Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:

Методика розв'язування текстових задач в курсі алгебри середньої школи

Виконав: студент IV курсу,
групи МЕІ-41
спеціальності 014
Середня освіта (Математика та інформатика)
Кречко Максим Іванович

Керівник: кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики з методикою викладання Генсіцька-Антонюк Н. О.

Рецензент:

Рівне – 2021 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність. Сучасна освіта ставить перед учнями та вчителями нові вимоги до вмінь. Одним із завдань є практична спрямованість навчального матеріалу. Останні дослідження показали, що учні мають достатні теоретичні знання, але в той же час не вміють застосовувати їх на практиці. Задачі сприяють розвитку логічного мислення учнів та практичного застосування математичних знань. Зокрема, у Пояснювальній записці до програми з математики для початкової школи (2012) наголошується на «особливо значущій ролі» змістової ліній «Сюжетні задачі»: «Сюжетні задачі постають важливим засобом ілюстрації і конкретизації навчального матеріалу; розвитку пізнавальних процесів, оволодіння прийомами розумової діяльності; виховання вольових якостей, естетичних почуттів; розвитку вміння будувати судження, робити висновки; формування в учнів мотивації їхньої навчальної діяльності, інтересу та здатності до цієї діяльності. Сюжетні задачі, особливо практично зорієнтовані, забезпечують зв'язок математики із реальним життям дитини …» [43, с. 141]. Як показує практика, в більшості, учні не вміють розвязувати текстові задачі, не вміють її математично змоделювати. Текстові задачі пронизують весь курс математики з першого по девятий клас і є невідємною частиною завдань державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання. Таким чином, одним із найважливіших завдань є вдосконалення навиків та вмінь розв'язування текстових задач. Різні аспекти способу самостійного складання учнями математичних задач детально досліджували такі видатні вчені як: Л. М. Фрідман, Б. П. Ерднієв, П. М. Ерднієв, Є. С. Канін, Ю. М. Колягін, та ін. У педагогічній практиці такий спосіб також досить активно використовувався на протязі багатьох років. Таким чином, розв'язування будь-якої текстової задачі поліфункціональне, але в певній задачі вчитель має виділяти провідну функцію і за належної цільової установки вимагати її реалізації впершу чергу. Останнім часом на першочергово методисти висувають функцію формування умінь розв’язування будь-яких текстових задач (В. В. Малихіна, Н. Б. Істоміна, Л. М. Фрідман, І. Б. Нефьодова, С. М. Лук’янова, С. Є. Царьова). Формування навиків розв’язувати задачі розуміється вченими, як формування загального уміння та окремих навиків розв’язувати задачі різних видів.

Актуальність зазначеної проблематики, її значущості дала змогу обрати тему бакалаврського дослідження – «Методика розв'язування текстових задач в курсі алгебри середньої школи».

Мета дослідження полягає у здійсненні комплексної характеристики видів текстових задач та аналізі методики їх розвязування.

Для досягнення мети були поставленні наступні завдання:

1. Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з теми дослідження;
2. Виділити та охарактеризувати види задач та методи їх розв’язування;
3. Визначити методичні основи навчання учнів алгебраїчному методу розв’язування текстових задач;
4. Дослідити вміння учнів розв’язувати текстові задачі.

Основні методи дослідження: теоретичний аналіз та синтез, спостереження за освітнім процесом у середній школі, бесіди з вчителями та учнями, описовий метод.

Практичне значення роботи: узагальненні та систематизовані матеріали, можуть бути використані студентами та викладачами в освітній діяльності.

Основні положення та висновки були представленні на засіданні кафедри математики з методикою викладання та звітній науково-практичній конференції РДГУ.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, 2 розділів, списку використаних джерел (43 найменувань) та додатків. Загальний обсяг роботи складається із 69 сторінок.

РОЗДІЛ 1
КАТЕГОРІЙНО-ПОНЯТТЄВИЙ АПАРАТ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Поняття, «сюжетна (текстова) задача» та її функції

Роль математики в структурі змісту загальної середньої освіти полягає в тому, що вона є опорним навчальним предметом, що забезпечує якісне вивчення дисциплін природничо-наукового циклу, дозволяє розвивати логічне та образне мислення учнів, що є одним із важливих завдань гуманізації освіти. Математика – один з елементів загальнолюдської культури. Її ідеї та методи впливають на методологію наукового пізнання дійсності. Завершеність, витонченість математичних формулювань, переконлива сила доказів сприяє естетичному вихованню учнів [1]. Предметна компетенція, що купується в процесі вивчення математики як навчального предмета і характеризує певний рівень володіння математикою, включає наступні види компетенцій: інформаційну, навчальну, пізнавальну, дослідницьку, комунікативну, соціокультурну, а також і професійну, якщо математика використовується як засіб професійної діяльності. Здатність знайти дані, виокремлювати математичні функції, створювати математичну модель ситуації, аналізувати та перетворювати її, інтерпретувати отримані результати, іншими словами, математична компетенція учня сприяє адекватному застосуванню математики для вирішення що з'являється в повсякденному житті проблем.

Найважливішим видом навчальної діяльності, у процесі якої засвоюється школярами математична теорія, розвиваються їх творчі здібності, самостійність мислення є розв'язування задач. Тому ключові компетенції на уроках математики формуються через формулювання і вирішення різних завдань [2]. Для формування інформаційної компетенції використовуються завдання містять інформацію, представлену в різній формі (таблицях, діаграмах, графіках тощо). Запитання задачі формулюється сліду таким чином: переведіть в графічну (словесну) форму; опишіть математичною формулою; зробіть висновок та ін. Для формування комунікативної компетенції використовується групова форма організації пізнавальної діяльності учнів на уроках.

Учні діляться на кілька груп, кожна група повинна вирішити задачу запропонованим способом і довести правильність свого вирішення рештою груп. Для формування дослідницької компетенції учням пропонуються завдання, в яких необхідно досліджувати всі можливі варіанти вирішення задачі та зробити певний висновок. Соціокультурні компетенції формуються з допомогою задач, в яких необхідно проаналізувати запропоновану ситуацію, поставити мету, спланувати результат, розробити алгоритм вирішення задачі, проаналізувати результат. Для формування готовності до самоосвіти учням пропонується самостійно вивчити деякий теоретичний матеріал, скласти задачу. Формування предметних компетенцій за допомогою вирішення завдань дозволяє реалізувати компетентний підхід на уроках математики як засіб підвищення математичної грамотності учнів.

Зрозуміло, що з простої суми знань і умінь «скласти» компетентного учня не вдасться. Стати компетентним він може тільки сам, знайшовши і спробувавши різні моделі поведінки в даній предметній області, вибравши з них ті, які в найкращій мірі відповідають його стилю, домаганням, естетичному смаку і моральним орієнтаціям. Дуже важливо, щоб він вмів поставити мету щодо об'єкта, висловити свої відчуття, почуття, свою точку зору, тобто розкрити певний набір особистісних якостей [3]. Сам же процес формування предметної компетенції передбачає, що учень хоче і готовий вчитися, а педагог знає, як йому в цьому допомогти.

Зміст завдань повинен бути пов’язаний із звичними розділами або темами, що складають основу програм навчання в більшості країн світу.

Завдання мають містити питання різних типів:

- з вибором відповіді;

- з короткою відповіддю (у вигляді числа, виразу, формули, слова тощо);

- з розгорнутою відповіддю.

Виділення рівнів ґрунтується на рівні математичної підготовки учнів.

Перший рівень (рівень відтворення) включає відтворення математичних фактів, методів та виконання обчислень.

Другий рівень (рівень встановлення зв'язків) включає встановлення зв'язків та інтеграцію матеріалу з різних математичних тем, необхідних для розв'язування поставленого завдання.

Третій рівень (рівень міркування) – математичні міркування, які потребують узагальнення та інтуїції, роздумів і творчості у виборі математичного інструментарію, інтегрування знань з різних розділів курсу математики, самостійна розробка алгоритму дій.

У сучасних підручниках є невелика кількість компетентних завдань (в основному це завдання першого рівня), але на базі наявних завдань можна розробити свої завдання, які сприятимуть формуванню ключових компетентностей в учнів [4;5].

Важливими відмінними ознаками компетентнісних завдань від стандартних математичних (предметних, міжпредметних, практичних) є: особистісна значущість (пізнавальна, загальнокультурна, соціальна) отриманого результату, що забезпечує мотивацію учня; умова задачі сформульована як сюжет, ситуація або проблема, для розв'язання якої потрібно використовувати знання (з різних змістовних ліній освітньої галузі «Математика», з інших освітніх галузей або з життєвого досвіду), на які немає явної вказівки в тексті завдання; інформація та дані в задачі можуть бути представлені в різній формі (малюнок, таблиця, схема, діаграма, графік тощо), які потребують розпізнавання математичних об'єктів і відношень між ними; вказівку (пряму або опосередковану) на область застосування отриманого результату.

В Україні розроблені підручники, методичні та навчальні посібники, мета яких реалізація компетентнісного підходу в початковій школі. Підручник [5] створено відповідно до програми, розробленої авторським колективом під керівництвом О.Я. Савченко. Зміст, презентований у підручнику, розрахований на 4 год вивчення математики в тиждень. Підручник побудований за класичними традиціями, які перевірені багаторічною практикою: зміст подано поурочно, пропонований матеріал забезпечує весь процес засвоєння змісту, передбачено систематичне повторення вивченого. Ознайомлення із новим змістом відбувається через систему доцільних завдань, які супроводжуються коментарями ігрових персонажів. У цих коментарях повідомляються правила, демонструються зразки міркування тощо. Сюжети завдань підібрано із врахуванням інтересів сучасних дітей, що сприятиме зацікавленості у вивченні математики, підвищить рівень їх навчальних досягнень. У посібниках [6, 4] міститься система завдань, спрямована на формування та перевірку в молодших школярів ключових і предметних компетентностей, визначених нормативними документами.

Компетентнісно орієнтовані завдання, які містяться у підручнику та посібниках, відповідають вищезазначеним вимогам. Для багатьох з них характерна нестандартна структура (наявність надлишкових, відсутніх або суперечливих даних в умові завдання, що призводить до об'ємного формулювання його умови), можливість вирішення декількома способами (різний ступінь раціональності), при цьому інші способи можуть бути невідомі учням і їх потрібно сконструювати. Всі завдання містять числові дані, які відповідають дійсності, наприклад, ціни на товари, маса предметів, вимірювання географічних об'єктів, споруд, спортивні досягнення і тощо. При цьому особлива увага приділяється позитивній педагогічній спрямованості змісту завдань, зокрема, спрямованість на виховання патріота і громадянина (історичні події нашої країни, рекорди українських спортсменів тощо), спрямованість на виховання моральності або на прищеплення етичних норм, спрямованість на розвиток мислення і мовлення.

У шкільній практиці під задачею в широкому сенсі розуміють не тільки текстову, сюжетну задачу, а й будь-яку вправу чи приклад. Під сюжетною задачею розуміють математичну задачу, в якій описаний життєвий сюжет, а саме кількісний бік реальних процесів, явищ та ситуацій і міститься вимога знайти шукану величину за даними задачі величинами та зв’язками між ними.

В дидактиці та методиці навчання математики задача розглядається як ситуація зовнішньої діяльності, яка пропонується окремо від суб'єкта діяльності. Узагальнюючи що існує означення, можна виділити наступні, які найкраще розкриватимуть сутність понять: «Задача — це вимога виконати що-небудь, або запитання, рівнозначне такій вимозі. Математична задача — будь-яка вимога обчислити, побудувати або довести що-небудь методами математики» [7]. «Текстова задача — зображення ситуації, близької до життєвої, практичної, в якій описується кількісний аспект реального явища чи події та міститься вимога знайти невідоме значення певної величини».

У методиці навчання математики під математичною задачею розуміють будь-яку вимогу обчислити, побудувати довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм чи кількісних співвідношень, або запитання, рівносильне такій вимозі [8]. У структурі задачі виділяють: умову й вимогу. Те, що дано в задачі називається її умовою, а те, що потрібно знайти – вимогою. Виконати сформульовану в задачі вимогу – це й означає розв'язати її [8]. Опис процесу розв'язування у вигляді послідовності всіх міркувань, який часто подається у символічній формі, називають розв'язанням задачі. Розв'язання кожної задачі повинно бути безпомилковим, обґрунтованим, повним та раціональним. Розв'язок – це остаточний результат процесу розв'язування задачі. Метод розв'язування задачі – це сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій і операцій, за допомогою яких розв'язується великий клас задач.

1.2 Структура та класифікація текстових задач

Відповідно до підходу У. Рейтмана, сутність задачі розкривається через визначення структури текстової задачі. У структурі будь-якої задачі маємо можливість виділити умову тобто (твердження) і вимогу (запитання), або шукані величини та дані. В умові сюжетної задачі є частина тексту, в якій задана ситуація (подія, явище або процес), числові значення величин, що характеризують кількісну сторону задачі та вказано залежність між цими значеннями.

В стандартному формулюванні умова грунтується на одному або декількох твердженнях які приймаються за істині, в них вказуються характеристики та відношення між об'єктами. В умові, може міститься один чи кілька об'єктів. Об'єктом задачі може бути: предмет, явище, подія або процес. Якщо умова задачі містить один об'єкт, то в ній описується ситуація, що трапилися з цим об'єктом, числове значення, що характеризує дану ситуацію може бути як відомим так і невідомим; якщо ж в умові міститься два і більше об'єктів, то в ній вказується відношення між цими об'єктами – воно може бути відоме або невідоме. Своєрідністю опису об'єкта в задачі, за Л. М. Фрідманом [38], виявляється в тому, що описуються не всі його властивості, а лише кількісний бік об'єкта. При чому будь-яка текстова задача представляє собою словесний опис одного або декількох фіксованих випадків або епізодів якого-небудь явища, процесу або події. Роз'язати задачу, означає знайти невідомий компонент.

