Методика вивчення нерівностей в курсі алгебри основної школи

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасний розвиток української освіти пов'язаний з процесами її реформування й оновленням освітніх стандартів. Головною метою реформування системи освіти в Україні є вдосконалення форм організації процесу навчання, спрямованого на всебічний розвиток і самореалізацію особистості учня. При цьому важливу роль у даному процесі відіграє математична освіта, яка дає фундаментальні знання та формує логічне мислення школярів.

Математика є важливою складовою системи шкільної освіти, адже вона дозволяє учням глибше засвоїти наукові принципи пізнання, оволодіти сучасними інформаційними та інноваційними технологіями, зрозуміти міждисциплінарний характер математичних закономірностей. Уміння та навички, здобуті школярами на уроках алгебри в основній школі, створюють міцну основу для подальшого освоєння ними технічних і прикладних наук, а відтак – і досягнення в подальшому успіху в обраній професії [21].

Варто відмітити, що у шкільному курсі алгебри суттєву частину навчального процесу відведено під змістовну лінію «Нерівності», яка має важливе теоретичне і практичне значення. Багатство змісту лінії, способів та прийомів розв'язання нерівностей відкриває широкі можливості для її застосування не лише при вивченні ряду тем з курсу алгебри, але й різних розділів математики. Більше за те, за допомогою нерівностей та їх систем можна розв'язувати також різноманітні прикладні задачі.

У пояснювальній записці до навчальної програми з математики для 5-9 класів [15] зазначається, що до основних завдань курсу алгебри належить «формування умінь … розв'язування рівнянь і нерівностей та їх систем, достатніх для вільного їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також для практичних застосувань математичного знання». Крім того, вказаною програмою передбачено, що вивчення нерівностей та їх систем у шкільному курсі математики відбувається поступово і має наступну послідовність викладення теми: розв'язування нерівностей → розв'язування систем нерівностей → доведення нерівностей [15]. Така послідовність вивчення теми «Нерівності» сприяє успішному засвоєнню більшістю учнів певних навичок із розв'язування нерівностей та їх системам, а також формує відповідні знання, необхідні для подальшого вивчення курсу алгебри і початків аналізу в 10-11 класах.

Ступінь дослідження проблеми. Аналіз науково-педагогічної літератури, присвяченої методиці вивчення математики в основній школі та теми «Нерівності» зокрема, показав, що нині є ціла низка досліджень, що розкривають різні її аспекти. Так, значний внесок у розвиток методики навчання математики зробили відомі науковці, серед яких: г. Бевз, О. Дубинчук, А. Колмогоров А. Конфорович, Д. Майергойз, З. Слєпкань, І. Тесленко, І. Шиманський, М. Шкіль та інші. Питання взаємозв'язку між поняттями «нерівність», «рівняння» і «функція», аналіз методів розв'язування нерівностей та їх систем активно вивчали: О. Долгова, М. Комова, Н. Мельникова, Є. Нелін, М. Паюл, Д. Рибдалова, Г. Солтан, І. Степура та інші.

Отже, можемо стверджувати, що питання методики навчання нерівностей та їх систем в основній школі доволі активно вивчається сучасними науковцями. Проте, незважаючи на значний позитивний досвід у розробці методик вивчення теми «Нерівності», як показує практика, учні середньої школи з великими труднощами оволодівають основними знаннями та уміннями щодо розв'язування нерівностей та їх систем. Тому ще залишається проблема пошуку ефективних методичних підходів до викладення теми «Нерівності» в курсі алгебри 5-9 класів. Це й визначає актуальність даної дипломної роботи на тему: «Методика вивчення нерівностей в курсі алгебри основної школи».

Мета дослідження – розробити методику формування в учнів умінь і навичок розв'язувати нерівності та їх системи під час вивчення алгебри у 5-9 класах.

Об'єкт дослідження: метод розв'язування та доведення нерівностей в основній школі.

Предмет дослідження: методичні особливості формування в учнів умінь розв’язувати нерівності та їх системи у процесі навчання алгебри в 5-9 класах.

Відповідно до мети дослідження в роботі вирішуються наступні **завдання**:

1) провести аналіз педагогічної, навчальної і методичної літератури з метою з’ясування різних підходів до вивчення теми «Нерівності»;

2) здійснити дидактичний аналіз навчального матеріалу курсу алгебри з теми «Нерівності»;

3) дослідити основні методи розв’язування нерівностей та їх систем, а також способи доведення нерівностей;

4) проаналізувати методику формування умінь і навичок розв’язування раціональних, ірраціональних і трансцендентних нерівностей та їх систем;

5) описати можливості використання програмних засобів при вивченні нерівностей та їх систем на уроках алгебри в 5-9 класах.

Методи дослідження, які були застосовані для реалізації поставлених завдань, включають:

− *теоретичні*: вивчення і аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури з теми дослідження, узагальнення висновків;

− *емпіричні*: вивчення педагогічного досвіду, спостереження, розв’язування задач.

Практичне значення бакалаврської роботи полягає в тому, що її матеріали можуть бути використані: вчителями математики; студентами під час проходження практики при підготовці до проведення уроків; учнями та студентами фізико-математичного та математичного факультетів під час практичної і самостійної роботи.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел, що містить28 найменувань та 2 додатків. Робота викладена на 70 сторінках.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ В КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

1.1. Зміст і роль лінії рівнянь і нерівностей в сучасному шкільному курсі математики

Тема рівнянь та нерівностей посідає чільне місце в курсі алгебри основної школи, адже вона багата за змістом, способами і прийомами рішення нерівностей, а також за можливостями її застосування при вивченні ряду інших тем шкільного курсу математики. Це пояснюється тим, що рівняння і нерівності широко використовуються в різних розділах математики, у тому числі при вирішенні важливих прикладних задач. З огляду на цінність матеріалу, пов'язаного з рівняннями та нерівностями, його вивчення в сучасній методиці математики організовано в змістовно-методичну лінію рівнянь і нерівностей. В ній розглядаються питання формування понять рівняння та нерівності, різних методів їх вирішення, взаємозв'язку вивчення рівнянь і нерівностей з числовою, функціональної та іншими лініями шкільного курсу математики [1].

Виникнення і функціонування понять рівняння та нерівності в алгебрі пов’язані з трьома основними напрямками розгортання вказаної лінії в шкільному курсі математики. Зокрема, перша з них, прикладна спрямованість лінії рівнянь і нерівностей розкривається переважно при вивченні алгебраїчного методу розв'язання текстових задач. Цей метод широко застосовується під час навчання математики, оскільки він пов'язаний з навчанням прийомам, які часто використовуються в різноманітних математичних задачах [22].

У свою чергу, теоретико-математична спрямованість лінії рівнянь і нерівностей розкривається: 1) при вивченні найбільш важливих класів рівнянь, нерівностей та їх систем і 2) при вивченні узагальнених понять та методів, які відносяться до лінії у цілому. Обидва ці напрями є досить важливими в курсі шкільної математики, адже використання узагальнених понять і методів дозволяє логічно впорядкувати вивчення лінії в цілому, оскільки вони описують те спільне, що є у прийомах розв'язання нерівностей та їх систем. Ці загальні поняття й методи спираються на основні логічні поняття: невідомі, рівність, рівносильність, логічне слідування, які теж розкриваються в лінії рівнянь і нерівностей [22].

Третій напрямок розгортання лінії рівнянь і нерівностей пов'язаний з тим, що для рівнянь та нерівностей характерна спрямованість на встановлення зв'язків з іншим змістом курсу математики. Зокрема, ця лінія тісно пов'язана з числовою лінією. Основною ідеєю, що реалізована у процесі встановлення взаємозв'язку між цими лініями, є ідея послідовного розширення числової системи. Всі числові області, які розглядаються в шкільному курсі алгебри (за винятком області всіх дійсних чисел), виникають у зв'язку з рішенням будь-яких рівнянь, нерівностей та їх систем. Так, числові проміжки визначаються нерівностями або системами нерівностей; області ірраціональних та логарифмічних виразів пов'язані з певними рівняннями і т.д. [24]. При цьому, зв’язок лінії рівнянь та нерівностей з числовою лінією є двостороннім. Зворотний вплив проявляється через те, що кожна знову введена числова область розширює можливості складання і рішення різних рівнянь та нерівностей [18].

Варто зазначити, що лінія рівнянь та нерівностей тісно пов'язана також і з функціональною лінією. Це проявляється передусім в процесі дослідження функції (наприклад, при знаходження області визначення функцій, їх коренів, проміжків знакосталості і т.д.). Крім того, функціональна лінія впливає як на зміст лінії рівнянь та нерівностей, так і на метод її вивчення. Зокрема, функціональні засоби служать основою залучення графічної наочності до рішення і дослідженню рівнянь, нерівностей та їх систем [4].

Перші відомості про числові нерівності та знаки «>», «<» учні отримують у початковій школі, потім розглядають їх у 5 класі у зв'язку з порівнянням і округленням натуральних чисел. У 6 класі для порівняння раціональних чисел упроваджуються знаки «>», «<». Більш повно, як самостійну, тему «Нерівності» учні вивчають у 9 класі, де вводиться поняття числових нерівностей, обґрунтовуються основні їх властивості та розглядаються поняття нерівності зі змінною, лінійної нерівності, системи лінійних нерівностей з однією змінною.

Учні вчаться розв'язувати системи таких нерівностей. У 9 класі вивчають нерівності другого степеня, Зокрема, у цьому класі вивчають теми: числові нерівності; основні властивості числових нерівностей; нерівності зі змінними; лінійні нерівності з однією змінною [25].

Розкриваючи тему нерівностей, доцільно розглядати їх у розрізі двох груп. Перша група – це раціональні нерівності та системи. Друга група включає ірраціональні та трансцендентні нерівності і системи. Зокрема, до складу другої групи входять ірраціональні, логарифмічні, показникові та тригонометричні нерівності , які вивчаються в старшій школі.

Нерівності першої групи з’являться в курсі алгебри у 8-9 класах загальноосвітньої школи (з урахуванням поглибленого вивчення). Водночас нерівності другої групи в цьому курсі лише починають вивчатися, а їх остаточне вивчення відбувається в курсі алгебри і початків аналізу в 10-11 класах. При цьому, вивчення другої групи відбувається за умови використання загальних понять і методів, пов'язаних з першою групою нерівностей. Крім того, в процесі вивчення нерівностей першої та другої групи виявляються різні зв'язки між ними та іншими лініями курсу математики - числовою, функціональною та ін.

Аналіз навчальних підручників для 8-9 класів [3;4;12;13;14] показав, що послідовність вивчення різних груп нерівностей та їх систем в різних підручниках є відмінною. Проте кількість можливих варіантів для послідовності їх введення не досить велика - класи знаходяться в певній логічній залежності один від одного, яка визначає порядок їх появи в курсі [4]. Наявність різних підходів ускладнює методичний опис, оскільки прийняття того чи іншого шляху вимагає різних прийомів вивчення матеріалу. Тож, спробуємо виокремити ряд методичних особливостей у ході вивчення нерівностей.

По-перше, як свідчить практика, навички вирішення нерівностей (за винятком квадратних) формуються на більш низькому рівні. Ця пояснюється просто: теорія нерівностей є складнішою за теорію рівнянь. Зазначене частково пом'якшується іншими особливостями вивчення нерівностей, тому в цілому можна вважати, що змістовна сторона нерівностей від цього не страждає.

По-друге, більшість прийомів рішення нерівностей пов'язана з переходом від даної нерівності a>b до рівняння a = b і наступним переходом від знайдених коренів рівняння до множини рішень вихідної нерівності. Цей метод не застосовується лише при розгляді лінійних нерівностей, в яких передбачається просте вирішення нерівностей. Цю особливість слід постійно підкреслювати, для того, щоб перехід до рівнянь і зворотний перехід до нерівностей перетворилися на основний метод рішення нерівностей. Саме такий метод у старших класах представляється у вигляді «методу інтервалів».

По-третє, при вивченні нерівностей велику роль відіграють наочно-графічні засоби. Останні можуть бути використані для обґрунтування розміщення матеріалу, що відноситься до нерівностей, кількості завдань, необхідних для засвоєння програмного мінімуму, тощо [28].

Перераховані особливості вказують, що для успішного засвоєння теми «Нерівності» важливим є попередньо вивчений матеріал, а відтак, роль особливого значення набуває синтезування різноманітних математичних знань при вивченні нерівностей та їх систем.

У цілому можна сказати, що вивчення нерівностей в шкільному курсі математики організовано так само, як і рівнянь. Однак існують і деякі специфічні аспекти вивчення нерівностей.

1) Навички рішення нерівностей, за винятком квадратних, формуються на більш низькому рівні, ніж відповідних рівнянь. Все це пов'язано з тим, що теорія нерівностей набагато складніша за теорію рівнянь.

2) Практично всі прийоми рішення нерівностей ґрунтуються на переході від нерівності виду $a > b$ до відповідного йому рівняння виду $a = b$, вирішивши яке, знаходимо корені, а на їх базі шукаємо множину рішень вихідної нерівності. Такий похід не використовується тільки в разі розгляду лінійних нерівностей, оскільки в ньому немає необхідності через простоту процесу вирішення таких нерівностей.

Цю особливість необхідно постійно підкреслювати в процесі навчання алгебри, з тим, щоб перехід до рівнянь і зворотний перехід перетворилися в для учнів в основний метод вирішення нерівностей.

3) Одну з головних ролей у процесі вивчення нерівностей відіграють наочно-графічні засоби, завдяки яким школярі можуть побачити безпосередній зв'язок між елементами нерівності.

Всі ці викладені вище методичні аспекти можуть бути використані при:

- обґрунтуванні застосування навчального матеріалу з досліджуваної теми;

- визначенні кількості завдань, які потрібні для повноцінного засвоєння програмного мінімуму [4].

Тож, враховуючи названі методичні аспекти вивчення нерівностей, можна зробити висновок про обов'язковість попереднього вивчення матеріалу по рівняннях, оскільки це впливає на якість вивчення теми «Нерівності».

Всі ці аспекти можна показати, наприклад, при вивченні матеріалу по темі уроку «Квадратні нерівності». Ця тема обов'язково повинна слідувати після проведення уроку на тему «Квадратні рівняння».

До вивчення квадратних нерівностей діти повинні вже вміти:

- будувати графік квадратичної функції;

- знаходити нулі функції або доводити, що їх немає.

Прийом переходу до квадратних нерівностей можна здійснити шляхом переходу від нерівності $ax^2+bx+c>0$ до побудови та вивчення графіка функції $y=ax^2+bx+c$. (параболи)

З курсу математики відомо, що існує декілька випадків розташування параболи відносно осі абсцис. Виходячи з цього, раціонально буде почати розгляд конкретного завдання, яке передбачає розгляд відповідного квадратного тричлена (з різними коренями).

У результаті ми отримуємо певну відповідність між двома завданнями:

- «Знайти рішення нерівності $ax^2+bx+c>0$»;

- «Знайти всі аргументи, при яких значення функції $y=ax^2+bx+c$ позитивні».

На основі встановленого таким чином зв'язку відбувається перехід до побудови графіка функції. Нулі даної функції розбивають вісь абсцис на три проміжку, в кожному з яких вона зберігає знак, тому відповідь слідує з графіку.

Аналогію можна провести і для вирішення інших випадків рішення квадратних нерівностей (у квадратного тричлена ax^2+bx+c не більш одного кореня).

Також варто відзначити ті типи завдань, в яких проявляється прикладна роль нерівностей в курсі алгебри:

- знаходження області визначення функції;

- дослідження коренів рівнянь в залежності від параметрів.

На підставі цього, можна заключити, що ознайомлення учнів з нерівностями дозволяє застосовувати на практиці апарат нерівностей для вирішення найрізноманітніших завдань [24].

