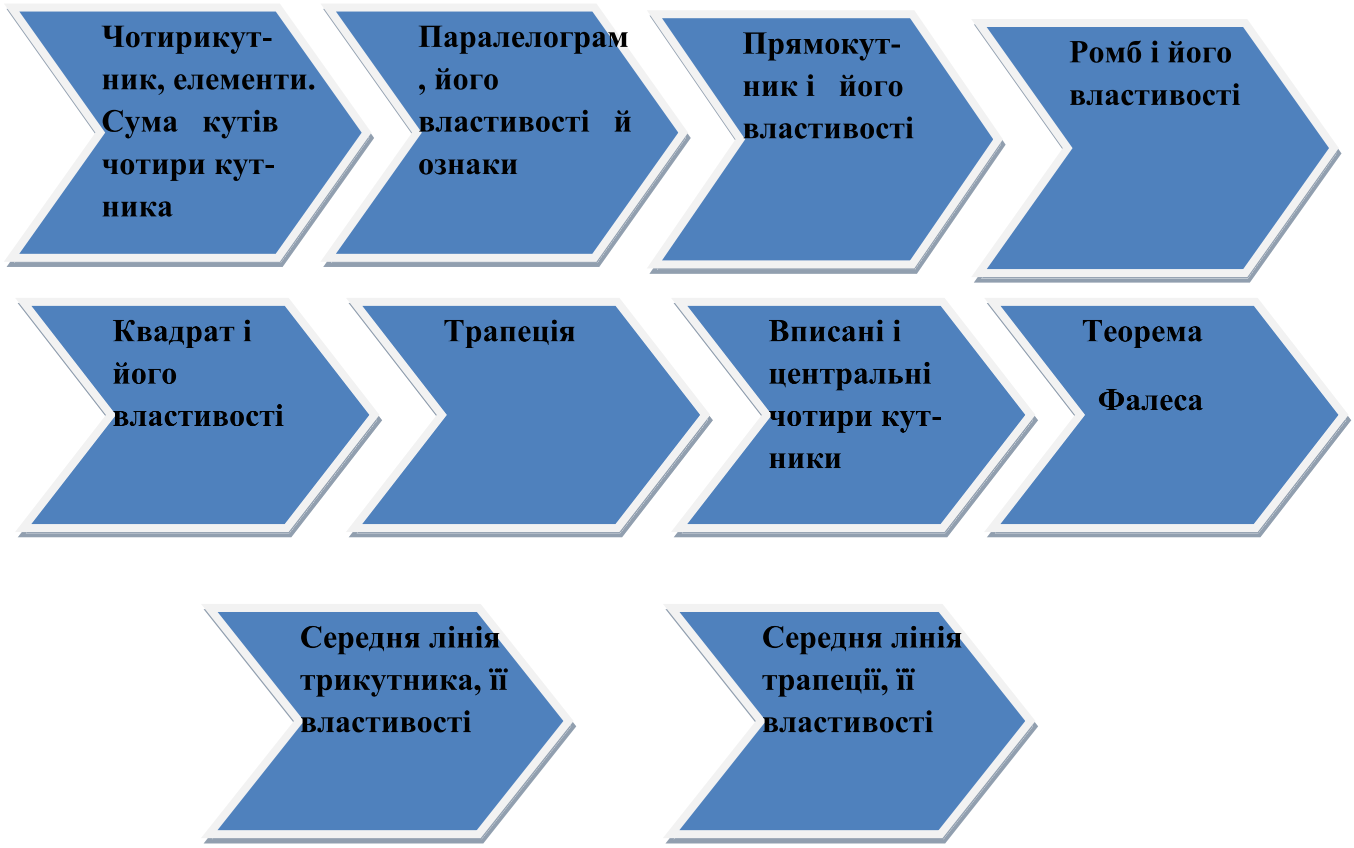


Схема 1.4 розгортання змістової теми «Чотирикутники» за підручником ***Істер О. С.***;

5) Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. [17];

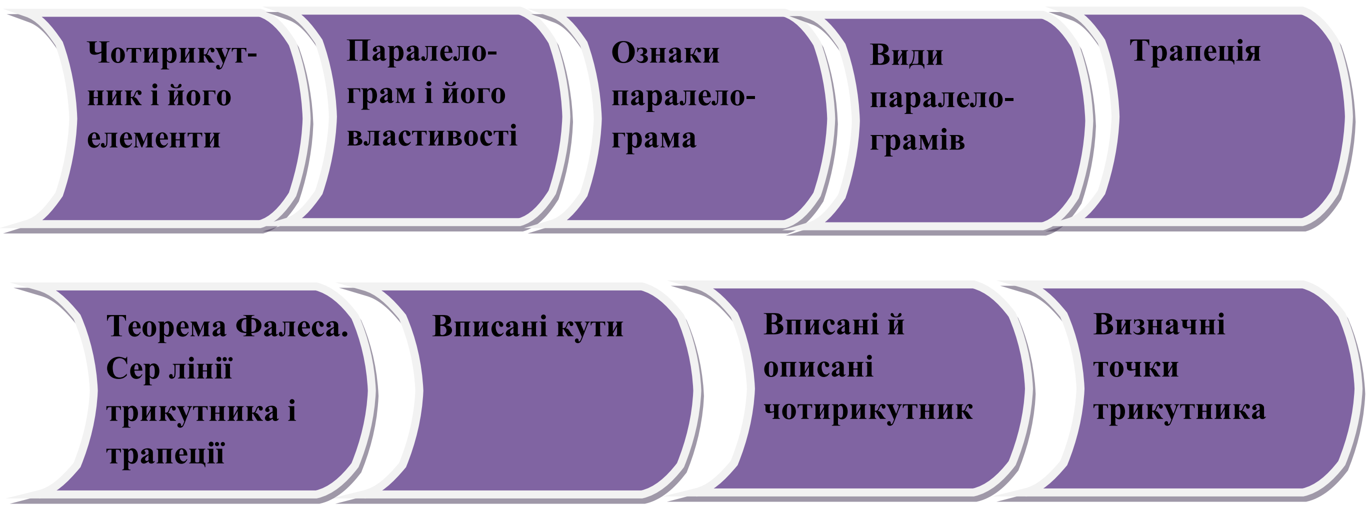


Схема 1.5. розгортання змістової теми «Чотирикутники» за підручником ***Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В.*** [17].

За власними дослідженнями, найбільше схема розгортання теми програми співпадає з підручником О.С. Істера [20].

Помітно, що практично у кожному підручнику розділ вивчення чотирикутників розпочинається з ознайомленням самої фігури, її елементів, де окрім подання матеріалу даних понять висвітлюється ще й теорема про суму внутрішніх кутів чотирикутників, а десь і наслідки (підручник А.Г.Мерзляка) [23].

Далі помічаємо поступовий перехід до такої геометричної фігури як паралелограм, розглядаємо його основні властивості, ознаки. У підручниках А. Г. Мерзляка, М. І. Бурди та А. П. Єршової поданий матеріал розбили на дві окремі теми, коли в інших підручниках це висвітляється в одній темі.

Після цього відразу йде вивчення видів паралелограмів, а саме: прямокутників, квадратів і ромбів. Автори на свій власний розсуд розмістили матеріал у своєму порядку, тому у деяких підручниках він представлений як одна тема, а в деяких – як дві або три окремі теми. Ми вважаємо, що доречніше розбити даний матеріал саме на три теми так, щоб на вивчення кожної теми виділялось по одному уроку, а згодом і закріплювали отримані знання відповідними вправами. Саме так подається матеріал у підручниках А. Г. Мерзляка та О. С. Істера.

На наступних етапах учні будуть вивчати теорему Фалеса, трапецію, середні лінії трикутника і трапеції.

Необхідно зазначити, що підручник містить теорему Фалеса у темі «Подібність трикутників» саме автора А. Г. Мерзляка, хоча учні мають її вивчати у темі «Чотирикутники» (за освітньою програмою). Слід зазначити, що теорема в підручниках інших авторів подана у темі «Чотирикутники» – наявна.

Також ми помічаємо, що у деяких підручниках використана схема Ейлера, яка показує взаємозв’язок між чотирикутниками і їх окремими видами. Покажемо приклад двох.

Нарисуємо схему з підручника А.Г.Мерзляка.

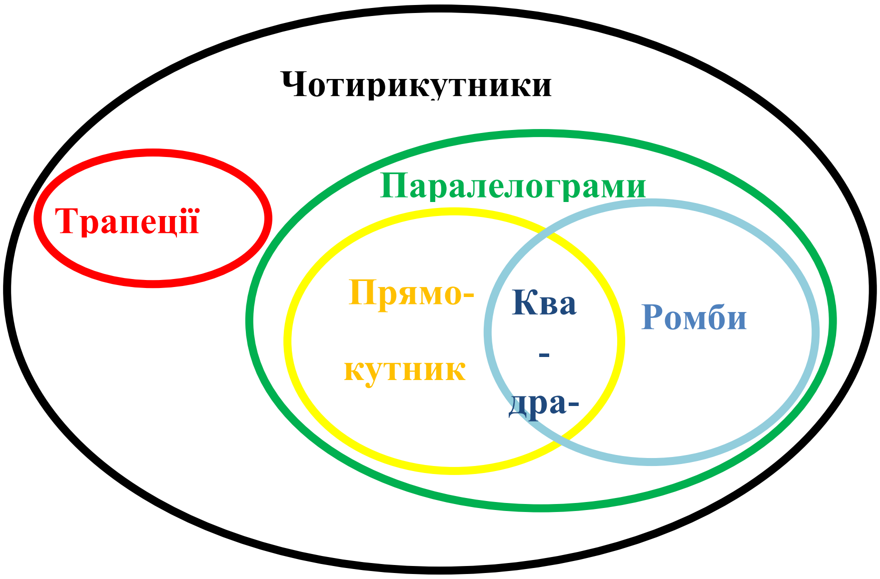


Схема 1.6 схема Ейлера з підручника А.Г.Мерзляка [23].

В такому випадку слід звернути учнівську увагу на те, що кожний ромб, квадрат, прямокутник є одночасно ромбом і прямокутником. Усім чотирикутникам, що належать до множини паралелограмів, притаманні властивості паралелограма. В той же час певний вид паралелограмів має і свої властивості, притому такі властивості притаманні не кожному паралелограму. До прикладу, у ромба діагоналі є взаємно перпендикулярні, а у прямокутника – рівні.

Нарисуємо схему з інших підручників (О.С. Істер не використовує таку схему).

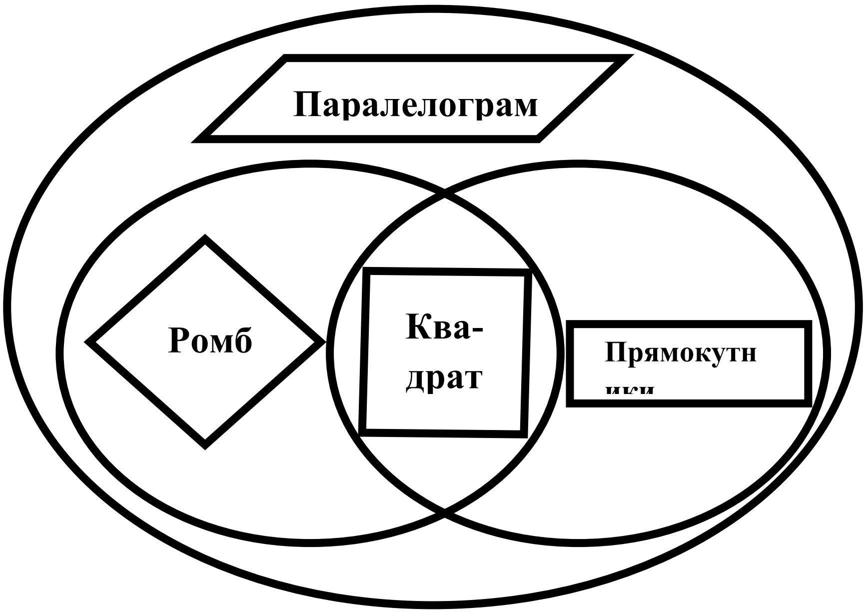


Схема 1.7 схема Ейлера з інших підручників [20].

Далі спостерігаємо, що такі теми як «Центральні та вписані кути» і «Описані та вписані чотирикутники» є наявними у всіх підручниках.

Щодо практичних навчальних завдань у даних підручниках, то слід зазначити, що усі завдання розподілені за рівнем навчальних досягнень учнів.

Власні дослідження показують, що найбільш доступнішим, найпоширенішим у школах України є підручник А. Г. Мерзляка. Виконавши даний порівняльний аналіз, можна зробити висновок, що він дійсно є найбільш змістовим, оптимальним і зручним у використанні.

1.3 Методика викладання чотирикутників

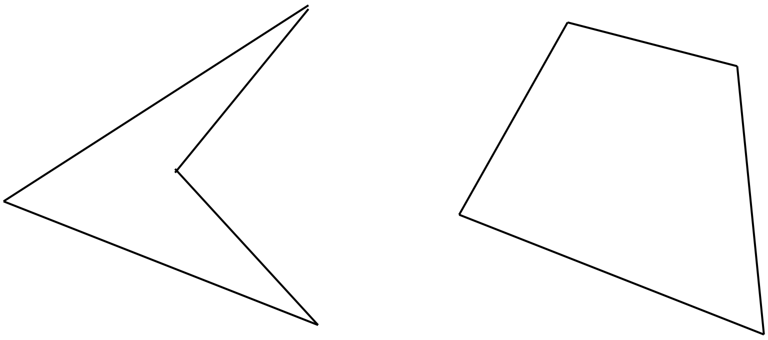
Чотирикутники та їх окремі види – це величезна перша тема курсу планіметрії саме 8 класу.

