Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:

Методика розв'язування тригонометричних рівнянь з використанням інноваційних технологій

Виконала: студентка 4 курсу
Групи МЕІ-41
Спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Комар Наталія Вячеславівна

Керівник: старший викладач,
Клекоць Ганна Яківна

м. Рівне 2021р.

Зміст

Вступ

Розв'язуванню рівнянь в математичній освіті приділяють велику увагу. Найцікавішим є розв'язування тригонометричних рівнянь, оскільки від інших аналогічних прикладів вони відрізняються, в першу чергу тим, що в результаті їх розв'язування отримуємо нескінченні серії розв'язків. Тригонометричні рівняння є цікавими також з геометричної точки зору, оскільки у багатьох задачах використовуються тригонометричні співвідношення між сторонами та кутами трикутника.

Рівень математичної культури учнів значно залежить від уміння розв'язувати такі рівняння. Здобути такі вміння допомагають знання прийомів і методів розв'язування рівнянь, засвоєння яких є найважливішою частиною математичної підготовки учнів. Математичні рівняння виконують ряд функцій освітнього, розвиваючого та виховного характеру. Вони є ефективними та незамінними засобами засвоєння учнями понять та методів шкільного курсу математики.

В сучасних методичних дослідженнях розв'язок тригонометричних рівнянь розглядається як ефективний засіб формування в учнів системи основних математичних знань, умінь і навичок, математичних методів дослідження, як засобу їх математичного розвитку.

Але, не дивлячись на постійне удосконалення форм і методів роботи вчителів, аналіз практики навчання показав, що вміння учнів розв'язувати тригонометричні рівняння має прогалини.

Потрібно сказати, що широке впровадження в навчальний процес сучасних засобів збирання, зберігання, опрацювання, подання, передавання інформації відкриває широкі перспективи гуманізації освіти і навчального процесу, поглиблення та розширення теоретичної бази знань та надання результатам навчання практичного значення, активізації пізнавальної діяльності, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу дітей з урахуванням їхніх вікових особливостей і життєвого досвіду, індивідуальних нахилів, запитів і здібностей.

Саме тому метою даної роботи є розкриття деяких аспектів використання засобів сучасних інформаційних технологій під час вивчення теми “Тригонометричні рівняння”. Це дасть змогу:

- забезпечити найбільш наглядне та зрозуміле представлення графічної та текстової інформації;
- врахувати широкий діапазон індивідуальних особливостей учнів;
- інтенсифікувати процес навчання шляхом регулювання складності і об'єму;
- забезпечити повний і оперативний контроль за результатами навчання;
- на основі результатів контролю керувати самим процесом навчання з метою підвищення його ефективності.

Робота містить вступ, три розділи, список літератури та додатки.

В першому розділі викладені теоретичні основи вивчення теми тригонометричні рівняння в курсі середньої школи, психолого — педагогічні основи вивчення даної теми використання комп'ютера в навчальному процесі.

В другому розділі розглядаються науково — теоретичні особливості навчання розв'язуванню тригонометричних рівнянь. Розглядаються тригонометричні функції, тригонометричні тотожності, методи розв'язування рівнянь. Тут також розглядається комп'ютер, як засіб навчання. Плюси та мінуси застосування, місце і значення в навчальному процесі. Демонструються навчально — контролююча програма “Методи розв'язування тригонометричних рівнянь”. Зміст самої програми міститься в додатках.

Актуальність дослідження. Методика викладання математики — це наука про різні способи і форми передачі учням математичних знань, про мету, про зміст і засоби навчання і нерозривно пов'язані з ними питання виховання учнів у процесі викладання. Методика математики потрібна насамперед учителям математики, щоб успішно навчати учнів, кожен учитель, безперечно, повинен добре знати свій предмет. Потрібно сказати, що тригонометрія є дуже неоднозначною та її сприйняття вимагає від школярів неабиякого характеру та прикладної спрямованості: розвиток інтелекту, алгоритмічної культури, математичної інтуїції, а також психологічних зусиль. Такі складові є необхідними для математичного розвитку молодої людини, для формування її світогляду. Отже, тема цієї роботи є актуальною і в контексті формування школяра, передусім у розвитку його логічного мислення, алгоритмічної та математичної культури та уміння обгрунтовувати твердження.

Тема дослідження — “Методика розв'язування тригонометричних рівнянь з використанням інноваційних технологій”, показати основні аспекти на які потрібно звертати увагу вчителя при викладанні даної теми.

Предмет дослідження — дослідження і вдосконалення змісту теми “Методика вивчення тригонометричних рівнянь”, розробка ефективних форм, методів і засобів навчання та виховання учнів при вивченні даної теми.

Об'єкт — процес вивчення тригонометричних рівнянь в школі.

Мета дослідження — вивчити сутність методики викладання теми “Тригонометричні рівняння”. Виділимо такі основні **завдання:**

- визначення сутності викладання теми “Тригонометричні рівняння”;
- проаналізувати різні методи і прийоми викладання теми “Тригонометричні рівняння” та проаналізувати ефективність використання їх на практиці, визначити основні недоліки та шляхи їх усунення;
- подати методичні рекомендації щодо використання елементів дослідження на уроках алгебри.

Методологічною основою дослідження стали підручники для студентів математичної спеціальності про викладання теми “Тригонометричні рівняння”, про використання різних методів і прийомів для кращого засвоєння учнями різних понять, психолого — методичні посібники про поведінку дітей на уроці, про рівень засвоєння ними нового матеріалу, посібники в таблицях і схемах для методичного оформлення уроку, приклади з тригонометрії для оцінювання навчальних досягнень учнів, програми для загальноосвітніх навчальних закладів про тематичне планування, посібники з цікавим матеріалом, який можна використати на уроках.

Теоретичне і практичне значення дослідження полягає в тому, що його методичні рекомендації, твердження та висновки можна використати для удосконалення навчально — виховного процесу.

Розділ I. Наукові основи дослідження

1.1.Теоретичні основи вивчення теми тригонометричні рівняння в курсі середньої школи

Тригонометрія (“тригонон” — трикутник, “метрезіз” — вимірювання) в буквальному перекладі означає вимірювання трикутників. Сама назва “тригонометрія” означає, що цей розділ математики пов'язаний із задачами розв'язування трикутників. Інтерес до вивчення трикутників з'явився ще у давніх єгиптян, вавілонян і греків. Проте цим не вичерпується широке застосування тригонометричних функцій у різних розділах математики, фізики, техніки.[15]

У даній роботі буде детально розкрито тему “Тригонометричні рівняння та методи їх розв'язування”. Перш за все потрібно сказати, що дана тема буде вивчатися у класах за допомогою комп'ютера, а саме програми, яка дозволить ознайомити учнів з тригонометричними рівняннями та методами їх розв'язування. Що ж таке тригонометричне рівняння? Тригонометричним рівнянням називається рівняння, у яких невідома (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції.

Потрібно сказати, що розв'язування будь якого рівняння зводиться до розв'язування елементарних рівнянь. Засоби розв'язування — перетворення, розклад на множники, заміна невідомої. Найголовніший принцип не втратити коренів. Ми будемо розглядати як записувати розв'язки тригонометричних рівнянь, як об'єднувати корені, як робити перевірку і чи потрібна вона взагалі.

Нижче ми будемо розглядати як розв'язуються найпростіші тригонометричні рівняння, а також рівняння, які відрізняються від найпростіших. Існують такі методи розв'язування даних рівнянь:

- спосіб зведення до однієї тригонометричної функції;
- спосіб розкладання на множники;
- спосіб розв'язування однорідних рівнянь;

- спосіб введення допоміжного аргументу;
- спосіб піднесення до квадрату;
- графічний спосіб.

Також будемо розглядати обернені тригонометричні функції без знання яких розв'язування навіть найпростіших тригонометричних рівнянь майже неможливе.

2. Психолого – педагогічні основи вивчення тригонометричних рівнянь

Математика, поряд з іншими шкільними предметами, розв'язує задачу усестороннього, гармонійного розвитку і формування особистості. Отримані при вивченні математики знання, вміння і навики, отриманий розумовий розвиток повинні допомогти випускникам школи в майбутньому.

Потрібно сказати, що процес розв'язування задач повинен складатись з чотирьох етапів:

1) аналіз умови задачі;
2) пошук плану розв'язку;
3) виконання даного плану, перевірка та доведення того, що отримані розв'язки задовольняють умову задачі;
4) аналіз проведеного розв'язку.

Не менш важливою та актуальною є проблема забезпечення в процесі навчання міцних математичних знань, вмінь та навиків. На запам'ятовування впливають: зміст, форма, трудність та об'єм учбового матеріалу, значущість, осмисленість, а також структура учбового матеріалу, яка проявляється в логічних, семантичних та синтаксичних зв'язках.

Повторення та тренування є основним засобом заучування, що підтверджується дослідами психологів, фізіологів. Повторення необхідне не лише для кращого запам'ятовування, але і для того, щоб виявити нові зв'язки між елементами учбового матеріалу і привести в систему раніше вивченого.

Для забезпечення міцності засвоєних математичних знань важливе значення мають спеціальні прийоми запам'ятовування. Психологи та педагоги встановили наступні основні прийоми запам'ятовування:

1) смислове групування матеріалу (учень повинен осмислити матеріал, виділити основне і, якщо він працює з книгою, розбити текст на окремі смислові частини);
2) виділення речень, які мають основний смисл;

3) складання плану – словесного чи у вигляді графічної схеми, таблиці;
4) виділення схеми, яка відображає структуру матеріалу.

Наприклад, при вивченні ведучих понять важливо виокремити суттєві та несуттєві ознаки, означення, властивості поняття, приклади його застосування. При доведенні теорем необхідно чітко виділити логічну схему доведення.

Багато залежить від організації системи повторення в кінці теми, четверті, учбового року і при підготовці до екзамену. Таке повторення повинно бути напрямлене на глибину та систематизацію учбового матеріалу, усвідомлення ведучих понять, ідей та методів, структури предмету в цілому. При повторенні є можливість розкрити перед учнями ряд філософських проблем математики, походження математичних понять, зв'язок математики з іншими предметами.[24]

Сучасний етап розвитку економіки, техніки, промисловості повинен знайти відображення в характері задач і прикладів шкільного курсу математики, в методах їх розв'язування.

Однією з характерних рис сучасного технічного прогресу широке використання в багатьох областях діяльності електронно – обчислюваної техніки, автоматичних систем управління. Саме тому принципово важливе значення набуває алгоритмічна культура випускників середньої школи. Їх потрібно познайомити з найпростішими електронно – обчислюваними пристроями. В учнів повинно бути сформоване поняття про алгоритм та його види, навики описання алгоритмів і створення найпростіших програм.

Розв'язок поставленої задачі можливий при умові комплексного підходу до навчання, важливими параметрами якого являється єдність всіх функцій навчання (навчальної, розвиваючої, виховної) і всіх компонентів навчального процесу (цілей, змісту, методів та організації навчання), використання новіших досягнень педагогіки, психології і методики навчання.

3. Використання комп'ютера в навчальному процесі

У час становлення та розвитку системи національної освіти особливо актуальним є питання вдосконалення форм, методів і технологій навчання математики в навчальних закладах різних типів.

Комплексне використання різних засобів навчання сприяє створенню сприятливого пізнавального середовища. Поєднання традиційних форм і видів роботи на уроці з комп'ютерною підтримкою дає можливість максимально диференціювати та індивідуалізувати навчання, зробити процес навчання творчим, дослідницьким. Застосування інформаційних технологій дає можливість скоротити час на вивчення теми, підвищити рівень сприйняття і розуміння учнями матеріалу. Позитивний результат гарантовано, бо молодь до комп'ютерів ставиться дуже доброзичливо, вона їх любить, їм довіряє, навіть їх обожнює. І треба розумно використати це ставлення школярів до комп'ютера під час планування навчального процесу.[4]

Важливі також деякі психологічні аспекти висвітлюваної теми. Учні мають різний психологічний статус і багато хто з них хворобливо ставиться до зауважень, дуже боїться зазнати фіаско на очах у класу. У діалозі з комп'ютером нічого подібного не відбувається: комп'ютер не рахує, скільки було невдалих спроб розв'язання задачі, не робить ніяких зауважень. Він ще й підкаже, що і як потрібно зробити. Таким чином формується ситуація психологічного комфорту, яка створює можливість пізнавального та емоційного розкріпачення учнів.

У діючій програмі з математики рекомендоване використання персонального комп'ютера як контролюючої машини, навчального тренажера, моделюючого стенда, інформаційно – довідкової системи, ігрового навчального середовища, електронного конструктора, експертної системи. Використання комп'ютера під час вивчення математики дає наочні уявлення про досліджувані поняття, закономірності, функції, геометричні фігури, що сприяє розвитку образного мислення учнів.

Використання комп'ютерних програм дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів тощо. Наприклад, учень може розв'язувати рівняння і нерівності та їх системи, не знаючи формул для знаходження коренів, методу виключення змінних, методу інтервалів тощо; обчислювати похідні та інтеграли, не знаючи алгоритмів їх дослідження. Разом з тим, завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі, учень чітко і легко розв'язуватиме досить складні задачі, впевнено володітиме відповідною системою понять і правил. Виконання подібних програм дає можливість у багатьох випадках зробити розв'язування задач настільки ж доступним, як і просте розглядання малюнків чи графічних зображень.

З іншого боку, такий підхід до вивчення математики дає наочні уявлення про поняття, що вивчаються, розвиває образне мислення, просторову уяву, дозволяє досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища. При цьому на передній план виступає з'ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної математичної моделі, матеріальна інтерпретація отриманих за допомогою комп'ютера результатів.

Уже з наведеного видно, як можуть змінюватись зміст і структура навчальної діяльності учнів залежно від специфіки обраної ними предметної галузі, спрямованості навчання, індивідуальних навиків і здібностей. При цьому комп'ютерна підтримка вивчення математики з використанням програмних засобів зазначеного типу дає значний педагогічний ефект, полегшуючи, розширюючи та поглиблюючи вивчення і розуміння методів математики на відповідних рівнях в середніх навчальних закладах з найрізноманітнішими ухилами навчання. Звичайно, і програми курсів математики, і глибина вивчення відповідних понять, законів, методів, аналітичного апарату можуть суттєво різнитися між собою.

Не торкаючись докладно всіх тем, які вивчаються в курсі математики загальноосвітньої середньої школи, можна зауважити, що комп'ютерні програми згаданого типу можуть бути використані практично на всіх уроках математики, починаючи вже з п'ятих – шостих класів, зокрема під час вивчення системи координат на прямій і на площині, поняття функції, методів розв'язування рівнянь та нерівностей та їхніх систем, елементів теорії границь. Зрозуміло, що окрім подібних програм вчитель при потребі може використовувати різного роду тренажери, програми для контролю знань, збирання статистичних даних стосовно навчального процесу та їх опрацювання.

Із задоволенням використовують учні усну контрольну роботу, провести і перевірити яку, допомагає персональний комп'ютер. Даний підхід до використання комп'ютерних технологій сприяє тому, що учень стає суб'єктом своєї пізнавальної діяльності. З іншого боку, перед учителем відкриваються широкі можливості в забезпеченні своєчасної перевірки й обліку навчальних досягнень учнів. Отже, підвищується зацікавленість школярів у пізнавальній діяльності, формується їхнє свідоме ставлення до навчання, адекватна самооцінка, збільшується щільність навчальної діяльності. Робота складається у формі тестів. Учні повинні тільки вибрати потрібну відповідь із запропонованого набору відповідей. І у разі успіху, і у разі помилки комп'ютер відразу повідомляє правильну відповідь. Таким чином учень має можливість проаналізувати свої помилки.

Зрозуміло, що заняття з математики, орієнтовані на використання засобів навчання згаданих типів, мають проходити у відповідно оснащеному досить досконалими технічними в програмними засобами класі. У таких класах мають вивчатися всі навчальні предмети без винятку, а не лише основи інформатики та обчислювальної техніки. Це зі свого боку сприятиме розширенню і поглибленню між предметних зв'язків, інтеграції окремих навчальних предметів, їх взаємопроникнення та взаємодії, що, зрештою, дасть можливість оволодіти елементами нових інформаційних технологій при вивченні нових навчальних дисциплін, а не лише окремого навчального курсу «Основи інформатики та обчислювальної техніки»

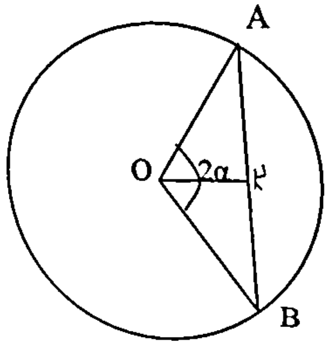
Розділ ІІ. Методичні основи дослідження

1.Дещо з історії тригонометрії

Нині, коли говорять про тригонометрію, кожен обов'язково уявляє собі синус, косинус, тангенс та інші тригонометричні функції.

Проте ці функції не завжди були характерною ознакою тригонометрії.