При вирішенні лінійних нерівностей важливо починати з найпростішого до більш складного. Тобто, діти повинні мати напрацьовані навички вирішувати найпростіші нерівності виду $ax>b$ і $ax<b$ при різних значеннях a і b, щоб надалі розв’язувати складніші нерівності та їх системи. Також важливо, щоб учні розуміли, що рішенням лінійної нерівності є не будь-яке число або кілька чисел, а безліч чисел - числовий проміжок. Іншими словами, учні повинні без проблем вирішувати прості нерівності, наприклад, такі:

$$-3x\geq 5$$

$$0,45x<15$$

$$-\frac{1}{5}x<-5$$

Вчені-методисти вважають, що немає потреби відпрацьовувати у всіх учнів уміння вирішувати нерівності, які вимагають складних перетворень, адже це може ускладнити процес засвоєння теми [4;9;21]. Проте, разом з цим, школярі мають без особливих труднощів вміти вирішувати лінійні нерівності виду:

$$10-5x<0$$

$$5x-1>14x+2$$

$$4x-5(2-x)\leq 7x+2$$

Під час роботи з лінійними нерівностями з однією зміною важливо пам’ятати про наступні властивості нерівностей:

1) якщо обидві частини нерівності помножити або розділити на одне й те саме додатне число, то вийде рівносильне йому нерівність;

2) якщо обидві частини нерівності помножити або розділити на одне й те саме від'ємне число, то необхідно змінити при цьому знак нерівності на протилежний. В результаті одержимо рівносильну йому нерівність [17].

На підставі узагальнення різних підходів, вважаємо, що алгоритм вирішення лінійних нерівностей з однією змінною може бути представлений у такому порядку:

1) перетворення обох частин нерівності;

2) приведення подібних членів;

3) приведення нерівності до найпростішого виду на підставі властивостей нерівностей;

4) запис відповіді.

Проілюструємо даний алгоритм на прикладі: Вирішити нерівність:

$(x+9)(x-2)(x-15)<0$

1) $f(x)=(x+9)(x-2)(x-15)$, $f(x)<0$.

2) D (f) = R

3) $x_1=-9$, $x_2=2$, $x_3=15$.

4) $x\in(-\infty;-9)\cup(2;15)$.

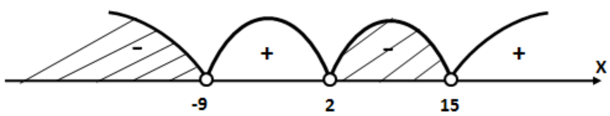


Рис. 1.1. Визначення проміжків знакозміни функції

Далі нерівності зустрічаються в курсі алгебри 9-го класу в темі «Нерівності з однією змінною» при вивченні розділу «Квадратична функція». Тут учні знайомляться з рішенням нерівностей другого степеня з однією змінною.

Рішення нерівностей другого степеня з однією змінною, тобто нерівностей виду:

$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c<0 \qquad (*)$$

де x - змінна, a, b і c - деякі числа, можна розглядати як знаходження проміжків, в яких відповідна квадратична функція приймає позитивні або негативні значення.

При вирішенні подібних нерівностей слід дотримуватися такого алгоритму дій:

1) знайти дискримінант квадратного тричлена для визначення наявності або відсутності коренів;

2) якщо є корені, необхідно їх позначити на осі x. На основі побудованих точок схематично збудувати параболу, напрямок гілок якої залежить від знака коефіцієнта при x^2: вгору - при $a>0$ або вниз - при $a<0$. Якщо коренів немає, то схематично зобразити параболу, яка розташовується у верхній півплощині - при $a>0$ або в нижній - при $a<0$;

3) знайти на осі x проміжки, для яких точки параболи розташовані вище осі x (якщо вирішують нерівність $ax^2+bx+c>0$) або нижче осі x (якщо вирішують нерівність $ax^2+bx+c<0$) [27].

Продемонструємо даний алгоритм на такому прикладі: треба вирішити нерівність $x^2+2x-48<0$.

а) Розглядаємо функцію $y=x^2+2x-48$. Її графік - парабола з вітками спрямованими вгору.

б) Для з'ясування розташування параболи $y=x^2+2x-48$ відносно осі x вирішуємо відповідне рівняння $x^2+2x-48=0$: Отримаємо: $x_1=6$, $x_2=-8$.

Намалюємо все отримане на координатній площині (рис. 1.2).

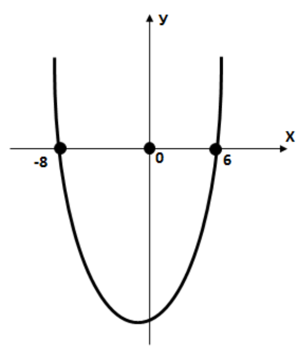


Рис. 1.2. Графік параболи $y=x^2+2x-48$

За графіком робимо висновок, що функція набуває від'ємних значень, коли $x \in (-8;6)$. Звідси, рішенням нерівності $x^2 + 2x - 48 < 0$ є проміжок $x \in (-8;6)$.

Іншим способом вирішення нерівностей є так званий *метод інтервалів*. Алгоритм вирішення нерівностей методом інтервалів включає наступні дії:

1) вводимо функцію;

2) знаходимо область визначення функції;

3) знаходимо нулі функції;

4) розбиваємо область визначення точками, в яких функція дорівнює нулю, на інтервали;

5) визначаємо знак функції в кожному з цих інтервалів;

6) вибираємо ті інтервали, які задовольняють даній нерівності;

7) записуємо відповідь.

Проілюструємо даний алгоритм на такому прикладі: треба вирішити нерівність $(x+9)(x-2)(x-15) < 0$.

1) $f(x) = (x+9)(x-2)(x-15)$, $f(x) < 0$.

2) D (f) = R

3) $x_1 = -9$, $x_2 = 2$, $x_3 = 15$.

4) $x \in (-\infty; -9) \cup (2;15)$.

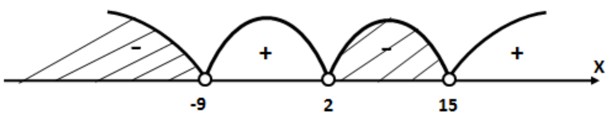


Рис. 1.3. Визначення проміжків знакозміни функції

Таким чином, рішенням зазначеної вище нерівності буде множина чисел $x \in (-\infty; -9) \cup (2;15)$.

Варто вказати, що уміння вирішувати лінійні нерівності з однією змінною і квадратні нерівності дає можливість учням у подальшому знаходити рішення логарифмічних рівнянь і нерівностей, тригонометричних рівнянь і нерівностей. Також саме на математичний апарат нерівностей спирається вивчення наближених обчислень, введення найважливіших понять математичного аналізу - похідної та інтеграла [2].

Можна погодитись з Є. Неліним та О. Долговою, які зазначають, що, вивчаючи алгебру у 7-9 класах, учні звикають використовувати відомий їм алгоритм для розв'язування відповідних нерівностей на підставі визначення їх виду (лінійні, квадратні, раціональні). Проте у 10-11 класах виникає інша ситуація: учням практично не пропонуються алгоритми розв'язування нерівностей, а пропонуються зразки такого розв'язування, спираючись на які, учні повинні самостійно обрати метод розв'язування [17]. Тому певні вміння, пов'язані з вирішенням нерівностей та їх систем, повинні бути доведені в учнів до автоматизму.

1.2 Класифікація перетворень нерівностей та їх систем

У науковій та навчально-методичній літературі виділяють три основних типи перетворень нерівностей та їх систем, а саме:

1) перетворення однієї з частин нерівності;

2) узгоджене перетворення обох частин нерівності;

3) перетворення логічної структури нерівності [4;9;21;28].

Перетворення першого типу використовуються за необхідності спрощення висловлювання, що входить до запису нерівності, яка вирішується. Перетворення однієї з частин нерівності використовують раніше за всіх інших перетворень, це відбувається ще в початковому курсі математики. Володіння учнями навичкою перетворень цього типу має велике значення для успішного вивчення інших видів перетворень, оскільки вони застосовуються дуже часто.

Перетворення другого типу полягають у узгодженій зміні обох частин нерівності в результаті застосування до них арифметичних дій або елементарних функцій. Перетворення другого типу порівняно численні. Вони складають ядро матеріалу, що вивчається в лінії нерівностей.

Наведемо методи перетворень цього типу:

1) додавання до обох частин нерівності одного і того ж виразу;

2) множення (поділ) обох частин нерівності на вираз, що приймає тільки позитивні значення;

3) множення (поділ) обох частин нерівності на вираз, що приймає тільки негативні значення і зміна знака нерівності на протилежний;

4) перехід від нерівності $a > b$ до нерівності $f(a) > f(b)$, де f - зростаюча функція, або зворотний перехід;

5) перехід від нерівності $a < b$ до нерівності $f(a) > f(b)$, де f - спадна функція, або зворотний перехід [21].

До третього типу перетворень відносяться перетворення нерівностей та їх систем, що змінюють логічну структуру завдань [2].

На практиці при вирішенні нерівностей зазвичай використовують три типи перетворень:

1) перетворення однієї з частин нерівності (використовується при необхідності спрощення виразу, що входить у запис нерівності, дана навичка є найважливішою для вивчення лінії нерівностей в подальшому);

2) узгоджене перетворення обох частин нерівності (шляхом застосування до обох частин арифметичних дій або елементарних функцій, наприклад, додавання до обох частин нерівності одного і того ж виразу, множення або ділення обох частин на один і той самий додатний вираз, множення або ділення обох частин на один й той самий від'ємний вираз з наступною зміною знака нерівності);

3) перетворення логічної структури нерівності [22].

Переважна більшість задач у курсі алгебри містять нерівності з однією змінною. Слід зауважити, що в основі рішення нерівностей з однією змінною лежить поняття рівносильності, яке свідчить про те, що дві нерівності є рівносильними, якщо їх множини рішень рівні [24]. Наприклад, нерівності $2x + 7 > 10$ і $2x > 3$ рівносильні, адже їх множини рішень рівні і являють собою проміжок $(1,5;\ +\infty)$.

Важливими в даному разі є теореми про рівносильність нерівностей та наслідки з них, які є аналогічні відповідним теоремам про рівносильності рівнянь.

Теорема 1. Нехай нерівність f (x)> g (x) задано на множині X і h (x) - вираз, визначений на тій же множині. Тоді нерівності f (x)> g (x) і f (x) + h (x)> g (x) + h (x) рівносильні на множині X.

З цієї теореми випливають *наслідки,* які часто використовуються при рішенні нерівностей:

1. Якщо до обох частин нерівності f (x)>g (x) додати одне і те ж число d, то отримаємо нерівність f (x) + d>g (x) + d, рівносильну вихідній.

2. Якщо будь-яка складова (числовий вираз або вираз з змінною) перенести з однієї частини нерівності в іншу, помінявши знак доданка на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній [4].

Теорема 2. Нехай нерівність f (x)>g (x) задано на множині X і h (x) - вираз, визначене на тій же множині, і для всіх x з множини X вираз h (x) набуває додатних значень. Тоді нерівності f (x)>g (x) і f (x) · h (x)>g (x) · h (x) рівносильні на множині X.

З цієї теореми випливає *наслідок*: якщо обидві частини нерівності f (x)>g (x) помножити на одне й те саме додатне число d, то отримаємо нерівність f (x) · d>g (x) · d, рівносильне даному [4].

Теорема 3. Нехай нерівність f (x)>g (x) задано на множині X і h (x) - вираз, визначений на тій же множині, і для всіх х є X вираз h (x) набуває від'ємних значень. Тоді нерівності f (x)>g (x) і f (x) · h (x)<g (x) · h (x) рівносильні на множині X.

З цієї теореми випливає *наслідок*: якщо обидві частини нерівності f (x)>g (x) помножити на одне й те саме від'ємне число d і знак нерівності змінити на протилежний, то отримаємо нерівність f (x) · d>g (x) ·d, рівносильну даному [4].

Розглянемо приклад рішення нерівностей з однією змінною.

Вирішимо нерівність 5х - 5 < 2х + 16, х ε R, і обґрунтуємо всі перетворення, що будуть виконуватись у процесі рішення.

Отже, перетворення нерівності $5x - 5 < 2x + 16$ включають наступні дії:

1. Перенесемо вираз 2х в ліву частину, а число -5 в праву, помінявши їх знаки на протилежні:

$5x - 2x < 16 + 5$ (скористалися наслідком 2 з теореми 3, отримали нерівність, рівносильну даній).

2. Зведемо подібні члени в лівій і правій частинах нерівності:

$3x < 21$ (виконали тотожні перетворення виразів в лівій і правій частинах нерівності – вони не порушили рівносильності нерівностей: даної і вихідної).

3. Розділимо обидві частини нерівності на 3:

$x < 7$ (скористалися наслідком з теореми 4, отримали нерівність, рівносильну вихідній).

Отже, рішенням нерівності $x < 7$ є проміжок $(-\infty, 7)$ і тому рішеннями нерівності $5x - 5 < 2x + 16$ також є проміжок $(-\infty, 7)$.

У результаті вивчення матеріалу лінії рівнянь і нерівностей учні повинні не тільки оволодіти застосуванням алгоритмічних приписів до розв'язання конкретних завдань, а й навчитися використовувати логічні засоби для обґрунтуванняя розв'язків у випадках, коли це необхідно [9]. Вивчення та використання перетворень нерівностей та їх систем, з одного боку, вимагають досить високу логічну культуру учнів, а з іншого боку, в процесі вивчення і застосування таких перетворень є широкі можливості для формування такої логічної культури. Складнощі, які доводиться долати при вирішенні нерівностей за допомогою перетворень, пов'язані з тим, що далеко не завжди можливо привести характеристику одного і того ж перетворення однозначно: у деяких випадках воно може виявитися, наприклад, рівносильним, в інших рівносильність буде порушена.

Таким чином, в процесі навчання методам розв’язування нерівностей в курсі алгебри застосовуються перетворення однієї з частин нерівності, узгоджене перетворення обох частин нерівності чи перетворення всієї логічної структури нерівності. Важливе значення при цьому має поняття рівносильності нерівностей, що дозволяє приводити вихідну нерівність до простої нерівності, рішення якої знаходиться просто.

1.3. Основні методи доведення нерівностей

Досить важливим питанням методики навчання нерівностей є вироблення навичок учнів застосовувати метод доведення нерівностей. Задачі на доведення нерівностей в основному розв‘язуються алгебраїчним способом, який є одним із кращих засобів розвитку самостійного, творчого мислення школярів. За допомогою спеціально підібраних задач, здатних зацікавити учнів своєю простотою, варто показати учням красу та простоту логічних міркувань.

Слід констатувати, що задачі на доведення нерівностей часто розв‘язуються декількома способами. Це дає можливість звернути увагу учнів не тільки на найбільш раціональний спосіб розв‘язання даної задачі, але і на ті способи, які можуть застосовуватися при розв‘язуванні інших задач.

Якщо зі способами доведення теорем учні знайомляться в 7 класі, то вивчення окремої теми «Доведення нерівностей» не передбачене новою програмою, але завдання з цієї теми часто зустрічаються на олімпіадах і слугують гарним засобом розвитку логічного мислення та формування евристичних прийомів розв’язування задач. Крім того, цю тему вивчають у класах з поглибленим вивченням математики [18]. Проаналізуємо деякі способи доведення.

I. Синтетичний і аналітичний методи доведення.

Розглянемо доведення такого твердження:

Приклад

Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Доведення

Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0,$ або $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$

Звідки $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Поділивши обидві частини на 2, дістанемо

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad (**)$$

Що й треба було довести.

Нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ називають нерівністю Коші для двох чисел. Логічною основою в цьому доведенні є аксіома, що з правильного твердження завжди випливає і правильний наслідок. Міркування в ньому йдуть від умови і вже відомого твердження $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, до доводжуваного. Такий метод доведення називають *синтетичним*.

Синтетичний метод доведення дуже простий з логічного погляду, такі доведення найбільш переконливі і порівняно короткі. Тому більшість теорем у шкільному курсі математики доводять саме синтетичним методом [28].