Під час вивчення даної теми є багато можливостей для того, аби розвинути логічне мислення учнів, використовувати вивчений навчальний матеріал для розв’язування та аналізу різних задач, насамперед практичних, оволодіти методами розв’язування задач, а також доводити теореми.

Основна мета – забезпечити засвоєння учнями важливих властивостей і ознак різних видів чотирикутників, а також правильних багатокутників і навчити правильно застосовувати здобуті знання , щоб розв’язати різні види задач [34, с.283].

У навчально-методичній літературі визначення чотирикутника і багатокутника формулюють по-різному. В деяких курсах їх означають як фігури, які складаються з відрізків, два будь-які з яких мають спільний кінець та не лежать на одній прямій [34, с.284].

Під час пояснення поняття такої фігури як чотирикутник слід використати наочний посібник – це модель чотирикутника, виготовлена з дроту. На даному етапі навчання вводити поняття плоского, а й відповідно опуклого чотирикутників не передбачено, тому, коли ви будете розв’язувати вправи, щоб підвести фігури до названих понять,використовуйте фігури, що до них належать (Рис. 1.2(а, б), і такі, які до них не належать. (Рис. 1.3)



а б

Рис. 1.2

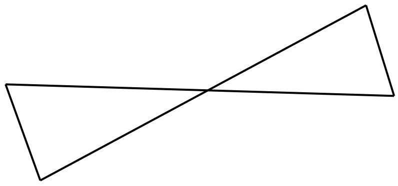


Рис. 1.3

На уроці, де запроваджується поняття чотирикутника, учні можуть:

- засвоїти елементи чотирикутника (вершини, сторони, протилежні вершини, протилежні сторони, сусідні вершини, сусідні сторони, діагоналі) та також відповідну термінологію;
- навчитись зображувать чотирикутники, також позначати точками їх вершини[30].

Слід зауважити те, що чотирикутник записують в послідовному порядку його вершин, наприклад чотирикутник $MNEQ$. Учні мають уміти вказувати сторони і вершини зображеного чотирикутника.

Учнів може зацікавити умова, яка визначає довільний чотирикутник – забезпечення можливістю його побудувати за допомогою лінійки і циркуля. Хтось з учнів буде вважати, що чотирикутник визначається чотирма елементами, оскільки це буде властиво аналогії з довільним трикутником, який визначається трьома елементами, де хоча б один є лінійним. Нам необхідно показати, що це не так. Безперечно, довільний чотирикутник ми можемо розбити на два трикутники діагоналлю. Один з них може бути побудований за допомогою трьох елементів, принаймні один з них має бути лінійним. Щоб було визначено (або ж скажімо побудовано) другий трикутник, необхідно задати ще два елементи, так як один елемент спільний у трикутників[10, с.285].

Особливу увагу привертає до себе питання щодо засвоєння учнями властивостей і ознак різних видів чотирикутників.

У методиці математики взагалі загальноприйнято називати ознаками теореми або задачі на доведення (твердження), за допомогою яких визначається, що певний об'єкт (до прикладу, чотирикутник) належить до певного класу об'єктів (до прикладу, прямокутників). Отже, ознака – це є прикмета, за якою можливо розпізнати фігуру. В означенні будь-якого поняття водночас зазначено його загальні істотні властивості. З іншої сторони, сукупність згаданих в означенні загальних істотних властивостей понять також становить ознаку поняття. Звідси доцільно робити два висновки після введення означення кожного виду чотирикутників щодо його властивостей і ознаки, які випливають насамперед з означення.До прикладу, після того, як розглянули означення паралелограма належно звернути увагу учнів на такий аспект – означення дає можливість зробити два висновки [34, с.286]:

Перший з них – паралельні сторони будуть паралельні за умовою, що деякий чотирикутник є паралелограмом (властивість сторін паралелограма).

Другий з них – якщо відомо, що в деякому чотирикутнику є попарно паралельні протилежні сторони, то такий чотирикутник називається паралелограм (ознака паралелограма).

Слід виділити, що ознаки окремих видів чотирикутників також формулюють у вигляді задач і теорем на доведення. Тому потрібно систематизувати всі ознаки чотирикутників на етапі завершення вивчення кожного його виду, так як, як і властивості, вони мають надалі широко використовуватися для розв'язування задач. Наприклад, до ознак паралелограма належать також твердження (крім на основі означення раніше сформульованої):

- якщо діагоналі чотирикутника перетинаються, а також в точці перетину діляться на дві однакові частини, то цей чотирикутник – паралелограм;
- якщо у чотирикутника паралельними й рівними є дві сторони, то він – паралелограм.

Також буде доцільним запропонувати учням за їх бажанням скласти таблицю для паралелограма, квадрата,прямокутника, ромба, в якій в одному стовпчику будуть перелічені всі їхні властивості, а в другому – ознаки (як домашнє завдання) [34, с.287].

Розв'язування більшості задач в пояснювальному тексті на доведення, доведення просто теорем, що стосується властивостей та ознак трапеції, прямокутника, квадрата, ромба, можна організувати диференційовано: деяким учням запропонувати самостійний пошук доведення (з достатньою підготовкою), а тим, у яких виникають певні труднощі у навчання – розглянути готове доведення за підручником (Таблиця 2) [14].

Таблиця 2

Доведення

Твердження	Обґрунтування
1. $AB = DC$	1. $\Delta AOB = \Delta COD$, оскільки $\angle DOC = \angle AOB$ як вертикальні; $OA = OC$ і $OB = OD$ за властивістю діагоналей паралелограма
2. $AD = BC$	2. $\Delta AOD = \Delta COB$ (доводиться так само, як і в п. 1)
3. $\angle ABC = \angle CDA$	3. $\Delta ABC = \Delta CDA$, оскільки $AB = CD$ і $BC = DA$ за доведеним в п. 1 і 2, AC – спільна
4. $\angle BCD = \angle DAB$	4. $\Delta BCD = \Delta DAB$ (доводиться так само, як і в п. 3)

Особливу увагу слід приділити теоремі імені Фалеса, її застосуванню до доведення властивості середньої лінії трикутника, а також до теореми про пропорційні відрізки – узагальнення теореми Фалеса. Теорема Фалеса, її узагальнення є допоміжними, тому не слід вимагати уміння відтворювати їх доведення від усіх учнів, але й потрібно звернути увагу, що ці теореми застосовують також для доведення й інших теорем, розв’язування задач. До того ж, теорема Фалеса має й інше застосування, а саме визначає спосіб ділення відрізка на будь-яку кількість рівних частин, а теорема про пропорційні відрізки – спосіб побудови четвертого пропорційного відрізка. Не менш важливим є те, що теорема, яка описує пропорційні відрізки, буде виконуватися й у випадку, коли не тільки йдеться про сторони кута, а і про будь-які прямі[34, с.289].

РОЗДІЛ 2
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЧОТИРИКУТНИКІВ

2.1 Чотирикутник і його елементи

Означення чотирикутника

Пропедевтика вивчення чотирикутників починається ще у початкових класах.

Чотирикутником назвається така геометрична фігура, яка складається із чотирьох точок і відповідно чотирьох відрізків, які їх послідовно сполучають. Дані точки будемо називати *вершинами чотирикутника*, відрізки — *сторонами чотирикутника*. Варто зауважити, що жодні три вершини при цьому не лежать на одній прямій, а жодні дві сторони не перетинаються.

На рис. 2.1 зображений чотирикутник із вершинами A, B, C і D та сторонами AB, BC, CD та AD.

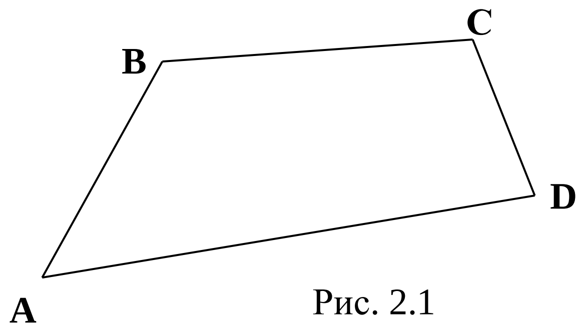


Рис. 2.1

Дві вершини чотирикутника називаються *сусідніми вершинами*, якщо вони сполучені однією стороною; а *протилежними вершинами* називають такі вершини, які не є сусідніми. Аналогічно визначимо, що сторони чотирикутника є сусідніми сторонами (коли мають спільну вершину), а сторони, які не мають спільних точок, — протилежними сторонами. На рис. 2.1 сторони AB і CD — сусідні для сторони BC, а сторона AD— протилежна BC; вершини B і D— сусідні з вершиною A, а вершина C — протилежна вершині A [17, с.7].

Чотирикутник позначають таким чином, щоб всі його вершини були вказані послідовно, причому букви, що стоять поряд, мають позначати сусідні вершини. Наприклад, чотирикутник на рис. 2.1 можна позначити $ABCD, BCDA$ або $CBAD$, але не можна позначати $ABDC$ або $BDCA$.

Що ж, означимо таке поняття як діагональ трикутника. **Діагоналлю** чотирикутника назвається відрізок, який сполучає дві протилежні вершини [17, с.7].

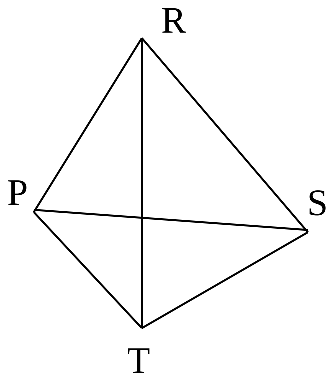


Рис. 2.2

У чотирикутнику $PRST$ (рис.2. 2) діагоналями позначаємо відрізки PS і RT. Зазначимо, що будь-який чотирикутник має таку діагональ, яка ділить його на два трикутники. Що ж до суми довжини всіх сторін чотирикутника означим її словом **периметр**. Периметр чотирикутника позначають буквою P:

$$P_{ABCD} = AB + CB + CD + AD.$$

Сума кутів чотирикутника. Опуклі чотирикутники

Виділимо такі підпункти теми, як суми кутів чотирикутника, а також і опуклі чотирикутники.

Внутрішньою областю чотирикутника називають скінченну частину площини, яку обмежує будь-який чотирикутник (на рис. 2.3 її зафарбовано).

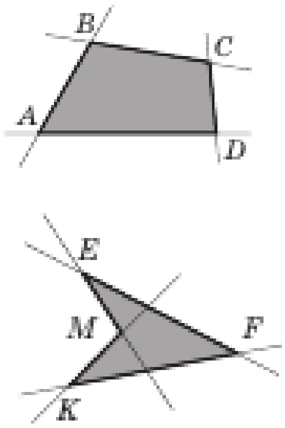


Рис. 2.3

На рис. 2.3 зображено два чотирикутники і проведено прямі, на яких лежать відповіно сторони цих чотирикутників. У чотирикутнику $ABCD$ ці прямі через внутрішню область не проходять— такий чотирикутник назвемо опуклим (рис. 2.3 верхній). У чотирикутнику $EFKM$ прямі EM і KM проходять через внутрішню область — такий чотирикутник є неопуклим (рис. 2. 3 нижній).

Спираючись на попереднє дослідження малюнків, можна строго означити такі поняття як опуклий та неопуклий чотирикутники.

Чотирикутник називається *опуклим* тоді, коли він лежить по один бік від будь-якої прямої, яка містить його сторону.

Очевидно, чотирикутник $ABCD$ верхній на рис. 2.3 лежить по один бік від будь-якої з прямих AB, BC, CD або AD. У шкільному курсі предмету геометрії розглядаються тільки опуклі чотирикутники [17, с.8].

Далі розглянемо такі означення як внутрішній кут, протилежні кути, зовнішній кут.

Кутом (а саме *внутрішнім кутом*) опуклого чотирикутника $ABCD$ називається кут BAD при вершині A.

Кут, який є суміжним при даній вершині із внутрішнім кутом чотирикутника, називають при даній вершині *зовнішнім кутом* чотирикутника.

Кути, у яких вершини є сусідніми, називають сусідніми кутами, а кути, у яких вершини протилежні,— *протилежними кутами* чотирикутника.

Для того, щоб знайти суму кутів будь-якого чотирикутника, існує теорема, а також і її доведення.

Теорема (про суму кутів чотирикутника) звучить так:

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

Доведення

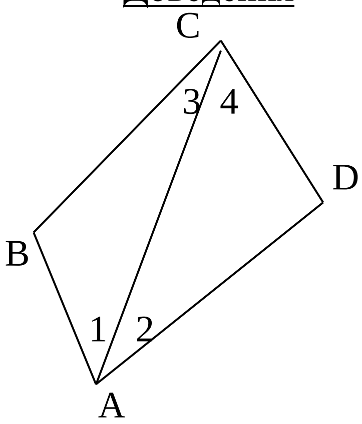


Рис. 2.4

У даному чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагональ, що ділить його на два трикутники (рис. 2.4). Оскільки $\angle BAD$=∠1+∠2, $\angle BCD$ ∠3+∠4 , то сума кутів чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі всіх кутів трикутників ABC і ADC, тобто дорівнює 360°. Тобто таким чином теорему доведено [17, с.8]. Розглянемо приклад задачі на застосування даної теореми.