Якщо взяти дугу одиничного кола, яка вміщує центральний кут 2α то синус кута α дорівнюватиме півхорді АВ, яка стягує цю дугу. У тригонометрії ми маємо справу саме з такими півхордами. Отже, якщо відома півхорда, то легко знайти всю хорду і навпаки. Стародавні греки знаходили не півхорду кута 2α, а всю хорду, користуючись таблицями хорд. Вони не знали синусів, косинусів і тангенсів. Першу таблицю хорд склав у II ст. до н. е. великий грецький астроном Гіппарх. Ця таблиця за сучасною термінологією була таблицею подвійних синусів центрального кута. На жаль, ця таблиця до нас не дійшла. Визначна заслуга у подальшому розвитку тригонометрії належить Клавдію Птолемею. Це той самий Птолемей, який є автором геоцентричної системи світу. Він теж склав таблицю хорд для кутів від $0°$ до $180°$ через кожні $30°$, що відповідає таблиці синусів від $0°$ до $90°$. Таблиці синусів вперше почали застосовувати індійські математики на рубежі V і VI. Від індійців тригонометрія в її початковому стані перейшла до арабів. Як і індійці, араби не обмежувались розглядом тільки плоских трикутників. Вони вивчали співвідношення між сторонами і кутами сферичних трикутників. Значний внесок у розвиток тригонометрії зробив арабський математик ал-Баттані (ІХ-Хст.). Розвитку тригонометрії сприяли такі видатні вчені, як Улугбек – узбецький астроном, Абу-л-Вафа – іранський математик, індійський математик Бхаскара, азербайджанський астроном Насреддін Тусі, який у своїй праці «Трактат про повний чотиристоронник» виклав плоску та сферичну тригонометрію. Пізніше, у XIV ст. тригонометрією займалися польський астроном М. Копернік, датчанин Тіхо Браге, француз Вієт, великий німецький вчений Й. Кеплер. Вієт повністю розв’язав задачу про визначення всіх елементів плоского або сферичного трикутника за трьома даними.[15]



В Європі виникнення тригонометрії пов'язане з іменем німецького астронома Йоганна Мюллера, який народився в Кенігсберзі (Франкофонія). Саме він вважається справжнім творцем європейської тригонометрії, написав твір «П'ять книг про трикутники всіх видів».

Сучасного вигляду тригонометрія набула в працях визначного математика, петербургського академіка Леонарда Ейлера (1707 – 1783).

Ейлер зробив ряд цікавих наукових досліджень у галузі математики. Він відкрив зв'язок між тригонометричними і показниковими функціями, заклав фундамент варіаційного числення, теорії рівнянь з частинними похідними, теорії функцій комплексної змінної, диференціальної геометрії та ін. Народився Ейлер у швейцарському місті Базелі, але цілком справедливо вважається російським математиком, бо довгі роки жив і працював у Росії (1727 – 1741, 1766 – 1783).

Взагалі довгий час тригонометрія розвивалась як частина геометрії, тобто факти, які ми тепер формулюємо в термінах тригонометричних функцій, формулювали і доводили за допомогою геометричних понять та тверджень. Мабуть, найбільші стимули для розвитку тригонометрії виникали у зв'язку з розв'язуванням задач астрономії, що становило великий практичний інтерес.

2.Тематичний план

Розглянемо тематичне планування теми «Тригонометричні рівняння та нерівності». Потрібно сказати, що в 10 класі заплановано 2 години на тиждень алгебри (всього 70 год. : 32 год. перший семестр, 38 год. другий семестр) та одна година на тиждень геометрії (всього 35 год. : 16 год. перший семестр, 19 год. другий семестр).

На вивчення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» відводиться 22 год. : 8 год. перший семестр, 14 год. другий семестр. Щодо мети, то вона включає:

- ввести поняття оберненої функції, обернених тригонометричних функцій; розглянути їх графіки та властивості;
- ввести поняття тригонометричного рівняння та нерівності;
- навчити розв’язувати найпростіші тригонометричні рівняння і нерівності та окремі види тригонометричних рівнянь, що зводяться до найпростіших;
- обернена функція;
- обернені тригонометричні функції;
- розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь;
- основні способи розв’язування рівнянь.

Учні повинні мати уявлення про:

- обернену функцію та обернені тригонометричні функції;
- область визначення та область значень обернених тригонометричних функції;
- тригонометричні рівняння та тригонометричні нерівності.

Учні повинні знати:

- формули узагальненого розв’язку найпростіших тригонометричних рівнянь.
- Учні повинні вміти:
- розв’язувати тригонометричні рівняння і найпростіші тригонометричні нерівності.[15]

3.Тотожні перетворення тригонометричних виразів

Перед тим, як вивчати методи розв'язування тригонометричних рівнянь, учні повинні повторити деякі тригонометричні тотожності та факти тригонометрії. Це робиться для того, щоб учні легко могли спрощувати складні вирази.

Основними фактами тригонометрії є:

1. Знаки тригонометричних функцій по четвертям:

Чверть	$\sin x$	$\cos x$	$tg\ x$	$ctg\ x$
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

2. Деякі значення тригонометричних функцій:

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tg\ x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$ctg\ x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

3. Парність та періодичність.

Функція $y = \cos x$ є парною, всі інші тригонометричні функції є не парними, тобто $\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x,$

$tg\ (-x) = -tg\ x,$

$ctg\ (-x) = -ctg\ x.$

Всі тригонометричні функції є періодичними. Для функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$, $T = 2\pi$ – основний період; а $T = \pi$ – основний період функції $y = tg\ x$ і $y = ctg\ x$ (нагадаємо, що основним періодом називається найменший із всіх додатніх періодів тригонометричної функції). Таким чином:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x$$

$$tg\ (x + \pi) = tg\ (x - \pi) = tg\ x;\ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right);$$

$$ctg\ (x + \pi) = ctg\ (x - \pi) = ctg\ x;\ \ (x \neq \pi n, n \in Z).$$

4. Формули суми аргументів:

$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \cos\beta\ \pm \sin\beta \cos\alpha;$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta;$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\ tg\beta}; (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;\ \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; n, k, m \in Z)$$

$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\beta}; (\alpha \neq \pi n; \beta \neq \pi k; \alpha \pm \beta \neq \pi n; n, k, m \in Z.$

5. Формули, які зв'язують тригонометричні функції одного і того ж аргументу:

$cos^2\alpha + sin^2\beta = 1;$

$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}; \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right);$

$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha};\ \ (\alpha \neq \pi n);$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha};\ \ (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n);$

$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$; $(\alpha \neq \pi n)$.

6. Формули, які зв'язують тригонометричні функції аргументів, із яких один вдвічі більше другого:

$sin2\alpha = 2\, sin\alpha\, cos\alpha$;

$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$;

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}; (\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k)$;

$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha-1}{2\, ctg\alpha}; (\alpha \neq \frac{\pi n}{2})$;

$1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha$;

$1 - cos2\alpha = 2sin^2\alpha$;

$1 \pm sin2\alpha = (cos\alpha \pm sin\alpha)^2$.

7. Формули зведення:

x	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$sinx$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$
$cosx$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$
tgx	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctgx$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Учням важко запам'ятати вміст даної таблиці, тому варто, для кращого запам'ятовування, дати учням наступне правило:

1) якщо дуга α відтинає від горизонтального діаметру $(\pi \pm \alpha; 2\pi - \alpha)$, то назва функції зберігається; якщо ж дуга α відтинає від вертикального діаметру $(\frac{\pi}{2} \pm \alpha;\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha)$, то назва функції змінюється (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс);

2) перед отриманою функцією ставлять той знак, який мала би функція, яку ми перетворюємо, у випадку, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

8. Формули перетворення суми тригонометричної функції в добуток:

$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;

$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$cos\alpha - cos\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{cos\alpha cos\beta}; (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k)$;

$ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{sin\alpha sin\beta}; (\alpha \neq \pi n;\ \beta \neq \pi k)$.

9. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$sin\alpha cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$;

$cos\alpha cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$;

$sin\alpha sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$.

Отож, чим краще учні будуть знати дані формули та перетворення, тим легше їм буде розв'язувати тригонометричні рівняння та нерівності.[31]

4.Обернені тригонометричні функції

Під час розв'язування різних задач часто доводиться обчислювати значення функції за даним значенням аргументу. Наприклад, якщо взяти функцію $y = 2x + 3$, то оберненою функцією буде $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$.

Функція f , яка має обернену, називається оборотною. Необхідною і достатньою умовою існування оборотної функції є така: вона має набувати кожного свого значення лише для одного значення аргументу. Достатньою умовою існування оберненої функції для даної функції є її монотонність, тобто зростання або спадання на всій області визначення.

Оберненою до даної оборотної функції $y = f(x)$ називається така функція $x = \varphi(x)$, яка кожному y із множини значень функції $y = f(x)$ ставить у відповідність єдине число x із її області визначення.

Означення. Арксинусом числа a називається таке число з відрізка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, що його синус дорівнює a $(x = arcsina)$.

Означення. Арккосинусом числа a називається таке число з відрізка $[0; \pi]$, що його косинус дорівнює a $(x = arccosa)$.

Означення. Арктангенсом числа a називається таке число з інтервалу $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, що його тангенс дорівнює a $(x = arctga)$.

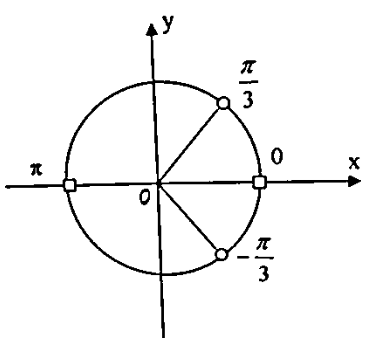
Означення. Арккотангенсом числа a називається таке число з інтервалу $[0; \pi]$, що його котангенс дорівнює a $(x = arcctga)$.

5.Спрощення розв’язків тригонометричних рівнянь

Отож, при розв’язуванні тригонометричних рівнянь ми отримуємо серії розв’язків. Дуже часто деякі значення з цих серій повторюються. Саме тому, ми часто об’єднуємо розв’язки тригонометричних рівнянь, тобто шукаємо такий запис відповіді, в якому повторюваних значень x немає.

Наприклад, серед значень x, які належать серіям $x = \frac{\pi}{3}k$ і $x = \frac{\pi}{2}n$, де $n, k \in Z$; є повторюване значення x, а саме $x = \pi m,\ m \in Z$. Виключаючи значення $x = \pi m$, наприклад, із першої серії, відповідь можна записати так: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{2}n$. Якщо ж виключати значення x із другої серії, то відповідь можна записати по-іншому: $x = \frac{\pi}{3}k; x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Як бачимо, отримані значення однієї і тієї ж відповіді ми отримали не однакові. Це слід мати на увазі, порівнюючи своє розв'язання з відповіддю, яка знаходиться в кінці підручника.

Об’єднання розв’язків зручно виконувати за допомогою одиничного кола, на яке наносять серії розв’язків сукупності рівнянь.



Нехай необхідно об’єднати серії $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k; x = \pi n$. Відмітимо на одиничному колі значення x із першої серії колами, а значення x із другої серії – квадратами. Значення $x = \pi$, як ми бачимо, відмічене двічі, тобто це значення x (а точніше $x = \pi + 2\pi n$) при записі об’єднання серій $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k; x = \pi n$ слід залишити лише в одній серії. Відповідь можна записати, наприклад, так:

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k,\ x = 2\pi n,$ або $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \pi n.$

6.Запис розв'язків тригонометричних рівнянь

Учням потрібно наголосити на тому, що тригонометричні функції є періодичними, тому при розв'язуванні тригонометричних рівнянь ми одержуватимемо цілу серію розв'язків.

Однією з властивостей тригонометричних рівнянь є те, що відповідь в багатьох випадках можна записати різними способами. Навіть для рівняння $\sin x = a(|a| \leq 1)$ відповідь можна записати так:

1) у вигляді двох серій: $x_1 = \arcsin a + 2\pi k;\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k; k \in Z;$

2) у стандартній формі, що є об'єднанням розв'язків x_1 та

$x_2 \colon x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; k \in Z.$

Окремо слід запам'ятати розв'язки для $a = 0,\ a = -1,\ a = 1$. Відповідно матимемо $x = \pi k; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$

3) оскільки $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, то відповідь можна записати так:

$x = \frac{\pi}{2} \pm \arccos a + 2\pi k; k \in Z.$

Зазвичай відповідь записується на основі формули пункту 2. Корисно запам'ятати наступні рекомендації. Якщо на розв'язування рівняння $\sin x = a$ робота не завершується, бо необхідно провести аналіз, відбір коренів, бо найбільш придатна форма запису вказана в пункті 1.

Наведені приклади і вказані форми запису відповіді можуть здатись надуманими. Однак на практиці можуть зустрічатися рівняння, які можуть бути розв'язаними різними способами, що приводять до різних елементарних рівнянь. Розглянемо один простий але повчальний приклад:

Розв'язати рівняння $tg^2 x = a; (a > 0).$

Найбільш очевидним є наступний шлях. Дане рівняння розпадається на два: $tg\ x = \sqrt{a}$ і $tg\ x = -\sqrt{a}$. Розв'язуючи кожне з них і об'єднуючи отримані результати, матимемо: $x = \pm arctg\sqrt{a} + \pi k, k \in Z.$

Інший шлях. Оскільки $tg^2x = \frac{sin^2x}{cos^2x}$, то замінюючи sin^2x та cos^2x на:

$$cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x);$$

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$$

і зробивши певні перетворення отримаємо:

$\cos 2x = \frac{1-a}{1+a}$, звідки $x = \pm \arccos\frac{1-a}{1+a} + \pi k, k \in Z.$

На перший погляд ніяких особливих переваг у другому способі порівняно з першим немає. Однак якщо візьмемо, наприклад, $a = 7 - 4\sqrt{3}$, то виявиться, що $\frac{1-a}{1+a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тобто рівняння $tg^2x = 7 - 4\sqrt{3}$ має розв'язок $x = \pm\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$, в той час, як перший спосіб приводить нас до відповіді

$x = \pm arctg\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \pi k, k \in Z$. «Побачити» і довести рівність $arctg\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{12}$ не так легко.[31]

7.Перевірка при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

Учням слід наголосити на тому, що дуже часто при розв'язуванні тригонометричних рівнянь з'являються сторонні корені. Раніше при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь, ми користувалися перевіркою для виявлення сторонніх коренів. У випадку тригонометричних рівнянь це зробити досить важко, оскільки розв'язків є не один і не два, а їх цілі серії. Коли ж робити перевірку?

Перевірка отриманих результатів необхідна:

1) якщо під час розв'язування відбулося розширення області визначення в результаті деяких перетворень (звільнення від знаменника, спрощення дробів...);
2) якщо під час розв'язування ми підносили обидві частини рівняння до парного степеня;
3) якщо при розв'язуванні використовувались тригонометричні тотожності, ліва і права частина яких має неоднакові області визначення, наприклад:

$$\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=sin\alpha;\ \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=cos\alpha;\ \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=tg\alpha;$$

$$tg\alpha ctg\alpha=1;\ \frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}=tg\frac{\alpha}{2};\ \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=tg(\alpha+\beta)\ ....$$

Використання цих тотожностей «зліва на право» призводить до розширення області визначення, а отже, можуть призвести до появи сторонніх коренів; використання цих тотожностей «справа на ліво» призводить до звуження області визначення, що, взагалі кажучи, не припустимо, так як це може призвести до втрати коренів.[30]

Наприклад, розв'яжемо рівняння: $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2ctgx-1.$ (1) Так як $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tgx+1}{1-tgx}$ (2) і $ctgx=\frac{1}{tgx}$ (3), то рівняння (1) перетворимо: $\frac{tgx+1}{1-tgx}=\frac{2}{tgx}-1.$

Нехай $y = tgx$, отримаємо $\frac{y+1}{1-y} = \frac{2}{y} - 1$, звідки отримаємо $y = \frac{1}{2}$, тобто $tgx = \frac{1}{2}$, а отже, $x = arctg\frac{1}{2} + \pi n$.

Ця множина коренів задовільняє рівняння (1). Однак легко помітити, що значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ також задовольняє рівняння (1). Причина втрати розв'язку – використання тотожностей (2) і (3). Заміна $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tgx+1}{1-tgx}$, так як і заміна $ctgx = \frac{1}{tgx}$, звужує область визначення рівняння (1), а саме із області визначення «випадають» значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Вони і є в даному випадку «втраченими» розв'язками рівняння (1).

Потрібно сказати, що у випадку тригонометричних рівнянь труднощі виникають саме з відбором коренів, з перевіркою, як правило, різко зростають (порівняно з алгебраїчними рівняннями). Адже, як показано вище, перевіряти потрібно серії, які складаються з нескінченного числа членів.[27]

8.Методи розв'язування тригонометричних рівнянь

8.1.Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Перш, ніж розглядати методи розв'язування рівнянь, учням потрібно подати певні загальні положення. Засоби розв'язування – перетворення, розклад на множники, заміна невідомої. Найголовніший принцип не втрачати коренів. Це значить, що при переході до наступного рівняння ми не турбуємося про появу сторонніх коренів, а турбуємося про те, щоб кожне наступне рівняння нашого «ланцюга» являлося наслідком попереднього. Одним із можливих методів відбору коренів є перевірка.

Увагу слід приділити заміні невідомого при розв'язуванні тригонометричних рівнянь. У більшості випадків після вірної підстановки утворюється алгебраїчне рівняння. Більш того, часто зустрічаються рівняння, які є тригонометричними за зовнішнім виглядом, а насправді такими не є, оскільки уже після першого кроку – очевидної заміни невідомого – перетворюються в алгебраїчні, а повернення до тригонометричної відбувається лише на етапі розв'язування елементарних тригонометричних рівнянь.

Як правило розв'язування будь якого тригонометричного рівняння зводиться до розв'язування простих рівнянь $\sin x = a, \cos x = a, tgx = a$. Рівняння $ctgx = a$ рівносильне рівнянню $tgx = \frac{1}{a}$, тому немає потреби розглядати його окремо.

Розглянемо розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Рівняння $\sin x = a$. Очевидно, що коли $|a| > 1$ дане рівняння не має розв'язку, бо $|\sin x| \leq 1$ для будь якого x. Якщо $|a| \leq 1$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то рівняння має тільки один розв'язок $x_1 = arcsina$. На проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функція sin спадає і набуває всіх значень від -1 до 1. За теоремою про корінь рівняння $\sin x = a$ має і на цьому відрізку один корінь. З мал.1 видно, що цим коренем є число x_2, яке дорівнює $\pi - \arcsin a$. Справді, $\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a$.