Проте такі доведення не позбавлені і певних недоліків. Як учні мають здогадатися, що доведення наведеного вище твердження треба починати з нерівності $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$.?Як їм здогадатися, в якому напрямі треба виконувати перетворення даної нерівності, щоб дістати бажаний результат? Отже, синтетичний метод доведення зручний тоді, коли доведення уже відоме і ми хочемо пояснити його іншим. Якщо слід відшукати доведення, тоді зручніше користуватись аналітичним методом.

Так, *аналітичним* називають такий метод доведення, при якому міркування йдуть від доводжуваного твердження до відомих (від тези до аргументів).

Наприклад, доведемо ту саму нерівність аналітичним методом.

Доведення

Щоб показати, що при $a \geq 0$ і $b \geq 0$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

досить показати, що

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

бо з цієї нерівності випливає доводжувана. Це випливає з наступних нерівностей:

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

$$\text{або } \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$$

Дана нерівність є правильною при будь-яких невідємних a і b, бо квадрат дійсного числа не може бути від'ємним.

Отже, доводжувана нерівність правильна, оскільки випливає з правильного твердження.

Логічна основа аналітичного методу доведення така сама, як і синтетичного: з правильного твердження завжди випливає правильний наслідок. Відрізняється він від синтетичного лише напрямом міркувань. При доведенні аналітичним методом спочатку підшукують таке твердження, з якого випливає доводжуване, потім таке, з якого випливає підшукане раніше, і т. д. доти, доки не приходять до вже відомого твердження. Цей напрям міркувань протилежний тому, який маємо при синтетичному методі [12].

Зауважимо, що іноді в математичній літературі аналітичний метод доведення називають пов'язують *з аналізом Евкліда:* «Твердження доводять аналітично, якщо шукане приймають за відоме і на основі виведених звідси наслідків дістають відому істину» [25]. Застосуємо такий спосіб міркувань до доведення вже розглянутої нами нерівності.

Будемо вважати, що нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$ правильна. Помножимо обидві її частини на 2:

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Перенесемо $2\sqrt{ab}$ в ліву частину:

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \quad \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 .$$

Остання нерівність правильна, бо квадрат дійсного числа не може бути від'ємним. Тож, даний метод доведення є також доцільним , але не є строгим .

II. *Метод доведення від супротивного*.

Як відомо, для супротивних тверджень справедливо наступне: з двох супротивних тверджень одне завжди правильне, інше - ні, і третього бути не може. Тому замість безпосереднього доведення даного твердження можна просто показати, що супротивне йому твердження неправильне, а з цього випливатиме справедливість даного твердження. Такий метод доведення називають *методом доведення від супротивного.*

Методом від супротивного користуються, зокрема, при доведенні теорем у планіметрії і стереометрії. Часто його використовують і при доведенні алгебраїчних тверджень.

Скористаємось цим методом для вирішення такої задачі:

для будь-яких значень a_1, a_2, b_1, b_2 доведіть нерівність

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \qquad (***)$$

Доведення

Нехай нерівність, що доводиться, є неправильною. Тоді знайдуться такі числа a_1, a_2, b_1, b_2, що буде правильною нерівність

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 > (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Звідси:

$$a_1^2 b_1^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 > a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 ;$$

$$2 a_1 b_1 a_2 b_2 > a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2;$$

$$a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 < 0;$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 < 0.$$

Остання нерівність є неправильною, отже, отримана суперечність означає, що нерівність (***) є правильною.

Розв'яжемо ще одну задачу, доведемо тепер методом від супротивного нерівність:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \; (a \geq 0, b \geq 0).$$

Доведення

Припустимо, що при деяких $a > 0$ і $b > 0$ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Тоді $a + b < 2\sqrt{ab}$, $a - 2\sqrt{ab} + b < 0$, $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 < 0$. Остання нерівність не може бути правильною ні при яких невідємних *a* і *b*. Отже, припущення неправильне. Тому при всіх невідємних *a* і *b*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Можна запропонувати учням проаналізувати, наприклад, і таке «доведення» методом від супротивного:

довести, що при всіх невідємних *a* і *b* $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення.

Припустимо, що при всіх невідємних *a* і *b* $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Це припущення неправильне, бо, наприклад, неправильною є нерівність $\frac{1+9}{2} < \sqrt{1 \cdot 9}$. Отже, правильною є доводжувана нерівність.

Не менш важливим при вивченні теми «Нерівності» є метод математичної індукції, який допомагає доводити і теореми, і нерівності.

ІІІ. *Метод математичної індукції*

Логічною основою цього методу доведення є така аксіома: Якщо твердження, формулювання якого містить змінну п, правильне при п =1 і якщо з припущення, що воно правильне при довільному п = k, випливає, що воно правильне і при п = k + 1, то це твердження правильне при всіх натуральних значеннях п [14].

Методом математичної індукції можна доводити не тільки ті твердження, які правильні при $n = 1$, а й такі, які правильні для всіх натуральних n, більших від деякого p. У цьому випадку можна спочатку зробити заміну $n = m + p$ і доводити індукцією по m, а можна посилатись на такий наслідок з аксіоми індукції.

Якщо твердження із змінною n правильне при $n = p$ і якщо з припущення, що воно правильне при $n = k$, де $k > p$, випливає, що воно правильне при $n=k+1$, то це твердження правильне при всіх цілих значеннях $n \geq p$ (p, k є Z).

Для прикладу розглянемо доведення такого твердження.

При всіх натуральних n, більших за 4, правильна нерівність

$$2^n > n^2 .$$

Доведення

При $n = 5$ нерівність правильна, бо $32 > 25$. Припустимо, що ця нерівність правильна при деякому довільному $k \geq 5$, тобто

$$2^k > k^2.$$

Тоді

$$2^k + 2^k > k^2 + k^2 .$$

Але $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ і при $k \geq 5$ $k^2 \geq 2k + 1$. Тому

$$2^{k+1} > k^2 + 2k + 1,.$$

$$2^{k+1} > (k + 1)^2$$

Як бачимо, доводжувана нерівність правильна при $n = 5$, і якщо правильна при $n = k$, то правильна і при $n = k + 1$. Отже, ця нерівність правильна при всіх натуральних $n \geq 5$.

У математиці відомі є й інші схеми міркувань методом математичної індукції, проте в школі вони не розглядаються.

Іноді метод математичної індукції називають ще методом досконалої індукції, методом повної математичної індукції, методом переходу від n до $n+1$ і т. д. Але аби не вносити плутанини, вводити ці терміни в школі не доцільно.

1V. Метод використання очевидних нерівностей.

Покажемо використання цього методу на прикладі:

доведіть нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a\ b + b\ c + a\ c.$$

Доведення

Очевидно, що при будь-яких значеннях a, b, c виконується така нерівність:

$$(a - b) + (b - c) + (c - a) \geq 0.$$

Звідси:

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0;$$

$$2\ a^2 + 2\ b^2 + 2\ c^2 \geq 2\ a\ b + 2\ b\ c + 2\ a\ c\ ;$$

$a^2 + b^2 + c^2 \geq a\ b + b\ c + a\ c$, що й треба було довести.

V . Метод застосування раніше доведеної нерівності.

Розглянемо на прикладі, як можна використовувати нерівність Коші (**) при доведенні інших нерівностей.

Наприклад, доведіть, що для додатних чисел a і b справедлива нерівність

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4.$$

Доведення

Застосуємо нерівність Коші (**) для додатних чисел a і $\frac{1}{b}$.

Маємо

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2}\geq\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}}.$$

Звідси

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Аналогічно доводимо, що $b + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримаємо:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\ge 4\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Звідси $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\ge 4.$

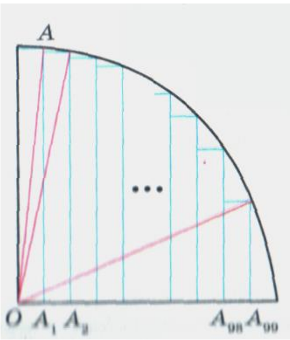
V I. Метод геометричної інтерпретації

До прикладу, доведемо нерівність:

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<\frac{100^2\pi}{4}.$$

Доведення

Розглянемо чверть кола з центром О радіуса 1. Впишемо в нього ступінчасту фігуру, яка складається з 99 прямокутників (рис.1.4).



$$OA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{98}A_{99} = \frac{1}{100}.$$

Площа першого прямокутника

$$S_1 = OA_1\cdot AA_1 = OA_1\cdot\sqrt{1-\hat{I}\grave{A}_1^{\,2}} = \frac{1}{100}\sqrt{1-\frac{1}{100^2}} = \frac{\sqrt{99\cdot 101}}{100^2}$$

.

Рис. 1.4. Чверть кола з центром О радіуса 1

Для другого прямокутника маємо:

$$S_2 = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{2}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{98\cdot 102}}{100^2}\ \text{і т.д.,}$$

$$S_{99} = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{1\cdot 199}}{100^2}.$$

Площа ступінчатої фігури менша від площі чверті круга, тобто

$$\frac{\sqrt{99\cdot 101}}{100^2}+\frac{\sqrt{98\cdot 102}}{100^2}+\ldots+\frac{\sqrt{1\cdot 199}}{100^2}<\frac{\pi}{4}.$$

Звідси випливає нерівність, що доводиться.

Можна розглянути ще й інші нерівності (вчителю надається можливість самостійно визначати які нерівності обрати та коли їх розв'язувати). Розглянемо для демонстрації зазначених вище методів наступні задачі.

Задача 1 [16].

Довести нерівність

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}\ \text{,якщо}\ a \geq 0,\ b \geq 0,\ a + b = 1.$$

Доведення

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1-2ab,$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2 = (1 - 2a\, b)^2 - 2\, a^2 b^2.$$

Отже,

$$a^4+b^4 = (1 - 2a\, b)^2 - 2\, a^2 b^2 \qquad (1)$$

З умови випливає, що $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$

За нерівністю Коші $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Тому $ab \leq \frac{1}{4}$.

Якщо в рівнянні (1) замінимо ab більшим значенням $\frac{1}{4}$, то отримаємо:

$$a^4 + b^4 \geq \left(1 - 2\cdot\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

Задача 2[16].

Довести нерівність

$$a^5 + b^5 \geq \frac{1}{16},\ \text{якщо}\ a \geq 0,\ b \geq 0,\ a + b = 1.$$

Доведення

Оскільки

$$(a + b)^5 = a^5 + 5\, a^4\, b + 10\, a^3\, b^2 + 10\, a^2\, b^3 + 5\, a\, b^4 + b^5$$

і

$$a + b = 1,$$

то

$$a^5+b^5=1-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)=1-5ab((a+b)(a^2-ab+b^2)=1-5ab(a^2-ab+b^2+2ab)=1-5ab((a+b)^2-ab)=1-5ab(1-ab).$$

За нерівністю Коші $\quad ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

З умови випливає, що $\quad ab \le \frac{1}{4}$

Замінимо ab більшим числом $\frac{1}{4}$, отримаємо:

$$a^5+b^5 \ge 1-5\cdot\frac{1}{4}\cdot(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{16}.$$

Задача 3 [16].

Довести нерівність

$$a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ac),$$

якщо a, b, c - сторони трикутника.

Доведення

Нехай $a \le b \le c$, $a-b \le c$, $a-c \le b$, $b-c \le a$. Тоді

$$(a-b)^2 \le c^2,$$

$$(a-c)^2 \le b^2,$$

$$(b-c)^2 \le a^2.$$

Додавши почленно ліві і праві частини нерівностей, отримаємо:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+ac+bc) \le a^2+b^2+c^2,$$

$$a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+ac+bc).$$

Підсумовуючи, можемо зазначити, що методи доведення нерівностей є доволі поширеними при вивченні нерівностей та при доведенні теорем в геометрії. Важливим моментом при цьому виступає обрання того чи іншого методу доведення: методу індукції, доведення від супротивного, застосування раніше доведеної нерівності та ін. Учнів слід направити на вибір доцільного методу доведення з тим, щоби спосіб доведення був найбільш раціональним.

Висновки до розділу 1

У курсі алгебри основної школи лінія рівнянь і нерівностей є однією з найважливіших. Уміння вирішувати нерівності (лінійні з однією змінною, раціональні і квадратні), які вивчаються переважно у 9 класі і деякі елементи – у 5-7 класах, дає можливість учням знаходити рішення багатьох математичних задач, а також доводити теореми в курсі геометрії.

При вивченні теми «Нерівності» в основній школі рішення нерівностей частіше пов’язане з переходом від даного нерівності a>b до рівняння a = b і наступним переходом від знайдених коренів рівняння до множини рішень вихідної нерівності. Суттєве значення для розв’язку нерівностей мають наочно-графічні засоби, які дозволяють учням побачити систему зв’язків між елементами нерівності.

Методи розв’язку нерівностей ґрунтуються на кількох видах їх перетворень, які включають або способи спрощення математичного виразу нерівності, або зведення останньої до вже відомого вирішеного варіанту. Важливими методами вирішення нерівностей в курсі алгебри виступають методи: індукції, доведення від супротивного, застосування раніше доведеної нерівності тощо. Застосування комплексу методів для вирішення нерівностей дозволить учням краще засвоїти знання і здобути відповідні навички, що дасть їм можливість у подальшому успішно вивчати інші розділи математики.

Лінія рівнянь і нерівностей має своє продовження в курсі алгебри і початків аналізу. Тому перед вчителем стоїть завдання – розвити вміння учнів, пов'язані з нерівностями, до належного рівня, щоб на них можна було спиратися для розвитку подальших уявлень і вмінь школярів.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ В КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

2.1. Методика формування умінь і навичок розв'язування раціональних нерівностей

Як ми вже зазначали в І-му розділі, вивчення нерівностей організовано в змістово-методичну лінію рівнянь і нерівностей, що тісно пов'язана з числовою, функціональною та іншими лініями шкільного курсу математики. Засвоєння навчального матеріалу з даної теми передбачає формування в учнів поняття нерівності, вивчення основних класів нерівностей, їх систем і загальних методів їх розв'язування.

У процесі вивчення різних типів нерівностей встановлюються їх особливості та зв'язки між ними, виділяються більш загальні класи, закріплюються узагальнені типи перетворень, спрощується опис та обґрунтування розв'язання. Основні класи нерівностей та їх систем вивчаються незалежно один від одного і завдяки поступовому розширенню кількості вивчених класів нерівностей та їх систем учні засвоюють загальні, універсальні прийоми їх розв'язування (логічні, обчислювальні та наочно-графічні прийоми). Як наслідок, учбовий матеріал сприймається школярами краще, адже представляється у доволі компактному вигляді, що полегшує засвоєння нових знань [20].

Одним з найперших типів нерівностей, з якими знайомляться діти в школі, є раціональні нерівності. Їх вивчення має ряд особливостей:

1) зазвичай навички розв'язування нерівностей (за виключенням квадратних) формуються на менш високому рівні, ніж рівнянь відповідних класів;

2) більшість прийомів розв'язування нерівностей пов'язані з переходом від даної нерівності $a>b$ до рівняння $a = b$, а потім через зворотний перехід від знайдених коренів рівняння до множини розв'язків вихідної нерівності. Цей

перехід не робиться у разі розгляду лінійних нерівностей, адже в цьому немає потреби через простоту способу розв’язування подібних нерівностей;

3) при розв’язуванні задач з нерівностями значно допомагають наочно-графічні засоби навчання [18, с. 49].

Отже, можна констатувати, що успішність вивчення раціональних нерівностей цілком залежить від рівня засвоєння учнями функціональної лінії шкільного курсу (побудови графіків і графічного дослідження функцій). Звідси, для розв’язування нерівностей потрібно формувати в учнів знання щодо властивостей функцій та основних понять, що пов’язані з рівносильністю нерівностей.

