Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:
Методика вивчення функцій в класах з поглибленим вивченням математики

Виконала: студентка IV курсу,
групи МЕІ-41
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Стельмах Надія Григорівна

Керівник: кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики з методикою викладання Генсіцька-Антонюк Н. О.

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики РДГУ Присяжнюк І. М.

Рівне – 2021 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Матеріал, що стосується функцій та їх графіків, становить значну частину шкільного курсу математики. Це пояснюється тим, що графіки функцій широко використовують в різних розділах математики та застосовують при розв'язуванні різних прикладних задач. Поведінка функціональних залежностей, відображена графіками в курсі вивчення алгебри та початків аналізу, дозволяє учням детально дослідити властивості, якими наділена функція.

Значні труднощі при вивченні розділу «Функції» в шкільному курсі виникають у зв'язку з не відповідністю між досить великим обсягом матеріалу та відносно невеликою кількістю годин, які виділяють для вивчення даної теми. Також, виникнення труднощів значною мірою пояснюється тим, що питання графічного зображення функцій у шкільному курсі алгебри розглядаються в різних розділах, що відповідно й впливає на засвоєння важливих і необхідних знань.

Практика показує, що при побудові графіків учні, як правило, заучують і запам'ятовують зовнішнє, формальне, символічне, образне та схематичне вираження функції і графіки будують лише формально, а не свідомо, маючи цілісне уявлення про конкретну функцію.

Відповідно багато праць та досліджень було присвячено даній темі. Наприклад, у методиці викладання математики Г. П. Бевз пропонує тактику викладання цієї теми так, щоб мати найкращий результат засвоєння знань учнями [8]. Також, над проблемою вивчення функцій та побудови їх графіків працювали Л. Т. Гейченко, Л. В. Стахурська, З. І. Слєпкань, І. М. Гельфанд та багато інших.

Задачі з функціональної залежності розглядали: Г. П. Бевз, О. Я. Біляніна, О. С. Істер, А. Г. Мерзляк та інші.

Таким чином, врахувавши актуальність зазначеної проблеми, а також цінність в програмі вивчення шкільної математики (алгебри та початків аналізу), нами була обрана тема бакалаврської роботи «Методика вивчення функцій в класах з поглибленим вивченням математики».

Мета дослідження – систематизувати знання про функції, властивості, особливості і методи побудови їх графіків; проаналізувати методики викладання цієї теми у шкільному курсі математики.

Для досягнення поставленої мети, визначено такі **задачі дослідження**:

1. Дослідити наявну науково – методологічну літературу, що стосується даної теми.
2. Проаналізувати шкільну програму та сучасні підручники з алгебри.
3. З'ясувати місце даної теми у курсі шкільної математики та визначити вимоги очікуваних результатів отримання знань, умінь і навичок поставлених школярам.
4. Систематизувати теоретичні та методичні основи вивчення функцій та побудови їх графіків, навести методику розв'язування типових задач з теми дослідження.
5. Проаналізувати зовнішнє незалежне оцінювання з математики, що стосується теми дослідження.
6. Навести методику розв'язування типових завдань з теми дослідження.

Об'єкт дослідження – процес навчання учнів алгебри в класах з поглибленим вивченням математики.

Предмет дослідження – методика вивчення функцій, їх властивостей та особливостей побудови графіків в шкільному курсі математики.

Основні методи дослідження: теоретичний аналіз; критичний аналіз; теоретичний синтез; спостереження за освітнім процесом у старших класах, бесіди з учителями математики, описовий метод.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідження були впроваджені продовж 2020-2021 навчального року в Полянському ліцеї (с. Поляни, Рівненський р-н., Рівненська обл.). Основні положення та висновки дослідження були представлені на звітній науково-практичній конференції РДГУ (Рівне, 2021).

Практичне значення роботи полягає в тому, що систематизовані матеріали дослідження можуть бути використані вчителями в освітній діяльні та студентами педагогічних ЗВО під час опрацювання питань з методики вивчення математики також абітурієнтами при підготовці до ЗНО.

Структура та обсяг роботи. Запропоноване дослідження складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг бакалаврської роботи – 83 сторінки.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Поняття функції та їх класифікація

Поняття функції є одним з основних понять у математиці, яке широко використовують для математичного опису різноманітних явищ. Історія його виникнення свідчить, що чіткого означення не було введено навіть тоді, як І. Ньютон та Г. Лейбніц відкрили інтегральне та диференціальне числення. Г. Лейбніц вжив вперше термін «функція» у своєму листі до Гюйгенса 1673 року, де в основу поняття функції він поклав відрізок, довжина якого змінюється за певним законом. Згодом розпочинаючи з 1698 року, відомий математик також вводить поняття «змінна» та «константа» [20].

Поняття «функції» вчений пов’язав з геометричними уявленнями, але не ввів його означення. Лише у 1718 році Й. Бернуллі, учень Г. Лейбніца сформулював перше визначення: функція змінної величини – це кількість, що утворена з цієї змінної величини та сталих будь-якими способами. У 1748 Л. Ейлер уточнив дане означення: функцією змінної величини називають аналітичний вираз, що складений певним чином з цієї кількості і чисел або сталих кількостей [35, 10].

На даному етапі трактування поняття функції поділяють на два основні блоки. Перший блок об'єднує визначення, які можна віднести до класичних, традиційних, що спирається на поняття змінної величини [25]. Ці визначення використовуються і в школі при першому знайомстві з функцією, повторюючи історичний шлях розвитку поняття функції (Див. рис. 1.1.1).

Такого роду визначення з'явилися раніше, аніж другий блок визначень, які відносять до сучасних. В основі даних визначень лежить теорія множин (Див. рис. 1.1.2) [25].

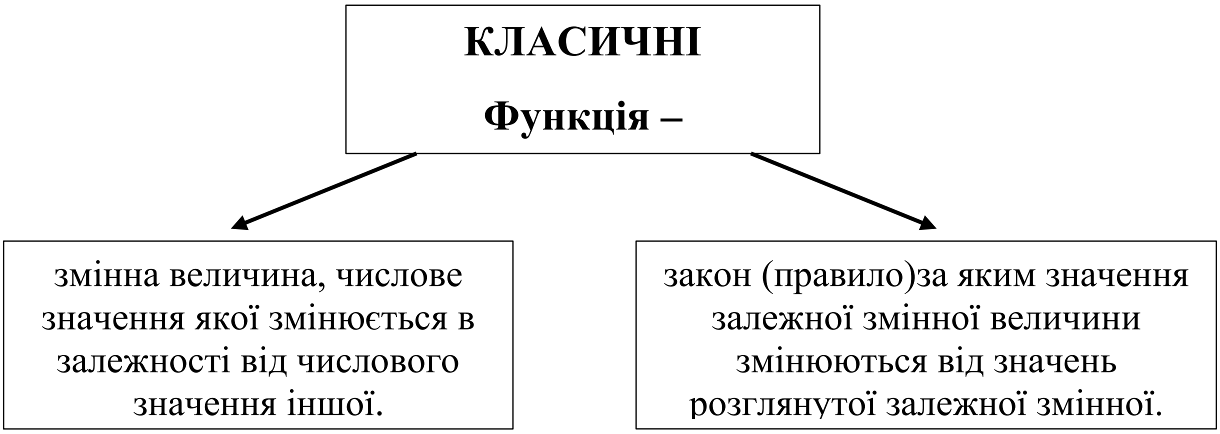


Рис. 1.1.1. Класичне означення функції

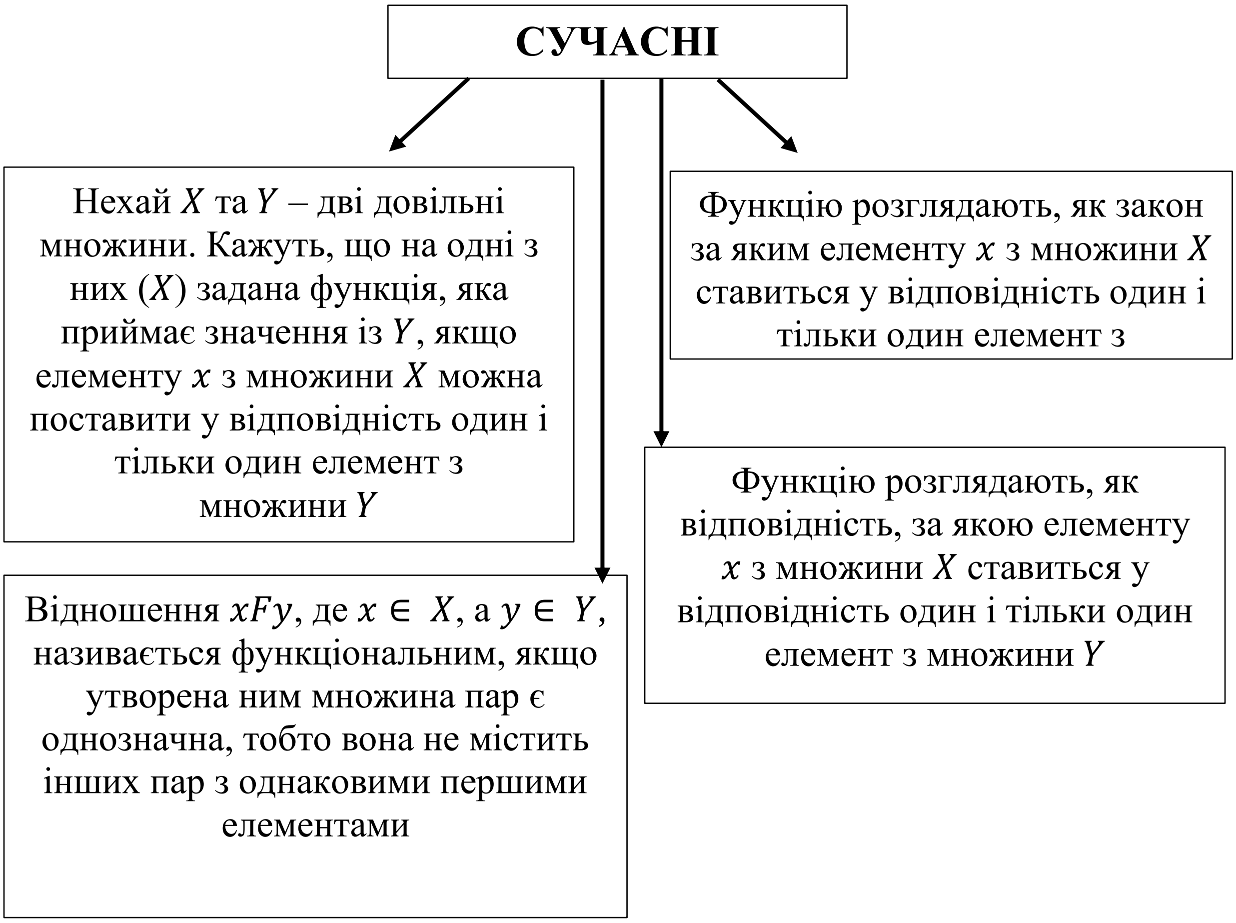


Рис. 1.1.2. Сучасне означення функції

Незважаючи на різні формулювання визначень функції в них можна виділити загальні моменти [32]:

1) під терміном «функція» за стандартом розуміють числові функції (вони і є об'єктом вивчення в школі);

2) термін «змінна» використовується для загального позначення різних змінних величин;
3) підкреслюється одночасна наявність двох нерівноправних змінних (x і y);
4) чітко виділена основна характерна ознака функції – однозначність (в школі вивчаються лише однозначні функції);
5) мова не йде про будь-який спосіб задання функції (це окреме питання для вивчення).

З поняттям функції пов'язана певна система загальноприйнятих понять (числова функція, область визначення і значень, способи задання, графік, зростання і спадання, парність і непарність, нулі (корені) функції, знакосталість, монотонність, екстремуми, періодичність, обернена і складна функції, безперервність або розривність, приріст аргументу і функції, диференційованість, інтегрованість і ін.). Багато з перерахованих понять є і властивістю функції і назвою окремого виду функцій. Наприклад, властивість періодичності однієї з тригонометричних функцій вказує одночасно на приналежність її до виду періодичних функцій, що виділяються даними властивістю [32].

Важливе місце у функціональній лінії приділяється глибокому вивченню класу функцій, які отримали назву елементарних (не значить простих), які мають широку сферу застосування. До елементарних функцій, які вже до XVII ст. були добре вивчені, відносять многочлени, раціональні та ірраціональні функції, показникову, логарифмічну, тригонометричні і обернені тригонометричні функції. Цей набір функцій тісно пов'язаний з основними арифметичними операціями (додавання, віднімання, множення, ділення), алгебраїчними операціями (піднесення до степеня з цілим показником, добування кореня) і трансцендентними операціями (піднесення до ірраціонального показника, логарифмування, тригонометричними, модуль), поняттям безперервності і геометричними перетвореннями, що дозволяє встановлювати зв'язки функціональної лінії з іншими змістовно-методичними лініями [32].

Класифікацію елементарних функцій можна представити у наступному вигляді:

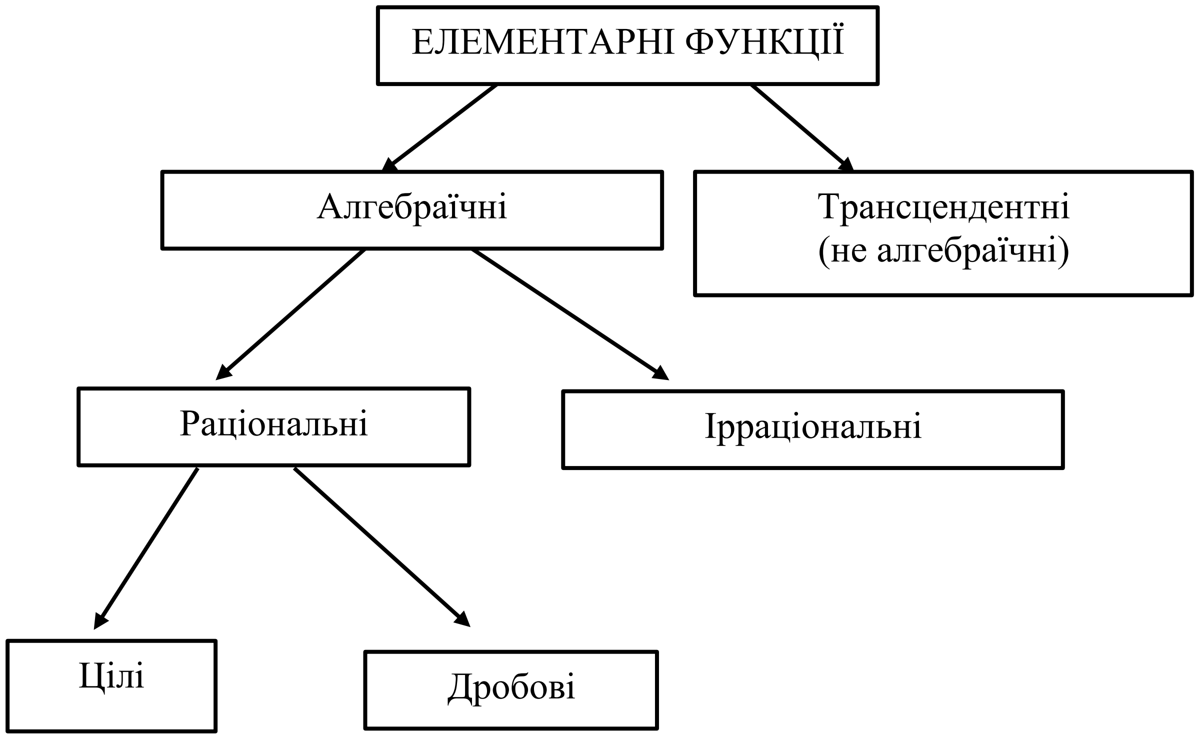


Рис. 1.1.3. Класифікація функції

1.2. Побудова графіків за допомогою геометричних перетворень елементарних функцій

Існує декілька способів побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень елементарних функцій. Розглянемо основні з них.

Побудова графіка функції виду $y = -f(x)$

Згідно з означенням графік функції $y = f(x)$ складається з сукупності точок N координатної площини, що мають координати $(x;\ y) = (x; f(x))$. В свою чергу графік функції $y = -f(x)$ складається з сукупності точок K координатної площини, що мають координати $(x; y) = (x; -f(x))$. Очевидно, що точки $N(x; f(x))$ і $K(x; -f(x))$ на координатній площині розміщено симетрично одна одній відносно осі Ox.

Отже, всі точки K графіка функції $y = -f(x)$ отримуються відображенням точок N графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Ox [19, 6].

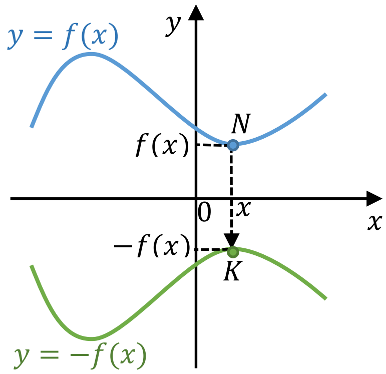


Рис.1.2.1. Побудова графіка функції виду $y = -f(x)$

Для прикладу розглянемо графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x^2$ (Див. рис. 1.2.2).

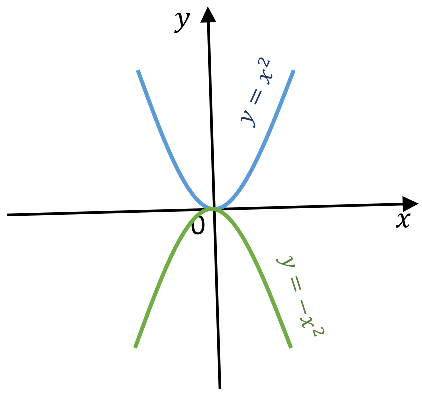


Рис.1.2.2. Графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x^2$

З рисунку чудово видно, що графік функції $y = -x^2$ можна отримати симетричним відображенням відносно осі Ox з графіка функції $y = x^2$.

Таким чином, *графік функції $y = -f(x)$ можна отримати симетричним відображенням відносно осі Ox графіка функції $y = f(x)$* [6, 9].

Побудова графіка функції виду $y = f(-x)$

Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$ перш за все підмітимо те, що в означенні графіка даної функції, перша координата для отримання точок графіка обирається довільно з урахуванням того, що вона не виходить за межі області визначення функції. У випадку обрання першою координатою $(-x)$

графік функції $y = f(-x)$ буде складатися з сукупності точок F координатної площини, що мають координати $(-x; y) = \left(-x; f(x)\right)$. В свою чергу точки N графіка функції $y = f(x)$ мають координати $(x; y) = \left(x, f(x)\right)$ [1, 2].

З малюнка зображеного знизу чудово видно, що точки $N(x, f(x))$ та $F\left(-x; f(x)\right)$ є симетричними відносно осі Oy координатної площини. Таким чином, кожна точка F, з яких утворений графік функції $y = f(-x)$ отримується симетричним відображенням точок $N(x, f(x))$ графіка функції $y = f(x)$. відносно осі Oy [3].

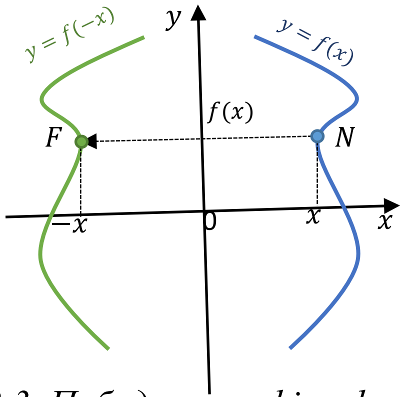


Рис.1.2.3. Побудова графіка функції виду $y = f(-x)$

Отже*, графік функції* $y = f(-x)$ *можна отримати симетричним відображенням відносно осі* Oy *графіка функції* $y = f(x)$ *[6, 9].*

Побудова графіка функції виду $\boldsymbol{y = f(x - a)}$

Нехай маємо побудований графік функції $y = f(x)$, який є сукупністю точок M з координатами $(x; y) = (x; f(x))$.

Для побудови графіка функції $y = f(x - a)$ за першу координату точки N даного графіка виберемо значення $x + a$. Отже, графіком функції $y = f(x - a)$ буде сукупність точок N координатної площини, з координатами

$$(x + a; y) = \left(x + a; f(x + a - a)\right) = \left(x + a; f(x)\right).$$

Очевидно, що кожна точка M графіка функції $y = f(x)$ має координати $\left(x; f(x)\right)$, а точка N графіка функції $y = f(x - a)$ має координати $\left(x + a; f(x)\right)$, тому в результаті отримуємо перетворення точок M у N

$$\left(\left(x; f(x)\right) \to \left(x + a; f(x)\right).\right)$$

Таким чином, маємо паралельне перенесення точок $M(x; y)$ графіка функції $y = f(x)$ у точки $N(x + a; y)$ графіка функції $y = f(x - a)$ на a одиниць вздовж осі Ox.

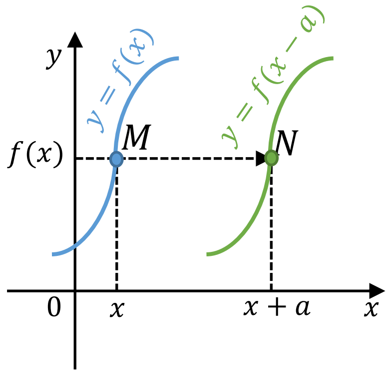


Рис.1.2.4. Побудова графіка функції виду $y = f(x - a)$

Таким чином, *графік функції* $y = f(x - a)$ *можна отримати паралельним перенесенням вздовж осі* Ox *на* a *одиниць графіка функції* $y = f(x)$.

Побудова графіка функції виду $y = f(x) + b$

Нехай маємо деяку функцію $y = f(x)$. Графіком даної функції є геометричне місце деяких точок K з координатами $(x; f(x))$.

Тоді графіком функції $y = f(x) + b$ є множина деяких точок M з координатами $(x; y) = (x; f(x) + b)$. Отже, маємо таке перетворення точок – $(x; f(x)) \to (x; f(x) + b)$, що характеризує паралельне перенесення точки K вздовж осі Oy на b одиниць [9].

Якщо ж точки K графіка функції $y = f(x)$, мають координати $(x; y)$, тоді точки M графіка функції $y = f(x) + b$ мають координати $(x; y + b)$, то очевидно, що точки M отримуються паралельним перенесенням точок K.

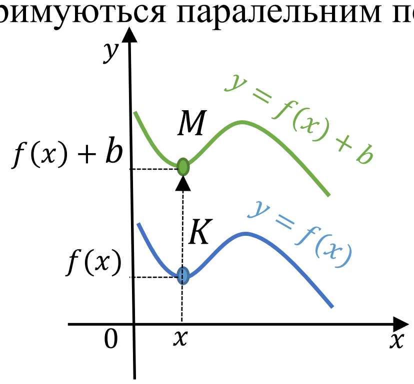


Рис.1.2.5. Побудова графіка функції виду $y = f(x) + b$

Таким чином, *графік функції* $y = f(x) + b$ *можна отримати паралельним перенесенням вздовж осі* Oy *на* b *одиниць графіка функції* $y = f(x)$ [9, 6].