Крім того, оскільки $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$, маємо: $-\frac{\pi}{2} \leq -x_1 \leq \frac{\pi}{2}$ і $\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi - x_1 \leq \pi + \frac{\pi}{2}$, тобто число x_2 належить відрізку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Отже, рівняння $sinx = a$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ має два розв'язки $x_1 = \arcsin a$ і $x_2 = \pi - \arcsin a$ (які збігаються, якщо $a = 1$). Врахувавши, що період синуса дорівнює π, дістанемо такі формули для запису всіх розв'язків рівняння:

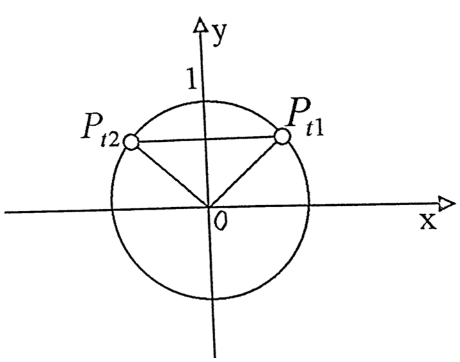
$$x = \arcsin a + 2\pi n; \qquad (1)$$

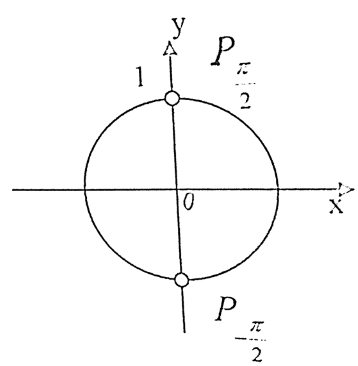
$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \qquad (2)$$

Зручно розв'язки рівняння $\sin x = a$ записувати не двома, а однією формулою: $x = (-1)^k \arcsin a + 2\pi n$.

Як не важко переконатися, при парних $k = 2n$ з даної формули знаходимо всі розв'язки, записані формулою (1), при непарних $k = 2n + 1$ - розв'язки записані формулою (2).

Розв'язання рівняння $\sin x = a$ зручно ілюструвати на одиничному колі. За значенням $\sin x$ є ордината точки P_x одиничного кола. Якщо $|a| < 1$, то таких точок дві; при $a = \pm 1$ – одна.



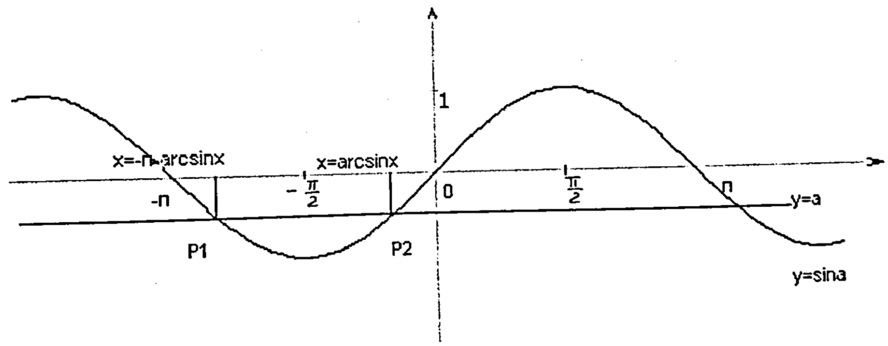


Якщо $a = 1$, то числа $\arcsin a$ і $\pi - \arcsin a$ збігаються, тому розв'язок рівняння $\sin x = 1$ прийнято записувати так: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Якщо $a = -1$ і $a = 0$, прийнято такий запис розв'язків:

$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \sin x = 0; x = \pi n.$

Також можна знайти розв'язки за допомогою графіка функції $y = \sin x$. Нехай $-1 \leq a < 0$:



Графіки даних функцій перетинаються у двох точках P1 і P2. Абсциса першої належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тому є $\arcsin a$, а абсцису P2 можна записати через $\arcsin a$: $-\pi - \arcsin a$. Якщо додати період функції синуса, то дістанемо вище зазначені розв'язки.

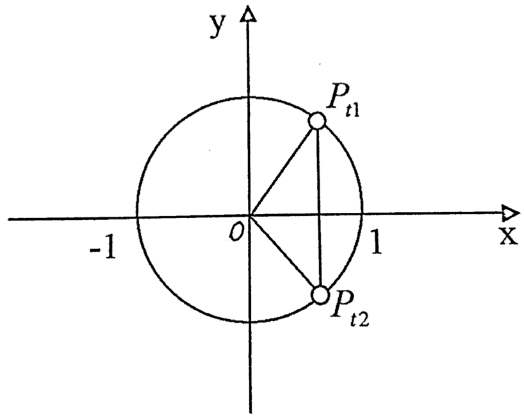
Рівняння $\cos x = a$. Очевидно, що коли $|a| > 1$ дане рівняння не має розв'язку, бо $|\cos x| \leq 1$ для будь якого x. Нехай $|a| \leq 1$. Треба знайти всі такі числа x, що $\cos x = a$. На відрізку $[0; \pi]$ існує тільки один розв'язок рівняння $\cos x = a$ – це число $\arccos a$.

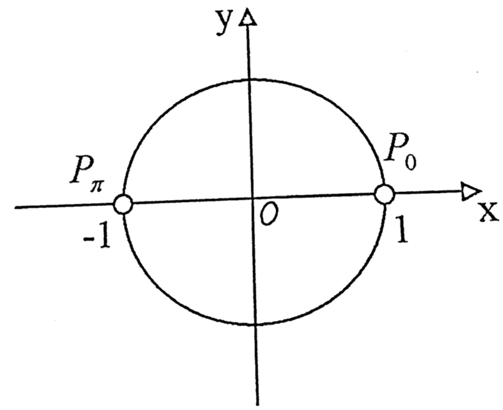
Косинус – парна функція, і, отже, на відрізку $[-\pi; 0]$ рівняння $\cos x = a$ також має точно один розв'язок – число $-\arccos a$. Таким чином рівняння $\cos x = a$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ завдовжки 2π має два розв'язки: $x = \pm \arccos a$ (які збігаються, якщо $a = 1$).

Внаслідок періодичності функції cos всі інші розв'язки відрізняються від цих на $2\pi n$, тобто формула коренів рівняння $\cos x = a$ має такий вигляд:
$x = \pm \arccos a + 2\pi n$.

Потрібно звернути увагу, що дана формула діє при $|a| \leq 1$.

Розв'язання рівняння $\cos x = a$ можна проілюструвати на одиничному колі. За означенням $\cos x$ – це абсциса точки P_x одиничного кола. Якщо $|a| < 1$, то таких точок дві, якщо ж $a = \pm 1$ – одна.



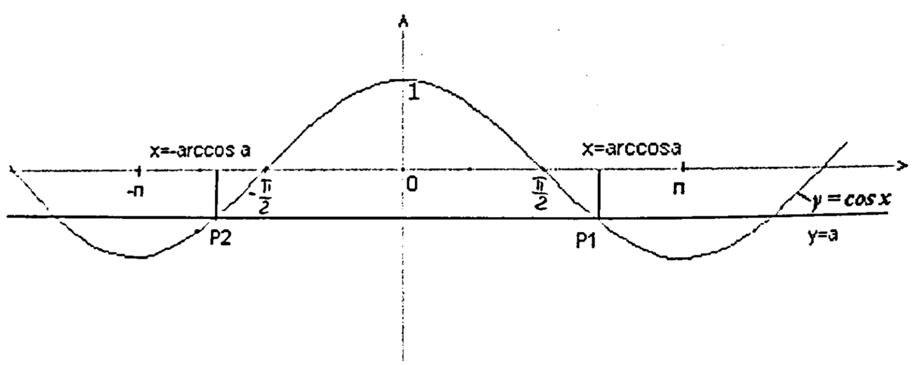


Коли $a = 1$, числа $\arccos a$ та $-\arccos a$ збігаються, тому розв'язки рівняння $\cos x = 1$ прийнято записувати у вигляді $x = 2\pi n$.

Якщо $a = -1$ і $a = 0$, прийнято такий запис розв'язків:

$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n; \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

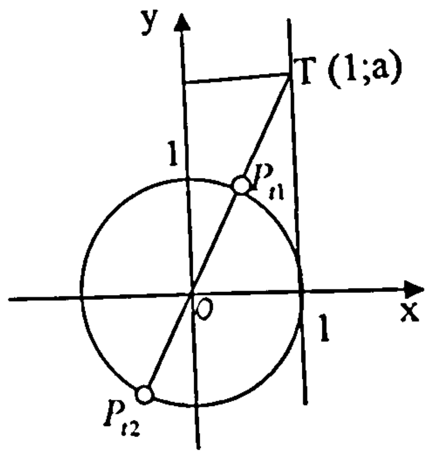
Також можна знайти розв'язки за допомогою графіка функції $y = \cos x$. Нехай $-1 \leq a < 0$:



Графіки даних функцій перетинаються у двох точках P1 і P2. Абсциса першої належить проміжку $(0; \pi)$ і є $\arccos a$, а друга протилежна – і дорівнює $-\arccos a$. В силу парності функції косинус, врахувавши період знайдемо множину розв'язків: $x = \pm \arccos a + 2\pi n$.

Рівняння $tgx = a$. При будь якому a в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ є тільки одне таке число x, що $tgx = a$, - це $arctga$. Тому рівняння $tgx = a$ має на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ завдовжки π тільки один корінь. Функція тангенс має період π. Отже, решта коренів даного рівняння відрізняються від знайденого на πn, тобто

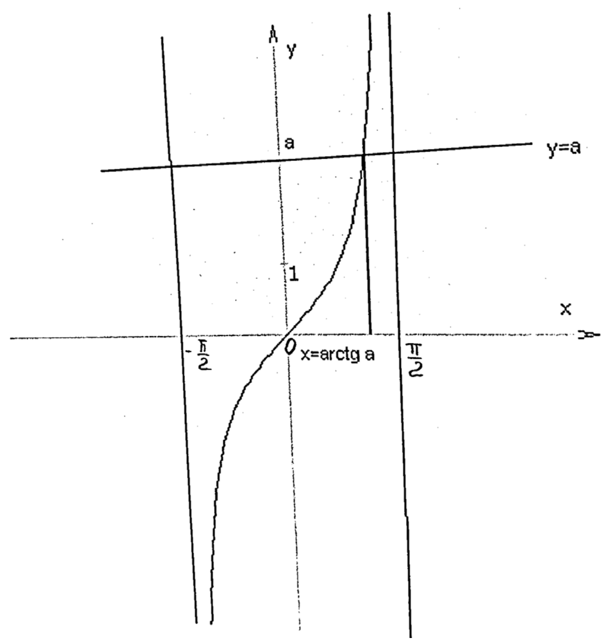
$x = arctga + \pi n.$



Розв'язання рівняння $tgx = a$ зручно ілюструвати, розглядаючи лінію тангенсів. Нагадаємо, що tgx – це ордината точки T_x перетину прямої OP_{x1} з лінією тангенсів. Для будь якого числа a на лінії тангенсів є лише одна точка з ординатою a (точка $T(1; a)$). Пряма OT перетинається з одиничним колом у двох точках; при цьому інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ відповідає точка P_{x1} правого півкола, така, що $x_1 = arctga.$

Розглянемо розв'язок даного рівняння за допомогою графіка функції $y = tgx.$

На інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ пряма $y = a$ перетинає графік тангенса лише в одній точці, абсциса якої є $arctgx$. Враховуючи періодичність функції $y = tgx$, дістанемо загальну формулу розв'язків рівняння.



Отже, маємо загальні розв'язки тригонометричних рівнянь:

$$\sin x = a; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n\,;$$

$$\cos x = a; x = \pm \arccos a + 2\pi n\,;$$

$$tgx = a; x = arctga + \pi n.$$

Після цього учням варто подати таку таблицю:

	$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
$\sin x = a$	$x = \pi k$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
$\cos x = a$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = \pi + 2\pi k$	$x = 2\pi k$
$tgx = a$	$x = \pi k$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
$ctgx = a$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

8.2.Спосіб зведення до однієї тригонометричної функції

Після вивчення найпростіших тригонометричних рівнянь, переходимо до вивчення методів розв'язування складніших тригонометричних рівнянь, які зводяться до найпростіших.

Розглянемо один з методів розв'язування тригонометричних рівнянь, а саме зведення до однієї тригонометричної функції. Цим способом розв'язують рівняння, до складу яких входять різні тригонометричні функції одного і того самого аргументу. Використовуючи основні тригонометричні тотожності, всі функції виражають через одну функцію, а потім розв'язують алгебраїчне рівняння відносно цієї функції. Саме тому даний метод називається ще алгебраїчним методом.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$tgx + ctgx = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Розв'язання: ми знаємо, що $ctgx = \frac{1}{tgx}$: $tgx + \frac{1}{tgx} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Зробимо заміну $tgx = t$. Дістанемо алгебраїчне рівняння:

$t + \frac{1}{t} = \frac{4}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}t^2 - 4t + \sqrt{3} = 0$; нарешті $t_1 = \frac{3}{\sqrt{3}}$; $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Маємо сукупність двох рівнхянь: $tgx = \sqrt{3}$ та $tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$, звідси шукані корені дорівнюють: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ та $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$.[27]

8.3.Спосіб розкладання на множники

Наступним методом розв'язання тригонометричних рівнянь є метод розкладання на множники. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь цим способом, усі члени рівняння переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку:

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x)=0.$$

Учням з алгебри вже повинно бути відомо, що необхідною і достатньою умовою для того, щоб добуток кількох співмножників перетворюється в нуль, є рівність нулю принаймні одного з множників цього добутку $f_1(x)=0, f_2(x)=0$ і т.д. за умови, що інші співмножники скінченні числа. Звичайно учні забувають про цю умову, а саме в тригонометрії часто буває так, що корінь одного рівняння перетворює в нескінченність інше. Наприклад,
$\cos xtgx=0; cosx_1=0; tgx_2=0;\ x_1=\pm arccos0+\pi n=\pm\frac{\pi}{2}+\pi n=\frac{\pi}{2}(2n\pm 1);\ x_2=\pi n$. Підставивши одержані корені першого рівняння в друге ми бачимо, що вони перетворюють ліву частину його в нескінченність, а добуток $0\cdot\infty$ є невизначеність. Таким чином, корінь першого рівняння $\frac{\pi}{2}(2n\pm 1)$ не може бути коренем даного рівняння.

Отже, потрібно перевіряти, чи не перетворюється в нескінченність один із співмножників даного рівняння при підстановці в нього знайдених коренів. Такі корені, які перетворюють у нескінченність окремі співмножники даного рівняння, будуть сторонніми. Справжніми коренями даного рівняння будуть $x_2=\pi n$, які перетворюють в нуль перший і другий співмножники.

Наприклад: $tg2x+tg4x=tg6x$.

Розв'язання: запишемо рівняння так:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\sin 4x}{\cos 4x}=\frac{\sin 6x}{\cos 6x};$$

$$\frac{sin2xcos4x+sin4xcos2x}{cos2xcos4x}=\frac{sin6x}{cos6x};$$

$$\frac{sin6x}{cos2xcos6x} = \frac{sin6x}{cos6x};$$

$$sin6x(cos6x - cos2xcos4x) = 0.$$

Це рівняння еквівалентне сукупності трьох рівнянь:

1) $tg2x = 0; 2x = \pi k; x = \frac{\pi k}{2};$

2) $tg4x = 0; 4x = \pi n; x = \frac{\pi n}{4};$

3) $tg6x = 0; 6x = \pi m; x = \frac{\pi m}{6}.$

Але при $x = \frac{\pi n}{4}$ і непраних $k, tg2x$ не існує, тому слід залишити тільки $x = \frac{\pi k}{2}$. Крім того, розв'язок $x = \frac{\pi k}{2}$ є частковим випадком розв'язків $x = \frac{\pi m}{6}$. Ось чому остаточно маємо: $x = \frac{\pi m}{6}$.

Відповідь: $x = \frac{\pi m}{6}$.[22]

8.4.Спосіб розв'язування однорідних рівнянь

З поняттям однорідних рівнянь учні вперше зустрічаються в тригонометрії, отже необхідно спинитися на означенні цих рівнянь.

Означення. Однорідним тригонометричним рівнянням першого степеня називається рівняння виду: $a\sin x + b\cos x = 0$.

Означення. Однорідним тригонометричним рівнянням другого степеня називається рівняння виду: $a\ sin^2x + b\ sinxcosx + c\ cos^2x = 0$.

Аналогічно можуть бути означені однорідні тригонометричні рівняння будь якого натурального степеня n.

Означення. Рівняння виду:

$$a_0sin^nx + a_1sin^{n-1}xcosx + a_2sin^{n-2}xcos^2x + \cdots + a_ncos^nx = 0 \quad (1),$$

де n – натуральне число, a a_0, $a_1, \dots, a_n$ – сталі коефіцієнти, називається однорідне рівняння n-го степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Тобто, це рівняння у яких ліва частина є многочленом, у кожному члені якого сума показників степенів синуса і косинуса одного і того самого аргументу однакова, а ліва – нуль.

Найпростіші однорідні рівняння:

1) $a\sin x = b\cos x$;

2) $a\ sin^2x + b\sin xcos\ x + c\ cos^2x = 0$;

3) $a\ sin^3x + bcos^3x + csin^2xcosx + d\sin xcos^2x = 0$.

Вільного члена в однорідних рівняннях не має. Деякі неоднорідні рівняння можна легко перетворити в однорідні, наприклад, $2sin^2x - 5sinxcosx + 7cos^2x = 1$, в якому ліва частина однорідна відносно синуса і косинуса. Запишемо дане рівняння так: $2sin^2x - 5sinxcosx + 7cos^2x = sin^2x + cos^2x$. Звідси: $sin^2x - 5sinxcosx + 6cos^2x = 0$ – однорідне рівняння.

