Рівненський державний гуманітарний університет

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота

бакалаврського рівня

на тему

Формування предметних і ключових компетентностей школярів при вивченні курсу тригонометрії

Виконала: студентка 4 курсу, групи МЕІ-41

спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)

Вакулко Ірина Петрівна

Керівник:канд. фіз.-мат. наук, доц.,зав. кафедри

Крайчук Олександр Васильович

____

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, проф.

Петрівський Борис Петрович

____

Рівне -2021 рік

Зміст

Вступ

Концепція модернізації освіти поставила перед загальноосвітньою школою ряд завдань, включаючи формування ключових компетентностей, що визначають сучасну якість змісту освіти.

Ключові компетенції тут означають цілісну систему універсальних знань, умінь та досвіду, а також досвід самостійної діяльності та особисту відповідальність студентів.

Цей підхід вимагає від вчителя чіткого розуміння того, які універсальні (ключові) та специфічні (кваліфікаційні) риси особистості потрібні випускнику середньої школи у його майбутній професійній діяльності. Це, у свою чергу, вимагає здатності вчителя надати орієнтовну основу для діяльності - сукупність інформації про діяльність, що включає опис предмета, засобів, цілей, продуктів та результатів діяльності. Вчитель повинен навчати цих знань дітей, передавати ці навички та розвивати навички, якими сучасна людина може користуватися у своєму майбутньому житті. Звичайно, такий підхід слід застосовувати як у початковій, так і в середній школі. Однак більшість шкільних програм, що використовуються в даний час, були створені до впровадження підходу, заснованого на компетентностях. Тому більша частина роботи з її реалізації припадає на навчальний процес загальноосвітніх вчителів, вона не завжди є ефективною з різних причин.

Тому проблема дослідження полягає у пошуку ефективних шляхів розвитку ключових компетентностей дітей шкільного віку на рівні математичного класу.

Метою роботи є: аналіз теоретичних основ та розробка методичних рекомендацій щодо складання та використання тригонометрії для формування ключових компетентностей учнів на уроках математики.

Для вирішення зазначеної проблеми та досягнення поставленої мети були поставлені наступні завдання:

1) Визначення можливостей компетентнісного підходу при вивченні курсу тригонометрії та способи його реалізації на уроках математики;

2) визначити шляхи діагностики компетентності студента у обраній предметній області;

3) Розробити методичні рекомендації щодо складання та використання ключових компетентнісних вправ для школярів на уроках математики;

4) Впровадження обраних прийомів у практику викладання математики.

Об'єкт дослідження – процес навчання тригонометрії у старшій школі.

Для досягнення мети та розв'язання поставлених завдань були використані **теоретичні** (аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури з проблеми дослідження, змісту програм і підручників для різних типів шкіл) та **емпіричні** (вивчення вітчизняного та зарубіжного педагогічного досвіду, аналіз уроків, спостереження, бесіди з вчителями, батьками та учнями) методи досліджень.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблений зміст і методика можуть бути використані вчителями школи при організації навчання математиці на уроках, на факультативних заняттях, для підвищення якості знань учнів, активізації їх пізнавальної діяльності.

Структура роботи: Основна частина роботи складається із вступу, трьох розділів та висновку. Бібліографія містить 73 джерел, включаючи електронні та Інтернет-ресурси.

Апробація роботи. Основні результати дослідження були анонсовані на звітній науковій конференції основні результати бакалаврської роботи були представлені на звітній науковій конференції викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету в 2021 році.

Розділ І. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Історичний розвиток тригонометрії

Періоди розвитку науки «Тригонометрія»

Ранній період

Початок розвитку тригонометрії лежить в математичних рукописах Стародавнього Єгипту, Вавилону та Стародавнього Китаю.

З вавилонської математики походить звичайне вимірювання кутів у градусах, хвилинах і секундах (введення цих одиниць у давньогрецьку математику зазвичай приписується Гіпсіклу, 2 століття до н. Е.). Головним досягненням цього періоду стало співвідношення, яке згодом стало відомим як теорема Піфагора; Ван дер Варден вважає, що вавилоняни знайшли його між 2000 і 1786 рр. до н. Невідомо, чи було загальне формулювання фрази відомо стародавнім єгиптянам, але прямокутний «єгипетський трикутник» зі сторонами 3, 4 і 5 там був відомий і широко використовувався.

Стародавня Греція

Досягнення: Загальне та логічно узгоджене подання тригонометричних відношень. Тригонометрія є частиною астрономічної теорії. Декілька теорем тригонометричного характеру є "принципи" Евкліда (IV ст. До н. Е.). У другій книзі "Начала" теорема 12 є словесним аналогом теореми косинус, значення якого полягає в наступному:

У тупокутних трикутниках квадрат на стороні, що стягує тупий кут, більше (суми) квадратів на сторонах, що містять тупий кут, на двічі взятий прямокутник, поміщений між однією зі сторін при тупому куті, на яку спадає перпендикуляр, і відрізком при тупому куті, який відтинає цей перпендикуляр ззовні.[25]

Розвиток тригонометрії пов'язаний з ім'ям астронома Арістарха Самосського (3 століття до н. Е.). У його трактаті «Про величини і відстані Сонця і Місяця» завданням було визначити відстань від небесних тіл; ця задача вимагала обчислення відношення сторін прямокутного трикутника при відомому значенні одного з кутів. У той же час Арістарх довів нерівність, передану сучасними термінами, за такою формулою:

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{tg\ a}{tg\ b}$$

Архімед представив цю нерівність у "Обчисленні піщінок". У роботі дослідника, який у своїх дослідженнях (III ст. до н. Е.) вказує теорему ділення хорд, яка по суті є еквівалентною формулі синуса половинного кута:

$$sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

Перші тригонометричні таблиці були виготовлені в III. Століття до н. е. Згідно з гіпотезою, ці таблиці склав Аполлоній Перський.

Перші тригонометричні співвідношення, відкриті греками, були сформульовані мовою хорд. Прикладом є сучасна формула:

$$sin^2 a + cos^2 a = 1$$

серед греків теорема відповідала наведеній вище формулі:

$$(chord_a)^2 + (chord_{180-a})^2 = d^2$$

Головним досягненням античної тригонометричної теорії було загальне розв’язок задачі "розв’язування трикутників", тобто знаходження невідомих елементів трикутника, коли відомі його три елементи (з яких хоча б одна сторона). [25]

У своїх роботах Клавдій Птолемей "Географія", "Аналемма" та "Планісфера" дає детальний огляд застосування тригонометрії в галузі картографії, астрономії та механіки, використовуючи, зокрема, приклад техніки.

Наш час до кінця 13 століття. Століття

Індія

Дослідники змінили деякі поняття тригонометрії, наблизивши їх та пристосувавши до сучасних, замінивши заміну античних хорд синусами (назва синус походить від санскритського слова тятива) у прямокутному трикутнику. Такі зміни поклали початок розвитку тригонометрії як загальної доктрини співвідношення у трикутнику, хоча індійський підхід, на відміну від грецьких хорд, обмежувався функціями гострого кута. Вперше було введено поняття косинуса. Тригонометрія як наука розвивалася насамперед у тісному зв'язку з її більш масштабним астрономічним застосуванням - для використання в теорії руху планет і для дослідження небесної сфери.

Для застосування астрономічних розрахунків було розроблено ряд тригонометричних таблиць. Дослідник Брахмагупта (VII ст.) відкрив декілька тригонометричних співвідношень, у тому числі тих, які, за сучасними записами, мали такий вигляд:

$$cos2a + cos2a = 1$$

$$sina = \cos\,(90o - a)$$

Ісламські країни

У праці Аль-Хорезм та Аль-Марвазі (9 ст століття) розглядаються нові тригонометричні функції разом із добре відомими синусом і косинусом (на той час індійський погляд на цю доктрину): тангенс, котангенс, секант і косинус. Ібн Юніс (X ст.) відкрив перетворення добутку тригонометричних функцій на суму, наприклад: [25]

У IX столітті Аль-Хорізмі склав синусоїдальні таблиці зі ступенем 1 °, а його сучасник Аль-Марвазі додав до них перші таблиці з тангенсів, котангенсами та косекансами (з однаковим кроком). На початку X століття Аль-Баттані публікував картини з кроком 30'. Слід зазначити, що динаміка пізнання замальованих концепцій висвітлена в роботі Ібн Юніса, який наприкінці того ж століття склав таблиці з кроком 1 '. При складанні таблиць основною метою було підрахувати значення sin 1.

Базове викладення тригонометрії як самостійної науки (як плоскої, так і сферичної) дав перський математик і астроном Насір ад-Дін ат-Тусі в 1260 р.

Історики тригонометрії

У 18-19 століттях праці з історії математики та астрономії також приділяли велику увагу історії тригонометрії (JE JE Montucla, JBJ Delambre, G. Hankel, P. Tannery та інші). У 1900 році німецький математик Антон фон Браунмюль опублікував першу монографію (у двох томах) спеціально з історії тригонометрії. У XX столітті важливі праці на цю тему опублікували І. Г. Цайтен, М. Б. Кантор, О. Нойгебауер, Б. А. Розенфельд, Г. П. Матвієвська та ін. [25].

1.1 Тригонометричні функції

Розглянемо коло з радіусом R з центром у початку координат (рис. 1). Позначимо точку A в I чверті на осі абсцис, яка належить колу. Радіус OA називається початковим радіусом. Якщо повернути радіус OA навколо точки O на 50° проти годинникової стрілки, ми отримаємо радіус OB. Кут AOB, який радіус утворюється, називають кутом повороту. У даному випадку кут повороту є 50° Тепер ми повертаємо початковий радіус OA до кута 50 ° за годинниковою стрілкою, одержимо радіус OC. У отриманому випадку кут повороту такий же, як на рис. 1, стрілки вказують кут повороту від 50 до 1 до 50 ° і напрямок обертання. Зазвичай, при повороті початкового радіуса проти годинникової стрілки кут повороту вважають додатним, а за рухом годинникової стрілки від'ємним (рис.1).

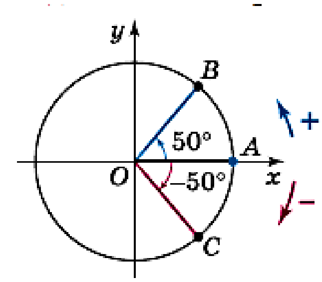


Рис. 1

Одиничне коло

Як відомо з геометрії, значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, і $tg\,\alpha$, де

$0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$, залежить від градусної міри кута α і не залежить від відстані радіуса Тоді розглядати коло з радіусом $R = 1$ і центром у початку координат (рис. 1.1). Подане коло називається *одиничним колом*.

Нехай початковий радіус OP_0переходить у радіус OP_α, де точка P_α $(x; y)$ (рис. 1.2). З рис. 1.2 видно, що куту α відповідає точка P_α. То

Синусом кута α називають ординату точки $\mathrm{P}_\alpha(x; y)$ одиничного кола, тобто $\sin\alpha = y$;

Косинусом кута α називають абсцис точки $\mathrm{P}_\alpha(x; y)$ одиничного кола, тобто $cos\,\alpha = y$;

Тангенсом кута α називають відношення ординату точки $\mathrm{P}_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її абсциси, тобто $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ (якщо $x \neq 0$);

Котангенсом кута α називають відношенням абсциси точки $\mathrm{P}_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її ординат, тобто $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ (якщо $y \neq 0$).

Означення тангенса можна сформулювати й так:

Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса.

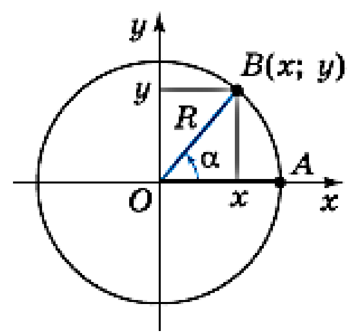


Рис. 1.2

Оскільки $y = \sin\alpha$, а $x = \cos\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, де $\cos\alpha \neq 0$. Аналогічно:

Котангенсом кута α називають відношенням косинуса цього кута до його синуса. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha \neq 0$.

Вирази $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають зміст для будь-якого значення α. Вираз $\operatorname{tg}\alpha$ має зміст, коли $x \neq 0$, тобто коли $\alpha \neq \pm 90^{\circ}, \pm 270^{\circ}, \pm 450^{\circ}, \ldots$, оскільки для цих кутів абсциса відповідної точки одиничного кола дорівнює нулю.

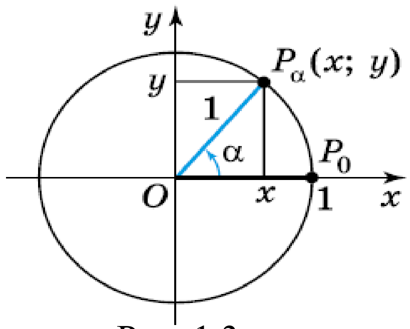


Рис. 1.3

Вираз $\operatorname{ctg}\alpha$ має зміст, коли $y \neq 0$, тобто коли $\alpha \neq \pm 0^\circ, \pm 180^\circ, \pm 360^\circ$, …, оскільки для цих кутів ордината відповідної точки одиничного кола дорівнює нулю.

Отже, кожному значенню кута α відповідає єдине значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. Тому синус, косинус, тангенс і котангенс є функціями кута α. Їх називають *тригонометричними функціями кута*.

Тригонометричні значення деяких кутів.

Знайдемо значення тригонометричних функцій кутів $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ за означенням.

На одиничному колі (рис. 1.4) позначимо точки P_α для $\alpha = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$. Одержимо:$P_{0^\circ}(1; 0)$,то $\sin 0^\circ = 0$;$\cos 0^\circ = 1$; $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$; $\operatorname{ctg} 0^\circ -$ не існує.

$P_{90^\circ}(0; 1)$, то $\sin 90^\circ = 1$; $\cos 90^\circ = 0$; $\operatorname{tg} 90^\circ -$ не існує; $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$.

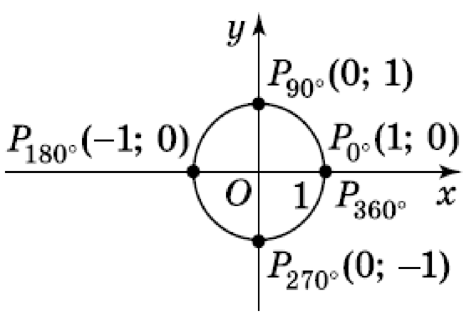


Рис. 1.4

$P_{180^\circ}(-1; 0)$, тому $\sin 180^\circ = 0$; $\cos 180^\circ = -1$; $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$; $\operatorname{ctg} 180^\circ -$ не існує.