Слід зазначити, що до окремих класів нерівностей (їх систем) застосовуються ті ж прийоми та методи, що й до розв’язування рівнянь. Проте учні повинні пам’ятати, що розв’язування нерівностей порівняно з розв’язуванням рівнянь, має свою специфіку: однакові перетворення, що застосовуються для розв’язування рівнянь і нерівностей, призводять до різних результатів. Наприклад, при множенні обох частин рівняння на деякий числовий множник, що не дорівнює нулю і входить в область допустимих значень (далі – ОДЗ), рівняння заміниться на рівносильне йому. Для нерівностей зазначених обмежень на множник недостатньо, ще необхідно, щоби він був додатнім в ОДЗ. Аналогічно і піднесення обох частин рівняння до квадрату не веде до втрати коренів, проте таке ж перетворення нерівності здатне призвести і до втрати розв’язків, і до придбання зайвих. На жаль, учні часто забувають про ці особливості в ході розв’язування нерівностей, і це треба враховувати вчителю при плануванні уроків.

Варто вказати, що при вивченні числових, лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей також існують особливості, пов’язані з тим, що для них вказується певний алгоритм розв’язування, який доводиться до автоматизму, а також наводиться форма, за якою має бути записана відповідь.

Числові та лінійні нерівності є складовими частинами теми «Нерівності» у курсі алгебри для 9 класу, на її вивчення відводиться 14 годин [15]. Ця тема має велике значення у курсі алгебри, так як дає базові знання, що необхідні при подальшому вивченні алгебри у старших класах. Разом з тим, тема тісно пов'язана з уже вивченим матеріалом, що дає можливість учням легко оволодіти нею.

Вивчення даної теми спрямоване на набуття нових умінь та навичок учнів. Зокрема, школярі мають навчитись почленно додавати та множити нерівності, застосовувати властивості числових нерівностей для оцінювання значення виразу; розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною, виконувати рівносильні перетворення; формулювати теореми та властивості: властивість транзитивності числових нерівностей, теорему про додавання одного й того самого числа до обох частин числової нерівності, теорему про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме додатне число, теорему про множення обох частин числової нерівності на одне й те саме від'ємне число, теорему про додавання числових нерівностей, теорему про множення числових нерівностей [26].

Вивчення цього матеріалу починається з формулювання загального визначення понять «більше», «менше» або «дорівнює», що є узагальненням відомих правил порівняння дійсних чисел, вивчених у попередніх роках навчання. При цьому варто наголосити на тому, що сформульоване означення може бути використане не лише для порівняння будь-якого виду чисел, а й для порівняння виразів. Зважаючи на те, що вказана тема є новою для учнів, то,на думку більшості вчених, доцільно використати абстрактно-дедуктивний метод введення ряду понять, адже цей спосіб забирає менше часу на пояснення і дає більше часу на розгляд прикладів, потребуючи при цьому від школярів певної математичної підготовки.

Сформулювавши означення нерівності, педагог повинен провести роботу зі систематизації знань учнів про існуючі види нерівностей: вони поділяються за знаком (строгі та нестрогі) та за змістом (числові та зі змінними). При цьому важливо показати аналогію з видами числових рівностей, внаслідок чого учні мають усвідомити, що нерівності (як і рівності) за своїм змістом поділяються на правильні та неправильні.

З розгляду видів нерівностей цілком логічно випливає питання про доведення того факту, що дана нерівність є правильною (або визначення правильності чи неправильності даної нерівності).

Таким чином відбувається формування уявлень учнів про зміст поняття «довести нерівність», а також вони знайомляться із послідовністю дій при доведенні нерівностей, що ілюструється далі відповідним прикладом доведення числової нерівності.

Для свідомого сприйняття школярами процесу вивчення теми «Нерівності» вчитель може або провести бесіду з учнями, або ж організувати самостійну роботу учнів, у процесі якої проводитимуться паралелі між поняттями «рівності» та «нерівності», а звідси – між поняттями «рівняння» та «нерівності». Тобто, учні мають усвідомити, що, як і у випадку з рівняннями, нерівності можуть умовно поділятися на числові та такі, що містять невідомі числа, замінені буквами, значення яких треба знайти. Вчитель також повинен домогтися, аби учні мали розуміння таких тверджень, як: запис $x \geq y$ означає, що або $x > y$, або $x = y$; замість двох нерівностей $x < a$ і $a < y$, можна записати подвійну нерівність $x < a < y$.

Безумовно важливим етапом у засвоєнні учнями даної теми є вивчення ними основних властивостей числових нерівностей і розв'язування математичних вправ на їх застосування.

На етапі формування первинних умінь і навичок учнів вчитель може запропонувати такі вправи:

1. Перевірте, які нерівності серед наведених правильні:

1) $0>6$; 2) $7>7$; 3) $-2,52 > 2,01$; 4) $-7 > -8$.

2. Знайдіть найменше і найбільше ціле число, що задовольняє нерівність:

1) $x \leq 3$; 2) $x \geq 4,55$; 3) $\frac{x}{3} < 3,4$;

4) $x < 999$; 5) $2,3x \geq -4,6$; 6) $-55x > -200$

3. Додайте нерівності:

1) $3<5$ і $6<9$;

2) $7x + 5a^2 \geq 6a – 3a^2$ і $9x - 4a \geq 4a^2 – 22$

4. Перемножте нерівності (a,x,y>0):

1) $4<x$ і $5<y$;

2) $2<4^3$ і $4^3\,3^3 <6$;

5. Нехай $a < b$. Порівняйте числа:

1) $a+4$ і $b+7$;

2) $a - 5$ і $b - 5$;

3) $a + a^2$ і $b + b^2$.

Крім того, вчитель може запропонувати більш складні вправи на порівняння чисел та виразів для учнів, що краще встигають на уроках математики.

Після досить докладного вивчення означення та властивостей числових нерівностей учні переходять до вивчення нового виду нерівностей в темі «Лінійні нерівності з однією змінною. Системи нерівностей з однією змінною». В ході вивчення лінійних нерівностей учні середньої ланки мають навчитись наводити приклади виразів нерівності. Не менш важливою навичкою є здатність розв’язувати вправи, які передбачають: - почленне додавання і множення нерівностей; - розв’язування нерівності зі змінною; - рівносильні перетворення; - об’єднання числових проміжків; - розв’язування лінійних нерівностей; - розв’язування систем двох нерівностей з однією змінною [21].

Вивчення теми слід почати з формування поняття «лінійна нерівність з однією змінною» та поясненням загальної схеми її розв’язування (рис. 2.1).

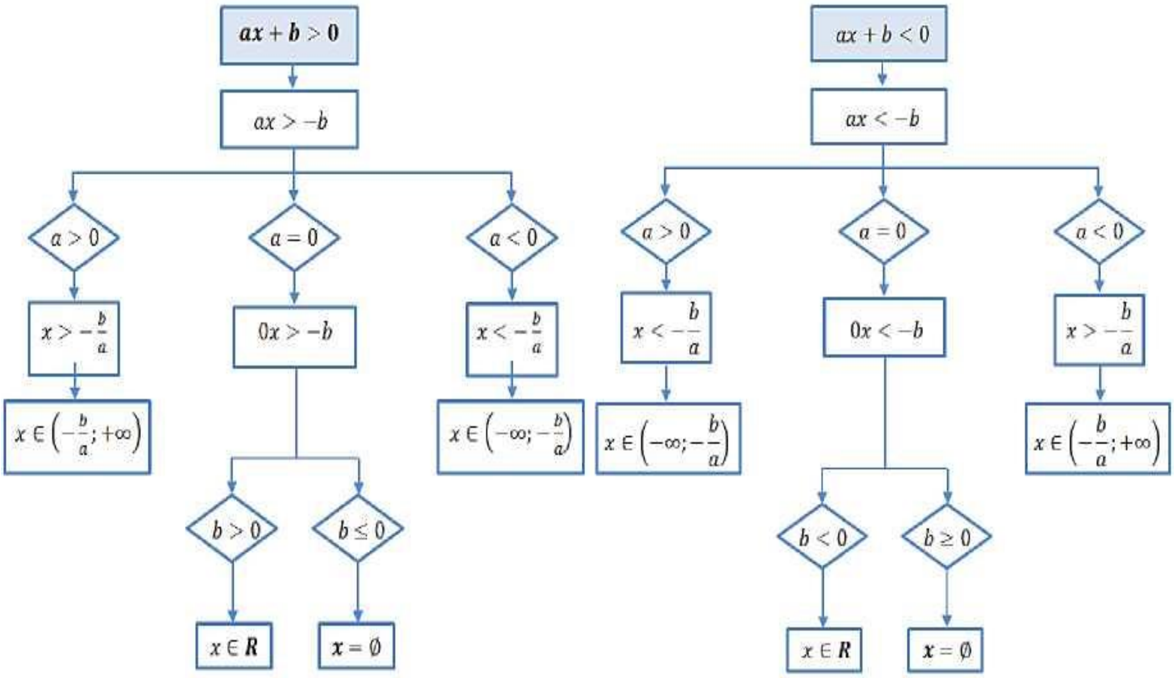


Рис. 2.1. Загальна схеми розв'язування лінійних нерівностей виду

$ax + b > 0$ і $ax + b < 0$

Розвиток відповідних навичок учнів вчитель може розпочати під час розв'язування практичних задач. Розглянемо деякі приклади.

Приклад 2.1. Розв'язати нерівність $5 \cdot x + 7 > 3 \cdot (2 \cdot x - 5) - x$.

Розв'язання

Розкривши дужки в правій частині нерівності, отримаємо:

$$5 \cdot x + 7 > 6 \cdot x - 15 - x.$$

Згрупуємо в одній стороні вирази з невідомою, а в іншій – вільні числа:

$$5 \cdot x - 6 \cdot x + x > -7 - 15.$$

Зведемо подібні доданки: $0 \cdot x > -22$.

В результаті ми отримали нерівність, що рівносильна початковій. Частина учнів вирішують, що така нерівність не має розв'язків, плутаючи це з розв'язанням лінійного рівняння $0 \cdot x = -22$, розв'язком якого дійсно є порожня множина. Проте, це хибна думка, адже ланцюг міркувань при розв'язуванні нерівностей дещо відрізняється. Тому вчитель повинен пояснити школярам, що розв'язком цієї нерівності буде будь-яке число, оскільки нуль завжди більше від'ємного числа. Отже, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: x Є R.

Приклад 2.2. Розв'язати нерівність:

$$10 \cdot x + (x - 2) \cdot (x + 2) > (x + 5)^2.$$

Розв'язання

Уважно подивившись на нерівність, учні помічають, що в ній присутні формули скороченого множення: в лівій частині - різниця квадратів, а в правій - квадрат суми:

$10 \cdot x + x^2 - 4 > x^2 + 10 \cdot x + 25.$

Перенесемо вирази з невідомою в ліву частину, а числа - в праву з протилежним знаком:

$10 \cdot x + x^2 - x^2 - 10 \cdot x > 25 + 4.$

Після спрощення шляхом зведення подібних доданків нерівність матиме вигляд: $0 \cdot x > 29$.

На відміну від прикладу 2.1, ця нерівність не має жодного розв'язку, адже нерівність $0 > 29$ є неправильною.

Відповідь: x Є∅.

Після розгляду цих прикладів учні розуміють, що нерівності вигляду

$0 \cdot x > b$, $0 \cdot x < b$, або зовсім не мають розв'язку, або їх розв'язком є будь-яке число.

В процесі розв'язування лінійних нерівностей вчитель має слідкувати за тим, щоб учні розуміли залежність між знаком нерівності, виглядом точки на координатній прямій і дужок в записі інтервалу для відповіді (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Прийняті позначення в різних видах нерівностей

Знак нерівності	Вигляд точки на координатній прямій	Вигляд дужки в записі інтервалу
$>$ $<$	Виколота точка o	(,)
$\geq$ $\leq$	Зафарбована точка •	[,]

Слід наголосити, що одна з головних задач вчителя - показати учням, як при розв'язуванні нерівностей через виконання тотожних перетворень можна втратити розв'язки, якщо діяти за алгоритмом розв'язування рівнянь. Так, звільнення дробу від знаменника не призводить до втрати коренів у рівнянні, а зайві корені можуть з'явитися за рахунок розширення ОДЗ, тобто при внесенні в ОДЗ тих значень невідомого, які перетворюють знаменник в нуль.

Більшість учнів вважають, що подібна ситуація може застосовуватися і до нерівностей. Тому, наприклад, нерівність $\frac{2}{x} < 1$ вони розв'язують, переходячи після звільнення від знаменника до нерівності x>2. Після цього вони стверджують, що всі значення і будуть розв'язками вихідної нерівності, адже при жодному з них знаменник вихідної нерівності не перетворюється в нуль.

Однак легко бачити, що вихідна нерівність справедлива і при усіх від'ємних x. Але всі ці розв'язки втрачаються через те, що звільнення від знаменника в нерівності відбувається зовсім не так, як у рівняннях. Для нерівностей характерна така властивість: при множенні обох частин нерівності на один і той самий додатній вираз знак нерівності не міняється, а при множенні на від'ємний змінюється на протилежний.

Приклад 2.3. Розв'язати нерівність $\frac{x}{5} + 6 > \frac{6}{25} + 3x$

Розв'язання

Для початку позбудемось знаменників у дробах, для чого помножимо ліву і праву частину нерівності на 25 і отримаємо:

$5x + 150 > 6 + 75x$.

Перенесемо тепер невідомі доданки в одну частину, а відомі - в іншу з протилежним знаком і зведемо подібні доданки:

$5x - 75x > 6 - 150 \quad => \quad -70x > -144$.

Поділимо отриману нерівність на -2. Оскільки це число від'ємне, то учням слід нагадати, що при діленні нерівності на від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний, тому отримаємо: $x < \frac{72}{35}$.

Відповідь: x Є (- ∞ ; $\frac{72}{35}$).

Отже, головна діяльність, спрямована на розв'язування лінійних нерівностей, передбачає вжиття таких кроків:

1) звільнитися від дробів шляхом множення на більший спільний знаменник;

2) розкрити дужки (якщо вони є) та перенести з протилежним знаком невідомі в одну сторону, а відомі - в іншу;

3) звести подібні доданки і поділити обидві частини нерівності на відмінний від нуля коефіцієнт, який стоїть біля x.

Важливим етапом у вивченні нерівностей є тема «Квадратні нерівності», яка починається з формування знань учнів про зміст поняття «квадратна нерівність» та формування первинних умінь вирізняти квадратні нерівності серед інших нерівностей з однією змінною.

Оскільки вивчення квадратних нерівностей слідує за вивченням квадратного рівняння, то учні вже мають навички побудови графіка квадратичної функції, пошуку нулів функції тощо. Відтак, перехід до вивчення квадратних нерівностей можна почати з побудови й вивчення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$. Оскільки можуть бути різні випадки розташування графіка відносно осі Ox, краще почати з розгляду такого прикладу, в якому цей квадратний тричлен має різні корені.

Приклад 2.4. Розв'язати нерівність $x^2 + 7x – 8 < 0$.

Розв'язання

Розглянемо функцію, яка розташована у лівій частині нерівності - квадратного тричлена. Її графіком є парабола, тож постає питання: де ця парабола знаходиться нижче нуля або нижче осі абсцис? Щоб відповісти на це питання, слід з'ясувати, в яких точках вона перетинає вісь Ox. Учні згадують, що це можна зробити, прирівнявши функцію до нуля і розв'язавши отримане рівняння. Отже, щоб розв'язати задану нерівність, треба прирівняти її ліву частину до нуля і розв'язати рівняння:

$$x^2 + 7x – 8 = 0.$$

Учні помічають, що дане квадратне рівняння можна розв’язати за теоремою Вієта і отримати 2 корені даного рівняння: $x_1 = -8$, $x_2 = 1$. Далі, на підставі ескізу параболи, з’ясовують, що гілки параболи направлені вгору і парабола перетинає вісь *Ox* в точках $x_1 = -8$ і $x_2 = 1$ (рис. 2.2).

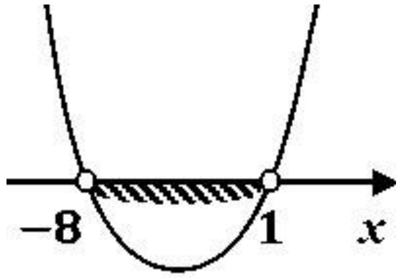


Рис. 2.2.