Задача 1

Кути чотирикутника $ABCD$, які є сусідні з кутом C, — рівні, а його протилежний кут — удвічі більший за кут C.

Знайдіть кут C, якщо $\angle B$=60° [16].

Розв'язання

Кутами, які є сусідніми з C, є кути B і D, а кутом, протилежним до C, — кут A. За умовою задачі маємо $\angle B = \angle D = 60°$. Так як сума кутів чотирикутника рівна 360°, то $\angle A + \angle C = 360° - 2 \cdot 60° = 240°$.

Оскільки градусна міра кута C дорівнює x, то за умовою градусна міра кута A дорівнює $2x$. Звідси маємо: $x + 2\,x = 240$; $3x = 240$; $x = 80$. Таким чином, $\angle C \ = \ 80°$.

Відповідь: 80°.

2.2 Паралелограм і його властивості

Означення паралелограма

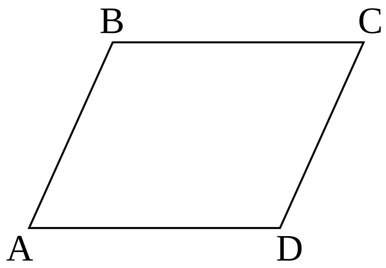


Рис. 2.5

Для початку розглянемо на площині дві паралельні прямі, що перетинаються двома іншими паралельними прямими (рис. 2.5). Далі бачимо, що утворюється чотирикутник у результаті такого перетину, який має спеціальну назву — *паралелограм***.**

Паралелограмом називається такий чотирикутник, протилежні сторони якого є попарно паралельними. Таке означення подають і в підручниках інших авторів, до прикладу, Мерзляк А.Г., Істер О.С., Бевз Г.П.,Бурда М.І. та деякі інші.

На рис. 2.5 зображено паралелограм $ABCD$, у якому $AB||CD, AD||BC$ [17, с.14].

Як і в трикутнику, в паралелограмі також можна провести висоти (рис. 2.6). Вона має таке означення:

Висотою паралелограма називається такий перпендикуляр, який проведений з точки однієї сторони до прямої, яка містить протилежну сторону.

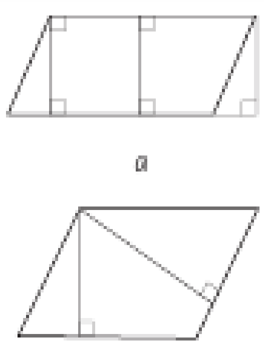


Рис. 2.6

Таким чином, до однієї сторони такого чотирикутника як паралелограм можна провести безліч висот (рис. 2.6, а),— і вони усі будуть рівні як відстані між паралельними прямими. А вже з однієї вершини паралелограма ми можемо провести дві висоти до двох різних сторін (рис. 2.6, б).

Властивості паралелограма

З означення паралелограма випливає те, що два його будь-які сусідні кути є внутрішніми односторонніми при паралельних прямих, які містять протилежні сторони. Тому можна зробити висновок, що *сума двох сусідніх кутів* паралелограма рівна *180°*.

Означимо ще кілька важливих властивостей кутів, сторін і діагоналей паралелограма.

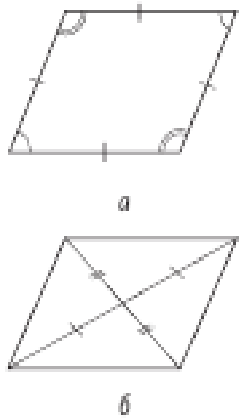


Рис. 2.7

Теорема (властивості паралелограма).

У паралелограмі:

1) протилежні сторони рівні;

2) протилежні кути рівні;

3) діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

Властивості 1 і 2 ілюструє рис. 2.7(а), а властивість 3 — рис.2.7 (б) [17, с.15]. Істер О.С .,Мерзляк А.Г., Бевз Г.П., Бурда М.І. також описують дані твердження як властивості.

<u>Доведення</u>

Проведемо в паралелограмі $ABCD$ діагональ AC (рис. 2.8) і розглянемо трикутники ABC і CDA .

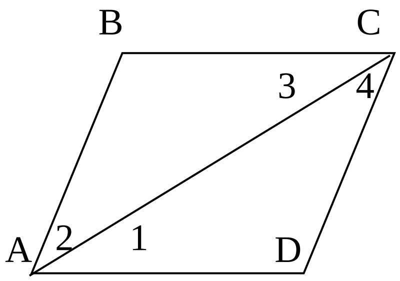


Рис. 2.8

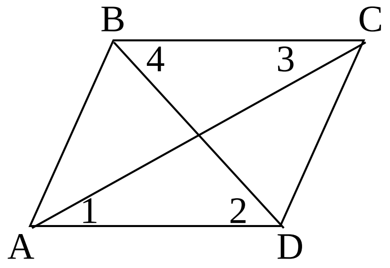


Рис. 2.9

У них сторона AC — спільна, ∠1=∠3 як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC, ∠2=∠4 як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC. Отже, $\Delta ABC = \Delta CDA$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси випливає, що $AB = CD, AD = BC$ і $\angle B = \angle D$. А оскільки ∠1+ ∠2 =∠3+∠4, то $\angle BAD = \angle BCD$. Отже, властивості 2 і 1 доведено. Для того, щоб довести властивість 3 проведемо в паралелограмі $ABCD$ діагоналі AC і BD, які перетинаються в точці O (рис. 2.9).

Тепер розглянемо трикутники AOD і COB. В них $AD = BC$ за доведеним, $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC, $\angle 2 = \angle 4$ при паралельних прямих AD і BC та січній BD як внутрішні різносторонні. Отож $\Delta AOD = \Delta COB$ за другою ознакою. Звідси випливає, що $AO = CO$ і $BO = DO$, тобто точка O є серединою кожної з двої діагоналей AC і BD.

Отже, теорему доведено повністю [17, с.16].

Задача 2

У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A ділить сторону BC навпіл. Знайдіть периметр паралелограма, якщо АВ = 6 см [16].

Розв'язання

Нехай у паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці E, $BE = EC$ (рис. 2.10). Зазначимо те, що $\angle 1 = \angle 2$, оскільки AE — бісектриса кута BAD, а як внутрішні різносторонні $\angle 1 = \angle 3$ при паралельних прямих AD і BC та січній AE.

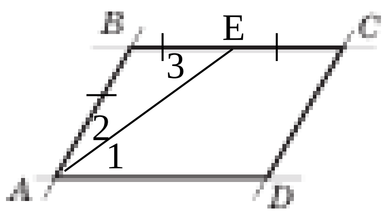


Рис. 2.10

Звідси $\angle 2 = \angle 3$, тобто трикутник ABE — є рівнобедреним з основою AE за ознакою рівнобедреного трикутника, отож $BE = AB = 6$ см. За умовою ж $BE = EC$, тобто $BC = 12$ см. Отже, $P_{ABCD} = 2 \cdot (6+12) = 36$ (см), оскільки протилежні сторони паралелограма рівні.

Відповідь: 36 см.

2.3 Ознаки паралелограма

Теорема про ознаки паралелограма

Щоб скористатися властивостями паралелограма, у багатьох випадках необхідно спочатку переконатися в тому, що даний чотирикутник є дійсно паралелограм. Це можна довести двома способами: або за ознаками — умовами, які гарантуватимуть те, що даний чотирикутник точно паралелограм, або ж за означенням.

Розглянемо доведення ознаки паралелограма, які найчастіше застосовуються на практиці.

<u>Теорема (ознаки паралелограма)</u>

Якщо:

- *дві протилежні сторони чотирикутника паралельні і рівні;*
- *якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні;*
- *якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл,*

то цей чотирикутник — паралелограм.[17]

<u>Доведення</u>

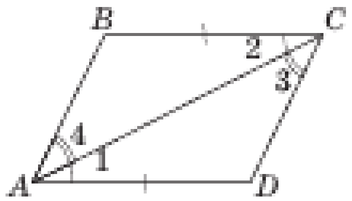


Рис. 2.11

1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ сторони $AD \,||\, BC$ і $AD = BC$ (рис. 2.11). Проведемо діагональ AC і розглянемо трикутники ABC і CDA. Вони мають спільну сторону $AC,\ AD = BC$ за умовою, $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і січній AC. Отже, за першою ознакою рівності трикутників $\Delta ABC = \Delta CDA$. Із рівності цих трикутників ми бачимо рівність кутів 3 і 4. Але ці кути при прямих AB і CD та січній AC є внутрішніми різносторонніми. Тоді за ознакою паралельності прямих сторони $AB||CD$. Отже таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні, звідки випливає, що $ABCD$ — паралелограм за означенням [17, с.22].

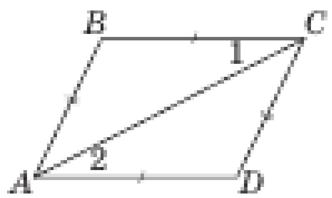


Рис. 2.12

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ сторони $AB = CD$ і $AD = BC$ (рис. 2.12). Знову проведемо діагональ AC і розглянемо трикутники ABC і CDA. У цьому випадку вони рівні за третьою ознакою, оскільки сторона AC є спільною, $AB = CD$ і $AD = BC$ за умовою.

З рівності трикутників випливає рівність кутів 1 і 2, що при прямих AD і BC та січній AC є внутрішніми різносторонніми.

$AD \,||\, BC$ – за ознакою паралельності прямих. Таким чином, в чотирикутнику $ABCD$ сторони AD і BC є паралельними й рівними, за вищедоведеною ознакою 1 $ABCD$ — паралелограм.

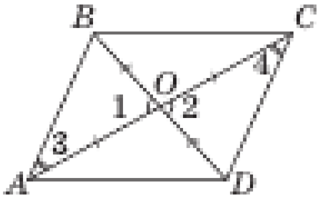


Рис. 2.13

3) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці $O, AO = CO$ і $BO = DO$ (рис. 2.13). Розглянемо трикутники AOB і COD. Ці трикутники рівні за першою ознакою: $AO = CO$ і $BO = DO$ за умовою, а $\angle 1 = \angle 2$ як вертикальні. Отже, рівні і відповідні сторони і кути цих трикутників: $AB = CD$ і $\angle 3 = \angle 4$. Тоді $AB || CD$, і $ABCD$ — паралелограм за ознакою 1. *Теорему доведено повністю* [17, с.23].

Порівняння ознаки і з іншими популярними вищевказаними підручниками.

- Для початку аналізуємо теорію підручника А.Г.Мерзляка [23]. Щодо теореми 1 в даному розділі можна сказати, що вона виділяється окремо;
  Щодо теореми 2 в цьому розділі, то вказано, що вона є оберненою до теореми з попереднього розділу, а саме теореми 1.
  Щодо теореми номер 3 в цьому розділі, то вона також виділена окермо і означена як обернена до теореми 3 в попередньому розділі.
- Виконавши аналіз теорії підручника М.І. Бурди можна сказати щодо теорем, то перші дві в цьому розділі також подаються як теореми (ознаки паралелограма) окремими підпунктами параграфу, а третя розглядається як задача також окремим підпунктом [4].
- Наступним підручником даного дослідження ознак паралелограма розглянуто підручник такого автора як Г.П. Бевза [2]. У нього ж порівняно з іншими досліджуваними підручниками, в кожному параграфі містяться і теорема з ознаками, і теорема з властивостями, враховуючи те, що в інших це все поділено на 2 параграфи.
- Останнім підручником порівняння обрали О.С. Істера [20]. У нього також в одному параграфі вказані і властивості, і ознаки паралелограма. Властивості ж усі виділені окремо, а ознаки записані однією теоремою.

Задача 3

У паралелограмі $ABCD$ такі точки як $M \; i \; N$ — середини сторін AB і CD відповідно (рис. 2.14). Необхідно довести, що чотирикутник $MBND$ — паралелограм [6].

Розв'язання

Спочатку розглянемо чотирикутник $MBND$. Сторони MB і ND паралельні, так як лежать на прямих, які містять протилежні сторони паралелограма $ABCD$.

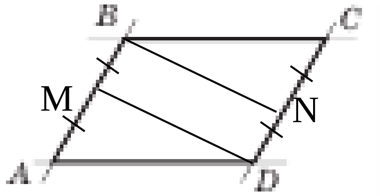


Рис. 2.14

Крім того, сторона $MB = ND$ як половини двох рівних сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Отож таким чином, у чотирикутнику $MBND$ маємо дві сторони, які є паралельні й рівні.

Отже отримали, що чотирикутник $MBND$ — паралелограм.

2.4 Види паралелограмів

Прямокутник

Вивчишви властивості та ознаки паралелограма, досліджено і його види.

Прямокутником називається такий паралелограм, у якого всі кути прямі.

На рис. 2.15 зображено прямокутник $ABCD$. Оскільки прямокутник є окремим випадком паралелограма, то він відповідно має усі властивості паралелограма:

- протилежні сторони прямокутника паралельні й рівні, діагоналі діляться навпіл точкою перетину, протилежні кути рівні і т. д.

Проте прямокутник має деякі, звичайно, й особливі властивості.

Доведемо одну з них.

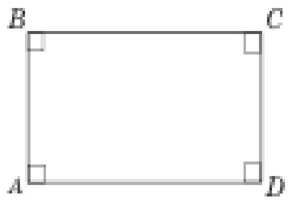


Рис. 2.15

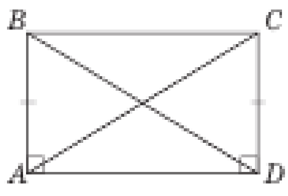


Рис. 2.16

Теорема (властивість прямокутника)

Діагоналі прямокутника рівні.