Спосіб розв'язання однорідних рівнянь застосовується під час розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь. Розглянемо суть даного методу.

Якщо $a_0 \neq 0$, в однорідному рівнянні n-го степеня і $x = \alpha$ – довільний корінь рівняння, то $cos\alpha \neq 0$, бо при $cos\alpha = 0$, з тотожності:
$a_0 sin^n\alpha + a_1 sin^{n-1}\alpha cos\alpha + \cdots + a_n cos^n\alpha = 0$ випливає, що і $sin\alpha = 0$. Але $sin\alpha$ і $cos\alpha$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, тому $cos\alpha \neq 0$. Тепер поділимо дану тотожність на $cos^n\alpha$, маємо:
$a_0 tg^n\alpha + a_1 tg^{n-1}\alpha + \cdots + a_n tg^n\alpha = 0$.

Звідси випливає, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння:
$a_0 tg^n x + a_1 tg^{n-1} x + \cdots + a_n tg^n x = 0$,
яке заміною $tgx = t$ зводиться до алгебраїчного.

Аналогічно, при $a_n \neq 0$ можна довести, що рівняння (1) еквівалентне рівнянню:

$$a_0 + a_1 ctgx + \cdots + a_n ctg^n x = 0.$$

Отже, якщо $a_0 \neq 0$ або $a_n \neq 0$, то після ділення обох частин рівняння (1) на $cos^n\alpha$ чи на $sin^n\alpha$ відповідно приходимо до еквівалентних рівнянь, які є алгебраїчними відносно tgx чи $ctgx$.

Наприклад. Розв'язати рівняння:

$$3sinxcosx - 2cos^2x = 0.$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $sin^n\alpha$. Це можна зробити, бо $sin\alpha \neq 0$ (легко перевірити, що кути $x = \pi n$ не задовольняють дане рівняння. Дістанемо: $3ctgx - 2ctg^2x = 0; ctgx(3 - 2ctgx) = 0$.

Це рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь: $ctgx = 0; 3 - 2ctgx = 0$. Звідси, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ та $x = arcctg\frac{3}{2} + \pi n$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = arcctg\frac{3}{2} + \pi n$.

Даним способом легко розв'язується рівняння $\sin x - \cos x = 0$.

Під час вивчення даного методу учням слід наголосити, що під час розв'язування однорідних рівнянь не завжди можна ділити на $cos^n\alpha$. Наприклад, якщо у рівнянні $acos^2x + bsinxcosx = 0$ поділити обидві частини на $cos^n\alpha$, то можна загубити серію розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Причина полягає в тому, що в даному рівнянні $\cos x$ може дорівнювати нулю, тому його потрібно розв'язувати способом розкладання на множники.[22]

8.5.Спосіб введення допоміжного аргументу

Наступним методом розв'язання тригонометричних рівнянь є спосіб введення допоміжного аргументу. Його застосовують під час розв'язання лінійних тригонометричних рівнянь.

Означення. Рівняння виду $a\sin x + b\cos x = c$, (a,b,c сталі коефіцієнти) називають лінійним відносно синуса і косинуса.

Розглянемо у загальному випадку розв'язування лінійного тригонометричного рівняння способом введення допоміжного аргументу. Винесемо за дужки з лівої частини рівняння $a\sin x + b\cos x = c$ – $\sqrt{a^2+b^2}$. Дістанемо: $\sqrt{a^2+b^2}\,(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x) = c$. Очевидно, що $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ і $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$. Крім того, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Це означає, що $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, матимемо $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$. Підставимо у попереднє рівняння ці вирази. Дістанемо: $\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) = c$ або

$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) = c, \sin\left(x+\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. За умови, що $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ або

$c^2 \leq a^2+b^2$, останнє тригонометричне рівняння має вигляд:

$x+\varphi = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k,\ x = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k - \varphi$, де $\varphi = arctg\,\frac{b}{a}$, оскільки $\frac{sin\varphi}{cos\varphi} = tg\varphi = \frac{b}{a}$.

Отже, перед розв'язуванням лінійного тригонометричного рівняння потрібно перевірити, чи виконується умова $c^2 \leq a^2+b^2$. Зафіксуємо здобуту формулу: $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$.[31]

Приклад. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Розв'язок: Поділимо обидві частини рівняння на 2:

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тепер, якщо підставити замість коефіцієнтів $\frac{\sqrt{3}}{2}$ та $\frac{1}{2}$ відповідно $\sin\frac{\pi}{3}$ і $\cos\frac{\pi}{3}$, то дістанемо $\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Розв'язавши це рівняння отримаємо: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.[21]

8.6.Спосіб піднесення до квадрату та графічний спосіб

Спосіб піднесення до квадрату розглянемо на прикладі: $\sin x - \cos x = 0$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$sin^2 x - 2\sin x \cos x + cos^2 x = 0;$

$1 - 2\sin x \cos x = 0;$

$1 - \sin 2x = 0;$

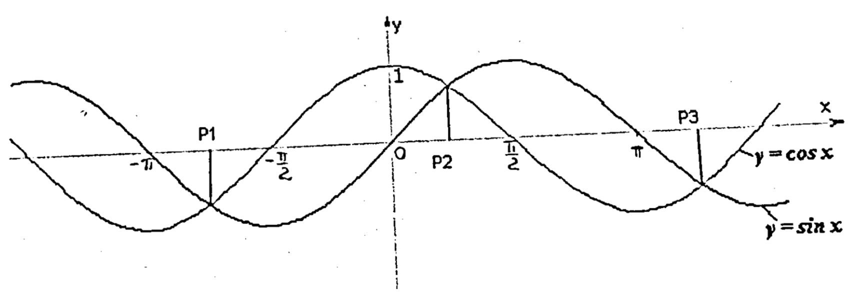
$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$

У цьому випадку піднесення до квадрату не спричиняє появу сторонніх коренів.

Тепер розглянемо розв'язання даного рівняння графічним способом. Запишемо дане рівняння у вигляді $\sin x = \cos x$ і введемо функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$. Побудувавши в одній системі координат графіки цих функцій, знайдемо розв'язки рівняння як абсциси точок перетину графіків.



Даний метод є не досить зручним, оскільки потрібно малювати графіки, на що витрачається багато часу. Також знайдені розв'язки за малюнком не завжди є точними.

Взагалі, дане рівняння $\sin x - \cos x = 0$ можна розв'язати багатьма способами. Проте алгебраїчний спосіб розв'язання даного рівняння є найменш раціональним. Тому при розв'язуванні рівнянь слід обирати найраціональніший метод.[20]

Потрібно сказати, що в результаті розв'язання одного і того самого тригонометричного рівняння різними способами можна дістати різні загальні формули розв'язків рівняння. Їх еквівалентність можна довести, перетворивши формули та об'єднавши кілька формул в одну. Можна також довести рівність знайдених множин розв'язків, записавши у розгорнутому вигляді прогресії, n – м членом яких є формула розв'язку тригонометричних рівнянь. Проте обидва ці способи громіздкі. Доцільно записати дане тригонометричне рівняння у вигляді $f(x) = 0$, знайти найменший додатній період 1 функції $y = f(x)$ і показати, що на проміжку $[0; l]$ кожна з утворених формул дає одну і ту саму множину розв'язків. Зручним виявляється також геометричний спосіб доведення рівності множин розв'язків за допомогою одиничного кола. Якщо різні формули на одиничному колі дають однакові множини точок, що зображують окремі розв'язки рівняння, то ці множини рівні. Проте така геометрична інтерпретація можлива тільки тоді, коли періодом функції, що входить до лівої частини рівняння $f(x) = 0$ (не обов'язково найменшим додатнім), є число 2π.

8.7.Розв'язування рівнянь виду дробів

Увагу учнів потрібно звернути на те, що часто тригонометричні рівняння подають у вигляді дробів, наприклад, $\frac{\sin x tgx}{1-\cos x} = \frac{9}{4}$. При зведенні рівняння з дробовими членами до спільного знаменника ми теж дістанемо дробове рівняння.

Після перенесення всіх членів в таких рівняннях в одну якусь частину їх зводять до вигляду $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, де $f(x)$ і $\varphi(x)$ є тригонометричні функції невідомого аргументу вже без дробових членів.

Як відомо з алгебри, звільнення від знаменника, який містить невідоме, можливе лише після доведення, що знаменник не дорівнює нулю, бо інакше після звільнення від знаменника можна дістати рівняння не рівносильне даному. Отже, не можна погодитися з рекомендацією: коли в даному рівнянні є знаменник, який містить невідоме, то його відкидаємо, а чисельник прирівнюємо до нуля і розв'язуємо одержане рівняння.

Наприклад. Розв'язати рівняння: $\frac{\cos x}{1+\sin x} = 2 - \frac{\sin x}{\cos x}$.

Розв'язання: $\frac{cos^2 x - 2\sin x \cos x - 2\cos x + \sin x + sin^2 x}{(1+\sin x)\cos x} = 0$;

$\frac{(1-2\cos x)+\sin x(1-2\cos x)}{(1+\sin x)\cos x} = 0$;

$\frac{(1-2\cos x)(1+\sin x)}{(1+\sin x)\cos x} = 0$.

Рівняння $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ можна розглядати як $f(x)\frac{1}{\varphi(x)} = 0$, тобто як добуток функцій, що дорівнює нулю: $f_1(x) = f_2(x) = 0$. У таких випадках кожний із співмножників може дорівнювати нулю: $f(x) = 0$ і $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$ тобто $\varphi(x) \to \infty$.

Отже корені такої системи треба шукати в двох рівняннях: $f(x) = 0$ і $\varphi(x) \to \infty$.

Таким чином, при розв'язуванні цієї системи тригонометричних рівнянь, яка являє собою дріб $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, можливі такі випадки:

1) якщо корені рівняння $f(x) = 0$ не будуть коренями знаменника, тобто $\varphi(x) \neq 0$, - в цьому випадку корені чисельника $f(x) = 0$ є коренями даного рівняння.

2) якщо корені чисельника $f(x) = 0$ перетворюють знаменник у нуль, тобто і $\varphi(x) = 0$, ми дістаємо $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{0}$ – неозначеність. Такі значення x, які одночасно перетворюють і чисельник, знаменник у нуль, не можна вважати коренями рівняння.

3) якщо корені знаменника $\varphi(x) \to \infty$ не перетворюють чисельник $f(x)$ у нескінченність, тобто при тих самих коренях $f(x) \neq \infty$, то ці корені є коренями даного рівняння.

У наведеному рівнянні знаменник $\cos x(1 + \sin x)$ при довільному значенні x не перетворюється в нуль. Справді, $\cos x \neq 0$, бо тоді було б $\frac{0}{2} = \frac{0-1}{0}$, а $1 + \sin x$ не може дорівнювати нулю. Отже, корені чисельника будуть коренями рівняння:

$$(1 - 2\cos x)(1 + \sin x) = 0;$$

1) $1 - 2\cos x = 0; \cos x = \frac{1}{2};\ x_1 = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$.

2) $1 + \sin x = 0;\ x_2 = \pi n + (-1)^n \frac{3\pi}{2}$.

Другий корінь при непарних значеннях n не задовольняє рівняння.

9.Схема розв'язування тригонометричних рівнянь

Для розв'язування тригонометричних рівнянь, відмінних від найпростіших, учням доцільно буде подати схему розв'язування тригонометричних рівнянь:

Схема розв'язування тригонометричних рівнянь
• Намагаємося всі тригонометричні функції звести до одного аргументу. • Якщо це вдалося, намагаємося звести всі тригонометричні вирази до однієї функції. • Якщо до одного аргументу звести вдалося, а до однієї функції – ні, то пробуємо звести рівняння до однорідного. • В інших випадках переносимо всі члени рівняння в одну частину і намагаємося дістати добуток або використовуємо спеціальні прийоми розв'язування.
Якщо в тригонометричне рівняння входять тангенс, котангенс, дріб, корінь парного степеня або логарифм, то розв'язування рівняння починаємо з області визначення і слідкуємо за рівносильністю перетворень або використовуємо рівняння – наслідки. У такому випадку потрібна перевірка.

Розглянемо застосування даної схеми.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

Розв'язання. Намагаємося всі тригонометричні функції звести до одного аргументу. Маємо: $cos^2x - sin^2x - 5sinx - 3 = 0$. Тепер всі тригонометричні вирази зведемо до однієї функції – синус.

$1 - sin^2x - sin^2x - 5\sin x - 3 = 0$;

$2sin^2x - 5\sin x - 3 = 0$ отримали алгебраїчне рівняння, розв'язавши яке матимемо: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$.

Відповідь: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$.

Слід звернути увагу учнів на те, що зведення до одного аргументу далеко не завжди є такою очевидною процедурою.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $sin^2x - sin2x = 3cos^2x$.

Розв'язання. Зводимо всі тригонометричні функції до одного аргументу: $sin^2x - 2\sin x cos\,x = 3cos^2x$.

Зауваження 1. Бажано обговорити з учнями ті проблеми, які виникають при спробі звести всі тригонометричні функції до однієї. sin^2x і cos^2x між собою пов'язані ($sin^2x + cos^2x = 1$). В даному рівнянні є синус і косинус в першому степені. Спроба виразити всі тригонометричні функції через одну приводить до виразів з квадратним коренем, тобто до ірраціонального рівняння. В процесі розв'язування ірраціонального рівняння доводиться враховувати область визначення, обмеження, які виникають в процесі рівноправних перетворень, або виконувати перевірку одержаних результатів. Це ускладнює розв'язування, тому краще уникати зведення до ірраціональних рівнянь.

Спробуємо використати третій рядок таблиці, тобто звести це рівняння до однорідного. Звертаємо увагу учнів на те, що в даному рівнянні перший, останній і середній члени мають степінь 2.

Доцільно нагадати означення однорідного рівняння, яке давалося раніше.

Оскільки рівняння однорідне, його можна розв'язати діленням обох частин на sin^2x або cos^2x.

Зауваження 2. Необхідно обговорити з учнями, що ділення обох частин рівняння на вираз з невідомими може вести до втрати коренів. Наприклад, якщо рівняння $x^2 = x$ поділити на x (навіть з обмеженням $x \neq 0$), то одержимо єдиний корінь $x = 1$. Але дане рівняння має два кореня: $x = 1, x = 0$. Таким чином, ділення обох частин рівняння з невідомими – дуже підступна операція. Сторонні корені завжди можна відсіяти перевіркою, але втрату кореня не відновиш.

Як же все-таки виконати ділення без втрати коренів? Для цього досить розглянути два випадки:

1) вираз, на який ділимо, дорівнює нулю;

2) вираз, на який ділимо, не дорівнює нулю.

Повернемось тепер до розв'язування даного тригонометричного рівняння:

1) якщо $\cos x = 0$, то з рівняння маємо, що і синус дорівнює нулю. Ми знаємо, що одночасно синус і косинус не можуть дорівнювати нулю, бо це суперечить тотожності $sin^2x + cos^2x = 1$;

2) якщо $\cos x \neq 0$, то обидві частини рівняння ділимо на cos^2x і маємо рівняння рівносильне даному: $tg^2x - 2tgx = 3$. Розв'язавши дане рівняння отримаємо $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ або $x = arctg3 + +\pi n.$

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = arctg3 + +\pi n.$[21]

10.Запобігання математичним помилкам учнів при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

Педагогічний досвід показує, що деякі учні нерідко припускаються помилок як в розумінні математичних понять, так і в способах та методах розв'язування рівнянь.

Однією з причин появи учнівських помилок є формальне, поверхневе заучування навчального матеріалу, невміння бачити в ньому принципову відмінність від попереднього. Несвоєчасне виявлення прогалин у знаннях школярів призводить до поступового «запускання» знань. Складається ситуація, коли учень перестає розуміти вчителя, втрачає інтерес до навчання, віру в себе і на тривалий час залишається пасивним спостерігачем.

Помиляється учень один раз: $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$, потім – другий: $sin^2x=sin^2x+sin^2y$. Учитель виправляє помилки або один з учнів дає правильну відповідь. При такому підході учень, який припустився помилки, не завжди усвідомлює її суть, безапеляційно погоджується з виправленням і через деякий час знову повторює її.

Щоб уникнути помилок, необхідно систематично виявляти прогалини в знаннях учнів, визначати причини допущення їх, вести облік поширених індивідуальних помилок.

Знання вчителя типових учнівських помилок, причини їх виникнення дає можливість передбачити і попередити їх появу.

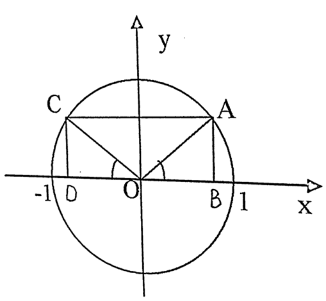
Розв'язуючи тригонометричні рівняння, учні загалом непогано справляються з тотожними перетвореннями, хоча й припускаються незначних помилок. Серйозні помилки трапляються при розв'язанні найпростіших тригонометричних рівнянь виду: $\sin x=a, \cos x=a, |a|\le 1; tgx=b$. Так, наприклад, загальний розв'язок рівняння $\sin 2x=1$ учні записують у вигляді $x=(-1)^k \arcsin\frac{1}{2}+2\pi k$, замість $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. Для рівняння $tg2x=\sqrt{3}$ з'являється корінь $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ замість

$2x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k.$

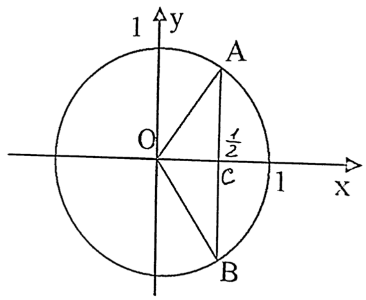
Розв'язання тригонометричних рівнянь деколи закінчується частковим розв'язком. Наприклад, розв'язуючи рівняння $\sin x - \cos x = 0$, як правило, учні дають відповідь: $x = \frac{\pi}{4}$ замість $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Для $tg(x - 60°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ вони записують $x - 60° = \frac{\pi}{4}$ замість $x - 60° = 45° + 180°k$.