Далі повертаємось до заданої нерівності. Знак нерівності свідчить про те, що необхідно з’ясувати, на якому з трьох утворених проміжків на координатній прямій парабола знаходиться нижче вісі *Ox* (< 0). З рисунка очевидно, що це проміжок $(-8; 1)$.

Відповідь: $(-8; 1)$.

Доцільно запропонувати учням розв’язати кілька квадратних нерівностей, аби побачити різницю в їх розв’язках залежно від знака квадратної нерівності. Під час подальшого вивчення теми з’ясовується, що немає потреби точно будувати графік квадратного тричлена, а досить намітити тільки положення коренів, якщо вони є, і врахувати на ескізі потрібні особливості графіка (напрям віток параболи).

Приклад 2.5. Розв’язати нерівність $x^2 - 2x - 3 > 0$.

Розв’язання

Аналогічно до попереднього прикладу, розв’яжемо за допомогою теореми Вієта відповідне квадратне рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$. Коренями рівняння будуть -1.3 . Далі потрібно зобразити схематично параболу, вітки якої направлені вгору і яка перетинає вісь абсцис у даних точках (рис. 2.3):

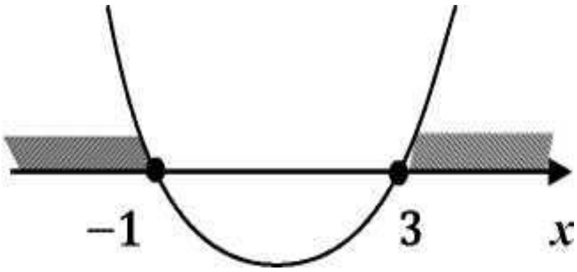


Рис. 2.3.

Як видно з рис. 2.3, є два проміжки, на яких відповідна квадратична функція набуває додатних значень (> 0). Тому розв'язком заданої нерівності буде об'єднання цих проміжків: x Є (- ∞ ; - 1] **U**[3 ; + ∞) .

Відповідь: x Є (- ∞ ; - 1] **U** [3 ; + ∞) .

Для розвитку процедурної компетентності учнів доцільно розглянути з ними якомога більше прикладів, що показують різні випадки розташування параболи щодо осі O*x*.

Приклад 2.6. Розв'язати нерівність $2\ x^2 - 3\ x + 2 > 0$.

Розв'язання

Розв'яжемо відповідне квадратне рівняння за допомогою дискримінанта: $D=(-3)^2 4 \bullet 2 \bullet 2=9-16<0$. І коли багато хто з учнів зазначили б, що нерівність коренів не має, вчителю варто наголосити учням, що ставилось завдання - розв'язати нерівність, а не рівняння. Якщо відповідне квадратне рівняння не має коренів, це не означає, що параболи не існує - вона не перетинає вісь абсцис (рис. 2.4):

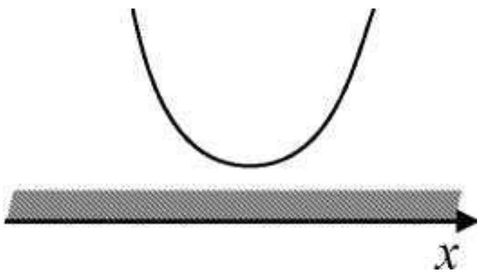


Рис. 2.4.

Далі, згідно з умовою задачі, треба визначити, на якому проміжку парабола знаходиться вище осі абсцис. Учень має побачити, що це проміжок $(-\infty; +\infty)$, тобто це вся множина дійсних чисел R.

Відповідь: R.

Також обов'язково треба розглянути з учнями випадок, коли парабола перетинається з віссю абсцис лише в одній точці.

Приклад 2.7. Розв'язати нерівність $x^2 + 2x + 1 < 0$.

Розв'язання

Розв'язавши квадратне рівняння , учень приходить до висновку, що дискримінант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 = 0$. Отже, розв'язком рівняння буде точка $x = -1$ і у цій точці парабола матиме точку перетину з віссю Ox (рис. 2.5):

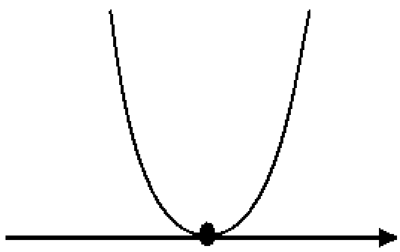


Рис. 2.5

Відповідь: $x \in \emptyset$.

Після розгляду подібних прикладів вчитель може запропонувати учням узагальнену схему з різними випадками розташування графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі Ox залежно від знака старшого коефіцієнта та знака дискримінанта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (Додаток 1). Під час тренування учні звикнуть користуватися нею і застосовувати у відповідності до отриманого завдання.

При формуванні вмінь розв'язувати квадратні нерівності за допомогою вивченої схеми слід вимагати від учнів виконання таких дій: 1) зведення нерівності до виду квадратної; 2) відшукання дійсних коренів квадратного тричлена (якщо вони існують) та побудова ескізу графіка квадратичної функції; 3) запис проміжку, на якому функція набуває знака, що відповідає даній квадратичній нерівності (з урахуванням строгості знака нерівності) [22].

Перелік вправ, які пропонуються до розв'язування на уроці, може включати такі завдання:

1) знайти розв'язки квадратної нерівності за готовим графіком відповідної квадратичної функції;

2) розв'язати за вивченою схемою квадратні нерівності;

3) розв'язати нерівності другого степеня, що зводяться до квадратних рівносильними перетвореннями;

4) на повторення: дослідити властивості функції за даним графіком.

Наприкінці вивчення квадратних нерівностей учні повинні вміти: формулювати означення квадратної нерівності; знати, як розв'язати нерівність та що є розв'язком квадратної нерівності; розуміти скільки розв'язків може мати квадратна нерівність; наводити приклади квадратних нерівностей, у т.ч. які: не мають жодного розв'язку; мають тільки 1 розв'язок; задовольняють усі дійсні числа; знати різні способи розв'язування квадратних нерівностей.

Вміння розв'язувати як окремі нерівності, так і їх системи та сукупності є важливою складовою математичної культури учнів. Тому розв'язування систем та сукупностей нерівностей заслуговує особливої уваги, адже це комплексна навчально-математична діяльність, що передбачає володіння учнем такими знаннями та уміннями: а) розуміння сутності понять «система нерівностей», «сукупність нерівностей»; б) володіння різними методами та прийомами розв'язування окремих видів нерівностей; в) вміння планувати та реалізовувати сплановану діяльність, пов'язану з розв'язуванням систем та сукупностей нерівностей; г) вміння зображати числові множини, що є розв'язками окремих нерівностей, знаходити їх перерізи та об'єднання і формулювати відповідь.

Вперше учні зустрічаються із системами та сукупностями раціональних нерівностей у 9 класі під час вивчення теми «Системи лінійних нерівностей з однією змінною». В переважній більшості учні стикаються з завданнями на розв'язування систем квадратних нерівностей.

Для усвідомлення учнями необхідності у вивченні способів розв'язування систем та сукупностей нерівностей з однією змінною вчитель може запропонувати на етапі мотивації навчальної діяльності розв'язати конкретний приклад. Якщо на попередніх уроках вчителю вдалося сформувати в учня чітке уявлення про зміст понять: переріз та об'єднання числових проміжків, лінійна нерівність, квадратна нерівність, розв'язок нерівності з однією змінною, а також сталі навички розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною і квадратних нерівностей та рівносильних перетворень нерівностей, то при розв'язуванні систем та сукупностей цих нерівностей в учнів не повинно виникати труднощів.

Перед початком вивчення нового матеріалу варто актуалізувати основні знання та вміння, які були набуті учнями протягом попередніх уроків, запропонувавши для цього ряд вправ:

1. Розв'яжіть нерівність:

1) $4x > 7$; $x^2 - 8x < 0$; $-x \geq -22$;

2) $\frac{x}{5} < 2$; $x^2 - 4 > 0$; $(x + 6)(x - 3) \leq 11$.

2. Знайдіть переріз та об'єднання проміжків, що відповідають парі нерівностей:

1) $x \geq 3$ і $x \geq 4$; 2) $x^2 - 3x \geq 7$ і $x + 2 \leq 3$; 3) $\frac{x}{7} \geq 24$ і $1 \leq x < 6$.

Учні мають знати, що для розв'язування системи нерівностей треба спочатку кожну нерівність системи розв'язати окремо, а вже потім знайти розв'язок системи як перетин множин розв'язків нерівностей. Після цього за допомогою конкретних прикладів вчитель має показати усі можливі розв'язки систем лінійних нерівностей (Додаток 2).

Після виконання певної кількості прикладів учні засвоюють алгоритм розв'язання систем нерівностей з однією змінною. Вчитель може запропонувати учням записали алгоритм розв'язування систем і сукупностей нерівностей в зошити (рис.2.6).

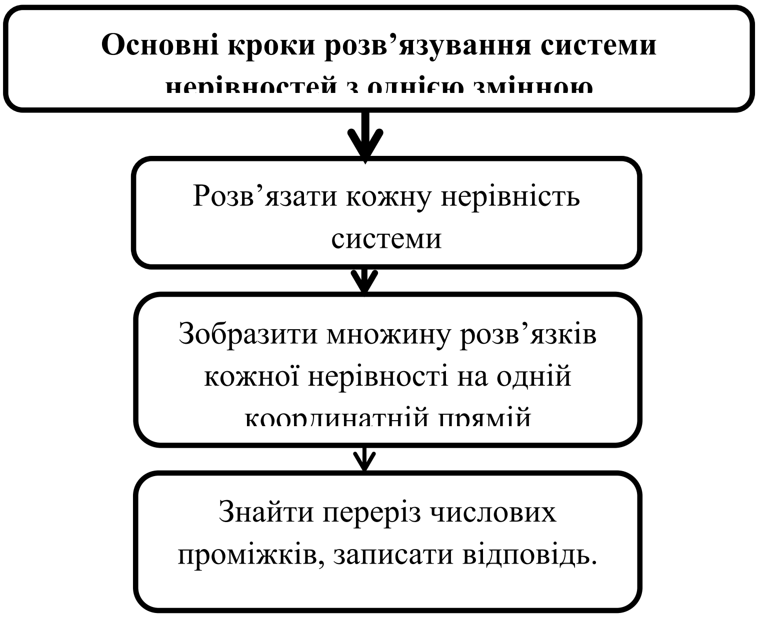


Рис.2.6. Алгоритм розв'язування систем нерівностей

Приклад 2. Розв'язати систему нерівностей

Розв'язання

$$\begin{cases} 3x + 4 < 6 \\ 2x + 7 > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x < 6 - 4 \\ 2x > 4 - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2/3 \\ x > -4 \end{cases}$$

Відповідь: x Є(-4;2/3).

На етапі формування умінь учнів розв'язувати системи нерівностей завдання слід підбирати так, щоби показати учням максимальну кількість різних випадків їх розв'язків (наприклад, коли одна з нерівностей взагалі не має розв'язків або її розв'язком є вся числова пряма і т.д.). Доречно також обговорити з учнями і питання про використання систем нерівностей з однією змінною для розв'язування подвійних нерівностей.

Відмінності у розв'язанні систем і сукупностей нерівностей можна показати, дослідивши розв'язки найпростіших нерівностей з модулем (рис.2.7 і 2.8).

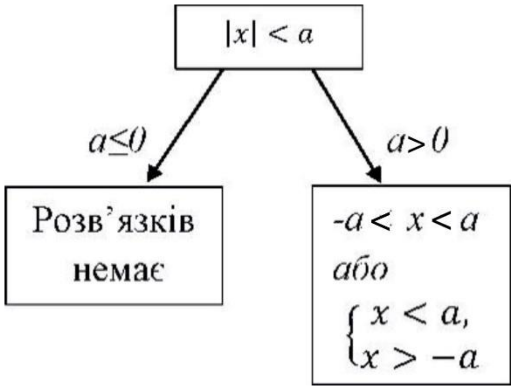


Рис.2.7 Схема розв'язування нерівності $|x| < a$

Наприклад: |x - 17| < 4 ;

$\begin{cases} x - 17 < 4, x < 21, \\ x - 17 > -4; \ x > 13 \end{cases}$

x Є (13; 21).

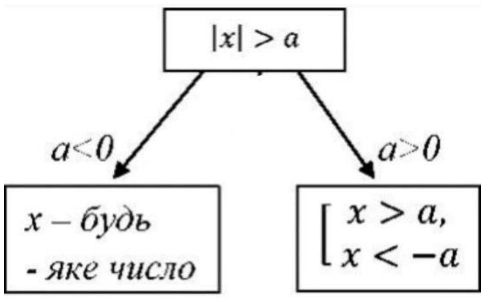


Рис.2.8. Схема розв'язування нерівності $|x| > a$

Наприклад:

|x - 1| > 7

x - 1 > 7, x > 8,

x - 1 < - 7 ; x < - 6 .

x Є (-∞; - 6) U (8; + ∞) .

Приклад 2.9. Розв'язати нерівність |7 x + 4| < 1 .

Розв'язання

Дана нерівність рівносильна системі:

$\begin{cases} 7x + 4 \le 1 \\ 7x + 4 \ge -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x \le -3 \\ 7x \ge -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le -\frac{3}{7} \\ x \ge -\frac{5}{7} \end{cases}$$

Відповідь: x$\epsilon \left[-\frac{5}{7}; -\frac{3}{7}\right]$.

Вправи, запропоновані учням до розв'язання, мають сприяти виробленню навичок виконання наступних дій:

а) розв'язування кожної з нерівностей системи (сукупності);

б) знаходження перерізу (об'єднання) знайдених проміжків.

Таким чином, значна кількість вправ різного виду і рівня складності сприятиме виробленню навичок виконання цих дій. Піл час розв'язування доцільно використовувати рисунок, але у подальшому, після набуття певного досвіду, учні мають усвідомити, що часто розв'язок системи нерівностей можна знаходити і без рисунка, тому виконання рисунків не обов'язкове [7].

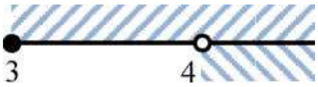
Підібравши відповідні за змістом тренувальні вправи, вчитель закріплює всі контрольні моменти, відтворені у прикладах.

1. Чи є числа: -3; 0; 4 розв'язками системи нерівностей:

$$\begin{cases} 3x + 4 \le 2 \\ 4x - 5 < -3 \end{cases}$$

2. На рисунках позначено множини розв'язків систем нерівностей. Чи є правильним запис множин розв'язків систем?

1) Розв'язків немає



2) (-4; 1]

3) (-∞; 5]

На завершальному етапі вивчення даної теми для перевірки учнями власного рівня засвоєння навчального матеріалу доречно запропонувати ряд аналогічних вправ. Також для узагальнення і систематизації знань з теми варто організувати самостійну роботу учнів, а на уроці перевірки і корекції знань, умінь і навичок провести контрольну роботу.

Складаючи систему доцільних задач з даної теми, вчителю слід охопити різноманітні випадки співвідношення розв’язків окремих нерівностей, які складають систему. Більшість шкільних підручників і збірників задач з алгебри містять цікаві набори систем та сукупностей раціональних нерівностей, але інколи ці набори задач не охоплюють всіх можливих варіантів співвідношень між розв’язками окремих нерівностей.

Описані методичні прийоми можуть бути використані вчителем при викладанні тем «Нерівності» та «Системи лінійних нерівностей з однією змінною», а також під час складання системи задач з теми. Складені таким чином системи раціональних нерівностей сприятимуть більш глибокому та свідомому засвоєнню учнями елементів теорії множин та формуванню умінь, пов’язаних з розв’язанням систем раціональних нерівностей.