Вимога – це частина тексту, в якій вказується шукана величина (число або множина). Вимога задач може бути сформульована у формі наказового або питального речення. В залежності від способів поєднання та формулювання умови та вимоги задачі визначають канонічне і неканонічне формулювання задачі. В умові задачі містяться дані задачі, а запитання задачі вказує на шукане. Дані задачі– це, як правило, числові компоненти тексту задачі. Вони характеризують: числові характеристики множин, значення величин та числові характеристики відношень між ними. Числові характеристики величин та числові характеристики множин звичайно задані числами, а числові характеристики відношень між ними можуть бути позначені словесно. Знаходження шуканого в числовому вигляді звичайно є кінцевою метою розв'язання текстової задачі. Математичним змістом текстових задач, є не самі по собі явища, а ті їх сторони, в яких виражена їх кількісна характеристика. Цей бік об'єкта задачі виявляється у заданні (в умові задачі) тих чи інших величин і їх значень – відомих і невідомих. Числовий бік випадку (епізоду) характеризується однією або трьома взаємопов'язаними величинами, із яких одна являється величиною відношення двох інших. Л. М. Фрідман докладно вивчав питання про задання в задачах величин та їх значень [43].

Математична текстова задача займає центральне місце у програмах із математики, які використовуються в закладах освіти. Оскільки вона передбачає застосування отриманих на уроках математики знань у різноманітних життєвих ситуаціях, здійснення реалізації міжпредметних зв'язків тощо. Часто замість терміна «текстова математична задача» використовують термін «сюжетна задача». Він означає математичну задачу, а саме яка описує певний життєвий сюжет, кількісний бік реальних процесів, та ситуацій і міститься вимога знайти шукану величину за даними в задачі величинами та зв'язками між ними. Вони виступають як дидактичний засіб не тільки навчання, розвитку учнів, а й виховання [9]. А одним з основних компонентів виховного аспекту уроку є розумове виховання. Таким чином, зазвичай розрізняють чотири основні функції текстових задач. Наведемо їх опис у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Основні функції текстових задач

Функція	Опис
Навчальна	Формування у учнів системи математичних знань, навичок і умінь на різних етапах навчання
Розвивальна	Розвиток мислення школярів, формування в них розумових дій і прийомів розумової діяльності, просторових уявлень, алгоритмічного мислення тощо
Виховна	Формування в учнів наукового світогляду, сприяє економічному, екологічному й естетичному

	вихованню, розвиває пізнанвальний інтерес, позитивні риси особистості
Контрольна	Встановлення навчальності, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом загалом

Реалізація кожної із наведених функцій неможлива ізольовано від усіх інших, але для кожної конкретної задачі вчитель має виділити функцію, яка відіграватиме роль основної, та намагатися преш за все реалізувати її. У багатьох роботах науковців [10; 11; 12] зазначено, що задачі мають не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явища, що вивчаються. На сьогодні існують різні підходи до класифікацій текстових задач. Перш за все, шкільні задачі різняться за характером своїх об'єктів: 9 – практичні (реальні) — хоча б один об'єкт є реальним предметом; – математичні.

За Слєпкань З.І. в залежності від вимоги, поставленої в задачі, виділяються задачі на обчислення, доведення, побудову і дослідження [13]. В задачах на обчислення передбачається знаходження числа (або множини чисел) за числами та умовами, що задані та пов'язують їх із невідомими величинами. До них відносять різноманітні приклади та текстові задачі. Задачі на доведення передбачають доведення деякого сформульоване в умові твердження. До задач на побудову відносяться геометричні задачі, в яких вимагається побудувати яку-небудь фігуру, що задовольняє умову задачі, а також завдання, якими передбачена побудова перерізів багатогранників та інших стереометричних тіл, діаграм, графіків функцій [14].

Як зазначає у своєму дослідженні Шаповал І., для кожного виду текстових задач можна сформулювати узагальнені підходи до процесу розв'язування. Задачі на планування і сумісну роботу посідають значне місце у дослідженнях методистів. До основних компонентів текстових задач зазначеного типу відносяться:

– робота, що виконується в задачі (A);

– час, який потрібний на виконання зазначеної роботи (t);

– продуктивність праці (S), яка визначає роботу, яку можливо виконувати за одиницю часу.

Можливо виділити декілька різних типів задач на спільну роботу та планування. До задач на спільну роботу відносять задачі, в яких необхідно: – обчислити невідомий час виконання роботи; – знайти шлях, який пройшли тіла, які рухаються. В цьому випадку його розглядають як спільну роботу. Задачі на планування поділяють на задачі, які передбачають: – визначення обсягу виконуваної роботи; – знаходження продуктивності праці; – знаходження часу, який був витрачений на виконання запланованого обсягу роботи; – використання кількість працівників, що працюють над роботою, в умові замість часу, потрібного на виконання роботи [16]. Лев А. Я. [15] пропонує ділити текстові задачі на такі типи: – задачі на спільну роботу.

Отже, текстова задача – це опис на звичайній мові деякої ситуації, в якій потрібно надати кількісну характеристику якої-небудь компоненти цієї ситуації, встановити наявність чи відсутність певного співвідношення між її компонентами чи визначити вид цього співвідношення [17]. На основі аналізу математичної та методичної літератури, можна узагальнити:

Текстові задачі мають досить велике значення. З давніх пір задачі відіграють велику роль у навчанні. Розв’язування задач виступає як мета, і як засіб навчання. Уміння ставити і виконувати задачі є одним з основних показників рівня розвитку учнів, відкриває їм шлях опанування новими знаннями: знайомить з новою ситуацією, описаної для розв’язування задачі і т.д. Іншими словами, при виконанні текстових задач людина набуває математичні знання, підвищує свою математичну освіту. При опануванні методу розв’язування певного класу задач у людини формується вміння виконувати такі завдання, а при достатньому тренуванні – і уміння, що теж підвищує рівень математичної освіти [1].

Сьогодні, не зважаючи на те, що за час навчання в школі кожен учень розв'язує значну кількість текстових задач, результати вступних іспитів до вищих закладів освіти свідчать, що розв'язування текстових задач залишається одним з найважчих завдань. Тому методисти та математики (Г.В. Дорофєєв, С.М. Нікольський, З.І. Слєпкань, О.В. Шевкін та інші) прийшли до думки, що основними причинами несформованості в учнів умінь розв'язувати задачі є: 1) низький рівень знань про структуру задач, їх типи, методи і способи розв'язування, які учні одержують під час навчання математики як у початковій, так і в основній школі; 2) недостатня увага в курсі математики основної школи до використання арифметичних способів під час розв'язування задач; 3) передчасний перехід до методу рівнянь [2].

РОЗДІЛ 2
ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

Однією з найважливіших проблем шкільної математичної освіти є навчання учнів методам і способам розв'язування задач, самостійного пошуку розв'язку задач. Методи та способи розв'язування задач визначаються характером самих задач і тими знаннями та допоміжними засобами, якими учні володіють на певному етапі навчання.

У чинній програмі з математики для закладів середньої освіти України приділяється належна увага формуванню вмінь здобувачів освіти розв'язувати текстові задачі. Більш детально розглянемо місце текстових задач у найпопулярніших підручниках, які використовуються при викладанні математики в 5-9 класах.

Аналіз виконується на основі переліку підручників для 5-9 класів, рекомендованих Міністерством освіти та науки України станом на 2019 рік.

5-6 класи:

Математика. 5 клас. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.

Математика. 5 клас. Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Бочко О.П., Коломієць О.М., Сердюк З.О.

Математика 5 клас. Істер О.С.

Математика 6 клас. Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М.

Математика 6 клас. Істер О.С.

Математика 6 клас. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.

Проаналізувавши зазначені підручники, можна стверджувати, що текстові задачі зустрічаються у кожному розділі, розв'язування таких задач супроводжує вивчення всіх тем, передбачених програмою.

7 клас:

Алгебра 7. Істер О.С.

У цьому підручнику учні зустрічаються з текстовими задачами вже у §1 «Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу» розділу 1 «Цілі вирази». Особлива увага розв'язуванню текстових задач приділяється при вивченні теми «Лінійні рівняння як математичні моделі текстових задач» розділу «Лінійні рівняння та їх системи».

Алгебра 7. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.

Текстові задачі зустрічаються в темах «Лінійне рівняння з однією змінною», «Цілі вирази», «Функції», «Системи лінійних рівнянь з двома змінними».

8 клас:

Алгебра: підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Істер О.С. [та Алгебра 8. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.

Текстові задачі зустрічаються в темах «Раціональні вирази», «Квадратні корені. Дійсні числа», «Квадратні рівняння».

9 клас:

Алгебра 9. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. та Алгебра 9. Істер О.С.

Текстові задачі зустрічаються в темах «Нерівності», «Квадратична функція», «Числові послідовності», «Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики».

Особливу увагу на розв'язування текстових задач звертають при підготовці до перевірки (контролю) відповідності результатів навчання учнів вимогам державних стандартів загальної середньої освіти (на відповідному рівні освіти) у формі державної підсумкової атестації (ДПА).

Відповідно за затверджених Міністерством освіти та науки України вимог до змісту атестаційних завдань, текстова задача, що розв'язується за допомогою рівняння або системи рівнянь є невід'ємною складовою завдань ДПА 3 і 4 рівнів.

До прикладу розглянемо наступні збірники:

Збірник ДПА 2018 з математики. 9 клас. Істер О.С.

Збірник завдань для атестаційних письмових робіт з математики у 2019 році. 9 клас. Істер О.С.

Зі складу 3 частини кожного варіанту цих збірників входять: текстова задача, що розв'язується за допомогою рівняння або системи рівнянь, система рівнянь, текстова планіметрична задача.

Збірник завдань Математика 9 клас Мерзляк А.Г. Державна підсумкова атестація 2017.

У складі 3 частини кожного варіанту цього збірника: текстова задача, що розв'язується за допомогою рівняння або системи рівнянь, 2 завдання на дослідження функції, текстова планіметрична задача.

Підсумкові контрольні роботи Математика 9 клас, Березняк М.В. У посібнику подано підсумкові контрольні роботи для підготовки до державної підсумкової атестації з математики. Посібник вміщує 30 варіантів завдань [2].

Збірник завдань з математики для підготовки до державної підсумкової атестації в 9 класі. В.Г. Бевз, Д.В. Васильєва [1].

Зі складу 3 частини кожного варіанту цих збірників входять 4 завдання: текстова задача, що розв'язується складанням рівняння або системи рівнянь, система рівнянь / нерівність, спрощення виразу, текстова планіметрична задача.

Проведений аналіз дозволяє переконатися в тому, що текстові задачі надійно інтегровані в усі теми курсу шкільної математики з 5 по 9 класи.

Формат завдань державної підсумкової атестації наприкінці курсу основної школи (9 клас) передбачає наявність в них текстових задач різних типів. Зокрема, для виконання завдань достатнього та високого рівнів (3 та 4 рівні) учень має продемонструвати вміння працювати з текстовими задачами, виконувати їх аналіз та знаходити розв'язок.

Аналіз завдань достатнього та високого рівнів зі збірників для ДПА показав, що допускається певна варіативність у кількості завдань та їх тематичній спрямованості: розв'язати систему рівнянь чи виконати 2 завдання на дослідження функції, або ж спростити вираз. Однак текстова задача, котру розв’язують рівнянням або системою рівнянь, а також текстова планіметрична задача — це обов’язкові компоненти перевірки знань наприкінці курсу математики основної школи загальноосвітніх навчальних закладів.

2.1 Задачі на рух

Завдання 1. Дві черепахи виповзають назустріч один одному зі своїх нір. Якби перша повзла на 40 м / ч швидше, то вони б зустрілися на півдорозі, якби друга повзла на 50 м / ч швидше, вона б проповзла в два рази більшу відстань до зустрічі, ніж перша. Знайдіть швидкості черепах.

Розвязання:

Нехай швидкість руху першої черепахи м / ч, а другий - м / ч. Якби перша повзла на 40 м / ч швидше, то через скільки годин вони б зустрілися на півдорозі.

Отримуємо: або

Якби друга повзла на 50м / ч швидше, то вона проповзла б до годин в два рази більшу відстань, ніж перша. Отримуємо або

Складемо систему з двох рівнянь:

Отже, швидкість першої черепахи дорівнює 90 м / ч, а швидкість другої черепахи дорівнює 130 м / год.

Відповідь: швидкість першої черепахи - 90 м / ч, а швидкість другий - 130 м / год.

Задача 2. Моторний човен та яхта, знаходячись на озері на відстані 30 км один від одного, рухаються назустріч один одному і зустрічаються через одну годину. Якби моторний човен знаходився на відстані 20 км від яхти і доганяв її, то на це знадобилось би 3 год. 20 хв. Знайти швидкості моторного човна та яхти.

Розв’язання:

Нехай x км/год – швидкість човна, y км/год – швидкість яхти. Тоді швидкість зближення човна і яхти при русі назустріч дорівнює $x+y$, а час до зустрічі - $\frac{30}{x+y}$, що за умовою складає 1 год. Якби човен доганяв яхту, то швидкість зближення була б $x-y$. А час до зустрічі $\frac{20}{x-y}$ або $\frac{10}{3}$ год.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{30}{x+y} = 1 \\ \frac{20}{x-y} = \frac{10}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 30 \\ x-y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 18 \\ y = 12 \end{cases}$$

Відповідь: швидкість човна 18 км/год, швидкість яхти 12 км/год

Задача 3. На Рис. 2.3 зображена ділянка дороги, обладнана чотирма світлофорами та показана Рис. 5 діаграма періодичності зміни їх сигналів. З якою швидкістю має рухатися автомобіль на окремих ділянках дороги, щоб проїхати без зупинок (спіймати так звану “зелену хвилю”). Яка середня швидкість руху автомобіля на цьому шляху?