Щоб не виникали подібні помилки при розв'язуванні тригонометричних рівнянь, в першу чергу потрібне не формальне, а глибоке й усвідомлене засвоєння способів розв'язування найпростіших рівнянь, проілюстрованих на одиничному колі.

<table>
<tr><td>Рівняння</td><td>Розв'язання</td></tr>
<tr><td>а) $\sin x = a$,
$-1 \le a \le 1$,
$a = \frac{1}{2}$.


б) $cosx = a$,
$-1 \le a \le 1$,
$a = \frac{1}{2}$</td><td>$AO = OC = 1, AC = CD = O = \frac{1}{2}$,
$\angle AOB = \angle COD = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$,
$\angle COB = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6}$,
$x_1 = \arcsin\frac{1}{2} + \pi \cdot 2k = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$,
$x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k = -\arcsin\frac{1}{2} + \pi(2k+1)$
$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$,
$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$,
$n = 2k$, або $n = 2k + 1$.
$OA = OB = r = 1, OC = 0{,}5$,
$\angle OAC = \frac{\pi}{6}$,
$\angle AOC = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$,
$\angle BOC = -\frac{\pi}{3}$,</td></tr>
</table>

	$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$

Бувають помилки іншого типу, що пов'язані з рівняннями виду:

$$sin^2 x = a;\ cos^2 x = a;\ tg^2 x = a.$$

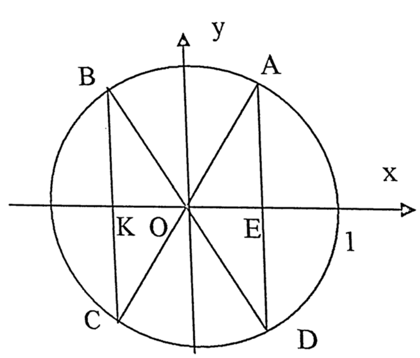
Ось приклади неправильно розв'язаних рівнянь:

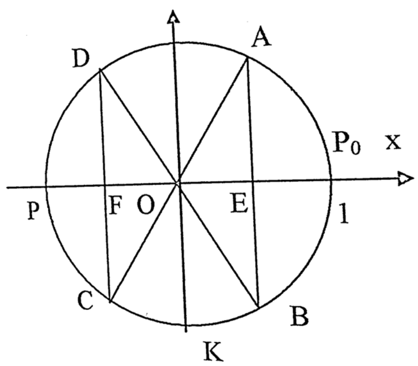
а) оскільки $sin^2 x = \frac{3}{4}$, то $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$;

б) із рівняння $cos^2 x = \frac{1}{4}$ знаходимо $x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n.$

Для попередження таких помилок корисно проілюструвати розв'язання цих рівнянь на одиничному колі.

Щоб уникнути помилок при розв'язуванні рівнянь, доцільно пропонувати учням аналізувати розв'язані рівняння, в яких у процесі перетворення лівої і правої частин порушена рівносильність.

Рівняння	Розв'язання
$a)\ sin^2 x = \frac{3}{4};$ 	$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};$ $AE = BK = \frac{\sqrt{3}}{2};$ $OE = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2};$ $\angle OAE = \frac{\pi}{6};$ $\angle AOE = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3};$

б) $cos^2 x = \frac{1}{4}$;  	$\angle DOE = -\frac{\pi}{3}$; $A\left(0{,}5; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), D\left(0{,}5;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$ $\cos x = \pm\frac{1}{2}$; $OA = OB = r = 1$; $OE = 0{,}5$; $\angle AOE = \frac{\pi}{3}$; $\angle AOE = \angle DOF - \angle BOE = \angle COF$; $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n;\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi n$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

11.Комп'ютер як засіб навчання

11.1.Типи навчальних програм

Одним з пріоритетних напрямків вдосконалення процесу навчання у школі є його інформатизація.

Ефективність процесу навчання з використанням нових інформаційних технологій навчання (НІТН) забезпечується раціональним досягненням дидактичних цілей. Суттєвою дидактичною особливістю навчання за допомогою ЕОМ є встановлення безпосередніх діалогів між учнем і машиною, або трикутника учень - комп'ютер – учитель, які допомагають розібратися в труднощах, що виникають у процесі вивчення предмета, уникаючи стресових ситуацій, організувати самостійне розв'язування задач, і дозволяють вчителеві спостерігати та контролювати якісний стан навчання.[10]

Досвід показує, що при вивченні окремих тем шкільного курсу можна використовувати такі типи навчальних програм.

Демонстраційні програми, в яких спочатку подається виклад необхідної теорії, а потім наводяться приклади розв'язування задач. Такі програми корисні при дослідженні функцій і побудові їх графіків, при вивченні правил диференціювання функцій, при вивченні тригонометричних рівнянь та нерівностей та інше.

Контролюючі програми, в яких закладено систему оцінювання знань, умінь і навичок учнів. За їхньою допомогою можна дати консультацію учню, вказати на допущені помилки, виправити відповідь, підказати, і в разі потреби зробити аналіз наявних знань та вмінь. Для здійснення якісного контролю і корекції знань програмою, можна передбачити багатоваріантність у межах заданого типу вправ, які в свою чергу, мають бути різнорівневими, що відповідає ідеї диференціації навчання. За допомогою таких програм можна проводити різнорівневий тестовий контроль.

Обчислювальні програми призначені для проведення обчислень при вивченні границь, похідних, інтегралів та ін. Застосування цих програм на уроках – практикумах дозволяє проводити найпростіші обчислювальні експерименти, які допомагають осмислити та краще зрозуміти суть теорії та проілюструвати її застосування до розв'язування практичних задач.

Тренуючи програми розраховані на формування стійких зв'язків між знаннями та навичками шляхом повторення та практичного підкріплення.

Дослідницькі програми призначені для самостійної творчої діяльності учнів. До них слід віднести дослідження математичних моделей за допомогою вивчення властивостей функцій, диференційних рівнянь та ін. Розгляд математичних моделей у навчальному процесі виховує уміння проникати у суть явищ природи, помічати закономірності у навколишньому світі.

Отож, в умовах використання інтерактивної комп'ютерної графіки, учні оперують не лише описовим або аналітичним образом моделі, а її графічним образом – зображенням на екрані, який може бути представлений динамічним об'єктом, що змінюється відповідно до зміни умов або параметрів моделі. Представлена в такому вигляді інформація сприймається учнями більш повно, адже в умовах шкільного навчання живе споглядання певною мірою здійснюється через наочність. В учня створюється певний образ, з яким він продовжує працювати, а операції, що здійснюються потім над об'єктом, переносяться на уявний образ. Таким чином, процес дослідження різних видів моделей активізує та розвиває образне мислення учнів у них формується вміння розв'язувати задачі даного типу у разі зміни початкових умов, а також переносити набутий досвід у вирішенні реальних задач, адже вміння передбачати хорошу орієнтацію в нових умовах і виступає не лише як стереотипне повторення минулого досвіду, а й включає деякі елементи кмітливості, відчуття ситуації, творчого підходу до вирішення поставлених завдань.[10]

11.2.Переваги і недоліки комп'ютера як засобу навчання

Проведений в попередніх розділах аналіз особливостей і напрямків використання ЕОМ як одного із можливих і найбільш цікавих засобів навчання, дозволяє акцентувати увагу на позитивних і негативних сторонах впровадження комп'ютерних технологій в навчальний процес.

За допомогою комп'ютерів можна реалізувати програмоване та проблемне навчання, при цьому вчитель повинен провести вступну і підсумкову бесіди за темою уроку.

До позитивних моментів роботи учнів з ЕОМ належать:

- підвищення інтересу й мотивації навчання;
- індивідуальність навчання;
- об'єктивність контролювання;
- істотна активізація навчання, змагання учнів з машиною і самим із собою;
- розширення інформаційного і тестового «репертуарів»;
- посилення доступу учнів до «банків інформації»;
- прагнення отримати вищу оцінку.

ЕОМ розвиває в учнів уміння планувати, раціонально будувати трудові операції, точно визначати цілі діяльності. У школярів формуються акуратність, точність, обов'язковість.

До негативних моментів роботи учнів з ЕОМ належить те ,що учні швидко стомлюються, ЕОМ погано впливає на зір і нервову систему, в учнів не розвивається здатність чітко й образно висловлювати свої думки, швидко формуються егоїстичні нахили людини, загострюється індивідуалізм, сповільнюється виховання колективізму, взаємодопомоги та інше.

Недоліки проявляються зокрема, при діалоговій взаємодії учнів з комп'ютером і при наданні допомоги учнів. І те, і інше має спільну основу: недостатньо чіткий аналіз відповіді учня. Порушення психологічних принципів взаємодії комп'ютера з учнями частіше всього появляється в наступному.

Надмірна допомога має такі прояви: в результаті надмірної регламентації діяльності учня, стикається «поля самостійності» пошуку рішень, так як при найменшій помилці учня надається допомога. У учня виникає почуття протесту, він намагається заплутати ЕОМ, вводить помилкові, навіть недоцільні повідомлення для того, щоб «показати» комп'ютеру, що той не все знає. Часом учні відмовляються працювати з такою системою, рахуючи, що комп'ютер принижує їх гідність.

Недостатня допомога. Подібне явище звичайно спостерігається в навчальних системах з непрямим керуванням учбовою діяльністю. Тут навчальний вплив видається в основному у формі евристичних рекомендацій, дуже загальних, і тому вони тяжко приміняються в конкретній ситуації. В таких випадках реакція учня часто проявляється у вигуках: «знаємо це і без тебе, але як це зробити?».

Неадекватність оціночних суджень. Вона викликана тим, що не враховується історія навчання. Наприклад, репліка «ти молодець», яку комп'ютер видає учневі, який дав відповідь після багатьох помилкових спроб, сприймається учнем як глузування.

Недостатня мотивація допомоги. ПЕОМ вказує, як потрібно зробити, але не пояснює, чому саме так, а не інакше. Комп'ютер може вказувати лише наступний крок, але не розкриває напрямок пошуку, прийом його розв'язування, його теоретичні причини.

Надмірна категоричність. Вона викликає негативні реакції учнів у тих умовах, коли вони знаходять нешаблований розв'язок, який навчальною програмою не передбачений. Учень відчуває свою перевагу і ігнорує наступні вказівки ПЕОМ.

Отже, арсенал учителя для ефективної організації процесу навчання надзвичайно великий. Потрібно оптимально підходити до вибору методів і засобів навчання, ураховуючи мету і завдання уроку, обсяг і складність навчального матеріалу, рівень підготовленості та працездатності учнів.[10]

11.3.Методичні рекомендації до розробки навчальної програми

Процес навчання підтримується багатьма програмами, причому їх кількість значно впливає на ефективність навчання. Разом з тим навряд чи потрібно включати всі програми, що використовуються в учбовому процесі, до складу навчальних програм. Остання повинна включати в себе лише ті програми, які безпосередньо забезпечують керування учбовою діяльністю. Іншими словами, навчаюча програма являє собою деяку надбудову над іншими програмами (наприклад, управління базами даних), яка керує ними з метою досягнення учбових цілей.

На мою думку, можна виділити два типи комп'ютерного навчання. Перший тип характеризується безпосередньо взаємодією учнів з комп'ютером. Він визначає те завдання, яке пропонується учнем, оцінює правильність та надає допомогу. Тут навчання проходить, як правило, без вчителя. Його допомога потрібна лише тоді, коли виникає непередбачена ситуація, яку комп'ютер не може подолати через недоліки навчальної програми.

Другий тип характеризується тим, що з комп'ютером взаємодіє не учень, а вчитель. Комп'ютер допомагає вчителю здійснювати навчальний процес. Наприклад, він видає результати виконання учнями контрольних завдань з врахуванням зроблених помилок, витраченого часу. Це програми допоміжного типу. Використовуються протягом 10-15 хв для ілюстрацій.

Таке навчання сприяє активному включенню учнів в навчальний процес, активізації їх уваги, підготовці учнів до сприймання нового матеріалу, з допомогою різних засобів сприяє грунтовному запам'ятовуванню. Крім того, зберігається час вчителя при підготовці і проведенні уроків.

Загальні вимоги до навчальних програм – це ефективність навчання. Багаті демонстративні можливості і високий ступінь інтерактивності системи самі по собі не можуть служити основою для того, щоб рахувати навчаючу програму корисною. Ефективність програми визначається тим, наскільки вона забезпечує передбачені цілі навчання, як найближчі, так і віддалені, наприклад, розвиток здібностей.

Можна виділити ряд психолого – педагогічних вимог, яким повинна задовольняти навчаюча програма:

1) дозволяти будувати зміст навчальної діяльності з врахуванням основних принципів педагогічної психології і дидактики;
2) допускати реалізацію різних способів керування учбовою діяльністю;
3) стимулювати різні види пізнавальної активності учнів;
4) враховувати у змісті навчального матеріалу і учбових задач вже отримані знання, вміння і навички учнів;
5) стимулювати дійову мотивацію учнів до навчання, підтримувати та розвивати учбові мотиви, цікавість учнів до пізнання;
6) забезпечити діалог як зовнішній, так і внутрішній, в свою чергу виконуючи такі функції: активізувати пізнавальну діяльність шляхом включення їх в процес міркування; моделювати сумісну діяльність; сприяти розумінню тексту; будувати допоміжні навчальні дії у відповідності із віковими особливостями та із врахуванням індивідуальних здібностей учнів; не вимагати додаткових знань для вводу відповіді;
7) забезпечити педагогічно обгрунтовану допомогу у розв'язуванні учбових програм;
8) надавати допомогу учням з врахуванням характеру його ускладнення і моделі;
9) інформувати учня про мету навчання, повідомляючи йому на скільки він просунувся в її досягненні, його основні недоліки;
10) допускати індивідуалізацію навчання;
11) адекватно використовувати всі способи надання інформації;
12) вести діалог, який керується не тільки комп'ютером, але й учнем, дозволяючи останньому задавати питання;

13) дозволяти учню вхід і вихід з програми в будь який момент, забезпечуючи доступ до попередньо вивченого матеріалу;

14) допускати модифікацію, внесення змін в способи управління учбовою діяльністю.[4]

Одні з цих вимог можуть і повинні бути реалізовані в будь якій навчальній програмі, другі – в деяких системах, що допускають діалог, а третій – в інтелектуальних навчальних системах.

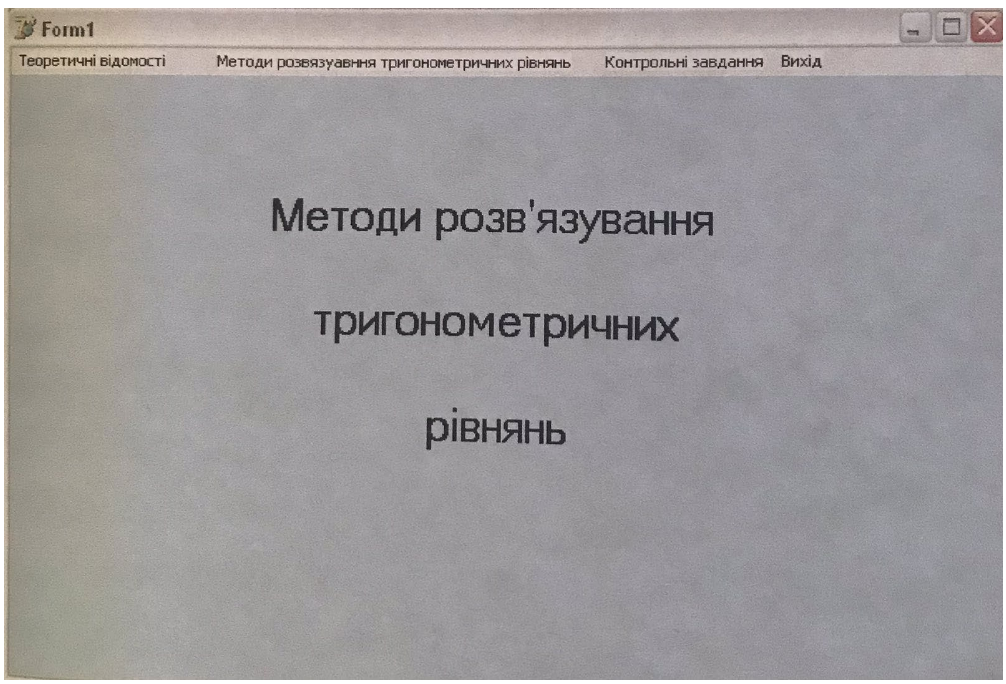
11.4.Навчально – контролююча програма

Навчально – контролююча програма «Методи розв'язування тригонометричних рівнянь» написана на мові програмування Delphi.

Текст програми міститься у файлі project1. Для запуску програми в першу чергу потрібно запустити Windows, Delphi, а потім запускається файл project1. В програмі використовуються вбудовані модулі.

