Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:
Методика розв’язування логарифмічних рівнянь і нерівностей в курсі алгебри 11 класу

Виконала: студентка IV курсу,
групи МЕІ-41
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Чиж Анастасія Анатоліївна

Керівник: кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики з методикою викладання Генсіцька-Антонюк Н. О.

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Присяжнюк І. М.

Рівне – 2021 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Історично поняття логарифма розвинулось на основі порівняння арифметичної і геометричної прогресій. Ця ідея зустрічається ще в листі Архімеда (287-212 роки до н.е.) «Ψαμμίτης» («Про число піщинок») тирану міста Сіракуз Гелону. Вона могла бути зародком майбутньої ідеї логарифма, але пізніше була втрачена. Лише в епоху Відродження ця ідея знову виникає і розвивається в сучасне поняття логарифма [16].

Логарифми були придумані в часи відсутності комп'ютерів і калькуляторів для прискорення і спрощення обчислень. Ідея логарифма, тобто ідея виражати числа у вигляді ступеня одного і того ж числа, належить Міхаелю Штифелю. Але в той час (1553 рік) математика була не настільки розвинена, тож ідея логарифма не знайшла свого застосування. Логарифми були повторно винайдені більш як півстоліття потому одночасно і незалежно один від одного шотландським математиком-любителем Джоном Непером (1550-1617) і швейцарським механіком і часовим майстром Юстом Бургі (1552-1632).

Першим опублікував роботу Непер в 1614 році під назвою «Опис дивовижної таблиці логарифмів». Теорія логарифмів Непера була дана, як зараз вважають, в досить повному обсязі, а спосіб обчислення логарифмів - більш простий, тому заслуги Непера у винаході логарифмів більші, ніж у Бургі [17].

Бургі працював над таблицями одночасно з Непером, але довгий час тримав їх у секреті і опублікував лише в 1620 році. Ідеєю логарифма Непер опанував близько 1594 року, хоча таблиці опублікував через два десятиліття. Спочатку він називав свої логарифми «штучними числами» і вже потім запропонував ці «штучні числа» називати одним словом «логарифм» (λόγος + ἀριθμός), яке в перекладі з грецької означає «відношення чисел», взятих одне з арифметичній прогресії, а інше з спеціально підібраної до неї геометричній прогресії. Науковці та інженери почали застосовувати логарифми для пришвидшення виконання обчислень із застосуванням логарифмічних лінійок і таблиць логарифмів. Логарифм дозволяє прискорити множення багатозначних чисел шляхом додавання їхніх логарифмів [18].

Сучасний виклад теорії логарифмів уперше було здійснено математиком Леонардом Ейлером (1707-1783), який у XVIII столітті пов'язав їх з показниковою функцією. Він першим став розглядати логарифмування як дію, ввів у вжиток терміни «основа логарифма» і «мантиса». Генрі Бріггз (1561-1630) склав таблиці логарифмів з основою 10. Десяткові таблиці більш зручні для практичного вжитку, теорія їх простіша, ніж у логарифмів Непера. Тому десяткові логарифми іноді називають бріґґовими [17].

Французький математик і астроном Пєр-Симон Лаплас (1749-1827) сказав, що винайдення логарифмів, скоротивши обчислення кількох місців у справу кількох днів, ніби подвоїло життя асторономів.

Математика, як і будь-яка інша наука, не стоїть на місці. Разом з розвитком суспільства змінюються і погляди людей, виникають нові думки та ідеї. І XXI століття не стало у цьому сенсі винятком. Поява комп'ютерів внесла свої корективи в способи розв'язання рівнянь і значно їх полегшила. Але комп'ютер не завжди може бути під рукою (іспит, контрольна), тому хоча б самі головні способи вирішення рівнянь необхідно знати. Адже використання логарифмічних рівнянь в повсякденному житті –не рідкість. Вони знайшли своє застосування в багатьох галузях господарства і практично у всіх новітніх технологіях. Крім того логарифмічні функції трапляються в найрізноманітніших галузях науки і життя — фізиці, економіці, географії, хімії, біології, астрономії, музиці тощо. Логарифмічна функція моделює закон зміни роботи газу та закон зміни сили відчуття від зміни сили збудження (психофізичний закон Вебера), тривалість хімічної реакції та збільшення величини банківського вкладу у часі. По логарифмічній спілалі вигинають трубу для підводу води до турбіни гідроелектростанції. По цій спіралі загнута завитка у вусі людини, що дозволяє нам чути як шелестіння листя, так і гуркіт грому.

Методику викладання логарифмів, логарифмічних рівнянь та нерівностей досліджували: З. І. Сліпкань, В. Ф. Шаталов, Г. П. Бевз, М. І. Шкіль, Г. Г. Барановська.

Дослідження методів розв’язання логарифмічних рівнянь та нерівностей проводили: В. Ф. Сторчай, Г. П. Щербинін, В. О. Швець, А. В. Прус.

Методи дослідження, які були використані у кваліфікаційній роботі - теоретичні та емпіричні:

- до теоретичних методів належать: аналіз педагогічно-психологічної та навчально-методичної літератури з теми дослідження;
- до емпіричних методів належать: бесіди з вчителями, спостереження за шкільним процесом, узагальнення і вивчення досвіду вчителів математики, що працюють у старших класах.

Актуальність теми. Матеріал, пов'язаний з рівняннями та наерівностями, становить значну частину шкільного курсу математики. Одним із складних розділів алгебри, що вивчаються у шкільній програмі, є логарифми, їх рівняння та нерівності, так як у школі їм приділяють досить мало уваги. Як відомо, при навчанні учнів розв’язуванню логарифмічних рівнянь, а тим більше – нерівностей, виникають певні труднощі у відшуканні коренів того чи іншого рівняння, методів та способів розв’язування, а у випадку нерівностей – визначення проміжків. Досвід вчителів показує, що учні в недостатній мірі опановують уміння розв’язувати логарифмічні рівняння та нерівності, часто допускаючи помилки при їх розв’язуванні та при записі відповідей.

Труднощі при вивченні даного виду рівнянь пов'язані з наступними їх особливостями:

- у більшості випадків відсутність чіткого алгоритму розв’язування логарифмічних рівнянь;
- при розв’язуванні рівнянь даного виду доводиться робити перетворення, що призводять до рівнянь, не рівносильним даним, внаслідок чого найчастіше виникають помилки.

Тому при мізерній кількості годин, відведених на вивчення логарифмічних рівнянь та нерівностей, необхідно використовувати нові підходи до вивчення або ж до організації навчального процесу. Саме такі підходи і забезпечує нова українська школа.

Враховуючи актуальність зазначеної проблеми, її значущість в програмі з алгебри, мною була обрана тема дипломної роботи – «Методика розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей в курсі алгебри 11 класу».

Мета дослідження - систематизувати відомості про логарифмічні рівняння та нерівності в шкільному курсі алгебри старшої школи та розробити методичну систему по формуванню в учнів навичок розв’язування логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Для досягнення поставленої мети були визначені такі **задачі дослідження**:

1. З’ясувати місце логарифмічних рівнянь та нерівностей в діючій програмі з математики, конкретизувати вимоги до знань, умінь і навичок учнів.
2. Проаналізувати програму, сучасні діючі підручники з алгебри.
3. Виділити види та методи розвязування логарифмічних рівнянь та нерівностей.
4. Проаналізувати завдання зовнішнього незалежного оцінювання по темі дослідження.
5. Систематизувати відомості про розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей в шкільному курсі алгебри старшої школи.
6. Подати приклади та методику розв’язування логарифмічних рівнянь, нерівностей різної складності.

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри та початків аналізу в старшій школі.

Предметом дослідження є особливості вивчення логарифмічних рівнянь та нерівностей учнями старшої школи.

Джерельна база дослідження охоплює три основні групи:

- навчальні плани, навчальні програми, шкільні підручники та методична література для вчителів;

- періодичні видання;
- довідкова література, сучасні підручники й посібники.

Практичне значення роботи полягає в тому, що розроблений зміст і методика може бути використана вчителями шкіл при організації навчання алгебри і початків аналізу у 11 класі на уроках та факультативних заняттях для активізація їх пізнавальної діяльності, підвищення якості засвоєння сприйнятого матеріалу, створення творчої атмосфери в колективі учнів.

Апробація результатів дослідження. Результати даної роботи були впроваджені під час проходження педагогічної практики у загальноосвітній школі І-ІІІ ст. №24 м. Рівне. Тези та висновки були подані на звітній науково-практичній конференції РДГУ (Рівне, 2021).

Структура і обсяг роботи дослідження. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (24 найменування). Загальний обсяг дипломної роботи – 69 сторінок друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

1.1 Логарифм, його види та основні властивості

Для початку, розглянемо поняття логарифма, види логарифмів та їх основні властивості.

Логарифмом числа $\boldsymbol{b}$ за даною основою $\boldsymbol{a}$ ($a > 0, a \neq 1$ і $b > 0$) називається показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число b (позначається $\log_a b$) [2].

Наприклад, $\log_2 8$ – це показник степеня, до якого потрібно піднести число 2, щоб отримати число 8. Маємо: $\log_2 8 = 3$, оскільки $2^3 = 8$.

Наведемо ще кілька прикладів:

- $\log_5 \frac{1}{125} = -3$, оскільки $5^{-3} = \frac{1}{125}$;
- $\log_2 32 = 5$, оскільки $2^5 = 32$;
- $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$, оскільки $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$;
- $\log_3 \frac{1}{\sqrt{81}} = -2$, оскільки $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{9^2}} = \frac{1}{\sqrt{81}}$.

З цього означення безпосередньо випливає так звана **основна логарифмічна тотожність**: $a^{\log_a b} = b$.

Наприклад:

- $5^{\log_5 2} = 2$,
- $2^{-\log_2 5} = \frac{1}{2^{\log_2 5}} = \frac{1}{5}$,
- $4^{\log_2 6} = 2^{2\log_2 6} = 2^{\log_2 6^2} = 36$;

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$ виконуються рівності:

$\log_a 1 = 0$ та $\log_a a = 1$ [1].

Наприклад: $\log_4 1 = 0$, бо $4^0 = 1$;

Наприклад: $\log_3 3 = 1$, бо $3^1 = 3$.

Логарифм за основою 10 називають **десятковим логарифмом**: $\log_{10} x = \lg x$.

Логарифм за основою $e \approx 2{,}718281828459045\ldots$ називають **натуральним логарифмом**: $\log_e x = \ln x$.

Основні властивості логарифмів виражаються в декількох теоремах, на яких базується практичне використання логарифмів [2].

Теорема 1. Логарифм добутку двох додатних множників дорівнює сумі їх логарифмів [2]:

$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$, де $x > 0$ та $y > 0$.

Наприклад: $\log_5 35 = \log_5(5 \cdot 7) = \log_5 5 + \log_5 7 = 1 + \log_5 7$.

Теорема 2. Логарифм частки двох додатних чисел (дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника (чисельника і знаменника), тобто [2]:

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, де $x > 0$ та $y > 0$.

Наприклад: $\log_3 \frac{9}{7} = \log_3 9 - \log_3 7 = 2 - \log_3 7$.

Наслідок. Логарифм дробу, чисельник якого дорівнює одиниці, дорівнює логарифму знаменника, взятому з протилежним знаком:

$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$, де $y > 0$.

Наприклад: $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 1 - \log_2 8 = 0 - 3 = -3$.

Теорема 3. Логарифм степеня додатного числа дорівнює показнику степеня, помноженому на логарифм основи цього степеня, тобто [2]:

$\log_a b^x = x \cdot \log_a b$, де x – будь яке число, $b > 0$. [3]

Наприклад: $\log_9 3^6 = 6 \cdot \log_9 3 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Теорема 4. Логарифм додатного числа b за старою основою a дорівнює логарифму цього самого числа b за новою основою c, поділеному на логарифм старої основи a за новою основою c [2]:

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Наприклад: $\log_3 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 3} = \frac{\lg 100}{\lg 3} = \frac{2}{\lg 3}$.

Наслідок. Логарифм додатного числа b за старою основою a дорівнює частці одиниці та логарифму числа a за новою основою b:

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Наприклад: $\log_3 10 = \frac{1}{\log_{10} 3} = \frac{1}{\lg 3}$.

Теорема 5. Логарифм додатного числа b за основою a, яка піднесена до степеня y, дорівнює добутку оберненого показника степеня y та логарифма числа b за основою a [2]:

$\log_{a^y} b = \frac{1}{y}\log_a b$, де $y \neq 0$.

Наприклад: $\log_{625} 5 = \log_{5^4} 5 = \frac{1}{4}\log_5 5 = \frac{1}{4}$.

Знаходження числа x за даними числами a і b, де $a > 0, a \neq 1$ і $b > 0$, називають **логарифмуванням** числа b за основою a: $x = \log_a b$, тобто логарифмування – це обчислення логарифмів заданих чисел або виразів [2].

Наприклад, прологарифмувати вираз $x = 100a^2b^3$ за основою 10:

$\lg x = \lg(100a^2b^3) = \lg 100 + \lg a^2 + \lg b^3 = 2 + 2\lg a + 3\lg b$.