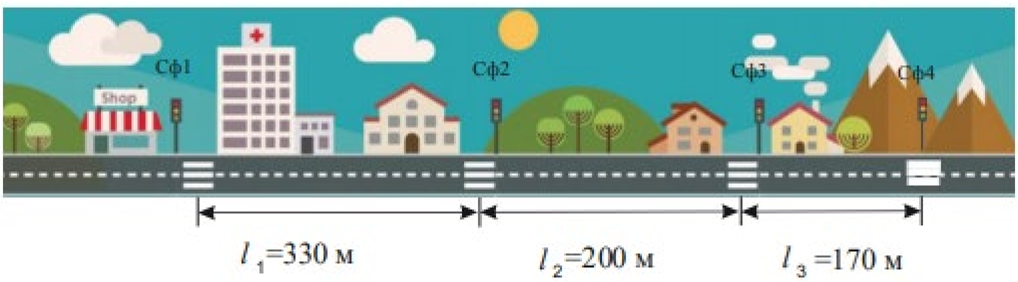
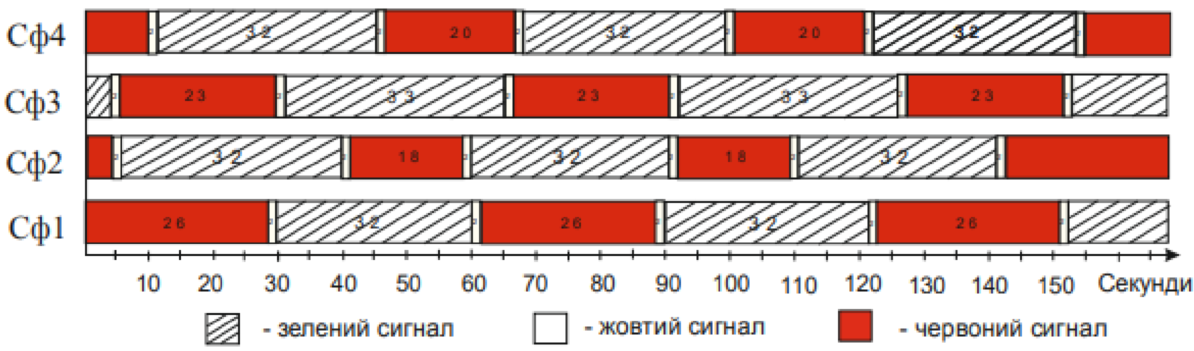


Рисунок 2.3. Графічна схема (модель) руху транспортних засобів.



У даній задачі вважатимемо рух автомобіля на кожній ділянці рівномірним. Тому для розрахунку його швидкості, якщо він піймав “зелену хвилю”, тобто, їхав на кожній ділянці на зелене світло, скористаємося формулою $S = vt$ (математичною моделлю рівномірного руху). Звідки, $v = \frac{s}{t}$.

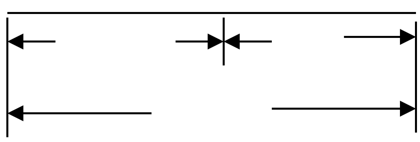
Задача 4. Юнак пішов до залізничної станції, до якої було10.5 кілометрів. Через пів години слідом за ним вийшов його брат, який, ідучи зі швидкістю 4 кілометри за годину, наздогнав юнака і повернувся з попередньою швидкістю. З якою швидкістю йшов юнак, якщо відомо, що весь час він ішов рівномірно, а його брат повернувся додому в той момент, коли юнак підійшов до станції?

Розв’язання:

Нехай зустріч відбулася за x (км) від будинку, а швидкість юнака y (км/год)

Будинок P Станція

x



10.5-x

10.5

	Після зустрічі			Весь шлях		
	S, км.	V, км./ год.	t, год.	S, км.	V, км./ год.	t, год.
Юнак	$10.5 - x$	y	$\frac{10.5 - x}{y}$	10.5	У	$\frac{10.5}{y}$
Брат	x	4	$\frac{x}{4}$	2x	4	$\frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$

Рівняння	$\frac{10.5-x}{y}=\frac{x}{4}$	$\frac{10.5}{y}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ оскільки брат вийшов на 30 хв. пізніше.

Отже маємо систему

$$\begin{cases} 42-4x=xy \\ \frac{21}{y}=x+1 \end{cases}$$

$$x=\frac{21}{y}-1;$$

$$\left(\frac{21}{y}-1\right)(y+4)=42;$$

$$y^2+25y-84=0$$

Враховуючи $y>0$, дістанемо y=3.

Задача 5. Із пункту А вийшов моторний човен вгору по Дніпру, а з пункту В одночасно вийшов пліт за течією через а (год.) вони зустрілися і далі рухалися без зупинок. Дійшовши до пункту В, човен, не затримуючись, повернув назад і наздогнав пліт у пункті А . Власна швидкість човна була весь час сталою. Скільки часу перебували у плаванні пліт і човен?

Розв’язання:

Нехай x (км/год) - власна швидкість човна; y (км/год.) - швидкість течії (а отже і швидкість плоту за течією), S (км/год)відстань між А і В. До моменту зустрічі пліт пройшов ay (км), а човен, рухаючись проти течії зі швидкістю $a(x-y)$ (км/год), пройшов а $(x-y)$ (км).

За умовою $ay + a(x - y) = S, ax = S$. Увесь шлях пліт пройшов за час $t = \frac{S}{y} = \frac{ax}{y}$. Цей час і треба знайти. Човен на шлях від В до А витратив $t_1 = \frac{S}{x - y}(год.)$, а на шлях від А до В витратив $t_2 = \frac{S}{x + y}(год.)$. За умовою $t = t_1 + t_2$. Тоді $\frac{S}{y} = \frac{S}{x+y} + \frac{S}{x+y}$; $\frac{1}{y} = \frac{2x}{x^2 - y^2}$; $x^2 - y^2 = 2xy$, тоді $x^2 - 2xy - y^2 = 0$. Для розв'язання задачі треба знайти величину $\frac{x}{y}$. Тому поділимо ліву і праву частину останнього рівняння на $y^2 \neq 0$. Маємо $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2 * \frac{x}{y} - 1 = 0$. Розв'язуємо як квадратне рівняння відносно $\frac{x}{y}$>0, дістанемо $\frac{x}{y} = 1 + \sqrt{2}$. Тоді $t = a * \frac{x}{y} = a\left(1 + \sqrt{2}\right)$ (год.).

Відповідь: $a\left(1 + \sqrt{2}\right)$ (год.)

2.2 Задачі на змішування

Спосіб розв'язування задач пов'язаних з приготуванням розчинів та сплавів з певною масовою часткою розчиненої речовини або металу, зі знаходженням складу сплавів та газових суміші використовуючи правило, яке назвав «коромисло Івашини». Для цього розв'яжемо декілька задач, використовуючи відомі раніше (стандартні) способи та правило, що було вказано вище. Але спочатку вкажемо величини, що будуть використовуватись при розв'язанні.

m_1 – маса розчину з меншою концентрацією, що буде змішуватись або це може бути маса води, якщо її використовують для приготування нового розчину.

w_1% – масова частка розчиненої речовини у розчині з меншою концентрацією (якщо m_1 – це маса води, то w_1%(р.р.) = 0%).

m_2 – маса розчину з більшою концентрацією, що буде змішуватись або це може бути маса розчиненої речовини, якщо її використовують для підвищення концентрації нового розчину.

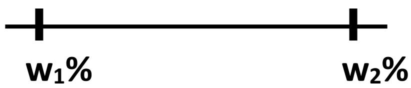
$w_2\%$ – масова частка розчиненої речовини у розчині з більшою концентрацією (якщо m_2 – це маса розчиненої речовини, що використовують для підвищення концентрації, то $w_2\%$(р.р.) = 100%).

m_3 – маса утвореного розчину.

$w_3\%$ – масова частка розчиненої речовини в утвореному розчині.

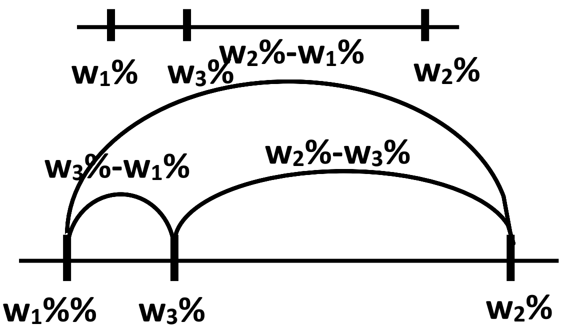
А зараз розгляньмо алгоритм використання правила «коромисло Івашини»:

1. Будуємо відрізок на якому вказуємо масові частки розчинених речовин обох розчинів, що змішуються:



2. В середній частині відрізку вказуємо значення масової частки утвореного розчину:

3. Визначаємо довжини трьох відрізків:



4. Маси змішуваних розчинів знаходимо за формулами:

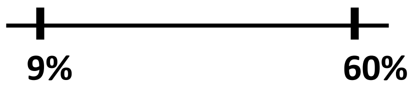
$$m_1 = \frac{\mathbf{w2\%-w3\%}}{\mathbf{w2\%-w1\%}}\, m_3$$

$$m_2 = \frac{\mathbf{w3\%-w1\%}}{\mathbf{w2\%-w1\%}}\, m_3$$

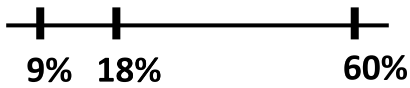
Задача 1. За одним з рецептів для приготування смачної страви з м’яса необхідно до 1 кг м’яса додати 150 г розчину оцтової кислоти з масовою часткою 18%. Приготуйте необхідну кількість потрібного розчину для замочування 5 кг м’яса. Для цього можна використовувати розчини оцтової кислоти з концентрацією 9% та 60%.

Розв’язання

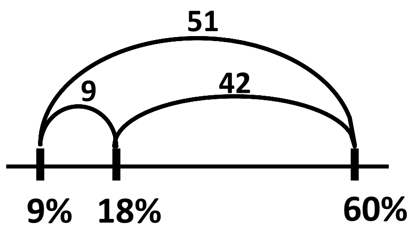
Скористаємось правилом «коромисло Івашини». Знаходимо величини за вказаним вище алгоритмом. Для цього зобразимо відрізок в якому початковим значенням буде масова частка оцтової кислоти розчину з меншою концентрацією, а кінцевим – масова частка оцтової кислоти розчину з більшою концентрацією:



Між цими значеннями вкажемо масову частку оцтової кислоти утвореного розчину:



Вкажемо довжини утворених відрізків:



Таким чином вклад першого розчину в утворення третього складає $\frac{42}{51}$ частин, а вклад другого розчину - $\frac{9}{51}$ частин, тому

$$m_1 = \frac{42}{51}\, m_3 = \frac{42}{51}\, 750 = 617{,}65 \text{ (г)}$$

$$m_2 = \frac{9}{51}\, m_3 = \frac{9}{51}\, 750 = 132{,}35 \text{ (г)}$$

Перевага цього способу полягає в тому, що для розв’язання задачі не треба вводити ніяких змінних, не треба проводити досить складних арифметичних розрахунків в яких діти часто роблять помилки, а також графічна модель «коромисла Івашини» набагато простіша та зрозуміліша, ніж при використанні «квадрату Пірсона».

Задача 2. Є два зливки золота із сріблом. Відсотковий вміст золота у першому зливку в два з половиною рази більший, ніж відсотковий вміст золота у другому злитку. Якщо сплавити обидва зливки, то дістанемо зливок, у якого 4% золота. У скільки разів маса першого злитка більша від маси другого, коли відомо що з рівних за масою частин першого і другого зливків дістанемо зливок, у якого міститься 35% золота?

Розв’язання:

Нехай в одному грамі другого зливка міститься х міліграм золота, тоді в одному грамі першого зливка 2.5 міліграм золота. Сплавивши по одному граму з кожного зливка, дістанемо зливок у 2 грами , в якому 3.5 міліграми золота. За умовою задачі 3.5 міліграма становлять 35% від 2 грам, тому $3.5x = \frac{35}{100} * 2000$, звідси х =200 міліграм, або х=0.2 грами . Отже, в одному грамі другого зливка міститься 200 міліграм золота, а в одному грамі першого зливка міститься 500 міліграм золота.

Нехай маса першого зливка у грам, а маса другого z грам, тоді в першому злитку міститься 0.5у грам , золота, а в другому 0.2z грами. Якщо сплавити обидва зливка, що дістанемо зливок масою (у+z)грам, в якому вміст золота (0.5у+0.2z) грами. За умовою, (0.5у+0.2z) грами становлять 40% від (у+z) грами , тому $0.5y + 0.2z = \frac{40}{100}(y + z)$, звідси у=2z , тобто перший зливок у два рази важчий від другого.

Відповідь: Перший зливок у 2 рази важчий від другого.

Задача 3. Яку масу води та розчину натрій хлориду (NaCl) з масовою часткою 30% необхідно взяти для приготування 400 г розчину натрій хлориду з масовою часткою 12%?

Розв’язання

Задачу розв’язуємо використовуючи правило «коромисло Івашини».

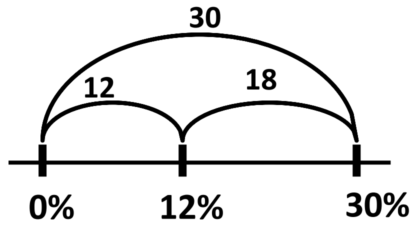
m_1 – маса води

m_2 – маса розчину з концентрацією 30%

m_3 – маса розчину, що необхідно приготувати

Врахуємо, що у чистій воді масова частка розчиненої речовини становить 0%.

Складаємо відрізки та знаходимо їх довжини:



$m_1 = \frac{18}{30}\, m_3 = \frac{18}{30}\, 400 = 240$

$m_2 = \frac{12}{30}\, m_3 = \frac{12}{30}\, 400 = 160$

Відповідь: m_1 = 240 г, m_2 = 160 г.

Задача 4.