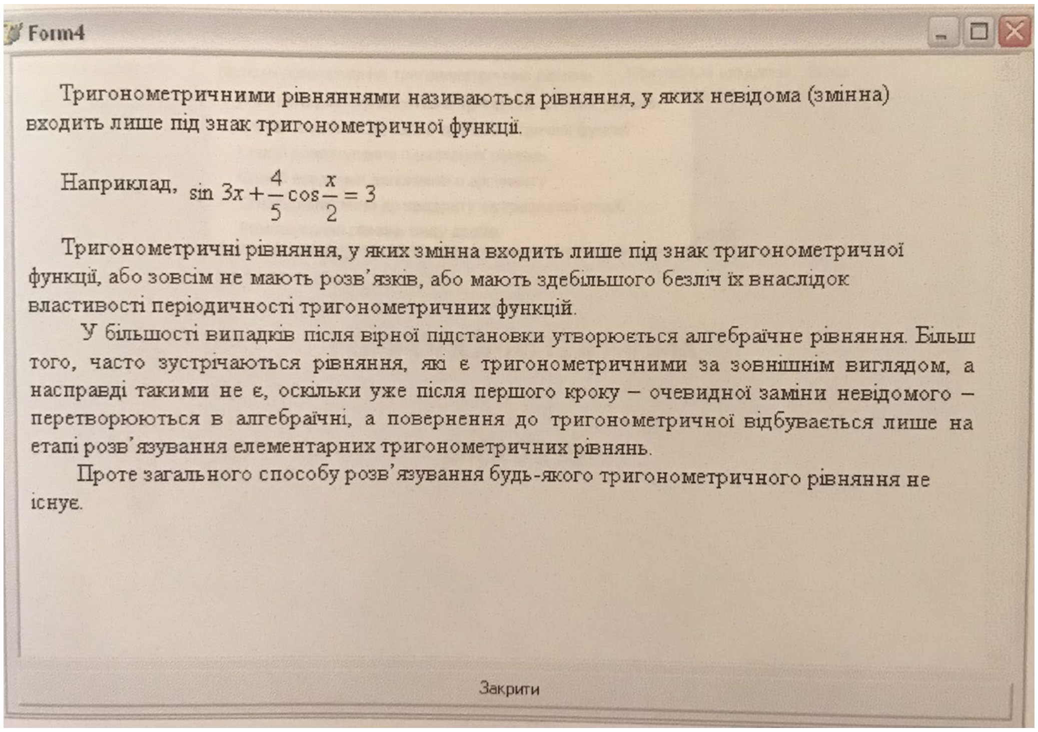
У даній навчально – контролюючій програмі учню дається можливість самостійно обрати метод розв'язування тригонометричного рівняння, з яким він хоче ознайомитися.

На екрані висвітлюється меню (мал.1).



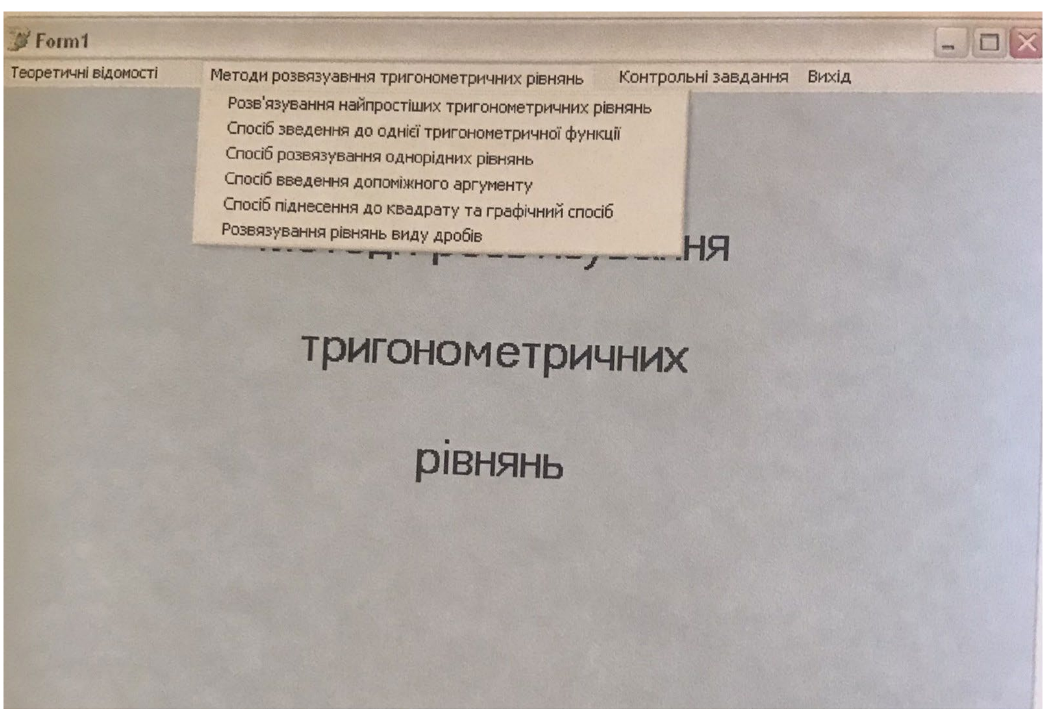
(мал.1)

За допомогою маніпулятора «миш» учень обирає один із пунктів, які зазначені у верхній частині робочої програми. У підпункті «Теоретичні відомості» учень має змогу прочитати про саме тригонометричне рівняння та методи їх розв'язування (мал.2).



У нижній частині робочої області знаходиться кнопка під назвою «Закрити», яка закриває дану форму і повертає до попередньої форми.

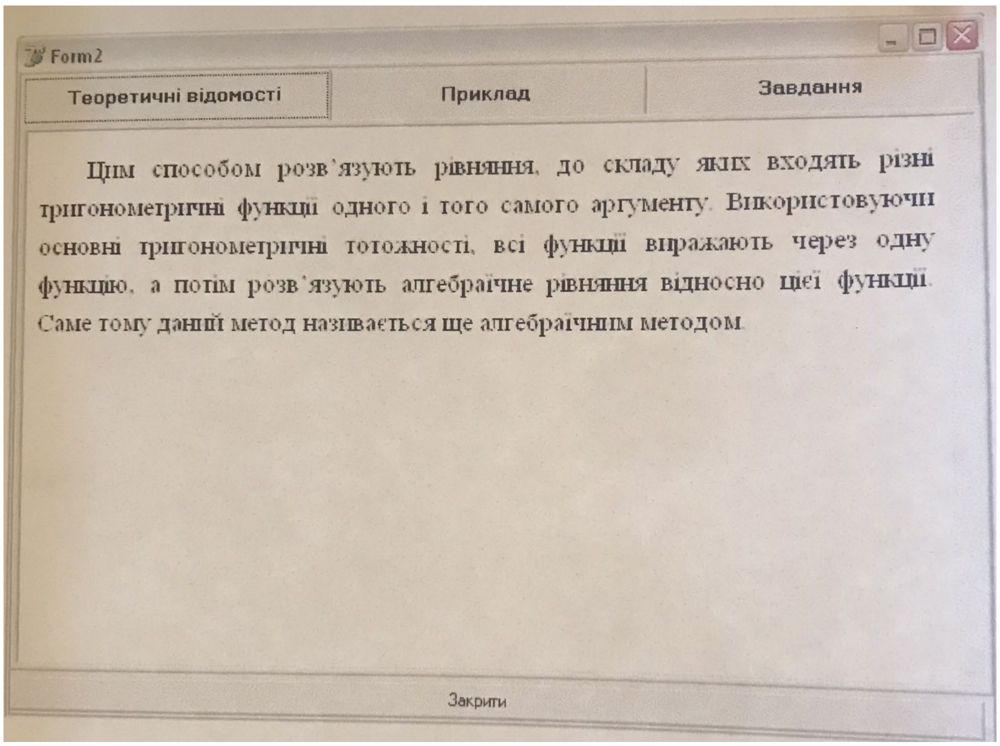
У підпункті «Методи розв'язування тригонометричних рівнянь» учень має змогу ознайомитися із будь яким методом розв'язування тригонометричних рівнянь, який його цікавить (мал.3).



Тут за допомогою клавіш «вверх», «вниз» чи маніпулятора «миші» учень вибирає спосіб розв'язування тригонометричних рівнянь, які там перераховані.

Якщо учень обрав якийсь метод, то на екрані з'явиться меню у вигляді блокнота із закладками: теоретичні відомості, приклад, завдання.

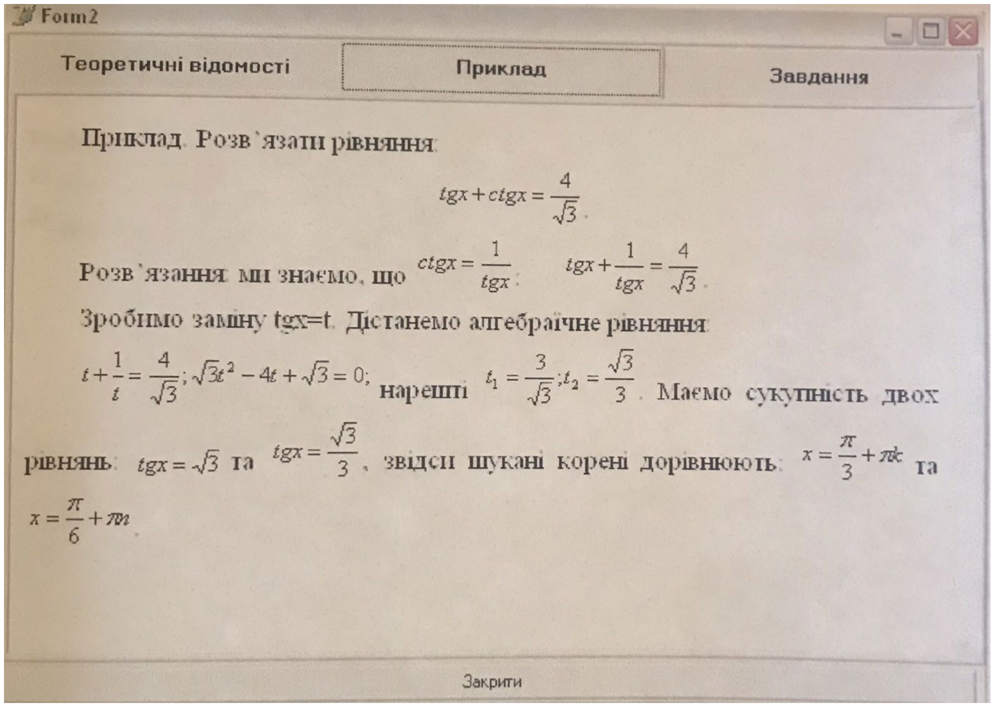
На закладці «Теоретичні відомості» учень може прочитати про застосування даного методу до розв'язування тригонометричних рівнянь, випадки, коли застосовується даний метод (мал.4).



(мал.4)

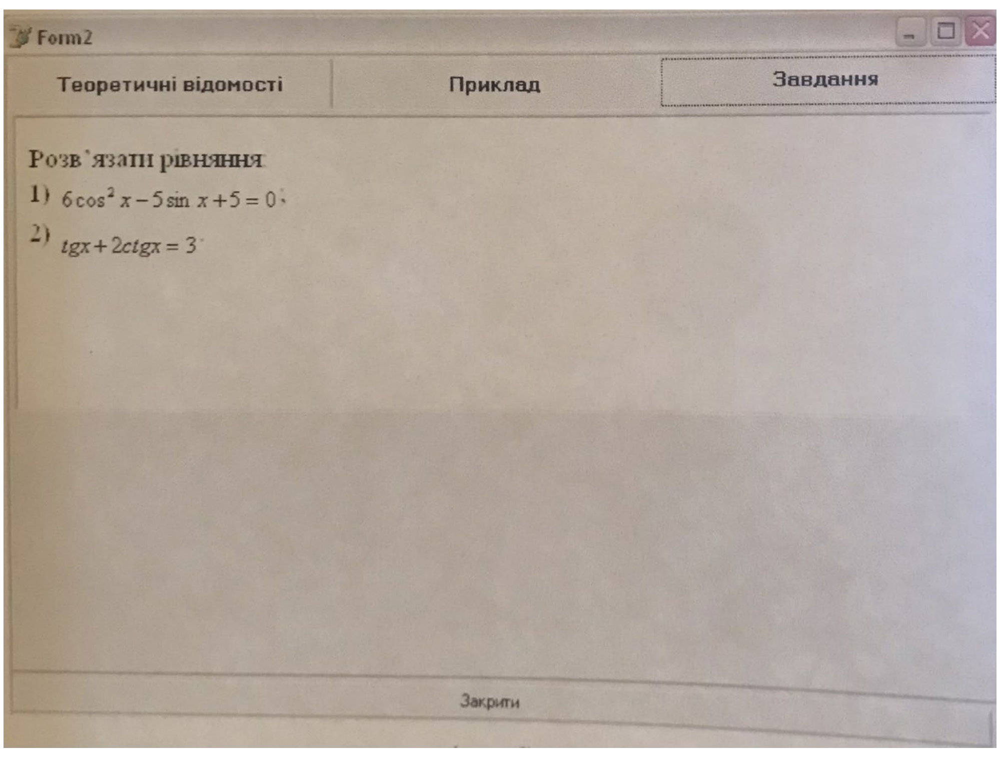
Внизу також знаходиться кнопка «Закрити», яка закриває дану форму і повертається до попередньої.

Далі розміщена закладка під назвою «Приклад». Щоб побачити що міститься на даній закладці, учню потрібно за допомогою маніпулятора «миш» натиснути на назві «Приклад» і на екрані з'явиться приклад, який розв'язаний даним методом (мал.5).



(мал.5)

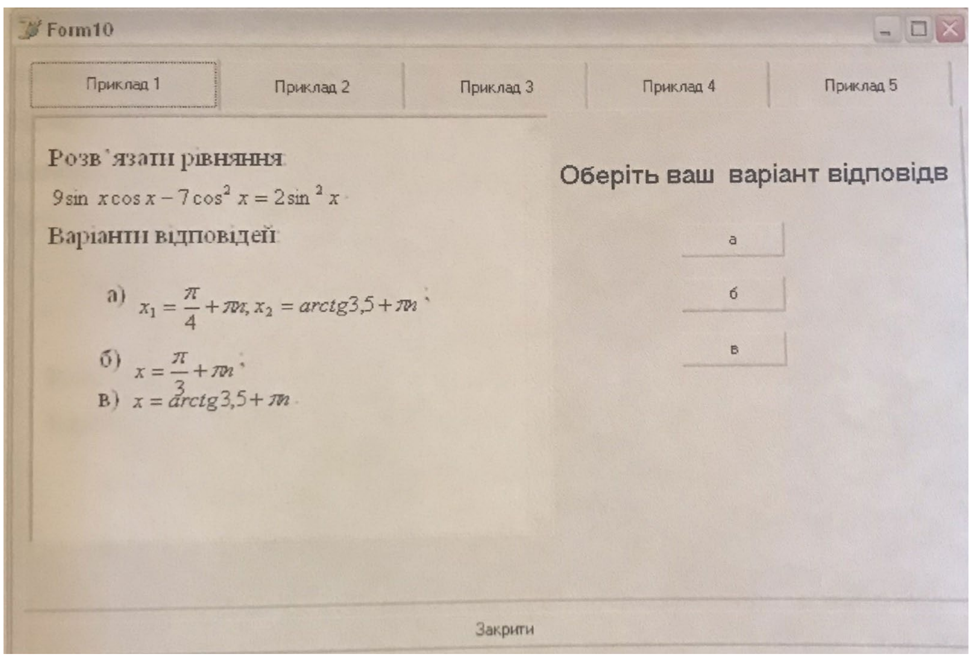
Аналогічним методом учень може перейти на закладку «Завдання», де знаходяться приклади – завдання, які можна розв'язати даним методом. Таких рівнянь є три (мал.6).



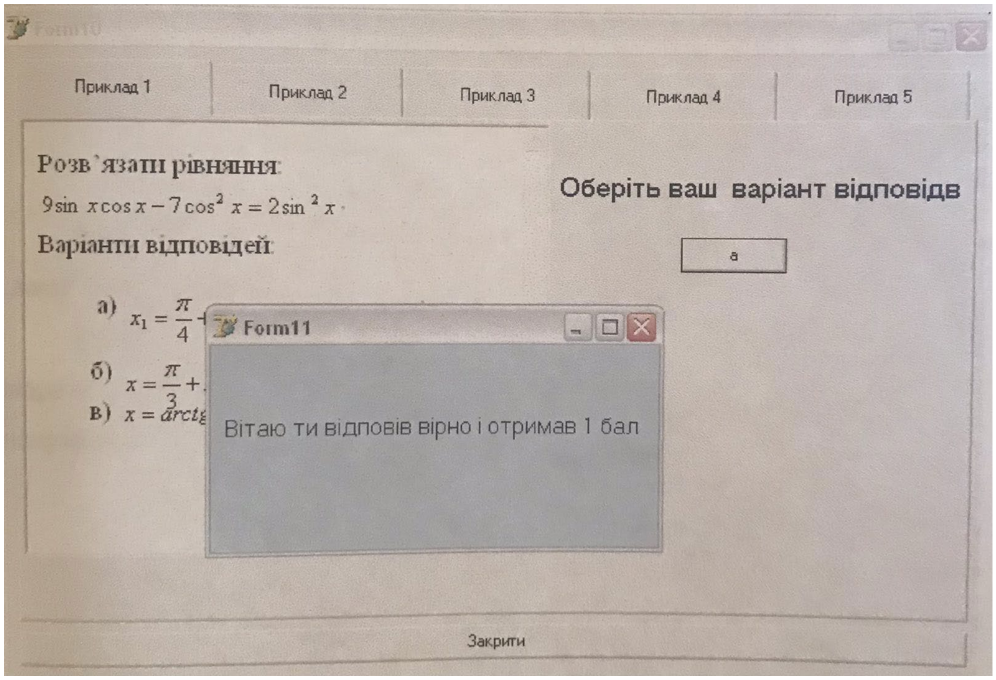
(мал.6)

Щоб повернутися в початкове меню, учню потрібно натиснути на кнопці «Закрити», після цього дана робоча область закриється і знову з'явиться початкове меню.