2.2. Формування алгоритмічних умінь і навичок при розв’язуванні нерівностей методом інтервалів

Одним з найбільш важливих методів розв’язування нерівностей є метод інтервалів. Він не є універсальним, проте він дуже зручний при розв’язуванні раціональних і дробово-раціональних нерівностей. Покажемо в чому полягає перевага методу інтервалів перед іншими методами розв’язування раціональних нерівностей на конкретному прикладі.

Приклад 2.10 Розв’язати нерівність: $(x - 5)(x + 3) > 0$.

Багато учнів зводять цю нерівність до сукупності двох систем (множники обидва більше нуля або обидва менші за нуль):

$$\begin{cases} x > 5, \\ x > -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 5, \\ x < -3, \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -3 \end{array}\right.$, або x$\epsilon$(-∞; -3)U(5;+∞).

Інший спосіб: учні розкривають дужки у нерівності (x - 5)(x + 3)>0 , отримуючи квадратну нерівність:

$x^2 - 2x - 15 > 0$.

Функція, що заходиться в лівій частині нерівності, є квадратичною, її графіком є парабола, яка перетинає вісь *Ox* в точках x =5 і x = -3 (рис.2.9). Вітки параболи направлені вгору.

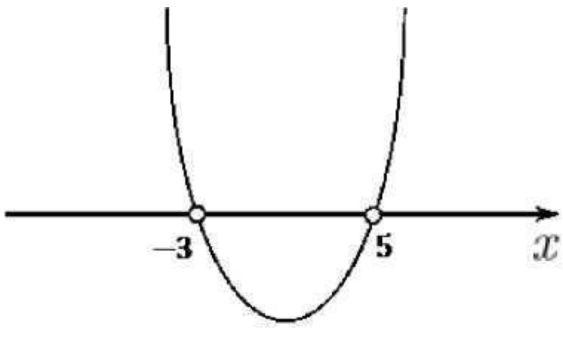


Рис.2.9

Функція додатна там, де її графік проходить вище осі Ox. Отже, це інтервали (-∞; -3) і (5 ; +∞) . Їх об'єднання і є розв'язком нерівності.

Розглянуті способи розв'язування однієї і тієї ж нерівності є досить громіздкими, оскільки в першому випадку виникає сукупність систем нерівностей, а для розв'язування нерівності другим шляхом учню треба пам'ятати графік квадратичної функції, залежність його розташування від старшого коефіцієнта і дискримінанта квадратного тричлена і т.д.

Ця нерівність проста, в її лівій частині присутні всього 2 множника. Складності починають виникати, коли множників значно більше, наприклад:

(x - 7) (x - 1) (x + 4) (x + 9) < 0 .

У першому випадку зведення нерівності до сукупності систем призведе до довгого і громіздкого розв'язання. Розкриття дужок - теж нераціональний шлях розв'язування, тому саме в таких випадках застосовується *метод інтервалів.*

Метод інтервалів ґрунтується на понятті неперервності функції.

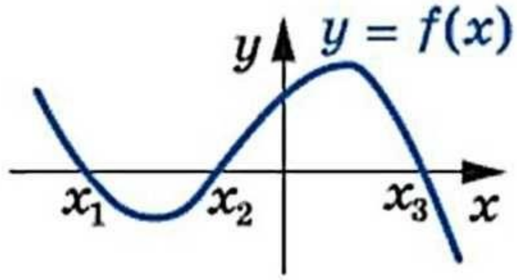


Рис. 2.10

На рис.2.10 зображено графік деякої неперервної функції f, у якої $\partial(f)$= R і нулями є числа x_x, x_2, x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_x)$, $(x\ x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

Теорема. Якщо функція f неперервна і не має нулів на деякому проміжку, то вона на цьому проміжку зберігає постійний знак.

Ця теорема дозволяє, не будуючи графіка функції f розв'язувати нерівності виду $f(x)>0$, $f(x)<0$.

Наприклад, точки -3; -1; 2 з рис. 2.10 - це граничні точки, між якими графік знаходиться або вище осі O*x* (зображено синім), або нижче від осі *Ox* (зображено жовтим). Таким чином, знаходження нулів функції, що стоїть в лівій частині нерівності, - це дуже важливий крок при розв'язанні раціональних нерівностей. Ці точки можна знайти, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.

Отже, на основі вищерозглянутих теоретичних положень можна сформулювати такий *алгоритм розв'язання раціональної нерівності методом інтервалів:*

1. Перетворити нерівність, звівши її до такого вигляду:

   $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n) < 0\ [\,> 0,\ < 0,\ > 0\,]$,

   тобто щоб виконувалося таке:

   а) права частина нерівності дорівнює нулю;

   б) ліва частина нерівності представляє собою добуток лінійних множників виду .

2. Визначити нулі функції, розв'язавши рівняння $f(x)= 0$, де $f(x)=$

$=(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n)$.

Знайдені нулі функції треба відмітити на координатній прямій, враховуючи строгість знака нерівності. Розбити координатну пряму (область визначення) на інтервали.

3. В правому крайньому інтервалі поставити знак «+», після чого чередувати знаки в наступних інтервалах, рухаючись справа наліво.

4. Об’єднати проміжки, на яких функція *$/(x)$* задовольняє нерівності, у множину розв’язків.

Перевага методу інтервалів полягає в тому, що на останньому інтервалі завжди буде знак «+», а в усіх інших інтервалах знаки будуть чередуватися, а отже, учню вже не потрібно визначати знаки на кожному з утворених проміжків. Розглянемо конкретні приклади.

Приклад 2.11. Розв’язати нерівність: $(2 - x)(x + 7) < 0$.

Розв’язання

Як видно, друга дужка відповідає стандартному вигляду, до якого можна застосувати метод інтервалів. Перетворимо першу дужку до стандартного для застосування методу інтервалів вигляду. Помножимо обидві частини нерівності на (-1), при цьому змінивши знак нерівності:

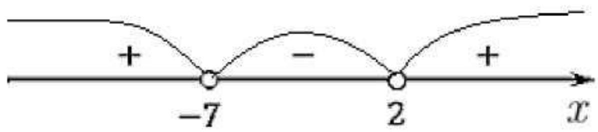
$(x - 2)(x + 7) > 0$.

Знайдемо граничні точки, розв’язавши рівняння $(x - 2)(x + 7) = 0$. Добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один з множників дорівнює нулю:

$x - 2=0 \Rightarrow x = 2$; $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$.

Відмітимо на координатній прямій отримані корені, що є граничними точками для проміжків.

В правому крайньому інтервалі ставимо знак «+», в наступних інтервалах чередуємо знаки. Маємо:



Нас цікавлять ті проміжки, на яких ця функція додатна.

Це об’єднання $(-\infty; -7) \cup (2; +\infty)$. Отже, розв’язком нерівності буде $x \in (-\infty; -7) \cup (2; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -7) \cup (2; +\infty)$.

Під час розв’язування нерівностей за допомогою чіткого алгоритму вчитель має пояснити учням, що виконати наступний крок можна лише виконавши попередній. Також він має слідкувати за тим, щоб пояснення учнів при записі розв’язання були короткими і логічними. Це сприяє розвитку раціональності мислення і лаконічності мовлення. Розв’язання нерівності за чітким алгоритмом повинне завершуватися одержанням кінцевих результатів та підведенням підсумків.

Засвоєння на інтуїтивно-практичному рівні понятійного апарату та відповідних способів поетапної діяльності сприяє формуванню алгоритмічної культури учнів [23].

При розв’язуванні нерівностей методом інтервалів створюються сприятливі умови для формування алгоритмічних умінь учнів, адже цей метод заснований на чіткому виконанні кроків алгоритму, вимагає від учня певної самостійності і здатності до самоконтролю.

Учень повинен вміти виконувати кожен крок, розуміти кожну з команд, що входять до алгоритму. Крім того, неприпустимі такі ситуації, коли після виконання чергового кроку учню не зрозуміло, що потрібно робити наступним кроком. Тому на перших етапах засвоєння алгоритму вчитель має контролювати роботу учня біля дошки, стежити за послідовністю та правильністю виконання кроків алгоритму. В процесі виконання певної кількості вправ учні поступово починають формувати навички покрокового виконання алгоритму та структурування власної діяльності.

Приклад 2.12. Розв’язати нерівність: $x(2x + 8)(x - 3) > 0$.

Розв'язання

Перетворюємо нерівність до стандартного для застосування методу інтервалів вигляду:

$(x-0)(2x + 8)(x - 3) > 0$

Замінюємо нерівність рівнянням $(x-0)(2x + 8)(x - 3) = 0$ і розв'язуємо його:

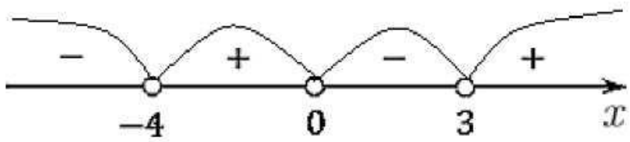
$x = 0$;

$2x+8=0 \Rightarrow x= -4$;

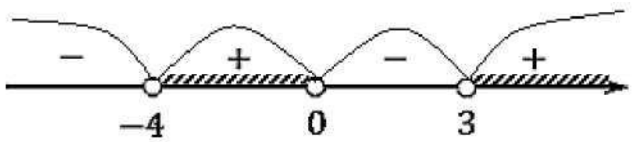
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

Відмічаємо ці три корені на координатній прямій, враховуючи строгість знаку нерівності.

Проставляємо знаки, чередуючи та рухаючись справа наліво:



Функція задовольняє знаку нерівності на проміжках (-4; 0) і (3; +∞).



Отже, $x \in (-4; 0) \cup (3; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-4; 0) \cup (3; +\infty)$.

Приклад 2.13. Розв'язати нерівність: $x^3 + 8x - 16 < 4(3x - x^2)$.

Розв'язання

Спочатку перетворимо нерівність таким чином, аби праворуч залишився нуль, а зліва - добуток лінійних множників. Розкриємо дужки в правій частині вихідної нерівності:

$x^3 + 8x - 16 < 12x - 4x^2$.

Перенесемо невідомі доданки в ліву частину і зведемо подібні доданки:

$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 > 0$.

Винесемо за дужки x^2 і -4:

$x^2(x + 4) - 4(x + 4) > 0$.

Винесемо за дужки $(x + 4)$:

$(x + 4)(x^2 - 4) > 0$.

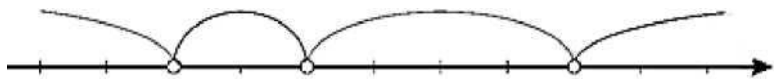
За формулою різниці квадратів розкладемо $x^2 - 4$:

$(x+4)(x-2)(x+2) > 0$ Тепер нерівність записана у стандартному для застосування методу інтервалів вигляді. Можемо перейти до наступного кроку.

Визначимо граничні точки, розв’язавши рівняння $(x + 4)(x + 2)(x - 2) = 0$.

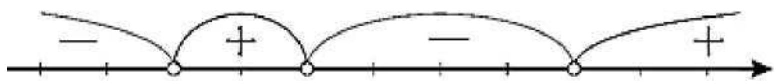
Отже, граничні точки: -4; -2; 2 .

Зобразимо ці точки на числовій прямій, враховуючи строгість знака нерівності. В результаті утворилося чотири інтервали.



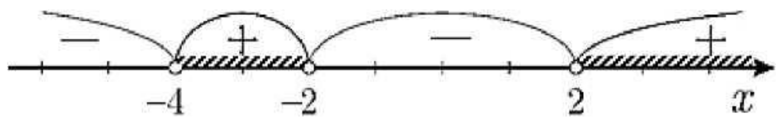
4 -2 2 *X*

Проставимо, чередуючи, знаки (в крайньому правому проміжку - знак «+»).



4 -2 2 *X*

Інтервали, в яких функція набуває додатних значень: (-4;-2) та (2;+ ∞).

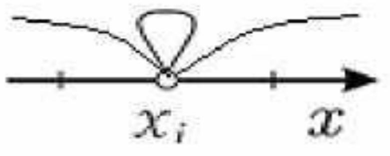


Таким чином x Є (-4 ; - 2) и (2 ; + ∞) .

Відповідь: x Є (-4 ; - 2) и (2 ; + ∞).

Отже, при переході через граничні точки (нулі функції) знаки інтервалів змінюються на протилежні. Розглянемо випадок, коли гранична точка є кратним коренем, тобто в розкладі на множники двочлен з таким коренем стоїть у степені, більшому за одиницю, тобто $(x - x_i)^к$.

Нехай, до прикладу, корінь x_i має кратність 2, тоді можна вважати, що це два окремих корені, між якими є «інтервал», що злився в одну точку на числовій осі, тобто початок і кінець інтервалу збігаються. Практично це виглядає так:



Приклад 2.14. Розв’язати нерівність: (x - 1) (x - 2)^2(x + 3)^3 > 0 .

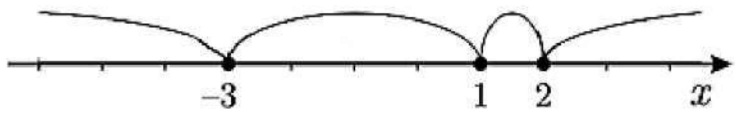
Розв’язання

Перетворимо ліву частину нерівності до стандартного вигляду, розклавши на множники:

(x - 1) (x - 2) (x - 2) (x + 3) (x + 3) (x + 3) > 0 .

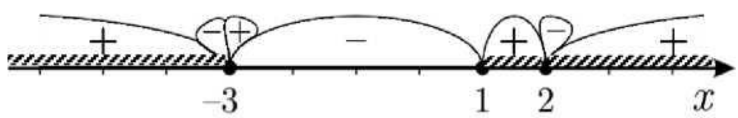
Граничні точки многочлена: -3; -3; -3; 1; 2; 2.

Зобразимо граничні точки на числовій прямій. Нерівність є нестрогою, інтервали включають кінцеві точки, тому їх зображуємо зафарбованими.



Враховуючи, що точка x = 2 має кратність «2», а точка x = - 3 - кратність «3», проставляємо знаки таким чином:

Функція невід’ємна на інтервалах (- ∞ ; -3], [1 ; 2] та [2 ; +∞) . Об’єднавши два останні інтервали, отримаємо: x Є (- ∞ ; - 3] и [1; +∞).



Відповідь: x Є (- ∞ ; - 3] ∪ [1; +∞).

При розстановці знаків зручно користуватись наступним правилом:

- якщо лінійний множник x - x_0 стоїть в непарному степені, то при переході через точку x_0 знак змінюється на протилежний; якщо лінійний множник стоїть у парному степені, то при переході через точку x_0 знак не змінюється;

•   якщо точка не належить інтервалу, але відповідає знаку нерівності, вона утворює ізольовану точку - розв'язок.

Дуже важливо в подальшому навчити учнів самостійно будувати алгоритми або виділяти загальний орієнтир та застосовувати їх при розв'язанні нерівностей, тримаючи в голові алгоритм як загальний план.

Розглянемо, як застосовується метод інтервалів до розв'язування дробово-раціональних нерівностей $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

Такі нерівності можна розв'язувати, звівши їх до сукупності двох систем нерівностей. Доцільно продемонструвати учням, що застосування методу інтервалу дає більш раціональне розв'язання.

Теорема. Функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ і $g(x)$ - многочлени, неперервна на *D(y)*.

Ця теорема дозволяє для нерівностей виду $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$, д е $f(x)$ *і* $g(x)$ - многочлени, застосовувати метод інтервалів.

При цьому нерівність

$\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ рівносильна нерівності $f(x)\, g(x) < 0$, а

нерівність $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ рівносильна системі: $\begin{cases} f(x)\, g(x) \leq 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

Приклад 2.15. Розв'язати нерівність $\frac{(x-6)^2(x-2)x}{(x+1)^4\,(x+5)} \geq 0$.