Побудова графіка функції виду $\boldsymbol{y = kf(x)}$

Нехай маємо графік функції $y = f(x)$ – сукупність усіх точок M з координатами $(x; f(x))$. В свою чергу графік функції $y = kf(x)$ складається з сукупності точок Kз координатами $(x; kf(x))$. Тобто між точками M і K графіків функцій $y = f(x)$ та $y = kf(x)$ можна встановити відповідність, причому взаємно однозначну.

Якщо $k > 0$, то у графіків функції $y = f(x)$ та $y = kf(x)$ абсциси кожної точки однакові, а ординати відрізняються відповідно у k разів. Таким чином, кожну ординату точки графіка функції $y = kf(x)$ можна отримати помноживши на k відповідну ординату точки графіка функції $y = f(x)$.

Отже, якщо ж графік функції $y = f(x)$ складається з сукупності точок M з координатами $(x; y)$, то графік функції $y = kf(x) -$ сукупність точок K, що мають координати $(x; ky)$. Очевидно, що при даному перетворенні графік функції $y = f(x)$ буде або ж стискатися до осі Ox, у випадку, коли $0 < k < 1$, або ж розтягуватися при $k > 1$.

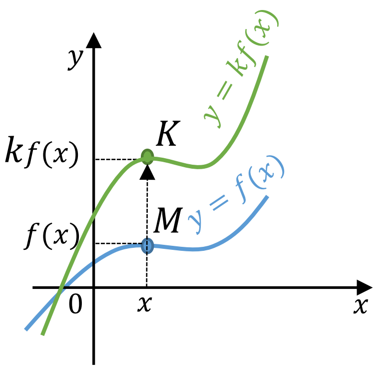


Рис.1.2.6. Побудова графіка функції виду $y = kf(x)$

Таким чином, *побудувати графік функції* $y = kf(x)$ *можна з графіка функції* $y = f(x)$*, а саме за допомогою:*

- *розтягу графіка функції* $y = f(x)$ *вздовж осі ординат* Oy *у* k *разів від точки* $(0; 0)$*, якщо* $k > 1$*;*
- *стиску графіка функції* $y = f(x)$ *вздовж осі ординат* Oy *у* $\frac{1}{k}$ *разів до точки* $(0; 0)$*, якщо* $0 < k < 1$.

Побудова графіка функції $y = f(kx)$

Нехай маємо графік функції $y = f(x)$ – сукупність усіх точок M з координатами $(x; f(x))$. В свою чергу графік функції $y = f(kx)$ складається з сукупності точок K відповідно з координатами $\left(x; f(kx)\right)$ при $k \neq 0$. Оберемо за першу координату графіка функції $y = f(kx)$ значення $\frac{x}{k}$. Тоді точки K матимуть координати $\left(x; f(kx)\right) = \left(\frac{x}{k}; f\left(k \cdot \frac{x}{k}\right)\right) = (\frac{x}{k}; f(x))$.

Як бачимо, координати точок графіка функції $y = f(kx)$ відрізняються від координат точок графіка функції $y = f(x)$ лише абцисами. Тобто, якщо точки M мають координати $(x; y)$, то точки K мають координати $\left(\frac{x}{k}; y\right)$. Таким чином, точки K графіка функції $y = f(kx)$ можна отримати внаслідок розтягу (якщо $0 < k < 1$ з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$) або ж стиску (якщо $k > 1$ з коефіцієнтом) вздовж осі Ox точок M графіка функції $y = f(x)$ [9].

Таким чином, *побудувати графік функції* $y = f(kx)$ *можна з графіка функції* $y = f(x)$*, а саме за допомогою:*

- *розтягу графіка функції* $y = f(x)$ *вздовж осі абсцис* Ox *у* $\frac{1}{k}$ *разів від точки* $(0; 0)$*, якщо* $0 < k < 1$*;*
- *стиску графіка функції* $y = f(x)$ *вздовж осі абсцис* Ox *у* k *разів до точки* $(0; 0)$*, якщо* $k > 1$ [9].

Побудова графіка функції $y = |f(x)|$

Для того, щоб з'ясувати, як побудувати графік функції $y = |f(x)|$ розглянемо, що ж собою являє модуль:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{якщо } f(x) \geq 0; \\ -f(x), \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отже, побудувавши графік функції $y = f(x)$ маємо (не обов'язково) частину графіка, що зосереджена вище осі абсцис та частину розміщену нижче. Тоді, за властивістю модуля частина графіка функції $y = |f(x)|$, що знаходиться вище осі Ox залишається незмінною, а частина розміщена нижче осі Ox відображається симетрично відносно осі абсцис. В результаті отримаємо графік функції $y = |f(x)|$, що буде розміщений у 1 та 2 частині координатної площини [9].

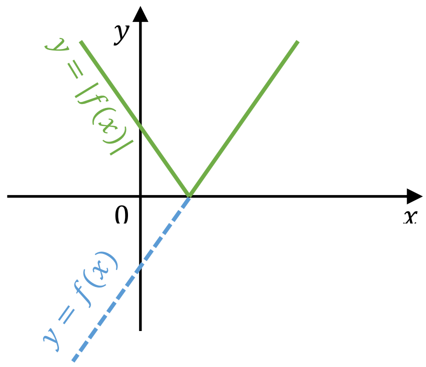


Рис.1.2.7. Побудова графіка функції виду $y = |f(x)|$

Отже, *графік функції* $y = |f(x)|$ *можна отримати з відомого графіка функції* $y = f(x)$ *таким чином:*

- *частину графіка* $y = f(x)$, *що розміщена вище осі абсцис та на самій осі, залишаємо незмінною;*
- *частину графіка* $y = f(x)$, *що розміщена нижче осі* Ox *відобразити симетрично осі абсцис* (Ox) [6].

Побудова графіка функції $|y| = f(x)$

Графік функції $|y| = f(x)$ *можна отримати з графіка функції* $y = f(x)$ *таким чином:*

- *частину графіка* $y = f(x)$, *що розміщена ліворуч нижче осі* Ox – *відкидаємо.*
- *частину графіка* $y = f(x)$, *що розміщена вище осі абсцис та на самій осі, залишаємо незмінною та відображаємо симетрично осі* Ox;

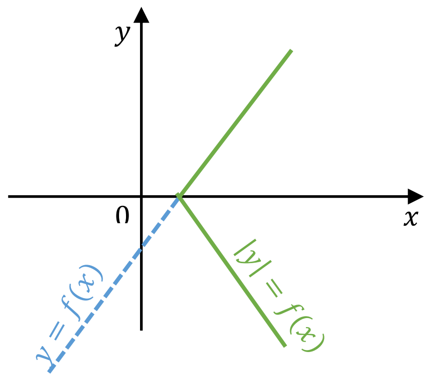


Рис.1.2.8. Побудова графіка функції виду $|y| = f(x)$

Побудова графіка функції $\boldsymbol{y = f(|x|)}$

Аналогічно до попереднього підпункту з’ясуємо, як побудувати графік функції $y = f(|x|)$ за допомогою геометричних перетворень відомого графіка.

Для того, щоб з’ясувати, як побудувати графік функції $y = f(|x|)$, розглянемо, що ж собою являє модуль:

$$y = f(|x|) \ = \begin{cases} f(x), \text{якщо } x \geq 0; \\ f(-x), \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Отже, побудувавши графік функції $y = f(x)$ маємо (не обов’язково) частину графіка, що зосереджена в 1 та 4 частині координат, тобто праворуч від осі Oy, та частину, розміщену ліворуч відносно осі ординат. Тоді, за властивістю модуля випливає, що частина графіка функції $y = f(|x|)$, що знаходиться праворуч відносно осі ординат залишається незмінною і відображається симетрично осі Oy, а частина розміщена ліворуч від осі Oy відкидається.

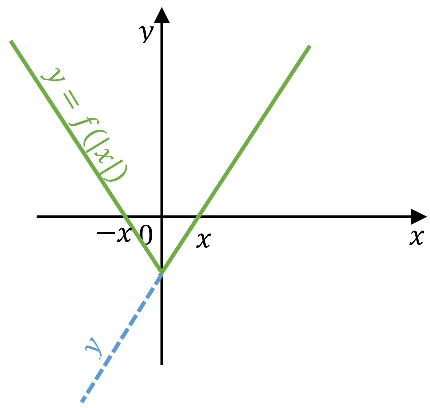


Рис.1.2.9. Побудова графіка функції виду $y = f(|x|)$

Отже, *графік функції* $y = f(|x|)$ *можна отримати з відомого графіка функції* $y = f(x)$ *таким чином:*

- *частину графіка* $y = f(x)$*, що розміщена праворуч відносно осі ординат та на самій осі, залишаємо незмінною та відображаємо симетрично осі* Oy*;*
- *частину графіка* $y = f(x)$*, що розміщена ліворуч від осі* Oy *– відкидаємо.*

Побудова графіка функції $y = mf(kx + a) + b$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$

Щоб побудувати графік функції $y = mf(kx + a) + b$ за відомим графіком функції $y = f(x)$ доцільно користуватися таким алгоритмом [4]:

1) винести за дужки коефіцієнт аргументу x, тобто число k, в результаті чого отримаємо:
$$y = mf\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right) + b;$$
2) утворити допоміжну функцію $y = mf(kx)$ та побудувати її графік, для зручності, можна використовувати пунктирну систему координат;
3) за вивченою властивістю функції, перенести пунктирну вісь Oy на вектор $\overline{\left(\frac{a}{k}; 0\right)}$. В результаті отримаємо основну вісь Oy;
4) знову за вивченою властивістю функції, перенести пунктирну вісь Ox на вектор $\overline{(0; -b)}$. В результаті отримаємо основну вісь Ox;
5) задати в отриманій основній системі координат масштаб відповідний пунктирній системі.

Часто доводиться будувати графіки функцій, які містять модулі та їхніх комбінації. Розглянемо правила найбільш поширених випадків [9]:

а) За модулем взято аргумент, а саме: $y = mf(k|x| + a) + b$. Маючи графік функції $y = mf(kx)$, легко отримати графік функції $y = mf(k|x|)$. Остання функція парна. Отже, при побудові її графіка після переносу осей, зберігаємо ту частину графіка

$y = mf(kx)$, яка розміщена праворуч від осі Oy, та на ній і відобразимо її симетрично відносно осі Oy.

b) Функція приймає тільки невід'ємні значення, а саме: $y = |mf(kx + a) + b|$. Отже, щоб побудувати графік цієї функції, потрібно після переносу осей залишити без змін частину графіка функції, де $y \geq 0$, а частину графіка функції, де $y < 0$, симетрично відобразити відносно осі Ox.

c) Якщо $y = mf\left(k\left|x + \frac{a}{k}\right|\right) + b,$ то функція парна відносно допоміжної осі Oy. Отже, будуємо графік допоміжної функції, здійснюємо перенос осей та зберігаємо ту його частину, яка розміщена праворуч від допоміжної осі Oy та на ній і відобразимо її симетрично відносно допоміжної осі Oy.

d) Якщо $y = |mf(kx + a)| + b$, то функція приймає значення більші або рівні числу b. Отже, щоб побудувати її графік, потрібно побудувати графік допоміжної функції $y = mf(kx),$ перенести осі та залишити без змін частину графіка функції вище допоміжної осі Ox та на ній, а частину графіка функції нижче допоміжної осі Ox симетрично відобразити відносно неї.

Якщо є комбінація модулів, то їх розкриття рекомендуємо виконувати від внутрішніх до зовнішніх модулів.

1.3. Побудова графіків функції з використанням похідної

Для побудови графіка функції, які не можна звести до відомих елементарних, доцільно використовувати схему дослідження тих властивостей функції, які допомагають скласти певне уявлення про вигляд її графіка. Отже, дослідження властивостей функції для побудови її графіка скористаємося загальновідомою схемою [4, с. 140]:

1) знайти область визначення функції;

2) дослідити функцію на парність (або непарність) та періодичність;
3) знайти точки перетину графіка з осями координат;
4) знайти похідну і критичні точки функції;
5) знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму (і значення функції в цих точках);
6) дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення і асимптоти графіка функції (вертикальні, горизонтальні та похилі);
7) дослідження функції на опуклість, точки перегину та значення функцій в цих точках;
8) знайти координати додаткових точок (якщо необхідно уточнити його поведінку);
9) на підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Ця схема є орієнтовною, тому не завжди її потрібно виконувати повністю. Наприклад, не завжди можна точно знайти точки перетину графіка з віссю Ox, навіть якщо ми знаємо, що такі точки існують. Також буває складно дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення. У такому випадку поведінку графіка функції можна уточнити, знайшовши координати точок, абсциси яких обирають так, щоб вони наближалися до кінців проміжків області визначення.

Охарактеризуємо особливості виконання кожного з указаних етапів дослідження функції й особливості врахування одержаних результатів під час побудови графіка функції.

1. Перш за все потрібно з'ясувати і записати область визначення функції. Якщо немає спеціальних обмежень, то функцію вважають заданою при всіх значеннях аргументу, при яких існують усі вирази, що входять до запису функції.

Після знаходження області визначення функції часто буває корисним відмітити її на осі абсцис. Якщо область визначення – уся числова пряма, то ніяких відміток можна не виконувати. Якщо ця область проміжок числової прямої, то корисно провести вертикальні прямі через його кінці. Ці прямі обмежать смугу, у якій буде розташований графік функції. Якщо окремі точки не входять до області визначення функції, то доцільно відмітити їх на осі абсцис і провести через них вертикальні прямі (які не будуть перетинати графік функції).

2. Якщо з'ясується, що задана функція є парною (або непарною), то можна дослідити її властивості та побудувати графік тільки при $x \geq 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі $0y$ (для не парної функції – симетрично відносно початку координат). Якщо ж функція періодична, то достатньо побудувати ї графік на одному відрізку завдовжки T, а потім повторити його на кожному з проміжків довжиною T (тобто паралельно перенести графік уздовж осі $0x$ на Tk, де k - ціле число).

Для обґрунтування парності функції достатньо перевірити, що для всіх x з її області визначення $f(-x) = f(x)$; для непарності – перевірити виконання рівності $f(-x) = -f(x)$, а для періодичності – рівності $f(x + T) = f(x)$, де $T \neq 0$.

3. Щоб знайти точки перетину графіка з осями координат, ураховуємо, що на осі $0y$ значення $x = 0$ (тоді $y = f(0)$, звичайно, якщо це значення існує). На осі $0x$ значення $y = 0$, і тому, щоб знайти відповідні значення x, прирівнюємо задану функцію до нуля і знаходимо корені одержаного рівняння (якщо це рівняння вдається розв'язати).
4. Далі корисно знайти похідну і критичні точки функції – внутрішні точки ї області визначення, у яких похідна дорівнює нулю або не існує. На всіх проміжках, де існує похідна заданої функції, ця функція е неперервною, і її графік на кожному з проміжків буде нерозривною лінією.
5. Використовуючи похідну і критичні точки функції, знаходимо проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції (і значення функції в цих точках). Для цього доцільно відмітити критичні точки функції на її області визначення і знайти знаки похідної в кожному з проміжків, на які

розбивається область визначення. Висновок про зростання або спадання функції на проміжку між критичними точками часто можна зробити, порівнявши значення функції на кінцях цього проміжку (замість знаходження знаку похідної).

Після знаходження значення функції в кожній критичній точці x_0, будуємо відповідні точки на координатній площині звертаючи увагу на поведінку графіка функції в околі точки x_0.

При цьому необхідно враховувати геометричний зміст похідної: якщо $f'(x_0) = 0$, то в точці з абецисою x_0, до графіка функції $y = f(x)$ можна провести дотичну, паралельну осі $0x$. Якщо ж значення $f'(x_0)$не існує, то в точці з абсцисою x_0, графік матиме злом (або дотичну до графіка функції в цій точці не можна провести, або дотична перпендикулярна до осі $0x$).

6. Для того щоб скласти краще уявлення про вигляд графіка функції, доцільно дослідити поведінку функції на кінцях області визначення. При цьому слід розглянути декілька випадків.
   a) Біля точки $x = a$, яка обмежує проміжок області визначення, значення функції прямує до нескінченності. Через точку $x = a$ проводиться вертикальна пряма. Біля даної точки графік функції прямуватиме вгору або вниз, наближаючись до цієї прямої. Її називають вертикальною асимптотою графіка функції. Щоб з'ясувати, угору чи вниз прямуватиме графік функції, достатньо визначити знаки функції зліва і справа від точки a.
   b) Якщо гранична точка $x = a$ входить до області визначення функції, то потрібно знайти значення функції в точці a і побудувати одержану точку.
   c) До області визначення функції входить нескінченний проміжок (або вся числова пряма, або проміжки $(-\infty; a)$ чи $(a; +\infty)$). У цьому випадку корисно уявити собі поведінку графіка функції при

$x \to -\infty$ або при $x \to +\infty$. Наприклад, для функції у $= \frac{1}{x}$ маємо: при $x \to +\infty$ значення $y \to 0$, залишаючись додатним, при $x \to -\infty$ значення $y \to 0$, залишаючись від'ємним. У цьому випадку говорять, що пряма $y = 0$ – горизонтальна асимптота графіка функції).

Інколи при $x \to -\infty$ чи при $x \to +\infty$ можна виділити похилу пряму, до якої необмежено наближається графік функції, так звану похилу асимптоту, яка теж дозволяє краще уявити поведінку графіка

7. Характер опуклості функції на деякому проміжку визначається знаком її другої похідної.
   - якщо $f''(x) \geq 0$, то функція є опуклою вниз на цьому проміжку;
   - якщо $f''(x) \leq 0$, то функція є опуклою вгору на цьому проміжку.
8. Якщо після вказаного дослідження ще потрібно уточнити поведінку графіка функції (наприклад, у тому випадку, коли на якомусь нескінченному проміжку області визначення функція зростає від $-\infty$ до $+\infty$), то слід знайти координати додаткових точок графіка, узявши довільні значения аргументу з потрібного проміжку.

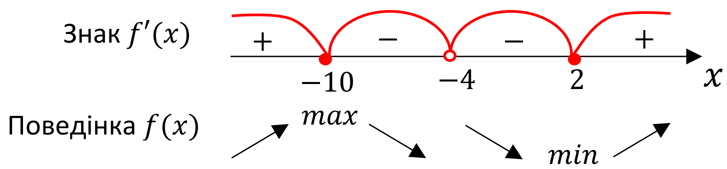
Розглянемо дослідження і побудову графіків функції з використанням похідної на конкретному прикладі.

Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^2-5x}{x+4}$.

1. Область визначення функції: $x \neq -4$ $(D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4);\ +\infty)$.
2. Дослідження на парність (або непарність) та періодичність функції: функція $f(x)$ ні парна ні непарна, оскільки $f(-x) \neq f(x)$ та $f(-x) \neq -f(x)$, неперіодична.
3. Точки перетину графіка з осями координат:
   - на осі Оy значення $x = 0$, тоді $y = 0$;

- на осі $0x$ значення $y = 0$: $\frac{x^2-5x}{x+4} = 0, x^2 - 5x = 0,\ x(x-5) = 0,$ тоді $x = 0$ та $x = 5$ – абсциси точок перетину графіка з віссю $0x$.

4. Похідна і критичні точки функції: $f'(x) = \frac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}$. Похідна існує на всій області визначення функції. Отже, $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення. $f'(x) = \frac{x^2+8x-20}{(x+4)^2} = 0$, при $x \neq -4$ маємо $x^2 + 8x - 20 = 0, x = 2, x = 10$ – критичні точки.
5. Проміжки зростання, спадання та точки екстремуму (і значення функції в цих точках): позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.



Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty;\ -10]$ та $[2;\ +\infty)$ дає на проміжках $[-10;\ -4)$ та $(-4;\ 2]$. Оскільки в критичній точці (-10) похідна змінює знак з « $+$ » на « $-$ », то $x = -10$ – точка максимуму, а в критичній точці 2 похідна змінює знак з « $-$ » на « $+$ », тому $x = -2$ – точка мінімуму.

Таким чином, $x_{max} = -10, y_{max} = -25, x_{min} = 2, y_{min} = -1.$

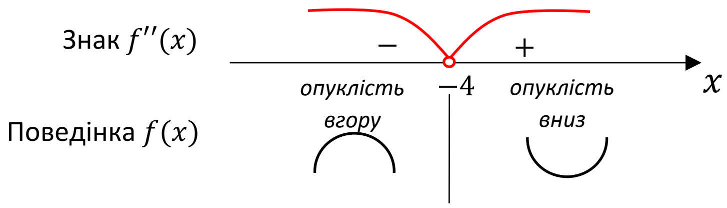
6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення і асимптоти графіка функції (вертикальні, горизонтальні та похилі): при $x \to -4$ зліва $f(x) \to -\infty$, а при $x \to -4$ справа $f(x) \to +\infty$.

Отже, $x = -4$ – вертикальна асимптота. При $x \to \infty$, $f(x) \to x - 9$, тобто пряма $y = x - 9$ – похила асимптота.

7. Дослідження функції на опуклість, точки перегину та значення функцій в цих точках:

$$f''(x) = \left(f'^{(x)} \right)' = \frac{(2x-8)(x+4)^2 - 2(x+4)(x^2+8x-20)}{(x+4)^4} = \frac{72}{(x+4)^3}.$$

Оскільки $f''(x) \neq 0$, то знак другої похідно може змінитися лише в точці $x = -4$. Одержуємо такі знаки другої похідної і відповідний характер опуклості:



8. Координати додаткових точок (якщо необхідно уточнити його поведінку):

x	-7	-2
y	-28	7

9. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.