<u>Доведення</u>

Нехай дано прямокутник $ABCD$ з діагоналями AC і BD (рис. 2.16). Трикутники BAD і CDA рівні за двома катетами й прямокутні, так як AD спільний, як протилежні сторони прямокутника $AB = CD$. Саме так випливає рівність гіпотенуз цих трикутників, тобто $AC = BD$.

Очевидно, обернене твердження також ***справджується (ознака прямокутника):***

Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм є прямокутником.

Таким чином, можна сміливо стверджувати, що рівність діагоналей паралелограма — це *необхідна й достатня умови прямокутника* [17, с.31].

Ознака прямокутника : *якщо всі кути чотирикутника прямі, то цей чотирикутник –прямокутник.*

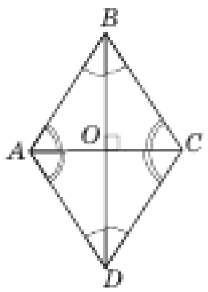
Щодо порівняння з іншими підручниками, зазначимо що:

- А.Г.Мерзляк містить теорему таку ж, як в даному розділі теорема. Поняття оберненого твердження і ознаки в нього немає, він просто записує все це теоремами, до того ж теорема (тут про ознаку) звучить по-іншому: Якщо один з кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм – прямокутник [23].
- М.І. Бурда ділить параграф на підпункти, де теорема і ознака в неї співпадає [4]. Обернене твердження в цьому підпункті кваліфікаційної роботи розглядається як задача з доведенням.
- Г.П. Бевз стисло описує кожен вид паралелограма. Він спочатку вказує на те, що квадрат, ромб і прямокутник мають всі властивості паралелограма, і просто формулює теорему, яка у нас є властивістю за А.П. Єршовою , та її доведення [2].
- О.С. Істер. показує і усі властивості, і загальну теорему з доведеннями [17].

Ромб

Ромбом називається такий паралелограм, у якого сторони всі рівні.

На рис. 2.17 зображений ромб $ABCD$. Цей ромб має усі властивості паралелограма, а також додатково деякі інші властивості, які ми зараз усі разом доведемо.



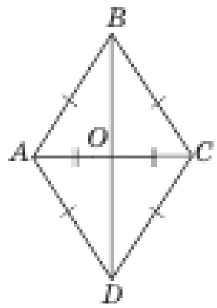


Рис. 2.17 Рис. 2.18

<u>*Теорема, яка описує властивості ромба, звучить так:*</u>

Діагоналі ромба перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

<u>Доведення</u>

Нехай діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються у точці O (рис. 2.18). Так як сторони ромба є рівними, то трикутник ABC з основою AC буде рівнобедрений, а за властивістю діагоналей паралелограма серединою AC є точка O. Отож відрізок BO — це є медіана рівнобедреного трикутника, що водночас є його бісектрисою і висотою. За попередніми дослідженнями можна сказати, що $BD \perp AC$, тобто діагоналі ромба є перпендикулярними, і $\angle ABD = \angle CBD$, тобто BD — бісектриса кута ABC. Аналогічно доведемо, що діагоналі ромба ділять навпіл (тобто є бісектрисами) інших його кутів. *Отож теорему доведено.*

Ознака ромба

Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то цей чотирикутник — ромб [5, с.33].

Квадрат

На рис. 2.19 зображено ще один вид паралелограма — квадрат. Означимо вже давно відому нам фігуру. **Квадратом** називається такий прямокутник, у якого всі сторони рівні. Іншими словами можна сказати, що квадрат

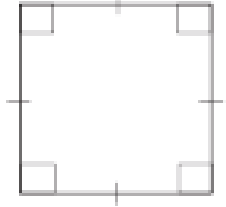


Рис. 2.19

— це є прямокутник, який є і ромбом. Дійсно, так як квадрат є ромбом і прямокутником і, звичайно ж, паралелограмом, то він має такі властивості:

1) усі кути квадрата прямі.

2) усі сторони квадрата рівні, а протилежні сторони паралельні.

3) діагоналі квадрата є рівними, перпендикулярними, а також ділять кути квадрата навпіл, тоюто діляться точкою перетину навпіл [17, с.34].

При аналізі відмінностей з іншими підручниками виявлено:

- А.Г.Мерзляк описує все теоремами [23]. Означення співпадає, теорема дещо доповнена тим, що діагоналі є бісектрисами, і тому через це випливає не одна ознака, а дві.
- М.І. Бурда має таке ж означення ромба, проте також містить дві теореми з доведеннями [4].
- Г.П. Бевз аналогічно стисло описує ромб [2]. Він описує нам теорему про діагоналі та рівні кути з доведенням. Квадрат має, за його словами, усі властивості ромба та прямокутника.
- О.С. Істер. містить і усі властивості, і загальну теорему з доведеннями [20].

2.5 Трапеція

Означення трапеції

Відомо, будь-який паралелограм має дві пари паралельних сторін. Розглянувши чотирикутник, який має лише одну пару паралельних сторін, виведено означення.

Трапецією назвається такий чотирикутник, у якого паралельними є дві сторони, коли дві інші не є паралельні.

Паралельні сторони трапеції називають її основами, а непаралельні сторони називають бічними сторонами. На рис. 2.20 у трапеції $ABCD$ сторони AD і BC є основами, а AB і CD — бічними сторонами.

Кути, які є прилеглими до однієї бічної сторони, є внутрішніми односторонніми при паралельних прямих, на яких лежать основи трапеції, та січній, на якій лежить бічна сторона.

Звідси за теоремою про властивість кутів, які утворюються при перетині паралельних прямих січною, випливає, що *сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°*. На рис. 2.20 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Висотою трапеції називається перпендикуляр, який проведений з точки однієї основи до прямої, що містить іншу основу.

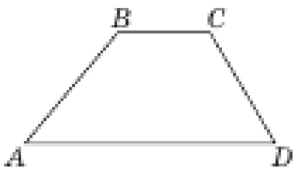


Рис. 2.20

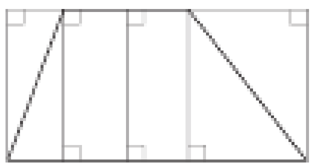


Рис. 2.21

Очевидним є те, що в трапеції можна провести безліч висот (рис. 2.21),— вони усі є рівні як відстані між паралельними прямими.

Найчастіше проводять висоти із вершин кутів при меншій основі трапеції під час розв'язування задач [17, с.41].

Окремі види трапецій

Як серед паралелограмів, трикутників та інших фігур, серед трапецій можна виділити також окремі види та відповідно їх властивості.

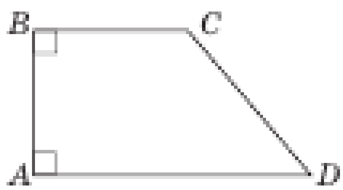


Рис. 2.22

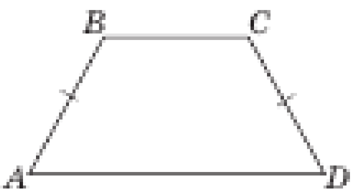


Рис. 2.23

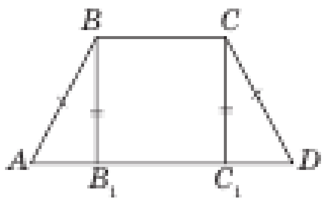


Рис. 2.24

Існує декілька видів трапецій.

Трапеція, в якій одна з бічних сторін є перпендикулярною до основ, називається *прямокутною трапецією.*

На рис. 2.22 зображена прямокутна трапеція $ABCD$. Дана трапеція має два прямі кути при меншій бічній стороні AB. Одночасно ця сторона є й висотою.

Рівнобічною трапецією називається така трапеція, у якій бічні сторони рівні. На рис. 2.23 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$ з бічними сторонами AB і CD. Інколи рівнобічну трапецію також називають рівнобедреною. Рівнобічна трапеція ж, як і рівнобедрений трикутник, має рівні кути при основі. Доведення можна представити в наступній теоремі, яка звучить так:

***Теорема* (*властивість рівнобічної трапеції*)**

У рівнобічній трапеції кути при основі рівні.

Доведення

Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $AD||BC, AB = CD$.

Перед початком доведення варто зазначити, що цією теоремою при кожній з двох основ трапеції стверджується рівність кутів, тобто необхідно довести, що $\angle A = \angle D$ і $\angle B = \angle C$.

Проведемо висоти BB_1 і CC_1 з вершин тупих кутів і розглянемо прямокутні трикутники ABB_1 і DCC_1 (рис. 2.24).

У них $AB = CD$ як бічні сторони рівнобічної трапеції, BB_1=CC_1 як відстані між паралельними прямими AD і BC. Отже, ΔABB_1=ΔDCC_1 за гіпотенузою і катетом. Таким чином звідси випливає, що $\angle A = \angle D$. Кути трапеції B і C також є рівні, оскільки вони доповнюють до 180° рівні кути A і D.

Отож теорему доведено.

Зазначимо й те, що справджується також обернене твердження, що є ***ознакою рівнобічної трапеції***: *якщо в трапеції кути при основі рівні, то така трапеція є рівнобічною* [17, с.43].

Проведено порівняльний аналіз з підручниками даної теми:

- А.Г.Мерзляк розповідає про 3 властивості трапеції в одній задачі з доведенням, а також дає означення середньої лінії трапеції (відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції), подає її теорему і доведення [23].
- Г.П. Бевз дуже коротко описує трапецію суто по означеннях її елементів та видів, також дає означення середньої лініїї, її теореми і доведення [2].
- О.С. Істер дає визначення та усі властивості, теорему, види [20].

Задача 4

Менша основа рівнобічної трапеції рівна її бічній стороні, діагональ ж перпендикулярна до бічної сторони. Необхідно знайти кути трапеції [22].

Розв'язання

Нехай дано рівнобічну трапецію $ABCD$, у якій $AD || BC$, $AB = BC = CD, BD \perp AB$ (рис. 43). За умовою задачі трикутник BCD рівнобедрений з основою BD, тобто $\angle 1 = \angle 2$; з іншого боку, $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній BD.

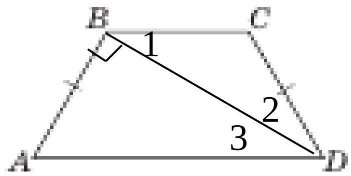


Рис. 2.25

Нехай градусна міра кута 1 дорівнює x, тоді в даній трапеції $\angle A = \angle D = = 2x$, $\angle B = \angle C = x + 90$. Оскільки нам відомо, що сума кутів, прилеглих до бічної сторони, рівна 180°, маємо: $2\,x + x + 90 = 180;\ 3x = 90; x = 30$.
Отже, $\angle A = \angle D = \ 60°, \angle\, B = \angle C = 120°$.
Відповідь: 60° і 120°.

2.6 Вписані й описані чотирикутники

Існують чотирикутники описані та вписані.

Вписані чотирикутники

Відомо означення та теоретичні відомості вписаного у коло чотирикутника.

Чотирикутник можна назвати *вписаним у коло тоді*, коли усі його вершини лежать на цьому колі.

Чотирикутник $ABCD$ на рис. 2.26 є вписаним у коло. Тобто кажуть, що коло описане навколо чотирикутника. Як нам відомо, можна описати коло навколо будь-якого трикутника. Однак для чотирикутника це не можна зробити завжди. Тож давайте доведемо властивість і ознаку вписаного чотирикутника.

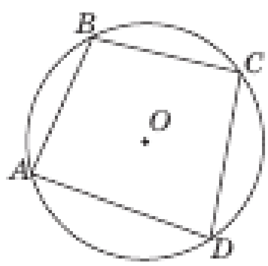


Рис. 2.26

Теорема (властивість вписаного чотирикутника)

Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.

Доведення

Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло (рис. 2.26). За теоремою про вписаний кут $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD, \angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$.

Отже, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Аналогічно можна довести, що $\angle B + \angle D = 180°$.

Теорему таким чином доведено.

Існує ще одна теорема – *ознака вписаного чотирикутника.*

Теорема

Якщо сума протилежних кутів чотирикутника рівна 180°, то навколо нього можна описати коло[17, с.70].

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180°$. Опишемо коло навколо трикутника ABC, доведемо від супротивного, що вершина D не може лежати ні всередині цього кола, ні поза ним. Нехай точка D лежить усередині кола, а точка E — точка перетину променя AD з дугою AC (рис. 2.27). Тоді чотирикутник $ABCE$ — вписаний.

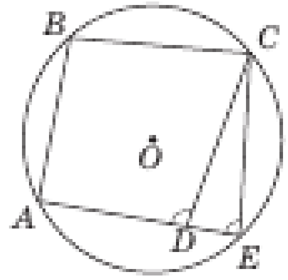


Рис. 2.27

За умовою $\angle B + \angle D = 180°$, а за вищедоведеною властивістю вписаного чотирикутника $\angle B + \angle E = 180°$, тобто маємо $\angle D = \angle E$. Слід зазначити й те, що кут D чотирикутника $ABCD$ — зовнішній кут трикутника CDE, тобто він має бути більшим за кут E за теоремою про зовнішній кут трикутника. Отож отримано певну суперечність, що точка D всередині кола не може лежати. За аналогією можна довести, що точка D також не може лежати поза колом. Таким чином, точка D лежить на колі, іншими словами, навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло.