Яку масу розчину калій нітрату з масовою часткою 25% та сухої солі калій нітрату необхідно взяти для приготування 500 г розчину з масовою часткою калій нітрату 42%?

Розв'язання

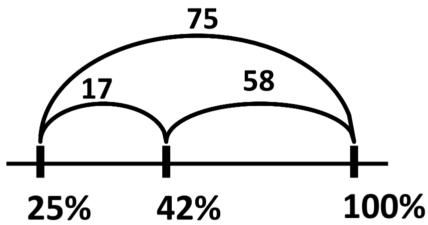
m_1 – маса розчину з концентрацією 25%

m_2 – маса сухого KNO_3, що необхідно додатково розчинити

m_3 – маса розчину з концентрацією 42%

Врахуємо, що в сухій солі масова частка розчиненої речовини 100%

Будуємо відрізки та знаходимо їх довжини:



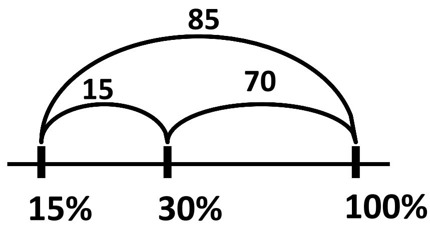
$m_1 = \frac{58}{75}\, m_3 = \frac{58}{75}\, 500 = 386{,}67$ (г)

$m_2 = \frac{17}{75}\, m_3 = \frac{17}{75}\, 500 = 113{,}33$ (г)

Відповідь: m_1 = 386,67 г, m_2 = 113,33 г.

Задача 5. Скільки сухої солі необхідно додати до 200 г розчину з масовою часткою солі 15% для підвищення концентрації до 30%?

Розв’язання



$m_1 = \frac{70}{85}\, m_3$ звідси слідує, що

$m_3 = \frac{85}{70}\, m_1 = \frac{85}{70}\, 200 = 242{,}86$ (г)

$m_2(\text{солі}) = m_3 - m_1 = 242{,}86 - 200 = 42{,}86$ (г)

Відповідь: $m_2(\text{солі}) = 42{,}86$ г

«Коромисло Івашини» також можна використовувати для виконання розрахунків при розчиненні у воді або у розчинах кристалогідратів. Вказаний спосіб дуже спрощує розрахунки. Кристалогідрати – це сухі на дотик речовини, що у своєму складі містять воду, тому до них можна також відноситись як до розчинів.

Задача 6. Морська вода містить 5% солі. Скільки кілограмів прісної води треба долити до 40 кілограм морської, щоб вміст солі в суміші становив 2%.

Розв’язання: Нехай до морської води треба долити x кілограм прісної води. Тоді, врахувавши те, що кількість солі в суміші не змінилась, дістанемо рівняння:

$(40 + x)*0.02 = 40*0.05$ звідси $x = 60$.

Відповідь: 60 кілограм.

Задача 7. Середня відносна молекулярна маса газової суміші метану (CH_4) та вуглекислого газу (CO_2) – 24. Який об’єм метану та вуглекислого газу міститься в 30 літрах такої суміші?

Розв’язання

Щоб використовувати правило «коромисло Івашини» для розв’язання задач даного типу необхідно в алгоритм розв’язку внести деякі зміни, а саме:

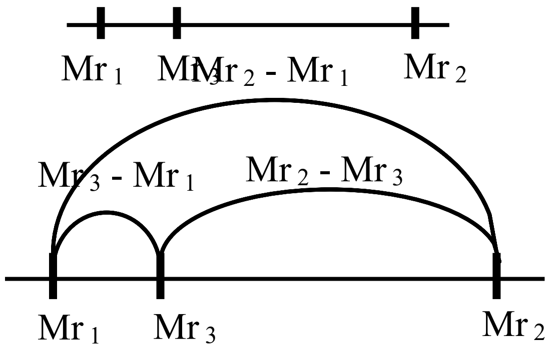
1. Будуємо відрізок на якому вказуємо значення відносних молекулярних мас газів, що входять до складу суміші (Mr_1 – відносна молекулярна маса значення якої менше, Mr_2 – відносна молекулярна

маса значення якої більше):

2. В середній частині відрізку вказуємо значення відносної молекулярної маси суміші газів (Mr_3):

3. Визначаємо довжини трьох відрізків:

4. Знаходимо об’єми газів, що входять до суміші за формулами:

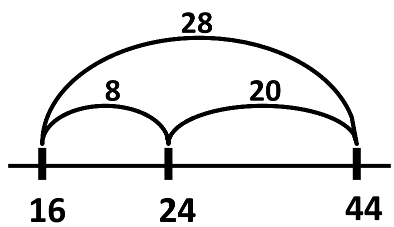


$$V_1 = \frac{Mr2 - Mr3}{\rho 2 - \rho 1}\ V_3$$

$$V_2 = \frac{Mr3 - Mr1}{Mr2 - Mr1}\ V_3$$

Спочатку знаходимо відносні молекулярні маси CH_4 та CO_2:
$Mr(CH_4) = Ar(C) + 4Ar(H) = 12 + 4\times1 = 16$
$Mr(CO_2) = Ar(C) + 2Ar(O) = 12 + 2\times16 = 44$

Будуємо відрізки на яких вказуємо значення відносних молекулярних мас (по краях метану та вуглекислого газу, всередині – газової суміші) та знаходимо їх довжини:



Знаходимо об’єми газів:

$$V_1(CH_4) = \frac{20}{28}\ V_3(\text{суміші}) = \frac{20}{28}\ 30 = 21{,}43 \text{ л}$$

$$V_2(CO_2) = \frac{8}{28}\ V_3(\text{суміші}) = \frac{8}{28}\ 30 = 8{,}57 \text{ л}$$

В кінцевій частині роботи хотілося б ще раз вказати на переваги використання правила «коромисло Івашини» перед іншими способами:

- сфера застосування поширюється не тільки для розв'язування задач на суміші, компоненти яких перебувають в рідкому стані, а і на тверді та газоподібні суміші;
- для розв'язування задач введення змінних не потребується або їх використання зводиться до мінімуму;
- не треба проводити складних арифметичних розрахунків;
- графічна модель «коромисла Івашини» набагато простіша та зрозуміліша, ніж при використанні інших моделей.

2.3 Задачі на числові співвідношення

У задачі на співвідношення може міститися не лише одна логічна основа, їх може бути декілька, але заданих по-різному: одна з основ завжди задається у відкритій формі, а інші у прихованій. При *відкритій формі логічної основи*, поняття що застосовані в задачі, і відношення між ними чітко фіксуються у словесному формулюванні задачі. Знаходження *прихованих логічних основ* народжує інший спосіб розв'язування задачі.

Наприклад:

Задача 1. Два потяги відправилися з однієї станції у протилежних напрямках. Один з них проїхав 120 км, а інший на 76 км менше. На якій відстані один від одного знаходилися потяги в цей час?

Тут логічну основу умови складають: дані значення відстаней, що пройшли потяги, відношення між останніми (другий потяг пройшов на 76 км менше за перший), напрямок руху потягів. Ці основи задані у відкритому вигляді, вони мають однорівневий характер, їх аналіз народжує єдиний спосіб розв'язування:

1)120 – 76 = 44 (км) пройшов другий потяг,

2)120 + 44 = 164 (км) пройшли разом обидва потяги, відстань між ними.

Відповідь: відстань між потягами 164 км.

Користуючись положенням Фрідмана Л. М. про види співвідношень, якими пов'язані елементи предметної області сюжетної задачі, можна сказати, що в предметній області даної задачі задані два співвідношення: перше співвідношення різницевого порівняння; друге співвідношення поєднання частин у ціле (додавання). Ця логічна основа є однорівневою, тому що в ній не можна трактувати ці співвідношення по-іншому.

Задача 2. За 5 днів їдальня витратила 40 кг масла. На скільки днів при тій самій витраті вистачить 120 кг масла?

Тут логічна основа задачі виявляється на двох рівнях – відкритому та прихованому. В першому випадку спрямованість розумового процесу визначається запитанням: скільки масла витрачали за 1 день? Отримаємо:

1) 40 : 5 = 8 (кг) кількість масла яке витрачали за 1 день;

2) 120 : 8 = 15 днів.

В іншому випадку хід того самого процесу можна визначити допоміжним запитанням, постановка якого викриває інші відношення, що містяться в умові задачі, тобто іншу логічну основу: у скільки разів маса масла стала більшою?

1) 120: 40 = 3 – у 3 рази маса масла збільшилась

Тому, його вистачить на число днів більше в 3 рази:

2) 5 · 3 = 15 днів.

Відповідь: масла вистачить на 15 днів.

В цій задачі на одному рівні можна виділити два співвідношення між значеннями різних величин, а на другому рівні – два співвідношення кратного порівняння.

Виявити приховану логічну основу задачі можна не лише через постановку додаткового запитання, а й за допомогою наочного оформлення задачі.

Наочне оформлення та аналіз його дозволяє викрити різні логічні основи умови, що народжує різні прийоми розв'язування. Наочне оформлення може бути у предметній та графічних формах.

Положення А. К. Артьомова про неодиничність логічних основ умови задачі перекликається з думкою Фрідмана Л. М. про залежність характеру трактування співвідношення, що задано в задачі від особистого погляду того, хто розв'язує цю задачу. Термін А. К. Артьомова „логічна основа умови" та термін Фрідмана Л. М. „вид співвідношення", на нашу думку, характеризують одне й те саме поняття, і визначення логічних основ умови, та визначення видів співвідношень, якими пов'язані значення різних величин, супроводжує хід розумового процесу на розв'язання задачі.

Запитання (необхвдність) задачі повинно бути пов'язаним з її умовою.

Цей зв'язок може бути *прямим* або *непрямим*. Прямий зв'язок: запитання задачі безпосередньо орієнтує на застосування даного умовою, для відповіді на нього. Непрямий зв'язок: запитання задачі яке безпосередньо не пов'язане з даними в умові задачі поняттями та відношеннями між ними; тому вимагається перетворити запитання так, щоб після цього запитання увага орієнтувалась на умові задачі. При цьому *перетворення* може виконуватись по-різному, що *визначає* різні способи розв'язання задачі:

1. *Переформулювання запитання* – заміна даного запитання іншим, що є рівносильним першому, тобто таким, щоб з першого логічно слідував другий та навпаки.

Наприклад:

Задвча 3. Дві ланки школярів вийшли одночасно назустріч одна одній з двох сіл. Одна ланка йшла з швидкістю 5 *км/год*, а друга з швидкістю 4 *км/год.* Зустріч відбуласячерез 2 год. Знайди відстань між селами?

В даній задачі зв'язок запитання і умови задачі поданий в непрямій формі: в даній умові немає безпосередньої вказівки на шукану відстань, цей зв'язок опосередкований, тому що відповідь на запитання задачі можлива лише через відповідь на інше запитання: яку відстань пройшли дві ланки разом? Це запитання на впряму пов'язано з умовою задачі.

2. *Добір допоміжного запитання.* В цьому випадку до запитання даної задачі ставиться допоміжне запитання (нерівносильне першому), відповідь на нього дозволяє відповісти на запитання даної задачі. При чому цей добір може бути неоднозначним, що створює різні способи розв'язування.

Задача 4. В парку посадили 5 рядків лип, по 16 штук у кожному рядку, і стільки ж осик, по 20 штук у кожному рядку. Скільки рядків осик посадили в парку?

В даній задачі запитання задачі зв'язано з її умовою непрямо. Воно не припускає переформулювання на рівносильне запитання. Для відповіді на нього необхідно підібрати допоміжне запитання, яке приведе до відповіді на запитання задачі. Про що треба попередньо дізнатися, щоб відповісти на запитання задачі? Скільки всього осик посадили? Тут постановка допоміжного запитання визначила один хід міркувань для відповіді на запитання задачі, але допоміжне запитання можна поставити інакше: Число яких рядків було більше при однаковій кількості дерев, та на скільки більше?

У кожному рядку було по 16 лип, а осик по 20, при однаковій кількості дерев число рядків з осиками менше, тому що

1) 20 – 16 = 4 дерева більше у кожному рядку

Але “4 зайві” осоки, що повторені 4 рази, дадуть 16, тобто число лип в одному рядку. Значить, рядків осик буде на 1 менше, ніж лип:

2) 5 – 1 = 4 рядки осик посадили в парку

Відповідь: 4 рядки осик посадили в парку.

Задача 5. Сума цифр двоцифрового числа в 6 раз менша, ніж це число. Добуток цього числа на число, записане тими самими цифрами у зворотному напрямку, дорівнює 2430. Знайти це число.

Зауваження: Число, що містить x десятків і y одиниць, записується так: $\overline{xy}$, число, що містить x сотень , y десятків, z одиниць - $\overline{xyz}$. Тоді $\overline{xy} = 10x + y$ і

$\overline{xyz} = 100x + 10y + z$.

Розв'язання: Нехай $\overline{xy} = 10x + y$, а $\overline{yx} = 10y + x$ - число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку. Тоді з умови випливає $6(x + y) = 10x + y$ і $(10x + y)(10y + x) = 2430$. Дістанемо систему:

$$\begin{cases} 6(x + y) = 10x + y \\ (10x + y)(10y + x) = 2430 \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 6x + 6y - 10x - y = 0 \\ (10x + y)(10y + x) = 2430 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y - 4x = 0 \\ (10x + y)(10y + x) = 2430 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x}{5} \\ \left(10x + \dfrac{4x}{5}\right)\left(10\dfrac{4x}{5} + x\right) = 2430 \end{cases}$$

$\dfrac{54x^2}{5} = 270$, $x^2 = 25$; $x_1 = -5$, $x_2 = 5$.

Перший корінь $x_1 = -5$ не задовольняє умову задачі. Якщо $x_2 = 5$, то $y = \dfrac{4*5}{5} = 4$. Отже $\overline{xy}$=54.

Відповідь:54.