Перетворення, за допомогою якого за даним логарифмом числа або виразу визначають саме це число або вираз, називають **потенціюванням**: $\log_a b = x$. Це перетворення є оберненим до логарифмування. [2]

Наприклад, пропотенціювати вираз:

$\log_2 x = 5\log_{32} 2 + 6\log_2 a - \frac{3}{\log_b 2} = 5 \cdot \frac{1}{5}\log_2 2 + \log_2 a^6 - 3\log_2 b =$

$\log_2 2 + \log_2 a^6 - \log_2 b^3 = \log_2 \frac{2a^6}{b^3}$;

Отже $\log_2 x = \log_2 \frac{2a^6}{b^3}$, звідки слідує, що $x = \frac{2a^6}{b^3}$.

1.2 Логарифмічні рівняння та їх види

Рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма і/або в основі логарифма, називається **логарифмічним** [9]. Їх легко звести до квадратних чи степеневих рівнянь відносно змінної, якщо знати властивості логарифма.

Необхідно відзначити, що під час розв'язку логарифмічних рівнянь необхідно враховувати область допустимих значень (ОДЗ): під знаком логарифма можуть знаходитись тільки додатні величини, в основі логарифмів – додатні, відмінні від одиниці. Проте знаходження ОДЗ деколи може бути дуже громіздким і на практиці маємо можливість вибрати: шукати ОДЗ або зробити перевірку коренів у рівняння.

1. Найпростішим логарифмічним рівнянням є: $\log_a x = b$.

Оскільки графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = b$ перетинаються в одній точці, то це рівняння матиме єдиний корінь при будь якому b. Звідси слідує, що $x = a^b$ при $a > 0, a \neq 1$. [4]

Приклад 1:

Розв’язати рівняння: $\log_2 x = 5$.

Скористаємось означенням логарифма: $x = 2^5$.

Тож, розв’язком буде число: $x = 32$.

Відповідь: $x = 32$.

2. Ще одним прикладом простих логарифмічних рівнянь є: $\log_a f(x) = b$. Звідси слідує, що $f(x) = a^b$ при $a > 0, a \neq 1$. Також враховуємо, що вираз під знаком логарифму повинен бути додатним: $f(x) > 0$. [9]

Приклад 2:

Розв’язати рівняння: $\log_{0,2}(x + 4) = -2$.

Враховуючи ОДЗ: $x + 4 > 0,\ x > -4$.

$x + 4 = 0{,}2^{-2}$;

$x + 4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$;

$x + 4 = 5^2$;

$x + 4 = 25$;

$x = 25 - 4$;

Тому коренем рівняння є число $x = 21$.

Відповідь: $x = 21$.

3. Рівняння виду $\log_{\varphi(x)} f(x) = b$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0,\ \varphi(x) \neq 1. \\ f(x) = (\varphi(x))^b \end{cases}$

Приклад 3:

Розв'язати рівняння: $\log_{3-x}(x^2 - x - 1) = 1$.

Складаємо систему: $\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ 3 - x > 0,\ 3 - x \neq 1\,; \\ x^2 - x - 1 = (3 - x)^1 \end{cases}$

Розв'язавши отриману систему, отримаємо:

$$\begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x < 3,\ x \neq 2 \\ x = 2, x = -2 \end{cases}.$$

Тому коренем рівняння буде $x = -2$.

Відповідь: $x = -2$.

4. Логарифмічні рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$ розв'язуємо так: $f(x) = a^{g(x)}$ при $a > 0, a \neq 1$ та $f(x) > 0$. Тобто $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

Приклад 4:

Розв'язати рівняння: $\log_2(4^x - 2) = x$.

Користуємось означенням логарифма:

$4^x - 2 = 2^x$;

$4^x - 2^x - 2 = 0$;

$(2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$;

Вводимо заміну. Нехай $2^x = t$, тоді маємо: $t^2 - t - 2 = 0$. Розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо:

$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^x = -1 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \in \emptyset \end{array}\right.$;

Оскільки $x = 1$ належить проміжку $4^x - 2 > 0$ (перевіримо підстановкою: $4^1 - 2 = 4 - 2 = 2 > 0$), то $x = 1$ є коренем рівняння.

Відповідь: $x = 1$.

5. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$, де $a > 0, a \neq 1$. Тобто:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}.$$

Приклад 5:

Розв'язати рівняння: $\log_2(x^2 - x - 2) = \log_2(x + 1)$.

Складаємо рівносильну систему:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = x + 1 \\ x^2 - x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ (x - 2) \cdot (x + 1) > 0; \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \ x = -1 \\ x < -1, \ x > 2; \\ x > -1 \end{cases}$$

Спростивши систему, отримаємо:

$$\begin{cases} x = 3, \ x = -1 \\ x \in (2; +\infty) \end{cases};$$

$x = 3$.

Відповідь: $x = 3$.

6. Рівняння виду $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0, \ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0, \ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$.

Тобто $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0, \ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$.

Приклад 6:

Розв'язати рівняння: $\log_{x+4}(x^2-1) = \log_{x+4}(5-x)$.

Складаємо рівносильну систему:

$$\begin{cases} x^2-1=5-x \\ x^2-1>0 \\ 5-x>0 \\ x+4>0,\ x+4\neq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2+x-6=0 \\ (x-1)\cdot(x+1)>0 \\ -x>-5 \\ x>-4,\ x\neq -3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=-3,\ x=2 \\ x<-1,\ x>1 \\ x<5 \\ x>-4,\ x\neq -3 \end{cases};$$

Спростивши систему, матимемо:

$$\begin{cases} x=-3 \\ x=2 \\ x\in(-4;-1)\cup(1;5) \end{cases}.$$

Отримали, що $x=2$.

Відповідь: $x=2$.

7. Рівняння виду $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\psi(x)} g(x)$ розв'язується переходом до іншої основи: $\frac{\log_a f(x)}{\log_a \varphi(x)} = \frac{\log_a g(x)}{\log_a \psi(x)}$ при $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ \varphi(x)>0,\ \varphi(x)\neq 1 \\ \psi(x)>0,\ \psi(x)\neq 1 \\ a>0,\ a\neq 1 \end{cases}$.

Приклад 7:

Розв'язати рівняння: $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

Переходимо до логарифмів з основою 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3;$$

Спрощуємо вирази та розв'язуємо дробово-раціональне рівняння:

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{\log_2 2+\log_2 x} = 3;$$

$$\frac{2}{\log_2 x} + \frac{6}{1+\log_2 x} = 3;$$

Вводимо заміну: $\log_2 x = t$.

$\frac{2}{t} + \frac{6}{1+t} = 3;$

$\frac{2+2t+6t-3t-3t^2}{t(1+t)} = 0;$

$\frac{-3t^2+5t+2}{t(1+t)} = 0;$

$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\frac{1}{3} \end{array}\right.;$

Отримали:

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l} x = 2^2 \\ x = 2^{-\frac{1}{3}} \end{array}\right.;$

Оскільки виконуються умови $\begin{cases} x^2 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases}$, тому маємо два корені: $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{array}\right.$.

Відповідь: $x_1 = 4$ та $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

1.2.1 Логарифмічні рівняння з параметрами

Логарифмічна функція описує ряд фізичних, хімічних, біологічних, економічних, виробничих процесів. Тому так важливо навчити учнів та студентів виконувати відповідні дослідження [11].

Теоретичне вивчення явищ, процесів, застосування інформаційних технологій приводить до розгляду загальних випадків існування залежностей між змінними тобто до логарифмічних рівнянь або нерівностей, що містять параметри [11].

Типи рівнянь з параметрами:

- розв'язати рівняння для будь-якого значення параметра;
- при яких значеннях параметра рівняння має розв’язки, та знайти їх;
- при яких значеннях параметра рівняння має вказану кількість розв'язків;

- при яких значеннях параметра розв'язки рівняння задовольняють вказаній вимозі.

Методи розв'язування:

- графічний;
- аналітичний.

Проілюструємо деякі типи логарифмічних рівнянь з параметрами на прикладах.

Приклад 8:

Розв’яжіть рівняння: $\log_a x^2 + 2\log_a(x+2) = 1$.

Рівняння має зміст при $a > 0$, $a \neq 1$. Область визначення рівняння $x \in (-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

На цій області визначення задане рівняння еквівалентно рівнянню:

$$(2\log_a|x| + 2\log_a(x+2) = 1)$$

$$\left(\log_a|x| \cdot (x+2) = \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(|x| \cdot (x+2) = \sqrt{a}\right).$$

Знову отримали квадратне рівняння, що залежить від параметра.

Рівняння $|x| \cdot (x+2) = \sqrt{a}$ еквівалентно сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2 < x < 0 \\ -x(x+2) = \sqrt{a} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x(x+2) = \sqrt{a} \end{cases} \end{array}\right..$$

Розв’язуючи кожну з яких знаходимо x:

1. $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ -x(x+2) = \sqrt{a} \end{cases};$

$$\begin{cases} -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x + \sqrt{a} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2 < x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{1-\sqrt{a}} \\ x = -1 + \sqrt{1-\sqrt{a}} \end{array}\right. \\ 1 - \sqrt{a} > 0 \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{1-\sqrt{a}} \\ x = -1 + \sqrt{1-\sqrt{a}} \end{array}\right., \text{ при } 0 < a < 1.$$

2. $\begin{cases} x > 0 \\ x(x+2) = \sqrt{a} \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 2x - \sqrt{a} = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}} \\ x = -1 - \sqrt{1+\sqrt{a}} \end{array}\right. \\ \sqrt{a} > 0 \end{cases}$;

$x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$, при $a > 0$.

Відповідь:

- при $0 < a < 1$ $x_1 = -1 - \sqrt{1-\sqrt{a}}$; $x_2 = -1 + \sqrt{1-\sqrt{a}}$;
- при $a > 1$ $x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$.

Приклад 9:

Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $\lg ax = 2\lg(x+3)$ має два різних дійсних розв’язки? Знайти ці розв’язки.

Замінимо рівняння рівносильною системою: $ax = (x+3)^2$

$\begin{cases} ax = (x+3)^2 \\ x + 3 > 0 \\ ax > 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2 + (6-a)x + 9 = 0 \\ x > -3 \end{cases}$.

Отже, нам потрібно розв’язати квадратне рівняння відносно a так, щоб воно мало два розв’язки, кожен з яких більший за -3.

Маємо квадратне рівняння $x^2 + (6-a)x + 9 = 0$. Графік цієї функції $f(x) = x^2 + (6-a)x + 9$ – квадратна парабола – напрямлений вітками вгору, тому нам потрібно, щоб дискримінант був додатнім, а вершина параболи була більша за -3 та значення функції у вершині було додатнім.

$\begin{cases} x^2 + (6-a)x + 9 = 0 \\ D > 0 \\ x_0 > -3 \\ f(-3) > 0 \end{cases}$.

Тому знаходимо розв’язки системи:

$$\begin{cases} D = a^2 - 12a > 0 \\ x_0 = \frac{a-6}{2} > -3 \\ f(-3) = 3a > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 12; \end{array}\right. \\ a > 0 \end{cases}$$

$a > 12.$

Тож, при $a > 12$ дане рівняння має два різних розв'язки:

$x_1 = \frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2}$ та $x_2 = \frac{a-6-\sqrt{a^2-12a}}{2}$.

Отже, $x_{1,2} = \frac{a-6\pm\sqrt{a^2-12a}}{2}$.

Відповідь: $a \in (12; +\infty)$.

Приклад 10:

При яких значеннях a рівняння має один розв'язок?

$\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2 - x + 3) = 2\log_{2ax+4}(x^2 + 2x + 1)$

Запишемо рівносильне рівняння:

$\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2 - x + 3) = 2\log_{2ax+4}(x^2 + 2x + 1);$

$2\log_{2ax+4}(2x^2 - x + 3) = 2\log_{2ax+4}(x^2 + 2x + 1);$

$\log_{2ax+4}(2x^2 - x + 3) = \log_{2ax+4}(x^2 + 2x + 1).$

Тепер перейдемо до наслідку $2x^2 - x + 3 = x^2 + 2x + 1$.

Звідси розв'яжемо квадратне рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$.

За теоремою Вієта, отримаємо корені $x_1 = 1$та $x_2 = 2$.

Тоді перейдемо до з'ясування області визначення самого логарифму:

$$\begin{cases} 2x^2 - x + 3 > 0 \\ x^2 + 2x + 1 > 0 \\ 2ax + 4 > 0 \\ 2ax + 4 \neq 1 \end{cases}.$$

Очевидно, x_1та x_2 задовольняють першим двом нерівностям системи. Тоді, для того, щоб рівняння мало один розв'язок достатньо вимоги:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2ax_1 + 4 > 0 \\ 2ax_1 + 4 \neq 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2ax_2 + 4 \leq 0 \\ 2ax_2 + 4 = 1 \end{array}\right. \end{cases} \text{або} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2ax_2 + 4 > 0 \\ 2ax_2 + 4 \neq 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2ax_1 + 4 \leq 0 \\ 2ax_1 + 4 = 1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Маємо:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2a+4>0\\2a+4\neq 1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}4a+4\leq 0\\4a+4=1\end{array}\right.\end{cases}\text{ або }\begin{cases}\left[\begin{array}{l}4a+4>0\\4a+4\neq 1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}2a+4\leq 0\\2a+4=1\end{array}\right.\end{cases};$$

Перетворимо отримані системи:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>-2\\a\neq -\frac{3}{2}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}a\leq -1\\a=-\frac{3}{4}\end{array}\right.\end{cases}\text{ або }\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>-1\\a\neq -\frac{3}{4}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}a\leq -2\\a=-\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Розв’язком першої системи є проміжок: $(-2;-\frac{3}{2})\cup(-\frac{3}{2};-1])\cup\left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

Друга система розв’язку не має.