Розв'язання

Дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} (x - 6)^2(x - 2)\, x(x + 1)^4(x + 5) \geq 0, \\ (x + 1)^4(x + 5) \neq 0. \end{cases}$$

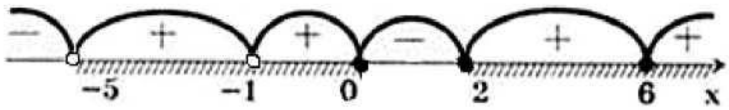
Розглянемо першу нерівність системи та зведемо її до рівносильної їй таким чином, щоб до неї можна було б застосувати метод інтервалів:

$(x - 6)^2(x - 2)\, x(x + 1)^4(x + 5) \geq 0.$

Розв’язавши рівняння $(x - 6)^2(x - 2)(x - 0)(x + 1)^4(x + 5) = 0$, визначаємо граничні точки: $x = 6$, $x = -1$, $x = 2$, $x = 0$, $x = -5$.

Наносимо граничні точки на координатну пряму, враховуючи не строгість знаку нерівності та другу нерівність системи.

З урахуванням того, що в околі точок $x = -1$ і $x = 6$ ліва частина нерівності зберігає знак (тому що у виразах $(x - 6)^2$ та $(x + 1)^4$ показники степенів є парними числами), проставляємо знаки:



Об’єднаємо множини розв’язків: $x \in (-5; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; 6]$ и

$[6; +\infty) = (-5; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty)$

Відповідь: $(-5; -1] \cup (-1; 0] \cup (2; +\infty)$.

Отже, запропонований метод інтервалі як алгоритмічний підхід допомагає систематизувати роботу над розв’язанням задач і довести навички їх розв’язування до автоматизму.

Важливо пам’ятати про те, щоб надмірна алгоритмізація діяльності на основі готових вказівок не стала гальмом для розвитку творчих якостей, пов’язаних із пошуком скорочених, раціональних шляхів розв’язування.

2.3. Використання програмних засобів при вивченні нерівностей в основній школі

З метою більше ефективного і повного засвоєння знань з математики, зокрема тих, що пов’язані із змістовною лінію «Нерівності», в останні роки в закладах освіти активно впроваджуються сучасні програмні засоби навчання та комп’ютерні технології. На даний час вже розроблено і запроваджено цілий комплекс програмних засобів, які дозволяють розв’язувати за допомогою комп’ютера широке коло математичних задач різних рівнів складності. Це такі програми як ЕНМК «Алгебра», GRAN1, GEOGEBRA та ін. Напрацьований досвід показує, що уроки, які проведені з використанням програмних засобів, допомагають учням здобути нові технологічні знання, дозволяють активніше застосовувати вивчені методи розв'язування нерівностей та їх систем, перевіряти правильність побудованих графіків і отриманих розв'язків, розвивати логічне мислення школярів і їхні дослідницькі вміння.

Розглянемо докладніше найбільш популярні програмні засоби, які допомагають у засвоєнні теми «Нерівності».

Бібліотека електронних наочностей «Алгебра, 7-9 клас»

Наведемо *приклад доповнення бібліотеки алгебраїчних задач розв'язанням нерівності другого степеня* $2x^2 - 3x + 1 > 0$ [10].

1) Відкриваємо програмний модуль розв'язування задачі *(Інструменти / Середовище розв'язання),* обираємо команду *ЗадачаХНова задачах Нерівності \ Алгебраїчна нерівність,* записуємо у відведену комірку формулу $2x^2 - 3x + 1 > 0$.

2) Підвівши вказівник мишки до знака нерівності, натискуємо праву клавішу мишки і таким чином відкриваємо *Довідник* для вибору першого кроку розв'язання. Для виділеної дії вибираємо в закладці *Нерівності* дію *Розв'язати відповідне квадратне рівняння.*

3) Виділяємо утворене рівняння (натискуємо на знак «=») і обираємо дію *Обчислити дискримінант рівняння.* У полі розв'язання з'являється вираз $B=(-3)^2 - 4\text{-}2\text{-}1$. Підвівши вказівник мишки до знака «мінус», виділяємо вираз $(-3)^2 - 4\text{-}2\text{-}1$ (підтвердженням виділення є змінення кольору виразу), натискуємо праву клавішу мишки і відкриваємо *Довідник* для вибору кроку *Обране \ Заміна рівних.* Заносимо у відведену комірку значення дискримінанта *1*.

4) Вибираємо з довідника дію *Розв'язати квадратне рівняння,* попередньо виділивши рівняння та його дискримінант (рис. 2.11).

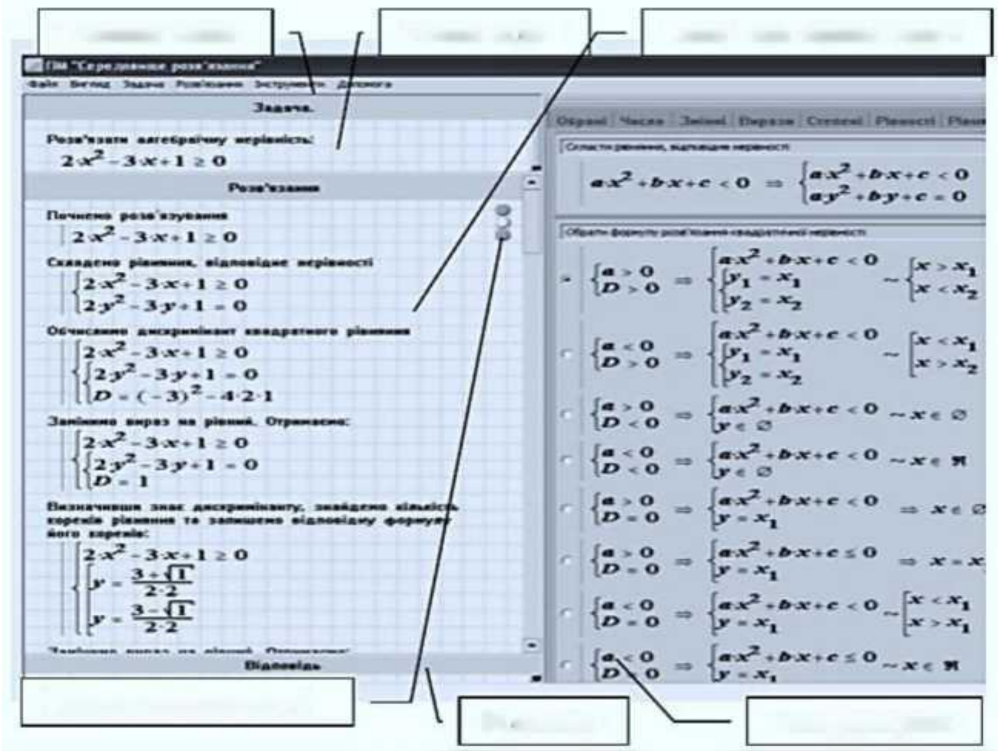


Рис. 2.11. Загальний вигляд вікна *Середовища розв'язання* для 9 класу

5) Спрощуємо вирази для коренів, виконавши дію *Заміна рівних.*

6) Записуємо розв'язки нерівності. Для цього виділяємо нерівність та знайдені розв'язки квадратного рівняння («{») і зазначаємо дію *Вибрати формулу розв 'язання.*

7) Для кожної з утворених простих лінійних нерівностей записуємо розв'язання у вигляді інтервалу (дія *Розв 'язати найпростішу лінійну нерівність).*

8) Записуємо розв'язок даної нерівності як об'єднання інтервалів *(Системи / Об'єднання розв'язків).*

9) Записування відповіді і зберігання розв'язаної нерівності у темі бібліотеки «Нерівності».

Якщо запланувати розв'язування даної нерівності на уроці, то можна здійснити покрокове відтворення алгоритму її розв'язання.

На рис.2.12 наведені кроки обчислення дискримінанта відповідного квадратного рівняння.

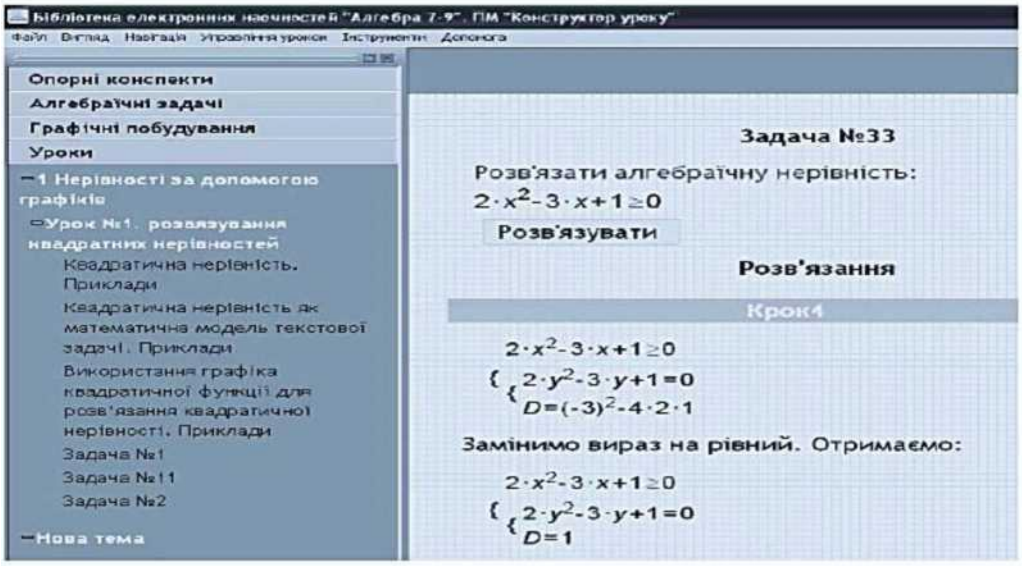


Рис. 2.12. Вікно перегляду розв’язування нерівності

Отже, процес розв’язування нерівності за допомогою даного програмного засобу є послідовністю кроків, на кожному з яких користувач виконує деякі перетворення математичної моделі задачі. До найважливіших аспектів підтримки роботи учня можна віднести перевірку правильності ходу розв’язування нерівності, автоматизацію рутинних дій учня, пов'язаних з обчисленнями [11]. У ході діяльності учитель може оперативно здійснювати перевірку правильності ходу розв’язування нерівності, автоматизоване тестування знань учнів. Цей програмний продукт може використовуватися на уроці у процесі пояснення методів розв’язування нерівностей, а також для проведення самостійних і контрольних робіт.

Навчальна діяльність учнів у процесі розв’язування нерівностей з використанням GRAN 1

Слід указати, що одним із найбільш відомих видів нерівностей, які використовуються в шкільному курсі алгебри, є нерівності та системи нерівностей з параметрами. Формування навчальних і практичних навичок учнів під час навчання розв’язуванню нерівностей з параметрами досить ефективно здійснювати графічними прийомами. Для відшукання розв’язків нерівностей $f(x)\geq 0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\leq 0$ спочатку будують графік рівняння $f(x)=0$. Для цього створюють об’єкти явного *y=f(x)* чи неявного виду задання *G(x,y)=0,* а потім використовують послугу *Розв’язати нерівність.*

Приклад 2. Треба з’ясувати, скільки розв’язків отримаємо при розв’язуванні нерівності $x^4(4 - a) > x^2(x^2 - 2a) + 4a$ залежно від параметра *a,* створимо об’єкт x^2*(4 - Y) – x^2*•(x^2 – 2*Y) – 4*Y = 0.

Заштриховане з використанням GRAN 1 ГМТ (рис. 2.13), що задовольняє нерівність, перетинаємо горизонтальними прямими, перпендикулярними до осі параметра. Абсциси спільних точок дадуть розв’язки нерівності.

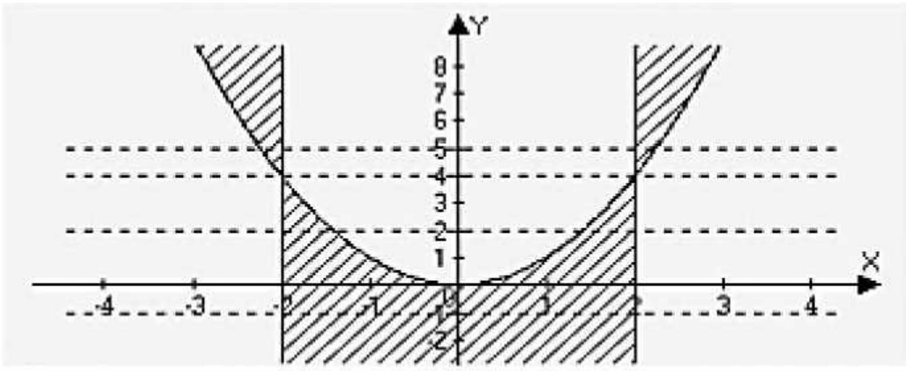


Рис. 2.13. ГМТ, що задовольняють нерівності. Координати *(x;a)*

Записуючи їх, враховуємо, що нерівність строга: якщо $a < 0$, то x Є (- 2 ; 2); якщо $0 < a < 4$, то x Є (- 2 ; - $\sqrt{a}$) U (-$\sqrt{a}$; 2); для *a=4* розв’язків немає; при *a* >4 x Є (-$\sqrt{a}$; - 2) и (2; $\sqrt{a}$).

На основі графічного образу бажано запропонувати учням самостійно скласти нові задачі. Наприклад, дослідити, коли нерівність не має розв’язків; при яких значеннях параметра множині розв’язків належить відрізок [3]; коли отримаємо розв’язки, що містять не менше шести цілих чисел, три цілих числа та інші? [6, с. 233]. Вміння аналізувати графічні образи допоможе в подальшому швидше шукати ефективні методи розв’язування.

Приклад 2.3. Дослідити кількість розв’язків нерівності $ax^2 – 4x+3a+ 1\geq 0$ при різних параметрах *a*.

Розв’язання

Для розв'язку квадратної нерівності $ax^2 - 4x + 3a + 1 \geq 0$, де $x > 0$ будемо досліджувати квадратний тричлен $ax^2 - 4x + 3a + 1$. За допомогою застосування GRAN1 створюємо об'єкт явного типу задання за формулою:

*y=P1*x^2-4*x+3*P1+1* і будуємо графік на координатній площині *(x,y)*.

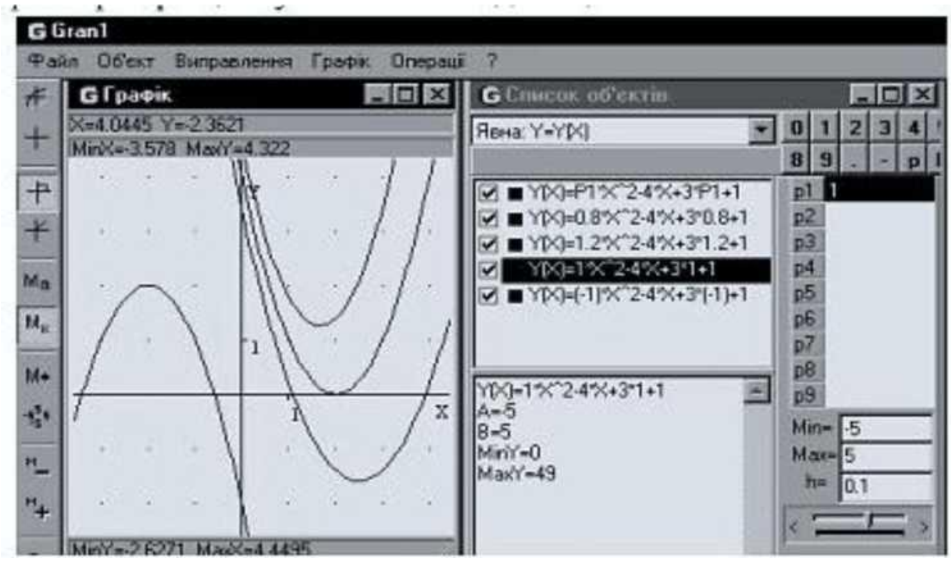


Рис. 2.14. Дослідження положення параболи залежно від параметра

Змінюючи значення параметра за рахунок руху бігунка, що розташований під списком об'єктів (функцій), учні можуть зафіксувати чотири різних положення параболи, що дозволяє відшукати розв'язки нерівності (рис. 2.26).