Задача 6. Було намічено розподілити премію порівну між тими співробітниками, що найбільш відзначились. Однак з'ясувалося, що співробітники, які достойні премії, на три більше ніж передбачалося. У такому разі кожному довелося б одержати на 4 гривні менше. Керівництво знайшло можливість збільшити загальну суму премії на 90 гривень, внаслідок чого кожен премійований одержав 25 гривень. Скільки осіб одержало премію?

Розв’язання:

Нехай спочатку планувалося, що n осіб (n є N) одержує по y гривень (y>0).Тоді загальна сума буде ny. Після того як додалося три особи, на одного премійованого припадало б $\frac{ny}{n+3}$ (грн.),що на 4 (грн.) менше, ніж передбачалося , тобто: $\frac{ny}{n+3} = y-4$; $ny = ny + 3y - 4n - 12$; $y = \frac{4n+12}{3}$. Після того як суму премії збільшити на 90 гривень, її можна записати так: ny+90. Оскільки на кожного з (n+3) чоловік припадало 25 гривень, то $\frac{ny+90}{n+3} = 25$, тобто:

$ny + 90 = 25n + 75$; $y = \frac{25n-15}{n}$. Маємо

$$\begin{cases} y = \frac{4n+12}{3} \\ y = \frac{25n-15}{n} \end{cases}$$

$$\frac{4n+12}{3} = \frac{25n-15}{n}$$

$$4n^2 - 63n + 45 = 0$$

Враховуючи n є N, маємо n=15. Тобто премію одержали 15+3=18 (осіб).

Відповідь: 18 осіб.

У результаті встановлення взаємозв’язків між умовою та вимогою знаходимо ***оператор задачі*** – окрема дія (для розв’язування простих задач) та сукупність дій (для розв’язування складених задач) та їх обґрунтування.

Задача вважається розв’язною (якщо вона має хоч б один розв’язок) або не розв’язною (якщо за даними умови задачі неможна знайти розв’язок). Щоб задача мала розв’язок, при її формулюванні потрібно дотримуватися вимог до правильної постановки сюжетних задач:

1)всі елементи предметної області, про які йдеться в умові задачі, мають існувати;

2)усі твердження, які задано в задачі, мають бути істинними;

3) умова та вимога задачі мають бути логічно зв’язані між собою.

2.4 Задачі на спільну роботу

Для вирішення завдань на спільну роботу і продуктивність використовують наступну формулу:

(2),

де A - це обсяг роботи, t - це час виконання роботи, а p - це величина, яка за змістом означає швидкість виконання роботи і називається «продуктивність праці». Продуктивність роботи - це кількість роботи, виконаної за одиницю часу.

Якщо обсяг роботи не вказано, то його слід прийняти за одиницю.

Загальний план рішення:

1. Вибрати змінну (зазвичай продуктивність);

2. Заповнити табличку (A, t, p) для кожного з робітників (або для кожної з труб в задачах про труби), використовуючи формулу A = t • p (2);

3. Переписати умову у вигляді рівняння;

4. Привести отримане рівняння до виду квадратного або лінійного рівняння;

5. Розвязати рівняння і відібрати відповідний за змістом корінь (якщо їх два);

6. Знайти відповідь в задачі (якщо потрібно знайти не продуктивність, а іншу величину).

Задача 1. Два екскаватори вирили котлован за 24 дні. Перший екскаватор міг би виконати цю роботу в 1,5 раза швидше, ніж другий. За скільки днів перший екскаватор міг би виконати цю роботу?

Розв'язання:

Приймемо всю виконану роботу за 1, а через *x, y* позначимо кількість днів, за які могли б виконати роботу, працюючи окремо, перший і другий екскаватори відповідно.

Тоді $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ продуктивність праці першого і другого екскаваторів відповідно. Виходячи з умови задачі, складаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}, \\ 1.5x = y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ \frac{1}{x} + \frac{2x}{3} = \frac{1}{24}; \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{24},$$

24+16-x=0,

x=40,

$x \neq 0$, $y \neq 0$

Відповідь: За 40 днів.

Задача 2. Дві бригади, працюючи разом, закінчили ремонт ділянки шляху за 6 днів. Першій бригаді для виконання 40 % усієї роботи потрібно було б на 2 дні більше, ніж другій бригаді для виконання $13\frac{1}{3}$ % усієї роботи. За скільки днів могла б відремонтувати кожна з бригад окремо всю ділянку шляху?

Розв'язання:

Позначимо через x кількість днів, за які відремонтує всю ділянку шляху перша бригада, а через y — друга бригада.

Весь обсяг роботи приймемо за 1. Тоді перша бригада за один день виконає $\frac{1}{x}$ частину роботи, друга – $\frac{1}{y}$, разом $\frac{1}{6}$ частину роботи. Отже,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}.$$

Для виконання 40 % роботи першій бригаді потрібно $\frac{40}{100}x=\frac{2}{5}x$ (днів).

Друга бригада $13\frac{1}{3}$ %=$\frac{40}{3}$ % роботи виконає за $\frac{40}{3\bullet 100}y=\frac{2}{15y}$(днів). За умовою:

$$\frac{2}{5}x-\frac{2}{15}y=2.$$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\\ \frac{2}{5}x-\frac{2}{15}y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}6y+6x=xy,\\ 6x-2y=30;\end{cases}$$

$$\begin{cases}8y+xy=-30,\\ 6x-2y=30;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y(8-x)=-30,\\ 6x-2y=30;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-\frac{30}{8-x},\\ 6x+\frac{60}{8-x}=30.\end{cases}$$

Випишемо друге рівняння системи і розв'яжемо його:

$$6x+\frac{60}{8-x}-30=0,$$

$$\begin{cases} 6x(8-x)+60-30(8-x)=0, \\ 8-x\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48x-6x^2+60-240+30x=0, \\ x\neq 8; \end{cases}$$

$-6x^2+78x-180=0$,

$x^2-13x+30=0$.

$D=169-120=49$,

$x_1=3$, $x_2=10$.

Тоді $y_1=-\frac{30}{8-3}=-6$ — не задовольняє умову задачі,

$$y_2=-\frac{30}{8-10}=\frac{30}{2}=15.$$

Відповідь: Кожна з бригад окремо могла б відремонтувати всю ділянку шляху за 10 і 15 днів.

Задача 3. Дві бригади, працюючи одночасно, обробили ділянку землі за 12 год. За який час обробить цю ділянку кожна бригада окремо, якщо продуктивності праці бригад відносяться як 3:2?

Розв'язання:

Нехай x, y— продуктивності праці за 1 год першої і другої бригад відповідно, а вся виконана ними робота становить 1. Тоді, виходячи з умови задачі, складаємо систему:

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{12}, \\ \frac{x}{y}=\frac{3}{2}, \end{cases}$$

де $x>0$, $y>0$. З

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}x, \\ \dfrac{3}{2}x + y - \dfrac{1}{12} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y, \\ 30y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{30}, \\ x = \dfrac{1}{20}. \end{cases}$$

Отже, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$ — продуктивності праці першої і другої бригад за 1 год. Це означає, що бригади можуть виконати роботу, працюючи окремо, перша за 20 год, друга — за 30 год.

Відповідь: За 20 год, за 30 год.

Задача 4. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати певну роботу за 12 днів. Якщо перший робітник виконає половину роботи, а потім другий — ще половину, то всю роботу буде закінчено за 25 днів. На скільки днів раніше один від одного робітники можуть виконати всю роботу, працюючи окремо?

Розв'язання:

Нехай перший робітник, працюючи сам, може виконати всю роботу за x днів, а другий — за y днів. Якщо вся виконана робота становить 1,то $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ продуктивність праці за 1 день першого і другого робітників відповідно, а $\frac{1}{12}$їх спільна продуктивність. За умовою задачі робітники виконали по половині роботи кожен зі своєю продуктивністю і на це витратили разом 25 днів, тому:

$0{,}5 \div \frac{1}{x} = 0{,}5x$ — дні, за які виконав перший робітник половину роботи.

Аналогічно другий — за $0{,}5y$ днів.

Складаємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}, \\ 0{,}5x+0{,}5y=25, \end{cases}$$

де $x>0$, $y>0$.

$$\begin{cases} x+y=50, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{12}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=50-y, \\ \dfrac{1}{50-y}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{12}=0. \end{cases}$$

Випишемо друге рівняння системи і розв'яжемо його:

$$\frac{1}{50-y}+\frac{1}{y}-\frac{1}{12}=0,$$

$$\begin{cases} 12y+12(50-y)-y(50-y)=0, \\ y\neq 0, \\ y\neq 50. \end{cases}$$

$12y+600-12y-5y+y^2=0$,

$y^2-50y+600 = 0$.

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} y_1\cdot y_2=600, \\ y_1+y_2=50; \end{cases}$$

$y_1=30$, $y_2=20$.

Тоді $x_1=20$, $x_2=30$.

(30; 20) і (20; 30) — розв'язки системи.

Отже, працюючи окремо, робітники можуть виконати всю роботу на 10 днів раніше один від одного.

Відповідь: На 10 днів.

2.5 Задачі, які пов'язані з арифметичною і геометричною прогресіями

Задача 1.

Сума перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 91. Якщо до цих членів додати відповідно 25; 27; 1, то отримаємо три числа, що утворюють арифметичну прогресію. Знайти сьомий член даної геометричної прогресії.

(bn)-геометрична прогресія

$b_1; b_2; b_3$-геометрична прогресія

$b_1 + 25; b_2 + 27; b_3 + 1$-арифметична прогресія

$$b_1 + b_2 + b_3 = 91$$

$b_1 + 25; b_2 + 27; b_3 + 1$- арифметична прогресія

$$1)\, b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 91;$$

$$b_1(1 + q + q^2) = 91;$$

$$b_1 = \frac{91}{(q^2 + q + 1)};$$

$$2)\, b_1 + 25;$$

$$b_2 + 27;$$

$$b_1 q^2 + 1$$

$$b_1 q + 27 = \frac{b_1 + 25 + b_1 q^2 + 1}{2}$$

$$2b_1 q + 54 = b_1 + b_1 q^2 + 26$$

$$b_1 q^2 + b_1 + 26 - 2b_1 q - 54 = 0$$

$$b_1 q^2 + 2b_1 q + b_1 - 28 = 0$$

$$(q^2 - 2q + 1) - 28 = 0;$$

$$(q^2 - 2q + \frac{1}{(q^2 + q + 1)}) \cdot 91 = 28;$$

$$91(q^2 - 2q + 1) = 28(q^2 + q + 1);$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0;$$

$$D = 64;$$

$$q_1 = 3;$$

$$q_2 = \frac{1}{3}$$

якщо $q = 3;$ то:

$$b_1 = 91 / (q^2 + q + 1) = 7;$$

$$b_7 = b_1 q^6 = 5103.$$

якщо $q = \frac{1}{3};$ то:

$$b_1 = 63$$

$$b_7 \frac{7}{81}$$

Відповідь: 5103; $\frac{7}{81}$.

Задача 2.

Знайти три числа, що утворюють геометричну прогресію, якщо відомо, що їх добуток дорівнює 64; а середнє арифметичне дорівнює 14/3

$b_1; b_2; b_3$- геометрична прогресія

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 64,$$

$$\frac{(b_1 + b_2 + b_3)}{3} = \frac{14}{3}$$

$$b_1^3 q^3 = 26,$$

$$b_1(1 + q + q^2) = 14;$$

$$b_1 q = 4,$$

$$b_1(1 + q + q^2) = 14;$$

$$b_1 = \frac{4}{9};$$

$$\frac{\left(\frac{4}{q}+\frac{4q}{q}+4q^2\right)}{q}=14;$$

$2q^2-5q+2=0;$

$q_1=2$; $\qquad q_2=0{,}5$

$b_1=2 \qquad b_1=8$

$b_2=4 \qquad b_2=4$

$b_3=8; \qquad b_3=2$

Відповідь: 2; 4; 8; 8; 4; 2.

Задача 3.

Кожна найпростіша одноклітинна тварина інфузорія-туфелька розмножується поділом на 2 частини. Скільки інфузорій було спочатку, якщо після шестиразового поділу їх стало 320?

Розв'язання:

$b_7=320$

$q=2$

$b_1-?$

Нехай спочатку було b_1 інфузорій. Кількість інфузорій збільшується з геометрично прогресією. Тоді після шостого поділу їх слало $b_7=b_1\cdot q^{7-1}$

$320=b_1\cdot 2^6$

$320=b_1\cdot 64$

$b_1=\frac{320}{64}=5$ інфузорій

Відповідь: 5 інфузорій було спочатку.

Ці ж закони діють і для розмноження рептилій, птахів, ссавців. Використовуючи загальновідомі формули і спеціальні знання, вчені-природознавці можуть розрахувати приріст тварин в заповідниках і в дикій природі.

Задача 4.

У зв'язку з надмірним полюванням на лисиць в Англії різко зросло поголів'я кроликів, які з'їдали посіви фермерів. Як швидко росла їх кількість, якщо в одному з округів Англії їх було 500 штук, а за шість років стало 16000?

Розв'язання: $a_1 = 500$, $a_n = 16000$, $d = ?$. $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$. Підставивши відомі величини у формулу, матимемо: $500 + (6-1)\cdot d = 16000$, $d = 3100(\textit{кролів})$.

Відповідь: За кожен рік кількість кролів зростала в середньому на $3100\textit{кролів}$.

Задача 5.

При вільному падінні тіло проходить за першу секунду 4,9 м, а за кожну наступну на 9,8 м більше. Знайдіть глибину шахти, якщо камінець досяг її дна через 8 с після початку падіння.

Розв'язання:

Маємо арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 4{,}9$, $d = 9{,}8$, $n = 8$.

$$S_8 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n = \frac{2\cdot 4{,}9 + 9{,}8\cdot 7}{2}\cdot 8 = 78{,}4\cdot 4 = 313{,}6\,\textit{м}.$$

Відповідь: 313,6 м.