Відповідь: $-2<a<-\frac{3}{2}$, або $-\frac{3}{2}<a<-1$, або $a=-\frac{3}{4}$.

Приклад 11:

Для всіх дійсних значень a розв’язати рівняння:

$(3a-2)^2\cdot\log_3(-4x-4x^2)=-(a+1)^2\cdot\log_7(1-2x^2)$.

Знайдемо область визначення рівняння, розв’язавши систему:

$$\begin{cases}-4x-4x^2>0\\1-2x^2>0\end{cases}.$$

Звідси $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0$.

Для знаходження значень x маємо $-4x-4x^2=1-(2x+1)^2\leq 1$ та $1-2x^2<1$.

Відповідно, $\log_3(-4x-4x^2)\leq 0$ і $\log_7(1-2x^2)\geq 0$.

Таким чином, ліва частина рівняння недодатна, а права – невід’ємна. Тоді нам потрібно, щоб і ліва, і права частини рівняння одночасно приймали нульове значення. Тому, маємо:

$$\begin{cases}(3a-2)^2\cdot\log_3(-4x-4x^2)=0\\-(a+1)^2\cdot\log_7(1-2x^2)=0\end{cases}.$$

Оскільки $\log_7(1-2x^2)<0$, то з другого рівняння системи отримаємо:

$(a+1)^2=0;$

$a+1=0;$

$a=-1.$

Підставляючи знайдене значення a в перше рівняння, з’ясуємо, що $\log_3(-4x - 4x^2) = 0$.

Розв’яжемо логарифмічне рівняння без параметру, та отримаємо, що $x = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: якщо $a = -1$, то $x = -\frac{1}{2}$; якщо $a \neq -1$, то коренів немає [11].

Логарифмічні рівняння, що містять параметри, доцільно розглянути під час систематизації та узагальнення знань студентів , пов'язаних з розв’язуванням цих рівнянь. Робота буде корисною тим абітурієнтам, що готуються до ЗНО.

1.3 Логарифмічні нерівності та їх види

Поговоримо про нерівності.

Що ж таке нерівність?

Два вирази або числа, з’єднані знаком $>$, $<$, $\geq$ або $\leq$, утворюють **нерівність**.

Нерівності, що містять знаки > або <, називаються **строгими**, а нерівності, що містять знаки ≥ або ≤, називаються **нестрогими**.

Нерівності з однією змінною мають вигляд:

$$f(x) > g(x);$$
$$f(x) < g(x);$$
$$f(x) \geq g(x);$$
$$f(x) \leq g(x).$$

Розв’язком нерівності називається множина значень змінної, при яких дана нерівність буде правильною числовою нерівністю.

Дві нерівності називаються **рівносильними**, якщо множини їхніх розв’язків збігаються.

Основна ідея розв’язування нерівності полягає в заміні нерівності більш простою, але рівносильною заданій.

Нерівність, яка містить змінну під знаком логарифма або в його основі, називають **логарифмічною**. Наприклад,

- $\log_5 x < 3$;
- $\lg x + \lg(x+8) \geq \lg(4-5x)$;
- тощо [9].

Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на властивості монотонності логарифмічної функції:

- монотонно зростає, якщо основа логарифма більша одиниці $a > 1$
- монотонно спадає, якщо основа менша одиниці $0 < a < 1$.

При цьому слід урахувати, що підлогарифмічний вираз може набувати лише додатних значень $(x > 0)$.

Перегляньте графік:

- при основі $a > 1$ більшому значенню аргументу (x) відповідає більше значення логарифма,
- для $y = \log_a x$ з основою меншою одиниці $0 < a < 1$ навпаки – чим менше значення "ікс" тим більше значення приймає логарифм.

На рис.1 зображено графіки логарифмічних функцій:

- $y = \log_2 x$ – червоним кольором (зростаюча);
- $y = \log_{0.5} x$ – синім кольором (спадна).

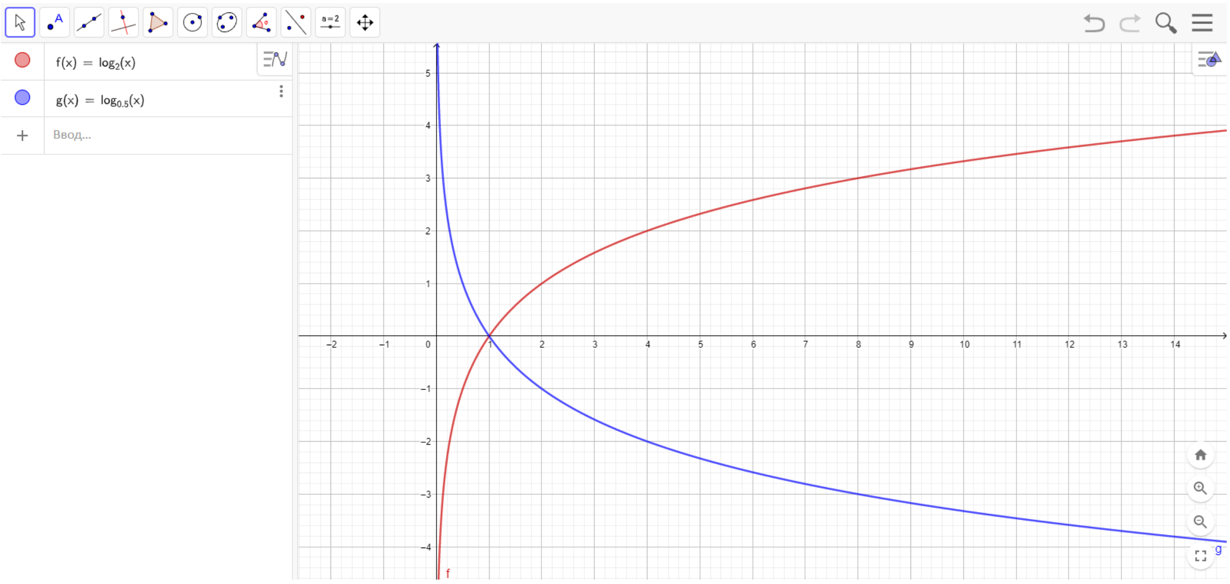

Рисунок 1

Також, для розв'язування логарифмічних нерівностей Ви повинні добре знати властивості логарифма.

Тож, розглянемо, які бувають логарифмічні нерівності.

1. Найпростішими логарифмічними нерівностями є: $\log_a x > b$, $\log_a x \geq b$.

При розв'язуванні нерівностей виду $\log_a x > b$, $\log_a x \geq b$, можна користуватися наступними принципами:

1) При розкритті логарифмічних нерівностей виду $\log_a x > b$ знак нерівності зберігаємо $x > a^b$, якщо $a > 1$, та змінюємо на протилежний $x < a^b$, якщо основа менша одиниці $0 < a < 1$;
2) Якщо в отриманій нерівності є гарантія виконання ОДЗ: $x > 0$, то отриману нерівність нічим не доповнюємо; якщо такої гарантії немає, то доповнюємо дану нерівність умовою $x > 0$.

Покажемо у вигляді схеми як дані принципи використовуються, наприклад, про розв'язуванні нерівності $\log_a x \geq b$.

$\log_a x \geq b, a > 0, a \neq 1, b$ – будь-яке число

$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний	Знак нерівності не змінюється
$0 < x \leq a^b$	$x \geq a^b$

Приклад 12:

Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{2}} x \geq -3$.

Переходимо до нерівності, основа $\frac{1}{2} < 1$, тому знак нерівності змінюємо на протилежний: $x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ і розв'язуємо отриману нерівність: $x \leq 2^3$, $x \leq 8$.

На даному етапі ми вже хочемо писати відповідь, та ми не врахували ОДЗ, що у цьому прикладі буде помилкою, адже: $x > 0$.

Тому відповідь ми можемо оформити у вигляді системи: $\begin{cases} x \leq 8 \\ x > 0 \end{cases}$.

Запишемо у вигляді подвійної нерівності: $0 < x \leq 8$, та у вигляді проміжку: $x \in (0; 8]$.

Відповідь: $x \in (0; 8]$.

2. Аналогічно розв'язуємо нерівності з протилежним знаком: $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$. Зведемо вихідну нерівність до вигляду системи:

$$\log_a x < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 13:

Знайти множину розв'язків нерівності: $\log_5 x < 2$.

Будемо відразу зводити вихідну нерівність до вигляди системи.

Оскільки $a = 5$ і це більше одиниці, то наша нерівність розв'язується за схемою: $\log_a x < b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < a^b \\ a > 1 \end{cases}$. Тож,

$\log_5 x < 2$;

$0 < x < 5^2$;

$0 < x < 25$.

Отримали: $0 < x < 25$.

Запишемо у вигляді проміжку: $x \in (0; 25)$.

Відповідь: $x \in (0; 25)$.

3. Розглянемо, як розв'язувати нерівності, у яких замість x, у нерівність входить $f(x)$, наприклад $\log_a f(x) > b$:

Можна подати вихідну нерівність у вигляді:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \log_a f(x) > b \cdot \log_a a \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^b.$$

І вже тоді визначаємо знак нерівності в залежності від a:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Аналогічно розв'язуємо нестрогу нерівність: $\log_a f(x) \geq b$.

Розглянемо обидва випадки: коли $a > 1$ та $0 < a < 1$.

Приклад 14:

Розв'язати нерівність: $\log_3(x + 7) > 2$.

Перейдемо до нерівності, основа $3 > 1$, тому знак не змінюємо:

$x + 7 > 3^2$;

$x + 7 > 9;$

$x > 2.$

В цьому прикладі ОДЗ ми не враховували, адже відразу помічаємо, що:

$x + 7 > 0;$

$x > -7.$

Але, щоб не допускати помилок, рекомендується враховувати та перевіряти ОДЗ у кожному прикладі, як ми це зробимо у наступному.

Відповідь: $x \in (2; +\infty).$

Приклад 15:

Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{3}}(x + 2) > -2.$

Відразу врахуємо ОДЗ: $x + 2 > 0;$

$x > -2.$

Далі думаємо про знак нерівності (змінюється чи не змінюється): знак нерівності змінюємо на протилежний, оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1.$

Отже, маємо: $x + 2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$x + 2 < 3^2;$

$x + 2 < 9;$

$x < 7.$

Тому, формулюємо відповідь: $\begin{cases} x < 7 \\ x > -2 \end{cases};$

$-2 < x < 7.$

Відповідь: $x \in (-2; 7).$

4. Додамо ще нерівність з $f(x)$, яка містить протилежний знак:

$\log_a f(x) < b, \log_a f(x) \leq b.$

Дані нерівності розв'язуються так, як розв'язуються нерівності, у яких x, замість $f(x)$:

$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \log_a f(x) < b \cdot \log_a a \Leftrightarrow \log_a f(x) < \log_a a^b.$

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 16:

Розв'язати нерівність: $\log_8(2x-10) < \frac{1}{3}$.

Будемо розв'язувати вихідну нерівність у вигляді системи ($a = 8 > 1$):

$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ a > 1 \end{cases}$.

$\log_8(2x-10) < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < 2x - 10 < 8^{\left(\frac{1}{3}\right)}$.

Тож, розв'язуємо отриману подвійну систему:

$0 < 2x - 10 < 8^{\left(\frac{1}{3}\right)}$;

$0 < 2x - 10 < \sqrt[3]{8}$;

$0 < 2x - 10 < 2$;

$10 < 2x < 12$;

$5 < x < 6$.

Запишемо отриману відповідь у вигляді проміжку: $x \in (5; 6)$.

Відповідь: $x \in (5; 6)$.

5. Нерівності виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$.

Подамо метод розв'язування нерівності $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ у вигляді таблиці:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$$

$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний	Знак нерівності не змінюється
$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Запишемо розв'язок нерівності ще у вигляді системи:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \leq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ 0 < g(x) \leq f(x) \end{cases} \end{array}\right..$$

Нерівність виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ розв'язується аналогічно.

Приклад 17:

Розв’язати нерівність: $\log_7(x^2-2) > \log_7 x$.

Спочатку, маємо визначитись зі знаком: $7 > 1$, отже знак не змінюємо: $x^2 - 2 > x$.

Далі врахуємо ОДЗ: $x > 0$ (умова $x^2 - 2 > 0$ буде виконуватися автоматично).

Тож, маємо: $\log_7(x^2-2) > \log_7 x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 > x \\ x > 0 \end{cases}$.

Розв’язуємо: $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$.

Маємо розв’язати квадратичну нерівність: $x^2 - x - 2 > 0$. Для цього необхідно знайти корені рівняння $x^2 - x - 2 = 0$. Скориставшись теоремою Вієта, маємо: $x_1 = -1$ та $x_2 = 2$. Зображуємо отримані корені на координатній прямій та будуємо проміжки, які будуть розв’язками нашої квадратичної нерівності: $x < -1$ та $x > 2$.

Складаємо систему нерівностей: $\begin{cases} x < -1 \\ x > 2 \\ x > 0 \end{cases}$.

Звідси слідує розв’язок: $x > 2$.

Отже, розв’язком початкової нерівності є проміжок: $x \in (2; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (2; +\infty)$.

Приклад 18:

Розв’язати нерівність: $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$.

Оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1$, то знак нерівності змінюємо на протилежний:

$x - 2 \leq 2x - 3$.

Крім цього, мусимо врахувати ОДЗ: $x - 2 > 0$ (тоді умова $2x - 3 > 0$ буде виконуватися автоматично).

Отже, наша вихідна нерівність рівносильна системі:

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{3}}(2x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \leq 2x - 3 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$.