$P_{270^\circ}(0; -1)$, то $\sin 270^\circ = -1$; $\cos 270^\circ = 0$; $\operatorname{tg} 270^\circ -$ не існує; $\operatorname{ctg} 270^\circ = 0$.

Точка P_{360° має такі самі координати, як і координати, як і точка P_{0°, тому $\sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0$; $\cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1$; $\operatorname{tg} 360^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$; $c\operatorname{tg} 360^\circ = = \operatorname{ctg} 0^\circ -$ не існує.

Отримані значення подано у вигляді таблиці, доповнивши її значення синуса, косинуса, тангенса гострих і тупих кутів, відомих нам з курсу геометрії. Невідомі значення тангенса і котангенса для цієї таблиці обчислимо відповідно за формулами $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Кути α першого рядка цієї таблиці ще називають *табличними кутами*. Маємо:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-$	0	$-$

1.3 Радіанна міра кута

До цього часу для вимірювання кутів ми використовували градуси або частини градусів - мінути та секунди. У багатьох випадках зручно використовувати іншу одиницю кута. Його називають радіаном.

Означення. Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

На (рис. 1.5) зображено центральний кут AOB, що спирається на дугу AB, довжина якої дорівнює радіусу кола. Величина кута AOB дорівнює одному радіану $\angle AOB = 1$ рад.

Кажуть, що радіанна міра AB дорівнює одному радіану. Записують: $\smile AB = 1$ рад.

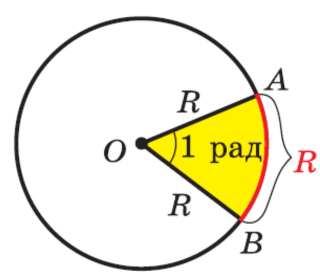


Рис. 1.5

Від радіуса кола не залежить Радіанна міра кута (дуги). Розглянемо два кола з спільним центром O і радіусами R і r $(R > r)$ (рис. 1.5). Сектор AOB

гомотетичний сектору A_1OB_1 із центром O і коефіцієнтом. Тоді якщо відстань дуги AB дорівнює радіусу R, тоді довжина дуги A_1B_1=r.

На (рис. 1.6) зображено коло радіуса R і дугу MN, довжина якої дорівнює R. У цьому випадку вважають, що радіанна міра кута MON (дуги MN) дорівнює рад. Якщо центральний кут кола радіуса R спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR, то кажуть, що **радіанна міра цього центрального кута дорівнює α рад**.

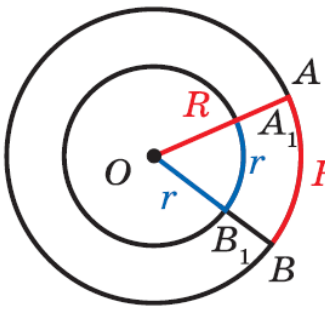


Рис. 1.6

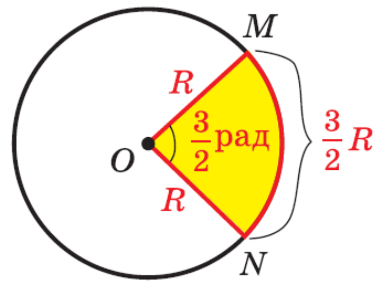


Рис. 1.7

Відстань півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює p рад. Градусна міра півкола становить 180°. Сказане дає змогу встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180°$$

звідси

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3{,}14$), можна встановити: $1 \text{ рад} \approx 57°$.

Якщо обидві частини рівності π рад = 180° поділити на 180, то отримаємо:

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{рад}$$

З вище поданих формул ми можемо знайти, наприклад:

$$5^{\circ} = 5 \cdot \frac{\pi}{180} \text{рад} = \frac{\pi}{36} \text{рад}$$

Записуючи радіану міру будь- якого кута зазвичай слово «рад» не пишуть.

1.2 Знаки значень тригонометричних функцій

Нехай отримаємо точку P, внаслідок обертанням точки P_0 (1; 0).навколо початку координат під кутом a. Якщо точка P належить координаті I чверті , то можна сказати, що α - кут Iчверті . Подібні можна сказати про кути II, III та IV чвертей.

Наприклад: $\frac{\pi}{5}$ і 15^0 – I чверть, $\frac{4\pi}{5}$ і 115^0 – II чверть, $\frac{5\pi}{4}$ і 215^0 – III чверть, $\frac{11\pi}{6}$ і 315^0 – IV чверть.

Кути виду $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$не належать до жодної із чвертей.

Точки, розташовані в I чверті, мають додатні абсцису й ординату.

Рис.1.8

Отже, якщо α — кут I чверті, то $sin\ a > 0, cos\ a > 0$.

Якщо α — кут II чверті, то $sin\ a > 0, cos\ a < 0$.

Якщо α — кут III чверті, то $sin\ a < 0, cos\ a < 0$.

Якщо α — кут IV чверті, то $sin\ a < 0, cos\ a > 0$.

Знаки синуса та косинуса схематично зображено на рис.

Оскільки $tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то кути тангенсів й котангенсів в I і III чвертей є додатними, а кутів II і IV чвертей — від’ємними (рис.1.9)

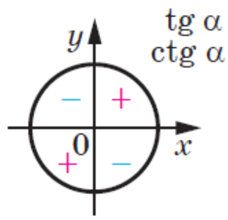


Рис.1.9

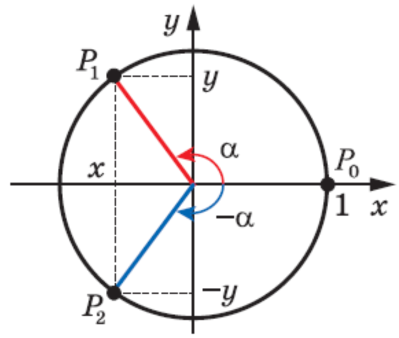


Рис.1.10

Нехай точки P_1 і P_2 одержано в результаті обертання точки P_0 $(1;\ 0)$ на кути α і $-\alpha$ (рис. 1.10).

Для довільного кута α точки P_1 і P_2 мають однакові абсциси та протилежні ординати. З означень синуса та косинуса слідує, що для довільного $\alpha \in R$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Перевіримо:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$$

1.3 Графіки функцій і їх властивості $y = \sin x, y = \cos x$, $y = tg\, x$ та $y = ctg\, x$

Властивості функції *y* = sin*x*

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (*x* — будь-яке дійсне число). *D*(sin*x*) = ***R***
2. *Область значень*: *y* $\in$[-1;1]. *E*(sin*x*) = [-1;1]

3. Функція **непарна**: sin(-x) = -sin$x$ (графік симетричний відносно початку координат).
4. *Функція періодична* з періодом T = 2π : sin(x +2π) = sin$x$.
5. Точки перетину з осями координат: Оy $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Ox $\begin{matrix} x = \pi k, k \in \pi \\ y = 0 \end{matrix}$

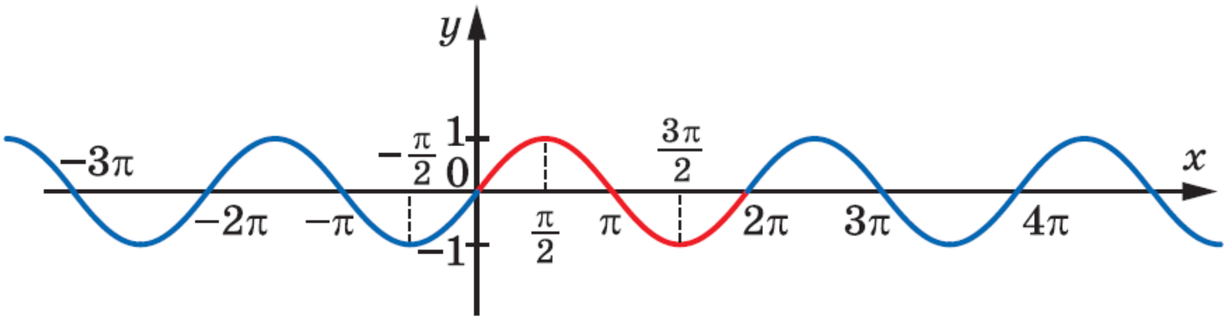


Рис1.11

6. *Проміжки знакосталості*:

$sinx\ >\ 0$ при $x\epsilon(2\pi k;\ +2\pi k), k\epsilon\boldsymbol{Z}$; $sinx\ <\ 0$ при $x\epsilon(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k\epsilon\boldsymbol{Z}$.

7. Проміжки зростання і спадання:

   функція sinx **зростає на кожному з проміжків**: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k\epsilon\boldsymbol{Z}$

   і **спадає на кожному з проміжків** $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k\epsilon\boldsymbol{Z}$

8. **Найбільше значення** функції дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon\boldsymbol{Z}$.
9. **Найменше значення** функції дорівнює –1 при x= $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon\boldsymbol{Z}$

Властивості функції *y* = cos*x*

1. Область визначення функції $D(y) = \mathbb{R}$, множина значень $E(y) = [-1; 1]$.

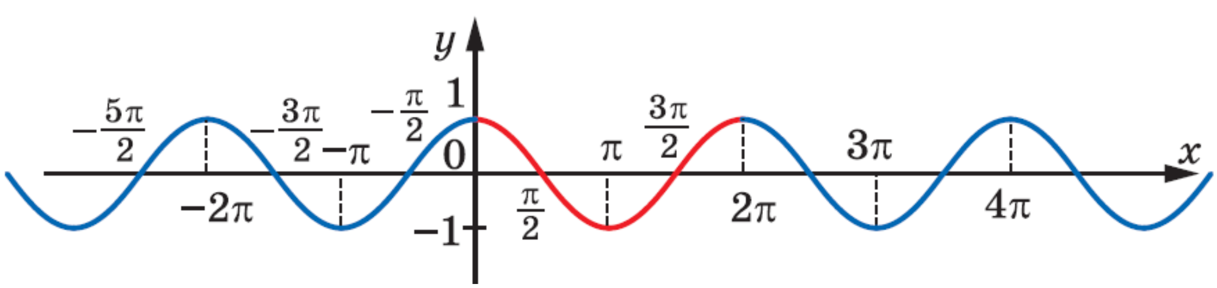


Рис.1.12

2. Функція $y = \cos x$ – обмежена функція, $|\cos x| \leq 1$.

3. Косинус – парна функція, оскільки $\cos(-x) = \cos x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

4. Функція $y = \cos x$ – періодична з періодом 2π, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

5. Проміжки знакосталості:

$$\cos x = 0 \text{ для } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x > 0 \text{ для } x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x < 0 \text{ для } x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

6. Функція

зростає на проміжку $x \in [2\pi n; \ \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

спадає на проміжку $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Графік функції $y = \sin x$ – косинусоїда.

Властивості функції $y = tg\ x$

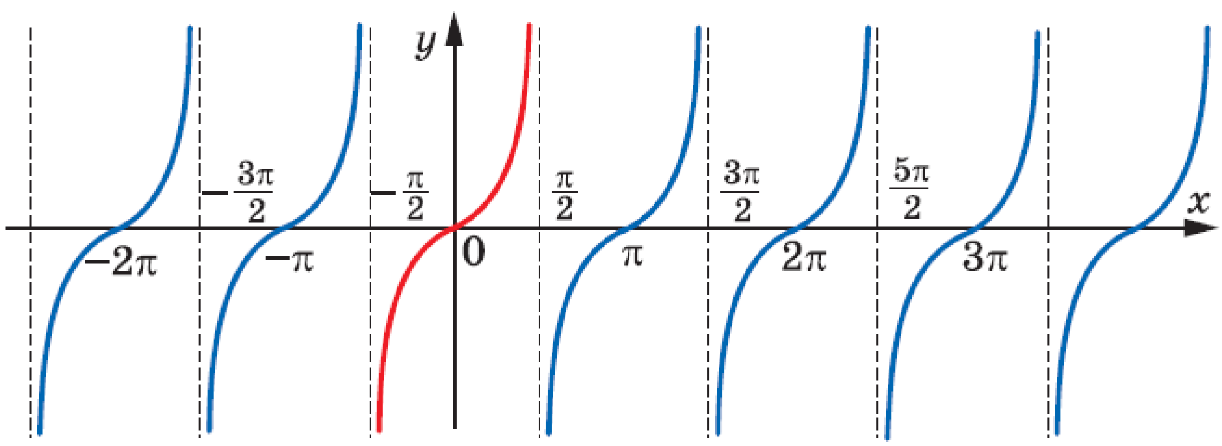


Рис. 1.13

1. Область визначення функції $D(y)$ – множина всіх дійсних чисел, окрім чисел $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Множина значень $E(y) = \mathbb{R}$.

2. Тангенс – непарна функція, оскільки $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для всіх $x \in D(y)$.

3. Функція $y = \operatorname{tg} x$ – періодична з періодом π, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ для всіх $x \in D(y)$.

4. Проміжки знакосталості:

$\operatorname{tg} x = 0$ для $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{tg} x > 0$ для $x \in (\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{tg} x < 0$ для $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Функція зростає на проміжку $x \in [-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ – тангенсоїда.

Властивості функції $\boldsymbol{y = ctg\ x}$

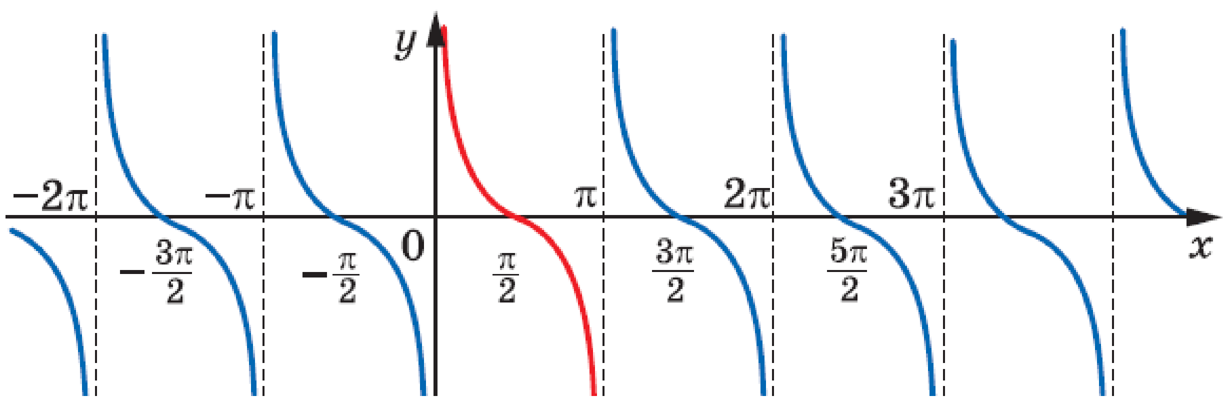


Рис. 1.14

1. Область визначення функції $D(y)$ – множина всіх дійсних чисел, окрім чисел $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Множина значень $E(y) = \mathbb{R}$.