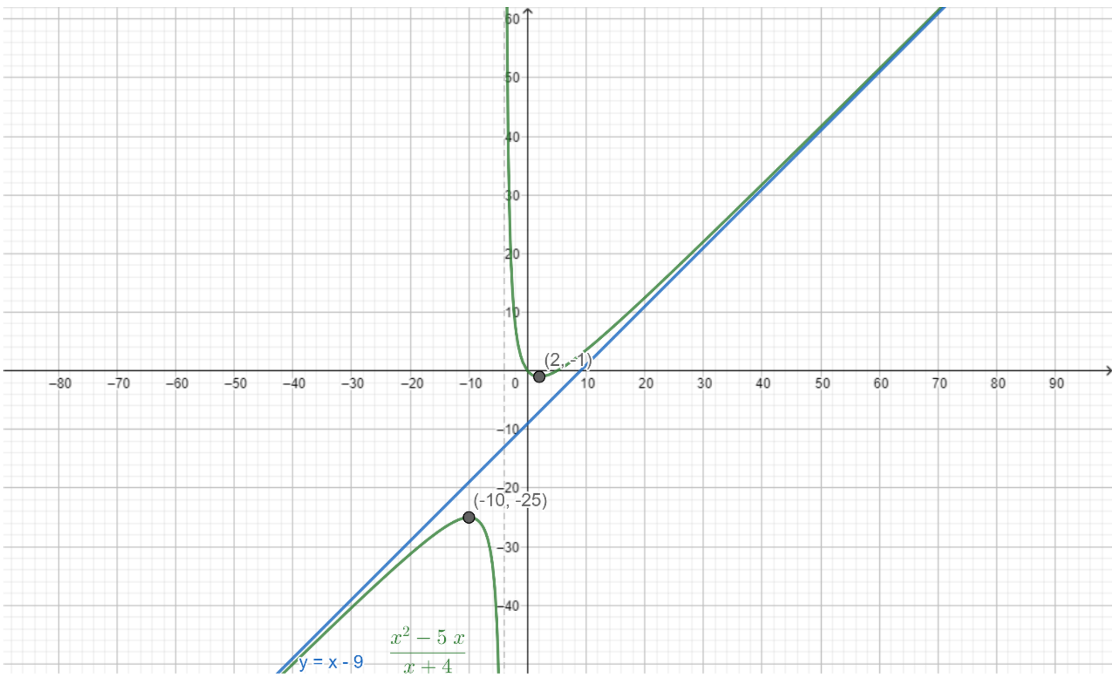


Рис.1.3.1. Графік функції $f(x) = \frac{x^2-5x}{x+4}$.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ

2.1. Методика вивчення лінійної функції

Найелементарнішою функцією, математична модель якої описує дійсні процеси та власне з якої розпочинається вивчення функцій у шкільному курсі математики є лінійна. При розгляді функціональної залежності, учні перш вивчають графік певної функції, тому дуже важливо показати важливість вивчення даного матеріалу з використанням практичних прикладів лінійних залежностей величин, вже відомих для них з математики, інших суміжних предметів та з практичного життя [32, с. 45].

Поняття функції згідно діючої програми з математики вперше вводиться у 7 класі (див. Додаток А). Відповідно у цьому ж класі розпочинається вивчення лінійної функції, її графіка та властивостей.

Здебільшого в шкільних підручниках вивчення теми «Лінійна функція» традиційно розпочинається з прямої пропорційності та її графіка. Ще у 6 класі учні ознайомилися з прямою пропорційністю. Їм відомо, що дві величини називають прямо пропорційними, якщо при збільшенні (зменшенні) однієї з них в декілька разів, друга збільшується (зменшується) в таку ж саму кількість разів. Очевидно, що дане визначення справедливе лише для додатних чисел, тому в курсі алгебри дане визначення замінюється на інше, котре включає також і від'ємні числа [32, с. 45 – 46].

Вивчення прямої пропорційності доцільно розпочати з розгляду декількох вже відомих для учнів задач, розв'язки яких підведуть до необхідного визначення [32, с. 46]. Наприклад:

1) Одного дня Іринка пішла збирати квіти на букети. Вона запланувала у кожну композицію розмістити по 25 квітів. Скільки квітів (h) необхідно зібрати Іринці, щоб скласти n букетів?

2) У шкільну бібліотеку привезли m ящиків книг. Відомо, що у кожному ящику міститься по 30 книг. Скільки книг b привезли до бібліотеки?
3) У м. Рівне побудували нову багатоповерхівку у якій l поверхів. На кожному поверху розміщено по 6 квартир. Скільки квартир (d) у багатоповерхівці?

Учні швидко та легко розв'язують такі задачі та отримують результати, які є прямо пропорційними :

1) $h = 25n, n \in N;$
2) $b = 30m, m \in N;$
3) $d = 6l, l \in N.$

Далі, важливо підмітити, що отримані результати, які виражають різні явища, мають однакову математичну структуру і в загальному вигляді їх можна записати формулою: $y = kx, k \neq 0, x$ та y – змінні.

Таким чином, формулюється визначення: прямою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x – незалежна змінна, $k \neq 0$ – коефіцієнт прямої пропорційності. Для засвоєння учнями даного визначення пропонується вправа на визначення прямої пропорційності серед запропонованих функцій заданих формулою та знаходження коефіцієнта пропорційності.

При пропорційності змінних, вираз, що знаходиться в правій частині формули має сенс при всіх значеннях x і кожному x відповідає один y, відповідно формула задає функцію.

Після цього учням пропонується побудувати декілька графіків функцій $(y = 2x, y = 0{,}5x,\ \ y = -2x)$ за точками, зафіксувавши їх у таблиці. Далі, знайдені точки необхідно позначити на координатні площині і з'єднати за допомогою лінійки.

Таким чином, учні наочно побачать, що графіком функції $y = kx$ є пряма, і дізнаються, що для побудови графіка такої функції достатньо знайти координати двох точок, одна з яких є початком координат [32, с. 47]. Підсумками проведених досліджень стосовно функції $y = kx$ є:

1) графіком функції є пряма;
2) пряма проходить через початок координат;
3) побудову графіка можна виконати за двома точками;
4) при $k > 0$ пряма знаходиться у I і III координатній площині, а при $k < 0$ у II і IV;
5) точка належить прямій, якщо її координати задовольняють умові $y = kx$.

Наступним кроком, пропонується перейти до вивчення конкретно лінійної функції.

При вивченні даної функції доречно задати декілька різних залежностей, які задаються тією ж формулою. Наприклад:

a) залежність шляху s при рівномірному прямолінійному русі від часу t, коли відомий початковий шлях s_0, який пройшло тіло: $s = s_0 + vt$, де s і t змінні, v і s_0 сталі [35];
b) видовження металевого стержня при нагріванні відбувається за формулою $l = kt + l_0$, де температура нагрівання t і довжина стержня за температури l–змінні, l_0 −довжина стержня за температури 0° і $k-$ коефіцієнт лінійного розтягу – сталі [35];
c) вартість телеграми можна виразити за формулою $T = k + nx$, де $k-$ кур'єрський збір, $x-$ кількість слів, n – вартість слова [35].

Лінійна функція виду $y = kx + b$ вивчається у 7 класі. При вивченні даної функції, учні спочатку розглядають, так званий один із видів лінійної функції, а саме: пряму пропорційність – у випадку, коли $b = 0$. Особливість функції $y = kx$, як вже зазначалося полягає у тому, що вона завжди, при будь-якому $k(k \neq 0)$ проходитиме через початок координат. Дійсно, якщо у формулі $y = kx$ замість x підставити 0, то в результаті отримаємо $y = 0$. Тому, щоб побудувати графік прямої пропорційності, необхідно знайти одну точку (відмінну від точки $(0;0)$), та провести пряму, яка сполучатиме початок ординат та знайдену точку [8, 24].

Згодом, потрібно зробити узагальнення. Розглянувши два-три конкретних прикладів лінійної функції, слід дати її означення та перейти до побудови графіка. Для початку можна побудувати графік за точками. Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = 2x + 1$ перш потрібно за допомогою таблиці знайти дві точки, відповідно розмістити на координатній площині та сполучити. В результаті отримаємо шуканий графік функції (Див. рис. 2.1.1.):

x	0	1
y	1	3

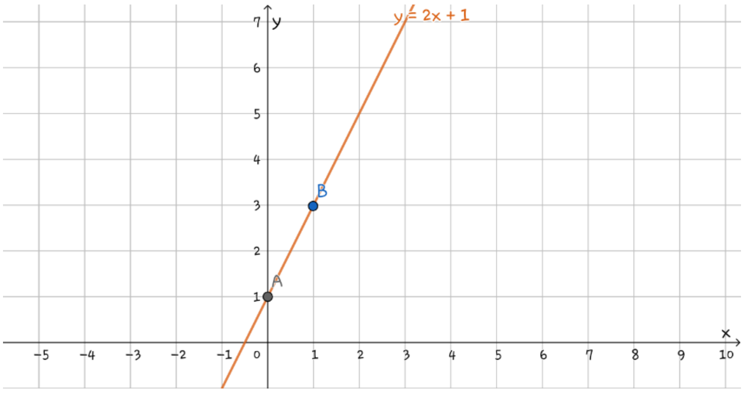


Рис.2.1.1. Графік лінійної функції $y = 2x + 1$

Таким чином, робимо висновок: оскільки графік функції $y = kx$ – пряма лінія, то і графік лінійної функції $y = kx + b$ – також пряма. В свою чергу, вільний член b лінійної функції, показує ординату точки перетину графіка з віссю ординат.

Отже, випливає, що графік функції $y = kx + b$ можна дістати з графіка уже відомої їм функції $y = kx$ за допомогою паралельного перенесення [8]. Тобто побудувати графік $y = 2x$ та підняти його на 1 вгору (Див. рис.2.1.2).

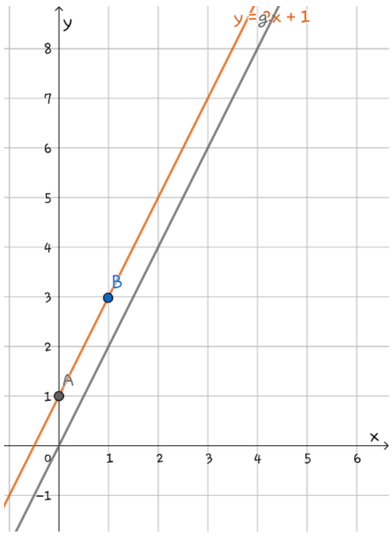


Рис.2.1.2. Побудова графіка функції $y = 2x + 1$ *за допомогою елементарних перетворень*

Продовжуючи вивчення лінійної функції, необхідно розглянути часткові випадки при різних k та b:

1) при $k \neq 0, b = 0$ функція має вже відомий вигляд $y = kx$;
2) при $k = 0, b \neq 0$ функція має вигляд $y = 0 \cdot x + b$ або $y = b$, тоді графік даної функції – пряма паралельна осі абсцис і проходить через точку (0; b);
3) при $k = 0, b = 0$ функція має вигляд $y = 0 \cdot x + 0$ або $y = 0$, тоді графіком буде вісь абсцис.

Важливо підмітити, що вісь ординат не є графіком жодної функції.

Для з’ясування геометричного змісту параметрів b і k В. П. Покровський пропонує задати учням на домашнє завдання – побудувати графіки лінійної функції при різних значеннях вказаних параметрів, а згодом у класі обговорити поставлену проблему [32, с. 50].

В результаті учні повинні дійти до таких висновків:

1) число b є ординатою точки перетину графіка лінійної функції з віссю ординат;
2) число k – кутовий коефіцієнт прямої, головна роль якого – визначати кут нахилу прямої до додатного напряму осі абсцис:

якщо $k > 0$ – пряма утворює гострий кут, якщо $k < 0$ – кут тупий (від k залежить «ступінь кривизни» прямої).

Важливо підмітити , що для загального вигляду розглядуваної функції коефіцієнт k не є коефіцієнтом пропорційності, оскільки значення лінійної функції не пропорційне значенню її аргумента.

Лінійну функцію застосовують при вивченні графічного способу розв'язання систем двох лінійних рівнянь та графіка лінійного рівняння з двома невідомими [35]. При цьому розглядається питання про взаємне розташування на координатній площині двох графіків лінійних функцій. Таким чином, методом неповної індукції з'ясовується, що графіки функцій $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ перетинаються, якщо $k_1 \neq k_2$ та є паралельними, якщо $k_1 = k_2$ [32].

У 10 класі при введенні понять зростаючих, спадних, парних та непарних функцій З. І. Слєпкань рекомендує повторно звернутися до властивостей лінійної функції та з використанням означення зростаючої та спадної функцій довести аналітично, що при $k > 0$ лінійна функція є зростаюча, а при $k < 0$ – спадна [35].

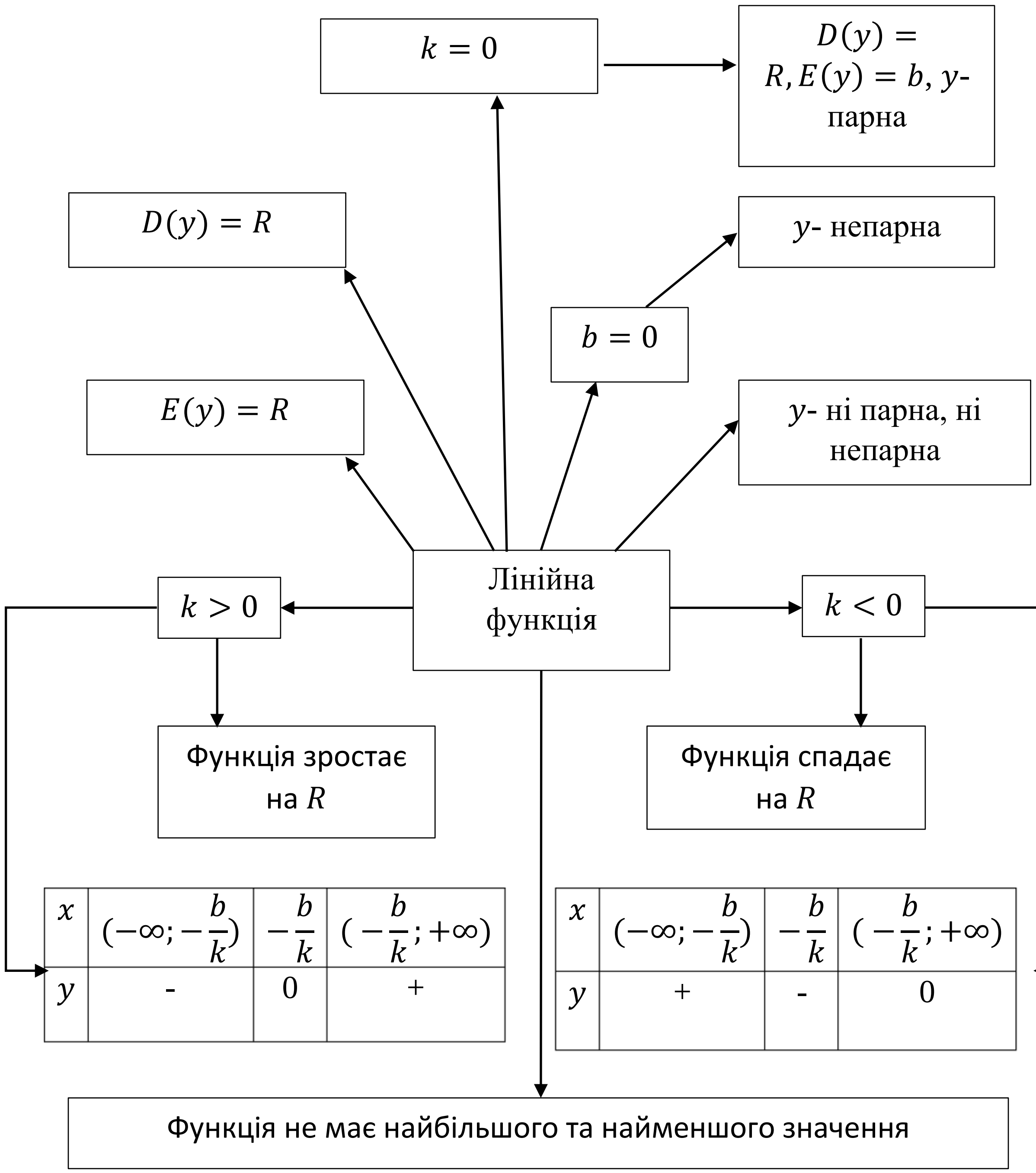
Також, у 10 класі при дослідженні на парність та непарність лінійної функції варто зазначити, що при $k \neq 0$ і $b \neq 0$ вона не належить ні до непарних ні до парних функцій, оскільки при будь-яких $x \in \mathcal{R}$, $f(-x) = -kx + b \neq f(x)$ І $f(-x) \neq -f(x) = -kx - b$. Так як $f(-x) = -kx = -f(x)$, то лінійна функція $y = kx$ при $k \neq 0$ і $b = 0$ є непарною, а при $k = 0$ – парна, оскільки $f(x) = b$, $f(-x) = b = f(x)$. У цьому ж класі, при вивченні періодичної функції учні досліджують, що лінійна функція – не є періодичною при $k \neq 0$ і $b \neq 0$, адже не існує такого числа $T \neq 0$, що $f(x + T) \neq f(x)$, оскільки:

$$f(x + T) = k(x + T) + b = kx + kT + b \neq f(x).$$

Якщо $k = 0$, то $y = b$ – періодична функція, адже при будь-якому $T \neq 0$, $f(x + T) = b = f(x)$; при цьому для цієї функції не існує найменшого додатного періоду [35].

Загалом властивості вивченої лінійної функції в ШКМ можна подати за схемою 2.1.

Схема 2.1.



2.2. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$

Перш ніж дати означення квадратичної функції варто розглянути задачі, які приводять до ознайомлення з даною функцією. Наприклад, задача:

Тіло рухається з прискоренням a м/с^2 і до початку відліку часу t с. пройшло шлях s_0 м, маючи в цей момент швидкість v_0 м/с. Тоді, залежність відстані s (у метрах), яку подолало тіло, від часу t (у секундах) при рівноприскореному русі задають формулою: $s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$ [19].

Квадратичною (або квадратною) називають функцію виду $y = ax^2 + bx + c$, де x, y – змінні, $a \neq 0, b$, c – дані числа.

Найпростішою з таких функцій є функція $y = x^2$, з якою згідно програми учні знайомляться у 8 класі. Конкретним прикладом даної залежності слугує відповідність між довжиною сторони квадрата – x, та його площею y, що виражається формулою $y = x^2$. Очевидно, що сторона квадрата і власне площа є додатними числами, а отже, область визначення такої функції: $(0; +\infty)$, а графік матиме вигляд (Див. рис.2.2.1) [5]:

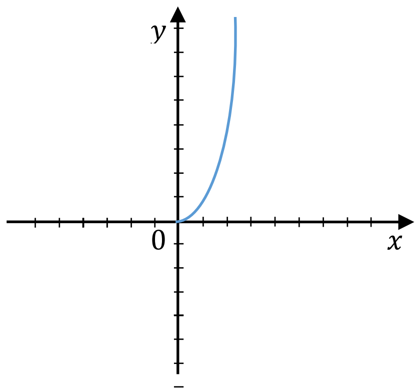


Рис.2.2.1. Графік функції $y = x^2$ *з областю визначення* $(0; +\infty)$

Якщо розглядати функцію $y = x^2$, область визначення якої є множина дійсних чисел, то отримаємо інший графік (Див. рис.2.2.2):

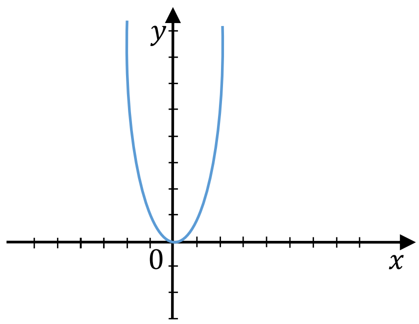


Рис.2.2.2. Графік функції $y = x^2$ *на множині дійсних чисел*

Після цього варто зауважити, що даний графік називається параболою. Точка, що розміщена від початку координат, називають вершиною параболи і вона ділить параболу на дві вітки. Слід звернути увагу також на властивості графіка розглядуваної функції:

1) графік повністю розміщений вище осі абсцис;
2) на осі абсцис лежить лише одна точка (вершина параболи);
3) відносно осі ординат графік є симетричним;
4) вітки параболи графіка функції $y = x^2$ є нескінченними.

Розглядаючи наведені властивості графіка, можна шляхом виведення отримати властивості й самої функції $y = x^2$. Ці властивості легко доводяться аналітично, але у 8 класі дане доведення не розглядаються [8].

Варто зауважити, що функція $y = ax^2$, теж є квадратичною і її графіком також буде парабола, але у випадку, коли $a > 0$ – вітки параболи будуть вгору, а коли $a > 0$ – вітки параболи напрямлені донизу.

Властивості квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ детальніше вивчаються уже в 9 класі. Графіки функцій $y = ax^2 + bx + c$ та $y = ax^2$ однакові параболи, які можна сумістити паралельним перенесенням. Покажемо це [7]:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Оскільки $a \neq 0$, b, c – числа, то і $\frac{b}{2a}$ і $\frac{b^2-4ac}{4a}$ – числа. Якщо ми позначимо їх буквами $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, то отримаємо тотожність:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n.$$

Звідси, можна зробити висновок, що функцію $y = ax^2 + bx + c$ завжди можна подати у вигляді: $y = a(x - m)^2 + n$.

Наприклад, функцію $y = 3x^2 - 12x + 8$, виконавши перетворення можна записати у вигляді: $y = 3(x-2)^2 - 4$.

З використанням відомого перетворення графіків функцій, можна побудувати графік функції $y = a(x-m)^2$, а саме за допомогою паралельного перенесення на $|m|$ одиниць вздовж осі абсцис вже відомої функції $y = ax^2$.

Аналогічно використовуючи вже знайомі перетворення графіків можна побудувати графік функції $y = a(x-m)^2 + n$. Отож, щоб побудувати графік функції $y = a(x-m)^2 + n$ необхідно, побудований графік $y = a(x-m)^2$ перенести на $|n|$ одиниць вздовж осі ординат.

Таким чином, за допомогою двох паралельних перенесень графіка відомої функції $y = ax^2$ отримали графік функції $y = a(x-m)^2 + n$, а отже квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$.

Наприклад, побудувати графік функції $y = 3x^2 - 12x + 8$. Щоб побудувати даний графік необхідно за допомогою алгебраїчних перетворень звести до вигляду: $y = a(x-m)^2 + n$, тобто отримаємо – $y = 3(x-2)^2 - 4$. Тоді графік $y = 3x^2$ потрібно перенести в додатному напрямку осі абсцис на 2 одиниці, після чого криву $y = 3(x-2)^2$ зсунути вгору вздовж осі y на 4 одиниці. Утворена крива $y = 3(x-2)^2 - 4$ і є побудованим графіком даної функції (Див. рис.2.2.3):

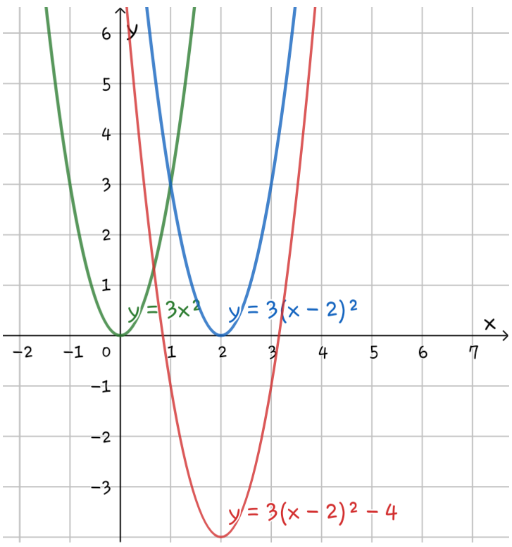


Рис.2.2.3. Побудова графіка функції $y = 3(x-2)^2 - 4$

З викладеного вище випливає, що графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола $y = a(x - m)^2 + n$. Відповідно координатами її вершини є m та n, тобто $-\frac{b}{2a}$ і $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ [7].

Для того, щоб побудувати графік квадратичної функції, необхідно знайти координати вершини параболи, точки перетину її з осями координат та ще декілька точок. Після знаходження цих точок позначити на їх на координатній площині та провести через них послідовна плавну лінію.