Тепер можемо розв’язувати:

$\begin{cases} x - 2 \leq 2x - 3 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x - 2x \le -3 + 2 \\ x > 2 \end{cases};$

$\begin{cases} -x \le -1 \\ x > 2 \end{cases};$

$\begin{cases} x \ge 1 \\ x > 2 \end{cases}.$

Отже, запишемо розв'язок даної системи: $x \in (2; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (2; +\infty)$.

6. За таким принципом розв'язується і нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$. Запишемо це у вигляді системи:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < g(x) < f(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right..$$

Розглянемо наступний приклад:

Приклад 19:

Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) < 2\log_{\frac{1}{3}}(x - 4)$.

Використовуючи властивості логарифма, перепишемо дану нерівність у вигляді:

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) < \log_{\frac{1}{3}}(x - 4)^2$.

Тепер визначаємось зі знаком нерівності та враховуємо ОДЗ. Вихідна нерівність рівносильна системі:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) < \log_{\frac{1}{3}}(x - 4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{3} < 1 \\ x - 4 > 0 \\ x^2 - 6x + 18 > (x - 4)^2 \end{cases}.$$

Розв'язуємо отриману систему:

$\begin{cases} x - 4 > 0 \\ x^2 - 6x + 18 > (x - 4)^2 \end{cases};$

$\begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 6x + 18 > x^2 - 8x + 16 \end{cases};$

$\begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 6x + 18 - x^2 + 8x - 16 > 0 \end{cases};$

$\begin{cases} x > 4 \\ 2x + 2 > 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 4 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 4 \\ x > -1 \end{cases}$.

Тож, розв'язком отриманої системи буде: $x > 4$.

Відповідь: $x \in (4; +\infty)$.

7. Ще одним видом логарифмічних нерівностей є ті, які розв'язуються заміною змінних. Загальним виглядом таких нерівностей може бути:

$p\log_a^2 x + q\log_a x + r > 0$, $p\log_a^2 x + q\log_a x + r \geq 0$,

$p\log_a^2 x + q\log_a x + r < 0$, $p\log_a^2 x + q\log_a x + r \leq 0$,

де p, q та r – будь-які числа.

Розглянемо нерівність $p\log_a^2 x + q\log_a x + r > 0$. Такі нерівності розв'язуються за допомогою заміни: $\log_a x = t$. Тоді $\log_a^2 x = t \cdot t = t^2$. Таким чином отримали квадратичну нерівність, яку ми вміємо розв'язувати:

$pt^2 + qt + r > 0$.

Після того, як ми розв'яжемо квадратичну нерівність, мусимо повернутися до заміни та розв'язати систему простих логарифмічних нерівностей, які ми розглядали у першому пункті. Також не забуваємо враховувати ОДЗ.

Для більшої наочності відразу наведемо приклад:

Приклад 20:

Розв'язати нерівність: $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \leq 0$.

Як бачимо, таких нерівностей ми ще не зустрічали, але помічаємо, що: $\log_3^2 x = \log_3 x \cdot \log_3 x$.

Тобто, якщо ми зробимо заміну $\log_3 x = t$, тоді $\log_3^2 x = t \cdot t = t^2$.

Отримали квадратичну нерівність: $t^2 - 3t + 2 \leq 0$.

Розв'язуємо її: $t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq 2 \end{cases}$.

Повернемося до заміни:

$\begin{cases} \log_3 x \geq 1 \\ \log_3 x \leq 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geq 3^1 \\ x \leq 3^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 9 \end{cases}$;

$3 \leq x \leq 9.$

Врахувавши ОДЗ ($x > 0$), запишемо остаточний розв'язок: $x \in [3; 9]$.

Відповідь: $x \in [3; 9]$.

Розглянемо ще один приклад.

Приклад 21:

Розв'язати нерівність: $\lg^2 x - 4\lg x + 3 \geq 0$.

Так, як і в попередньому прикладі, виконуємо заміну:

$\lg x = t$, тоді $\lg^2 x = t^2$.

Перепишемо нерівність у вигляді: $t^2 - 4t + 3 \geq 0$.

Розв'язуємо отриману квадратичну нерівність та повертаємось до заміни: $t^2 - 4t + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 3 \end{cases}$.

Пам'ятаємо, що $\lg x$ – це логарифм числа x за основою 10, тому можна записати так: $\lg x = \log_{10} x$.

$\begin{cases} \lg x \leq 1 \\ \lg x \geq 3 \end{cases}$;

$\begin{cases} \log_{10} x \leq 1 \\ \log_{10} x \geq 3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \leq 10^1 \\ x \geq 10^3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \leq 10 \\ x \geq 1000 \end{cases}$.

Врахувавши ОДЗ, записуємо остаточний розв'язок:

$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 10 \\ x \geq 1000 \end{cases}$;

$x \in (0; 10] \cup [1000; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (0; 10] \cup [1000; +\infty)$.

8. Нерівності, які містять змінну під знаком логарифма й в основі логарифма.

Спочатку розглянемо простіший випадок: $\log_{\varphi(x)} f(x) > b$, де b – будь-яке число, $\varphi(x)$ та $f(x)$ – вирази, які містять змінну x. Таку нерівність можна подати у вигляді системи:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > b \Leftrightarrow \log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} (\varphi(x))^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < (\varphi(x))^b \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > (\varphi(x))^b \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 22:

Розв’язати нерівність: $\log_{x-3}(x-1) \geq 2$.

Спочатку перетворимо вихідну нерівність у вигляді:

$\log_{x-3}(x-1) \geq \log_{x-3}(x-3)^2$.

Тепер можемо розв’язувати нерівність у вигляді сукупності:

$$\log_{x-3}(x-1) \geq \log_{x-3}(x-3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x-3 < 1 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \leq (x-3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 > 1 \\ x-1 \geq (x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Будемо розв’язувати отриману сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x-3 < 1 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \leq (x-3)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 > 1 \\ x-1 \geq (x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 < x < 4 \\ x > 1 \\ x-1 \leq x^2-6x+9; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4 \\ x-1 \geq x^2-6x+9 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 < x < 4 \\ x > 1 \\ x^2-6x+9 \geq x-1; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4 \\ x^2-6x+9 \leq x-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 < x < 4 \\ x > 1 \\ x^2-7x+10 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4 \\ x^2-7x+10 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3 < x < 4\\ x > 1\\ x \le 2\\ x \ge 5\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4\\ 2 < x < 5\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\emptyset\\ 4 < x < 5\end{array}\right.;$$

$4 < x < 5;$

$x \in (4; 5].$

Відповідь: $x \in (7; 8) \cup (10; +\infty).$

9. Нерівності, які містять змінну під знаком логарифма й в основі логарифма. У випадку, коли $\log_{\varphi(x)} f(x) < b$, де b – будь-яке число, $\varphi(x)$ та $f(x)$ – вирази, які містять змінну x, будемо діяти наступним чином:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)}\big(\varphi(x)\big)^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < \varphi(x) < 1\\ f(x) > \big(\varphi(x)\big)^b\end{cases}\\ \begin{cases}\varphi(x) > 1\\ f(x) > 0\\ f(x) < \big(\varphi(x)\big)^b\end{cases}\end{array}\right..$$

Детальніше розглянемо на прикладі:

Приклад 23:

Розв'язати нерівність: $\log_{x-7}(x-1) < 2.$

Спочатку перетворимо вихідну нерівність у вигляді:

$\log_{x-7}(x-1) < 2 \Leftrightarrow \log_{x-7}(x-1) < \log_{x-7}(x-7)^2.$

Лише тепер можемо розв'язувати нерівність у вигляді сукупності:

$$\log_{x-7}(x-1) < \log_{x-7}(x-7)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x-7 < 1\\ x-1 > (x-7)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x-7 > 1\\ x-1 > 0\\ x-1 < (x-7)^2\end{cases}\end{array}\right..$$

Будемо розв'язувати отриману сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7 < x < 8\\ x-1 > x^2-14x+49\end{cases}\\ \begin{cases}x > 8\\ x > 1\\ x-1 < x^2-14x+49\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7<x<8\\x^2-14x+49<x-1\end{cases}\\\begin{cases}x>8\\x>1\\x^2-14x+49>x-1\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7<x<8\\x^2-15x+50<0\end{cases}\\\begin{cases}x>8\\x>1\\x^2-15x+50>0\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7<x<8\\5<x<10\end{cases}\\\begin{cases}x>8\\x>1\\x<5\\x>10\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}7<x<8\\x>10\end{array}\right..$$

Тож, отримали сукупність $\left[\begin{array}{l}7<x<8\\x>10\end{array}\right.$, яку можемо записати проміжком: $x \in (7;8) \cup (10;+\infty)$.

Відповідь: $x \in (7;8) \cup (10;+\infty)$.

10. Нерівності, які містять змінну під знаком логарифма й в основі логарифма виду: $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$ та $\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} g(x)$. Розглянемо нерівність: $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$. Запишемо у вигляді сукупності:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<\varphi(x)<1\\f(x)>0\\f(x)<g(x)\end{cases}\\\begin{cases}\varphi(x)>1\\g(x)>0\\f(x)>g(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

Приклад 24:

Розв’язати нерівність: $\log_x(x+2) > \log_x(x-3)$.

Це є нерівність із змінною під знаком логарифма та в основі логарифма. Тож, ми повинні розглянути два випадки: основа логарифма лежить в межах $(0;1)$ та основа логарифма більше одиниці.

Скористаємось правилом:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right. .$$

Запишемо вихідну нерівність у вигляді сукупності двох систем:

$$\log_x(x+2) > \log_x(x-3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x+2 > 0 \\ x+2 < x-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x-3 > 0 \\ x+2 > x-3 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Будемо розв'язувати отриману сукупність: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > -2 \\ x - x < -3 - 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \\ x - x > -3 - 2 \end{cases} \end{array}\right. .$

Отримали: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > -2 \\ 0 < -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \\ 0 > -5 \end{cases} \end{array}\right. .$

Бачимо, що перша система не має розв'язків: $\left[\begin{array}{l} x \in \emptyset \\ x \in (3; +\infty) \end{array}\right. .$

Тому розв'язком нерівності буде розв'язок другої системи, а саме: $x \in (3; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (3; +\infty)$.

Приклад 25:

Розв'язати нерівність: $\log_{x-7}(x^2 - 4x + 5) \geq \log_{x-7}(x^2 + 7x + 6)$.

Для того, щоб розв'язати таку нерівність, скористаємось правилом:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right. .$$

Запишемо відповідну сукупність:

$$\log_{x-7}(x^2-4x+5) \geq \log_{x-7}(x^2+7x+6) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x-7 < 1 \\ x^2-4x+5 > 0 \\ x^2-4x+5 \leq x^2+7x+6 \end{cases} \\ \begin{cases} x-7 > 1 \\ x^2+7x+6 > 0 \\ x^2-4x+5 \geq x^2+7x+6 \end{cases} \end{array}\right.$$

Будемо розв'язувати отриману сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0+7 < x < 1+7 \\ x^2-4x+5 > 0 \\ x^2-4x-x^2-7x \leq 6-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1+7 \\ x^2+7x+6 > 0 \\ x^2-4x-x^2-7x \geq 6-5 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7 < x < 8 \\ x \in R \\ -11x \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 8 \\ x < -6 \\ x > -1 \\ -11x \geq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7 < x < 8 \\ x \in R \\ x \geq -\frac{1}{11} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 8 \\ x < -6 \\ x > -1 \\ x \leq -\frac{1}{11} \end{cases} \end{array}\right.$$

Отримали, що друга система не має ров'язків: $\left[\begin{array}{l} 7 < x < 8 \\ x \in \emptyset \end{array}\right.$.

Тож, розв'язки першої системи і будуть розв'язками нерівності: $7 < x < 8$.

Запишемо у вигляді проміжків: $x \in (7; 8)$.

Відповідь: $x \in (7; 8)$.

11. Нерівності, які містять змінну під знаком логарифма й в основі логарифма виду: $\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x)$ та $\log_{\varphi(x)} f(x) \leq \log_{\varphi(x)} g(x)$. Розглянемо нерівність: $\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x)$. Запишемо у вигляді сукупності:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 26:

Розв'язати нерівність: $\log_{x^2} 5x \leq \log_{x^2}(x^2 + 6)$.

Це також є нерівністю із змінною і під знаком логарифма, і в основі логарифма. Тому, ми повинні розглянути два випадки: основа логарифма лежить в межах $(0; 1)$ та основа логарифма більше одиниці.

Скористаємось правилом:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right. .$$

Запишемо відповідну сукупність:

$$\log_{x^2} 5x \leq \log_{x^2}(x^2 + 6) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 + 6 > 0 \\ 5x \geq x^2 + 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 > 1 \\ 5x > 0 \\ 5x \leq x^2 + 6 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Будемо розв'язувати отриману сукупність:

Спочатку розв'яжемо першу систему: $\begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 + 6 > 0 \\ 5x \geq x^2 + 6 \end{cases}$.

$0 < x^2 < 1$ – розіб'ємо на дві нерівності: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 < 1 \end{cases}$.

Розв'язком буде: $\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \\ x \in (-1; 1) \end{cases}$.

Тому, розв'язком $0 < x^2 < 1$ буде: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

$$\begin{cases} x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \\ x \in R \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \\ x \in R \\ x \in [2; 3] \end{cases}.$$

Тож, розв’язком першої системи буде: $x \in \emptyset$.