Отже, теорему доведено.

З даної теореми можна вивести наслідки:

Наслідок 1

- Якщо паралелограм вписаний у коло, то він є прямокутником.
- Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.

Прямокутник, вписаний у коло, можна побачити на рис. 2.28. Центр описаного кола є точкою перетину діагоналей прямокутника. Далі виводиться наслідок 2.

Наслідок 2

- Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.
- Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобічна.

Вписана в коло рівнобічна трапеція зображена на рис. 2.29.

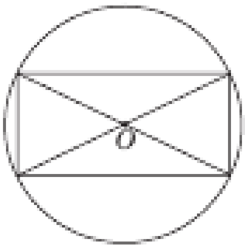


Рис. 2.28

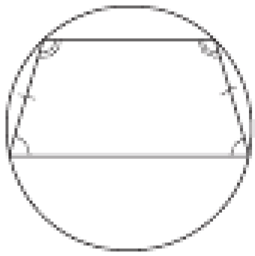


Рис. 2.29

[5, с.71].

Описані чотирикутники

Давши означення вписаному чотирикутнику, вивчивши теореми та їх наслідки, можна означити описаний навколо кола чотирикутник.

Чотирикутник називається *описаним навколо кола*, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола. Чотирикутник $ABCD$ на рис. 2.30 є описаним навколо кола. Інакше кажуть, що коло вписане в чотирикутник.

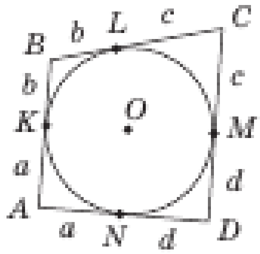


Рис. 2.30

Проте слід зазначити, що вписати коло можна не в будь-який чотирикутник. Пропоную довести відповідні властивість і ознаку.

Теорема (властивість описаного чотирикутника) *звучить так:*

В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні.

<u>Доведення</u>

Нехай сторони чотирикутника $ABCD$ дотикаються до вписаного кола в точках K, L, M та N (рис. 2.30). За властивістю відрізків дотичних $AK =$

$AN, BK = BL, CL = CM, DM = DN$. З урахуванням позначень на рисунку $AB + CD = a + b + c + d = AD + BC$.

Таким чином теорему ми довели.

Теорема (ознака описаного чотирикутника)

Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.

Отримуємо *наслідок:*

- *У будь-який ромб можна вписати коло. якщо в паралелограм вписано коло, то він є ромбом.*

Ромб, описаний навколо кола, зображено на рис. 2.31. Центр вписаного кола є точкою перетину діагоналей ромба [17, с.72].

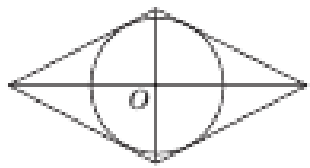


Рис.2.31

Задача 5

У рівнобічну трапецію вписано коло з бічною стороною 6 см. Знайдіть середню лінію трапеції [22].

Розв'язання

Нехай $ABCD$ — дана рівнобічна трапеція з основами AD і BC.

$AB + CD = AD + BC = 12$ см (за властивістю описаного чотирикутника) Середня лінія трапеції дорівнює $\frac{AD+BC}{2}$, тобто 6 см.

Відповідь: 6 см.

2.7 Площі чотирикутників

Знання знаходження площі відіграє велике практичне значення в житті кожної людини, а чотирикутникі нам трапляються дуже часто в буденному житті. Тож вивчивши формули, ми зможемо швидко впоратися з громіздкими задачами на практиці, які можна буде обчислити так легко. Щоб виміряти площу фігури, потрібно обрати одиницю вимірювання. Для цього використовують квадрат, у якому сторона дорівнює одиниці вимірювання довжини. Площа квадрата зі стороною 1 см — це одиниця вимірювання площі у квадратних сантиметрах, зі стороною 1 м — у квадратних метрах і т. д. Отже, *одиницею вимірювання площі є площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини*. Коротко записують так: 1 $см^2$, але говорять: «один квадратний сантиметр».

- *Площу будь-якої фігури виражають додатним числом.*
- *Рівні фігури мають рівні площі*.
- *Площа будь-якої фігури дорівнює сумі площ частин, з яких вона складається*[4,с.152].

Площа паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата, трапеції

Площа прямокутника дорівнює добутку двох його суміжних сторін (рис. 2.32):

$$\boldsymbol{S} = a \cdot \boldsymbol{b}$$

Давайте доведемо дану формулу (Рис. 2.33).

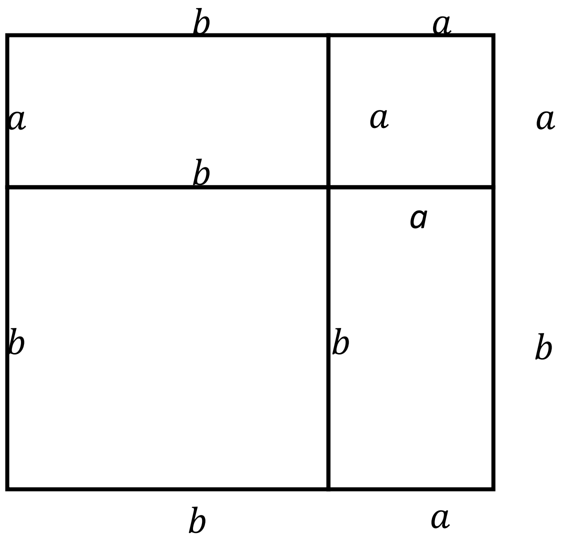


Рис. 2.33

Добудуємо даний прямокутник до квадрата зі стороною $a + b$. Тоді площа квадрата можна знайти $S = (a + b)^2$.

З іншого боку бачимо, що площа квадрата складається із площ двох квадратів зі сторонами a і b і площ двох рівних прямокутників зі сторонами a і b.

$S_{квадрата} = 2 \cdot S_{прямокутника} + a^2 + b^2$.

Отже, $(a + b)^2 = 2 \cdot S_{прямокутника} + a^2 + b^2$, *або* $a^2 + 2 \cdot ab + b^2 = 2 \cdot S_{прямокутника} + a^2 + b^2$. *Звідси,* $S_{прямокутника} = ab$.

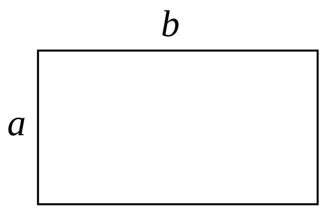


Рис. 2.32

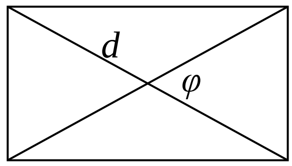


Рис. 2.34

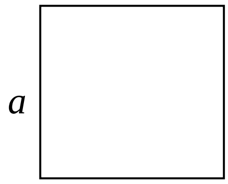


Рис. 2.35

Площа прямокутника рівна половині квадрата його діагоналі, помноженої на синус кута між діагоналями (рис. 2.34):

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d^2 sin\varphi}.$$

Площа квадрата рівна квадрату його сторони (рис. 2.35):

$$\boldsymbol{S = a^2}.$$

Площа квадрата рівна половині квадрата його діагоналі (рис. 2.37):

$$\boldsymbol{S = \tfrac{1}{2} d^2.}$$

Площа паралелограма рівна добутку його сторони (основи) на висоту, проведену до неї (Рис. 2.38):

$$\boldsymbol{S = a \cdot h}.$$

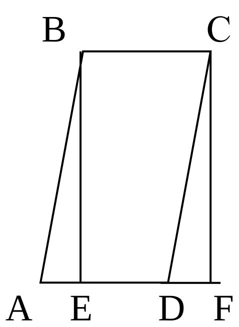


Рис. 2.36

Доведення: (Рис. 2.36)

Опустимо з вершин B і C висоти $BC = CF = h$.

Дістанемо прямокутник $BCFE$. Площа складної фігури ABCF становить: $\mathrm{S_{ABCF}} = \mathrm{S_{ABCD}} + \mathrm{S_{\Delta DCF}} = \mathrm{S_{BCFE}} + \mathrm{S_{\Delta ABE}}(1)$

$\Delta ABE = \Delta DCF$ (за гіпотенузою і катетом). Тоді $S_{\Delta ABE} = S_{\Delta DCF}$.

Тому з рівності (1) випливає, що

$S_{ABCD} = S_{BCFE} = BE \cdot BC = a \cdot h$.

Площа паралелограма рівна добутку двох його суміжних сторін на синус кута між ними (рис. 2.39):

$$\boldsymbol{S = a \cdot b \cdot \sin \varphi}.$$

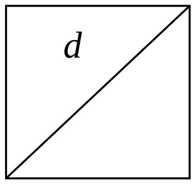


Рис. 2.37

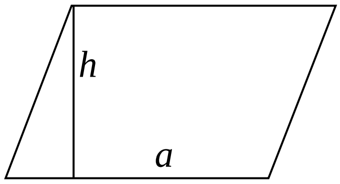


Рис. 2.38

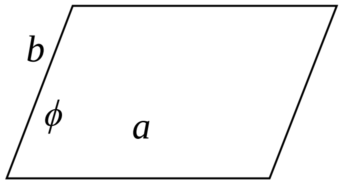


Рис. 2.39

Площа паралелограма рівна половині добутку його діагоналей на синус кута між ними (рис. 2.40):

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi}.$$

Площа ромба рівна добутку квадрата його сторони на синус кута ромба (рис. 2.41):

$$\boldsymbol{S = a^2 \sin \varphi}.$$

Площа ромба рівна півдобутку його діагоналей (рис. 2.42):

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d_1 d_2}$$

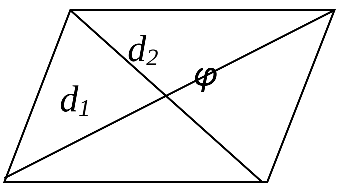


Рис. 2.40

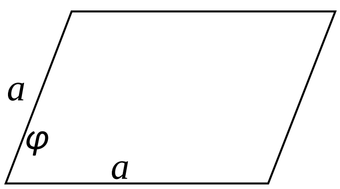


Рис. 2.41

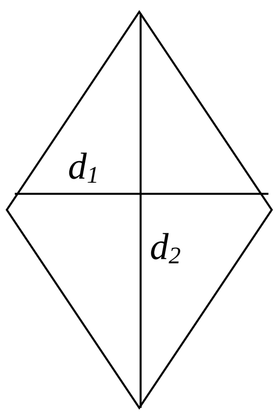


Рис. 2.42

Площа трапеції рівна добутку півсуми основ на висоту (рис. 2.43):

$$S = \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{h}.$$

Площа трапеції рівна добутку середньої лінії на висоту (рис. 2.44):

$$\boldsymbol{S = m \cdot h}.$$

Якщо діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то S = $\boldsymbol{h^2}$, де A— висота трапеції (рис. 2.45).

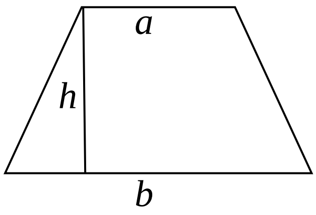


Рис. 2.43

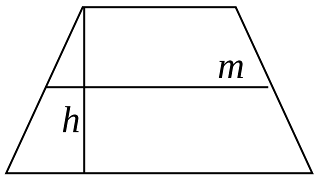


Рис. 2.44

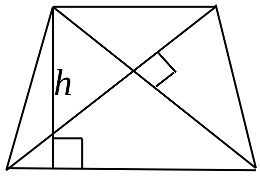


Рис. 2.45 [4].

Доведемо деяку з формул знаходження площі трапеції. (Рисунок 2.46)

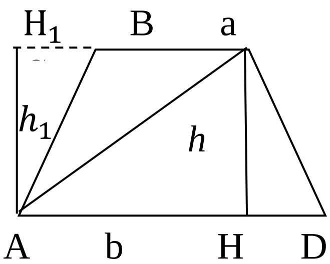


Рис.2.46

Проведіть діагональ AC і висоту $AH_1 = h_1$. Відрізки AH_1 і CH є висотами трикутників ABC і ACD відповідно, в свою чергу дані висоти мають однакову довжину, тому $CH = AH_1 = h$. Вам відомо, як знайти площу трикутника, якщо відомо його сторону та висоту, проведену до неї.

Площа трикутника, як нам відомо, рівна половині добутку його сторони та проведеної до неї висоти.

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot CH = \frac{1}{2}bh,\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH_1 = \frac{1}{2}ah\ .$$

Повернімось тепер до фігури трапеції. Дана трапеція складається з двох трикутників. Вам ще раніше відомо, що якщо многокутник складається з кількох многокутників, то його площа рівна сумі площ цих многокутників, тому площа трапеції дорівнює:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

Виділіть одержану формулу рамочкою, підпишіть її назву, вкажіть, що означають букви a, b– основи, h - висота.

Вивчивши всю теорію даної теми, учням можна запропонувати розгадати узагальнюючий кросворд (додаток А).

А тепер розглянемо деякі задачі на застосування вищевказаних формул на знаходження площ трапецій, а також в процесі дізнаєтеся нові простіші формули.