2. Котангенс – непарна функція, оскільки $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ для всіх $x \in D(y)$.

3. Функція $y = \operatorname{ctg} x$ – періодична з найменшим додатним періодом π, $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$ для всіх $x \in D(y)$.

4. Проміжки знакосталості:

$\operatorname{ctg} x = 0$ для $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{ctg} x > 0$ для $x \in (\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{ctg} x < 0$ для $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

5. Функція спадає на проміжку $x \in [\pi n;\ \pi + \pi n], n \in \mathbb{Z}$.
6. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ – котангенсоїда.

1.4 Основні тригонометричні формули

Формули додавання

Формулами додавання називають формули, які виражають $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометричні функції кутів α і β.

Формули косинуса суми й косинуса різниці мають вигляд:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Формули правдиві для будь яких α та β.

Формули синуса суми й синуса різниці мають вигляд:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Формули правдиві для будь яких α та β.

Формули тангенса суми й тангенса різниці мають вигляд:

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$$

$$tg\ (\alpha - \beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$$

Формули правдиві для будь яких α та β, окрім

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;\quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi l;\quad \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ \ k, l, m \in \pi.$

Формули котангенса суми й котангенса різниці мають вигляд:

$$ctg(\alpha + \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$$

$$ctg(\alpha - \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}$$

Формули правдиві для будь яких α та β, окрім

$\alpha \neq \pi k; \quad \beta \neq \pi l; \quad \alpha - \beta \neq \pi m, \quad k, l, m \in \pi.$

Формули зведення:

Кожний кут із проміжку $[0; 2\pi]$ можна подати у вигляді $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, або $\pi \pm \alpha$, або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, де $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Обчислення синусів і косинусів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення синуса або косинуса кута α.

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$

Ці шість формул називають формулами зведення для синуса.

Наведені нижче шість формул називають формулами зведення для косинуса:

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin\alpha$

Аналогічно можна отримати:

$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\,\alpha$	$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -ctg\,\alpha$
$ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\,\alpha$	$ctg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -tg\,\alpha$

Ці формули називають формулами зведення для тангенса і котангенса.

Проаналізувавши наведені формули зведення, можна виявити закономірності.

Для того, щоб записати будь яку з них, можна керуватися такими правилами:

1) У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

2) Якщо в лівій частині формули кут має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус замінюють на косинус, тангенс – на котангенс і навпаки. Якщо кут має вигляд $\pi \pm \alpha$, то заміни функції не відбувається.

Формули подвійного, потрійного та половинного аргументів

Формули, які виражають тригонометричні функції кута 2α через тригонометричні функції кута α, називають **формулами подвійного аргументу**.

У формулах додавання

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$$

покладемо $\beta = \alpha$. Отримаємо:

$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

$$sin\, 2\alpha = 2\sin\alpha\ \cdot \cos\alpha$$

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Ці формули називають відповідно формулами косинуса, синуса й тангенса подвійного аргументу.

Оскільки $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$ і $sin^2\alpha = 1 - \ cos^2\alpha$, то з формули $\cos 2\alpha = cos^2\,\alpha -\ sin^2\alpha$ отримуємо ще дві формули:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2sin^2\,\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$$

Інколи ці формули зручно використовувати в такому вигляді:

$$1 - \cos 2\alpha = 2sin^2\alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2cos^2\alpha$$

Або в такому вигляді:

$$sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Дві останні формули називають формулами пониження степеня.

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 3α через тригонометричні функції аргументу α, називають формулами потрійного аргументу.

Формула синуса та косинуса потрійного аргументу має вигляд:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Формули, які виражають тригонометричні функції кута $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометричні функції кута α, називають формулами половинного аргументу.

Замінивши у формулах пониження степеня α на $\frac{\alpha}{2}$, отримаємо:

$$sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

Поділимо почленно першу рівність на другу. Отримаємо:

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Тепер можна записати:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+cos\alpha}}$$

$$\left|\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, \qquad \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Ці формули називають відповідно формулами синуса, косинуса й тангенса половинного аргументу. У всіх поданих формулах знак перед коренем залежить від того, в якій координатній чверті розташований кут $\frac{\alpha}{2}$.

Можна одержати ще й такі формули для тангенса половинного кута:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\ \alpha}{1+cos\ \alpha} = \frac{1-cos\ \alpha}{sin\ \alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\ \alpha}{sin\ \alpha} = \frac{sin\ \alpha}{1-cos\ \alpha}$$

За допомогою формул подвійного аргументу можна виразити $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ через $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Оскільки $\sin\alpha = 2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}$ та $\sin\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}$, то, поділивші праві частини цих рівностей на $sin^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$, маємо:

$$\sin\alpha = \frac{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{sin^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}}, cosx = \frac{cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}}{sin^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

Поділимо чисельник і знаменник кожної з цих рівностей на

$cos^2\frac{\alpha}{2}, \alpha \neq \pi + 2\pi k, k \in Z$. Одержали:

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Можна одержати вирази через тангенс половинного кута і для тангенса та котангенса:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \qquad \alpha \neq \pi k, k \in Z$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}; \quad \alpha \neq \pi k, k \in Z$$

Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій

Формули суми та різниці синусів:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Формули суми та різниці косинусів:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формули суми та різниці тангенсів, де $\boldsymbol{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k}$, $\boldsymbol{\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k}$, $\boldsymbol{k \in Z}$ та котангенсів:

$$tg\ \alpha + tg\ \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\ \alpha - tg\ \beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Формули суми та різниці котангенсів, де $\boldsymbol{\alpha \neq \pi k}$, $\boldsymbol{\beta \neq \pi k}$, $\boldsymbol{k \in Z}$

$$ctg\ \alpha + ctg\ \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$ctg\ \alpha - ctg\ \beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

З формул додавання синуса та косинуса ми можемо одержати формули для перетворення добутку тригонометричних функцій на суму.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

Розділ II. Тригонометричні рівняння і нерівності

2.1 Найпростіші тригонометричні рівняння

Означення: **Рівняння, що містять змінну під знаком тригонометричної функції, називається тригонометричним рівнянням.**

Такі рівняння ми розглянемо у даному розділі, де навчимося розв'язувати дані рівняння, для цього спочатку ознайомимося з оберненими тригонометричними функціями та поняттями арксинуса , арксинуса , арктангенса і арккотангенс.

Обернені тригонометричні функції.

Означення: Арксинусом числа α, де $-1 \leq \alpha \leq 1$ називається кут з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює α.

Позначимо арксинус числа α через $arcsin\alpha$. З означення випливає, що $x = arcsin\alpha$ тоді і тільки тоді, коли $x \, \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x = \alpha$

Наприклад: $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, тому що

Означення: Арккосинусом числа α, де $-1 \leq \alpha \leq 1$ називається кут з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює α.

Позначимо арксинус числа α через $arcsin\alpha$. З означення випливає, що $x = arccos\alpha$ тоді і тільки тоді, коли $x \, \epsilon [0; \pi]$, $\cos x = \alpha$

Означення: Арктангенсом числа α, де $\alpha \, \epsilon \, R$ називається кут з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює α.

Позначимо арктангенс числа α через $arctg\alpha$. З означення випливає, що $x = arctg\alpha$ тоді і тільки тоді, коли $x \, \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $tg\, x = \alpha$

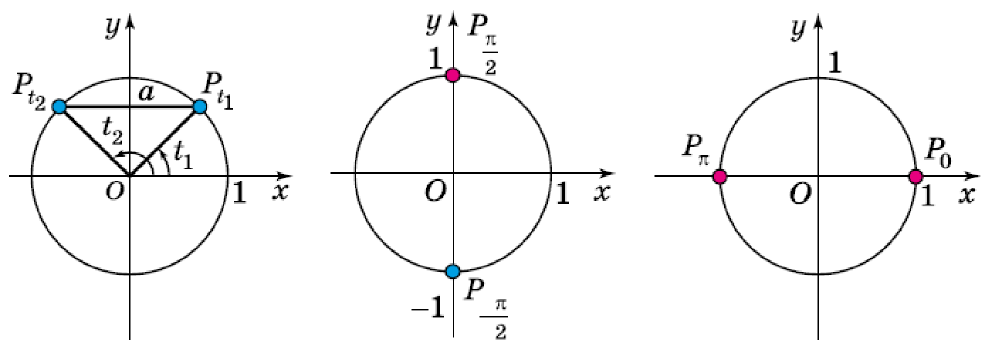
Означення: Арккотангенсом числа α, де $\alpha \, \epsilon \, R$ називається кут з проміжку $(0; \pi)$, котангенсом якого дорівнює α.

Позначимо арксинус числа α через $arcsin\alpha$. З означення випливає, що $x = arccos\alpha$ тоді і тільки тоді, коли $x \, \epsilon (0; \pi)$, $ctg\, x = \alpha$

<u>Означення:</u> Рівняння виду $\sin x = \alpha$, $\cos x = \alpha$, $tg\, x = \alpha$, $ctg\, x = \alpha$, x −змінна, $\alpha \epsilon R$ називається найпростіше тригонометричне рівняння.

2.1.1 Рівняння $\sin x = \alpha$

Якщо $a < -1$ або $a > 1$, рівняння $sint = a$ не має розв'язків, тому що $-1 < sint < 1$ для довільного значення t. Залишається -1 <a <1. Тоді рівняння має рішення. Покажімо розв'язки рівняння $sint = a$ на одиничному колі. За визначенням, $sint$ − це вісь ордината точки P_t, одиничного коло. Щоб розв'язати рівняння $\sin t = $ a, ми повинні знайти кути на одиничному колі, синус якого дорівнює a, тобто точки, ординати яких дорівнюють a. Якщо $-1 < a < 1$, то є дві з цих точок (рис . 2.1), кожна точка відповідає певному куту $t_1\ i\ t_2$. Якщо a = 1 або a = -1, ця точка є єдина (рис. 2.1.2).



а б в

Рис. 2.1

Отримали, що $t_1 \epsilon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ та $sint_1 = a$, тому $t_1 = \arcsin a$, то $t_2 = \pi - t_1 = \pi - \arcsin a$. Потрібно врахувати, що синус має найменший період 2π , то формула для рівняння $\sin t = $ a є:

$$t_1 = \arcsin a + 2\pi n, n \epsilon Z,\ t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \epsilon Z.$$

Об'єднаємо дані розв'язки в одну розв'язок для $\sin t = $ a і отримаємо:

$$t = (-1)^k arcsina + \pi k, k \epsilon \pi$$

Якщо у загальний розв'язок для синуса підставити k −парне, то

$k = 2m, m \epsilon Z$ отримаємо: $t = arcsina + \pi m, m \epsilon \pi$. Взявши k −не парне, то $k = 2m + 1, m \epsilon Z$, маємо, що $t = \pi - arcsina + 2\pi m, m \epsilon \pi$.

Розглянемо випадок, коли $\text{а} = -1$, $\text{а} = 0$, $\text{а} = 1$ тригонометричного рівняння $\sin t = \text{а}$, то в даному випадку можна не розв'язувати за загальним розв'язком для синуса, а одержати розв'язки з одиничного кола.

1) $\sin t = -1, t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \epsilon \pi$(див. рис. 2.1(а))

2) $\sin t = -1, t = \pi k, k \epsilon \pi$(див. рис. 2.1 (в))

3) $\sin t = 1, t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \epsilon \pi$(див. рис. 2.1 (б)

Тригонометричні рівняння виду: $\sin t = -1$, $\sin t = 0$, $\sin t = 1$ є частковими випадками рівняння $\sin t = \text{а}$.

Приклад 1. Розв'яжіть тригонометричне рівняння $3sin\left(\frac{-8x+\pi}{4}\right) = 0$

Розв'язування: $3sin\left(\frac{-8x+\pi}{4}\right) = 0$

Поділимо обидві частини на 3 і отримаємо:

$$3sin\left(\frac{-8x+\pi}{4}\right) = 0|:3$$

$$sin\left(\frac{-8x+\pi}{4}\right) = 0$$

Щоб відокремити x застосуємо обернену тригонометричну функцію до котангенса $arcsin\alpha$.

$$x = (-1)^m arcsin\alpha + 2\pi m, n \epsilon Z$$

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{4} + 2\pi m, n \epsilon Z$$

$$\frac{-8x+\pi}{4} = \pi m, m \epsilon Z$$

$$-8x + \pi = 4\pi m, m \epsilon Z$$

$$-8x = -\pi + 4\pi m, m \epsilon Z$$

$$x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi m}{2}, m \epsilon Z$$

Відповідь:$x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi m}{2}, m \in Z$

2.1.2 Рівняння $\cos x = \alpha$

Якщо $|a| > 1$, рівняння не має рішення, тому що завжди $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Якщо $|a| \leq 1$, рівняння має безліч коренів.

Пряма $x = a, -1 \leq a \leq 1$, перетинає одиничне коло в двох точках: P_{x_1} і P_{x_2}, де x_1, x_2 є коренями даного рівняння $\cos x = a$ (рис. 2.2).

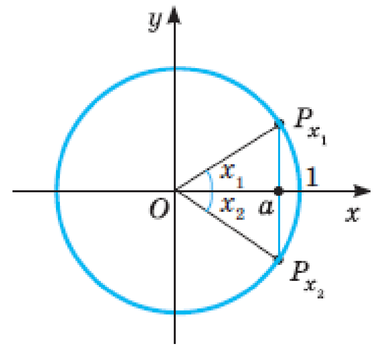


Рис.2.2

Оскільки $x \in [0; \pi]$, тоді $x_1 = \arccos a$. P_{x_1} і P_{x_2} є симетричні відносно абсциси, то кути x_1, x_2 протилежні. Тому $x_2 = -x_1 = -\arccos a$. Врахуємо період косинуса можна записати розв'язки рівняння $\cos x = a$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$$

Отримана формула є загальною. Розглянемо випадок, коли $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$ тригонометричного рівняння $\cos t = a$, то в даному випадку можна не розв'язувати за загальним розв'язком для синуса, а зручніше одержати розв'язки з одиничного кола.

1) $\cos x = 1$, то $x = 2\pi k, k \in Z$;

2) $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

3) $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$.