Тепер розв’язуємо другу систему: $\begin{cases} x^2 > 1 \\ 5x > 0 \\ 5x \le x^2 + 6 \end{cases}.$

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 5x + 6 \ge 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ x > 0 \\ x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ x > 0 \\ x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty) \end{cases}.$$

Тож, розв’язком другої системи буде: $x \in (1; 2] \cup [3; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (1; 2] \cup [3; +\infty)$.

12. Показниково-логарифмічні нерівності. Показниково-логарифмічними нерівностями називають нерівності виду $(g(x))^{f(x)} > b$, $(g(x))^{f(x)} \ge b$, $(g(x))^{f(x)} < b$, $(g(x))^{f(x)} \le b$, де b - будь-яке число, а $f(x)$ містить логарифмічну функцію [9].

Розв’язуючи такі нерівності, спочатку переконуємося, що обидві частини нерівності набувають тільки додатні значення, тобто, що логарифми цих частин існують, і вже тоді логарифмуємо їх за деякою основою.

Приклад 27:

Розв’язати нерівність: $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} \le 100.$

Визначаємо ОДЗ даної нерівності: оскільки маємо логарифм, звідси слідує те, що підлогарифмічний вираз повинен бути додатнім: $x > 0$.

Тепер перевіряємо, чи будуть обидві частини нерівності додатними при нашому ОДЗ. Права частина нерівності завжди додатна. Перевіряємо ліву частину: при $x > 0$, $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2} > 0$, оскільки додатне число у будь якому степені завжди буде додатним. Тож, логарифми обох частин існуватимуть.

Прологарифмуємо вихідну нерівність за основою 10, і, оскільки $10 > 0$, отримаємо: $\lg\left(\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}\right) \leq \lg 100$.

Розв'язуємо отриману нерівність:

$\lg\left(\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}\right) \leq \lg 100$;

$(\lg x - 2) \cdot \lg\left(\frac{x}{10}\right) \leq 2$;

$(\lg x - 2) \cdot (\lg x - \lg 10) \leq 2$;

$(\lg x - 2) \cdot (\lg x - 1) \leq 2$.

Бачимо, що можемо зробити заміну: $\lg x = t$, тоді:

$(t - 2) \cdot (t - 1) \leq 2$;

$t^2 - 3t + 2 \leq 2$;

$t^2 - 3t \leq 0$;

$0 \leq t \leq 3$.

Повертаємось до заміни:

$0 \leq \lg x \leq 3$;

$\begin{cases} \lg x \geq 0 \\ \lg x \leq 3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geq 10^0 \\ x \leq 10^3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1000 \end{cases}$;

$x \in [1; 1000]$.

Відповідь: $x \in [1; 1000]$.

Приклад 28:

Розв'язати нерівність $x^x < 1$, якщо $x > 0$, застосувавши логарифмування.

Будемо логарифмувати за основою 10, і, оскільки $10 > 1$, знак нерівності не змінюємо: $\lg(x^x) < \lg 1$.

Скориставшись властивостями логарифмів, запишемо: $x \cdot \lg x < 0$. Дану нерівність можемо записати у вигляді сукупності двох систем:

$$x \cdot \lg x < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ \lg x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \lg x > 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Але, оскільки у нас вказано, що $x > 0$, то друга система не має розв'язків, тому далі розв'язуємо першу систему:

$\begin{cases} x > 0 \\ \lg x < 0 \end{cases};$

$\begin{cases} x > 0 \\ x < 10^0 \end{cases};$

$\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases};$

$x \in (0; 1).$

Відповідь: $x \in (0; 1).$

1.3.1 Логарифмічні нерівності з параметрами

Нерідко після отримання результатів ЗНО «постраждалі» абітурієнти та їх батьки нарікають на зміст завдань та скаржаться на те, що схожих задач в школі вони не розв'язували. Серед таких задач – задачі з параметрами, які традиційно входять до завдань ЗНО та мають за мету перевірку логічного мислення учнів [20].

Державний стандарт (постанова Кабінету Міністрів України від 23.11.2011р.1392) ґрунтується на засадах особистісно зорієнтованого підходу до навчання, що забезпечує розвиток різних здібностей учнів, в тому числі й академічних. Одним з завдань освітньої галузі « Математика» за новим Держстандартом є « розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати й використовувати додаткову навчальну інформацію, оцінювати здобуту інформацію, аналізувати, робити висновки [20].

Саме розв'язування задач, а, точніше, рівнянь і нерівностей з параметрами, відкриває перед учнями велику кількість прийомів загального характеру [20].

Під час розв’язування нерівностей з параметром застосовують властивості логарифма та методи розв’язування нерівностей, які ми розглянемо у розділі 2.

Приклад 29:

При яких значеннях a число 2 задовольняє нерівність $\log_a(3x-1)<3$?

Підставимо число 2 у вихідну нерівність:

$\log_a(3\cdot 2-1)<3$;

$\log_a 5<3$;

Тож, тепер розв’язуємо отриману нерівність відносно a:

$$\log_a 5<3 \Leftrightarrow \log_a 5<\log_a a^3 \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ 5<a^3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ 5>a^3 \end{cases} \end{array}\right.;$$

Отримали: $\left[\begin{array}{l} a>\sqrt[3]{5} \\ 0<a<1 \end{array}\right.$.

Відповідь: $a\in(0;1)\cup(\sqrt[3]{5};+\infty)$.

Приклад 30:

Для всіх значень параметра a розв’язати нерівність:

$\log_a(x-a)>\log_{\frac{1}{a}}(x+a)$.

Скористаємось властивостями логарифма:

$\log_a(x-a)>-\log_a(x+a)$;

$\log_a(x-a)+\log_a(x+a)>0$;

$\log_a(x-a)\cdot(x+a)>0$;

$\log_a(x^2-a^2)>0$;

$\log_a(x^2-a^2)>\log_a 1$;

Врахуємо ОДЗ:

$$\begin{cases} x-a>0 \\ x+a>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x>a \\ x>-a \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > a \\ a > 0. \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Повертаємось до отриманої нерівності:

$\log_a(x^2 - a^2) > \log_a 1.$

Розглянемо два випадки:

1) $a > 1$;

$$\begin{cases} a > 1 \\ x^2 - a^2 > 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a > 1 \\ x^2 > 1 + a^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a > 1 \\ |x| > \sqrt{1 + a^2} \end{cases};$$

Так, як $a > 1$, $x > a$, то $x > 0$, отже $|x| = x$.

Тоді $x > \sqrt{1 + a^2}$, $\sqrt{1 + a^2} > a$, значить $x > a$.

Маємо: якщо $a > 1$, то $x > \sqrt{1 + a^2}$.

2) $0 < a < 1$.

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ x^2 - a^2 < 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ x^2 < 1 + a^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ |x| < \sqrt{1 + a^2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ x < \sqrt{1 + a^2} \end{cases};$$

Враховуючи ОДЗ ($x > a$), отримуємо $a < x < \sqrt{1 + a^2}$.

Отже, при $0 < a < 1$ маємо: $a < x < \sqrt{1 + a^2}$.

Відповідь:

- Якщо $a \in (0; 1)$, то $x \in (a; \sqrt{1 + a^2})$;
- Якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (\sqrt{1 + a^2}; +\infty)$;
- Якщо $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$, то розв’язків немає.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

2.1 Аналіз програми з математики з теми дослідження

Поняття логарифма згідно з програмою нової української школи вводиться в курсі математики (рівень стандарту) в 11 класі. На тему «Показникова та логарифмічна функції» виділяють 16 годин. За цей час учні вивчають:

- властивості та графіки показникової функції;
- логарифми та їх властивості. Властивості та графік логарифмічної функції;
- найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Програма містить перелік очікуваних результатів рівня підготовки учнів за кожною темою. Учень/учениця:

- **розпізнає і будує** графіки показникової і логарифмічної функцій;
- **ілюструє** властивості показникової і логарифмічної функцій за допомогою графіків;
- **застосовує** показникову та логарифмічну функції до опису реальних процесів;
- **розв'язує** найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Перелік очікуваних результатів слугує основою для планування системи тематичного контролю, для діагностичного конструктивного задання цілей вивчення теми у вигляді системи завдань, можливість розв'язання яких надає вивчення теми [10].

2.2 Методи розв'язування логарифмічних рівнянь

Для розв'язування логарифмічних рівнянь використовують логарифмічні тотожності, властивості логарифмів та операцію потенціювання. Важливо звернути увагу учнів на те, що оскільки логарифмічна функція визначена лише на множині додатних чисел, то ще до розв'язування рівняння потрібно знайти область визначення виразів, з яких складається рівняння [13].

1. Розв'язування логарифмічних рівнянь потенціюванням, тобто переходом від рівняння, яке містить логарифми, до рівняння, яке їх не містить.

Приклад 31:

Розв'язати рівняння $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$.

В такому випадку подаємо число 2 у вигляді десяткового логарифму: $2=\lg 100$ (оскільки $10^2=100$).

$\lg(x-9)+\lg(2x-1)=\lg 100$.

Використовуючи властивості логарифмів, запишемо:

$\lg((x-9)\,(2x-1))=\lg 100$.

Далі розв'язуємо складаючи систему та розв'язавши її:

$$\begin{cases}(x-9)(2x-1)=100\\ x-9>0\\ 2x-1>0\end{cases};$$

$$\begin{cases}x=-3{,}5; x=13\\ x>9\\ x>\frac{1}{2}\end{cases};$$

Отже, коренем рівняння буде $x=13$.

Відповідь: $x=13$.

2. Розв'язування рівнянь із застосуванням основної логарифмічної тотожності $a^{\log_a b}=b$.

Приклад 32:

Розв'язати рівняння $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$.

Перетворимо ліву частину початкового рівняння, застосувавши основну логарифмічну тотожність:

$9^{\log_3(1-2x)} = (3^2)^{\log_3(1-2x)} = 3^{2\log_3(1-2x)} = 3^{\log_3(1-2x)^2} =$

$= (1-2x)^2 = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1.$

Врахувавши ОДЗ, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 = 5x^2 - 5 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши отриману систему, матимемо:

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{10},\ x = 2 - \sqrt{10} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Тому коренем рівняння буде: $x = 2 - \sqrt{10}$.

Відповідь: $x = 2 - \sqrt{10}$.

3. Розв'язування рівнянь шляхом зведення до однієї основи.

Приклад 33:

Розв'язати рівняння $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5$.

Будемо зводити всі логарифми до основи 2:

$\frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{16}} + \frac{\log_2 x^3}{\log_2 8} = 5;$

$\frac{\log_2 x}{2} + \frac{\log_2 x}{(-4)} + \frac{3\log_2 x}{3} = 5;$

Зведемо подібні доданки, отримаємо:

$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 1\right) \cdot \log_2 x = 5.$

$\frac{5}{4}\log_2 x = 5;$

$\log_2 x = 4;$

$x = 16.$

Відповідь: $x = 16$.

4. Розв'язування логарифмічних рівнянь методом заміни змінної.

Приклад 34:

Розв'язати рівняння $3\log^2{}_3 x - 4\log_3 x - 4 = 0$.

Робимо заміну $\log_3 x = t$, маємо: $3t^2 - 4t - 4 = 0$.

Розв'язавши це рівняння, отримаємо: $\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$.

Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -\frac{2}{3}\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}x = 3^2 \\ x = 3^{-\frac{2}{3}}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 9 \\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\end{array}\right.$;

Отже, коренями рівняння будуть: $x = 9$ та $x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Відповідь: $x = 9$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Приклад 35:

Розв’язати рівняння: $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$.

Одразу робити заміну ми не можемо, потрібно перетворити дане рівняння, використовуючи властивості логарифмів.

$(\lg x^4)(\lg x^4) - \lg x^{14} = (4\lg x)(4\lg x) - 14\lg x = 16\lg^2 x - 14\lg x$.

Проте, у початковому рівнянні областю визначення є $x \in \mathbb{R}$, тобто x визначений на всій множині дійсних чисел, а у отриманому рівнянні: $x > 0$ (за означенням логарифма), тому доречним буде записати $|x|$.

$\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2 \;\Rightarrow\; 16\lg^2|x| - 14\lg|x| = 2$;

Лише тепер можемо робити заміну: $\lg|x| = t$.

$16t^2 - 14t = 2$;

$8t^2 - 7t - 1 = 0$.

Розв’язавши квадратне рівняння, отримаємо: $\left[\begin{array}{l}t = 1 \\ t = -\frac{1}{8}\end{array}\right.$.

Повертаємось до заміни: $\left[\begin{array}{l}\lg|x| = 1 \\ \lg|x| = -\frac{1}{8}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}|x| = 10^1 \\ |x| = 10^{-\frac{1}{8}}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm 10 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}\end{array}\right.$.

Отже, дане рівняння має 4 корені: $x = 10$, $x = -10$, $x = \frac{1}{\sqrt[8]{10}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$.

Відповідь: $x_1 = 10$, $x_2 = -10$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt[8]{10}}$ та $x_4 = -\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$.

Тому ми можемо зробити висновок: при розв’язуванні рівнянь методом заміни змінної потрібно звернути увагу на таке:

- $\log^n{}_a x^m = m^n \log^n{}_a x$ для всіх непарних m;
- $\log^n{}_a x^m = m^n \log^n{}_a |x|$ для всіх парних m.

5. Застосування монотонності при розв'язуванні квадратних рівнянь. Монотонною називається та функція, яка на досліджуваному проміжку або тільки зростає, або тільки спадає.

Приклад 36:

Розв'язати рівняння $\log_5(x+3) = 3 - x$.