Не обов'язково кожного разу при побудові графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ виділяти повний квадрат тричлена та здійснювати два паралельних перенесення, можна поступити інакше. Отже, існує інший спосіб побудови графіка квадратичної функції: в першу чергу побудувати графік функції $y = ax^2 + bx$, а потім перенести отриманий графік на c одиниць вздовж осі ординат (Oy): у додатному напрямі – якщо $c > 0$ у протилежному – якщо $c < 0$. Графік функції $y = ax^2 + bx$ побудувати досить легко, оскільки точки його перетину з віссю абсцис є: $ax^2 + bx = 0 \Longrightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{b}{a}$ [8].

Розглянемо приклад побудови графіка квадратичної функції за наведеним способом. Наприклад, побудувати графік функції $y = 2x^2 - 6x + 5$.

Отже, згідно порядку побудови запропонованим способом спершу потрібно побудувати графік функції $y = 2x^2 - 6x$. Для цього визначимо корені даного двочлена: $2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(2x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{6}{2} = 3$. Позначаємо знайдені точки на осі абсцис і піднімаємо ці точки на 5 одиниць вгору (оскільки $c > 0$). Отримані точки параболи для зручності позначимо через A та B. За формулою $-\frac{b}{2a}$ знайдемо абсцису вершини параболи:

$$x = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ординату можна визначити так:

$$2x^2 - 6x + 5|_{x=\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{9}{4} - 6 \cdot \frac{3}{2} + 5 = \frac{1}{2}.$$

Залишилося позначити вершину параболи на координатній площині та з'єднати всі точки плавною лінією. В результаті отримуємо шуканий графік квадратичної функції $y = 2x^2 - 6x + 5$ (Див. рис. 2.2.4):

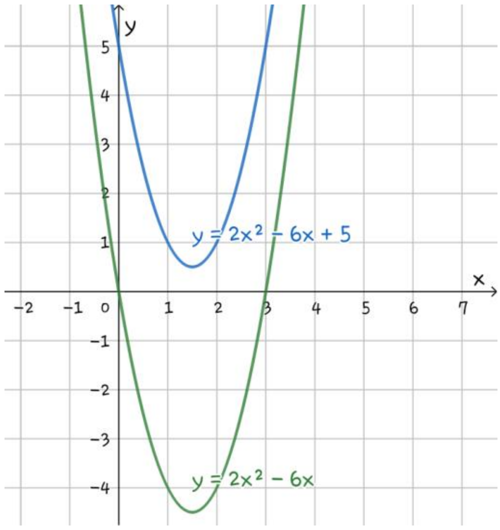


Рис.2.2.4. Побудова графіка $y = 2x^2 - 6x + 5$

2.3. Степенева функція $y = x^n$

Функцію вигляду $y = x^n$, де $n-$ це деяке дійсне число, називають степеневою функцією.

Прикладами степеневих функцій є такі функції: $y = x^3, y = x^{0.2}, y = x^{-\frac{1}{3}}$. Властивості та графік степеневої функції $y = x^n$, залежать від виду числа n. Розглянемо детальніше степеневу функцію при різних видах числа n:

- У випадку, коли n −натуральне число, отримуємо такі функції: $y = x, y = x^2, y = x^3$, і т. д.. У даному випадку виділяється дві групи [9]:

1) n −парне;
2) n −непарне.

Коли ж $n -$ парне число, тоді маємо такі випадки: $y = x^2 -$ функція, яка є окремим випадком квадратичної функції, її властивості та графік наведені при розгляданні саме квадратичної функції. Відповідно у загальному випадку функції $y = x^n$, коли n –парне, графік схематично матиме вигляд (Див. рис. 2.3.1.):

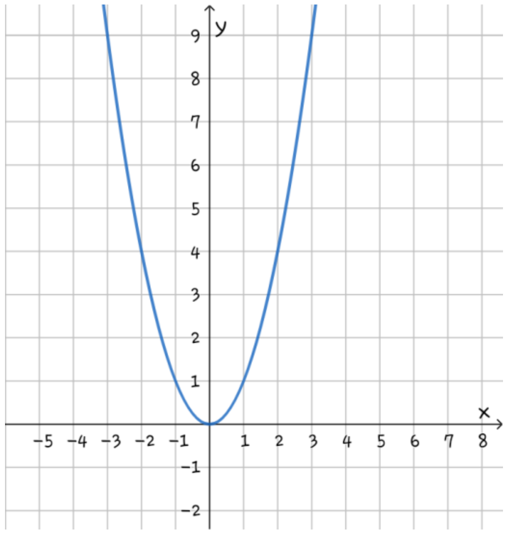


Рис.2.3.1. Функція $y = x^n$, коли n –парне

Коли n –непарне, функція $y = x^n$ є непарною, маємо такі функції: $y = x, y = x^3$, і т. д. Функція $y = x$ є окремим випадком лінійної функції і її графіком є пряма. Розглянемо функції $y = x^3$ і $y = x^5$, побудуємо їх графіки:

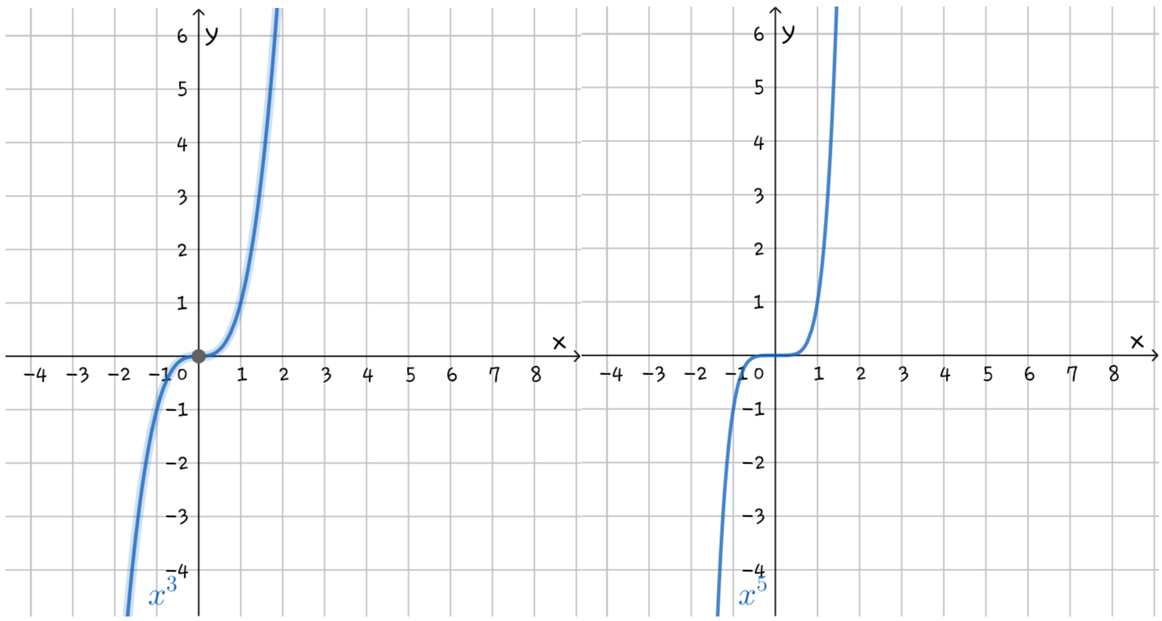


Рис.2.3.2. Графіки функцій $y = x^3$ і $y = x^5$

Перейдемо до загального вигляду розглядуваної функції $y = x^n$. Оскільки $(-x)^n = -x^n$ її графік буде симетричним відносно початку координат.

Тому, якщо n –непарне число і $n \geq 3$, то схематично графік функції $y = x^n$ матиме вигляд:

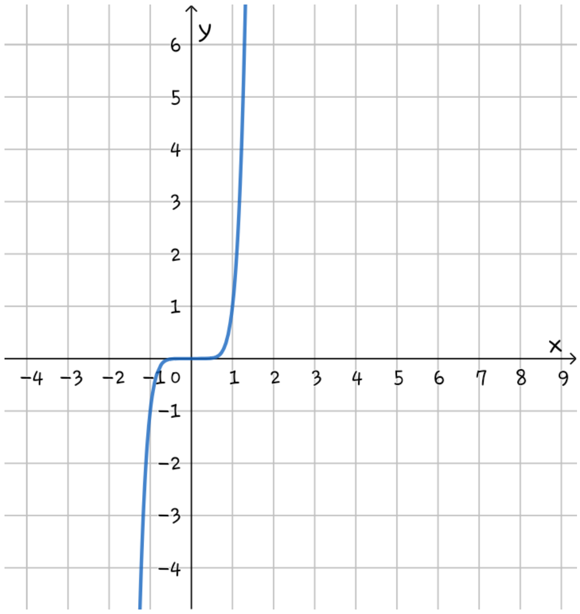


Рис.2.3.3. Графік функції $y = x^n$

Узагальнені властивості і приклади побудови з використанням перетворень:

- Нехай $n = 0$, тоді матимемо функцію $y = x^0$, яка є визначеною для всіх значень x, окрім 0, бо вираз 0^0– немає змісту. Отже, маємо: $y = x^0 = 1$ і її графіком буде пряма, паралельна осі абсцис:

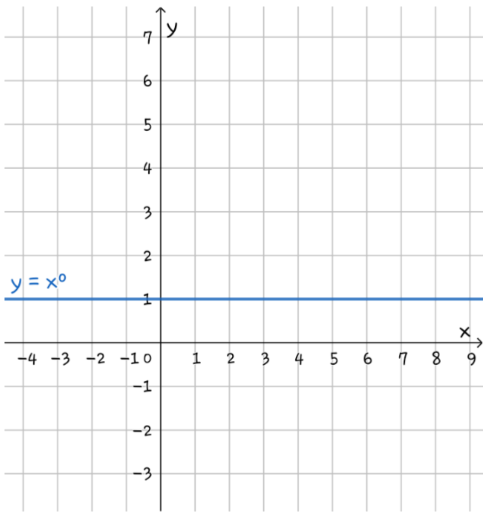


Рис.2.3.4. Графік функції $y = x^0$

- Нехай n – є цілим від'ємним числом, тоді функція $y = x^n$ – визначена для будь-якого x, окрім $x = 0$. Припустимо, що $n = -1$, тоді матимемо вже відому функцію $y = \frac{1}{x}$ – обернену пропорційність, графіком якої є гіпербола. Підмітимо, що функція є спадною і непарною, а отже, її графік відносно початку координат буде симетричним. Тому, не зменшуючи загальності матимемо, що при непарному $n,$ тобто $n = -1; -3; -5; \ldots,$ графіком функції $y = x^n$ – буде гіпербола, і схематично вона має вигляд:

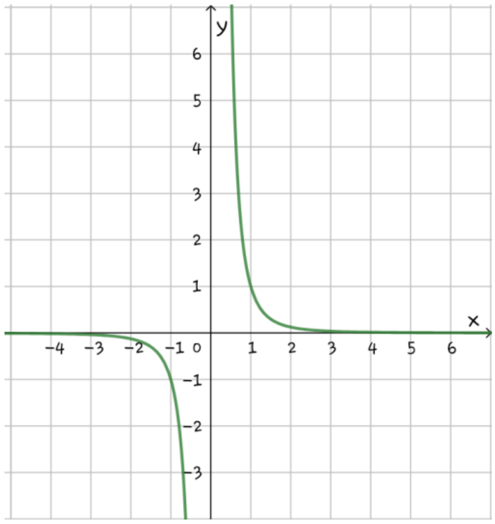


Рис.2.3.5. Графік гіперболи

Розглянемо функцію $y = x^n$, якщо n – парне та від'ємне. Нехай $n = -2$, тоді $y = x^{-2} = y = \frac{1}{x^2}$. Отже, функція є парною, відповідно її графік буде симетричним відносно осі ординат і матиме вигляд:

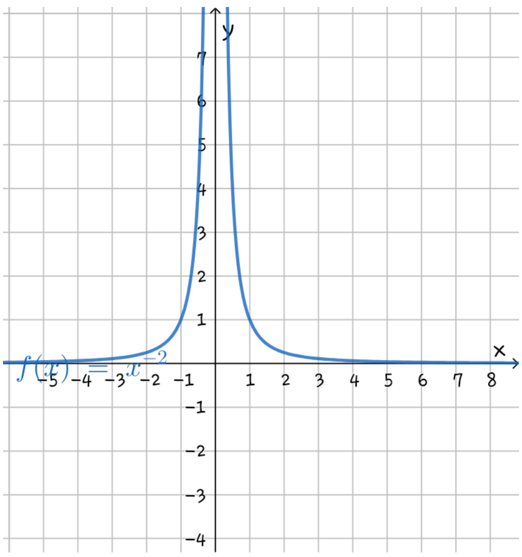


Рис.2.3.6. Графік функції $y = x^{-2}$

Отож, для будь-якого від’ємного непарного $n = -2;\ -4; -6; \ldots$ функція $y = x^n$, матиме такі ж самі властивості, а тому схематично графік даної функції матиме вигляд:

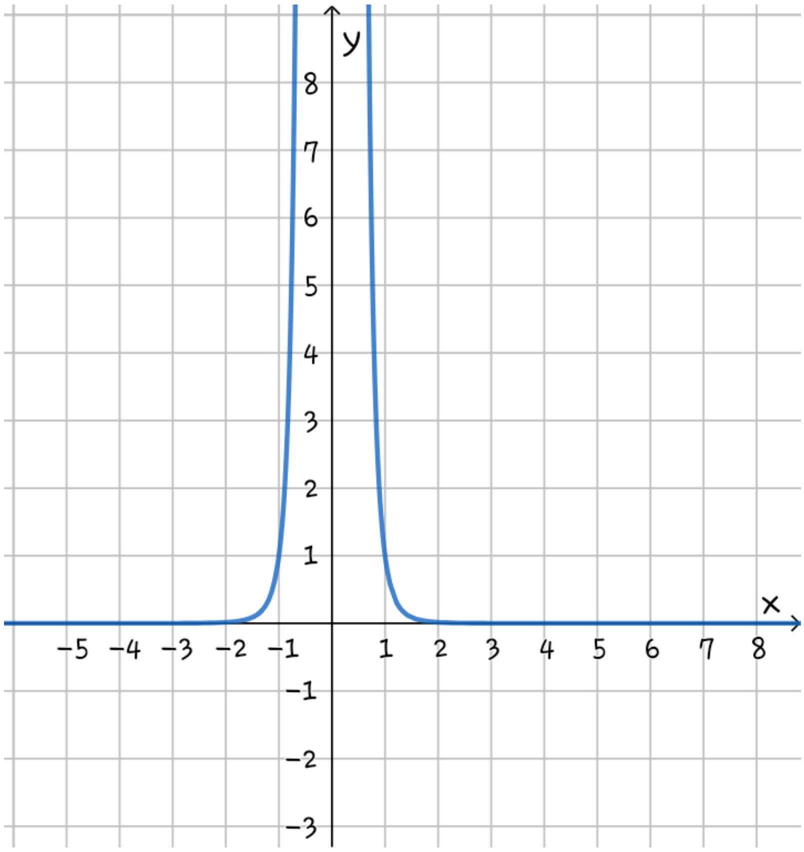


Рис.2.3.7. Графік функції $y = x^n$, якщо n – парне та від’ємне

- Нехай n– не є цілим, але додатне число, тоді функція $y = x^n$ – визначена на проміжку $[0;\ +\infty)$. Дана функція є ні парною ні непарною, оскільки область її визначення не є симетричною відносно 0. Для прикладу побудуємо і розглянемо графіки функцій $y = x^{\frac{3}{4}},\ y = x^{\frac{4}{3}}$ та додатково $y = x$, щоб наочно побачити розташування цих двох функцій. Склавши таблиці значень функцій при певних значеннях аргументів, позначивши ці точки на координатній площині і сполучивши плавними лініями отримаємо такі графіки (Див. рис. 2.3.8):

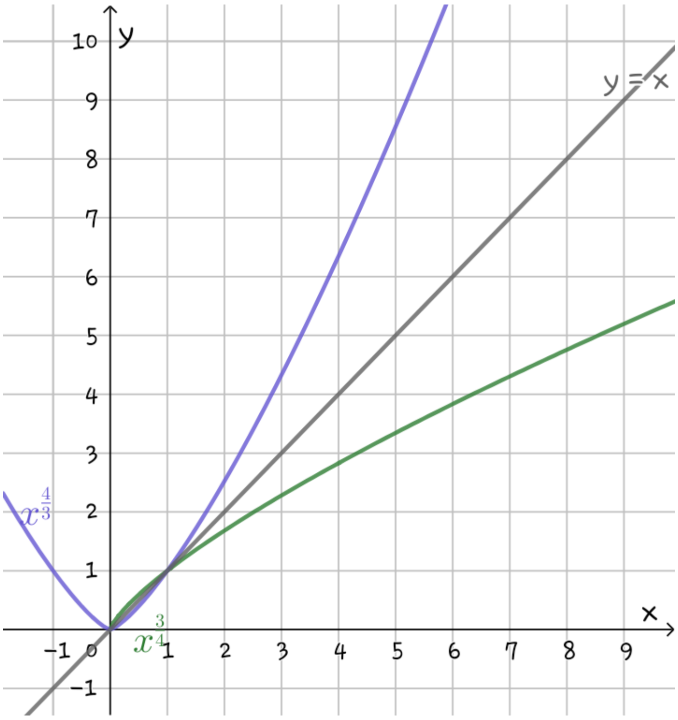


Рис.2.3.8. Графіки функцій $y = x^{\frac{3}{4}}, y = x^{\frac{4}{3}}$

Отож, випадок коли у функції $y = x^n, n$ є додатним, але не цілим числом, графік залежить від n, тобто коли $n > 1 -$ графік схематично виглядатиме:

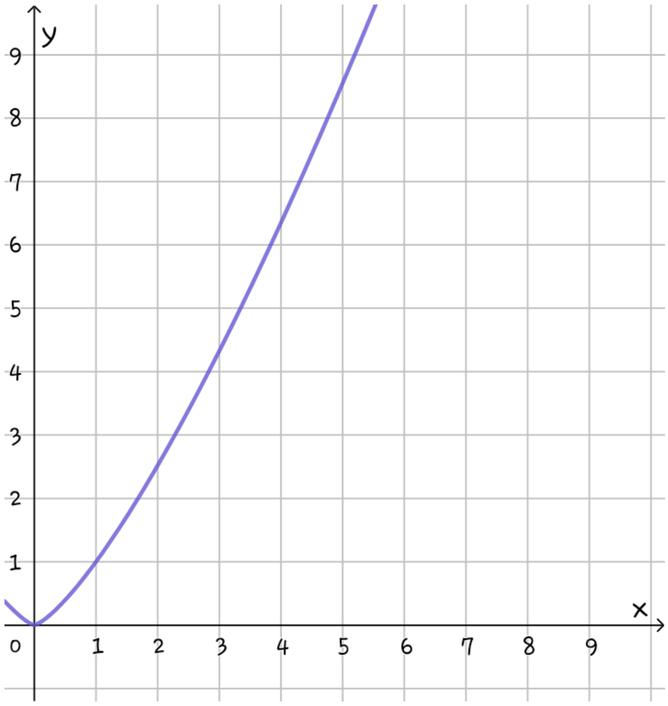


Рис.2.3.9. Графік функції $y = x^n, n$ *– додатне, не ціле*

Коли ж $0 < n < 1$, схематично графік функції $y = x^n$, матиме виглляд:

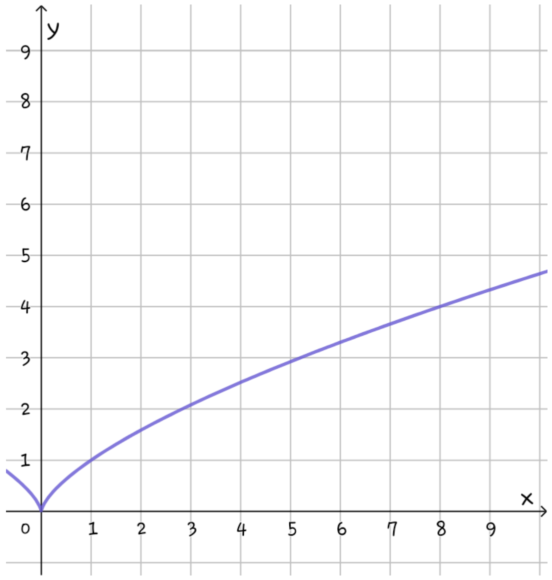


Рис.2.3.10. Графік функції $y = x^n$, $0 < n < 1$

- Нехай $n -$ не ціле від'ємне число. В такому випадку, областю визначення є проміжок– $(0;\ +\infty)$, а отже, функція ні парна ні непарна. Для прикладу побудуємо графік функції $y = x^{-\frac{2}{3}}$. Для цього необхідно побудувати таблицю значень функції при відповідному аргументу, позначити отримані точки на координатній площині та сполучити їх плавною лінією. В результаті отримаємо графік:

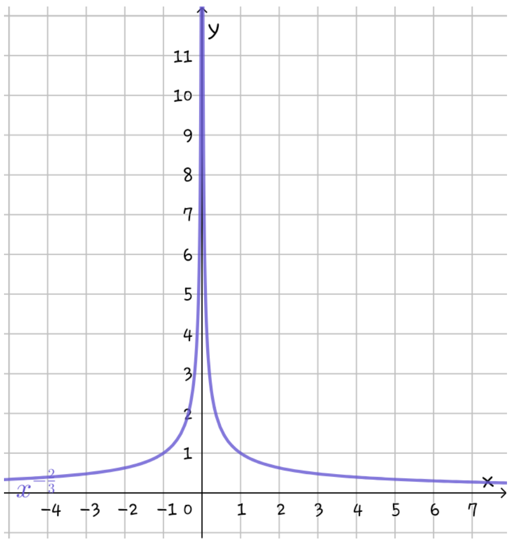


Рис.2.3.11. Графік функції $y = x^{-\frac{2}{3}}$

В загальному випадку функція $y = x^n$, де n −не ціле і від'ємне число маємо схематично такий графік:

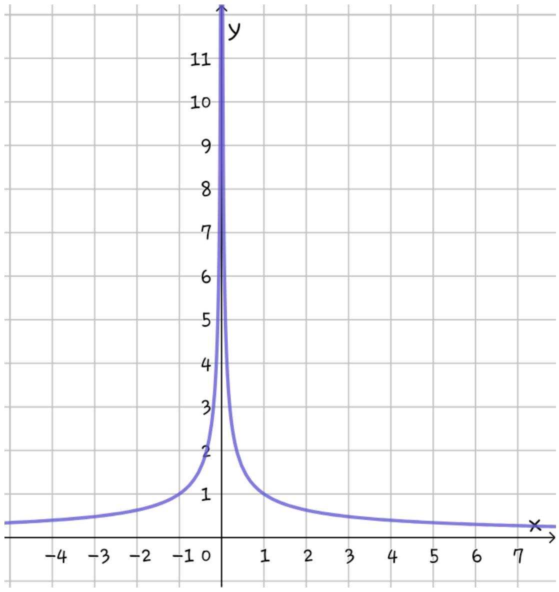


Рис.2.3.12. Графік функції $y = x^n, n -$ *не ціле, від'ємне*

2.4. Функція $y = \frac{k}{x}$

Функцію, що можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$ називають *оберненою пропорційністю.*

Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості та графік згідно курсу шкільної математики вивчається детально у 8 класі. У 6 класі розглядається функціональна залежність при якій зі збільшенням (*зменшенням*) однієї величини в декілька разів друга величина зменшується (*збільшується*) в однакову кількість разів. Наведену залежність називають *оберненою пропорційністю*.