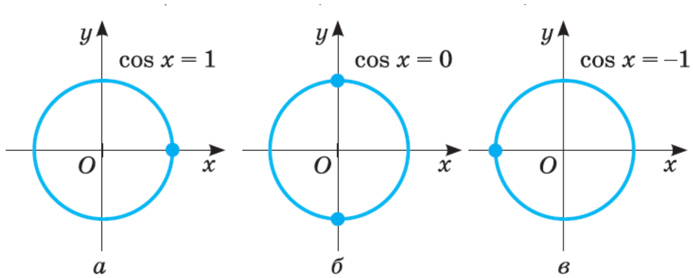


Рис. 2.3

Приклад 2. Розв'яжіть тригонометричне рівняння $cos\left(\frac{12x-\pi}{4}\right)=0$

Розв'язування:

$$cos\left(\frac{12x-\pi}{4}\right)=0$$

Щоб відокремити x застосуємо обернену тригонометричну функцію до котангенса $arccos\alpha$.

$$x = \pm arccos\, a + 2\pi k, k \epsilon Z$$

$$\frac{12x-\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k \epsilon Z$$

$$12x-\pi=2\pi+4\pi k, k \epsilon Z$$

$$12x=2\pi+\pi+4\pi k, k \epsilon Z$$

$$12x=3\pi+4\pi k, k \epsilon Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}, k \epsilon Z$$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}, k \epsilon Z$

2.1.3 Рівняння $tg\, x = \alpha$

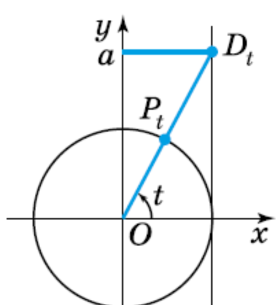


Рис.2.4

Вираз tgt може набувати довільного дійсне значення, розв'язком tgt має розв'язок для кожного а. Для отримання розв'язання тригонометричного рівняння $tgt =$ а на прямій лінії тангенсів знаходимо кут, tgt якого дорівнює а, тобто в точці D_t, ордината якої дорівнює а (рис. 2.4), є точка є єдиною. Пряма лінія OD_t, перетинають коло в точці P_t .На рисунку кут t такий, що $t \epsilon \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ та $tgt =$ а , то $t = arctga$. Для отримання загального розв'язку потрібно врахувати період для тангенса є π, то для цього випадку розв'язком є $t+\pi k, k \epsilon Z$ Отже, коренем тригонометричного рівняння $tgt =$ а є:

$$t = arctga+\pi k, k \epsilon Z$$

Приклад 3. Розв'яжіть тригонометричне рівняння $3tg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$

Розв'язування: $3tg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$

Розділимо обидві частини рівняння на 3 і отримаємо:

$$3tg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}|:3$$

$$tg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

Щоб відокремити x застосуємо обернену тригонометричну функцію до тангенса $arctg\alpha$.

$$x=arctg\alpha+\pi k, k\,\epsilon\,Z$$

$$2x-\frac{\pi}{3}=arctg\sqrt{3}+\pi k, k\,\epsilon\,Z$$

$$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\,\epsilon\,Z$$

$$2x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\pi k, k\,\epsilon\,Z$$

$$2x=\frac{2\pi}{3}+\pi k, k\,\epsilon\,Z$$

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}, k\,\epsilon\,Z$$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}, k\,\epsilon\,Z$

2.1.4 Рівняння $ctg\,x=\alpha$

Як відомо область значень функції $y = ctg\,x$ є множина R, то дане тригонометричне рівняння $ctg\,x = b$ набуває розв'язків при довільному значенні b. На(рис. 2.5) побудований графіки функцій $y = ctg\,x$ і $y = b$.

Розглянемо $y = ctg\,x$ на $(0; \pi)$, тобто на проміжку, довжина якого є період функції. На даному проміжку тригонометричне рівняння $ctg\,x = b$ при

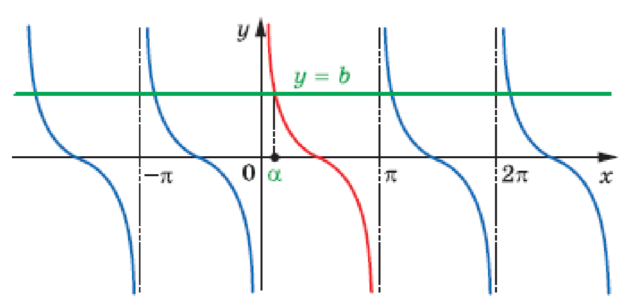


Рис. 2.5

довільному b має корінь a і до того ж тільки єдиний.

Оскільки $y = ctg\, x$ є періодичною функція і має періодом π, то інші коренів даного рівняння $ctg\, x = b$ відрізняється від отриманого кореня на число виду $\pi n, n \epsilon Z$

То корені рівняння $ctg\, x = b$ задаємо за формулою:

$$x = arcctgb + \pi n, n \epsilon Z$$

Приклад 4. Розв'яжіть тригонометричне рівняння $5ctg(\pi - x) = 5$

Розв'язування: $5ctg(\pi - x) = 5$

Поділимо обидві частини рівняння на 5 і отримаємо:

$$5ctg(\pi - x) = 5|: 5$$

$$ctg(\pi - x) = 1$$

Використовуємо комутативну властивість, щоб змінити порядок доданків

$$ctg(-x + \pi) = 1$$

Спростимо вираз за допомогою формули $ctg\alpha \pm \pi k = ctg\alpha$. Спростимо вираз, використовуючи симетрію тригонометричних функцій $-ctgx = 1$. Помножимо обидві частини на (-1) і отримаємо:

$$ctgx = -1$$

Щоб відокремити x застосуємо обернену тригонометричну функцію до котангенса $arcctg\alpha$.

$$x = arcctg\alpha + \pi k, k \epsilon Z$$

$$x = arcctg(-1) + \pi k, k \epsilon Z$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \epsilon Z$$

Відповідь: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \epsilon Z$

2.2 Основні способи розв'язування тригонометричних рівнянь

Розв’язування більш складних тригонометричних рівнянь зводиться до найпростіших. Для цього використовують тригонометричні формули та алгебраїчні перетворення. Не існує єдиного підходящого для всіх методу вирішення тригонометричних рівнянь. Найчастіше їх вирішують за допомогою методу заміни, розкладання на множники та перетворення тригонометричних виразів за формулами.

1. **Заміна змінної**. Зробивши у тригонометричному рівнянні заміну змінної, його можна звести до алгебраїчного рівняння, спосіб розв’язання якого відомий.

1) Розв’яжіть тригонометричне рівняння $sin^2x - 5sinx + 4 = 0$

Розв’язування: Подане рівняння є квадратним відносно $sinx$. Зробимо заміну змінної $\sin x = t$ звідси

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9, 9 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

$t_1 = \frac{5+3}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$ $\qquad$ $t_2 = \frac{5-3}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$

Виконаємо обернену заміну $\sin x = t$

$\sin x = 4$

Рівняння розв’язку не має. Оскільки $\sin x \ \epsilon \ [-1; 1]$

$\sin x = 1$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \ \epsilon \ Z$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \ \epsilon \ Z$.

2) Розв’яжіть рівняння $5cos^2x - sinx + 1 = 0$

Розв’язування: Використовуючи основну тригонометричну формулу $\sin x + cos^2x = 1 \Rightarrow \ cos^2x = 1 - sin^2x$ можна застосувати до нашого рівняння

$$5 \cdot (1 - sin^2x) - sinx + 1 = 0$$

Помножимо кожний доданок на 5 і розкриємо дужки

$$5 - 5sin^2x - sinx + 1 = 0$$

Додаємо однакові доданки

$$6 - 5sin^2x - sinx = 0$$

Подане рівняння є квадратним відносно $sinx$. Зробимо заміну змінної $\sin x = t$ звідси $6 - 5t^2 - t = 0$. Використовуємо комутативну властивість, щоб змінити порядок доданків $-5t^2 - t + 6 = 0$. Помножимо дане рівняння на (-1) і отримаємо: $5t^2 + t - 6 = 0$. Подамо t у вигляді різниці: $5t^2 + 6t - 5t - 6 = 0$ Винесемо спільний множник за дужки $t \cdot (5t + 6) - 5t - 6 = 0$, винесемо знак мінус за дужки $t \cdot (5t + 6) - (5t + 6) = 0$. Винесемо спільний множник за дужки $(5t + 6)$ і будемо мати : $(5t + 6) \cdot (t - 1) = 0$.

Якщо добуток дорівнює нулю, то принаймні один із множників дорівнює нулю.

$5t + 6 = 0$

$5t = -6$

$t = -\frac{6}{5}$

$t - 1 = 0$

$t = 1$

$t = 1$

Виконаємо обернену заміну $\sin x = t$

$$\sin x = -\frac{6}{5}$$

Рівняння розв'язку не має. Оскільки $\sin x \ \epsilon \ [-1; 1]$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \ \epsilon \ Z$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \ \epsilon \ Z$.

3) Розв'яжіть рівняння $tgx + ctgx = \frac{5}{2}$

Розв'язування: Щоб розв'язати дане рівняння потрібно застосувати формулу $ctgx = \frac{1}{tgx}$. Отримаємо: $tgx + \frac{1}{tgx} = \frac{5}{2}$. Зробимо заміну змінної $tgx = t$, звідси будемо мати: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$. Визначимо всі значення t, для яких знаменник дробу $\frac{1}{t}$ дорівнює нулю $t = 0$.Щоб знайти область допустимих значень, включимо значення змінної, для яких значення виразу не існує $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}, t \neq 0$. Перенесемо число в ліву частину шляхом додавання протилежного числа до обох частин $t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}$. Використаємо властивість додавання: Сума протилежних чисел дорівнює 0. $t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0$, зведемо до спільного знаменника: $\frac{2t^2+2-5t}{2t} = 0 \Rightarrow 2t^2 + 2 - 5t = 0 \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9, 9 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

$t_1 = \frac{5+3}{2\cdot2} = \frac{8}{4} = 2$

$t_2 = \frac{5-3}{2\cdot2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Виконаємо обернену заміну $\operatorname{tg} x = t$

$$\operatorname{tg} x = 2$$

$$x = arctg\alpha + k\pi, k \in Z$$

$$x = arctg(2) + k\pi, k \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$$

$$x = arctg\alpha + k\pi, k \in Z$$

$$x = arctg\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi, k \in Z$$

Відповідь: $x = \begin{cases} x = arctg\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \\ x = arctg(2) + k\pi \end{cases}, k \in Z.$

2. **Однорідні рівняння відносно синуса і косинуса**. Так називають рівняння виду asinn x + bsinn – 1 x cos x + … + ccosn x = 0, які після ділення обох частин на cosn x (sinn x) можна звести до рівняння відносно tg x (ctg x).

4) Розв'яжіть тригонометричне рівняння $sin\, x + cos\, x = 0$.

Розв'язування: Перенесіть вираз у праву частину шляхом додавання протилежного виразу до обох частин $sin\, x + cos\, x - \cos x = 0 - \cos x$.

Оскільки сума двох протлежних величин дорівнює 0, то вони взаємно знищуються $sin\ x\ = 0 - \cos x$. У випадку додавання або віднімання 0, величина не змінюється $sin\, x = -\cos x$. У даному випадку обидві частини можна поділити на $cos\ x$ і отримаємо: $\frac{sin\ x}{\cos x} = -1 \Rightarrow tg\ x = -1$. Тоді $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \epsilon Z$.

Відповідь: $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \epsilon Z$.

3. **Розкладання на множники**

5) Розв'яжіть тригонометричне рівняння $2sin^3x + 2 \cdot cos^2x - \sin x = 1$

Розв'язування: Спочатку потрібно зробити так, щоб у правій частині тригонометричного рівняння вийшов нуль. $2sin^3x + 2 \cdot cos^2x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow$ $2sin^3x + 2 \cdot cos^2x - \sin x - 1 = (2sin^3x - \sin x) + (2 \cdot cos^2x - 1) =$ $= (2sin^3x - \sin x) + (2cos^2x - 1) = \sin x\,(2sin^2x - 1) + (2(1 - sin^2x) - 1) =$ $= \sin x\,(2sin^2x - 1) + (1 - 2sin^2x) = (2sin^2x - 1)(\sin x - 1)$

$$(2sin^2x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = 1$$

$$x\ =\ (-1)^k\, arcsin\,\alpha\ +\ \pi k, k \epsilon Z$$

$$x\ = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \epsilon Z$$

$$2sin^2x - 1 = 0$$

$$2sin^2x = 1$$

$$sin^2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = (-1)^k \, arcsin\, \alpha + \pi k, k \in Z$$

$x = (-1)^k \, arcsin\, \alpha + \pi k, k \in Z$ $\qquad$ $x = (-1)^k \arcsin \alpha + \pi k, k \in Z$

$x = (-1)^k \, arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n$ $\qquad$ $x = (-1)^k \, arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi m$

$x = (-1)^k \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ $\qquad$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + 2\pi m, n \in Z$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, n \in Z$$

Відповідь: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \end{array}\right.$

4. Перетворення рівняння за тригонометричними формулами

6) Розв’яжіть тригонометричне рівняння $\cos x + \cos 3x = 0$

Розв’язування: застосуємо формулу

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Перетворимо вираз: $2cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2cos\left(\frac{4x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{-2x}{2}\right) =$ $= 2cos(2x) \cdot cos(-x)$; $2cos2x \cdot cosx = 0$ поділимо обидві частини на 2 і маємо: $cos(2x) \cdot cosx = 0$. Якщо добуток дорівнює нулю, то принаймні хоч один із множників дорівнює нулю.

$cos2x = 0$ $\qquad$ $cosx = 0$

$x = \pm arccos\, a + 2\pi k$ $\qquad$ $x = \pm arccos\, a + 2\pi k, k \in Z$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Відповідь: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{cases}$

7) Розв'яжіть тригонометричне рівняння $\sin x + \cos 5x = 0$

Розв'язування: застосуємо формулу $\cos \alpha = sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ перетворимо вираз: $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$. Далі використовуємо формулу перетворення суми в добуток : $\sin \alpha + \sin \beta = 2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ і отримаємо:

$$2sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - 5x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)}{2}\right) = 2sin\left(\frac{-4x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{6x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) =$$

$$= 2sin\left(\frac{\frac{-8x + \pi}{2}}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\frac{12x - \pi}{2}}{2}\right) = 2sin\left(\frac{-8x + \pi}{4}\right) \cdot cos\left(\frac{12x - \pi}{4}\right)$$

$2sin\left(\frac{-8+\pi}{4}\right) \cdot cos\left(\frac{12-\pi}{2}\right) = 0$ поділимо обидві частини на 2:

$$sin\left(\frac{-8x + \pi}{4}\right) \cdot cos\left(\frac{12x - \pi}{4}\right) = 0$$

$$sin\left(\frac{-8x + \pi}{4}\right) = 0$$

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{4} + 2\pi m, n \in Z$$

$$\frac{-8x + \pi}{4} = \pi m, m \in Z$$

$$-8x + \pi = 4\pi m, m \in Z$$

$$-8x = -\pi + 4\pi m, m \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi m}{2}, m \in Z$$

$$cos\left(\frac{12x - \pi}{4}\right) = 0$$

$$x = \pm arccos\, a + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{12x - \pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$12x - \pi = 2\pi + 4\pi k, k \in Z$$

$$12x = 2\pi + \pi + 4\pi k, k \in Z$$

$$12x = 3\pi + 4\pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

Відповідь: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi m}{2}, m \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z \end{cases}$

5. Зведення рівняння до рівносильної системи

8) Розв’яжіть тригонометричне рівняння $\frac{\sin x}{1+cosx}=0$

Розв’язування: Визначаємо всі значення х, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x=0 \\ 1+\cos x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \\ \cos x\neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pi n, n\,\epsilon\, Z \\ x\neq \pi+2\pi k, k\,\epsilon\, Z \end{cases}$$

Знайдемо перетин множини розв’язків та область допустимих значень $x=2\pi k, k\,\epsilon\, Z$.