Задача 6

Знайти площу рівнобічної трапеції, якщо відомо, що її основи рівні 5см і 11см, а периметр 28см . (Рис. 2.47)

Розв'язання

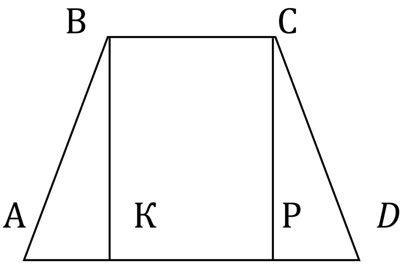


Рис. 2.47

Нехай $ABCD$ рівнобічна трапеція. $BC = 5$ см, AD= 11 см, а периметр P = 28 см.

Знайдемо розв'язання двома способами та знайдемо легший. У трапеції $ABCD$ проведемо з вершин тупих кутів B і C висоти BK і CP.

І спосіб:

Оскільки $BK \perp AD, CP \perp AD$, то чотирикутник $KBCP$ – прямокутник. За властивістю прямокутника $BC = KP, BK = CP$. ΔAKB і ΔDPC – прямокутні і рівні за гіпотенузою і катетом: $AB = CD$ – за умовою, $BK = CP$. З рівності трикутників випливає рівність сторін: $AK = PD$.

Тому $AK = (AD - KP): 2 = (AD - BC): 2$. $AK = (11 - 5): 2 = 3$(см). Периметр трапеції $P = AB + BC + CD + AD = 2 \cdot AB + BC + AD$; звідси $2 \cdot AB = P - (BC + AC)$, $AB = (P - (BC + AC)): 2$, $AB = (28 - (5 + 11)): 2 = 6$(см).

З прямокутного трикутника AKB за теоремою Піфагора $AB^2 = AK^2 + BK^2$; $BK^2 = AB^2 - AK^2$; BK^2= 36-9=27; $BK=\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ (см).

Площа трапеції обчислюється за формулою: $S = \frac{a+b}{2}h$, тому $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BK$. $S = \frac{1}{2}(5 + 11) \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ (см2).

Відповідь: $24\sqrt{3}$ см^2.

ІІ спосіб:

Периметр трапеції $P = AB + BC + CD + AD = 2 \cdot AB + BC + AD$, то

$2 \cdot AB = P - (BC + AD), AB = (P - (BC + AD)) : 2$ і $AB = (28 - (5 + 11)) : 2 = 6$(см).

Півпериметр $ð = \frac{a+b+c+d}{2}$, $ð = \frac{6+5+6+11}{2} = 14$(см). Оскільки трапеція рівнобічна, то її можна вписати в коло. Тоді її площу обчислимо за формулою: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. $S = \sqrt{(14-6)(14-5)(14-6)(14-11)} = \sqrt{8 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3} = 24\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: $24\sqrt{3}$ см^2. [11]

Розв'язуючи таку задачу в школі ми дотримуємося І способу, хоча ІІ спосіб за допомогою формули Брахмагупти менш громіздкий, не вимагає обчислення висоти трапеції і такого детального обґрунтування.

Задача 7

Знайти площу прямокутної трапеції, описаної навколо кола, якщо її основи дорівнюють 10см і 18см. (Рис. 2.48)

Розв'язання

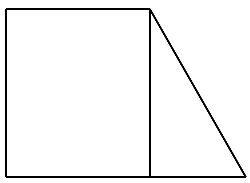


Рис. 2.48

Нехай у трапецію $ABCD$ вписане коло, $BC = 10$ см, $AD = 18$см. Знайдемо площу трапеції $ABCD$. Нехай $ABCD$ – дана прямокутна трапеція, $BC || AD$. Проведемо з вершини кута C висоту $CE. CE = AB$. Тоді $ED = AD - BC$.

І спосіб:

$\triangle CED$ – прямокутний, $\angle CED = 900$. За теоремою Піфагора з $\triangle CED$ $ED^2 = CD^2 - CE^2$; $ED^2 = (CD - CE)(CD + CE)$; $(AD - BC)^2 = (CD - CE)(CD + CE)$; звідси $\frac{(AD - BC)^2}{AD + BC} = CD - AB$. Оскільки в трапецію можна вписати коло, то суми протилежних сторін рівні: $BC + AD = AB + CD$.

Тоді $CD - AB = \frac{(18-10)^2}{18+10} = \frac{8^2}{28} = \frac{64}{28} = \frac{16}{7}$(см), $AB +$ CD=18+10=28(см).

Маємо систему: $\begin{cases} CD - AB = \frac{16}{7}, \\ CD + AB = 28. \end{cases}$ Звідси $2CD = \frac{212}{7}$; $CD = \frac{106}{7}$ см.

$AB = 28 - CD, AB = 28 - \frac{106}{7} = \frac{90}{7}$см.

Площа трапеції $S = \frac{a+b}{2}h$, $S = \frac{AD+BC}{2} \cdot AB$. $S = \frac{10+18}{2} \cdot \frac{90}{7} = \frac{28 \cdot 90}{2 \cdot 7} = 2 \cdot 90 = 180$ (см^2).

ІІ спосіб:

Нехай $ABCD$ – дана прямокутна трапеція, $BC||AD$. Оскільки в трапецію можна вписати коло, то площа трапеції, дорівнює добутку її основ: $S = AD \cdot BC$

$S = 10 \cdot 18 = 180$(см^2).

Відповідь: 180см^2.

Як бачимо, другий спосіб має переваги над першим. Завдяки новим формулам можна розв’язувати задачі в два рядки. Це є набагато швидше, зручніше та практичніше, тому наша порада звернути увагу на дані формули в подальшому розв’язуванні задач.

Оскільки наприкінці вчитель проводить урок узагальнення і систематизації знань, то наступним уроком він проводитиме контрольну роботу. Пропоную розглянути такий її варіант(додаток Б).

РОЗДІЛ 3
МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ МУЛЬТИМЕДІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ

3.1 Використання презентацій на уроках геометрії

З інтенсивним розвитком інформаційно-комунікаційних технологій актуальним завжди лишається питання розвитку, виховання і навчання підростаючого покоління, яке живе в суспільстві постійних змін, тому має бути завжди готовим до чогось нового, вміти адаптуватися до найрізноманітніших життєвих ситуацій. Сучасна молода людина, яка не є ознайомленою з технологіями Інтернет, не володіє сучасними ІКТ, що вивчається наразі у навчальних закладах, не зможе бути прийнята в сучасному інформаційному суспільстві на одному рівні. Тому варто придати цьому велике значення.

Інформаційні технології дедалі швидше впроваджуються в начальний процес. Розглянемо це і в галузі математики. Це предмет, який потребує швидше і більше практики ніж теорії, що ми найкраще засвоїмо це записами в зошиті. Проте слід не забувати про те, що урок має бути цікавим, яскравим, насиченим, можливо і навіть не традиційним, і в цьому допоможуть інформаційні технології, але в міру використані та доцільні.

Геометрія – предмет не з легких. В деяких учнів можна спостерігати об’єктивне неприйняття математики, адже вони вважають її надто важкою. Визначимо необхідність використання інформаційних технологій в житті школяра, таким чином проаналізувати науково-практичну, методичну літературу з питань застосування ІКТ на уроках.

Найбільшу увагу пропоную приділити мультимедійним технологіям на уроках геометрії. Сміливо можна сказати, що мультимедійні технології – це своєрідний інструмент або засіб пізнання на уроках. Мультимедіа найкраще розвиває пам’ять, уяву учня, придає йому мотивації, отриманню навиків, сприяє розвитку інформаційної писемності.

Перше, що спадає на думку, коли чуєш слово «мультимедіа» в навчанні –

це швидше слово «презентація»! Слайди, презентації, відео презентації вже відомі і доступні дуже давно, оскільки це яскраве відображення інформації, яку ти намагаєшся донести за допомогою зорового сприйняття, звукових ефектів, спецефектів, переходів, анімацій та інших цікавинок. Досвід застосування електронних презентацій за допомогою програми *Power Point* показав, що саме таким чином якість уроку значно підвищується [25].

PowerPoint – це програма для підготовки презентацій, яка є складовою пакету *MicrosoftOffice* і дуже зручна у використанні, оскільки містить багато шаблонів дизайну сторінок, звукових шаблонів та інше, що робить значно легшим створення елементарних презентацій.

Така подача навчального матеріалу у вигляді відео презентації значно може скоротити час навчання. Учнівську увагу підкорює новизна проведення таких цікавих моментів на уроці. З цього можна зробити висновок, що якою б нудною не була тема даного уроку, вона може стати дуже цікавою для учня, оскільки буде представлена у фарбах, звуках.

Що ж, дана програма створення мультимедійних презентацій є найбільш популярною. Якщо практика в даній галузі у вас наявна, то створити звичайні слайди буде для вас не важким завданням, до того ж швидким та зручним. А тепер пропоную розглянути переваги для вчителя геометрії. Вчитель математики – це постійна робота з крейдою біля дошки, креслення, малювання, стирання… Процеси не з найкомфортніших і найохайніших. Малюнки ж на екрані – це найкраще відображення гарних, зрозумілих зображень фігур, аніж поспіхом намальованих на дошці. Це також велика економія часу, що важливо для вчителів, аби встигнути пояснити усе заплановане доступно і зрозуміло. Приємним бонусом буде й те, що виділити необхідні літери, об'єкти, елементи, позначення, формули можна не лише навівши крейдою двічі або намалювавши рамку, а й показати це яскраво, в фарбах, зі звуковими ефектами, анімаціями, що набагато простіше буде запам'ятати учневі, виникнуть певні асоціації з вивченням даного матеріалу.

Досить зручним буде використання презентацій не лише для викладу матеріалу уроку, а й для перевірки знань учнів, проведення тестів, математичного диктанту з самоперевіркою, що викличе значне захоплення учнів, коли вони бачитимуть на екрані, що їх відповіді співпали. Перевірка домашнього завдання – це те, на що вчителю не завжди подобається виділяти значну увагу і багато часу, коли учнів чекає новий матеріал, проте необхідно і закріпити попередній. Не усі учні можуть виконати правильно домашнє завдання, тому коли вони проситимуть пояснення даної задачі чи малюнку, слайд з презентації значно допоможе, оскільки кожен індивідуально побачить де припустив помилки і буде менше запитань. Таким чином, можна зробити висновок, що презентація в процесі пояснення нового матеріалу значно зекономить час вчителя, який він міг провести біля дошки, до прикладу, довго малюючи гарний малюнок, та залишить більше часу на закріплення матеріалу.

ProShow – це програма для того, щоб створювати фото, а також відео слайд-шоу. Дана популярна програма містить у собі 300 ефектів переходу між зображеннями, застосування яких зробить перегляд значно цікавим, тим більше маючи фукцію звукового супроводу. Програма сама по собі дуже проста в використанні, хоч і має багато різних цікавих можливостей (автоматична синхронізація часу музичного супроводу, можливість створення запису створеного проекту на *DVD* і *VCD)*.

Слід зазначити й те, що мультимедійні програмні засоби мають широкі можливості, згодом розуміння цього переросте в зацікавленість і учнів, і вчителя. Таким чином, вчитель дозволить собі поглянути на методику побудови уроків по-новому.

За допомогою мультимедійних уроків ми можемо вирішити наступні дидактичні задачі:

- систематизація засвоєних знань;
- засвоєння базових знань по даному предмету;
- формування мотивації до навчання;
- формування навиків самоконтролю;

- надання навчально-методичної допомоги для учнів над навчальним матеріалом в самостійній роботі.

Отже, іншими словами можна назвати даний метод подання інформації як пояснювально-ілюстративний, що забезпечує організацію засвоєння учнями інформації завдяки поєднанню навчального матеріалу із забезпеченням його успішного сприйняття. Оскільки представлення інформації в мультимедіа подається різними формами, то такий процес робить навчання значно ефектинішим.

Провівши дослідження, можна сказати, що ***мультимедійні технології можуть мати таке призначення (використовуються):***

- оголошення теми уроку (висвітлюється на слайді з ключовими моментами, стисло, коротко);
- інформаційно-повчальна допомога (у навчальному процесі на сьогоднішній день найбільша увага приділяється діяльності дитини у пошуках, переробці знань, їх усвідомлення. Організатором навчального процесу являється вчитель, яки зазвичай надає допомогу, підтримку учням в самостійній діяльності);
- як супровід пояснення вчителя (на слайдах коротко висвітлюються основні формули, таблиці, визначення, схеми, що буде зручним для зорового сприйняття учнями інформації, також це дасть можливість переписати матеріал у своєму темпі та зекономить час вчителя; у такому випадку зручніше буде використовувати презентацію без автоматичного переключання слайдів та таймеру, оскільки краще буде зупинятися на ключових моментах, які будуть учням не зрозумілими, тому що це займе відповідно більше запланованого часу);
- контроль знань (що ж до комп'ютерного тестування, то такий спосіб оцінювання є дуже зручним. Це до прикладу можуть бути картки з запитаннями, де учні записуватимуть відповіді в зошит, також цікавим і досить справедливим буде встановлення автоматичного переходу між слайдами через певні проміжки часу).

Дуже важливим питання є поєднання робочих зошитів і комп'ютерної презентації. Слід зазначити, що не варто настільки зациклюватися на всіх перевагах та зручностях використання комп'ютера для представлення інформації даної теми, оскільки геометрія – предмет точний та потребує чіткого пояснення. Все ж, учні повинні мати так звані «паперові копії» розглянутих на уроках задач, теорем, малюнків для кращого засвоєння знань та повторення пізніше матеріалу [26].

При підготовці мультимедійної презентації слід звернути увагу на такі моменти як:

- Структура пізнавального простору.
- Психологічні особливості учнів обраного класу.
- Цілі, досягнення, результати навчання.
- Використання найефективніших елементів в ІКТ.
- Кольорова гамма, анімації, звукові ефекти оформлення навчального матеріалу.