Очевидно, що від'ємні *a* умову нерівності не задовольняють, бо в цьому разі над віссю абсцис може бути розташованою лише частина параболи. Тобто нерівність буде виконуватися не для всіх дійсних x. Для нульового значення параметра отримаємо лінійну нерівність, розв'язки якої утворюють підмножину множини додатних чисел. Для додатних *a* вітки параболи напрямлені вгору. Враховуючи знак нерівності «≥», умову задовольняють ті значення параметрів, коли парабола розташована над віссю абсцис чи дотикається до неї, тобто дискримінант відповідного квадратного рівняння недодатний, значення параметра при даному *a* не менші одиниці.

Розв'язування нерівностей з параметрами в системі динамічної математики GEOGEBRA

Як вже зазначалось, важливим чинником засвоєння алгебраїчних знань учнів є розв'язування *нерівностей та їх систем з параметрами,* яким поки не приділяється достатня увага у шкільній програмі. При цьому завдання, що містять параметри, широко представлені, як в ЗНО з математики, та і на вступних іспитах до вишів. Тому завдання з параметрами можуть і повинні використовуватися при організації навчальних досліджень учнів [6].

Тож, розглянемо приклад формування дослідницької компетентності при розв'язуванні нерівностей з параметрами засобами GEOGEBRA.

Приклад 4.5. Розв'язати нерівність: $|x|(x - a) > 0$.

Розв'язання

Введемо функцію $y = |x|(x - a)$, $D(y)$: *R,* нулі: $x = 0$, $x = a$ (рис. 2.15).

Отже: якщо $a < 0$, т о $x \in (a ; 0) \cup (0 ; +\infty)$, якщо $a \geq 0$,

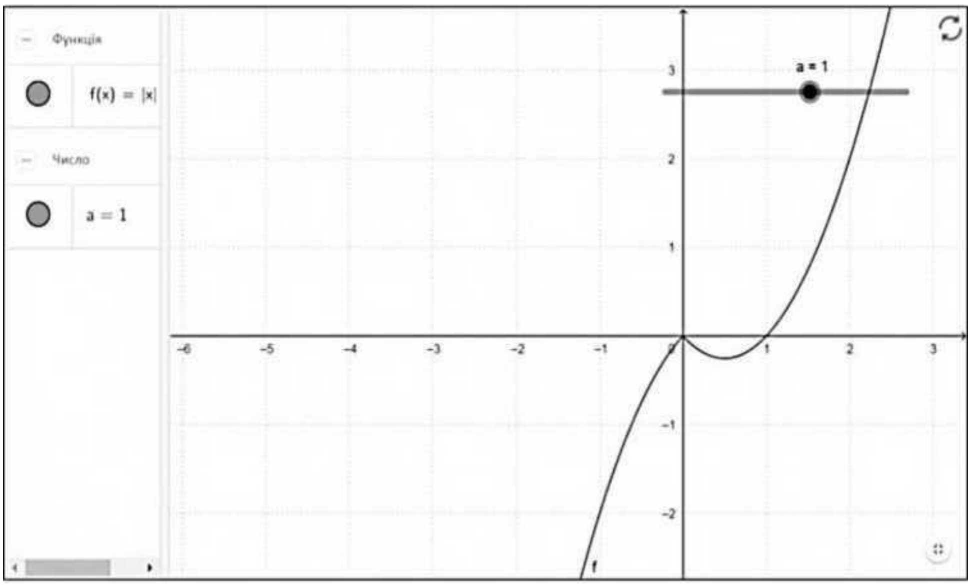


Рис.2.15

Отже, застосування програмних засобів при вивченні нерівностей забезпечує диференціацію навчання та підвищення його результативності, сприяє розвитку логічного мислення та пізнавальних здібностей учнів [45, с. 17].

Дійсно, аналізуючи графічні образи, учні можуть встановити кількість розв'язків в нерівності з параметром, визначити контрольні значення параметрів, отримати дані для створення правил-орієнтирів. Крім того, у ході графічних експериментів за допомогою програмних засобів формуються різні навчальні прийоми мисленнєвої діяльності: аналіз, синтез, узагальнення та ін., удосконалюються навички самоконтролю, розвивається пізнавальна самостійність.

Як засвідчив досвід, для розвитку мислення школяра доцільно розглядати як графічні, так і аналітичні прийоми розв'язування однієї й тієї ж нерівності. Проте, графічний метод унаочнює хід розв'язування і сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

Завершення аналізу побудованих графічних образів виведенням можливих наслідків (наприклад, скласти чим більше власних задач, дати на них відповідь) сприяє розвитку у школярів продуктивності мислення та вивчення математики в основній школі.

Висновки до розділу 2

Проаналізувавши навчальну і методичну літературу, ми виділили низку особливостей у вивченні теми «Нерівності»:

- навички розв'язування нерівностей (за виключенням квадратних) формуються на менш високому рівні, ніж рівнянь відповідних класів;
- розв'язування більшості нерівностей відбувається шляхом переходу від нерівності до рівняння і навпаки;
- при вивченні нерівностей велика роль відводиться наочно-графічним засобам (відповідь часто знаходиться прямо з рисунку);
- розглядаються лише основні класи нерівностей.

Вивчення нерівностей відбувається у три етапи: від незалежного вивчення основних класів нерівностей та поступового розширення їх кількості до формування узагальнених прийомів розв'язування нерівностей.

Змістово-методична лінія рівнянь і нерівностей має тісні зв'язки з іншими лініями шкільного курсу математики, зокрема з числовою та функціональною. У вивченні нерівностей особливу роль відіграє логічне мислення, оскільки зміст кожної теми складається з ланцюжка понять, пов'язаних між собою логічними відношеннями. Тому одним з головних завдань вчителя є створення умов для формування логічної компетентності учнів.

Розглянувши за допомогою системи динамічної математики GEOGEBRA та GRAN1 розв’язання нерівностей з параметрами, ми виявили, що вони є засобом формування технологічних, дослідницьких, методологічних компетентностей, а також сприяють розвитку графічної культури учнів.

Розглянуті в роботі програмні засоби розв’язування нерівностей дозволяють не лише ефективніше формувати математичні знання, уміння та навички учнів в ході розв’язування раціональних нерівностей та їх систем, але й розвивати логічне мислення школярів та залучати їх до активної роботи на уроках алгебри.

ВИСНОВКИ

В результаті проведеного в даній роботі аналізу теоретичних основ методики вивчення нерівностей в курсі алгебри основної школи ми змогли зробити ряд важливих висновків.

Аналіз психолого-педагогічної, навчальної та науково-методичної літератури з теми дослідження ми систематизували теоретичні відомості, пов'язані з особливостями вивчення нерівностей та їх систем в процесі навчання математики в основній школі. Нами було проведено логіко-дидактичний аналіз теми «Нерівності» та логіко-математичний аналіз тем «Квадратні нерівності» з точки методичних підходів до викладання вказаної тематики в 5-9 класах. Виконано порівняння різних методичних прийомів вивчення теми, досліджено теоретико -множинні аспекти розв'язування нерівностей та їх систем. Також ми розглянули складові алгебраїчної культури учнів при вивченні нерівностей та підготували методичні рекомендації щодо вивчення теми на засадах компетентнісного підходу.

Дослідивши можливості використання програмних засобів при вивченні нерівностей та їх систем, ми вияснили, що застосування ППЗ забезпечує диференціацію навчання і підвищення його результативності, сприяє розвитку пізнавальної активності та графічної культури учнів. Застосовувати елементи ІКТ можна на різних етапах заняття.

Формуванню обчислювальної і термінологічної культури при вивченні нерівностей та їх систем, згідно з розробленою нами особистісно- розвивальною моделлю навчального процесу, сприяють такі чинники:

- добір учителем завдань, які передбачають для учнів самостійний пошук розв'язку;
- надання учням можливості обрання варіанту завдання чи шляху розв'язання задач;
- використання самооцінки та взаємооцінки учнів.

- розв’язування задач різними способами та визначення раціонального шляху розв’язання.

Використання завдань для усного розв’язування з логічним навантаженням, використання прикладних задач на різних етапах уроку організація навчальних досліджень (аналітичних та графічних) учнів під час вивчення нерівностей та їх систем з параметрами, системне використання ІКТ сприяє покращенню набуття учнями математичної компетентності.

У зв’язку з вищерозглянутими чинниками формування алгебраїчної культури та різних складових математичної компетентності моделювання навчальної діяльності при вивченні нерівностей має відбуватись шляхом:

1) створення проблемних ситуацій на уроках;

2) врахування психологічних особливості дітей;

3) проведення уроків у досить високому темпі, який допомагає мобілізувати увагу;

4) використання різних форм та видів діяльності на уроках;

5) застосування алгоритмічного підходу;

6) залучення учнів до роботи з довідниковою та додатковою літературою;

8) організації позакласної роботи.

Тому нами було розроблено самостійні та контрольні роботи, тести та інтерактивні вправи в LeammgApps, орієнтовані на формування різних складових математичної компетентності учнів при вивченні теми «Нерівності». Також ми розробили спецкурс та підібрали систему прикладних задач з теми, спрямованих на підтримку навчання на засадах компетентнісного підходу.

Поставлена мета досягнута, завдання виконані повністю. Проведене дослідження створює основи для подальшого вивчення проблематики математичної освіти учнів середньої школи, і дослідження, сфокусовані на удосконалення методики навчання теми «Нерівності».

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Бантова М. А. Методика викладання математики. К.: Генеза, 2008. 335 с.

2.Бантова М. А., Бельтюкова Т. В., Степанова С. В. Методичний посібник до підручника математики. К.: Генеза, 2009. 264 с.

3.Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.:Зодіак-ЕКО, 2009. 288 с.

4.Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. К.: Вища шк., 1989. 367с.

5.Горнштейн П.І. Задачі з параметрами / П.І. Горнштейн. К.: РІА «Текст», 1992. 290 с.

6. Гриб'юк, О.О., Юнчик, В.Л. Використання системи динамічної математики GEOGEBRA в процесі навчання математичних дисциплін. // Освітні горизонти. Інформаційно-методичний вісник. 2016, 1. №74. С. 508-514.

7. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики. Х.: Вид. група «Основа», 2006. 140 с.

8. Карлащук А.Ю. Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами. К.: Вища школа, 2001. 19 с.

9. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник / О.І.Глобін, М.І. Бурда, Д.В. Васильєва, В.В. Волошена, О.П. Вашуленко, Н.Д. Мацько, Т.М. Хмара. К.: Педагогічна думка, 2015. 245с.

10. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером: посібник для вчителів і студентів [за ред. М. І. Жалдака]. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 272 с.

11.Маркова І.С. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: метод проектів. Комп'ютерні технології. Розвивальне навчання. Х.: Вид. група «Тріада», 2007. 171 с.

12. Мерзляк А.Г., Полянський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. Х.:Гімназія,2009. 386с.

13.Мерзляк А.Г., Полянський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Х.:Гімназія,2009. 320с.

14.Мерзляк А.Г., Полянський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. з поглибл. вивченням математики. Х.:Гімназія, 2009. 394с.

15.Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804/ Укладачі програми: М. І. Бурда, Ю. І. Мальований, Є. П. Нелін, Д. А. Номіровський, А. В. Паньков, Н. А. Тарасенкова, М. В. Чемерис, М. С. Якір [Електронний ресурс]. URL: https://bila.km.ua/metodichna-skarbnichka/navchalni-progami/navchalna-programa-dlya-uchniv-5-%E2%80%94-9-klasiv-zagalnoosvitnih-navchalnih-zakladiv/menu-id-691.html (дата звернення - 22.03.2021)

16.Назаренко Л.Д. Тысяча и один пример. Равенства и неравенства. Сумы: Слобожанщина, 1994. 488 с.

17.Нелін Є.П., Долгова О.Є. Особливості навчання учнів розв'язуванню рівнянь та нерівностей в старшій профільній школі // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019), м. Черкаси, 11–12 квітня 2019 р. Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є.І., 2019. С.70-71.

18.Орач Б. Методи доведення нерівностей // Математика. №19(319). Травень 2005. С.11-15.

19.Програма з математики для 8-9 кл. для загальноосвітніх навчальних закладів (класів) з поглибленим вивчення математики. К, 2008.

20.Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

21.Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вил., перероб. і допов. К.: Вища шк., 2006. 582с.

22.Соколенко Л.О. Наукові основи шкільного курсу математики : Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1. Чернігів : «Десна Поліграф», 2020. 144 с.

23.Титаренко О.М. Алгоритмічна культура як складова математичної культури учня. Х.: Торсінг Плюс, 2005. 368 с.

24.Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики: Навчальний посібник. Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2005. 368 с.

25.Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Ірраціональні рівняння і нерівності: Навчальний посібник.-Тернопіль: «Тайп», 2018.

26.Ципкін О.Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів / О.Г. Ципкін. - К.: Вища школа, 1988. 416 с.

27.Шахмейстер А. Х. Уравнения и неравенства. М.: Издательство МЦНМО, 2008. 264 с.

28.Якубович М.В. Доведення нерівностей у шкільному курсі математики//Студентська наукова конференція математичного факультету ДВНЗ «УжНУ». Серія «Математика і прикладна математика»: наукова конференція, збірник тез доповідей. Ужгород, 24-25 квітня 2018 року. Ужгород: видавництво УжНУ «Говерла», 2018. С.58.

ДОДАТКИ

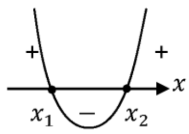
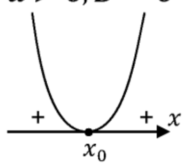
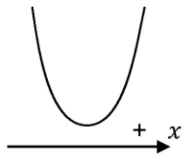
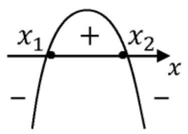
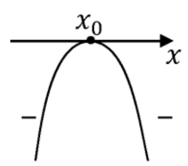
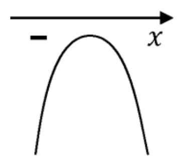
Узагальнена схема

з різними випадками розташування графіка квадратичної функції

y = ax^2 + bx + c відносно осі Ox залежно від знака старшого коефіцієнта

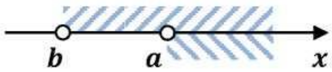
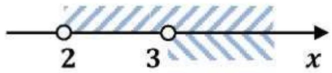
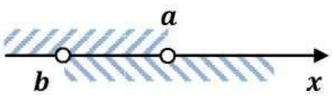
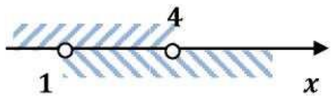
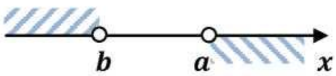
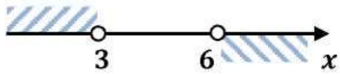
та знака дискримінанта квадратного тричлена ax^2 + bx + c

Додаток 1

Схема	**Квадратна нерівність**			
	$f(x)>0$	$f(x)<0$	$f(x)\ge 0$	$f(x)\le 0$
$a>0, D>0$ 	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
$a>0, D=0$ 	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	x_0
$a>0, D<0$ 	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$
$a<0, D>0$ 	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$a<0, D=0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	x_0	$(-\infty; +\infty)$
$a<0, D<0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$

Додаток 2

Можливі випадки розв’язків систем лінійних нерівностей

Системи лінійних нерівностей $(a > b)$	**Розв’язок та його геометрична ілюстрація**	**Приклад**
$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (a; +\infty)$	$\begin{cases} x > 3, \\ x > 2 \end{cases}$  $x \in (3; +\infty)$
$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$	 $x \in (-\infty;\ b)$	$\begin{cases} x < 5, \\ x < 2 \end{cases}$  $x \in (-\infty;\ 2)$
$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (b;\ a)$	$\begin{cases} x < 4, \\ x > 1 \end{cases}$  $x \in (1;\ 4)$
$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$	 Розв’язків немає	$\begin{cases} x > 6, \\ x < 3 \end{cases}$  Розв’язків немає