6. Розв’язання тригонометричних систем

9) Розв’яжіть тригонометричну систему рівнянь $\begin{cases} \cos x+2\cos y=2 \\ \cos x-2\cos y=0 \end{cases}$

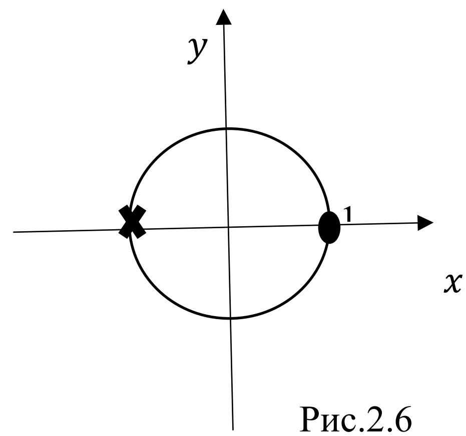


Рис.2.6

Розв’язування тригонометричної системи рівнянь:

Додамо почленно рівняння і отримаємо:

$2\cos x=2 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\,\epsilon\, Z$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\,\epsilon\, Z$

2.3 Тригонометричні нерівності

Тригонометричною називають нерівність, у якій невідомі містяться тільки під знаком тригонометричних функцій. Приклади тригонометричних нерівностей:

$$\cos x<\frac{\pi}{3}$$

Розв’язування тригонометричних нерівностей зводиться до розв’язування найпростіших тригонометричних нерівностей, тобто нерівностей виду:

$sin\, x\ >\ \alpha, cos\, x\ <\ \alpha, tgx\ <\ \alpha, ctg\, x\ >\ \alpha$ і т. д.

Розв’язують такі нерівності на одиничному колі або використовуючи графіки тригонометричних функцій.

I. Тригонометрична нерівність виду $\sin x > \alpha$ і $\sin x < \alpha$.

Нехай дано тригонометричну нерівність $\sin x > \alpha$.

1) При $-1 < \alpha < 1$ множина всіх розв'язків даної тригонометричного нерівності будемо шукати за допомогою тригонометричного кола. З (рис. 2.7) бачимо, що в цьому випадку розв'язком нерівності буде таким: $x \in (arcsina + 2\pi k; \pi - -arcsina + 2\pi k), k \in Z$

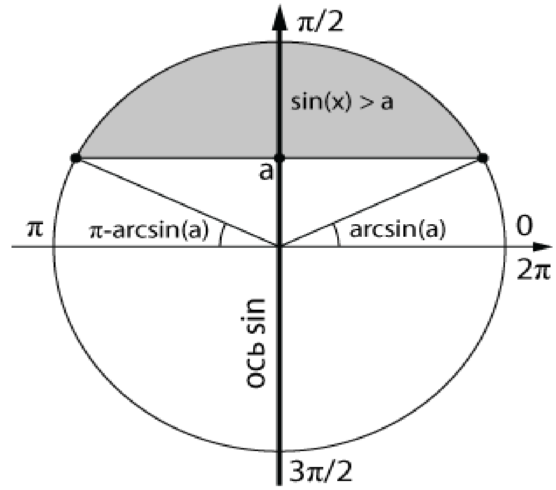


Рис.2.7

2) При $\alpha \geq 1$ тригонометрична нерівність не має розв'язків $x \epsilon \emptyset$

3) При $\alpha \leq -1$ розв'язком тригонометричної нерівності є будь-яке дійсне число:$X \in R$

4) При $\mathrm{a} = -1$ розв'язком тригонометричної нерівності є будь-яке дійсне число, відмінне від $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, K \in Z$

Нехай дано тригонометричну нерівність $\sin x < \alpha$

1) При $-1 < \alpha < 1$ множина всіх розв'язків даної тригонометричного нерівності будемо шукати за допомогою тригонометричного кола. З (рис. 2.8) бачимо, що в цьому випадку розв'язком нерівності буде таким: $X \epsilon (\pi - \mathrm{arc}\sin a + 2\pi k; 2\pi + arc\sin a +2\pi k), K \in Z$

2) При $\alpha > 1$ тригонометрична нерівність не має розв'язків $X \in R$.

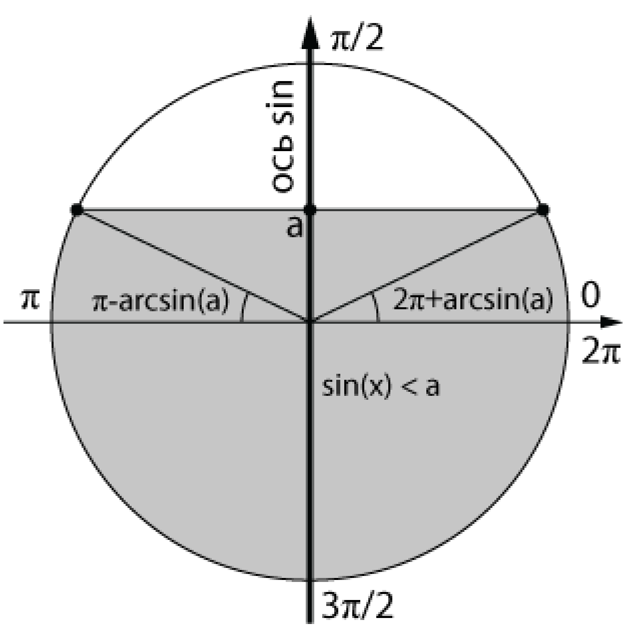


Рис.2.8

3) При $\alpha \leq -1$ розв'язком тригонометричної нерівності є будь-яке дійсне число:$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \epsilon Z$

4) При а $= -1$ тригонометрична нерівності не має розв'язків.

Приклад 1. Розв'яжіть тригонометричну нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Розв'язання: Розпочнемо із перевірки правої сторони нерівності перевіримо ОДЗ для синуса. Оскільки умова виконана $|\ \frac{\sqrt{2}}{2}|\ \leq 1$, торозв'язок нерівності для синуса існує.

Тоді існують два методи розв'язання нерівностей:

Графічно з побудовою заданих функцій (їх не важко побудувати) та використанням одиничного кола.

Другий метод є більш поширеним на практиці, тому що набагато простіше створити одиничного коло і намалювати на ньому лінії, ніж використовувати графіки повних функцій.

Однак вам потрібно знати перший метод і вміти знаходити рішення тригонометричних нерівностей.

І спосіб: Подуємо графіки функцій $y = sin\,x$ та $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ у системі координат і виберіть інтервали, в яких графік функції $y = sin\,x$ знаходиться нижче графіка прямої $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$(див.рис.2.9).

Нижче, тому що дана оцінка нерівності строго менший.

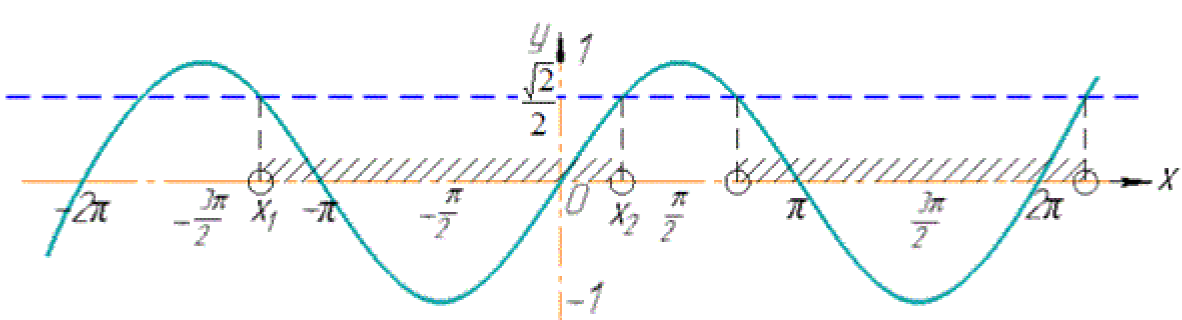


Рис.2.9

Нерівність нестрога, то точки перетину включаємо в розв'язок і отримаємо проміжок. Шукаємо точки x_1 та x_2:

$x_1 = -\pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$, $x_2 = arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

У відповіді потрібно врахувати період синуса.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in Z$.

II спосіб: Будуємо одиничне коло, пряму $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, і позначаємо точки перетину P_{x_1} та P_{x_2} одиничного кола та визначеної прямої, та виберіть множину точок, ординати яких менше за $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

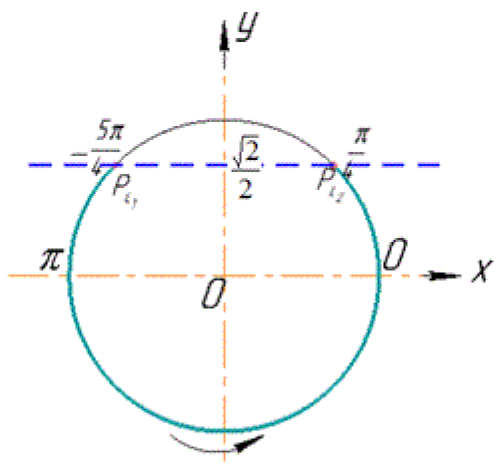


Рис.2.10

Шукаємо точки x_1 та x_2, ці точки рухаються за додатним напрямком:

$$x_1 = \pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_2 = arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{9\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in Z$

Отже, загальний розв’язок для цих двох способів є:

$$x \in \left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in Z$$

II. Тригонометрична нерівність виду $\cos x > \alpha$ і $\cos x < \alpha$.

Нехай дано тригонометричну нерівність $\cos x > \alpha$

1) При $-1 < \alpha < 1$ множина всіх розв’язків даної тригонометричного нерівності будемо шукати за допомогою тригонометричного кола. З (рис. 2.11) бачимо, що в цьому випадку розв’язком нерівності буде таким:

$$x \in (-arccosa + 2\pi k; arccosa + 2\pi k), k \in Z$$

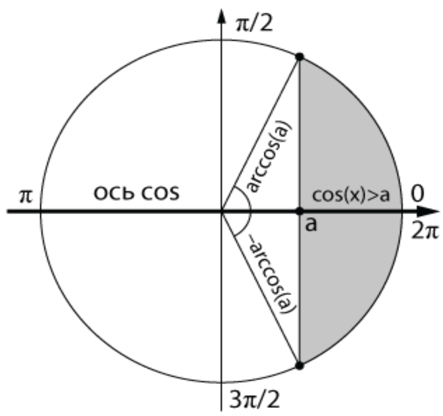


Рис.2.11

2) При $\alpha \geq 1$ тригонометрична нерівність не має розв'язків.

3) При $\alpha \leq -1$ розв'язком тригонометричної нерівності є будь-яке дійсне число:$X \in R$

4) При $a = -1$ розв'язком тригонометричної нерівності є будь-яке дійсне число, відмінне від $\pi + 2\pi k, K \in Z$

Нехай дано тригонометричну нерівність $\cos x < \alpha$

1) При $-1 < \alpha < 1$ множина всіх розв'язків даної тригонометричного нерівності будемо шукати за допомогою тригонометричного кола. З (рис. 2.12) бачимо, що в цьому випадку розв'язком нерівності буде таким:

$$x\epsilon(arcsina + 2\pi k; 2\pi - arcsina + 2\pi k), k \in Z$$

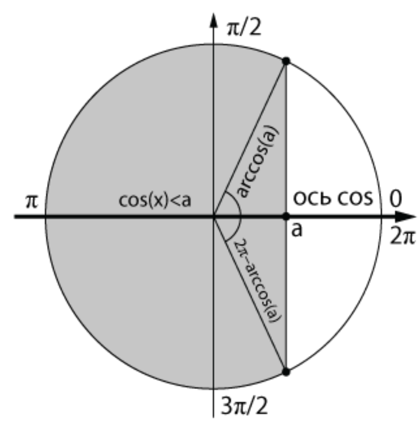


Рис. 2.12

2) При $\alpha > 1$ тригонометрична нерівність не має розв'язків $X \in R$.

3) При $a \leq -1$ тригонометрична нерівності не має розв'язків.
4) При $a = -1$ розв'язком тригонометричної нерівності є будь-яке дійсне число, відмінне від $2\pi k, k \in Z$

Приклад 2. Розв'яжіть тригонометричну нерівність $\cos x < \frac{1}{2}$

Розв'язання: Позначаємо на осі косинусів $\frac{1}{2}$. Всі значення cosx, менші $\frac{1}{2}$, - лівіше точки $\frac{1}{2}$ на осі косинусів. Позначаємо всі точки (дугу) тригонометричного кола, косинус яких буде менше $\frac{1}{2}$.

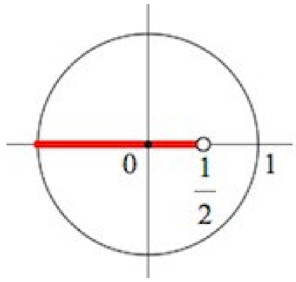


Рис.2.13

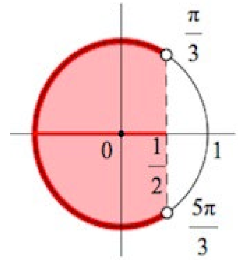


Рис.2.14

Отриману дугу ми проходимо за додатним напрямком (проти годинникової стрілки). Тобто від точки $\frac{\pi}{3}$ кілька разів $\frac{5\pi}{3}$.

Звертаємо увагу, що одержавши першу точку $\frac{\pi}{3}$, ми йдемо за додатним напрямком і друга точка $\frac{5\pi}{3}$, а не точка $-\frac{\pi}{3}$.

Можна побачити, що нерівності задовольняють наступні значення x:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k, < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, k \epsilon Z.$$

Ось так виглядає графічне рішення нерівності нема на тригонометричному колі, а в прямокутній системі координат:

ІІІ. Тригонометрична нерівність виду $tgx > \alpha$ і $tgx < \alpha$.