Припустимо, що маємо 500 грн. Введемо позначення: нехай x грн – ціна 1 кг товару, а y кг – кількість товару, що можна придбати за дані 500 грн.

Залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю: якщо збільшити ціну x у кілька разів, то це призводить до зменшення y , тобто кількості товару у стільки ж разів і навпаки, при зменшенні ціни кількість купленого товару збільшується [5].

Даній функціональній залежності відповідає функція, що задана формулою : $y = \frac{500}{x}$.

У запропонованому прикладі реальної ситуації, математичною моделлю є функція, яку можна задати формулою: $y = \frac{k}{x}$. Відповідно вводиться означення даної функції: функція виду $y = \frac{k}{x}$, де x є незалежною змінною, а k – деяким відмінним від нуля числом називається оберненою пропорційністю.

Область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ є всі дійсні числа окрім 0, оскільки вираз $\frac{k}{x}$ при $x = 0$ не має змісту. Тоді, побудуємо графіки для двох випадків [5]:

1) $k > 0$;
2) $k < 0$.

Найкраще це зробити на прикладі конкретно заданої функції. Наприклад,

1) Нехай $y = \frac{6}{x}$ – задана функція. Складемо таблицю значень аргументу та відповідних значень функції:

x	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6
y	-1	-1,5	-2	-3	-6	6	3	2	1,5	1

На координатній площині позначимо знайдені точки, подані у таблицях.

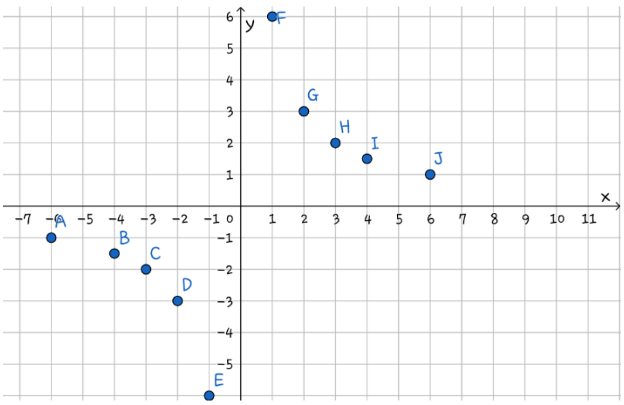


Рис.2.4.1. Відображення точок з таблиці

Коли б на даній площині позначили значно більше кількість точок, що задовольняють формулу $y = \frac{6}{x}$ та з’єднали їх послідовно плавною лінією, то в результаті отримали б графік функції $y = \frac{6}{x}$.

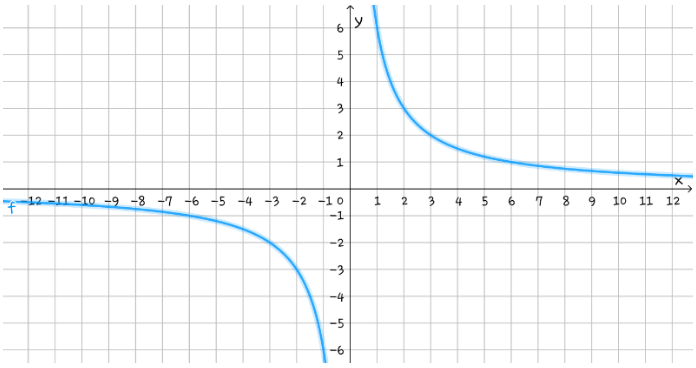


Рис.2.4.2. Графік функції $y = \frac{6}{x}$

Отриманий графік функції $y = \frac{6}{x}$, а отже і графік оберненої пропорційності $y = \frac{k}{x}$ називають *гіперболою*.

Гіпербола складається з двох віток (гілок). У нашому випадку вітки графіка функції $y = \frac{6}{x}$ лежать у першій та в третій чверті. Як бачимо на рисунку 2.3.10, гіпербола не має перетину з координатними осями, оскільки при $x = 0$ або $\frac{6}{x} = 0$ немає змісту. Чим більшим за модулем є значення x, то тим меншим є значення y і навпаки. Це означає, що вітки гіперболи необмежено наближаються до координатних осей.

Відповідно, графік функції $y = \frac{k}{x}$, при довільному $k > 0$ виглядає аналогічно.

2) Нехай $y = -\frac{6}{x}$ – задана функція. Аналогічно до попереднього випадку будуємо графік функції $y = -\frac{6}{x}$.

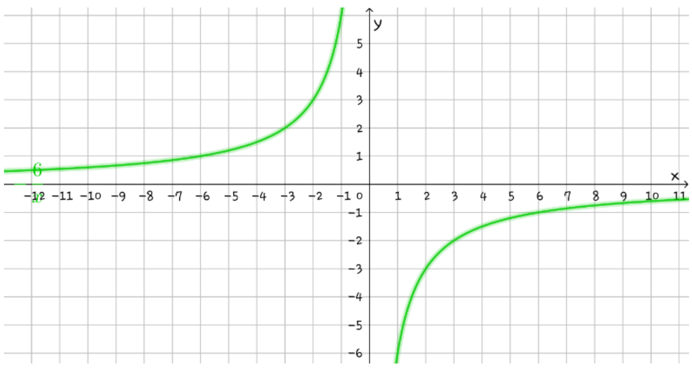


Рис.2.4.3. Графік функції $y = -\frac{6}{x}$

Відповідно графіком цієї функції є гіпербола, вітки якої лежать у другій та четвертій чвертях. Такий самий вигляд має і графік функції $y = \frac{k}{x}$, де довільне $k < 0$.

2.5. Показникова функція в ШКМ

В природі існують такі процеси, які неможливо описати за допомогою алгебраїчних функцій, тоді використовують трансцендентні функції. Однією з трансцендентних функції є показникова. Її, у практичному житті використовують для вираження процесів спадання та зростання певних величин, наприклад: динаміка кількості населення, швидкість розкладу радіоактивних речовин, швидкість розмноження бактерій і т. д. [26].

Вивчення показникової функції в ШКМ, згідно діючої програми, розпочинається у 11 класі та базується на знаннях властивостей степеня та лагарифмів. Варто підмітити, що паралельно з показниковою функцією учні знайомляться з логарифмічною функцією, оскільки вони взаємно обернені.

Як було уже підмічено, існує зв'язок між показниковою функцією та поняттям степеня. Більш того, встановлений зв’язок прослідковується між самими функціями, оскільки в основі їх визначення лежить поняття степеня. Показникова функція разом із степеневою з раціональним показником – трансцендентні функції, тобто є аналітичними, але не є алгебраїчними [25].

Існують різні підходи до трактування поняття показникової функції. В основі одного з них є знання з математичного аналізу, а саме володіння вміннями та навичками розв’язування диференціальних рівнянь. Показникова функція з точки зору математичного аналізу – це функція, що визначена на множині дійсних чисел, якщо вона є розв’язком рівняння $y' = ky$ $(k \neq 0)$ та задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Наступний підхід ґрунтується на знаннях степеня та його властивостей. Власне на його основі й реалізується в шкільному курсі математики ознайомлення учнів 11 класу з показниковою функцією [32, с. 75]

У 10 класі учні ознайомлюються з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником, а в 11 вони вже з'ясовують, що являє собою степінь додатного числа з дійсним показником.

Процес вивчення показникової функції відбувається поетапно і розпочинається з розгляду окремого випадку степеня з дійсним показником. Учням пропонується з'ясувати, що є результатом піднесення числа 2 до дійсного степеня , наприклад $\sqrt{2}$.

Дане ірраціональне число можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу: $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$ Виписавши декілька десяткових наближень числа $2^{\sqrt{2}}$, можна прослідкувати, що значення степеня змінюється при зміні значення числа $\sqrt{2}$ $(2^1, 2^{1{,}4}, 2^{1{,}41}, 2^{1{,}414}, 2^{1{,}4142}, \ldots)$.

Таким чином, отримується нова функція $y = 2^x$, яка є частковим випадком функції $y = a^x$, власне яка і називається показниковою [32, 4].

Взагалі, учні в ШКМ вперше зустрічаються з показниковою функцією ще у 9 класі, при вивченні геометричної прогресії: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$. Таким чином, з'являється ще один підхід до трактування поняття даної функції.

Отже, функцію виду $y = a^x$, де $a > 0, a \neq 0$ з областю визначення R, називають *показниковою*.

До показникової функції відносять також функцію $y = ca^x$, c – стала $(c \neq 0)$. Прикладом такого виду може бути функція: $y = 2^{x+2}$ при виконанні таких перетворень $y = 2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$ та побудувати її графік з використанням вже відомої функції $y = 2^x$.

При вивченні даної функції важливо одразу звернути увагу учнів на значення встановлених обмежень a. Згідно означення $a -$ додатне число, оскільки степінь з раціональним та дійсним показником є визначеним лише для додатних основ [26].

Із формули $y = a^x$слідує, що a є сталим числом, $x -$ показник степеня з множини дійсних чисел. Так, як аргумент знаходиться у показнику степеня, то відповідно функцію називають показниковою. Дуже часто її ще записують таким чином: $exp_a -$ скорочення від латинського слова $exponenta$. У зв’язку з цим, функцію та її графік ще називають – експонента. На рисунку 2.5.1. зображено схематичний вигляд графіків показникової функції для двох випадків: $a > 1$ та $0 < a < 1$ відповідно [4].

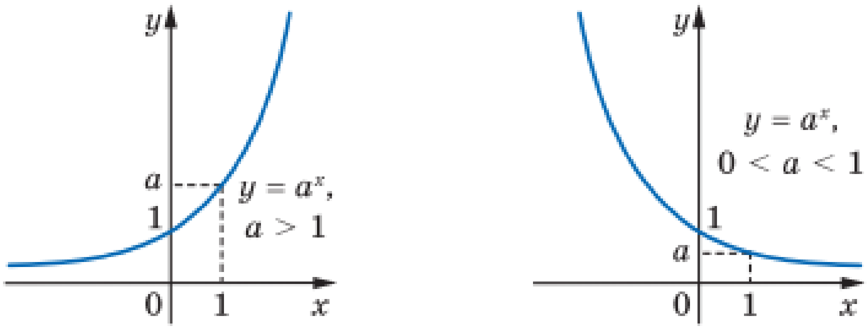


Рис.2.5.1. Графіки показникової функції

Вивчення матеріалу, що стосується властивостей показникової функції в шкільних підручниках відбувається по-різному:

- на основі запису формули, що задає функцію та властивостях степеня з дійсним показником;
- на основі вивчення графіків часткових випадків даної функції, побудованих по точкам;
- поєднання двох вище зазначених способів.

Основні властивості та особливості поведінки графіків показникової функції зручно подати у вигляді таблиці 2.1 [32].

Таблиця 2.1

$y = a^x$		
№ з/п	$a > 1$	$0 < a < 1$
1.	$D(y) = R$	
2.	$E(y) = (0;\ \infty)$	
3.	Зростає	Спадає
4.	$a^x > 0$	
5.	Неперервна	
6.	Ні парна ні непарна	
7.	Графік розташований вище осі абсцис та проходить через точки $(0; 1), (1;\ a)$; не є симетричним; вісь абсцис – асимптота графіка; графіком є неперервна крива – експонента.	
8.	Графіки функцій $y = a^x$ та $y = a^{-x}$ є симетричними відносно осі ординат	

Вивчення властивостей функції закріплюються при виконанні вправ на порівняння числових виразів (наприклад, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ та $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,7}$), при розв'язуванні рівнянь та нерівностей, при виконанні вправ на побудову графіків функцій та інші.

Наприклад, побудувати графіки функцій $y = \frac{1^x}{2}$ та $y = 2^x$:

1) $y = \frac{1^x}{2}$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

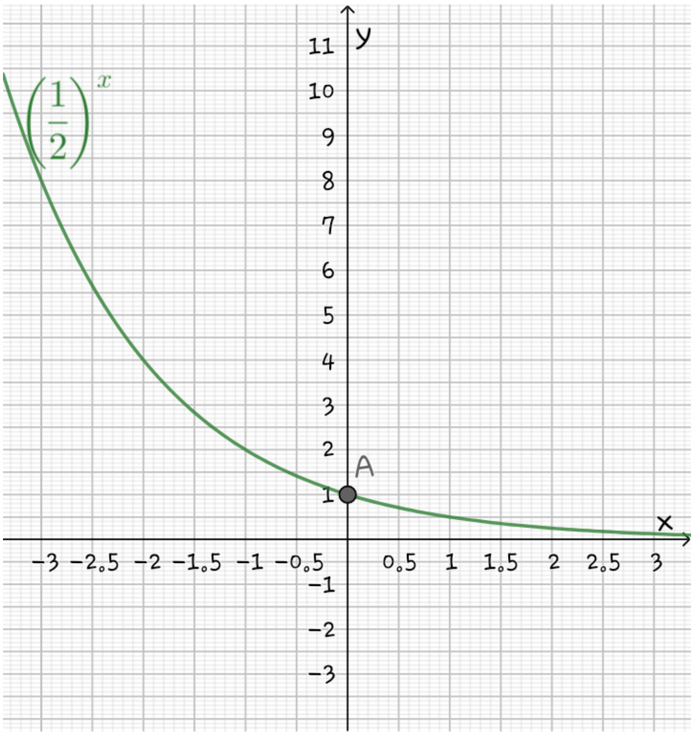


Рис.2.5.2. Графік функції: $y = \frac{1}{2}^x$

2) $y = 2^x$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

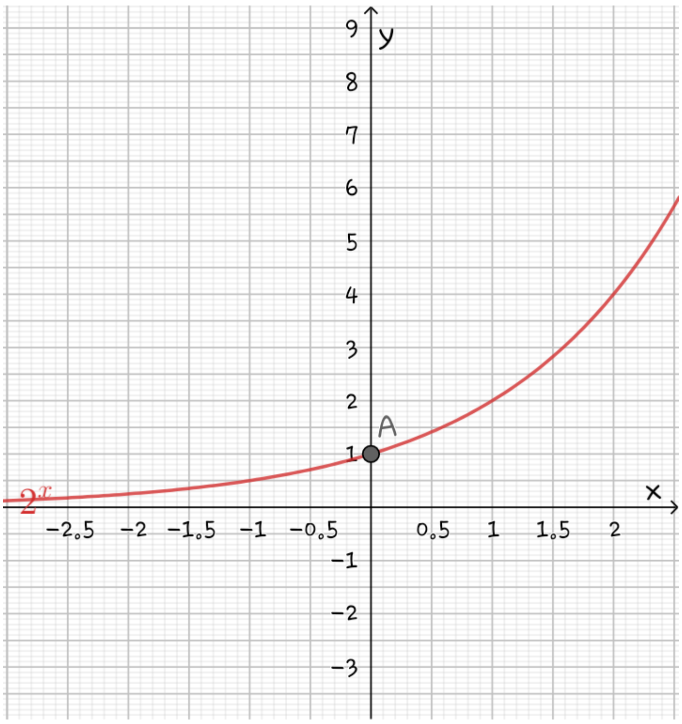


Рис.2.5.3. Графік функції $y = 2^x$

2.6. Логарифмічна функція та її властивості

Логарифмічна функція, як і показникова, відноситься до класу трансцендентних функцій. В основі визначення показникової функції лежить поняття степеня з дійсним показником, а логарифмічна функція вводиться на основі поняття логарифма, яке пов'язане зі степенем числа. У даному випадку, показник отримує іншу назву – логарифм (від грецьких слів «логос» – відношення і «аритмос» - число). Перш ніж дати означення логарифма, варто розглянути рівняння $a^x = b,$де $a > 0, a \neq 1$. Оскільки для всіх $x \in R$ є справедливою рівність $a^x > 0$, то при $b \leq 0$, рівняння $a^x = b,$де $a > 0, a \neq 1$ немає розв'язку. Коли ж $b > 0$, то дане рівняння має єдиний корінь $\log_a b$ і його називають логарифмом числа b з основою a. Аналіз даного розв`язку зручно проводити з використанням графіка:

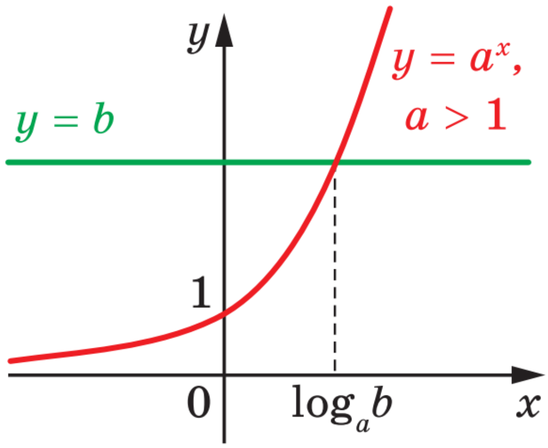


Рис.2.6.1. Графік логарифмічної функції

Означення. *Логарифмом* додатного числа b з основою a, де a > 0 і a ≠ 1, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b [4].

Якщо кожному додатному числу x, поставити у відповідність число $\log_a b$, то отримаємо функцію $y = \log_a x$. Таку функцію називають – *логарифмічною*.

Наприклад, $\log_4 16$ – це показник степеня, до якого необхідно піднести число 4, щоб в результаті обчислення отримати число 16.таким чином, маємо $\log_4 16 = 2$, так як $4^2 = 16$.

На практиці також розглядають логарифми з натуральними основами e ($\ln b$) та десятковими 10 ($\lg b$). Щоб оперувати з ними, дуже часто виникає потреба у переході з однієї основи до іншої за допомогою формули:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \ (\mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1, \mathrm{c} > 0, \mathrm{c} \neq 1).$$

Для швидкого оперування з логарифмічними функціями учні повинні знати основні властивості логарифма [12]:

$a^{\log_a b} = b -$ основна логарифмічна тотожність $(\mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$;

1. $\log_a a = 1 \ (\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$;
2. $\log_a 1 = 0 \ (\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$;
3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c \ \ (\mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1, \mathrm{c} > 0)$;
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \ \ (\mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1, \mathrm{c} > 0)$;
5. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b \ \ (\mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$;
6. $\log_{a^k} b = k \cdot \log_a b \ \ (\mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$;
7. $\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \cdot \log_a b \ \ (\mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$;
8. $\log_{a^n} b^n = \log_a b \ (\ \mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$;
9. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\log_b a} \ (\mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1, \mathrm{c} > 0, \mathrm{c} \neq 1)$;
10. $\log_a b \cdot \log_b a = 1 \ (\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1, \mathrm{b} > 0)$;
11. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \ (\mathrm{b} > 0, \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1, \mathrm{c} > 0, \mathrm{c} \neq 1)$.

На основу логарифмічної функції накладаються умови: $a > 0$ і $a \neq 1$. Ці умови випливають з означення логарифма, з якого слідує, що 0 і 1 не можуть бути в якості основи логарифма і відповідно логарифмічної функції. Перевірити це дуже легко таким чином: нехай а =1, тоді $\log_1 b = x \ \Rightarrow \ 1^x = b$. Якщо $b \neq 1$, то дане рівняння немає розв’язку на множині дійсних чисел, якщо $b = 1$, то рівняння має безліч коренів, тоді запис $\log_1 b$ безкорисний. Аналогічно міркуючи доводиться безкорисливий запис $\log_0 b$. Припустимо, $a = -2,\ b = 16$, тоді $\log_{-2} 16 = x \Rightarrow (-2)^x = 16 \Rightarrow x = 4$, тобто рівняння має розв'язок, але якщо $b = 9$, то рівняння розв'язку не матиме [4].

Таким чином, випливає: якщо в основі логарифма – від'ємне число, то розв'язок існує лише в окремих випадках. В шкільному курсі математики дані випадки не розглядають, тому виділяють проміжки яким належить основа функції: $0 < a < 1$ та $a > 1$.

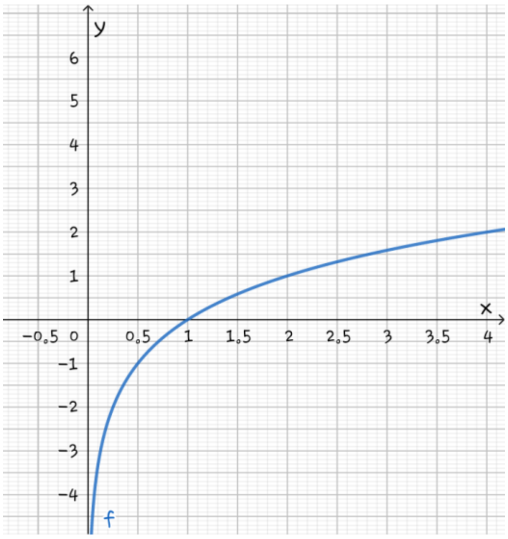
На кожному з цих проміжків поведінка, відповідно і властивості логарифмічної функції є різними. Щоб проаналізувати властивості даної функції, доречно буде побудувати її графік на кожному з проміжків по точкам. Для прикладу, побудуємо графік функцій $y = \log_2 x$ та $y = \log_{\frac{1}{2}} x$:

$y = \log_2 x$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-1	0	1	2

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	1	0	-1	-2



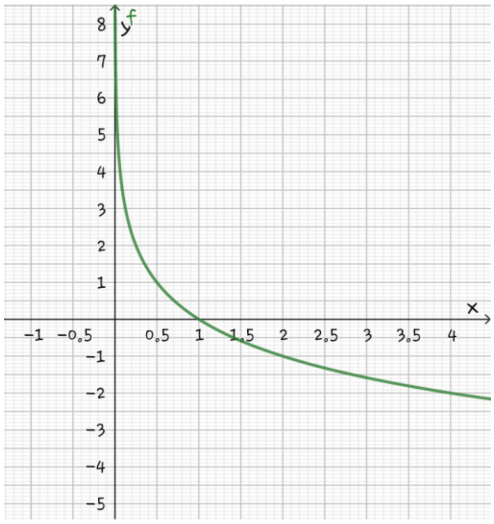


Рис.2.6.2. Графіки функцій $y = \log_2 x$ та $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Узагальнені властивості та особливості поведінки графіків логарифмічної функції зручно подати у вигляді таблиці 2.2 [32]:

Таблиця 2.2

$y = \log_a x$		
№ з/п	$a > 1$	$0 < a < 1$
1.	$D(y) = (0;\ +\infty)$	
2.	$E(y) = R$	
3.	Зростає	Спадає
4.	$y > 0$ при $x > 1$ $y < 0$ при $0 < x < 1$ $y = 0$ при $x = 1$	$y > 0$ при $0 < x < 1$ $y < 0$ при $x > 1$ $y = 0$ при $x = 1$
5.	Неперервна	
6.	Ні парна ні непарна	
7.	Графік розташований з правого боку осі ординат, тобто в I та IV чверті координатної площини та проходить через точки $(0; 1), (a; 1)$; не є симетричним; вісь ординат – асимптота графіка; графіком є неперервна логарифмічна крива.	
8.	Графіки функцій $y = \log_a x$ та $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ є симетричними відносно осі абсцис	

Закріплення вивчення властивостей функції відбувається при виконанні різноманітних практичних завдань: при розв’язуванні рівнянь та нерівностей, при порівнянні логарифмічних виразів, побудові та аналізі графіків і т.д.. Наприклад:

1) Розв’язати рівняння: $\log_2(x + 3) = 4$.