Дана програма також містить підпункт «Контрольні завдання», де знаходяться приклади та варіанти відповідей до них (мал.7). Учень розв'язує дане рівняння на чернетці та обирає вірний варіант відповіді. Код програми запрограмований так, що обравши один із варіантів відповідей, учень не може вже обрати інший варіант відповіді. Якщо обрана відповідь вірна, то учню видається вікно в якому написано, що він отримав один бал, бо відповів вірно. В протилежному випадку повідомлення буде іншого змісту, а саме, що учень відповів не вірно (мал.8).

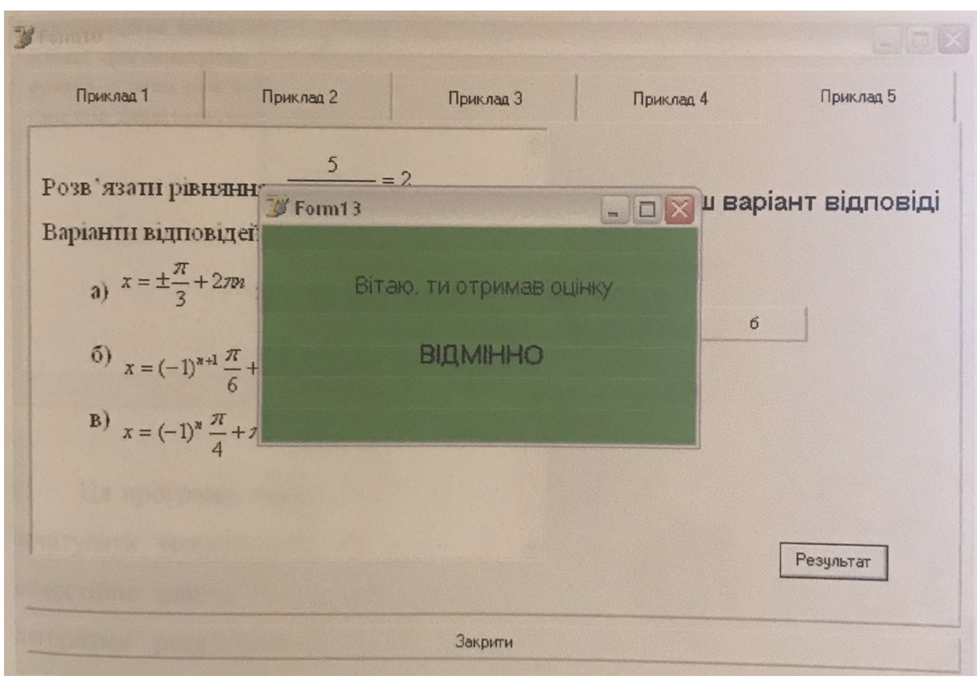


(мал.7)



(мал.8)

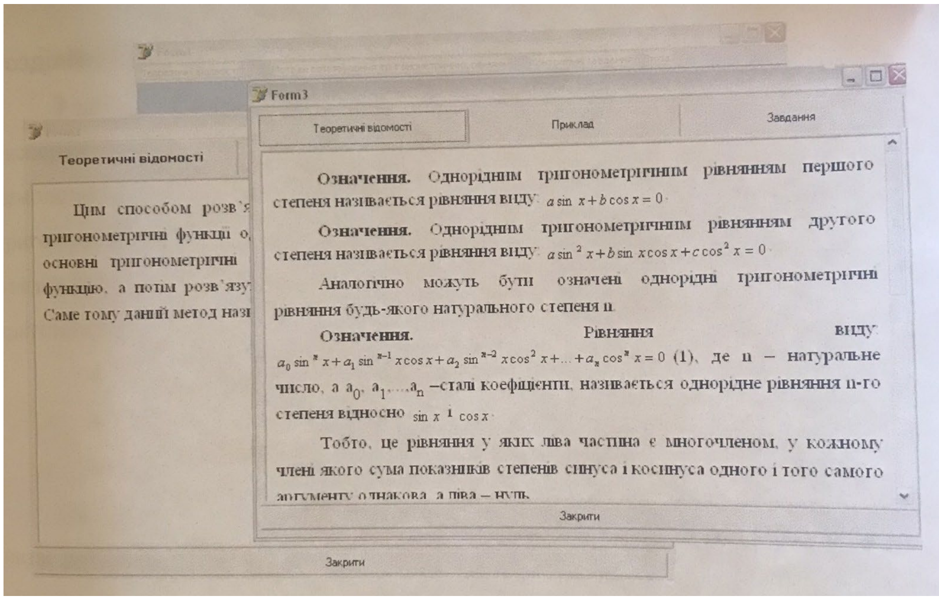
Коли учень розв'яже п'яте (останнє) завдання, то йому потрібно буде натиснути кнопку, яка знаходиться внизу форми під назвою «Результат». Натиснувши її учень дізнається свою оцінку за розв'язані приклади, а саме – відмінно, добре, задовільно чи незадовільно (мал.9).



(мал.9)

Щоб вийти з даної програми учню достатньо натиснути маніпулятором «миш» на кнопку «Вихід» на основній формі.

Однією з особливостей даної програми є те, що учень може працювати відразу з кількома методами розв'язування тригонометричних рівнянь, наприклад, для порівняння, або під час виконання тестів (мал.10).



(мал.10)

Ця програма полегшує роботу на уроці вчителя. Учителю не потрібно зачитувати теоретичний матеріал, адже при бажанні учень може легко самостійно знайти та прочитати даний матеріал. У програмі вже описані алгоритми розв'язування прикладів кожного учня і за правильно розв'язане тригонометричне рівняння учню ставиться бал, а в кінці уроку за відповідну кількість балів ставиться відповідну оцінку.

Звичайно, в цю програму можна дописати різні приклади, теоретичний матеріал, в залежності від теми, яку вчитель хоче подати.[4]

Висновок

В даній бакалаврській роботі розглянуто особливості процесу навчання учнів розв'язуванню тригонометричних рівнянь.

Навчання учнів розв'язувати тригонометричні рівняння, що виконують різні функції у навчальному процесі, зокрема навчальну, виховну, контролюючу, є одним з основних завдань викладання математики в середній школі. В першому розділі роботи були описані основні методи розв'язування тригонометричних рівнянь.

Виклад матеріалу ілюструється достатньою кількістю рівнянь, переважну кількість яких взято з підручників Шкіль М.І., Литвиненко В.Н., Мерзляк А.Г. В тексті наведено переважно один спосіб розв'язання рівняння, хоча їх можна застосувати декілька.

Експеримент показав, що для розв'язування тригонометричних рівнянь учням необхідно добре знати всі тригонометричні тотожності та властивості тригонометричних функцій, а також теоретичний матеріал, бо учні інколи розгублюються в пошуку методу розв'язування певного рівняння.

Комп'ютер забезпечує оперативний контроль рівня знань всього класу на кожному уроці дозволяє вчителю швидко оцінювати результати навчання і виробляти адекватні міри напрямлені на його поліпшення.

З метою реалізації теоретичних положень роботи розроблена навчально – контролююча програма «Методи розв'язування тригонометричних рівнянь». В ній показані наступні переваги комп'ютерної технології навчання:

- Наявність розробленої програми дає змогу учням, які отримають незадовільну оцінку, додатково опрацювати тему в позаурочний час без втручання вчителя;
- Учні з підвищеною зацікавленістю ставляться до ознайомлення з методами розв'язування прикладів;
- Достатньо інтенсивно працюють на уроці всі учні класу;

- Кожен з учнів працює з найбільш доступним для нього темпом, в результаті чого деякі учні встигають опанувати декілька методів;
- Всі учні в кінці уроку отримують реальну оцінку своїх знань.

Запропонована в даній роботі методика використання розробленої програми дозволяє максимально використати її позитивні сторони.

Список використаної літератури

1. Апостолова Г. В. Геометрія 9: дворівневий підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / Г. В. Апостолова. – К.: Генеза, 2009. 0 304 с.
2. Бабенко С. П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. ІІ семестр. Академічний рівень. // Бабенко С. П. – Харків: Основа, 2011. – 253 с.
3. Бевз Г. П. Математика: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз – К.: Генеза, 2010. – 254 с.
4. Веліховська А.Б. Використання нових інформаційних технологій у вивченні математики. // Математика в школах України 3, 2005//
5. Гальперіна А. Р. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Збірник завдань для контролю знань / А. Р. Гальперіна, І. О. Золотарьова.- Х.: Вид-во «Ранок», 2010. – 176с.
6. Істер О. С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики – 11 клас // О. С. Істер, О.І. Глобін, І.Є. Панкратова – К.: Центр навч.- метод. Літератури, 2011.-112с.
7. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997.
8. Кожеуров П. Я. Курс тригонометрии для техникумов / П. Я. Кожеуров. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет.лит., 1999.-296с.
9. Козко А. И. Задачи с параметрами и другие сложные задачи. – М.: МЦНМО, 2007. – 296с.
10. Кравченко Л. І. Персональний комп'ютер на уроці математики як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів. // Математика в школах України 2, 2044 //
11. Крамор В. С. Задачи с параметрами и методы их решения / В. С. Крамор. – М.: Оникс, 2007. – 416с.

12. Литвиненко В. Н. Практикум по елементарной математике. Алгебра. Тригонометрія. – М., Просвещение, 1997.
13. Математичні олімпіадні змагання школярів України:2007-2008 та 2008-2009: За ред. Б. В. Рубльова – Львів: Каменяр, 2010, - 549с.
14. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір – Х.:Гімназія, 2009. – 379с.
15. Мерзляк А. Г. Тригонометрія. Вчимося розв'язувати задачі // А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір – К.Генеза, 2008.-312с.
16. Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В. В. Мирошин. – М.: Єкзамен, 2009. – 286с.
17. Моторіна В. Г. Технології навчання математики в сучасній школі. Харків: 2001, - 262 с.
18. Нелін Є. П. Агебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. Для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. // Нелін Є. П., Долгова О. Є. – 2-ге вид., виправл. і доп. – Х.: Світ дитинства, 2006. – 416
19. Нелін Є. П. Адгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт.-навч. закладів. – 2-ге вид., виправ. і доп. – Х.: Світ дитинства, 2006.-448с.
20. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень / Є. П. Нелін. Х.: Гімназія, 2010. – 416с.
21. Орач Б. Г. Розв'язування тригонометричних рівнянь. // Математика 41, 2002 //
22. Резуненко В. О. Ярмак В. О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів. // Резуненко В. О., Ярмак В. О. – Х.: Вид.група «Основа» 2011. – 94с.
23. Роганін О. М. Тест – контроль. Алгебра і початки аналізу. 10 кл.: Поточне, тематичне та річне оцінювання.- Х.: Весна; ФОП Співак Т. К., 2009.

24. Сипченко Т. М. Календарно – тематичний план з математики. 5-11 класи / Т. М. Сипченко. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Хю: Видавництво «Ранок», 2011. – 128с.
25. Слепкань З. І. Методика навчання математики: Підр. для студ. мат. спец. пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000.
26. Тематичне планування // Математика в школах України 22-23, 2004 //
27. Титаренко О. М. 5770 задач з математики з відповідями. 2-ге вид.випр. – Харків: ТОРГСІНГ ПЛЮС, 2007. – 336с.
28. Титаренко О. М. Форсований курс шкільної математики: Навчальний посібник. – Х.: Торсінг, 2003. – 368с.
29. Токар Н. Г., Вельдбрехт Д. О. Сучасний урок математики. Який він? // Математика в школах України 9, 2004 //
30. Фурман М. С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. – Х.: Вид.група «Основа», 2010. – 159с.
31. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: Підруч.для 10кл. загальноосвіт.навч.закладів. // М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.: Зодіак – ЕКО, 2002. – 272с.

Додатки

```
program Project;

uses
  Forms,
  Unit1 in 'Unit1.pas' {Form1},
  Unit2 in 'Unit2.pas' {Form2},
  Unit3 in 'Unit3.pas' {Form3},
  Unit4 in 'Unit4.pas' {Form4},
  Unit5 in 'Unit5.pas' {Form5},
  Unit6 in 'Unit6.pas' {Form6},
  Unit7 in 'Unit7.pas' {Form7},
  Unit8 in 'Unit8.pas' {Form8},
  Unit9 in 'Unit9.pas' {Form9};

 {$R *.res}

 begin
   Application.Initialize;
   Application.CreateForm(TForm1, Form1);
   Application.CreateForm(TForm2, Form2);
   Application.CreateForm(TForm3, Form3);
   Application.CreateForm(TForm4, For4);
   Application.CreateForm(TForm5, Form5);
   Application.CreateForm(TForm6, Form6);
   Application.CreateForm(TForm7, Form7);
   Application.CreateForm(TForm8, Form8);
   Application.CreateForm(TForm9, Form9);
   Application.Run;
 end.
```

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, Menus, Unit2, Unit3, unit4, unit5, unit6, unit7, unit8, unit9, unit10,
  unit11, unit12, StdCtrls;

type
  TForm1 = class(TForm)
    MainMenu1: TMainMenu;
    N1: TMenuItem;
    N2: TMenuItem;
    N3: TMenuItem;
    N4: TMenuItem;
    N5: TMenuItem;
    N6: TMenuItem;
    N7: TMenuItem;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    Label3: TLabel;
    N8: TMenuItem;
    N9: TMenuItem;
    N10: TMenuItem;
    N11: TMenuItem;
    N12: TMenuItem;
    procedure N222221Click(Sender: TObject);
    procedure N333331Click(Sender: TObject);
    procedure N3Click(Sender: TObject);
    procedure N4Click(Sender: TObject);
    procedure N1Click(Sender: TObject);
    procedure N5Click(Sender: TObject);
    procedure N8Click(Sender: TObject);
    procedure N6Click(Sender: TObject);
    procedure N7Click(Sender: TObject);
    procedure N1Click(Sender: TObject);
    procedure N9Click(Sender: TObject);
 private
    { Private declarations }
 public
    { Public declaratoins }
 end;

var
  Form1: TForm1;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm1.N222221Click(Sender: TObject);
```

```
begin
 Form2.Show
end;

procedure TForm1.N33333Click(Sender: TObject);
begin
 Form3.Show
end;

procedure TForm1.N3Click(Sender: TObject);
begin
 Form2.Show;
end;

procedure TForm1.N4Click(Sender: TObject);
begin
 Form3.Show;
end;

procedure TForm1.N1Click(Sender: TObject);
begin
 Form6.Show;
end;

procedure TForm1.N5Click(Sender: TObject);
begin
 Form5.Show;
end;

procedure TForm1.N8Click(Sender: TObject);
begin
 Form7.Show;
end;

procedure TForm1.N6Click(Sender: TObject);
begin
 Form8.Show;
end;

procedure TForm1.N7Click(Sender: TObject);
begin
 Form9.Show;
end;

procedure TForm1.N11Click(Sender: TObject);
begin
 Close;
end;

procedure TForm1.N9Click(Sender: TObject);
begin
 Form10.Show; end; end.
```

```
unit Unit2;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, OleCtrls, SHDocVw, ComCtrls, StdCtrls;

type
  TForm2 = class(TForm)
    PageControl1: TPageControl;
    TabSheet1: TTabSheet;
    TabSheet2: TTabSheet;
    TabSheet3: TTabSheet;
    WebBrowser1: TWebBrowser;
    WebBrowser2: TWebBrowser;
    WebBrowser3: TWebBrowser;
    Button1: TButton;
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Label1Click(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form2: TForm2;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm2.FormCreate(Sender: TObject);
var
 Path:String;
begin
 Path:=ExtractFilePath(Application.ExeName)+'HTML\';
 PageControl1.TabWidth:=PageControl1.Width div PageControl1.PageCout-1;
 WebBrowser1.Navigate(Path+'1.htm');
 WebBrowser2.Navigate(Path+'2.htm');
 WebBrowser3.Navigate(Path+'3.htm');
end;


procedure TForm2.Label1Click(Sender: TObject);
begin
 Close
end;

procedure TForm2.Button1Click(Sender: TObject);
```

```
begin
 Close;
end;

end.
```

```
unit Unit3;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Craphics, Controls, Forms,
  Dialogs, ComCtrls, StdCtrls, OleCtrls, SHDocVw, Buttons;

type
  TForm3 = class(TForm)
    PageControl1: TPageControl;
    Button1: TButton;
    TabSheet1: TTabSheet;
    TabSheet2: TTabSheet;
    TabSheet3: TTabSheet;
    WebBrowser1: TWebBrowser;
    WebBrowser2: TWebBrowser;
    WebBrowser3: TWebBrowser;
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form3: TForm3;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm3.FormCreate(Sender: TObject);
var
 Path:String;
begin
 Path:=ExtractFilePath(Application.ExeName)+'HTML\';
 PageControl1.TabWidth:=PageControl1.Width div PageControl1.PageCount-1;
 WebBrowser1.Navigate(Path+'7.htm');
 WebBrowser2.Navigate(Path+'8.htm');
 WebBrowser3.Navigate(Path+'6.htm');
end;


procedure TForm3.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 Close
end;

end.
```

```
unit Unit4;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Craphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, OleCtrls, SHDocVw, ComCtrls;

type
  TForm4 = class(TForm)
    Button1: TButton;
    PageControl1: TPageControl;
    TabSheet1: TTabSheet;
    TabSheet2: TTabSheet;
    TabSheet3: TTabSheet;
    WebBrowser1: TWebBrowser;
    WebBrowser2: TWebBrowser;
    WebBrowser3: TWebBrowser;
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form4: TForm4;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm3.FormCreate(Sender: TObject);
var
 Path:String;
begin
 Path:=ExtractFilePath(Application.ExeName)+'HTML\';
 PageControl1.TabWidth:=PageControl1.Width div PageControl1.PageCount-1;
 WebBrowser1.Navigate(Path+'10.htm');
 WebBrowser2.Navigate(Path+'11.htm');
 WebBrowser3.Navigate(Path+'6.htm');
end;