Нехай дано тригонометричну нерівність $tgx > \alpha$

Множину всіх розв'язків даної тригонометричної нерівності будемо шукати за допомогою тригонометричного кола. З (рис.2.16) видно, що при будь-якому $a \in R$ розв'язок нерівності буде таким:

$$x \epsilon \left(arctg\alpha + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \epsilon Z.$$

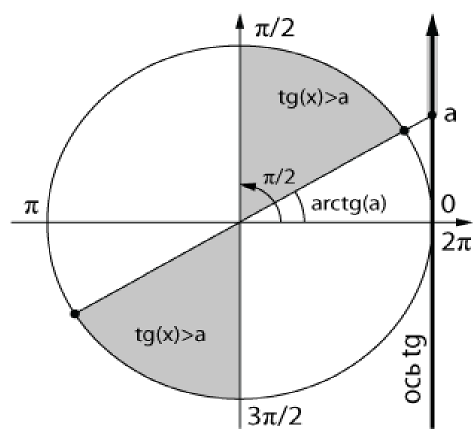


Рис. 2.16

Нехай дано тригонометричну нерівність $tgx < \alpha$

Множину всіх розв'язків даної тригонометричної нерівності будемо шукати за допомогою тригонометричного кола. З (рис.2.17) видно, що при будь-якому $a \in R$ розв'язок нерівності буде таким:

$$x \epsilon \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ arctga + \pi k\right), k \epsilon Z$$

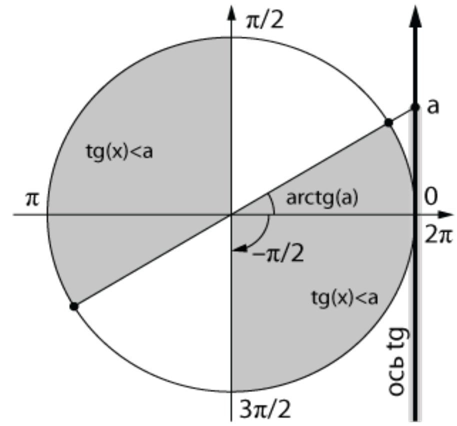


Рис.2.17

Приклад 3. Розв'яжіть тригонометричну нерівність $tg\, x < 1$

Розв'язання: Позначаємо на осі тангенсів 1. Вказуємо всі значення тангенса, менші 1 - нижче 1.

Далі, позначаємо всі точки тригонометричного кола, значення тангенса в яких буде менше 1. Для цього ми з'єднуємо кожну точку осі тангенсів нижче 1 з початком координат; тоді кожна проведена пряма перетне двічі тригонометричний коло. Ось ці-то точки кола нас і цікавлять. Вони шикуються в дві дуги (точніше в дві дуги). Значення тангенса в них - менше 1.

Зауважимо, що дуга $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \frac{9\pi}{4} + 2\pi n\right), n \epsilon Z$ повторює дугу $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \epsilon Z$ одно через пів кола, тобто через і (період функції $y = tgx$ - π).

Всі значення x можна записати у вигляді наступної подвійної нерівності:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \epsilon Z$$

або так $x \epsilon \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \epsilon Z$

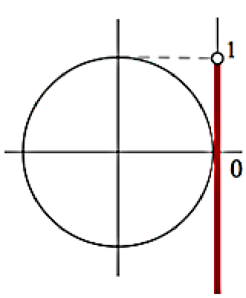


Рис.2.18

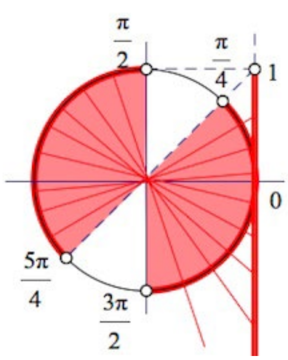


Рис.2.19

Відповідь: $x \epsilon \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \epsilon Z$

IV. Тригонометрична нерівність виду $ctgx > \alpha$ і $ctgx < \alpha$.

Нехай дано тригонометричну нерівність $ctgx > \alpha$

Множину всіх розв'язків даної тригонометричної нерівності будемо шукати за допомогою тригонометричного кола. З (рис.2.20) видно, що при будь-якому $a \in R$ розв'язком нерівності буде таким:

$$x \epsilon (\pi k;\ arcctg\alpha + \pi k), k \epsilon Z$$

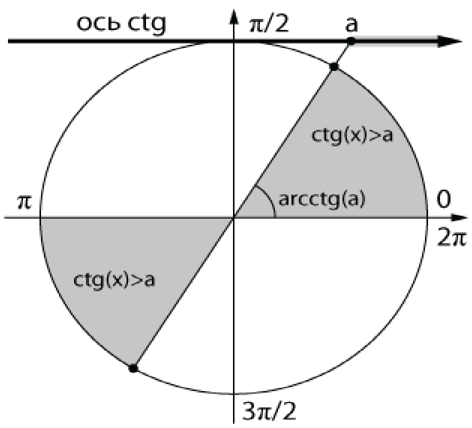


Рис.2.20

Нехай дано тригонометричну нерівність $ctgx < \alpha$

Множину всіх розв'язків даної тригонометричної нерівності будемо шукати за допомогою тригонометричного кола. З рис.2.3.14 видно, що при будь-якому $a \in R$ розв'язок нерівності буде таким:

$$x \epsilon \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ arctg\alpha + \pi k\right), k \epsilon Z$$

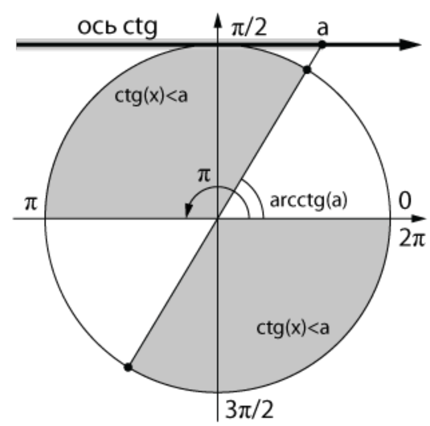


Рис.2.21

Приклад 3. Розв'яжіть тригонометричну нерівність $ctg\, x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Розв'язання: Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = ctg\, x$ та $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Виділимо проміжки, на яких графік функції $y = ctg\,x$ розташований не вище графіка прямої $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

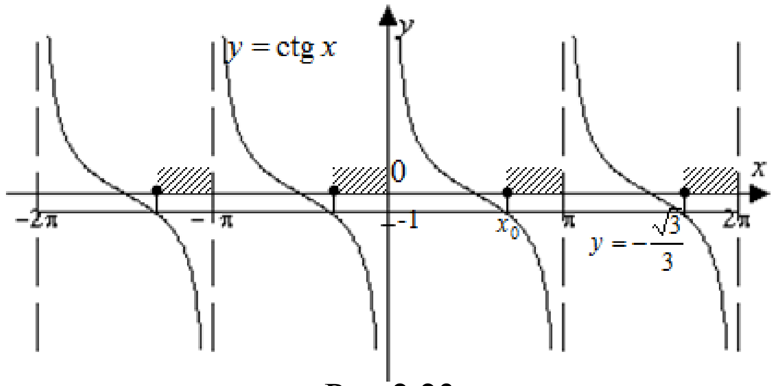


Рис.2.23

Знайдемо абсцису точки x_0 яка є кінцем одного з проміжків, на якому нерівність $x_0 = arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Іншим кінцем цього проміжку є точка π, а функція $y = ctg\,x$ в цій точці невизначена. Таким чином, одним з розв'язків даної тригонометричної нерівності є проміжок $\frac{2\pi}{3} \leq x < \pi$. З огляду на те, що котангенс функція періодична, з періодом π, то остаточно отримаємо:

$$\left[\frac{2\pi}{3} + \pi k, \pi + \pi k\right), k \in Z$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + \pi k, \pi + \pi k\right), k \in Z$

Розділ III. Реалізація компетентнісного підходу у вивчені тригонометрії

У цьому розділі деталізую класифікацію ключових освітніх компетенцій щодо курсу тригонометрії в школі, запропоную конкретні прийоми реалізації компетентнісного підходу на різних етапах уроку математики при розв’язуванні тригонометричних функцій, рівнянь та нерівностей різного типу, спираючись на деталізовану класифікацію.

3.1. Розвиток ключових компетенцій при вивченні тригонометрії

Розвиток ключових компетентностей у вивченні тригонометрії

Розглянемо компетентнісний потенціал на уроках математики:

1. **Спілкування рідною мовою / національною мовою**

Компетенції:

- задавати питання та визначати проблему;

- робити висновки на основі інформації, представленої у різних формах: таблиці, діаграми, графіки;

- розуміти, пояснювати та трансформувати тексти математичних задач (усних та письмових), правильно висловлюватися рідною мовою;

- Доречно і правильно використовувати в мові математичні терміни, чітко, точно та чітко формулювати думку, аргументувати та доводити правильність тверджень.

- Поповнювати свій словниковий запас математичними термінами.

Ставлення:

Розуміння важливості чіткого та точного формулювання.

Навчальні засоби:

Формулювання та доведення теорем.

2. **Спілкування іноземними мовами**

Компетенції:

- спілкування іноземною мовою з використанням числівників, математичних понять та найбільш часто вживаних термінів;

- задавати питання, формулювати проблему;

- Порівняйте математичний термін або буквене позначення з його походженням іноземною мовою, щоб правильно використовувати математичні терміни у повсякденному житті.

Ставлення:

Усвідомлюючи важливість вивчення іноземних мов для розуміння математичних термінів та символів, шукайте інформацію в іноземних джерелах.

Навчальні засоби:

Тексти іноземною мовою зі статистичними даними, математичними термінами.

3. **Математична компетентність**

Компетенції:

- робота з числовою інформацією, геометричними об’єктами на площині та у просторі;

- Встановити кількісні та просторові взаємозв'язки між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, технічними, культурними тощо);

- використовувати логічні способи мислення при вирішенні пізнавальних та практичних задач, пов’язаних з реальними об’єктами;

- відбирати, створювати та досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об’єктів, процесів та явищ, інтерпретувати та оцінювати результати;

- прогноз у контексті навчальних та практичних завдань;

- використовувати математичні методи в життєвих ситуаціях.

Ставлення:

Усвідомлення математики як галузі людської культури, її значення для опису та пізнання світу.

Навчальні засоби:

Завдання, що імітують реальні ситуації.

4. **Компетенції в галузі науки і техніки**

Компетенції:

- виявляти проблеми, що виникають у навколишньому середовищі, та вирішувати їх за допомогою математики;

- створювати та вивчати математичні моделі природних явищ та процесів.

Ставлення:

Усвідомлення значення математики як універсальної мови для науки, техніки та техніки.

Навчальні засоби:

Створення графіки та діаграм, що ілюструють функціональну залежність результатів впливу людської діяльності на природу.

5. **Інформаційна та цифрова грамотність**

Компетенції:

- структурувати дані;

- діяти відповідно до алгоритму та складати алгоритми;

- визначити, чи достатньо даних для вирішення проблеми;

- використовувати різні знакові системи;

- знаходити інформацію та оцінювати її достовірність;

- доводити істинність висловлювань.

Ставлення:

Критичне розуміння інформації та джерел її прийому, усвідомлення важливості ІКТ для ефективного вирішення математичних задач.

Навчальні засоби:

Візуалізація даних, створення графіки та діаграм за допомогою програмного забезпечення.

6. **Можливість вчитися протягом усього життя**

Компетенції:

- визначити мету навчальної діяльності, відібрати та застосувати знання та методи, необхідні для досягнення цієї мети;

- Організація та планування їх освітньої діяльності;

- моделювати власні освітні шляхи, аналізувати, контролювати, адаптувати та оцінювати результати своєї освітньої діяльності;

- довести правильність власного судження або визнати його хибним.

Ставлення:

Поінформованість про власні освітні потреби та цінності нових знань та навичок, інтерес до пізнання світу, розуміння важливості прихильності RF Reference протягом усього життя покращенню результатів своєї роботи.

Навчальні засоби:

Моделювання власного освітнього шляху.

7. **Соціальна та громадська компетенція**

Компетенції:

- висловлювати свою думку, слухати та слухати інших, оцінювати аргументи та змінювати свою думку на основі доказів;

- аргументувати та відстоювати свою позицію;

- працювати разом у команді, сприяти роботі групи з вирішення проблем;

- аналізувати та критично оцінювати соціально-економічні події в країні на основі статистичних даних;

- Розгляд правових, етичних та соціальних наслідків рішень.

Ставлення:

Рівне ставлення до інших, незалежно від статті, соціальне походження, відповідальність за спільну справу, готовність логічно обґрунтувати свою позицію без передчасного переходу до висновків, повага прав людини.

Навчальні засоби:

Проблеми соціально-економічного змісту.

8. **Ініціатива та підприємництво**

Компетенції:

- генерувати нові ідеї, вирішувати життєві проблеми, аналізувати їх, приймати оптимальні рішення;

- Використовуйте критерії практичності, ефективності та точності, щоб вибрати найкраще рішення.

- сперечатися і відстоювати свою позицію, обговорювати;

- використовувати різні стратегії та шукати оптимальні шляхи вирішення життєвих проблем.

Ставлення:

Ініціативність, відповідальність, впевненість у собі, переконання, що успіх колективу - це ще й особистий успіх, позитивна оцінка та підтримка конструктивних ідей з боку інших.

Навчальні засоби:

Завдання підприємницького змісту (проблеми оптимізації) [24].

9. **Загальнокультурна компетентність**

Компетенції:

- висловлювати свою думку, слухати та слухати інших, оцінювати аргументи та змінювати свою думку на основі доказів;

- ставитися до інших з повагою;

- Використовувати інформацію про внесок українських та зарубіжних математиків у розвиток науки.

Ставлення:

Усвідомлення взаємозв'язку математики та культури, розуміння важливості внеску математиків у загальну культуру.

Навчальні засоби:

Історія математичних відкриттів, вирішення історичних та культурних проблем.

10. **Екологічна грамотність та здоровий спосіб життя**

Компетенції:

- аналіз екологічної ситуації в країні;

- розгляд впливу рішень на навколишнє середовище;

- економно використовувати природні ресурси;

- виявляти проблеми, що виникають у навколишньому середовищі, та вирішувати їх за допомогою математики;

- дбайливе ставлення до власного здоров'я.

Ставлення:

Усвідомлення важливості математики у вирішенні екологічних проблем.

Навчальні засоби:

Вирішення проблем з екологічним змістом та проблем, що формують здоровий спосіб життя; Створення графіки та діаграм, що ілюструють функціональну залежність результатів впливу людської діяльності на навколишнє середовище.

11. **Пізнавальна компетентність**

Компетенції:

- Організація та планування їх освітньої діяльності;

- прагнути до поширення знань та їх якості;

- використовувати різні способи вирішення життєвих проблем;

- знайти потрібну інформацію.

Ставлення:

Критичне розуміння інформації та джерел її введення, усвідомлення власних освітніх потреб та цінності нових знань та навичок, бажання покращити результати своєї діяльності.