Встановимо монотонність функцій у лівій та правій частинах:

- $y = \log_5(x+3)$ – зростаюча функція, адже $a = 5 \implies a > 0$ та $a \neq 1$;
- $y = 3 - x$ – спадна функція.

Отже, маємо область визначення: $x \in (-3; 3)$.

Підбором знайдемо корінь рівняння: $x = 2$.

Відповідь: $x = 2$.

6. Розв'язування рівнянь із використанням формули $f^{\log_a g} = g^{\log_a f}$ при $a > 0, a \neq 1, f > 0, g > 0$.

Приклад 37:

Розв'язати рівняння $3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$.

Перевіримо, чи виконуються умови: $2 > 0$; $2 \neq 1$; $x > 0$; $2 > 0$. Отже, маємо область визначення: $x > 0$.

Враховуючи ОДЗ, маємо:

$x^{\log_5 2} = 2^{\log_5 x}$, тому можемо замінити у початковому рівнянні:

$3 \cdot 2^{\log_5 x} + 2^{\log_5 x} = 64$.

Зведемо подібні доданки:

$4 \cdot 2^{\log_5 x} = 64$;

$2^{\log_5 x} = 16$;

$2^{\log_5 x} = 2^4$.

Отримали найпростіше логарифмічне рівняння:

$\log_5 x = 4$, звідки знаходимо $x = 5^4 = 625$.

Коренем рівняння є число $x = 625$.

Відповідь: $x = 625$.

7. Розв'язування рівнянь методом логарифмування обох частин.

Рівняння виду $f(x)^{\log_a g(x)} = b$, при $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

рівносильне системі: $\begin{cases} f(x) > 0,\ f(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ b \neq 1 \\ \log_a f(x) \cdot \log_a g(x) = \log_a b \end{cases}.$

Приклад 38:

Розв'язати рівняння $x^{\lg x - 2} = 1000$.

Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10:

$\lg x^{\lg x - 2} = \lg 1000$, та перетворимо ліву частину рівняння:

$\lg x^{\lg x - 2} = \lg x \cdot (\lg x - 2)$.

Запишемо систему для знаходження ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0,\ x \neq 1 \\ x > 0 \\ 1000 \neq 1 \\ \lg x \cdot (\lg x - 2) = \lg 1000 \end{cases};$$

Отже, маємо рівняння: $\lg x \cdot (\lg x - 2) = \lg 1000$.

Можемо зробити заміну: $\lg x = t$, матимемо $t \cdot (t - 2) = 3$.

Отримаємо квадратне рівняння $t^2 - 2t - 3 = 0$. Розв'язавши його матимемо такі корені: $\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

Повернемося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 3 \\ \lg x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^3 \\ x = 10^{-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1000 \\ x = 0{,}1 \end{array}\right..$$

Отже, маємо два кореня: $x = 0{,}1$ та $x = 1000$.

Відповідь: : $x = 0{,}1$ та $x = 1000$.

Також, маємо зауважити: якщо $b = 1$, то отримаємо, що $\log_a g(x) = 0$, звідки слідує $g(x) = 1$, а отже, $f(x) = 1$, а це можливо лише тоді, коли $f(x) = g(x)$.

Запишемо це у вигляді системи:

$$f(x)^{\log_a g(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x) = 1 \\ a > 0,\ a \neq 1 \end{cases}.$$

Приклад 39:

Розв'язати рівняння $(x - 3)^{\log_2 \frac{x}{4}} = 1$.

Згідно системи, $(x-3)^{\log_2 \frac{x}{4}} = 1 \iff \begin{cases} x-3=1 \\ \frac{x}{4}=1 \\ 2>0,\ 2\neq 1 \end{cases};$

Розв'язавши систему, отримаємо: $x = 4$.

Отже, коренем рівняння буде $x = 4$.

Відповідь: $x = 4$.

8. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь виду $\log_a f(x) = g(x)$

Суть методу полягає в побудові графіків функцій $y = \log_a f(x)$ і $y = g(x)$ в одній і тій системі координат. Коренем рівняння буде точка перетину побудованих графіків, а саме абсциса точки перетину. Якщо графіки не перетинаються, то рівняння коренів немає, якщо ж графіки збігаються, то рівняння має безліч коренів. Також графічний метод буде ефективним, коли потрібно вказати кількість коренів рівняння.

Приклад 40:

Розв'язати рівняння $\lg x = 1 - x$ графічним способом.

В одній системі координат будуємо графіки функцій $y = \lg x$ і $y = 1 - x$.

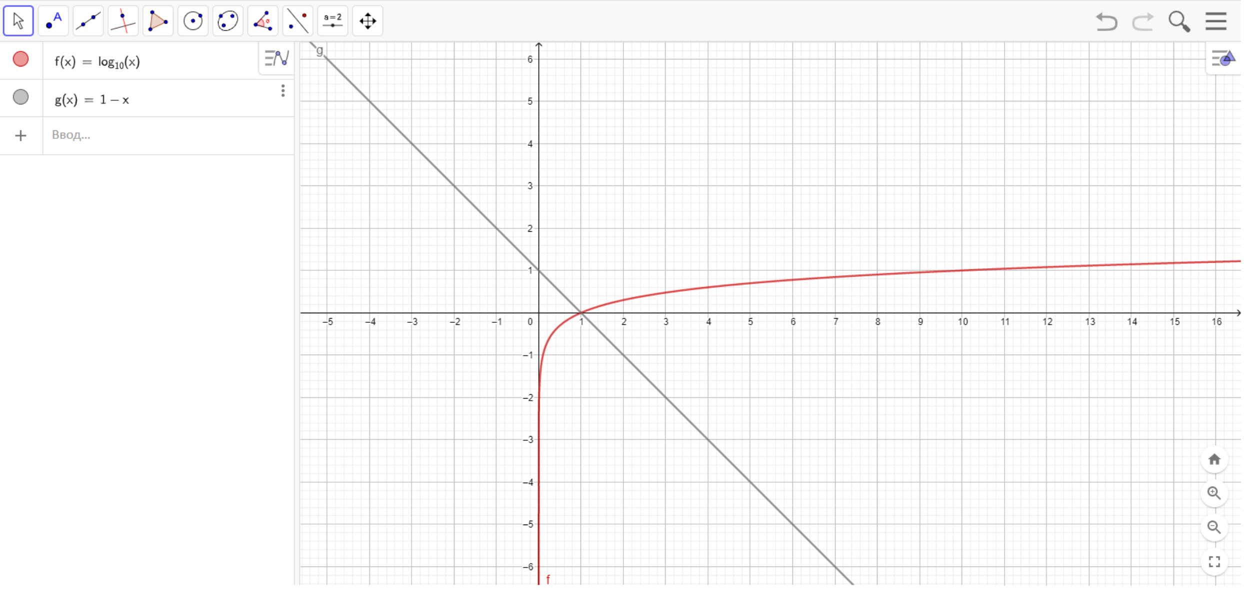

Рисунок 2

Графік логарифмічної функції $y = \lg x$ зображено червоним кольором, а графік прямої $y = 1 - x$ - синім.

Графіки зображено на рис.2 у програмі Geogebra Classic.

Тож, точкою перетику є точка $(1;0)$. Тому коренем рівняння є число $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 41:

Скільки коренів має рівняння $x - \log_2|x| = 0$?

Перетворимо дане рівняння: $x - \log_2|x| = 0 \iff \log_2|x| = x$.

Побудуємо графіки лівої та правої частин: $y = \log_2|x|$ та $y = x$. Спочатку будуємо графіки $y = x$ та $y = \log_2 x$ на одній системі координат. Для того, щоб побудувати графік функції $y = \log_2|x|$, необхідно спочатку побудувати графік $= \log_2 x$ для $x > 0$ та симетрично відобразити його відносно осі ординат.

Графік логарифмічної функції $y = \log_2|x|$ зображено червоним кольором, а графік прямої $y = x$ - синім.

Графіки зображено на рис.3 у програмі Geogebra Classic.

По графіку знайдемо кількість точок перетину цих графіків.

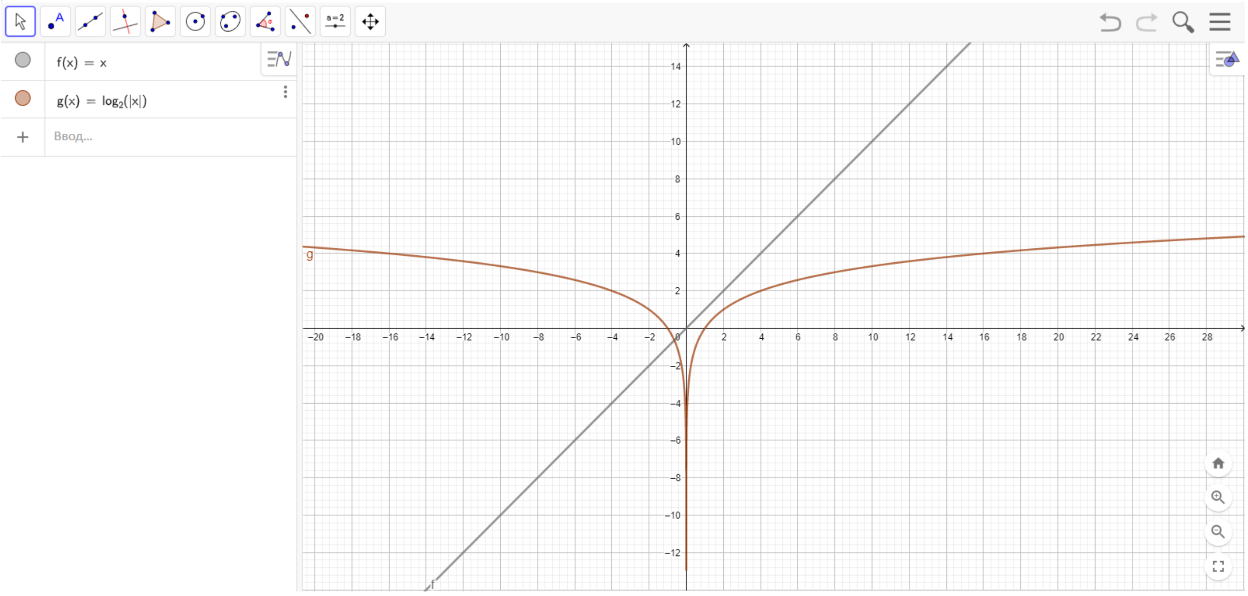

Рисунок 3

Як бачимо, точка перетину всього одна.

Тому рівняння має один корінь.

Відповідь: один корінь.

2.3 Методи розв'язування логарифмічних нерівностей

Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на тому, що функція $y = \log_a x$ при $a > 1$ є монотонно зростаючою, а при $0 < a < 1$ - монотонно спадною.

Під час переходу від найпростіших логарифмічних нерівностей до тих, які не містять знака логарифма, потрібно враховувати область допустимих значень (ОДЗ) даної вихідної нерівності.

1. Розв'язування логарифмічних нерівностей потенціюванням, тобто переходом від нерівності, яка містить логарифми, до нерівності, яка їх не містить [19].

Такий метод підходить до багатьох видів простих логарифмічних нерівностей, наприклад таких, як:

$\log_a x > b, \log_a x < b, \log_a f(x) > b, \log_a f(x) < b.$

Для цього необхідно число у правій частині подіти у вигляді логарифма за основою a, тож: $b = \log_a a^b$.

Множину розв'язків нестрогих нерівностей вигляду $\log_a f(x) \geq b$ і $\log_a f(x) \leq b$ знаходять як об'єднання множин розв'язків відповідної строгої нерівності і рівняння $\log_a f(x) = b$.

Тож, найпростіші логарифмічні нерівності рівносильні системам:

$$\log_a x > b \Leftrightarrow \log_a x > \log_a a^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\log_a x < b \Leftrightarrow \log_a x < \log_a a^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \log_a f(x) < \log_a a^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Приклад 42:

Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > -1$.

Запишемо праву частину нерівності у вигляді логарифма, отримаємо:

$\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

Спростимо праву частину, матимемо:

$\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 3$.

Тепер можемо користуватись правилом потенціювання, тобто ми отримали логарифмічну нерівність, у якої однакові основи, тож спрощуємо, врахувавши основу ($a > 1$ чи $0 < a < 1$).

Користуємось правилом: $\log_a f(x) > \log_a a^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > a^b \\ a > 1 \end{cases} \end{array}\right..$

У нашому прикладі $a = \frac{1}{3}$, тобто $0 < a < 1$. Тоді:

$\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3 - 2x < 3 \\ 0 < a < 1 \end{cases}.$

Можемо записати у вигляді:

$\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x < 3 \\ 3 - 2x > 0 \end{cases}.$

Розв'язуємо отриману систему:

$\begin{cases} -2x < 0 \\ -2x > -3 \end{cases}.$

$\begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}.$

Відповідь: $x \in (0; 1{,}5)$.

Нерівності виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ - деякі функції від x також розв'язуємо методом потенціювання, враховуючи ОДЗ та у яких межах лежить онова логарифма [19].

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ 0 < g(x) < f(x) \end{cases} \end{array}\right. .$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < g(x) < f(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right. .$$

Приклад 43:

Розв'язати нерівність: $\lg(2x+3) < \lg(x-1)$.