   Розв’язання: $\log_2(x + 3) = 4$; $(x + 3) = 2^4$; $(x + 3) = 16 \Rightarrow x = 13$.

2) Побудувати графік функції $|y| = \log_2 x$.

   Побудова: на першому кроці будуємо вже відомий графік функції $y = \log_2 x$:

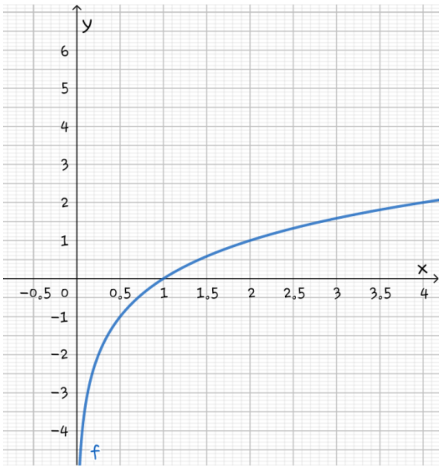


Рис.2.6.3. Графік функції $y = \log_2 x$

Тоді, щоб побудувати графік $|y| = \log_2 x$, необхідно отриманий графік, що знаходиться вище осі $0y$ відобразити симетрично осі абсцис, а графік, що нижче осі абсцис відкинути:

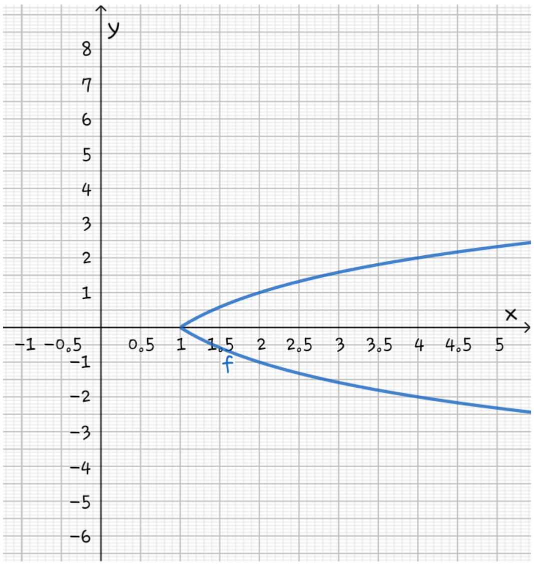


Рис.2.6.4. Графік функції $|y| = \log_2 x$

2.7. Властивості тригонометричних функцій

Процес вивчення тригонометричних функцій в школі поділяють на два етапи:

- ознайомлення учнів з тригонометричними функціями кутового аргументу(8-9 класи);

- систематизація та поглиблення набутих знань про тригонометричні функції (10-11 класи).

Тригонометричні функції є одними з трансцендентних функцій, що вивчаються в шкільному курсі математики. Їх роль та місце в освітньому процесі визначаються головним чином двома сторонами застосування цих функцій в теорії і практиці. По-перше, тригонометричні функції виступають, як обчислювальний апарат для розв’язування різноманітних завдань з планіметрії та стереометрії. По-друге, вивчення тригонометричних функцій дозволяє наочно, легко і переконливо демонструвати основні властивості функцій взагалі, наприклад: періодичність, парність і непарність, обмеженість, монотонність.

Відповідно існує два шляхи у введенні поняття тригонометричних функцій: аналітичний та геометричний.

Перший шлях – аналітичний, який також поділяється на два способи. Один з них зводиться до аналізу диференціального рівняння $f''(x) = -cf(x)$. Вчення про тригонометричні функції може бути побудоване саме через розв’язання зазначеного рівняння. Такий підхід є складним і може бути використаний лише в старших класах на факультативних та додаткових заняттях. Другий варіант аналітичного введення тригонометричних функцій – використання апарату рядів, на даний час такий підхід для середньої школи видається не є доречним, оскільки учні ще не володіють необхідними знаннями про ряди.

Для школи зручним шляхом вивчення тригонометричних функцій є другий – геометричний, який існує вже більше ста років і час від часу вдосконалюється. В свою чергу існує значна кількість різних видів цього шляху. Найбільш наочний та простий з них розпочинають вивчати у 8 класі з введення понять: синус, косинус, тангенс та котангенс. При розгляданні прямокутного трикутника у курсі геометрії, вводиться поняття тригонометричних функцій, як співвідношення сторін цього трикутника. Дуже важливо, щоб на даному етапі учні володіли знаннями про сторони прямокутного трикутника: катети (прилеглі сторони до прямого кута) та гіпотенуза (сторона, яка протилежна до прямого кута) [21, 26].

Основний недолік такого визначення тригонометричних функцій – труднощі, які виникають при переході до тригонометричних функцій числового аргументу [21].

Означення: *Косинусом* гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи і позначається $\cos\alpha$.

Погорєлов О.В. стверджував, що косинус кута залежить лише від градусної міри кута зовсім не залежить від довжин сторін трикутника. Це означає, що два різні за розмірами трикутники, але з однаковим гострим кутом мають рівні косинуси даних кутів. Нехай дано прямокутний трикутник $ABC(\angle C = 90°)$ з гострим кутом при вершині A $(\angle A = \alpha)$ [31].

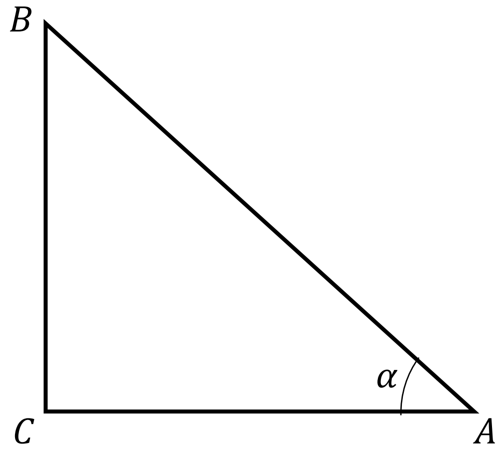


Рис.2.7.1. Прямокутний трикутник

Згідно означення $\cos\alpha$ дорівнює відношенню катета, прилеглого до гострого кута $\alpha,$ до гіпотенузи, а це можна записати за допомогою формули: $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$

Означення: *Синусом* гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета BC до гіпотенузи AB і записують: $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$.

Означення: *Тангенсом* гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета BC до прилеглого катета AC і записують: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$.

Означення: *Котангенсом* гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета AC до протилежного катета BC і записують: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}$ [15].

В курсі алгебри у 8 класі учні знайомляться з тригонометричними функціями для довільних кутів через коло довільного радіуса R.

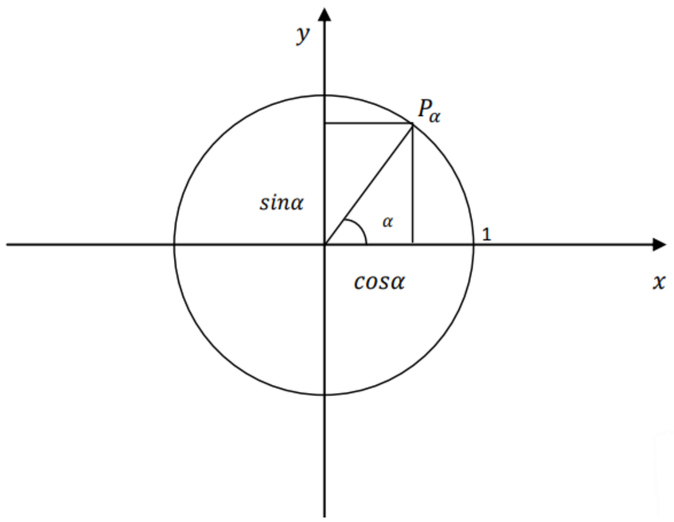


Рис.2.7.2.Коло довільного радіуса R

Довільному числу α поставимо у відповідність точку одиничного кола $P_\alpha = P_\alpha(P_0)$. Ордината цієї точки – синус кута α ($\sin\alpha$), абсциса – косинус цього ж кута ($\cos\alpha$).

У тригонометрії існують такі рівності, які встановлюють зв'язки між тригонометричними функціями синусом ($\sin\alpha$), косинусом ($\cos\alpha$), тангенсом ($tg\alpha$) та котангенсом ($ctg\alpha$) кута. Ці рівності називають основними тотожностями тригонометрії і завдяки їм, можна знайти будь-яку з тригонометричних функцій через іншу, що є відомою.

Основні тригонометричні тотожності [12]:

1) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$;

2) $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$;

3) $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$;

4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$;

5) $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$;

6) $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$;

7) $1 + cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2}$;

8) $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$;

9) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$;

10) $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$;

11) $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$;

12) $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha$.

Розглянемо загальні властивості кожної з тригонометричних функцій в таблицях 2.3 – 2.4 [32].

Функції $\sin x$ та $\cos x$:

Таблиця 2.3

Властивості	***Функція***	
	$y = \sin(x)$	$y = cos(x)$
$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y})$	$R = (-\infty; \infty)$	R
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{y})$	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$
Парність	непарна	парна
Основний період	2π	2π

Продовження табл. 2.3

Нулі функції	$\pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$\boldsymbol{f(x) > 0}$	$(2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in Z$	$\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),$ $n \in Z$
$\boldsymbol{f(x) < 0}$	$(2\pi n + \pi, 2\pi n), n \in Z$	$\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),$ $n \in Z$
Інтервали зростання	$\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$	$(2\pi n - \pi, 2\pi n), n \in Z$
Інтервали спадання	$\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$	$(2\pi n, \pi + 2\pi n), n \in Z$

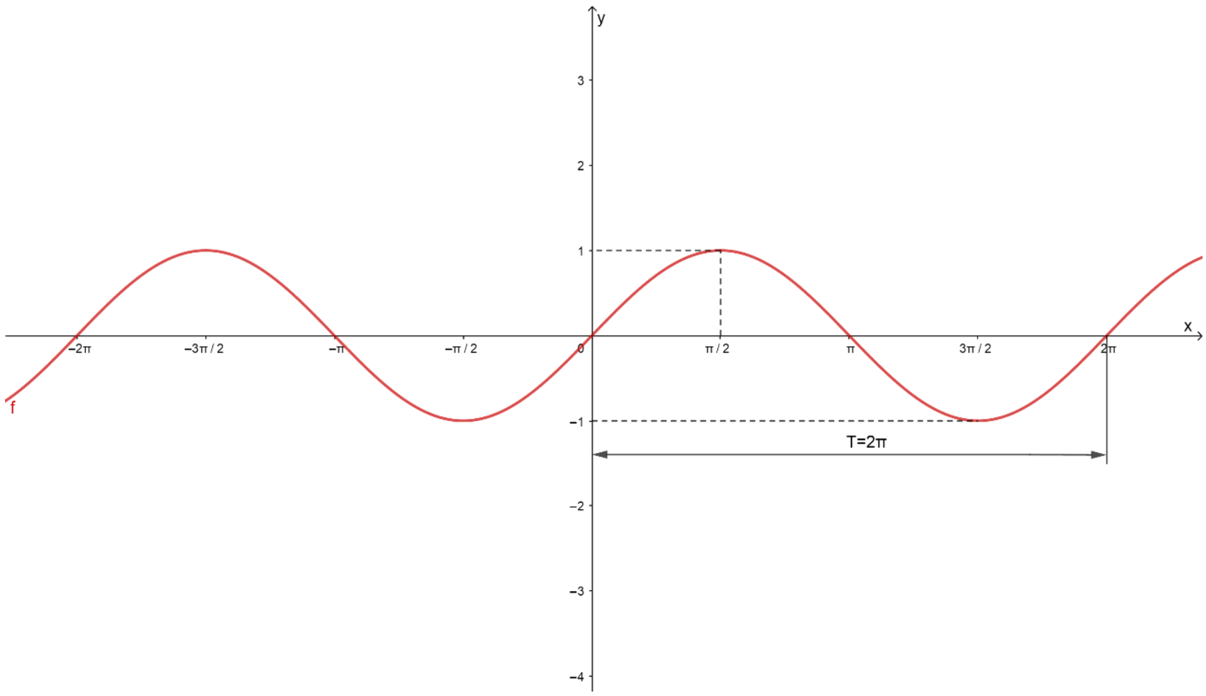


Рис.2.7.3. Графік функції $y = sin(x)$

Графік функції $y = \sin(x)$, називається *синусоїдою.*

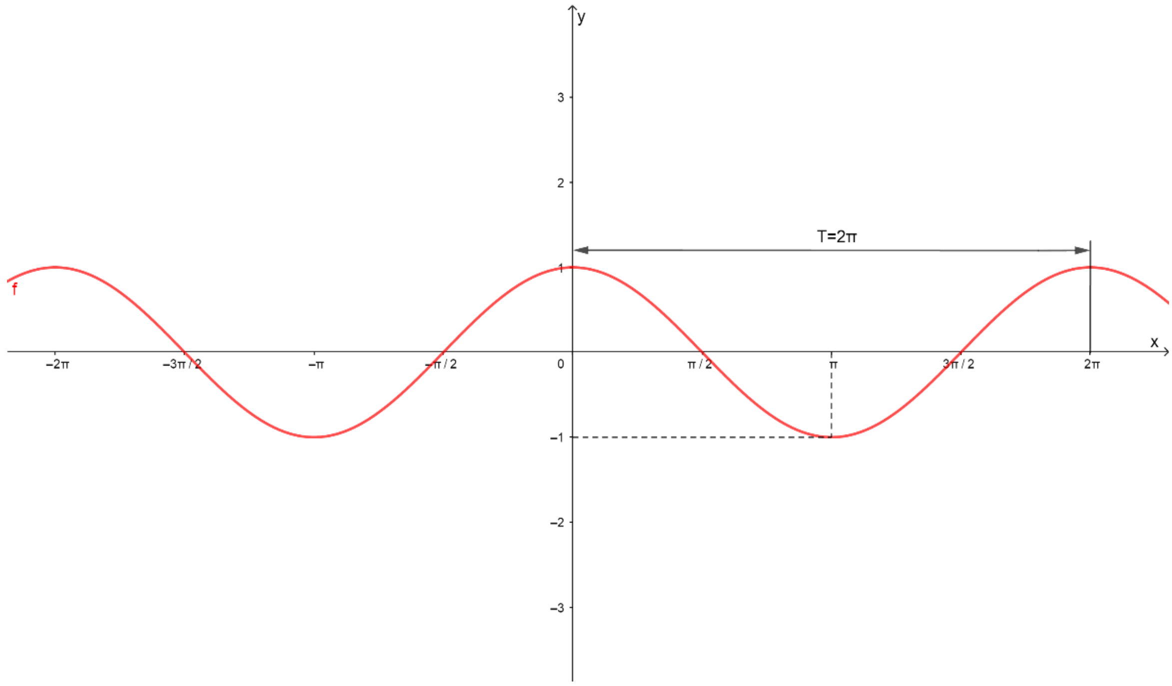


Рис.2.7.4. Графік функції $y = cos(x)$

Графік функції $y = \cos(x)$, називається *косинусоїдою.*

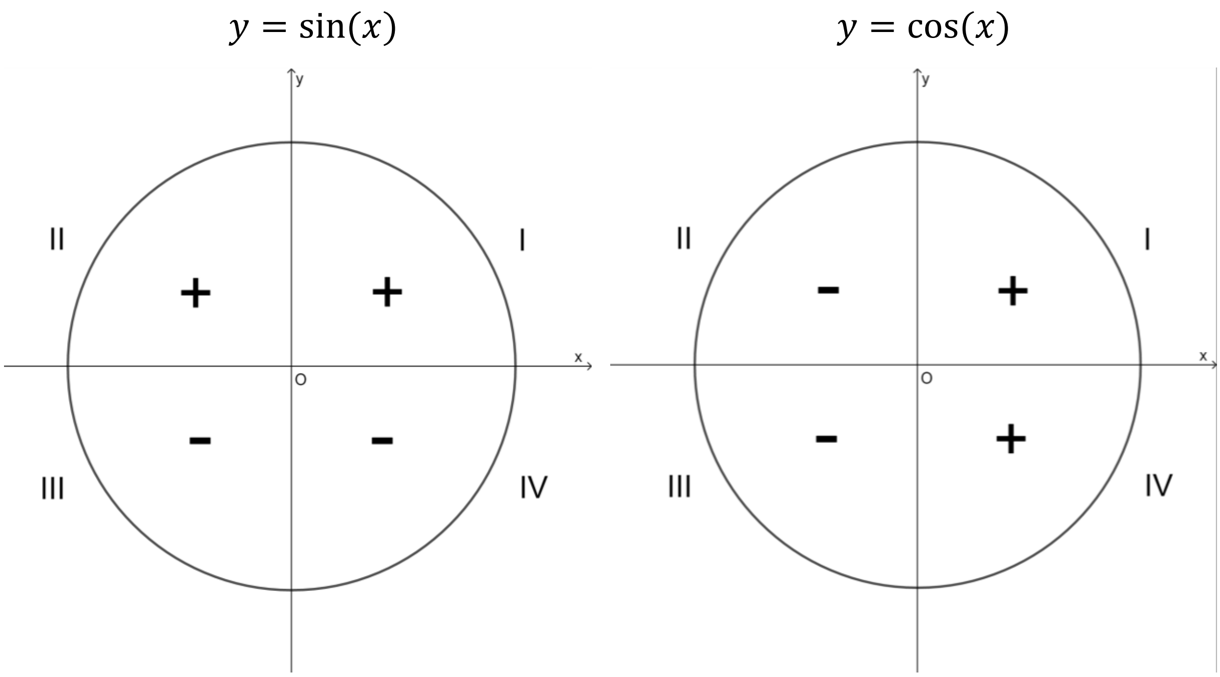


Рис.2.7.5. Знаки функцій $y = sin(x)$ *та* $y = cos(x)$

Функції $\mathbf{y = tg}(x)$ та $\mathbf{y = ctg}(x)$

Таблиця 2.4

Властивості	***Функція***	
	$y = tg(x)$	$y = ctg(x)$
$\boldsymbol{D(y)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$\boldsymbol{E(y)}$	R	R
Парність	непарна	Непарна
Основний період	π	π
Нулі функції	$\pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$\boldsymbol{f(x) > 0}$	$(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in Z$	$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$
$\boldsymbol{f(x) < 0}$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right), n \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right), n \in Z$
Інтервали зростання, спадання	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$	$(\pi n, \pi + \pi n), n \in Z$

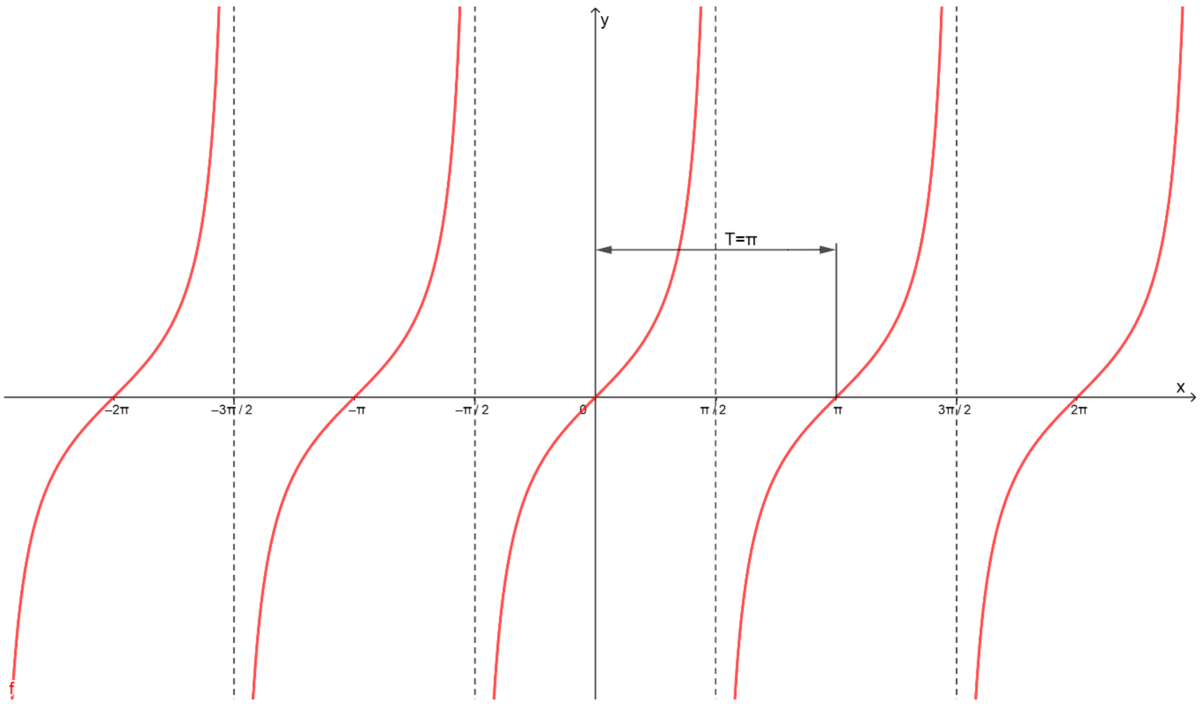


Рис.2.7.6. Графік функції $y = tg(x)$

Означення: $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Графік функції $y = tg(x)$ називається *тангенсоїдою.*