Навчальні засоби:

Вирішувати цікаві проблеми, проблеми, пов'язані з життям.

12. **Інтелектуальна компетентність**

Компетенції:

- знаходити закономірності;

- прагнути опанувати всі без винятку галузі освіти;

- вирішення проблемних ситуацій у певній предметно-пізнавальній сфері;

- здатність саморозвиватися;

- володіти культурою мислення, здатністю складати, аналізувати, сприймати інформаційні статути та вибирати шляхи їх досягнення.

Ставлення:

Ініціативність, відповідальність, впевненість у собі, позитивна оцінка та підтримка конструктивних ідей з боку інших.

Навчальні засоби:

Використовуйте творчі завдання .

На кожному уроці математики, залежно від теми, мети та очікуваних результатів, поступово і складно розвивається декілька компетентностей.

3.2. Приклади формування компетенцій учнів на різних уроках

Конспект №1

Тема: Побудова графіків тригонометричних функцій

Мета уроку:

Формування компетентностей:

- *предметна компетентність:*

  - розвиток вмінь і відпрацювання навичок будувати графіки тригонометричних функцій числового аргументу, використовуючи перетворення графіків функцій; розвиток вмінь вказувати властивості даних функцій;
  - розвиток абстрактного мислення учнів, здатність аналізувати та досліджувати;
  - виховувати культуру математичного запису і мовлення.

Можливий розвиток та можливий розвиток побудови тригонометричних графічних функцій з числових фігур за допомогою графічних функцій; розвиток здатності відображати характеристики цих функцій розвиток абстрактних дослідників, можливість аналізувати та досліджувати

- **ключові компетентності:**
  - спілкування державною мовою — ставити запитання і розпізнавати проблему, вміння правильно робити висновки;
  - математична компетентність — будувати і досліджувати тригонометричні функції;
  - уміння вчитися впродовж життя - уважно слухати вчителя, запам'ятовувати та відтворювати інформацію, вміння знаходити невідомі елементи.
  - загальнокультурна - дотримуються норми культури математичного письма, мовлення.
  - соціальна - розвивати вміння працювати в колективі, виховувати повагу до вчителя та однокласників
  - Інформація - здатність використовувати різні дані, аналізувати, систематизувати, розширювати свій кругозір
  - Спілкування - реалізація потенціалу дітей та результатів їх діяльності.
  - Емоційно-ціннісна - з'ясувати роль тригонометричних функцій у житті людини..

Тип уроку: урок формування та вдосконалення вмінь і навичок

Обладнання: мультимедійний проектор, персональний комп'ютер, застосунок Gran1.

Хід уроку:

І. Організаційний момент

Привітання

Перевірка готовності до уроку.

ІІ. Перевірка домашнього завдання

Учитель перевіряє, чи є домашня робота у зошиті учнів, відповідає на їх запитання, які з'явилися під час виконання домашньої роботи.

ІІІ. Повідомлення теми та мети уроку

На даному уроці ми з вами побудуємо тригонометричні функції за допомогою застосунка Gran1.

Отже, тема уроку **«Побудова графіків тригонометричних функцій»**

IV. Мотивація навчально-пізнавальної діяльності

Багато взаємозв'язків у фізиці, астрономії та математиці пояснювались за допомогою тригонометричних функцій. Наприклад, спостерігаючи рух сонця в небесній системі та виявляючи залежність моменту заходу сонця від встановлення календарної дати, отримають певний результат, який подібний до функції синуса. Зміна будь-якого розміру відповідно до закону синуса називається гармонічним коливанням. Прикладами таких коливань є: коливання маятника, коливання напруги в електричних мережах.

V. Перегляд комп'ютерної презентації про історію тригонометрії.

1. Д. Валліс першим побудував графік функції синус для двох обертів, зауваживши, що обертів може бути більше.

Джон Валліс

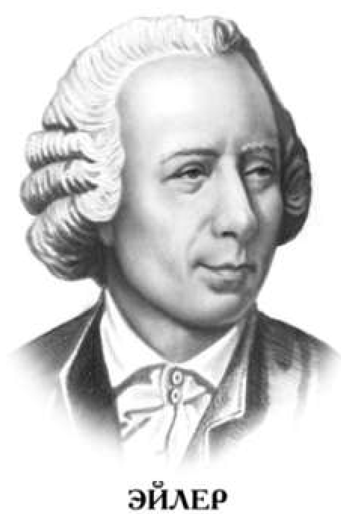
2. Перші графіки функцій косинус і тангенс для кутів першої чверті будував англійський математик І. Барроу (1630-1677), учитель І. Ньютона.

Ісаак Барроу

3. Про періодичність синуса і косинуса знав Ф. Вієт.

Франсуа Вієт

4. Для розвитку тригонометрії багато зробив Л. Ейлер (1707-1783). До нього під синусом, косинусом розуміли не абстрактні числа, а довжини відрізків і пов'язували їх тільки з трикутниками та колом.



ЭЙЛЕР
Леонард
1707-1783

5. Ейле перший ввів позначення $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ розуміючи під ними відношення довжин відповідних відрізків, розглядав їх при довільних значеннях кута α. Він перший вивів усі формули зведення.

VI. Фронтальне опитування учнів

Питання до класу:

1) Яка з тригонометричних функцій є не парною?

2) Який найменший додатний період функції $y = \cos x$?

3) Яка область визначення функції $y = sinx$?

4) Як зобразити графік функції $y = -f(x)$?

5) Як побудувати графік функції $y = |f(x)|$?

6) Як зобразити графік функції $y = k \cdot f(x) + b, b > 0$?

7) Як побудувати графік функції $y = k \cdot f(x) + b, b < 0$?

VII. Розвиток вмінь і навичок

Інтерактивна вправа «Робота в парах»

Учні розбиваються на пари. Кожна з пар отримує завдання побудувати графік функції в програмному середовищі

Формування вмінь і навичок побудови тригонометричних функцій за допомогою найпростіших перетворень проводиться на прикладі $y = sinx$.

1) На координатній площині побудувати графіки функцій $y = sinx$, $y = sin3x, y = sin\frac{1}{2}x$. Розгляньте результати в парі. Висновок: як побудувати графік функції $y = sinAx$

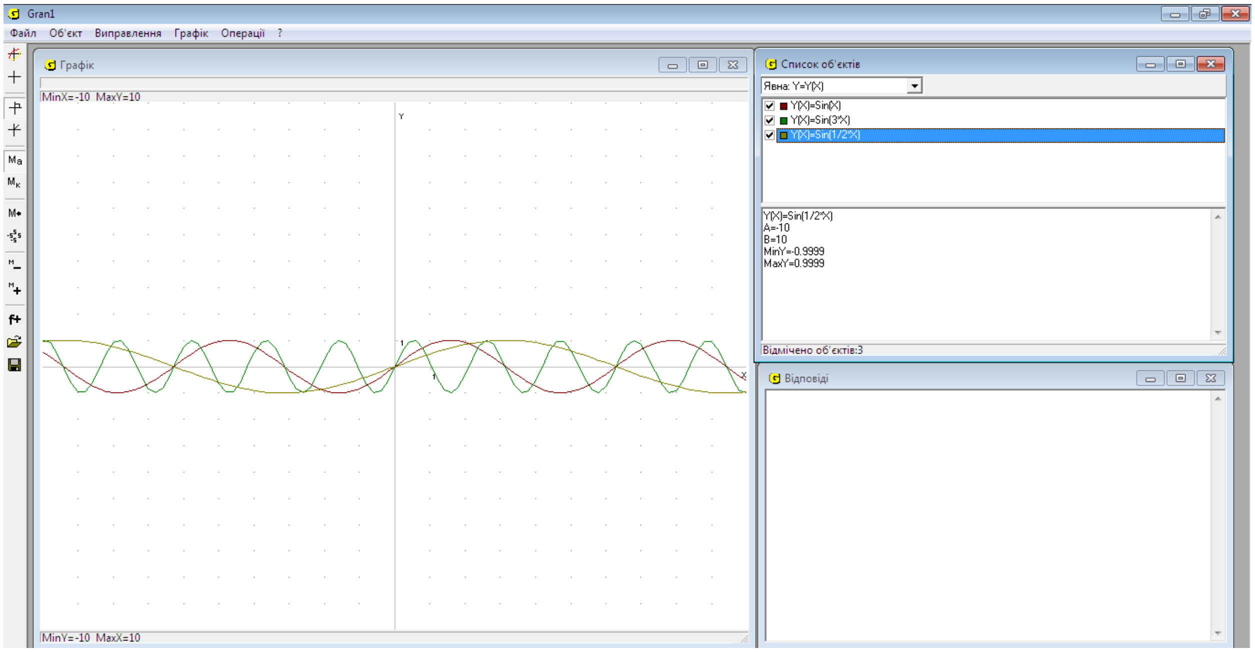


Рис. 3.1

2) На координатній площині побудувати графіки функцій $y = sinx$, $y = 4 \cdot sinx, y = \frac{1}{2} \cdot sinx$. Розгляньте результати в парі. Висновок: як побудувати графік функції $y = A \cdot sinx$

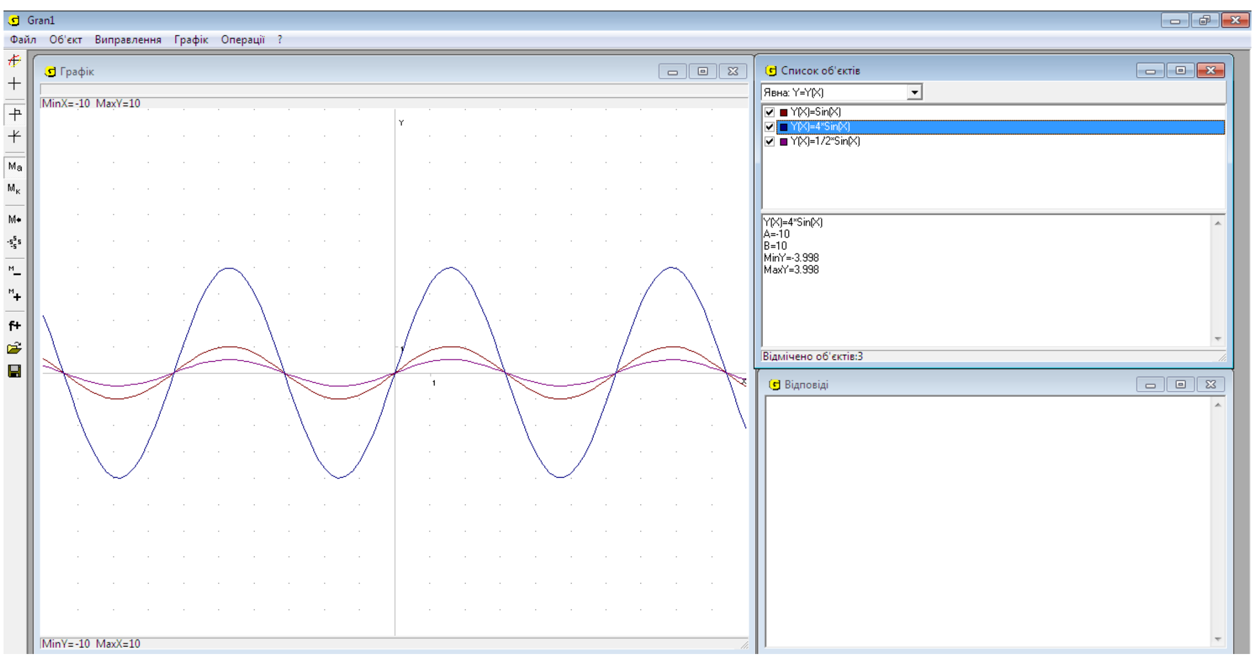


Рис. 3.2

3) На координатній площині побудувати графіки функцій $y = sinx$ $y = sin(x + \frac{\pi}{3}), y = sin(x - \frac{\pi}{2})$, Розгляньте результати в парі. Висновок: як побудувати графік функції *y=sin(x±A)*.

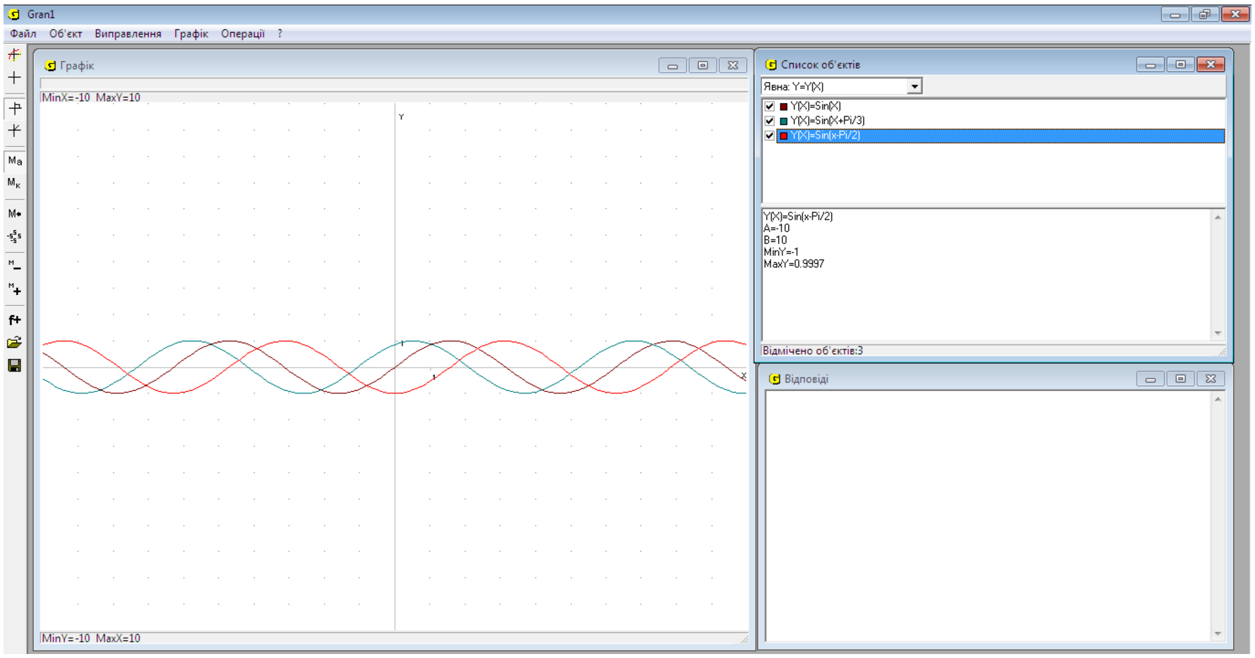


Рис. 3.3

4) На координатній площині побудувати графіки функцій $y = sinx$, $y = sinx + 5, y = sinx - 5$. Розгляньте результати в парі. Висновок: як побудувати графік функції *y=sinx±A*.