Інколи формулами арифметичної прогресії користуються в своїх розрахунках інженери. Наприклад, при будівництві будівель і конструкцій.

Задача 6.

Артур вирішив зробити садову драбину з таким розрахунком, щоб нижній щабель мав довжину 50 см, а кожен із наступних 12 щаблів були на 2 см коротші попереднього. Якої довжини повинен бути верхній щабель драбини?

Дано:

$a_1 = 50\textit{см}$

$n = 13$

$d = -2$

Найти:

$a_{13} - ?$

Розв'язання:

$a_{13} = a_1 + 12d$

$a_{13} = 50 + 12\cdot(-2) = 26$

Відповідь: 26 см.

Задача 7.

Курс повітряних ванн починають з 15 хв. в перший день і збільшують час цієї процедури кожного наступного дня на 10 хвилин. Скільки днів слід приймати ванни в зазначеному режимі, щоб досягти їх максимальної тривалості 1 годину 45 хвилин?

Дано:
$a_1 = 15$ хв
$d = 10$
$a_n = 1$год 45 хв $= 105$ хв
Найти:
$n = ?$
Розв'язання:
$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$
$105 = 15 + (n – 1) \cdot 10$
$105 = 15 +10 n – 10$
$-10n = 15 – 10 – 105$
$-10n = -100$
$n = 10$
Відповідь: 10 днів.

Задача 8.

Хворий приймає ліки за наступною схемою: перший день – 5 крапель, а кожного наступного дня – на 5 крапель більше. Дійшовши до сорока крапель він три дні приймає таку саму дозу (по 40 крапель), а потім щодня зменшує дозу на 5 крапель, поки не дійде до 5-ти крапель за день. Скільки пляшечок ліків треба купити хворому, якщо кожна пляшечка вміщує 20 мл ліків (що становить 250 крапель)?

Розв'язання

Знайдемо кількість днів поки кількість крапель стане 40.

$a_n = a_1 + d(n - 1);$
$40 = 5 + 5(n - 1);$
$35 = 5n - 5;$
$40 = 5n;$
$n = 8.$

Знайдемо кількість крапель за 8 днів: $S_8 = \frac{5+40}{2} \cdot 8 = 180$. На 9-й день – 40 капель і ще 180 до зменшення до 5 крапель.

Всього $180 \cdot 2 + 40 = 400$ крапель. Отже для лікування потрібно 2 пляшечки крапель.

Відповідь: 2 пляшечки.

Задача 9.

Альпіністи в перший день сходження піднялися на висоту 1400 м, а потім кожен наступний день вони долали на 100 м менше, ніж за попередній. За скільки днів вони підкорили висоту в 5000 м?

Дано:

$a_1 = 1400$

$d = -100$

$S_n = 5000$

$n - ?$

Розв'язання:

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

$$5000 = \frac{2 \cdot 1400 - 100 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$$

$$10000 = 2800n - 100n^2 + 100n$$

$$100n^2 - 2900n + 10000 = 0$$

$$n^2 - 29n + 100 = 0$$

$n_1 = 4$

$n_2 = 25$ - не задовольняє умові задачі.

Відповідь: за 4 дні.

2.6 Задачі на складання рівнянь

Метою цього розділу є відпрацювання навичок застосування схеми розв'язування тестових задач на складання системи лінійних рівнянь із двома змінними до розв'язування задач на рух; вдосконалювати вміння розв'язувати системи лінійних рівнянь із двома змінними аналітичними способами, виховувати старанність, відповідальність

1. Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{1}{2}x - 3 = 0$; 2) $\frac{x}{5} = \frac{1}{8}$; 3) $2x - 3 = 2$; 4) $0x = 5$ (фронтальна робота)

2. Розв'яжіть систему рівнянь найзручнішим способом:

1) $\begin{cases} x = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + 3y = 13. \end{cases}$

3. Складіть рівняння за умовою задачі:

1) сторони прямокутника х та у, а периметр 26 см;

2) в одній шафі х книжок, у другій у книжок; якщо перекласти з першої шафи у другу 20 книжок, то в першій буде у 2 рази більше, ніж стало у другій;

3) зошит коштує х грн, ручка у грн; за дві ручки заплатили на 2 грн більше, ніж за три зошити.

На уроці учні розв'язують найбільш поширений вид текстових задач — задачі на рух (прямолінійний, рівномірний). Схема розв'язування цих задач така сама, які в інших видах текстових задач. Єдине, що їх відрізняє,— це наявність певних співвідношень між величинами, що характеризують цей рух (S; v; t; $v_{\text{за теч.}}$; $v_{\text{проти теч.}}$; $v_{\text{власна}}$ та $v_{\text{течії}}$), які потрібно знати і вміти використовувати для вираження одних через інші відповідно до умови задачі. Саме з цих співвідношень і бажано розпочати розмову про розв'язування задач на рух: $S = vt$; $v = \frac{S}{t}$; $t = \frac{S}{v}$; $v_{\text{за теч.}} = v_{\text{власна}} + v_{\text{течії}}$; $v_{\text{проти теч.}} = v_{\text{власна}} - v_{\text{течії}}$.

Перед тим як складати систему рівнянь зручно записати коротку умову задачі у вигляді таблиці й подальшу роботу зі складання системи рівнянь проводити як роботу з таблицею.

	v	t	S
І вид руху			
ІІ вид руху			

Задача 1. Перший автомобіль долає шлях між двома містами за 2 год, а другий — за 2,5 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо за 1,5 год перший з них проїжджає на 30 км більше, ніж другий.

Розв'язання:

Нехай швидкість першого автомобіля – x

Швидкість другого автомобіля – y

Тоді складемо рівняння

$\frac{\{2x=2{,}5y}{2}$ $\{x=1{,}25\times y$

$\{1{,}5x-1{,}5y=30$ $\{1{,}5\times 1{,}25\times y-1{,}5\times y=30$

$1{,}875\times y-1{,}5\times y=30$

$\frac{0{,}375\times y=30}{0{,}375}|$

$y=80 \quad \Rightarrow$

$2x=2{,}5\times 80$

$2x=\frac{200}{2}$

$x=100.$

Відповідь: швидкість першого автомобіля – 100 км\год, швидкість другого автомобіля – 80 км\год.

Задача 2. З пункту А до пункту В, відстань між якими 41 км, вийшов турист. Через 1 год назустріч йому з пункту В вийшов інший турист. Через дві години після виходу другого туриста відстань між ними була 18 км, а ще через 2 год вони зустрілися. Знайдіть швидкість туристів.

Розв’язання:

швидкість першого туриста – x

швидкість другого туриста – y

Отримаємо таке рівняння:

$x+2(x+y)=41-18$

$2(x+y)=18$

$x+18=41-18$

$x=41-18-18=41-36=5$ - *швидкість першого туриста*

$2\times(5+y)=18$

$\frac{18}{2}-5=9-5=4$ - *швидкість другого туриста*

Відповідь: швидкість першого туриста – 5 км\год, швидкість другого туриста – 4 км\год.

Задача 3. Теплохід проходить за 2 год за течією річки та 3 год проти течії 222 км. За 3 год за течією він проходить на 60 км більше, ніж за 2 год проти течії. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді та швидкість течії річки.

Розв’язання:

Нехай теплохід пройшов за течією — x км, тоді проти течії — $222 - x$ км. Тоді швидкість, з якою він йшов, за течією річки складала $\frac{x}{2}$ км/год, а проти течії — $\frac{222-x}{2}$ км/год. Тоді у другому випадку теплохід пройшов за течією $3 \times \frac{x}{2}$ км, а проти — $2 \times \frac{222-x}{3}$ км, що за умовою на 60 км більше.

Отримаємо рівняння:

$$3\frac{x}{2} - 2\left(\frac{222-x}{3}\right) = 60$$

$3_{\frac{3x}{2}} - 2_{\frac{444-2x}{3}} = 6_{60} \backslash \times 6$ – домножуємо позбуваючись знаменника

$9x - 888 + 4x = 360$

$13x = 1248$

$x = 96$ (км\год)

З отриманої відстані знайдемо швидкість теплохода за течією у першому випадку: $\frac{96}{2} = 48$ км/год і швидкість проти течії: $\frac{222-96}{3} = 42$ км/год. Нехай власна швидкість теплохода у км/год, а течії — z км/год.

Маємо систему:

$$\begin{cases} y + z = 48 \\ y - z = 42 \end{cases}$$

Додамо до першого рівняння друге, маємо:

$2y = 90; y = 45$ км/год.

Відповідь: швидкість теплохода у стоячій воді 45 км/год.

2.7 Диференційоване навчання розв'язуванню задач

Методи розв'язування текстових задач в основній школі

Одним із найважливіших завдань навчання математики в закладах загальної освіти залишається навчити учнів використовувати пропоновані математичні методи, до яких перш за все відносять методи доведення теорем та розв'язування задач.

У методиці математики під методом розв'язування задач (як і доведення теорем) треба розуміти «сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій та операцій, за допомогою яких розв'язується великий клас задач». Поняття «спосіб» розв'язування задачі визначають як «сукупність прийомів розумової діяльності або логічних і математичних дій та операцій, які використовуються у разі розв'язання окремої задачі або невеликої сукупності задач певного виду».

У процесі пошуку способу розв'язування багатьох задач на обчислення, доведення використовують синтетичний і аналітичний, а інколи аналітико-синтетичний методи міркувань, які заведено називати синтетичним, аналітичним і аналітико-синтетичним методами розв'язування задач відповідно.

Синтетичний метод найчастіше використовується в початковій школі та на заняттях з математики при розв'язуванні найпростіших задач в 5 та 6 класах.

Приклад.

Відстань між містами А і В дорівнює 288 км. З міста А до міста

Виїхав автомобіль зі швидкістю 72 км/год. Одночасно з автомобілем з міста В до міста А виїхав велосипедист, який зустрівся з автомобілем через 3 год після виїзду. За який час подолає відстань між містами автомобіль? За який — велосипедист? [21]

Розв'язуючи задачу синтетичним методом, міркування проводять від умови задачі до шуканої величини, тобто відбувається виведення наслідків із даних, які задані за умовою.

Розв'язання:

1. Тому, що за умовою відомі швидкість автомобіля та відстань між містами, можна обчислити час, який витратив автомобіль: 288:72 = 4 (год).

2. Наступним стане крок знаходження шляху, який до зустрічі проїхав автомобіль: 72 – 3= 216 (км).

3. Обчислюємо відстань, яку проїхав велосипедист до моменту зустрічі з автомобілем: 288- 216 = 72 (км).

4. Знаходимо швидкість велосипедиста, оскільки вже відомою є відстань, яку він подолав, і час, який був витрачений на дорогу:

72:3= 24 (км/год).

5. Знаходимо час, який витратив велосипедист на подолання всієї відстані:

288:24 =12 (год).

Відповідь: на подолання всього шляху автомобілю знадобилось 4 год, а велосипедисту — 12 год.

Пошук розв’язку цієї ж задачі аналітичним методом. Діяльність вчителя і учня буде такою:

Вчитель	**Учень**
Які величини повинні бути відомими для відшукання відповіді на запитання задачі?	Необхідно знайти швидкість автомобіля та швидкість велосипедиста. Оскільки відома швидкість автомобіля та шлях, пройдений ним, то час руху автомобіля буде становити 288:72 = 4 (год).
Що необхідно знати для обчислення швидкості велосипедиста?	Необхідно знайти відстань, яку подолав велосипедист за 3 години до моменту зустрічі
Як цей шлях знайти?	Необхідно знайти відстань, пройдену автомобілем до зустрічі. Різниця між відстанню між містами та знайденою відстанню і буде дорівнювати шляху, який проїхав велосипедист
Знаходимо шуканий шлях	72 * 3= 216 (км); 288- 216 = 72 (км)

Як знайти швидкість велосипедиста?	Необхідно шлях, який він подолав до моменту зустрічі, поділити на витрачений на цей шлях час, тобто: 72:3: 24 (км/год)
Яким чином знайти час, витрачений велосипедистом, на всю відстань?	Необхідно відому відстань між двома містами розділити на знайдену швидкість велосипедиста: 288:24 =12 (год).

Відповідь: на подолання всього шляху автомобілю знадобилось 4 год, а велосипедисту — 12 год [40].

Аналітичний метод сприяє свідомому пошуку розв’язку задачі, вчить учнів здійснювати такий пошук самостійно. У старших класах аналітичний метод широко використовують для розв’язування стереометричних задач на обчислення об’ємів, площ поверхонь геометричних тіл. При цьому розв’язування починається із записування відповідної формули, за якою обчислюється шукана величина, а потім здійснюється пошук невідомих величин, які входять до формули.

Арифметичний метод. Розв’язати задачу арифметичним методом означає знайти відповідь на вимогу задачі за допомогою виконання арифметичних дій над числами. Одну і ту саму задачу можна вирішити різними арифметичними способами. Вони різняться один від одного логікою міркувань.

Розв’язання будь-якої задачі — процес складної розумової діяльності. Щоб опанувати його, треба знати основні етапи розв’язання задачі і деякі способи їх виконання.

Розв’язування задачі арифметичним методом включає такі основні етапи (рис. 2.2) [19]:

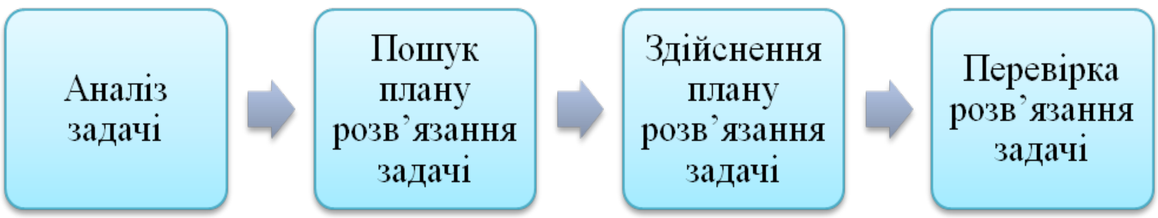


Рис. 2.2 Етапи розв’язування задачі арифметичним методом

Слід зазначити, що під час реального розв’язання задачі вказані етапи не мають чітких меж і не завжди виконуються з однаковою повнотою. Розглянемо далі кожний з цих етапів.