Аналогічно до попереднього прикладу, будемо застосовувати метод потенціювання, тому дана нерівність рівносильна системі:

$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$, оскільки $a = 10 > 1$.

$$\lg(2x+3) < \lg(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 2x+3 < x-1 \end{cases}.$$

Розв'язуємо отриману систему:

$$\begin{cases} 2x > -3 \\ x < -4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > -1{,}5 \\ x < -4 \end{cases}.$$

Як бачимо, система розв'язків немає.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

Метод потенціювання застосовується у і нерівностях виду $\log_a f_1(x) + \dots + \log_a f_m(x) > \log_a g_1(x) + \dots + \log_a g_1(x)$ [19].

В такому випадку нам потрібно застосувати властивості логарифмів, аби утворити нерівність виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ чи $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, де $f(x) = \log_a f_1(x) + \dots + \log_a f_m(x)$, а $g(x) = \log_a g_1(x) + \dots + \log_a g_1(x)$.

Приклад 44:

Розв'язати нерівність: $\lg x + \lg(x-3) < 1$.

Відразу враховуємо ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$.

Перепишемо нерівність у вигляді:

$\lg x \cdot (x - 3) < \lg 10^1$.

Отримали таку нерівність, яку ми вже можемо розв'язувати:

$\lg x(x - 3) < \lg 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 3) > 0 \\ x(x - 3) < 10 \end{cases}$.

Врахувавши ОДЗ нерівність $x(x - 3) > 0$ необхідно записати як: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$.

Тому, маємо: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < 0 \end{cases}$.

Розв'язуємо отриману систему:

$\begin{cases} x > 0 \\ x > 3 \\ -2 < x < 5 \end{cases}$;

Тож, розв'язком нерівності буде: $3 < x < 5$.

Відповідь: $x \in (3; 5)$.

2. Метод введення нової змінної $\log_a x = t$.

Нерівність вигляду $p\log_a^2 x + q \log_a x + r > 0$, де p, q та r – будь-які числа. За допомогою заміни $\log_a x = t$ вихідна нерівність зводиться до розв'язування нерівності $pt^2 + qt + r > 0$, з наступним розв'язуванням відповідних найпростіших логарифмічних нерівностей [19].

Приклад 45:

Розв'язати нерівність $\log_2^2 x - \log_2 x \leq 6$.

Запишемо дану нерівність у вигляді: $\log_2^2 x - \log_2 x - 6 \leq 0$ та виконаємо заміну: $\log_2 x = t$, отримаємо:

$t^2 - t - 6 \leq 0$.

Розв'язуємо отриману квадратичну нерівність: $-2 \leq t \leq 3$.

Повертаємось до заміни: $\log_2 x = t$:

$-2 \leq \log_2 x \leq 3$.

Розіб'ємо отриману подвійну нерівність на систему двох нерівностей та розв'язуємо її:

$$\begin{cases} \log_2 x \geq -2 \\ \log_2 x \leq 3 \end{cases}.$$

Зводимо праву частину нерівності до основи 2 та потенціюємо кожну з нерівностей:

$$\begin{cases} \log_2 x \geq \log_2 2^{-2} \\ \log_2 x \leq \log_2 2^3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 2^{-2} \\ x \leq 2^3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 8 \end{cases}.$$

Тож, розв'язком системи буде : $\frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq 8$.

Відповідь: $x \in [\frac{1}{4}; 8]$.

3. Нерівності вигляду $f(x) \cdot \log_a g(x) > 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ - деякі функції.

Розв'язування таких нерівностей зводиться до розв'язування сукупності систем нерівностей. Подано у вигляді таблиці [19]:

$$f(x) \cdot \log_a g(x) > 0$$

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 1 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 1 \\ g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Також такі нерівності можна розв'язувати методом інтервалів.

Приклад 46:

Розв'язати нерівність: $(5x-2) \cdot \log_{\frac{1}{3}} x < 0$.

Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$(5x-2) \cdot \log_{\frac{1}{3}} x < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x - 2 > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x - 2 < 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x > 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Розв'язуємо отриману сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x > 2\\ \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 1\end{cases}\\ \begin{cases}5x < 2\\ \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 1\end{cases}\end{array}\right..$$

Враховувавши, що $0 < a < 1$, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0{,}4\\ x > 1\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0{,}4\\ 0 < x < 1\end{cases}\end{array}\right..$$

Тож, розв'язком кожної з систем буде:

$$\left[\begin{array}{l}x > 1\\ 0 < x < 0{,}4\end{array}\right..$$

Запишемо проміжком: $x \in (0; 0{,}4) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (0; 0{,}4) \cup (1; +\infty)$.

4. Нерівність вигляду $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$, де $f(x)$, $\varphi(x)$ та $g(x)$ - деякі функції [19].

Нерівність рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases}\varphi(x) > 1\\ g(x) > 0\\ f(x) > g(x)\end{cases} \text{або} \begin{cases}0 < \varphi(x) < 1\\ f(x) > 0\\ f(x) < g(x)\end{cases},$$

а нерівність вигляду $\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x)$

рівносильна сукупності систем: $\begin{cases}\varphi(x) > 1\\ f(x) > 0\\ f(x) < g(x)\end{cases}$ або $\begin{cases}0 < \varphi(x) < 1\\ g(x) > 0\\ f(x) > g(x)\end{cases}$.

У випадку нестрогого знака нерівності, маємо:

$f(x) \leq g(x)$ чи $f(x) \geq g(x)$.

Приклад 47:

Розв'язати нерівність: $\log_x 0{,}2 > \log_x 3$.

Вихідна нерівність рівносильна сукупності систем:

$\begin{cases}x > 1\\ 3 > 0\\ 0{,}2 > 3\end{cases}$ або $\begin{cases}0 < x < 1\\ 0{,}2 > 0\\ 0{,}2 < 3\end{cases}$, але, як бачимо, перша система не має розв'язків, тому беремо до уваги лише другу систему. Розв'язуємо її:

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0{,}2 > 0 \\ 0{,}2 < 3 \end{cases}.$$

Розв'язком такої системи буде: $0 < x < 1$.

Відповідь: $x \in (0; 1)$.

5. Метод розв'язування нерівності вигляду $\log_a \log_b f(x) > c$ покажемо на рис.4 [19]:

$$\log_a \log_b f(x) > c$$

$a > 1$

$$\log_b f(x) > a^c$$

$b > 1$: $f(x) > b^{a^c}$

$0 < b < 1$: $\begin{cases} f(x) < b^{a^c} \\ f(x) > 0 \end{cases}$

$0 < a < 1$

$$\begin{cases} \log_b f(x) < a^c \\ \log_b f(x) > 0 \end{cases}$$

$b > 1$: $\begin{cases} f(x) < b^{a^c} \\ f(x) > 1 \end{cases}$

$0 < b < 1$: $\begin{cases} f(x) > b^{a^c} \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$

Рисунок 4

Приклад 48:

Розв'язати нерівність: $\log_{0,5} \log_6 x < 0$.

Оскільки $a = 0{,}5$, то отримаємо: $\log_6 x > 0{,}5^0$, тобто $\log_6 x > 1$.

Отже, $x > 6$.

Відповідь: $x \in (6; +\infty)$.

Приклад 49:

Розв'язати нерівність: $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0$.

Оскільки $a = 0{,}3$, отримаємо: $\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 0{,}3^0$, тобто $\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1$.

Маємо: $a = 6$, то $\frac{x^2+x}{x+4} > 6^1$, тобто $\frac{x^2+x}{x+4} > 6$.

Розв'язуємо отриману нерівність:

$\frac{x^2+x-6(x+4)}{x+4} > 0$;

$\frac{x^2+x-6x-24}{x+4} > 0$;

$\frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0;$

$\frac{(x+3)(x-8)}{x+4} > 0.$

Розв’язуємо методом інтервалів, отримаємо:

$x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty).$

Необхідно врахувати ОДЗ: $\frac{x^2+x}{x+4} > 0 \Rightarrow \frac{x(x+1)}{x+4} > 0.$

Розв’язком останньої нерівності буде: $x \in (-4; -1) \cup (0; +\infty).$

Відповідь: $x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty).$

6. Розв’язування нерівностей виду $a^{f(\log_c x)} > b^{g(\log_m x)}$ $(a = \varphi(x), * \ b = t(x))$ способом логарифмування.

Під час логарифмування за основою a чи b слід пам’ятати, що, якщо основа додатна і менша за 1, - знак нерівності змінюється на протилежний, якщо основа більша від одиниці, то знак нерівності не змінюється.

Приклад 50:

Розв’язати нерівність: $2^{\log_3 x} < 1.$

Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою 2. Оскільки $2 > 1$, то знак нерівності не змінюємо:

$\log_2 2^{\log_3 x} < \log_2 1;$

$\log_3 x \cdot \log_2 2 < 0;$

$\log_3 x \cdot 1 < 0;$

$\log_3 x < 0.$

Розв’язуємо дану нерівність: $\begin{cases} x > 0 \\ x < 3^0 \end{cases};$

$\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases};$

$0 < x < 1.$

Відповідь: $x \in (0; 1).$

2.4 Аналіз завдань зовнішнього незалежного оцінювання

Педагогічний тест це система тестових завдань різної складності, яка дає змогу якісно й ефективно вимірювати рівень та структуру підготовленості учнів (Кім В.С.) [22].

Педагогічний тест – це система паралельних завдань зростаючої складності, специфічної форми, визначеного змісту, яку створюють з метою аргументованої оцінки рівня та структури підготовленості учнів (Аванесов В.С.) [22].

З цих визначень випливає, що педагогічний тест є певною моделлю знань, доповненою засобами встановлення відповідності знань конкретного випробуваного цієї моделі.

Враховуючи, що будь-яка модель є цільовим, приблизним, неточним відображенням оригіналу ми можемо зробити такі висновки:

1) Для досягнення різних цілей потрібні різні тести.
2) Якісний тест має розроблятися згідно з певними правилами, що забезпечують його якість, зокрема передбачають перевірку цієї якості.
3) Навіть хороший тест дає результати, придатні для певного усередненого учня, але результати тестування окремих учнів можуть виявитися помилковими [22].

Стосовно ЗНО з першої вимоги зокрема випливає необхідність принаймні трьох типів тестів, що відповідають таким моделям успішного студента(для різних напрямів підготовки й різних ВНЗ):

1) абітурієнт, що швидко відповідає на велику кількість відносно простих питань;
2) абітурієнт, що може правильно вирішувати складні завдання;
3) абітурієнт, що може навчатися.

Для перевірки якості тесту зазвичай використовують такі показники, як надійність й валідність. Крім цього необхідно визначати якість окремих завдань, зокрема: рівень їх складності; коефіцієнт кореляції; коефіцієнт (індекс) дискримінації [22].

Проаналізуємо найбільш типові види логарифмічних рівнянь та нерівностей, які ми зустрічали на зовнішньому незалежному оцінюванні та розв’яжемо їх:

1. Найпростіші логарифмічні рівняння:

Приклад 51:

Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $\log_3 x = 2$?

А	Б	В	Г	Д
$(-4;-1]$	$(-1;2]$	$(2;5]$	$(5;8]$	$(8;11]$

Тож, розв’язуємо дане рівняння за означенням логарифма:

$x = 3^2$;

$x = 9$.

Відповідь: Д.

Приклад 52:

Розв’яжіть рівняння: $\log_7 x = -1$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{7}$	7	-1	-7	$-\frac{1}{7}$

Розв’язуємо за означенням:

$x = 7^{-1}$;

$x = \frac{1}{7}$.

Відповідь: А.

2. Логарифмічні рівняння, які зводяться до найпростіших логарифмічних рівнянь шляхом використання властивостей логарифма.

Приклад 53:

Розв’яжіть рівняння $\log_6(x-3) + \log_6(x-8) = 2$.

Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь; якщо воно має два корені, то у відповідь запишіть їх суму.

Скориставшись властивостями логарифма, запишемо:

$\log_6(x-3)(x-8)=2;$

$\log_6(x^2-8x-3x+24)=2.$

Розв'язуємо далі за означенням:

$x^2-11x+24=6^2;$

$x^2-11x-12=0.$

Розв'язуємо квадратне рівняння за теоремою Вієта:

$\begin{cases} x=12 \\ x=-1 \end{cases}.$

Враховуємо ОДЗ вихідного рівняння:

$\begin{cases} x-3>0 \\ x-8>0 \end{cases};$

$\begin{cases} x>3 \\ x>8 \end{cases};$

$x>8.$

Тож, з отриманою ОДЗ маємо один корінь: $x=12$.

Відповідь: $x=12$.

Приклад 54:

Розв'яжіть рівняння $\log_5^2 x+\log_5 x=2$.

Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді; якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх суму. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число 100.

Скористаємось методом заміни. Позначимо $\log_5 x=t$, тоді $\log_5^2 x=t^2$. Отож, отримаємо:

$t^2+t-2=0.$

Розв'язуємо утворене квадратне рівняння за теоремою Вієта:

$\begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}.$

Повертаємось до заміни:

$\begin{cases} \log_5 x=1 \\ \log_5 x=-2 \end{cases}.$

Розв'язуємо систему найпростіших логарифмічних рівнянь:

$\begin{cases} x=5^1 \\ x=5^{-2} \end{cases};$

$\begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{25} \end{cases}.$

Врахуємо ОДЗ: $x > 0$.

Тому, отримали два кореня: $\begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{25} \end{cases}.$

У відповідь необхідно записати їх суму: $5 + \frac{1}{25} = 5\frac{1}{25} = 5\frac{4}{100} = 5{,}04$.

Відповідь: 5,04.