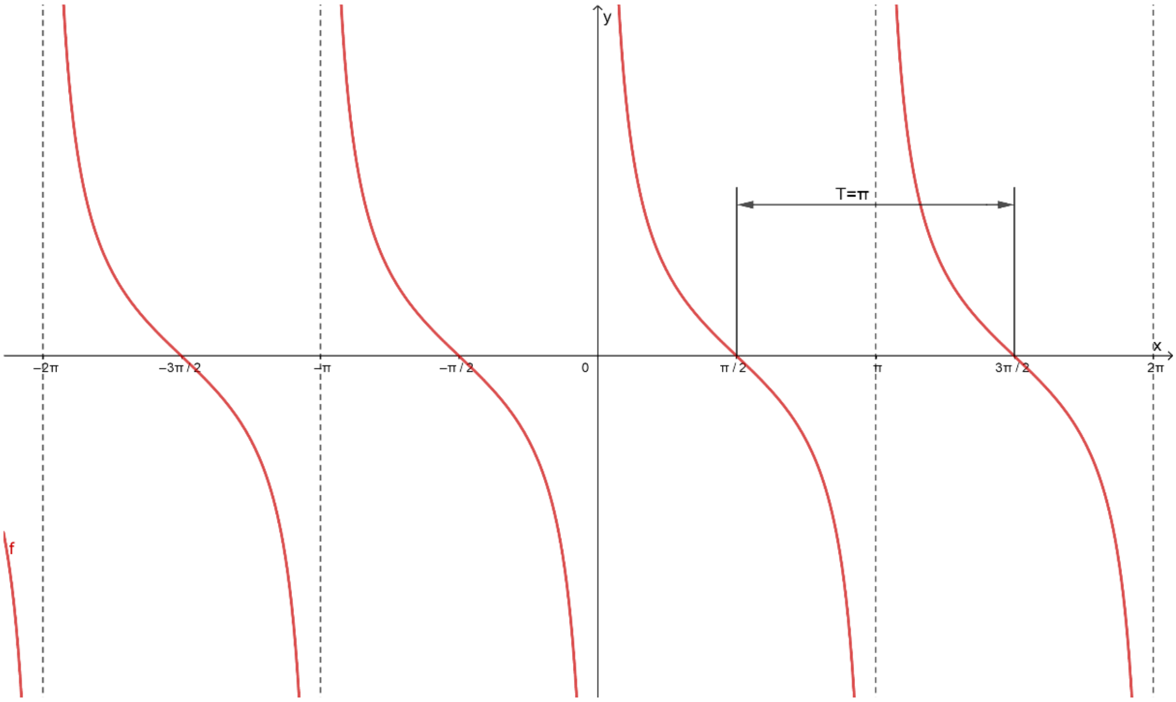


Рис.2.7.7. Графік функції $y = ctg(x)$

Означення: $ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Графік функції $y = ctg(x)$ називається *котангенсоїдою.*

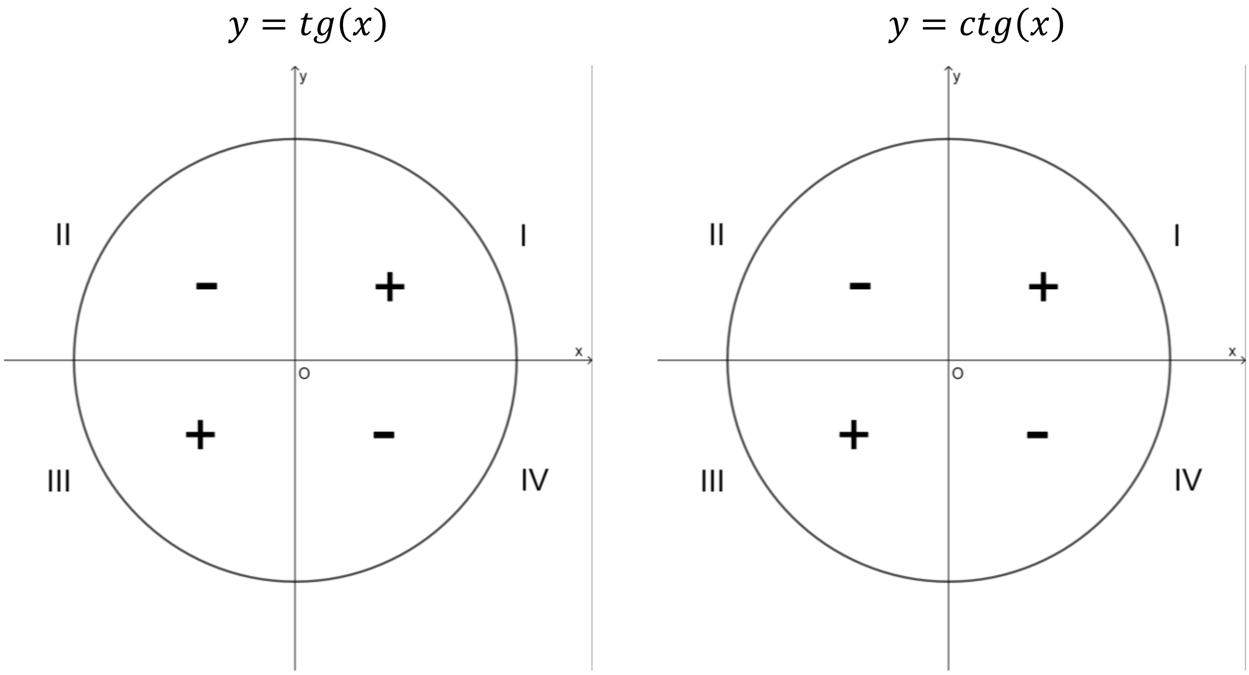


Рис.2.7.8. Знаки функцій $y = tg(x)$ *та* $y = ctg(x)$

РОЗДІЛ 3
ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

3.1. Застосування властивостей функцій до розв'язування шкільних задач

Приклад 1.

Розв‘язати рівняння $(x^2+6x+5)\sqrt{9x-2}=0$ [36].

Розв'язання: Знайдемо область допустимих значень даного рівняння:

$$\sqrt{9x-2}\geq 0$$

$$9x-2\geq 0$$

$$x\geq \frac{2}{9}.$$

Відомо, що добуток дорівнює нулю, тоді і тільки тоді, коли один із множників дорівнює нулю, тому:

$$\begin{cases}(x^2+6x+5)=0\\ \sqrt{9x-2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\ x_2=-5\end{array}\right.\\ x=\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

Корені, $x_1=-1, x_2=-5$не задовольняють ОДЗ, а отже не задовольняють рівняння. Тоді розв'язком вихідного рівняння є $x=\frac{2}{9}$.

Відповідь. $x=\frac{2}{9}$.

Приклад 2.

Розв‘язати рівняння $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x}-1$ [36].

Розв'язання: Знайдемо область допустимих значень даного рівняння:

$\begin{cases}x^2+x+1\geq 0\\ \sqrt{x}-1\geq 0\end{cases}$. Перше рівняння немає розв'язків на множині дійсних чисел, оскільки $D<0$. Тому, звідси слідує, що рівняння розв'язків немає.

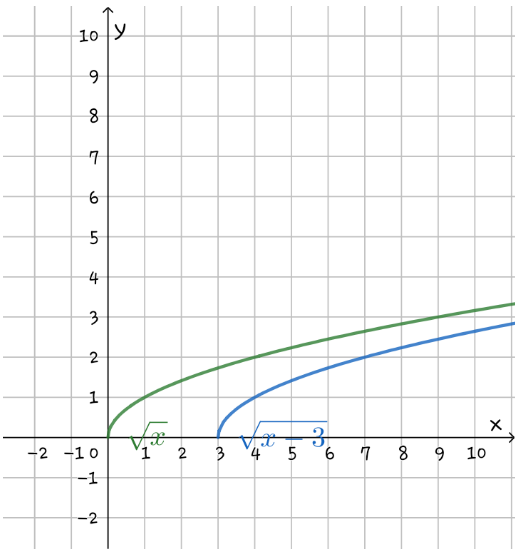
Відповідь. Коренів не має.

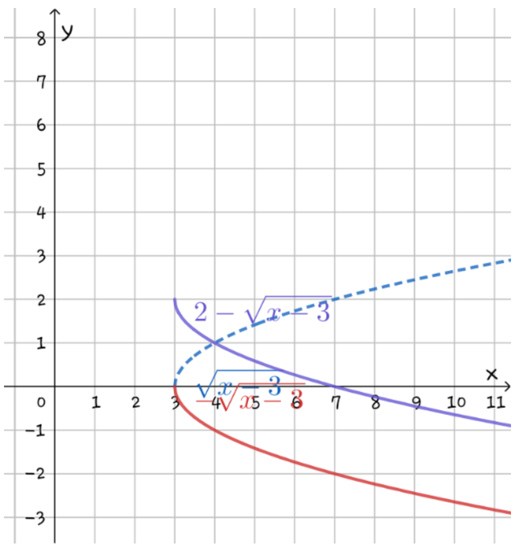
Приклад 3.

Побудувати графік функції $y = \left|2 - \sqrt{|x| - 3}\right|$.

<u>Розв'язання:</u> Щоб побудувати графік функції $y = \left|2 - \sqrt{|x| - 3}\right|$, необхідно:

1. Побудувати графік функції $y = \sqrt{x - 3}$ (графік функції $y = \sqrt{x}$ перенести вправо на 3 одиниці);
2. Побудувати графік функції $y = -\sqrt{x - 3}$ (графік функції $y = \sqrt{x - 3}$ відобразити симетрично вниз і залишивши лише графік, що розміщений внизу);
3. Побудувати графік функції $y = 2 - \sqrt{x - 3}$ (графік функції $y = -\sqrt{x - 3}$ підняти на 2 одиниці вгору);
4. Побудувати графік функції $y = 2 - \sqrt{|x| - 3}$ (графік функції $y = 2 - \sqrt{x - 3}$ відобразити симетрично відносно осі ординат, причому залишити попередній графік);
5. Побудувати графік функції $y = \left|2 - \sqrt{|x| - 3}\right|$ (у графіку функції $y = 2 - \sqrt{|x| - 3}$ все що розміщено нижче осі абсцис відобразити симетрично вище осі Ox).





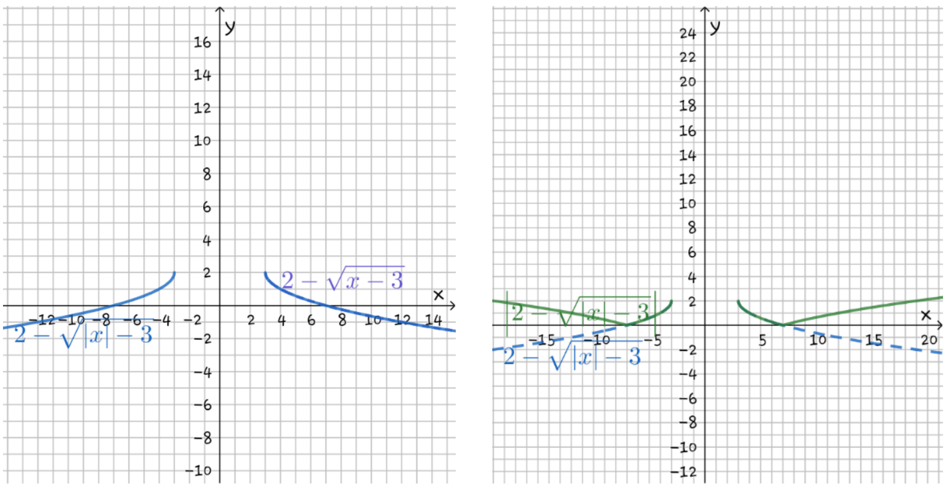


Рис.3.1. Побудова графіка функції $y = \left|2-\sqrt{|x|-3}\right|$ *за допомогою*

елементарних перетворень

Приклад 4.

Побудувати графік функції $y = \frac{3x-1}{x-1}$.

<u>Розв'язання:</u> Щоб побудувати графік заданої функції необхідно перш за все перетворити її до вигляду оберненої пропорційності:

$$y = \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3x-3+2}{x-1} = \frac{3x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 3 + \frac{2}{x-1}.$$

Отже, будуємо графік функції $y = \frac{2}{x}$. Отриманий графік зсуваємо вздовж осі абсцис на 1 одиницю, тобто будуємо графік $y = \frac{2}{x-1}$. Щоб отримати кінцевий результат, необхідно графік $y = \frac{2}{x-1}$ підняти вгору на 3 одиниці.

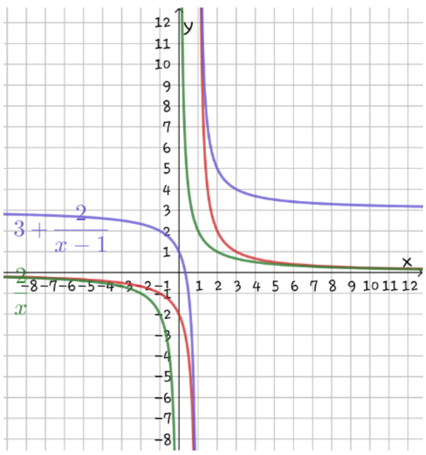


Рис.3.2. Побудова графіка функції $y = \frac{3x-1}{x-1}$ *за допомогою перетворень*

Приклад 5.

Побудувати графік функції $y = 2 + \sqrt[3]{|x| - 4}$.

<u>Розв'язання:</u> Щоб побудувати графік функції $y = 2 + \sqrt[3]{|x| - 4}$, необхідно:

1. Побудувати графік функції $y = \sqrt[3]{x - 4}$ (графік функції $y = \sqrt[3]{x}$ перенести вправо на 4 одиниці);
2. Побудувати графік функції $y = 2 + \sqrt[3]{x - 4}$ (графік функції $y = \sqrt[3]{x - 4}$ підняти на 2 одиниці вгору);
3. Побудувати графік функції $y = 2 + \sqrt[3]{|x| - 4}$ (графік функції $y = 2 + \sqrt[3]{x - 4}$, що розміщений у першій чверті відобразити симетрично осі ординат.

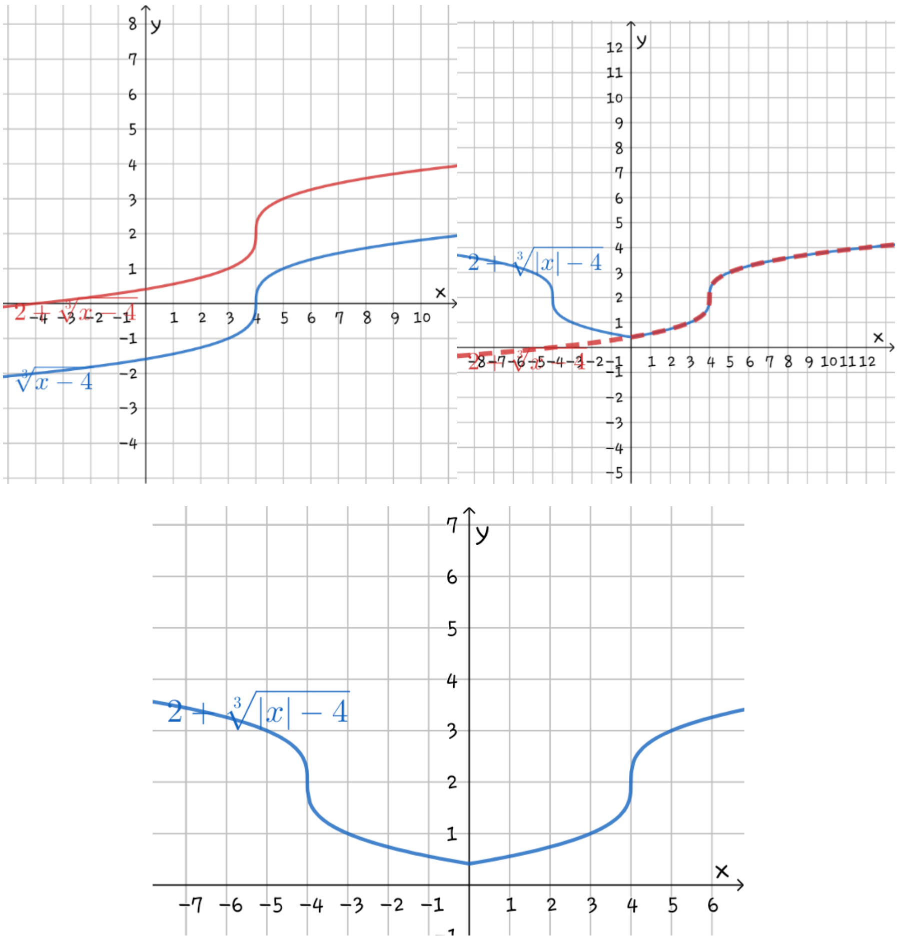


Рис.3.3. Побудова графіка функції $y = 2 + \sqrt[3]{|x| - 4}$ за допомогою елементарних перетворень

Приклад 6.

Побудувати по точках графік функції $y = \sqrt{x}$ на відрізку [0;9]. З отриманого графіка шляхом послідовних його деформацій і зрушень, побудувати графік функції:

$$y = 2\sqrt{-3(x + 1{,}5)} - 1{,}2.$$

<u>Розв'язання:</u> Складемо таблицю відповідних значень змінних x і y для функції $y = \sqrt{x}$, щоб побудувати його графік (Див. рис. 3.4)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1,0	1,4	1,7	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0

Позначимо функцію $y = \sqrt{u}$ через $f(u)$. Тоді дана функція перетвориться до виду :

$$y = 2f\big(-3(x + 1{,}5)\big) - 1{,}2.$$

Зіставляючи її з виразом $y = mf(kx + a) + b$, знаходимо такі значення параметрів:

$$m = 2;\ k = -3;\ a = -4{,}5;\ b = -1{,}2.$$

Далі, згідно загальним вказівкам, будуємо графік наступним шляхом:

- збільшуємо в 2 рази ординати точок графіка функції $y = \sqrt{x}$ і зберігаємо незмінними їх абсциси, будуємо графік функції $y = 2\sqrt{x}$;

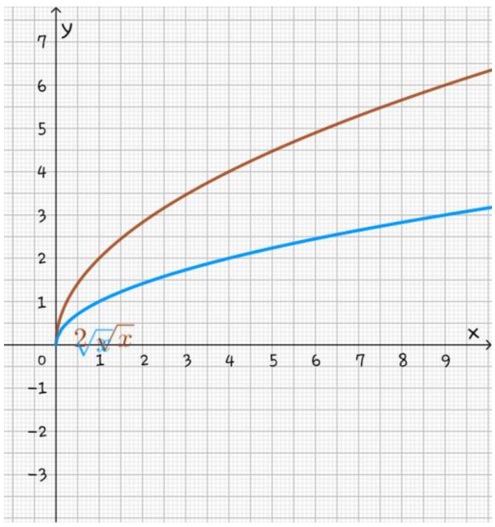


Рис.3.4. Побудова графіків функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = 2\sqrt{x}$

- зменшуємо в 3 рази абсциси точок графіка функції $y = 2\sqrt{x}$ і зберігаємо незмінними їх ординати, будуємо графік функції $y = 2\sqrt{3x}$;

- змінюємо знак у абсцис точок графіка функції $y = 2\sqrt{3x}$ і зберігаємо незмінними їх ординати, будуємо графік функції $y = 2\sqrt{-3x}$ (графік функції $y = 2\sqrt{3x}$ і $y = 2\sqrt{-3x}$ симетричні відносно осі ординат);
- якщо перенести точки графіка функції $y = 2\sqrt{-3x}$ у напрямку осі абсцис на 4,5 одиниць вліво, то в результаті отримаємо графік функції $y = 2\sqrt{-3(x + 1{,}5)}$;

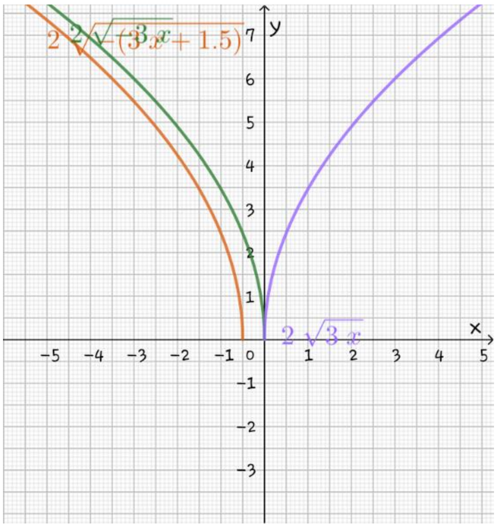


Рис.3.5. Побудова графіків функцій $y = 2\sqrt{3x}$, $y = 2\sqrt{-3x}$ *та*

$2\sqrt{-3(x + 1{,}5)}$

- перенісши точки графіка функції $y = 2\sqrt{-3(x + 1{,}5)}$ в напрямку осі ординат на 1,2 одиниць вниз, отримаємо шуканий графік функції:

$y = 2\sqrt{-3(x + 1{,}5)} - 1{,}2$ (Див. рис. 3.6).

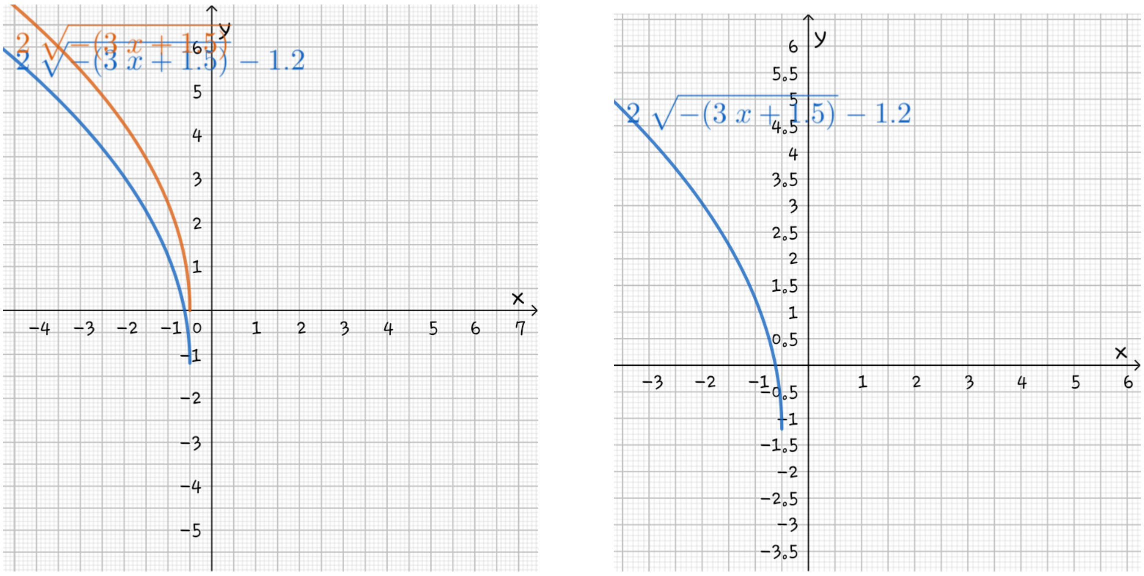


Рис.3.6. Побудова графіка функції $y = 2\sqrt{-3(x+1{,}5)} - 1{,}2$ *за допомогою елементарних перетворень*

Приклад 7.

Побудувати графік функції $y = 3-(|x|-4)^2$.