Як бачимо, використанні ІКТ є дуже актуальним та привабливим у сучасному навчальному процесі, яке несе в сої багато переваг. Перш за все, учів зацікавлює новизна подачі матеріалу, вони самі у думках аналізують щойно почутий і побачений матеріал, формують його «своїми словами», виявляють цікавість до матеріалу, його дослідження, зникає страх роботи з комп'ютером.

Пропоную розглянути приклад конспект уроку, оформленого у вигляді презентації (додаток В).

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження, присвячене узагальненню і систематизації навчально-методичних матеріалів по вивченню теми «Чотирикутники».

В даній бакалаврській роботі розглянуто певні фрагменти структури освітньої програми. Вона в свою чергу відповідає змістовій лінії теми «Чотирикутники», також представлено календарне-тематичне планування уроків геометрії у 8 класі, яке пізніше порівнюється з плануванням у класах з поглибленим вивченням математики. Було проведено ґрунтовний логіко-математичний аналіз досліджуваної теми «Чотирикутники» за підручником «Геометрія 8 клас» А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра, що є найдоступнішим та найрозповсюдженішим в Укріїні. За власними дослідженнями виявлено, що О.С. Істер єдиний автор, який у своєму підручнику викладає матеріал за такою ж послідовністю, як у програмі.

Також в даній роботі було розглянуто та досліджено загальні теоретичні відомості про чотирикутники разом з їх елементами, проаналізовано властивості і доведення теорем та наслідків, підібрано приклади не тільки теоретично, а й ілюстративно, а саме рисунки, схеми, таблиці, розв'язано декілька прикладів задач. Чотирикутники, їх окремі види – це найперша велика тема курсу планіметрії у 8 класі. Вона дає можливості розвинути логічне мислення, використовувати вивчений навчальний матеріал у задачах, навіть практичних, які зустрінуться і в повсякденному житті, а також покаже різні способи та медоти їх розв'язку, де ви оберете для себе простіший, доведе теореми та їх наслідки, а також виведе площі обраних чотирикутників.

В даній роботі досліджено такі теми:

- Чотирикутник і його елементи
- Паралелограм і його властивості
- Ознаки паралелограма
- Види паралелограмів
- Трапеція
- Вписані й описані чотирикутники

- Площі чотирикутника

Також розглянуто методику використання презентацій на уроках геометрії, її переваги та недоліки. Можна зробити висновок, що це дуже ефективний метод навчання, який зацікавлює не тільки новизною, а й зручністю, ефектністю, економією часу та викликає великий інтерес як у вчителя, так і в учня.

Отже, матеріал даної кваліфікаційної роботи сприяє розширеному і поглибленому вивченню теми «Чотирикутники», формує логічне мислення, може бути використаний у шкільному курсі при підготовці до математичних конкурсів, учнівських олімпіад, при організації роботи гуртків та факультативних занять, а також для підготовки до занять з геометрії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Атанасян А. С. Геометрія: навчань. для 7-9 кл. общеобразоват. Установ / А. С. Атанасян. – М.: Освіта, 1995. – 335 с.
2. Бевз Г. П. Геометрія : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів. 8 клас / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2016. – 272 с.
3. Бродський Я. Компетентнісний підхід у навчанні математики / Я. Бродський, С. Великодний, О. Павлов // Математика в школі. – 2011. – № 10. – С. 2–8.
4. Бурда М. І. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К. : УОВЦ «Оріон», 2016. – 224 с.
5. Воропаєва Р. Н. Методичні поради з досвіду викладання / Р. Н. Воропаєва // Математика, 2001. – №35. – 48 с.
6. Гайштут О. Г. Математика: довідник для абітурієнтів та учнів загальноосвітніх навчальних закладів / О. Г. Гайштут, Р. П. Ушаков, О. А. Шамович. – К. : Літера ЛТД, 2012. – 624 с.
7. Геометрія. Орієнтовне тематичне планування 8 клас [Електронний ресурс]. – Режим доступу : attps://vseosvita.ua/library/kalendarno-tematicne-planuvanna-z-geometrii-8-klas-176870.atml.
8. Геометрія. Повторення матеріалу за програмою з геометрії 7-9 клас [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://subject.com.ua/mathematics/zno_2017/49.html
9. Глобін О. І. Компетентнісний підхід у навчанні та стандарт шкільної математичної освіти / О. І. Глобін // Математика в школі. – 2011. – № 11–12. – С. 2–5.
10. Глобін О. І. Концепція реалізації компетентнісного підходу в навчанні математики в основній школі [Електронний ресурс] / О. І. Глобін, М. І. Бурда, О. П. Вашуленко, Т. М. Хмара // Математика в рідній школі. – 2015. – № 6. – С. 2–10 – Режим доступу :

http://www.undip.org.ua/files/Математика%20№6_2015%202-10%20(1).pdf.

11. Головань М. С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М. С. Головань // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 4. – С. 23–27.
12. Груденов Я. І. вдосконалення методики роботи вчителя математики : книга для вчителя / Я. І. Груденов. – М.: Освіта, 1990. – 224 с.
13. Гулай О. І. Компетентнісний підхід як основа нової парадигми освіти / О. І. Гулай // Вісник Національної академії Державної прикордонної служби України. – 2009. – № 2. – (Серія «Педагогічні науки»). – С. 41–51.
14. Дергачов В. А. Геометрія у визначеннях, формулах і таблицях: довідковий посібник для учнів 7-11 класів. – Х.: Веста: Видавництво «Ранок», 2006. – 96 с.
15. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс] / Кабінет міністрів України. – 2011. – Режим доступу : https://zakon.rada.gov.ua/laws/main/1392-2011-п.
16. Єршова А. П. Геометрія. 8 клас : Збірник самостійних і контрольних робіт / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Криижановський. – 3-тє вид. – Х. : Веста: Видавництво «Ранок», 2010. – 80 с.
17. Єршова А. П. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. – Х. : Вид-во «Ранок», 2016. – 256 с.
18. Звєрєва Г. Ф. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики / Г. Ф. Звєрєва, В. В. Сердюк // Математика в школах України. – 2010. – № 9. – С. 2–6.
19. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку / І. М. Зіненко // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології : наук. журн. – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2009. – № 2. – С. 165–174.

20. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ : Генеза, 2016. – 216 с.
21. Литвинова С. А. За сторінками підручника математики / С. А. Литвинва, Л.В. Кулікова. – Изд. Панорама, 2006. – 112 с.
22. Мерзляк А. Г. Геометрія. 8 кл. : збірник задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 111 с.
23. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 208 с.
24. Математика 5–9 класи: навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] / МОН України. – 2017. – 40 с. – Режим доступу : https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas.
25. Матеріали обласного семінару «Організаційно-методичне забезпечення апробації електронних засобів навчального призначення для загальноосвітніх навчальних закладів у 2005-2006 н. р.». – Полтава, ПОІППО. – 2006.
26. Матеріали обласного семінару «Інформаційні технології та електронні навчальні засоби при викладанні математики». – Полтава, ПОІППО. - 2006.
27. Овечкін К. А. Використання методів наукового пізнання при вивченні теми «Чотирикутники» / К. А. Овечкін // Пізнання процесів навчання фізики : збірник статей. Вип. дев'ятій / під ред. Ю. А. Саурова. – К.: Вид-во ВятГГУ, 2008. - С. 54-59.
28. Петров Е. С.Теорія і методика навчання математики: учеб.-метод. посібник для студ. мат. спец. / Є. С. Петров. - К.: Вид-во Сарат. ун-ту, 2004. - 84 с.
29. Погорєлов А. В. Геометрія : навч. для 7-11 Кл. загаль. установ / О. В. Погорєлов. - М.: Просвещение, 1990. - 384 с.

30. Полякова Т. С. Методика навчання геометрії в основній школі: Навчальний посібник для студентів педвузів та пед.колледжей. – Ростов-на-Дону: ріпу, 1996. – 96 с.
31. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія / С. А. Раков. – Харків : Факт, 2005. – 360 с.
32. Раков С. А. Формування математичної компетентності учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. доктора пед. наук : 13.00.02 / С. А. Раков. – Харків, 2005. – 526 с.
33. Селевко Г. К. Компетентности и их классификация / Г. К. Селевко // Народное образование. – 2004. – № 4. – С. 138–143.
34. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник / З. І. Слєпкань. – Київ: Вища школа, 2006. – 582 с.
35. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів / З. І. Слєпкань. – Київ: Вища школа, 2000. – 512 с.
36. Смирнова І. М. Геометрія : навчань. для 7-9 Кл. общеобразоват. установ / І. М. Смірнова, В. А. Смірнов. - М.: Освіта, 2001. – 271 с.
37. Шаригін І. Ф. Геометрія : навч. для 7-9 Кл. загаль. установ / І. Ф. Шаригін. – М.: Дрофа, 2002. – 368 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Кросворд для закріплення знань з теми «Чотирикутники»

По горизонталі:

1. Давньогрецький філософ.

3. Прямокутник, усі сторони якого рівні.

4. Паралелограм, усі кути якого прямі.

7. Добуток сусідніх сторін прямокутника.

10. Сторона прямокутного трикутника.

По вертикалі:

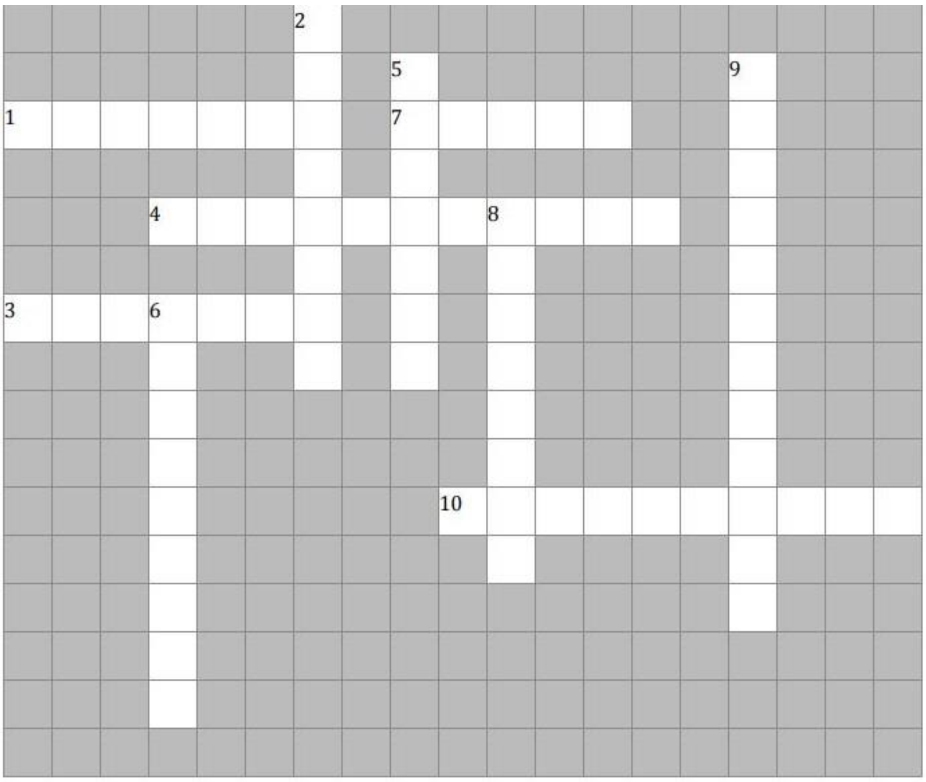
2. Сума довжин усіх сторін многокутника.

5. Чотирикутник, який лежить по один бік від будь-якої прямої, що містить його сторону.

6. Як називається відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника?

8. Чотирикутник, дві сторони якого паралельні, а дві інші не паралельні.

9. Фігура, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що їх послідовно сполучають.



Відповіді:

По горизонталі: 1. піфагор 3. квадрат 4. прямокутник 7. площа 10. гіпотенуза
По вертикалі: 2. периметр 5. опуклий 6. діагональ 8. трапеція 9. Чотирикутник

Додаток Б

Приклад **контрольної роботи** для учнів 8 класу з геометрії на тему: «Чотирикутник, його елементи. Паралелограм та його види».

ВАРІАНТ -1

1 (1 бал). Накресліть опуклий чотирикутник $CDFL$ та проведіть його діагоналі.

2 (1 бал). Знайдіть периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює 18 см.

3 (1 бал). Дано: $ABCD$ **—** ромб, $\angle ABD = 32°$. Знайдіть кути ромба.

4 (1 бал). Один із кутів паралелограма на $44°$ більший за інший. Знайдіть усі кути паралелограма.

5 (2 бали). У прямокутнику $ABCD$ кут ACB дорівнює $52°$. Знайдіть більший кут між діагоналями прямокутника.

6 (3 бали). Бісектриса кута паралелограма ділить одну з його сторін на відрізки 4 см і 9 см, рахуючи від кута, протилежного куту, з якого проведено бісектрису. Знайдіть периметр паралелограма.

7 (3 бали). У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута A проведено висоти AM і AN до сторін DC і BC відповідно. Знайдіть периметр ромба, якщо AM = 8 см, $\angle MAN = 30°$.

ВАРІАНТ -2

1 (1 бал). Накресліть опуклий чотирикутник $CMNF$ та проведіть його діагоналі.

2 (1бал). Знайдіть периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює 7 дм.