Аналіз задачі. Основне призначення — загальне розуміння описаної ситуації. Далі необхідно: виділити умови і вимогу; назвати відомі і шукані об’єкти; виділити всі відносини (залежність) між ними.

Розібратися в змісті задачі, вичленити умови і вимогу можна, якщо поставити спеціальні питання і відповісти на них, наприклад: Про що задача? Що потрібно знайти в задачі? Що є шуканим?

Пошук і складання плану розв’язання задачі.

Цей етап покликаний намітити послідовність дій. План розв’язання задачі — це лише ідея розв’язання, його задум. Може трапитися, що знайдена ідея невірна, і тоді треба знову повертатися до аналізу задачі та починати все спочатку. Під час розбору задачі треба звернути увагу на питання задачі та встановити (на основі інформації, отриманій під час аналізу), що саме буде достатнім дізнатися для відповіді на це питання. Для цього треба звернутися до умови та з’ясувати, чи наявні необхідні дані. Якщо вони відсутні, то встановити необхідну інформацію для знаходження бракуючих числових даних тощо. Потім складається план розв’язання задачі.

Здійснення плану розв’язання задач. Призначення даного етапу — знайти відповідь на вимогу задачі, виконавши всі дії відповідно до плану.

Для текстових задач що вирішуються арифметичним методом, використовуються наступні способи:

запис по діях (з поясненнями, без пояснення, з питаннями);

запис у вигляді виразу.

Перевірка розв'язання задачі. Цей етап призначений встановити правильність або хибність виконання розв’язання.

Арифметичний метод розв’язання задач може бути загальним методом. Він являє собою певну сукупність способів міркування, кожен з яких застосуємо для конкретного типу задач.

Приклад. Співають в хорі й займаються танцями 82 студенти, займаються танцями і художньою гімнастикою 32 студенти, а співають в хорі та займаються художньою гімнастикою 78 студентів. Скільки студентів співають в хорі, займаються танцями і художньою гімнастикою окремо, якщо відомо, що кожний студент займається тільки чимсь одним? [19] Розв’язання:

1-й спосіб:

1. 82 + 32 +78 + 192 (студ.) — подвоєна кількість студентів, які займаються трьома видами діяльності (хор, танці, художня гімнастика);
2. 192:2 = 96 (студ.) — студенти, які займаються трьома видами діяльності;
3. 96 - 32 = 64 (студ.) — студенти, які співають в хорі;
4. 96 - 78 = 18 (студ.) — студенти, які займаються танцями;
5. 96 - 82 = 14 (студ.) — студенти, які займаються художньою гімнастикою.

2-й спосіб:

1. 82 - 32 = 50 (студ.) — різниця між кількістю студентів, які співають у хорі та займаються гімнастикою;
2. 50 + 78 = 128 (студ.) — подвоєна кількість студентів, які залучені до хору;
3. 128:2 - 64 (студ.) — кількість студентів, які співають в хорі;
4. 78 - 64 = 14 (студ.) — кількість студентів, які займаються художньою гімнастикою;
5. 82 - 64 = 18 (студ.) — кількість студентів, які займаються танцями.

Відповідь: у хорі співає 64 студенти, займаються художньою гімнастикою — 14 студентів, танцями — 18 студентів.

Алгебраїчний метод. За допомогою цього методу забезпечується загальний підхід до аналізу і розв’язання досить широкого кола задач. Перш за все, відмінність алгебраїчного методу від арифметичного полягає у введені невідомої величини і її спеціального позначення (зазвичай через *x*).

Отже, алгебраїчний метод передбачає дві схеми пошуку рівняння до задачі. Перша застосовується до розв’язання нескладних задач і виглядає наступним чином:

1) Позначити через *x* шукану величину (або одну із шуканих)

2) Виразити через x інші величини, про які йдеться у змісті задачі

3) Спираючись на залежність між відомими та невідомими величинами, скласти рівняння [46].

Друга схема зручна для розв'язання складних задач:

1) З'ясувати, виходячи зі змісту задачі, значення яких величин можна прирівняти;

2) вибрати невідому і позначити її буквою x;

3) виразити через x значення величин, які прирівнюватимуться; 4) скласти рівняння [46].

У залежності від вибору невідомого (невідомих) для позначення буквою (буквами), та від ходу міркувань можна скласти різні рівняння для однієї і тієї ж задачі. В такому випадку можна говорити про різні алгебраїчні способи розв'язання цієї задачі.

Узагальнюючи цей підхід, розв'язання текстової задачі алгебраїчним методом складається з таких етапів (рис. 2.3).

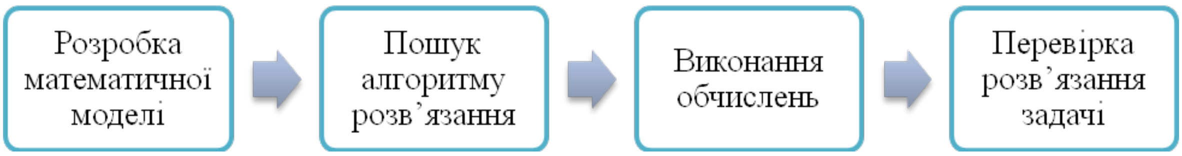


Рис. 2.3 Етапи розв'язування задачі алгебраїчним методом

Приклад. Робітник може зробити певне число деталей за три дні. Якщо він в день буде робити на 10 деталей більше, то впорається із завданням за два дні. Яка первинна продуктивність робітника і скільки деталей він повинен зробити? [19] Розв'язання. 1-й спосіб:

Нехай x д/день — первинна продуктивність робітника. Тоді (x =10) д/день — нова продуктивність, 3 x д. — кількість деталей, які він

повинен виготовити. Враховуючи умову задачі, маємо рівняння

$3x$-2(x=10). Розв'язавши отримане рівняння, отримуємо значення змінної x = 20. Отже, значення первинної продуктивності робочого складає 20 деталей в день, а виготовити він повинен 60 деталей.

2-й спосіб:

Нехай x деталей — кількість деталей, які повинен виготовити робітник, тоді x /2 д/день — нова продуктивність його роботи, (x /2 =10) д/день — визначає його первинну продуктивність. Врахувавши умову задачі, маємо рівняння x - 3(x /2 =10). Розв’язавши отримане рівняння, отримуємо значення змінної x = 60. Робітник повинен виготовити 60 деталей, а його первинна продуктивність становить 20 деталей в день.

Відповідь: 20 деталей в день; 60 деталей.

Графічний метод розв’язання текстових задач.

Більшість алгебраїчних задач можна розв’язати за допомогою різних графіків, схем, діаграм. Геометричний метод розв’язання задач базується на основних поняттях планіметрії (точка, відрізок, довжина, площа, трикутник, прямокутник і інші), а також властивостях плоских фігур і графіків елементарних функцій. Математична модель в цьому випадку являє собою або діаграму, або графік.

Діаграма — це креслення або малюнок, на якому умовно зображені у вигляді окремих фігур різні значення однієї й тієї ж величини або декількох порівнянних величин. Вона служить не тільки для зображення величин, але і для показу співвідношень між ними [7].

"Графік — це безліч точок (зазвичай деяка лінія) координатної площини. Графік використовується для зображення зв’язку між двома величинами, з яких одна є аргументом, а інша — функцією. Кожне значення аргументу є абсцисою деякої точки графіка, а відповідне значення функції — ординатою тієї ж точки. Для розв’язання конкретної задачі використовується один або декілька графіків на одному кресленні" [7].

Розв’язання задач геометричним методом здійснюється двома способами: конструктивним (чисто графічним) і обчислювальним (графічно-обчислювальним). За кожного з них використовуються різні способи розв’язання задач.

При розв’язанні задач конструктивним способом діаграма або графік накреслюються якомога більш точно по значенню величин, що входять до умови задачі. Креслення робляться в певному масштабі. Відповідь зазвичай отримуємо наближену, однак прийнятну для практичних цілей. Її знаходять за допомогою вимірювань довжин відрізків або інших елементів креслення, а часто просто «прочитують» з креслення.

Приклад. З двох міст А і В, відстань між яким 250 км, назустріч один одному виїхали два туристи. Швидкість руху першого дорівнює 20 км/год, а другого — 30 км/год. Через скільки годин туристи зустрінуться? [7]

Розв’язання.

1-й спосіб: Математична модель задачі може бути представлена у вигляді діаграми. Приймемо довжину одного відрізка по вертикалі за 10 км, а довжину одного відрізка по горизонталі — за 1 год.

Відкладемо на вертикальній прямий відрізок АВ, рівний 250 км. Він буде зображати відстань між містами. Для зручності проведемо ще одну вісь часу через точку В. Потім на вертикальних прямих станемо відкладати відрізки шляху, пройдені кожним туристом за 1 год, 2 год, 3 год і т. д. З креслення бачимо, що через 5 год вони зустрінуться [7].

2-й спосіб: У прямокутній системі координат по горизонталі відкладемо час руху (в годинах), по вертикалі — відстань (в кілометрах) [26].

Приймемо довжину одного відрізка по вертикалі за 10 км, а довжину одного відрізка по горизонталі — за 1 год. Побудуємо графіки, що характеризують рух кожного туриста. Рух першого туриста визначається функцією у = 20 хв, другого — у = 250 – 30 хв. Абсциса точки їх перетину вказує, через скільки годин туристи зустрінуться. Ордината вказує, на якій відстані від пункту АО буде зустріч. Її значення дорівнює 100 [7].

Нестандартні способи розв’язання текстових задач

Розглянемо нестандартні способи розв’язання звичайних, так званих «стандартних», задач і задач олімпіадної та конкурсної тематики, спеціальні способи їх розв’язання, такі як переформулювання задачі, використання «зайвих» невідомих, розв’язання задач в загальному вигляді. Переформулювання задачі.

Відразу розглянемо приклад:

У зоомагазин продають великих і маленьких птахів. Великий птах вдвоє дорожче маленького. Леді, що зайшла в магазин, купила 5 великих птахів і 3 маленьких. Якби вона замість цього купив 3 великих птахи та 5 маленьких, то витратила б на 20 доларів менше. Скільки коштує кожний птах?

Просте розв'язання задачі полягає у заміні кожного великого птаха двома маленькими, тобто в такому переформулюванні задачі, за якого відповідь нової задачі є відповіддю для першої задачі. Таким чином, нова задача має вигляд:

У зоомагазин продають великих і маленьких птахів. Великий птах вдвоє дорожче маленької. Леді купила 13 маленьких птахів. Якби вона замість цього купила 11 маленьких птахів, то витратила б на 20 доларів менше. Що стоїть кожний птах?

Отже, перевага методу переформулювання полягає в тому, що він дозволяє обійтися без розв'язання систем рівнянь. Слід зазначити, що задач, в яких можливе таке переформулювання, не так багато, але вони зустрічаються і на конкурсному екзамені.

Приклад 2. Фабрика отримала замовлення на виготовлення 6000 деталей типу P і 2000 деталей типу Q. Кожен з 214 робітників фабрики затрачує на виготовлення 5 деталей типу P час, за який він міг би виготувати 3 деталі типу Q. Яким чином можна розділити робітників фабрики на дві бригади, щоб виконати замовлення за найменший час, за умови, що обидві бригади почнуть роботу одночасно і кожна з бригад буде зайнята виготовленням деталей тільки одного типу? [8]

Приклад 3. На оранці поля працювали 4 гусеничних трактори однакової потужності. Після того, як вони пропробили 2 год, до них приєдналися ще 2 колісних трактори, після чого робота була закінчена за 2 год. Якби всі трактори почали працювати одночасно, то поле було б зоране за 3 год. Визначте, за скільки годин можуть зорати поле 2 гусеничних трактори та 2 колісних трактори, працюючи одночасно [42].

«Зайві» невідомі. Суть цього методу складається у введенні невідомих, значення яких не потрібно знаходити для отримання відповіді на питання задачі (а часто і неможливо знайти). При цьому задача може бути розв'язана без складання рівняння — обчисленням відношень зі скороченням «зайвого» невідомого, складанням рівняння або системи рівнянь, в яких кількість невідомих перевищує кількість рівнянь [2].

Розглянемо застосування цього методу на прикладах:

В деякій державі уряд виніс на всенародне голосування проект закону про заборону реклами спиртних напоїв і тютюну. Цей проект підтримали 69% дорослих населення, що брав участь в голосуванні. Причому «за» проголосувало 94% жінок і 41% чоловіків. Кого серед тих, що голосували було більше — чоловіків або жінок? На скільки відсотків?

Очевидно, що умов задачі недостатньо для встановлення числа чоловіків, що голосували та жінок. Нехай в голосуванні взяло участь m чоловіків і g жінок. Проект закону підтримало 0,41 m чоловіків і 0,94 g жінок, а всього 0,69(m + g) чоловік. Складемо рівняння: $0,41\,m + 0,94g = 0,69(m + g)$, з якого отримаємо $g = 1,12m$ [42].

Це означає, що серед жінок, що голосували було на 12% більше, ніж чоловіків

Розв’язання задач в загальному вигляді застосовують у двох випадках:

значення деяких величин, від яких залежить відповідь задачі, замінені буквами (тобто ми будемо оперувати не числовими значеннями, а буквеними),

потрібно вирішити декілька однотипних задач, які різняться тільки значеннями величин [10].

Особливої уваги варте навчання учнів провідних методів розв’язування задач. Для прикладу розглянемо методику навчання методу рівнянь під час розв’язування текстових задач.