procedure TForm4.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 Close
end;

end.
```

```
unit Unit5;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Craphics, Controls, Forms,
  Dialogs, OleCtrls, SHDocVw, ComCtrls, StdCtrls;

type
  TForm5 = class(TForm)
    PageControl1: TPageControl;
    TabSheet1: TTabSheet;
    TabSheet2: TTabSheet;
    TabSheet3: TTabSheet;
    WebBrowser1: TWebBrowser;
    WebBrowser2: TWebBrowser;
    WebBrowser3: TWebBrowser;
    Button1: TButton;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure Button3Click(Sender: TObject);
   procedure FormCreate(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form5: TForm5;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm5.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 close;
end;

procedure TForm5.Button2Click(Sender: TObject);
begin
 close;
end;

procedure TForm5.Button3Click(Sender: TObject);
begin
 close;
end;

procedure TForm5.FormCreate(Sender: TObject);
var
```

```
 Path:String;
begin
 Path:=ExtractFilePath(Application.ExeName)+'HTML\';
 PageControl1.TabWidth:=PageControl1.Width div PageControl1.PageCount-1;
 WebBrowser1.Navigate(Path+'10.htm');
 WebBrowser2.Navigate(Path+'11.htm');
 WebBrowser3.Navigate(Path+'9.htm');
end;

end.
```

```
unit Unit6;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Craphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, OleCtrls, SHDocVw;

type
  TForm6 = class(TForm)
    WebBrowser1: TWebBrowser;
    Button1: TButton;
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form6: TForm6;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm6.FormCreate(Sender: TObject);
var
 Path:String;
begin
 Path:=ExtractFilePath(Application.ExeName)+'HTML\';
 WebBrowser1.Navigate(Path+'0.htm');
end;

procedure TForm6.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 close
end;

end.
```

```
unit Unit7;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Craphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, OleCtrls, SHDocVw;

type
  TForm7 = class(TForm)
    WebBrowser1: TWebBrowser;
    Button1: TButton;
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form7: TForm7;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm6.FormCreate(Sender: TObject);
var
 Path:String;
begin
 Path:=ExtractFilePath(Application.ExeName)+'HTML\';
 WebBrowser1.Navigate(Path+'0.htm');
end;

procedure TForm7.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 close
end;

end.
```

```
unit Unit8;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Craphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, OleCtrls, SHDocVw, ComCtrls;

type
  TForm8 = class(TForm)
    PageControl1: TPageControl;
    TabSheet1: TTabSheet;
    TabSheet2: TTabSheet;
    TabSheet3: TTabSheet;
    WebBrowser1: TWebBrowser;
    WebBrowser2: TWebBrowser;
    Button1: TButton;
    WebBrowser3: TWebBrowser;
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form8: TForm8;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm8.FormCreate(Sender: TObject);
var
 Path:String;
begin
 Path:=ExtractFilePath(Application.ExeName)+'HTML\';
 PageControl1.TabWidth:=PageControl1.Width div PageControl1.PageCount-1;
 WebBrowser1.Navigate(Path+'17.htm');
 WebBrowser2.Navigate(Path+'12.htm');
 WebBrowser3.Navigate(Path+'13.htm');
end;

procedure TForm8.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 close
end;

end.
```

```
unit Unit9;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Craphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, OleCtrls, SHDocVw, ComCtrls;

type
  TForm9 = class(TForm)
    PageControl1: TPageControl;
    TabSheet1: TTabSheet;
    TabSheet2: TTabSheet;
    TabSheet3: TTabSheet;
    WebBrowser1: TWebBrowser;
    WebBrowser2: TWebBrowser;
    Button1: TButton;
    WebBrowser3: TWebBrowser;
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form9: TForm9;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm9.FormCreate(Sender: TObject);
var
 Path:String;
begin
 Path:=ExtractFilePath(Application.ExeName)+'HTML\';
 PageControl1.TabWidth:=PageControl1.Width div PageControl1.PageCount-1;
 WebBrowser1.Navigate(Path+'14.htm');
 WebBrowser2.Navigate(Path+'15.htm');
 WebBrowser3.Navigate(Path+'16.htm');
end;

procedure TForm9.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 close
end;

end.
```

```
unit Unit10;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Craphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, OleCtrls, SHDocVw, ComCtrls, unit13, unit14, unit15, unit16;

type
  TForm10 = class(TForm)
    PageControl1: TPageControl;
    TabSheet1: TTabSheet;
    TabSheet2: TTabSheet;
    TabSheet3: TTabSheet;
    TabSheet4: TTabSheet;
    TabSheet5: TTabSheet;
    WebBrowser1: TWebBrowser;
    WebBrowser2: TWebBrowser;
    WebBrowser3: TWebBrowser;
    WebBrowser4: TWebBrowser;
    WebBrowser5: TWebBrowser;
    Button1: TButton;
    Label1: TLabel;
    Button2: TButton;
    Button3: TButton;
    Button4: TButton;
    Label2: TLabel;
    Button5: TButton;
    Button6: TButton;
    Button7: TButton;
    Label3: TLabel;
    Button8: TButton;
    Button9: TButton;
    Button10: TButton;
    Label4: TLabel;
    Button11: TButton;
    Button12: TButton;
    Button13: TButton;
    Label5: TLabel;
    Button14: TButton;
    Button15: TButton;
    Button16: TButton;
    Button17: TButton;
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure Button3Click(Sender: TObject);
    procedure Button4Click(Sender: TObject);
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Button5Click(Sender: TObject);
    procedure Button6Click(Sender: TObject);
    procedure Button7Click(Sender: TObject);
    procedure Button8Click(Sender: TObject);
    procedure Button9Click(Sender: TObject);
```

```
    procedure Button10Click(Sender: TObject);
    procedure Button11Click(Sender: TObject);
    procedure Button12Click(Sender: TObject);
    procedure Button13Click(Sender: TObject);
    procedure Button14Click(Sender: TObject);
    procedure Button15Click(Sender: TObject);
    procedure Button16Click(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button17Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form10: TForm10;

implementation

uses Unit11, Unit12;

{$R *.dfm}

procedure TForm10.Button2Click(Sender: TObject);
begin
Form11.Show;
Button3.Visible:=False;
Button4.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button3Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button.Visible:=False;
Button4.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button4Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button2.Visible:=False;
Button3.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.FormCreate(Sender: TObject);
var
 Path:String;
begin
 Path:=ExtractFilePath(Application.ExeName)+'HTML\';
 PageControl1.TabWidth:=PageControl1.Width div PageControl1.PageCount-1;
 WebBrowser1.Navigate(Path+'21.htm');
```

```
 WebBrowser2.Navigate(Path+'22.htm');
 WebBrowser3.Navigate(Path+'23.htm');
 WebBrowser4.Navigate(Path+'24.htm');
 WebBrowser5.Navigate(Path+'25.htm');
end;

procedure TForm10.Button5Click(Sender: TObject);
begin
Form11.Show;
Button6.Visible:=False;
Button7.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button6Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button5.Visible:=False;
Button7.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button7Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button5.Visible:=False;
Button6.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button8Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button9.Visible:=False;
Button10.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button9Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button8.Visible:=False;
Button10.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button10Click(Sender: TObject);
begin
Form11.Show;
Button8.Visible:=False;
Button9.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button11Click(Sender: TObject);
begin
Form11.Show;
Button12.Visible:=False;
```

```
Button13.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button12Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button11.Visible:=False;
Button13.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button13Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button11.Visible:=False;
Button12.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button14Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button15.Visible:=False;
Button16.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button15Click(Sender: TObject);
begin
Form11.Show;
Button14.Visible:=False;
Button16.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button16Click(Sender: TObject);
begin
Form12.Show;
Button14.Visible:=False;
Button15.Visible:=false;
end;

procedure TForm10.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 close;
end;

procedure TForm10.Button17Click(Sender: TObject);
begin
if Button2.Visible=True and Button5.Visible=True and Button10.Visible=True and
Button11.Visible=True and Button15.Visible=True then Form13.Show else

if Button2.Visible=True and Button5.Visible=True and Button10.Visible=True and
Button11.Visible=True or Button2.Visible=True and Button5.Visible=True and
Button10.Visible=True and Button15.Visible=True and Button2.Visible=True and
Button5.Visible=True and Button11.Visible=True and Button15.Visible=True or
```

```
Button2.Visible=True and Button10.Visible=True and Button11.Visible=True and
Button15.Visible=True or Button5.Visible=True and Button10.Visible=True and
Button11.Visible=True and Button15.Visible=True then Form14.Show else

if Button2.Visible=False and Button5.Visible=False or
Button2.Visible=False and Button10.Visible=False or
Button2.Visible=False and Button11.Visible=False or
Button2.Visible=False and Button15.Visible=False or
Button5.Visible=False and Button10.Visible=False or
Button5.Visible=False and Button11.Visible=False or
Button5.Visible=False and Button15.Visible=False or
Button10.Visible=False and Button11.Visible=False or
Button10.Visible=False and Button15.Visible=False or
Button11.Visible=False and Button15.Visible=False then Form15.Show
else Form16.Show;
end;

end.
```

```
unit Unit11;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls;

type
  TForm11 = class(TForm)
    Label1: TLabel;

  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form11: TForm11;

implementation

{$R *.dfm}
end.
```

```
unit Unit12;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls;

type
  TForm12 = class(TForm)
    Label1: TLabel;

  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form12: TForm12;

implementation

{$R *.dfm}

end.
```

```
unit Unit13;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls;

type
  TForm13 = class(TForm)
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;

  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form13: TForm13;

implementation

{$R *.dfm}

end.
```

```
unit Unit14;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls;

type
  TForm14 = class(TForm)
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;

  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form14: TForm14;

implementation

{$R *.dfm}

end.
```

```
unit Unit15;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls;

type
  TForm15 = class(TForm)
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;

  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form15: TForm15;

implementation

{$R *.dfm}

end.
```

```
unit Unit16;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls;

type
  TForm16 = class(TForm)
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;

  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form16: TForm16;

implementation

{$R *.dfm}

end.
```

План – конспект уроку на тему:

«Розв'язування тригонометричних рівнянь»

Тема: Розв'язування тригонометричних рівнянь

Мета: формування в учнів навичок та вмінь розв'язувати тригонометричні рівняння, які зводяться до квадратних відносно тригонометричних функцій; однорідних тригонометричних рівнянь другого степеня відносно синуса й косинуса; рівнянь, під час розв'язування яких зручно користуватися формулами пониження степенів; розвивати логічне мислення учнів, культуру математичного мовлення; виховувати самостійність.

Хід уроку

I. Перевірка домашнього завдання.

Перевірка полягає в тому, що вчитель роз'яснює не зрозумілі учням приклади, перевіряє наявність домашнього завдання, при його відсутності вчитель робить відповідну помітку в щоденник.

II. Актуалізація опорних знань.

1. Які з рівнянь:

$a) sin^2 x + \sin x + 3 = 0$;

б)$tg^2 x - 3tgx + 5 = 0$;

в)$m^2 - 3m - 4 = 0$;

г)$cos^2 x - \sin x + 1 = 0$

є алгебраїчними, тригонометричними? Знайдіть корені рівняння в). Як можна звести тригонометричні рівняння а), б), г) до алгебраїчних (квадратних).

2. Згадайте формули коренів квадратного рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, для випадків: $a) b = 2n + 1$; б)$b = 2n$.

III. Мотивація навчальної діяльності.

Повідомлення теми, мети уроку.

IV. Вивчення нового матеріалу. Розв'язування рівнянь.

1. На практиці часто зустрічаються тригонометричні рівняння, які містять однакові тригонометричні функції одного і того самого аргументу.

Наприклад:

$а) a sin^2 x + b sin\, x + c = 0;$

б)$a sin^2 x + b cos\, x + c = 0$;

в)$a tg^2 x + b tg x = 0$;

г)$a tg x + b ctg x + c = 0$;

д)$m cos^2 x + n cos x + k = 0$;

$е) a cos^2 x + b sin\, x = 0$.

Такі рівняння не алгебраїчні, але їх можна звести до алгебраїчних, ввівши нову змінну. Внаслідок таких перетворень одержимо квадратне рівняння.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

$$sin^2 x + 4 \sin x - 5 = 0.$$

Розв'язання

Введемо нову змінну $t = \sin x$, де $|t| \le 1$. Тоді рівняння матиме вигляд: $t^2 + 4t - 5 = 0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$\left[\begin{array}{l} t = -5, \\ t = 1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} sin x = 5, \\ sin x = 1; \end{array}\right.$$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння

$$cos 2x + sin x = 0.$$

Розв'язання

Звернемо увагу учнів на те, що в даному рівнянні є різні функції та різні аргументи. Тому слід виконати такі тотожні перетворення, щоб утворилися однакові аргументи та залишилася тільки одна і та сама функція.

$$cos 2x + \sin x = 0,$$

$$cos^2 x - sin^2 x + sin x = 0,$$

$$1 - sin^2 x - sin^2 x + \sin x = 0,$$

$$2sin^2x - \sin x - 1 = 0.$$

Нехай $t = \sin x$, де $|t| \leq 1$. Тоді матимемо:

$$2t^2 - t - 1 = 0,$$

$$D = 9, t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4},$$

$$t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Повертаємося до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} sinx = 1, \\ sinx = -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, n, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, n, k \in Z.$

Приклад 3. Скласти план розв'язування рівняння

$$tgx + 2ctgx = 3.$$

План розв'язування

Дане тригонометричне рівняння матиме вигляд:

1. Звести рівняння до рівняння з однією тригонометричною функцією, скориставшись формулою $ctgx = \frac{1}{tgx}$, де $tgx \neq 0$, тобто $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z.$

$$tgx = \frac{2}{tgx} = 3.$$

2. Помножити обидві частини рівняння, яке отримали, на tgx. Дістанемо квадратне рівняння відносно tgx:

$$tg^2x - 3tgx + 2 = 0.$$

3. Ввести змінну $tgx = t$. Дістанемо квадратне рівняння $t^2 - 3t + 2 = 0.$
4. Розв'язати квадратне рівняння.
5. Повернутися до заміни $t = tgx$.
6. Розв'язати найпростіші тригонометричні рівняння.

Означення. Рівняння виду $a\sin x + bcos\ x = 0,$

$$asin^2x + b\sin x cos\, x + ccos^2x = 0,$$

$$asin^2x + bsin^2xcosx + csin\, xcos^2x + dcos^2x = 0,$$

$$asin^kx + bsin^{k-1}xcosx + \cdots + mcos^4x = 0$$

називаються *однорідними рівняннями* відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Сума показників степенів у кожному доданку повинна дорівнювати k. Ця сума називається *степенем однорідного рівняння*.

Розв'язуються однорідні рівняння діленням правої та лівої частин на cos^kx (або sin^kx), де k степінь однорідного рівняння.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння

$$2\sin x - 3cosx = 0.$$

Розв'язання

Поділимо обидві частини рівняння на $cosx \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = 0,$

$2tgx - 3 = 0,$

$2tgx = 3,$

$tgx = \frac{3}{2},$

$x = arctg\frac{3}{2} + \pi n, n \in Z.$

Неважко переконатися, що $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ не є коренем рівняння, оскільки $\sin x$ і $\cos x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Відповідь: $x = arctg\frac{3}{2} + \pi n, n \in Z.$

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння

$$sin^2x - 3cosxsinx = -1.$$

Розв'язання

$sin^2x - 3cosxsinx + 1 = 0,$

$sin^2x - 3cosxsinx + sin^2x + cos^2x = 0,$

$2sin^2x - 3cosxsinx + cos^2x = 0.$

Це рівняння – однорідне другого степеня. Поділимо обидві його частини на cos^2x, де $cosx \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

$\frac{2sin^2x}{cos^2x} - \frac{3cosxsinx}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^2x} = 0,$

$2tg^2x - 3tgx + 1 = 0.$

Введемо нову змінну $m = tgx$, матимемо:

$2m^2 - 3m + 1 = 0,$

$m_1 = 1;\ m_2 = \frac{1}{2}.$

Повертаємося до заміни:

$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = arctg\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, arctg\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z.$

Розглянемо рівняння, які розв'язуються за допомогою формули пониження степеня.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння

$$cos^2x + cos^2 2x + cos^2 3x + cos^2 4x = 2.$$

Розв'язання

Оскільки $cos^2 = \frac{1+cos2x}{2}$, то

$$cos^2 2x = \frac{1 + cos4x}{2},$$

$$cos^2 3x = \frac{1 + cos6x}{2},$$

$$cos^2 4x = \frac{1 + cos8x}{2}.$$

Тоді рівняння матиме вигляд:

$$\frac{1 + cos2x}{2} + \frac{1 + cos4x}{2} + \frac{1 + cos6x}{2} + \frac{1 + cos8x}{2} = 2.$$

Помножимо обидві частини рівняння на 2:

$1 + cos2x + 1 + cos4x + 1 + cos6x + 1 + cos8x = 8,$

$cos2x + cos4x + cos6x + cos8x = 0,$

$(cos2x + cos8x) + (cos4x + cos6x) = 0,$

$2cos5xcos3x + 2cos5xcosx = 0,$

$2cos5x(cos3x + cosx) = 0,$

$2cos5x \cdot 2cos2xcosx = 0,$

$cos5xcos2xcosx = 0.$

Рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} cos5x = 0, \\ cos2x = 0, \\ cosx = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in Z, \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

V. Підсумок уроку.

Вчитель повідомляє оцінки, які отримали учні при розв'язуванні тригонометричних рівнянь. Наголошує на основних помилках учнів.