3 (1 бал). Дано: $ABCD$ **—** ромб, $\angle ADB = 70°$. Знайдіть кути ромба.

4 (1бал). Один із кутів паралелограма на $40°$ менший від іншого. Знайдіть усі кути паралелограма.

5 (2 бали). У прямокутнику $ABCD$ кут BDA дорівнює $47°$. Знайдіть менший кут між діагоналями прямокутника.

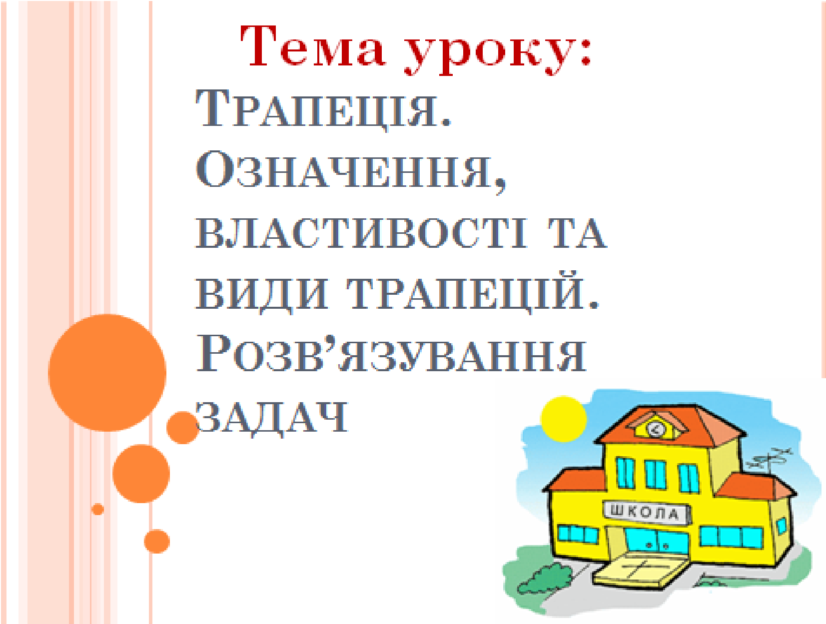
6 (3 бали). Бісектриса кута паралелограма ділить одну з його сторін на відрізки 8 см і 3 см, рахуючи від вершини, суміжної з кутом, з якого провели бісектрису.

Знайдіть периметр паралелограма.

7 (3 бали). У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута А проведено висоти AM і AN до сторін DC і BC відповідно. Знайдіть периметр ромба, якщо $\angle MAN = 60°$, $DM = 3$ м.

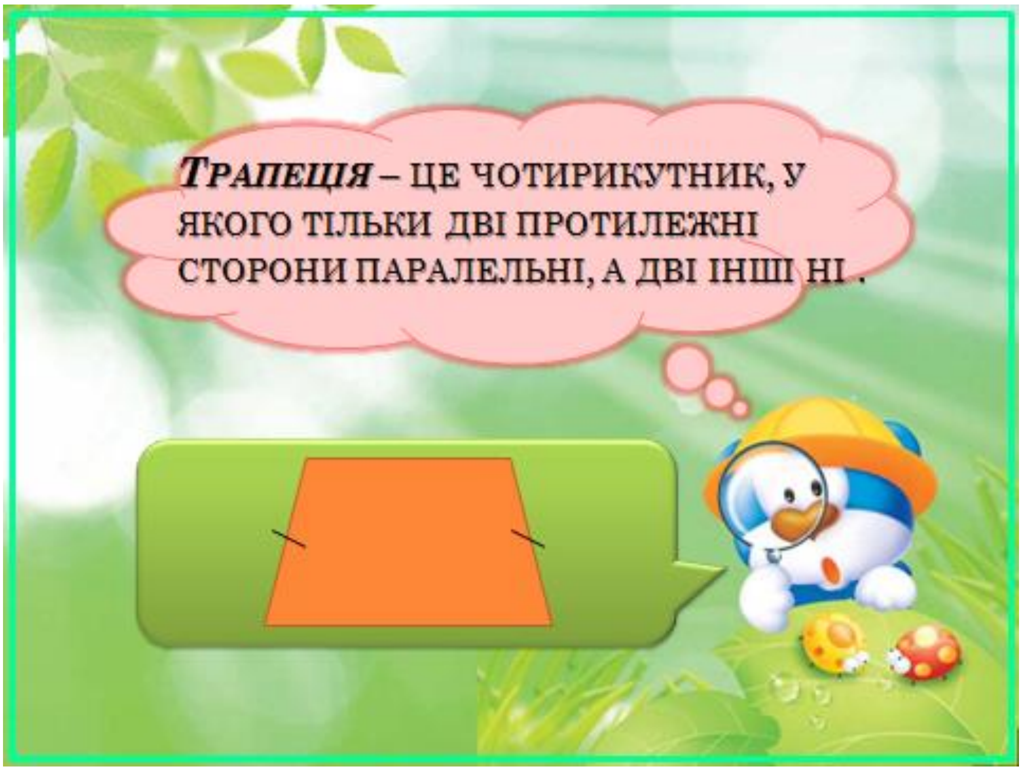
Додаток В

Розглянемо приклад презентації конспекту уроку геометрії для учнів 8-го класу на тему «Трапеція. Означення, властивості та види трапецій. Розв'язуання задач» як супроводу разом з усним поясненням теорії.



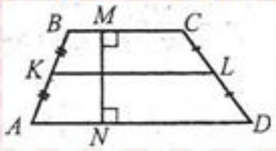
Повторення теоретичного матеріалу

- Чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні називають …..
- У паралелограма протилежні сторони….
- У паралелограма протилежні кути ….
- Перпендикуляр проведений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону, називається….
- Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює…
- Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться пополам, то цей чотирикутник називається….
- Прямокутником називається паралелограм, у якого ….
- В прямокутника діагоналі ….
- Якщо один з кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм називається….
- Паралелограм у якого всі сторони рівні називається….
- Діагоналі ромба….
- Прямокутник у якого всі сторони рівні називається ….
- Діагоналі в квадрата ….

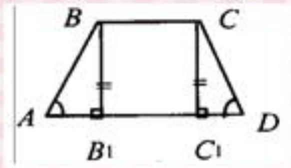


ВИДИ ТРАПЕЦІЇ:

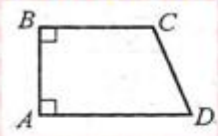
РІЗНОСТОРОННЯ



РІВНОБІЧНА

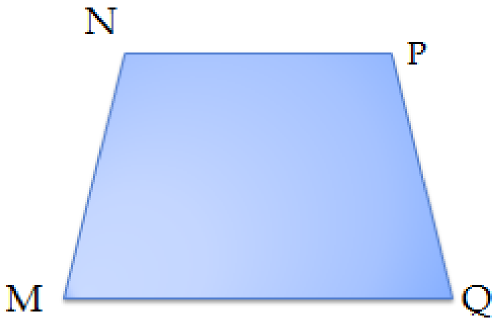


ПРЯМОКУТНА



Домашні задачі №1

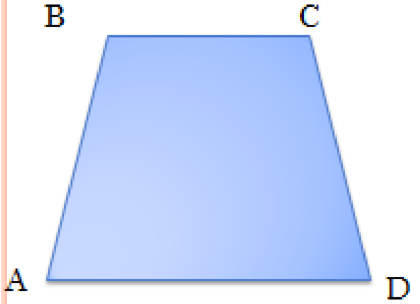
Знайти кути M і P трапеції MNPQ з основами MQ і NP, якщо кут N=109°, а кут Q=37°



Відповідь : $\angle M = 71^\circ$,
$\angle P = 143^\circ$.

Домашні задачі №2

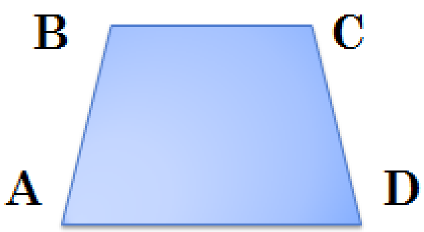
Один з кутів рівнобедреної трапеції дорівнює 115°. Знайти інші кути трапеції.



Відповідь: 115°, 65°,65°

Домашні задачі №3

Знайти периметр рівнобедреної трапеції ABCD, якщо BC=10см, AD=22см, а кут D=60°.



Відповідь : 56 см.

Встановити відповідність:

1.Рівнобічна трапеція-це трапеція, у якої	А. тільки одна пара сторін паралельні
2. Трапеція-це чотирикутник, у якого	Б. бічна сторона перпендикулярна основі
3. Прямокутна трапеція – це трапеція, у якої	В. дорівнюють 180°
4. Діагоналі рівнобічної трапеції	Г. бічні сторони рівні
5. Сума кутів трапеції при бічній стороні	Д. рівні

Перевіримо відповідь

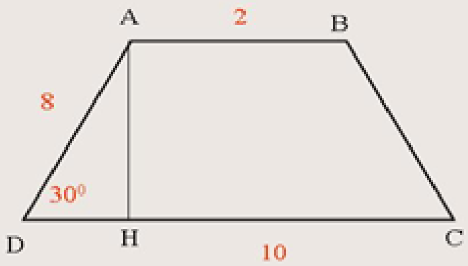
	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2	X				
3		X			
4					X
5			X		

Слово трапеція походить від грецького слова "столик" (від того ж кореня походить і слово "трапеза").

Трапеція зустрічається і в щоденномужитті, наприклад: в одязі, в архітектурі і т.д., але ми не надаємо цьому значення.

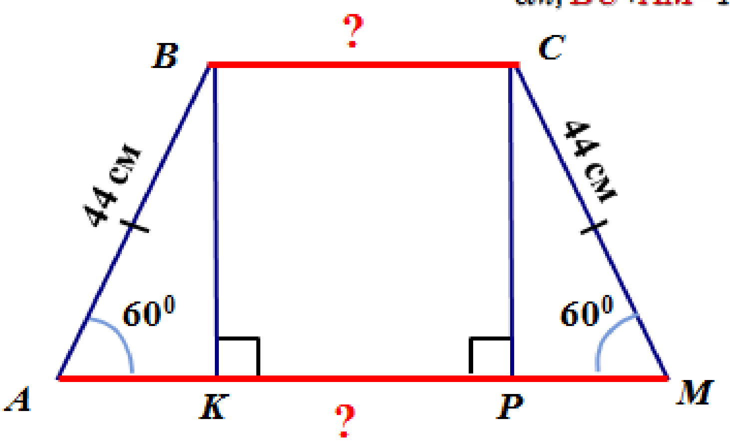
ABCD-ТРАПЕЦІЯ
ЗНАЙТИ ВИСОТУ ТРАПЕЦІЇ

Задача



Задача:

***Дано:** ABCM – рівнобічна трапеція; AB=CM=44 см; BC+AM=124 см.*



***Знайти:** BC, AM*

Модельєри

Спідничка має форму рівнобічної трапеції, один з кутів дорівнює 60^0, бічна сторона дорівнює 44 см, а сума основ дорівнює 124 см. Знайти напівокіл талії (НОТ) спідниці (меншу основу трапеції).

Яке твердження є вірним?

А) Діагоналі прямокутника перпендикулярні;

Б) Діагоналі трапеції завжди рівні;

В) Діагоналі прямокутника рівні;

Г) Діагоналі прямокутника є бісектрисами його кутів.

Правильна відповідь:

В

Яке твердження є не вірним?

А) Ромб — це паралелограм, у якого сторони рівні;

Б) Діагоналі ромба перпендикулярні;

В) Трапеція — це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні;

Г) Діагоналі прямокутника рівні.

Правильна відповідь:

В

Підсумки уроку

Якої помилки припустилися в зображенні трапеції на рис. 2?

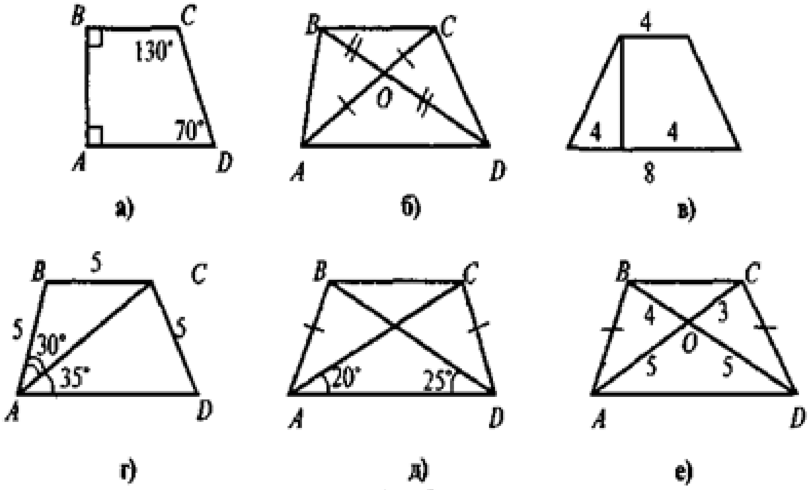


Рис. 2

Домашнє завдання

- **Вивчити зміст означень, теорем та їх доведення. Розв'язати задачі.**
- **Знайдіть кути прямокутної трапеції, якщо відношення найбільшого і найменшого з них дорівнює 3 : 2.**
- **Діагональ рівнобедреної трапеції є бісектрисою її тупого кута. Знай-діть периметр трапеції, якщо її основи дорівнюють 5 см і 10 см.**
- **Повторити властивість катета, що лежить проти кута 30°.**