Шкільна практика свідчить про те, що хоч метод рівнянь вводиться вже в 5 класі та використовується протягом всього наступного вивчення шкільного курсу математики, результати вступних випробувань до закладів вищої освіти беззаперечно доводять, що значна частина випускників недостатньо володіє цим методом.

Успішно аналізувати формулювання задачі учні можуть лише тоді, коли вони засвоїли її зміст. Для цього важливо вдало подати задачу учням. Це можна зробити по-різному. Якщо задача з підручника, то ефективніше, коли задачу вголос читає вчитель або один з учнів, а решта стежать, як формулюється задача за підручником. Досвід свідчить, що найкраще, коли задача читається не менш як 2 рази. Доцільно, щоб учень, який розв'язуватиме задачу на дошці, після повторення змісту задачі й виділення умови і вимоги скорочено написав їх на дошці. Перші скорочені записи на дошці вчителі потрібно робити самому, пропонуючи зразок, що його наслідуватимуть учні. Для окремих задач умову й вимогу варто подати у вигляді таблиці або графічної ілюстрації [15].

Існують різноманітні організаційні форми щодо розв'язання задач.

На уроці можливе:

колективне фронтальне розв'язування задач,

колективна робота окремих груп,

самостійне розв'язування.

Готуючись до колективної фронтальної роботи, треба подумати й записати в конспекти систему запитань, що стосуються пошуку розв'язання. Серед них варто на прості запитання пропонувати відповідати слабкішим учням, щоб і їх залучити до процесу пошуку способу розв'язання задачі. Іноді спосіб розв'язання знаходять сильні учні, а реалізацію його на дошці доцільно запропонувати середньому чи слабкому учневі. Не можна допускати, щоб учні механічно переписували розв'язання задачі з дошки, не усвідомивши способу. Тому в процесі оформлення розв'язання можна пропонувати окремим учням пояснити, чому виконується та чи інша дія або яким має бути наступний крок розв'язання [16].

За групової форми організації розв'язування задач на уроці вчитель повинен підготувати для кожної групи набір задач відповідно до здібностей учнів групи та під час уроку контролювати діяльність кожної групи й надавати допомогу тій, яка більше її потребує. Інколи варто спеціально провести консультацію (3-5 хв), в якій активну участь братимуть сильніші учні, а не лише вчитель [16].

Можливі різні форми організації самостійного розв'язування учнями задач на уроці. Це — самостійні роботи здебільшого навчального характеру, але інколи потрібні й контролю. Самостійні роботи можуть тривати цілий урок, але частіше — частину уроку. Залежно від мети такі роботи можуть проводитись на початку, в середині та наприкінці уроку. Інколи два учні розв'язують задачу на відкритих дошках, і відразу по закінченні допущені помилки виправляються. Можлива й усна фронтальна перевірка за етапами розв'язання задач і вправ [16].

Отже, до складу уміння розв'язувати текстові задачі в загальному випадку входять такі дії, як: аналіз задачі (виділення умов і вимог); встановлення суттєвих зв'язків між відомими та шуканими; виділення величин, значення яких прирівнюватимуться, позначення невідомої та подання потрібних величин через введену невідому; складання рівняння і його розв'язання; перевірка розв'язання задачі.

З огляду на той факт, що успішно аналізувати формулювання задачі учні можуть лише тоді, коли вони засвоїли її зміст, важливо правильно подати задачу учням, а також обрати форму організації роботи з текстовими задачами.

2.8 Дослідження умінь учнів розв'язувати текстові задачі

Процес навчання розв'язуванню математичних текстових задач в загальноосвітній школі можна умовно розбивають на такі етапи (рис. 2.4).

Пропедевтичний етап. На пропедевтичному етапі до кінця початкової школи учні повинні знати:

- характерні риси текстової математичної задачі;
- різні способи оформлення короткого запису задачі;
- різні способи оформлення розв'язання задачі;
- про раціональний і нераціональний способи розв'язання задачі;- про алгебраїчний метод розв'язання задачі [42].

Рис. 2.4 Етапи процесу навчання розв'язуванню текстових задач

Розрізняти:

- структурні елементи задач (умова, питання, дано, шукане).

Уміти:

- визначати, чи є задачею наведений текст;
- виділяти основні елементи задачі;
- доповнювати наданий текст елементами, яких бракує, тим самим перетворивши його в задачу;
- встановлювати відповідність задач, наданих з різним формулюванням, заміняти складне формулювання на простіше;
- аналізувати текст задачі, починаючи з її запитання, та встановлювати необхідну для отримання її розв'язку кількість дій, їх сутність та порядок;
- записувати розв'язання задачі по діях з питаннями або поясненнями, а також складанням виразу для здійснення обчислення [42].

Емпіричний етап. Розв'язання текстових задач виступає традиційно одним з ключових та найбільш важливих видів навчальної діяльності для учнів 5, 6 класів. На цьому етапі їх сприйняття у здобувачів освіти розвивається логічне мислення, первинні навички абстрагування, відбувається перше знайомство з математичним моделюванням.

При закінченні 6 класу учні вже повинні вміти розв'язувати такі передбачені програмою задачі:

- в яких передбачається розуміння відношень «більше на або в», «менше на або в»;

- із відомими залежностями між такими величинами, як швидкість, час, відстань; ціна, кількість, вартість тощо;
- з алгебраїчним методом розв'язування;
- з використанням методу пропорцій,
- три основні задачі на відсотки: знаходження заданого відсотка від величини; знаходження числа за відомим відсотком; знаходження відсоткового відношення двох величин [12].

Систематичний етап. До кінця 9 класу учні повинні уміти розв'язувати наступні задачі, передбачені програмою:

- задачі на рух, а саме:
  - задачі на зустрічний рух двох тіл;
  - задачі на рух двох тіл в одному напрямі (рух починається одночасно з різних пунктів, рух починається в різний час з одного пункту);
  - задачі на рух двох тіл в протилежних напрямах;
  - задачі на рух річкою [8].
- задачі, пов'язані з різними процесами (робота, наповнення басейнів тощо), з використанням арифметичного методу, алгебраїчного методу, а також деяких спеціальних методів, наприклад, геометричного [2].

Творчий етап. Вищим рівнем продуктивного мислення виступає саме творче мислення. До показників, які використовують для складання враження про творче мислення, відносять:

– оригінальність думки, можливість отримання відповідей, швидкість виникнення незвичайних асоціативних зв'язків;
– «сприйнятливість» до проблеми, її незвичне рішення;
– побіжність думки як кількість асоціацій, ідей, що з'являється в одиницю часу відповідно до деякої вимоги;
– здатність знайти нові, незвичні функції відповіді або його частини [50].

За можливості мислити творчо спостерігаються здібності до самостійної постановки проблеми, чутливість до наявних в знаннях недоліках, можливість самостійно будувати гіпотези про елементи, що відсутні у цих знаннях тощо.

За Яценко С.Є. [30] творча діяльність учнів буде залежати від наявності в мисленні таких компонентів:

1. Високого рівня сформованості елементарних розумових операцій: аналізу і синтезу, порівняння й аналогії, класифікації тощо;

2. Високого рівня активності та неординарності мислення, який проявляє себе в доборі різноманітних варіантів розв'язань поставленої проблеми та висуненні нестандартних ідей;

3. Високого рівня організованості мислення та його чітка цілеспрямованість, яка проявляє себе в умінні виділяти істотні риси в явищі та у свідомості власних способів мислення [20].

Отже, саме продуктивне мислення буде виступати найважливішим компонентом в процесі пізнавальної діяльності здобувачів освіти. Без його цілеспрямованого розвитку унеможливлюється досягнення високих результатів в процесі опанування учнями системою математичних знань, умінь і навичок.

ВИСНОВКИ

В курсі математики основної школи логічно продовжується реалізація завдань математичної освіти учнів, розпочату в початкових класах, розширивши та доповнивши ці завдання відповідно до вікових можливостей школярів. В основу побудови змісту навчання математики покладено компетентний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні якості здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях і нести відповідальність за свої дії.

Таким чином, враховуючи попередній аналіз методичної літератури з проблеми дослідження та багаторічну практику спілкування з вчителями основної школи, можна виокремити загальні методичні рекомендації до реалізації принципу наступності у процесі фахової підготовки майбутніх учителів математики.

Отже, для успішного розв'язування текстових задач в 5-му класі потрібно мати такі навички:

- розв'язувати типові задачі;
- розв'язувати елементарні задачі;
- володіти загальними методами та окремими способами розв'язувати задачі.

Вміння розв'язувати текстові задачі сформовується за допомогою системи текстових задач. При розв'язуванні системи учні приходять до узагальнень, тобто вони відкривають метод розв'язування певного типу, далі йдуть задачі на застосування методу, а потім — нестандартні задачі, в основному задачі підвищеної складності та задачі на кмітливість.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз В.Г., Васильєва Д.В. Збірник завдань з математики ДПА 2020. Харків: «Освіта», 2020. 80 с.

2. Березняк М.В. Підсумкові контрольні роботи Математика 9 клас. Тернопіль: «Підручники і Посібники», 2019. 64 с.

3. Богданович М.В., Козак М.В., Король Я.А. Методика викладання математики: Навч. пос. Тернопіль: Навчальна книга -Богдан, 2008. 336 с.

4. Бурда М. І. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики, 9 клас. Харків: Гімназія, 2010. 256 с.

5. Вигівська Л. Розвязування задач за допомогою рівнянь. Алгебра, 7 клас. Математика. 2006. №16 (364). С. 3— 5.

6. Власенко О. І. Методика викладання математики. Загальні питання: навч. посібник. Київ: Вища школа, 1974. 208 с.

7. Глущенко Л. Задачі на відсотки. Математика. 2008. № 23 (467). С.5_9.

8. Глущенко Л. Розвязування текстових задач. Математика. 2008.№31_32 (475 - 476). С. 22_48.

9. Гоменюк Г. В. Методичні засади реалізації компетентністного підходу в навчанні алгебри учнів основної школи: автореф. дис…канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2016. 24 с.

10. Дубинчук О. С., Мальований Ю. І., Дичек Н. П. Методика викладання алгебри в 7 — 9 класах: посібник для вчителя. Київ: Радянська школа, 1991. 254 с.

11. Збірник задач і контрольних робіт з алгебри для 9 класу / Мерзляк А.Г. та ін. Харків: Гімназія, 2009. 128 с.

12. Істер О.С. Математика 5 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Київ: «Генеза», 2018. 288 с.

13. Істер О.С. Математика 6 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Київ: «Генеза», 2014. 296 с.

14. Істер О.С. Математика 7 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Київ: «Генеза», 2015. 256 с.

15. Істер О.С. Математика 8 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Київ: «Генеза», 2016. 272 с.

16. Істер О.С. Математика 9 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Київ: «Генеза», 2017. 264 с.

17. Істер О.С., Єргіна О.В. Збірник ДПА 2018 з математики. 9 клас. Київ: «Генеза», 2017. 33 с.

18. Істер О.С., Єргіна О.В. Збірник ДПА 2019 з математики. 9 клас. Київ: «Генеза», 2019. 41 с.

19. Колячин Ю.М. Оганесян В.А. Учись решать задачи. М.: Просвещение, 1980. 96 с.

20. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: методичний посібник / О. І. Глобін та ін. Київ: Педагогічна думка, 2015. 245 с.

21. Костевська Л. Задачі на спільну роботу. Алгебра, 8 клас. Математика. 2005. №10 (310). С. 14_15.

22. Крамор В.С. Готовимся к экзамену по математике. Москва: ОНИКС, 2008. 544 с.

23. Критерії оцінювання ДПА з математики 9 клас: Пояснювальна записка. URL: http://ml-nikolaev.at.ua/news2019/DPAmatem9.pdf.

24. Лев А. Я. Повторення курсу алгебри. Підготовка до ЗНО (розвязування текстових задач). Львів: Управління освіти департаменту гуманітарної політики, 2013. 62 с.

25. Математика. 5 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Н.А. Тарасенкова та ін. Київ: «Освіта», 2018. 240 с.

26. Математика. 6 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Н.А. Тарасенкова та ін. Київ: «Освіта», 2014. 304 с.

27. Математика. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів 5 -12 класи. Київ: Ірпінь, 2005. 64 с.

28. Матяш О. І. Система задач на урок як засіб підвищення ефективності навчання геометрії в школі. Сучасні інформаційні технології та інноваційні

методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. 2010. Вип. 26. С. 39-44.

29. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Збірник завдань з математики для підготовки до державної підсумкової атестації. Харків: Гімназія, 2017. 160 с.

30. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика. 5 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Харків: Гімназія, 2018.272 с.

31. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика. 6 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Харків: Гімназія, 2014.400 с.

32. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика. 7 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Харків: Гімназія, 2015.256 с.

33. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика. 8 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Харків: Гімназія, 2016.240 с.

34. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика. 9 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти. Харків: Гімназія, 2017.272 с.

35. Методи і способи розвязування задач. URL: http://lib.mdpu.org.ua/ebook/ernestbook/temas/6_2.htm.

36. Михайленко Л. Ф., Ковальчук М. Б. Розвязування текстових задач як засіб формування математичної компетентності старшокласників. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. 2016. Вип.46. С.65-69.

37. Моторіна В. Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів. Харків: Вид. Іванченко І. С., 2012. 318 с.

38.Никитина М.П. О сознательном усвоении математических понятий //Начальная школа. - 2000. - №3. – С. 39-42.

39. Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей: Пер. с англ.. В.Г.Звонаревой и Д.Н.Белла; Под ред. Ю.М.Гайдука. Изд. 2-е. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.

40. Скворцова С.О. Методика розв’язування задач на спільну роботу //Наша школа. - 2002. - № 3. С. 25-31.

41. Скворцова С.О. Ознайомлення з задачами на рух назустріч та у протилежних напрямках // Початкова школа. - 2004. - № 10. – С.23-27

42. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с

43. Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике: История, теория, методика. – М.: Школьная Пресса, 2002. – 208 с.