3. Найпростіші логарифмічні нерівності:

Приклад 55:

Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{5}} x < 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; \frac{1}{25})$	$(\frac{1}{25}; +\infty)$	$(0; \frac{1}{25})$	$(10; +\infty)$	$(-\infty; \frac{1}{10})$

Будемо розв'язувати за означенням логарифма, врахувавши основу та ОДЗ. Оскільки $0 < \frac{1}{5} < 1$, то знак міняємо:

$\begin{cases} x > 0 \\ x > \left(\frac{1}{5}\right)^2 \end{cases};$

$\begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{25} \end{cases}.$

Розв'язком системи буде: $x > \frac{1}{25}$.

Відповідь: Б.

Приклад 56:

Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}(x - 1) > 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; 1{,}25)$	$(2; +\infty)$	$(1{,}25; +\infty)$	$(0; 0{,}25)$	$(-\infty; 1{,}25)$

Оскільки $a = 0{,}5$, $0 < a < 1$, то знак нерівності змінюємо на протилежний:

$x - 1 < 0{,}5^2$;

$x - 1 < 0{,}25$;

$x < 1{,}25$.

Але, ми мусимо враховувати ОДЗ:

$x - 1 > 0;$

$x > 1.$

Тож, розв'язком буде: $1 < x < 1{,}25.$

Відповідь: А.

4. Логарифмічні нерівності, які можна звести до найпростіших.

Приклад 57:

Знайдіть кількість усіх цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 6x) \geq -2$. Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

Врахуємо ОДЗ:

$x^2 + 6x > 0;$

$\begin{cases} x < -6 \\ x > 0 \end{cases}.$

Розв'язуємо вихідну нерівність, врахувавши, що $a = \frac{1}{4}$, отже знак нерівності змінюємо на протилежний:

$x^2 + 6x \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{-2};$

$x^2 + 6x \leq 16;$

$x^2 + 6x - 16 \leq 0;$

Розв'язуємо отриману квадратичну нерівність:

$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -8 \end{cases}.$

Враховуючи отримані проміжки та ОДЗ, запишемо:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -6 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -8 \end{cases} \end{array}\right.$.

Отже, розв'язком вихідної нерівності буде: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$.

Тоді, кількістю усіх цілих розв'язків нерівності буде число 4, бо цілими розв'язками є числа $-8; -7;\ 1; 2$.

Відповідь: 4.

Приклад 58:

Розв'яжіть рівняння $\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x)$.

Якщо рівняння має єдиний корінь, запишіть його у відповіді. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповіді їхню суму.

Оскільки основи однакові, прирівняємо аргументи:

$5x^2 - 8 = -3x.$

Розв'яжемо отримане рівняння:

$5x^2 + 3x - 8 = 0;$

$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1{,}6 \end{cases}.$

Врахуємо ОДЗ:

$\begin{cases} 5x^2 - 8 > 0 \\ -3x > 0 \end{cases};$

$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}; +\infty\right) \\ x \in (-\infty; 0) \end{cases};$

$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}; +\infty\right) \\ x \in (-\infty; 0) \end{cases}.$

Тож, ОДЗ буде проміжок: $x \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$.

Тому, рівняння матиме єдиний корінь $x = -1{,}6$.

Відповідь: $x = -1{,}6$.

Завжди при розв'язанні логарифмічних рівнянь та нерівностей в першу чергу треба знайти область допустимих значень. А вже потім починати розв'язування завдання, пам'ятаючи про властивість логарифмічної функції [23].

У завданнях зовнішнього незалежного оцінювання логарифмічні рівняння та нерівності присутні у останньому завданні з параметром. Наведемо приклад із ЗНО 2021-го року:

Приклад 59:

Задано рівняння $\frac{(x-2)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2} = 0$, де x - змінна, a - стала.

1) Запишіть множину допустимих значень змінної x.
2) Розв'яжіть задане рівняння залежно від значень a.

$$\frac{(x-2)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)}{\log_{0,5}(3-2x)+2}=0$$

Тож, розв’яжемо перший пункт завдання. Маємо дробово-раціональне рівняння, областю визначення якого буде: $\log_{0,5}(3-2x)+2\neq 0$. Розвязуємо:

$$\begin{cases} 3-2x>0 \\ \log_{0,5}(3-2x)+2\neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2x>-3 \\ \log_{0,5}(3-2x)\neq -2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x<1{,}5 \\ 3-2x\neq 0{,}5^{-2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x<1{,}5 \\ 3-2x\neq 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x<1{,}5 \\ -2x\neq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x<1{,}5 \\ x\neq -0{,}5 \end{cases}.$$

Тобто, областю допустимих значень даного рівняння є проміжок:

$x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(-0{,}5;1{,}5)$.

Тепер виконаємо другий пункт задачі, а саме: розв’яжемо дане рівняння

$(x-2)\cdot(x^2-3(a-1)x+2a^2-3a)=0$.

$$\left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-3(a-1)x+2a^2-3a=0 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-3(a-1)x+a(2a-3)=0 \end{array}\right..$$

На даному етапі помічаємо, що корінь рівняння $x=2$ суперечить області допустимих значень, тобто не може бути коренем рівняння.

Тому далі розв’язуємо лише друге рівняння сукупності, і саме корені цього рівняння будуть розв’язками вихідного дробово-раціонального рівняння.

$x^2 - 3(a-1)x + a(2a-3) = 0;$

За теоремою Вієта, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3(a-1) = 3a-3 \\ x_1 \cdot x_2 = a(2a-3) \end{cases}$, звідси: $\left[\begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = 2a-3 \end{array}\right.$.

Перевіримо отримані корені на відповідність ОДЗ:

- $x = a : \begin{cases} a \neq -0{,}5 \\ a < 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty; -0{,}5) \cup (-0{,}5; 1{,}5).$
- $x = 2a-3 : \begin{cases} 2a-3 \neq -0{,}5 \\ 2a-3 < 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \neq 2{,}5 \\ 2a < 4{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 1{,}25 \\ a < 2{,}25 \end{cases} \Rightarrow$

  $a \in (-\infty; 1{,}25) \cup (1{,}25; 2{,}25).$

Отже,

- якщо $a \in (-\infty; -0{,}5) \cup (-0{,}5; 1{,}25) \cup (1{,}25; 2{,}25)$, то $x_1 = a$ та $x_2 = 2a - 3$;
- якщо $a \in \{-0{,}5\} \cup [1{,}5; 2{,}25)$, то $x = 2a-3$;
- якщо $a = 1{,}25$, то $x = a = 1{,}25$;
- якщо $a \in (2{,}25; +\infty)$, то $x \in \emptyset$.

Логарифмічні рівняння присутні і у системах рівнянь. Наведемо приклад:

Приклад 60:

Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2^{2y-x} = 32 \\ \log_{\frac{1}{2}}(y-x) = -2 \end{cases}$.

Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв’язком вказаної системи рівнянь.

Це завдання перевіряє вміння розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння. Знаходимо ОДЗ даної системи: $y - x > 0$, тому $y > x$ та розв’язуємо систему:

$$\begin{cases} 2^{2y-x} = 2^5 \\ y - x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - x = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}.$$

Отримали лінійну систему двох рівнянь з двома невідомими. Віднімемо від першого рівняння друге, і отримаємо:

$$-\begin{cases} 2y - x = 5 \\ y - x = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 1.$$

Підставимо значення $y = 1$ у друге рівняння: $1 - x = 4$, звідси $x = -3$.

Тому розв'язком буде $(-3; 1)$. Тож, добутком $x_0 \cdot y_0$ буде -3.

Відповідь: -3.

Аналіз всіх років дав нам змогу оцінити відсотковий вміст логарифмічної функції, рівнянь та нерівностей у зовнішньому незалежному оцінюванні. Тобто, це варіюється у межах 5-10%. А саме: у 2021-му році логарифми зустрічаються у двох завданнях, тобто це дорівнюватиме 6%. У завданнях 2017-го року є три завдання, що містять логарифми, що дорівнює 9%. У 2015-му році – також два завдання, тобто 7% (за рахунок того, що у 2015 році було 30 завдань, а у 2021 – 34 завдання). 2011-й рік містить два завдання, що дорівнює 6%.

Також, аналіз бесіди з вчителями та учнями дає нам змогу стверджувати, що найпоширенішими помилками є ті, що учні не враховують:

- області допустимих значень підлогарифмічного виразу ($b > 0$);
- властивості функції, а саме: $a > 0$ чи $0 < a < 1$.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі систематизовано відомості про властивості логарифмів, розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей в шкільному курсі алгебри старшої школи, подано приклади розв'язування рівнянь та нерівностей різної складності.

На основі аналізу підручників, посібників для вищих навчальних закладів, проаналізовано різні способи розв'язування логарифмічних рівнянь, нерівностей, використання властивостей логарифмів.

На уроках математики потрібно приділяти більше уваги вивченню та дослідженню логарифма, якомога більше розв'язувати відповідних прикладів, рівнянь та нерівностей, тому що цей матеріал є важливим для успішної здачі іспитів.

Таким чином, у першому розділі роботи охарактеризовано теоретичні основи вивчення логарифмічних рівнянь та нерівностей, а саме: подано види логарифмічних рівнянь та нерівностей та логарифмічні рівняння та нерівності з параметрами.

У другому розділі роботи розглянуто методичні особливості розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей, а саме: аналіз начальної програми з математики з теми «Показникова та логарифмічна функції» та аналіз зовнішнього незалежного оцінювання, методи розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Дипломна робота може бути використана вчителями школи при організації навчання математиці на уроках, на факультативних заняттях, для підвищення якості знань учнів, активізації їх пізнавальної діяльності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. Закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 2006. – 272 с.
2. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 352 с. : іл.
3. Барановська Г. Г. Практикум з математики: Показникова та логарифмічна функції: навч. посібник для вступників до вузів / Г. Г. Барановська, В. В. Ясінський ; Національний технічний ун-т України «Київський політехнічний ін-т». Факультет довузівської підготовки. — К. : [б.в.], 1998. — 124 с.
4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. / Г. П. Бевз. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.: іл.
5. Вибрані питання елементарної математики: під ред. чл.-кор. Скорохода А. В. – Київ: Вища школа. Головне вид-во, 1982. – 456 с.
6. Гронштейн П. І. Задачі з параметрами / П. І. Гронштейн, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 1998. – 336 с.
7. Кушнір І. А. Математика для вступників у ВНЗ / І. А. Кушнір. – К.: Астарта,1996. – 605 с.
8. Кушнір І. А. У світі логарифмів / І. А. Кушнір К. : Факт, 2004. — 136 с.: іл.
9. Математика. Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання (базовий поглиблений рівні) / Уклад. : А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова, Г. В. Гап’юк, Л. І. Кондратьєва, О. М. Мартинюк, С. В. Мартинюк, Л. І. Олійник, П. І. Ульшин, О. Й. Чиж. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2015. – 528 с.

10. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, 2018 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
11. Опята Л. І. Параметр в деяких видах логарифмічних рівнянь / Нова Каховка. – 2014. – 7 с.
12. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник / А. В. Прус, В. О. Швець. - Житомир: Вид-во «Рута», 2016. – 468 с.
13. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і допов. / З. І. Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.: іл.
14. Сторчай В. Ф. Показникові і логарифмічні рівняння: навч. посібник / В. Ф. Сторчай.— К. : Дніпропетровський держ. ун-т. [б.в.], 1995. — 100 с.
15. Щербинін Г. П. Показниково-логарифмічні вирази, рівняння та нерівності: навчальний посібник / Г. П. Щербинін, Т. А. Нездельська. – Харківський держ. Технічний ун-т радіоелектроніки. – Х. : [б.в.], 1995. — 60 с.
16. Позакласна робота з математики в школі [Текст] / В. І. Коба, О. О. Хмура. – К. : Радянська школа, 1968. - 376 с. : рис., табл. - (Бібліотека вчителя математики). – Бібліогр. в кінці розд. – 48700 прим.
17. Історія логарифмів [Електронний ресурс]. Вікіпедія : вільна енциклопедія. URL : https://uk.wikipedia.org/wiki/Історія_логарифмів
18. Логарифм [Електронний ресурс]. Вікіпедія : вільна енциклопедія. URL : https://uk.wikipedia.org/wiki/Логарифм
19. Методи розв'язування логарифмічних нерівностей. [Електронний ресурс]. URL : https://naurok.com.ua/metodi-rozv-yazuvannya-logarifmychnih-neryvnostey-159432.html

20. Показникові й логарифмічні рівняння й нерівності з параметрами. [Електронний ресурс]. URL : http://prilmom.at.ua/algebra/pokaznykovi_y_logaryfmichni_rivnyannya_y_nerivnost.docx
21. В. Бахрушин. Наскільки якісними є тести ЗНО? [Електронний ресурс]. URL : http://education-ua.org/ua/articles/archive/107-naskilki-yakisnimi-e-testi-zno
22. Бахрушин В.Є., Горбань О.М., Игнахина М.А. Статистичний аналіз тестів ЗНО 2009-2011 // Вища освіта України. Тематичний випуск «Вища освіта України в контексті інтеграції до Європейського освітнього простору». — 2012
23. Аналіз тесту з математики ЗНО-2016. [Електронний ресурс]. URL : https://zno.ua/news/analiz-testu-z-matematiki-zno-2016.html
24. Особливості використання оберненого навчання у старшій школі (на прикладі вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції»). [Електронний ресурс]. URL : https://repository.sspu.sumy.ua/bitstream/123456789/9635/1/Гавриленко%20дипломная.pdf