Розв'язання: На першому кроці потрібно побудувати графік $y = (x-4)^2$. Отриманий графік перевернути вниз і підняти на 3 одиниці вгору. Далі будуємо кінцевий графік $y = 3-(|x|-4)^2$, таким чином – частину графіка $y = 3-(x-4)^2$, що знаходиться у 1 і 4 чвертях відображаємо симетрично осі ординат. В результаті отримаємо шуканий графік (Див рис. 3.7):

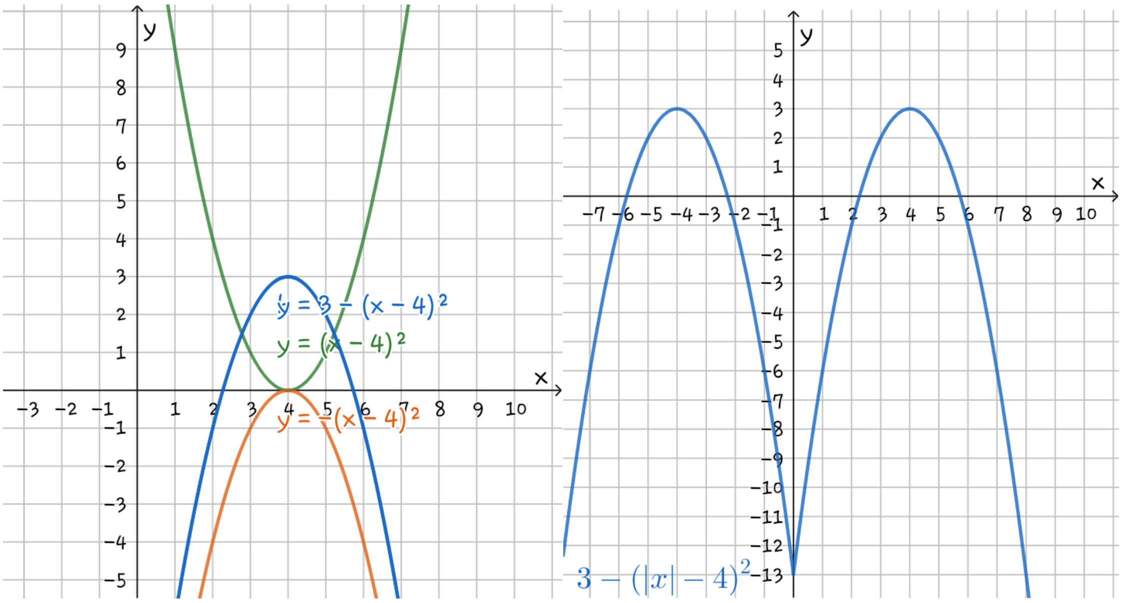


Рис.3.7. Побудова графіка функції $y = 3-(|x|-4)^2$

Приклад 8.

Побудувати графік функції $y = (x-2)^{-\frac{1}{3}} - 3$.

Розв'язання: Щоб побудувати графік функції $y = (x-2)^{-\frac{1}{3}} - 3$, необхідно:

- побудувати графік функції $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;
- побудувати графік функції $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ (графік функції $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ перенести на 2 одиниці вправо);
- побудувати графік функції $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} - 3$ (графік функції $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ перенести на 3 одиниці вниз вздовж осі ординат.

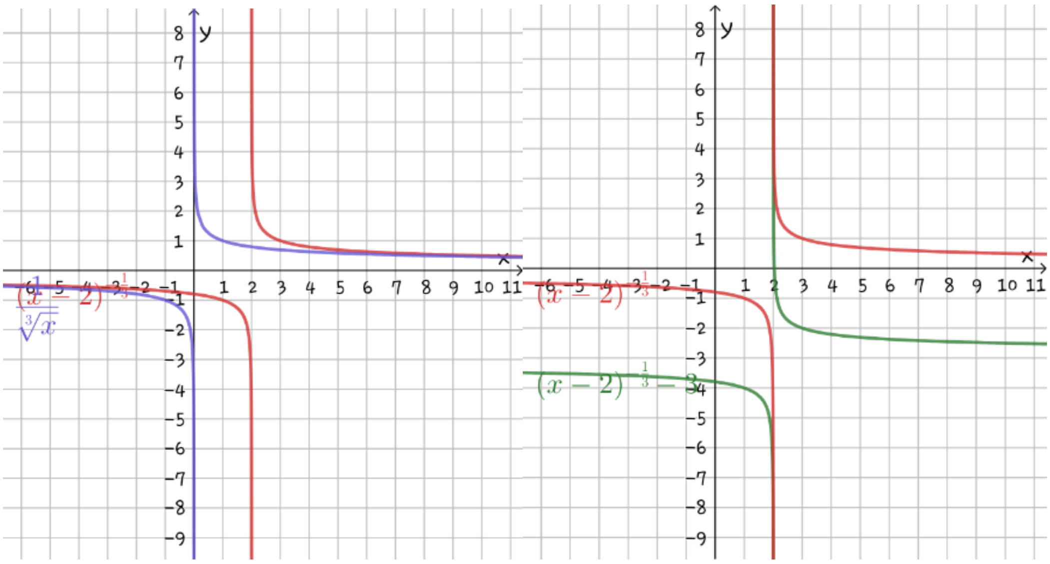


Рис.3.8. Графік функції $y = (x-2)^{-\frac{1}{3}} - 3$

Приклад 9.

Розв'язати рівняння $sin(x) = 1 - x$ графічним способом [33].

Розв'язання:

Побудуємо графіки функцій $y = sinx$ і $1 - x$ в одній системі координат:

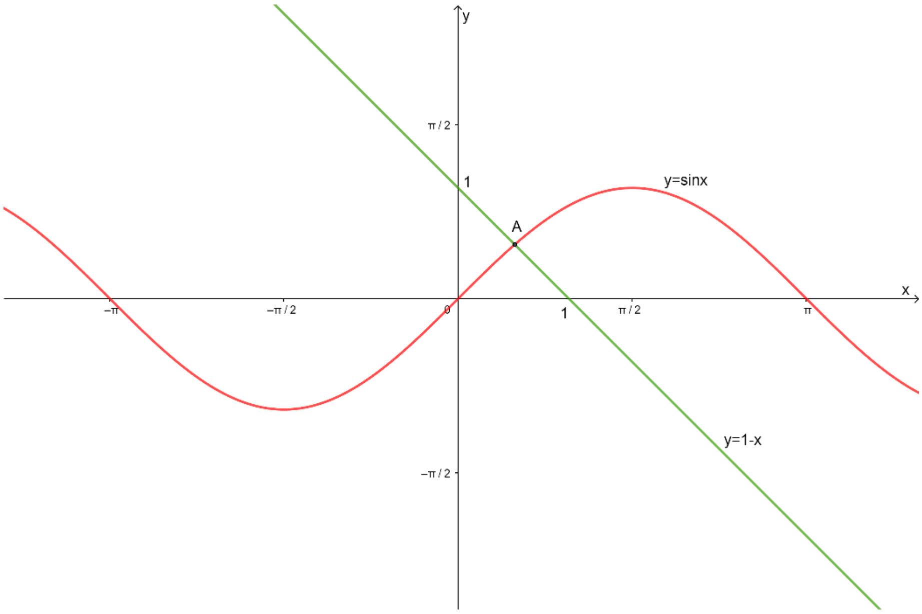


Рис.3.9. Графік функції $y = sinx$ *і* $1 - x$.

Дані графіки мають перетин в одній точці – A. Абсциса точки перетину є коренем рівняння, причому єдиним: $x \approx 0{,}5$.

Для того, щоб уточнити отриманий результат потрібно скористатися тригонометричною таблицею. При $x = 0{,}5 \to sinx \approx 0{,}4794, 1 - 5 = 0{,}5$.

Таким чином, $sinx < 1 - x$. З рисунку видно, що знайдений корінь рівняння $sinx = 1 - x$ має більше значення, ніж 0,5. Перевіримо, чи задовольняє рівняння значення $x = 0{,}6$. Отримуємо: $sinx \approx 0{,}5446, 1 - x = 0{,}4$. Отже, $sinx > 1 - x$. Звідси слідує, що корінь рівняння повинен бути меншим ніж 0,6.

Таким чином, було з'ясовано, що шуканий корінь рівняння належить інтервалу $[0{,}5; 0{,}6]$. Тому, з точністю до 0,1, можна стверджувати, що $x_0 \approx 0{,}5$ (з недостачею), $x_0 \approx 0{,}6$ (з надлишком).

Відповідь: $x \approx 0{,}5$.

3.2. Функції у завданнях ЗНО

Зовнішнє незалежне оцінювання є важливим аспектом для кожного абітурієнта та школяра загалом. Дане тестування дозволяє об'єктивно оцінити знання учасників та на основі отриманих результатів оптимізувати конкурсний відбір на навчання у ЗВО.

У програмі ЗНО з математики передбачено завдання для оцінювання рівня володіння навичками побудови й аналізу графіків функціональних залежностей, рівнянь та дослідження їх властивостей. До розділу завдань з теми «Функції» входять [34]:

- числові послідовності;
- функціональна залежність. Лінійні, квадратичні, степеневі, показникові логарифмічні та тригонометричні функції, їх основні властивості;
- похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних та правила диференціювання;
- дослідження функції за допомогою похідної. Побудова графіка функцій.

Загалом, у ЗНО 2020 з математики було 7 завдань з розділу «Функції». З них 4 завдання з вибором однієї правильної відповіді, 1 – встановлення відповідності, 1 – відкрита форма з короткою відповіддю та 1 – відкрита форма з розгорнутою відповіддю.

Типові задачі ЗНО з розділу «Функції»:

1. Укажіть парну функцію [17].

А	Б	В	Г	Д
$y = 4^x$	$y = x$	$y = \sqrt{x}$	$y = \tan x$	$y = \|x\|$

Розв'язання: симетричним відносно осі ординат, а отже і парним є графік функції $y = |x|$

Відповідь: Д.

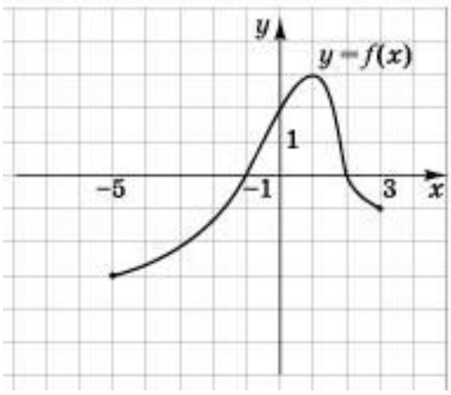
2. Графік довільної функції $y = f(x)$ паралельно перенесли вздовж осі ординат на 3 одиниці вниз. Графік якої з вказаних функцій отрималися [17]?

А	Б	В	Г	Д
$y = f(x+3)$	$y = f(x) + 3$	$y = 3f(x)$	$y = f(x) - 3$	$y = f(x-3)$

Розв'язання: оскільки елементарне перетворення графіка –перенесення вздовж осі ординат на 3 одиниці, то необхідно від даної функції відняти 3 од.. Тобто, отримаємо $y = f(x) - 3$.

Відповідь: Г.

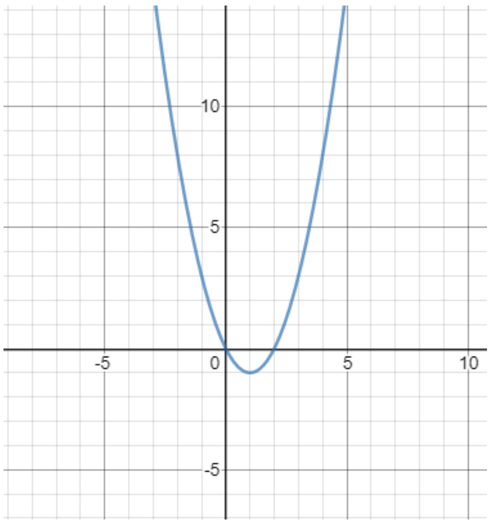
3. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку [-5; 3]. Укажіть проміжок зростання функції $y = f(x)$ [17].

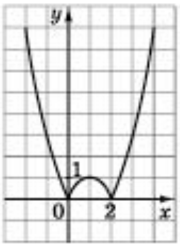
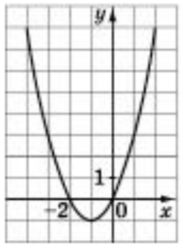
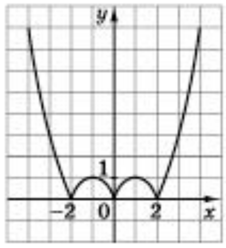
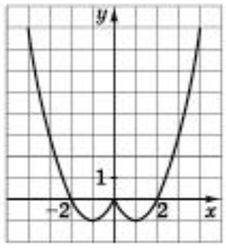


А	Б	В	Г	Д
[0; 3]	[-1; 2]	[1; 3]	[-3; 3]	[-5; 1]

Відповідь: Д.

4. На рисунку зображено графік функції $y = x^2 - 2x$. Укажіть графік функції $y = |x^2 - 2x|$.



А	Б	В	Г	Д
				

Розв'язання: як вже відомо, модуль відображає графік, що нижче осі абсцис симетрично вище цієї ж осі. Тому отримаємо графік А.

Відповідь: А.

5. Вкажіть лінійну функцію, графік якої паралельний осі абсцис та

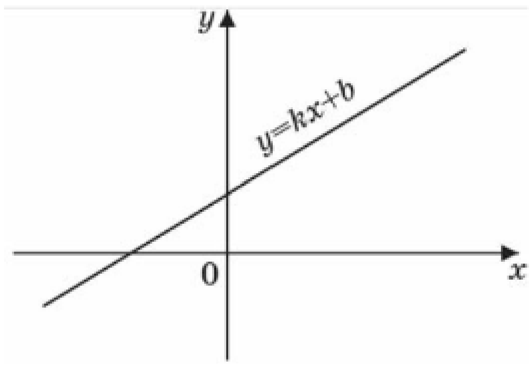
А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{3}{2}x$	$y = -2$	$x = -2$	$x = 3$	$y = 3$

проходить через точку $A(-2; 3)$.

Розв'язання: скільки графік функції паралельний осі абсцис, то $x = 0$. Також відомо, що він проходить через т. $A(-2; 3)$, а це означає, що підстановці координат точки у функцію повинна бути справедлива рівність. Отже, отримуємо в результаті варіант Д.

Відповідь: Д.

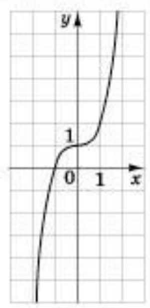
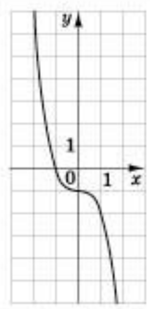
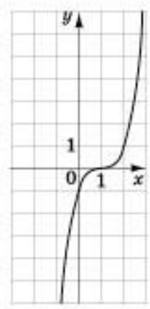
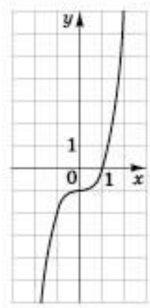
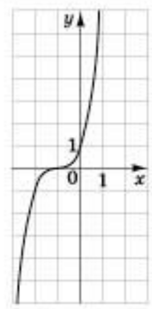
6. За побудованим графіком функції $y = kx + b$ визначте знаки коефіцієнтів k та b [17].



А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} k > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k > 0 \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k = 0 \\ b < 0 \end{cases}$

Відповідь: В.

7. Укажіть ескіз графіка функції $y = x^3 - 1$.

А	Б	В	Г	Д
				

Відповідь: Г.

8. Установіть відповідність між функціями, заданими формулами (1-4), та їхніми властивостями (А-Д) [17].

	Функція
1	$y = x^3$
2	$y = \cos x$
3	$y = tg$
4	$y = \log_{0,2} x$

	Властивість
А	Областю визначення функції є проміжок $[0; +\infty)$
Б	Функція спадає на інтервалі $(0; +\infty)$
В	Функція зростає на інтервалі (-∞; +∞)
Г	Парна функція
Д	Періодична функція з найменшим додатнім періодом π.

Відповідь:

1) В
2) Г
3) Д
4) Б

ВИСНОВКИ

Вивчення функцій в шкільному курсі математики є однією з важливих та складних тем у курсі шкільної алгебри та початків аналізу. Її вивчають протягом всього курсу, раціонально розподіляючи функції за складністю вивчення у програмі кожного класу. При дослідженні даної теми ми переконалися, що на її вивчення необхідно приділяти більше уваги та часу. Адже, кожна з функцій має свої особливості при побудові її графіка.

У ході роботи було з'ясовано, що одним з найзручніших способів побудови графіків функції є побудова графіка конкретної функції за допомогою елементарних перетворень вже відомої. Дане перетворення полягає у послідовному виконанні таких перетворень, як стиск, розтяг, перенесення та симетрія. Такий спосіб побудови графіка є зручним та ефективним, тому варто у шкільному курсі математики більше приділяти увагу на його вивчення. Не менш цікавими та проблематичними є побудови графіків функції, як містять модулі. Такі побудови здійснюються загалом за допомогою симетрії.

Побудувати графік функцій, які не можна звести до елементарних відомих функцій складно за допомогою геометричних перетворень, тому існує так звана схема дослідження властивостей функції, за допомогою якої можна реалізувати цю побудову з використання похідної.

Функція є первинною математичною моделлю, а отже і невід'ємною частиною у Зовнішньому незалежному оцінюванні. Аналізуючи завдання ЗНО останніх років, було з'ясовано, що в середньому у даному тестуванні з математики присутні 7-8 завдань з розділу «Функції». До них належать [34]:

- числові послідовності;
- функціональна залежність; лінійні, квадратичні, степеневі, показникові логарифмічні та тригонометричні функції, їх основні властивості;
- похідна функції, її геометричний та фізичний зміст; таблиця похідних та правила диференціювання;

- дослідження функції за допомогою похідної; побудова графіка функцій.

При написанні дослідницької роботи було досягнуто поставленої мети. Тобто, нам вдалося систематизувати знання про функції, охарактеризувати їх основні властивості та особливості, розглянути методи побудови графіків досліджуваних функцій та перевірити і застосувати все на практиці. Також, об’єднати всі необхідні знання при вивченні певної функції та методів побудови її графіків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Харків: Гімназія, 2010. – 352 с.
2. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: поглиблений рівень / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Харків: Гімназія, 2018. – 416 с.
3. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М.С. Харків: Гімназія, 2018. – 400 с.
4. Алгебра і початки аналізу. 11 клас: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл.: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти: профільний рівень / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. – Харків: Гімназія, 2019. — 304 с.
5. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2016. – 253 с.
6. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.
7. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. – 336 с.
8. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. / Г. П. Бевз – К. : Вища школа, 1989. – 367 с.
9. Біляніна О. Я. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. закл. загальн. середн. освіти / О. Я. Біляніна, Г. І. Біляніна, В. О. Швець. — К. : Грамота, 2018. – 91 с.

10. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. – Москва: ГИФМЛ, 1960. – 468 с.
11. Вірченко Н. А. Графіки функцій : Довідник / Н. А. Вірченко, Н. О. Вірченко, К. І. Ляшко, К. І. Швецов. – К. : Наукова думка, 1991. – 128 с.
12. Гайшут О. Тригонометрія: довідник-задачник / О. Гайшут. – Київ: Магістр-8, 1997. – 256 с.
13. Гейченко Л. Т. Графіки функцій : навч. – метод. посіб. / Л. Т. Гейченко, Л. В. Стахурська : за ред. О. В. Лісового. – К., 2017 – 32 с.
14. Гельфанд И. М. Функции и графики. – 7-е изд. / И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева Е. Г, Э.Э. Шноль. – М.: МЦНМО, 2006. – 120 с.
15. Гембарська С. Б. Різні підходи до вивчення тригонометричних функцій: навчально-методичний посібник для самостійної для студентів, які навчаються за спеціальностями 014 Середня освіта «Математика» / С. Б. Гембарська, Ф. Г. Абдулаєв, К. М. Жигалло. – Луцьк: СНУ імені Лесі Українки, 2018. – 66 с.
16. Єршов Л. В. Побудова графіків функцій : Книга для вчителя / Л. В. Єршов, Р. Б. Райхміст. – М., 1994. – 230 с.
17. ЗНО Онлайн [Електронний ресурс] / Режим доступу : https://zno.osvita.ua/mathematics
18. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 448 с.
19. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ : Генеза, 2017. – 264 с.
20. Історія розвитку поняття «Функція» : матеріали Всеукр. конф. [Математика у технічному університеті XXI сторіччя], (Краматорськ, 15-16 травня 2017 р.) / М-во освіти і науки України, Донбаська держ. машинобуд. акад., 2017. – 94 с.

21. Капкаева Л. С. Теория и методика обучения математике: частная методика в 2 ч.: учебное пособие для вузов / Л. С. Капкаева. – Москва : Издательство Юрайт, 2018. – 188 с.
22. Кушнир И. Р. Функции. Задачи и решения / И. Р. Кушнир. – Астарта, 1996. – 540 с.
23. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 240 с.
24. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. В. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 256 с.
25. Методика и технология обучения математике. Курс лекций / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова, В. В. Орлов та ін. – Москва: Дрофа, 2008. – 415 с.
26. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики / Колягин Ю. М., Луканким Г. Л., Мокрушин Е. Л. та ін. – Москва : Просвещение, 1977. – 483 с.
27. Милованова Л. Н. Функции и их исследование / Л. Н. Милованова. – Москва, 1958. – 124с.
28. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. [Електронний ресурс] / Режим доступу : https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx
29. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. [Електронний ресурс] / Режим доступу : https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx
30. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). [Електронний ресурс] / Режим доступу : https://mon.gov.ua/st

orage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx

31. Погорєлов О. В. Геометрія: навчальний посібник для 6 – 10 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. – Київ : Радянська школа, 1983. – 264с.
32. Покровский В. П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия : учеб.-метод. пособие / В. П. Покровский. – Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с.
33. Практикум з розв'язання задач з математики / Михайловський В. та ін. – Київ: Вища школа, 1978. – 478 с.
34. Програма зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти: наказ Міністерства освіти і науки України від 26 червня 2018. №696. [Електронний ресурс] / Режим доступу: https://osvita.ua/doc/files/news (дата звернення: 16.03.2021)
35. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 312 с.
36. Хохлова Л. Г. Ірраціональні рівняння і нерівності: навч. посібник / Л. Г. Хохлова, С. Г. Хома-Могильська. – Тернопіль: Тайп, 2018. – 72 с.
37. Шилов Г. Є. Як будувати графіки? / Г. Є. Шилов. – М., 1979. – 98 с.
38. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіт. навч. закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К : Зодіак – ЕКО, 2006. – 272 с.

ДОДАТОК

Додаток А

Програма з математики 7 клас

Таблиця 1

Тема 2. ФУНКЦІЇ (*10 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** функціональних залежностей; лінійних функцій;	Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів.
пояснює, що таке: аргумент; функція; область визначення функції; область значень функції; графік функції;	Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функції. Графік функції.
формулює означення понять: функція; графік функції; лінійна функція; пряма пропорційність;	Лінійна функція її графік та властивості
називає та ілюструє на прикладах способи задання функції;	
описує побудову графіка функції, зокрема лінійної та її окремого виду – прямої пропорційності;	
розв’язує вправи, що передбачають: знаходження області визначення функціїпобудову графіка лінійної функції; знаходження за графіком функції значення функції за даним значенням аргументу і навпаки; визначення окремих характеристик функції за її графіком (додатні значення, від’ємні значення, нулі);	
складає та розв'язує задачі на: пряму пропорційність на основі життєвого досвіду; побудову графіків при моделюванні реальних процесів з використанням лінійної функції тощо	