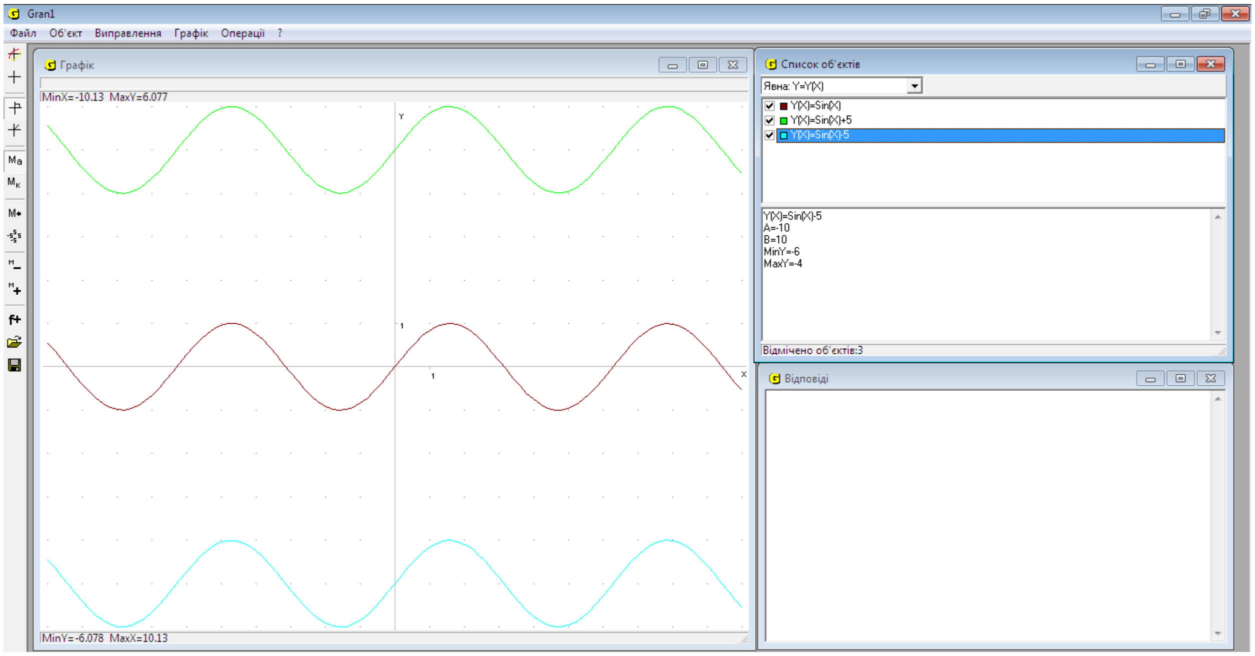


Рис. 3.4

5) На координатній площині побудувати графіки функцій $y=sinx$, $y=|sinx|$. Розгляньте результати в парі. Висновок: як побудувати графік функції $y=|sinx|$.

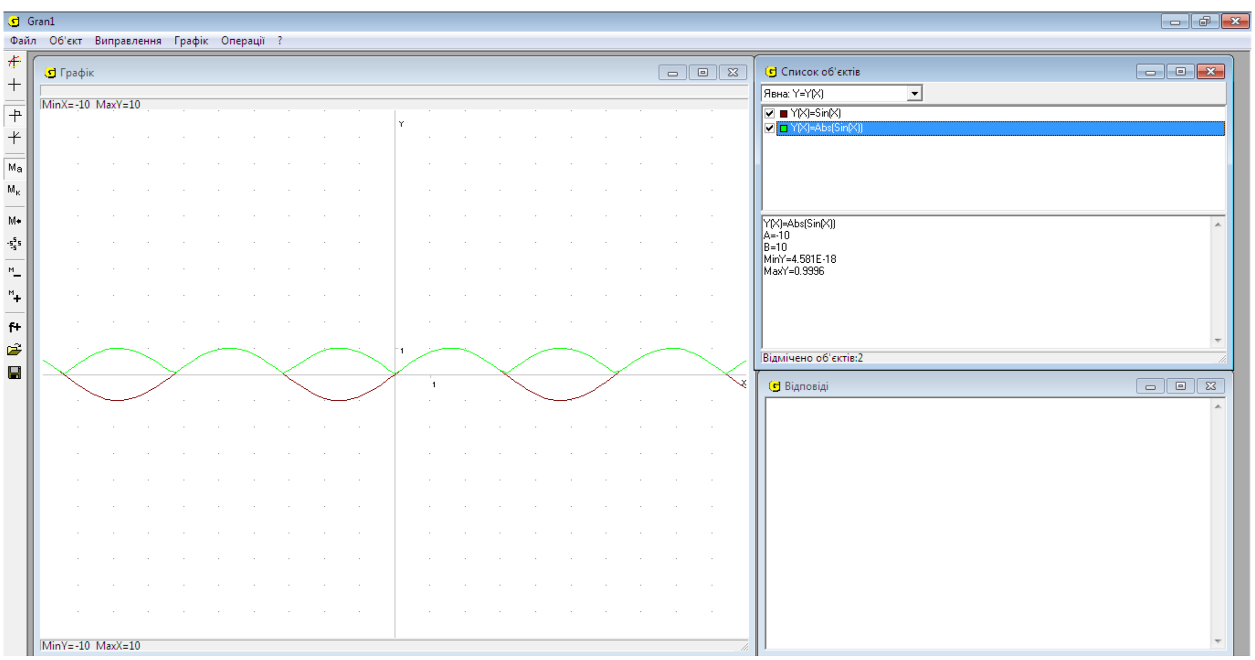


Рис. 3.5

Після виконання завдання учні роблять висновки.

Вчитель розповідає, що всі правила, які застосували сьогодні на уроці використовуються і для побудови графіків $y = cosx, y = tgx, y = ctgx$.

VIII. Самостійне виконання вправ

Завдання.

Зобразіть графік функції та вкажіть її властивості.

1) $y = 2\sin x - 3$

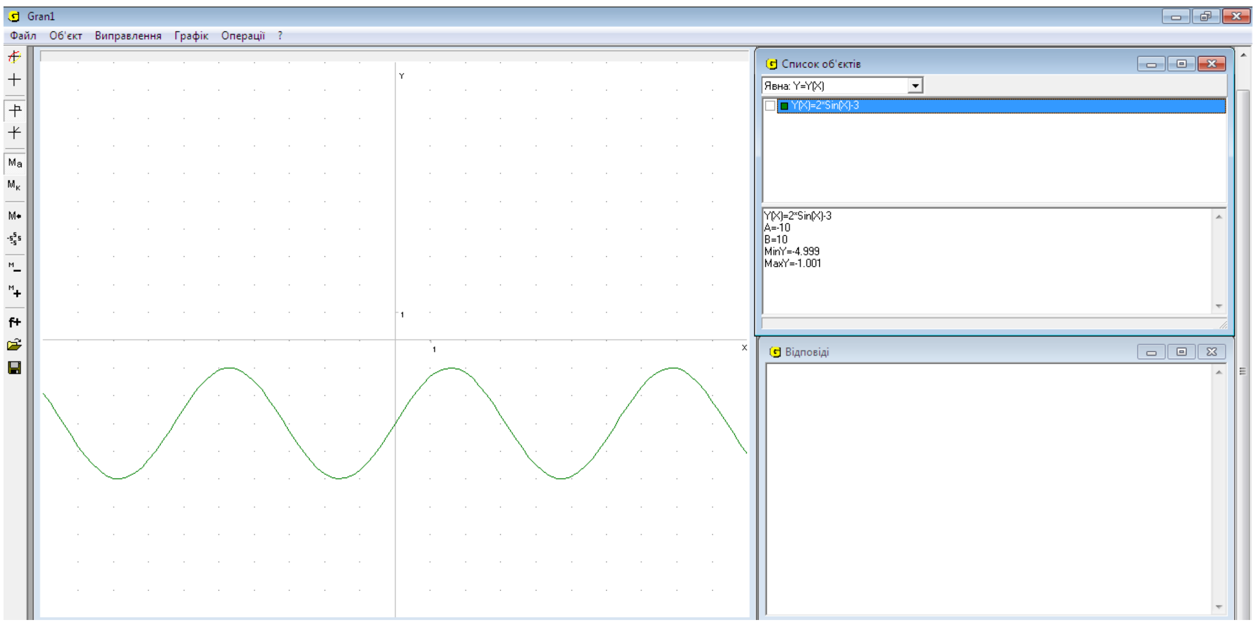


Рис. 3.6

2) $y = |\frac{1}{3}\sin(x - \frac{\pi}{2})|$

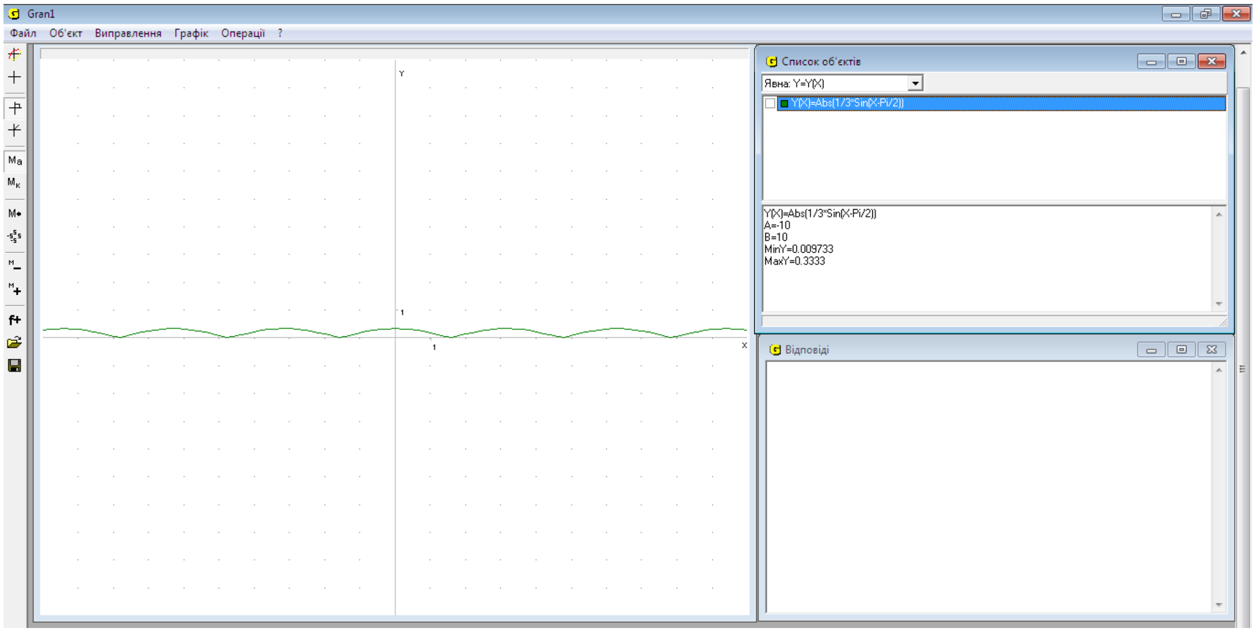


Рис. 3.7

Перевірити правильність побудови графіка за допомогою програми Gran1.

IX. Підведення підсумків уроку

1) Як зобразити графік функції $y = -\sin x$?

2) Як побудувати графік функції $y = |\cos x|$?

3) Як зобразити графік функції $y = \sin x + b$?

4) Як побудувати графік функції $y = k \cdot \sin x + b$?

X. Рефлексія

У застосунку Gran1 побудувати графік $y = 2 + sin2x$ таким кольором, який відображає ваші успіхи під час уроку:

зелений – відмінно,

синій – добре,

червоний – задовільно.

XI. Домашнє завдання

Побудувати графіки функцій: $y = 4cosx, y = cos\frac{1}{2}x, y = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$

$y = cos3x - 2.$

Конспект №2

Тема*:* Різні способи розв'язування лінійного тригонометричного рівняння $\sin x - \cos x = 1$.

Мета уроку:

Формування компетентностей:

- *предметна компетентність:*
  - перевірити та інтегрувати вміння та навички для розв'язування лінійних тригонометричних рівнянь різними способами;
  - розвивати вміння аналізувати різні способи вирішення проблеми та обирати раціональний метод;
  - виховувати культуру математичного запису і мовлення.
- **ключові компетентності:**
  - Спілкування державною мовою – вміло правильно поставити питання та визнайте проблему, робити правильні висновки;
  - Математична компетентність - робота з числовою інформацією;
  - уміння вчитися впродовж життя - аналізувати та впорядковувати результати своєї навчальної діяльності;
  - Соціальна – правильно висловити свою думку та вміти дослухатися до інших;
  - полікультурну - здатність застосовувати на практиці набуті знання, формування вміння робити висновки.

- самоосвітню - бажання вчитися, розвивати пам’ять, зосереджуватись, розвивати творчість, організовувати свою роботу для досягнення успішних результатів;
- Комунікативну - досягнення традиційної комунікативної політики в процесі роботи;
- Інформація - здатність використовувати різні дані, аналізувати, систематизувати, розширювати свій кругозір.

Тип уроку: урок формування навичок і вмінь

Обладнання: проектор, комп’ютери, картки, застосунок Gran1, конспект.

Хід уроку:

I. Організаційний момент.

1.Привітання

2.Відсутні та чергові

3.Огляд учнями домашнього завдання

Перевірка присутніх :Чергові, хто сьогодні відсутній на уроці? Чому?

Перевірка готовності класу до уроку

II. Актуалізація опорних знань

1. Перевірка домашнього завдання.
2. Фронтальне опитування.

1. Назвіть властивості тригонометричних функцій.
2. Які функції є періодичними?
3. Скільки розв’язків може мати тригонометричне рівняння?
4. Назвіть види тригонометричних рівнянь.

III. Оголошення теми, завдань уроку

На даному уроці ми з вами розв’язуватимемо лінійне тригонометричне рівняння різними способами.

Отже, тема уроку **«Різні способи розв'язування лінійного тригонометричного рівняння** $\sin x - \cos x = 1$**»**

IV. Засвоєння нового матеріалу.

1. Розв'язати тригонометричне рівняння – це означає знайти множину всіх значень змінної, *при яких рівняння перетворюється в правильну рівність.*
2. Встановити відповідність між рівняннями і розв'язком:

а. $\sin x = 1$	1. $x = 2\pi k, k \in Z$
б. $\cos x = 0$	2. $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
в. $\sin x = -1$	3. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
г. $\cos x = 1$	4. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Відповідь: (1 – г; 2 – б; 3 – а; 4 – в)

3. Рівняння $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, де a, b, c одночасно не дорівнюють нулю називають *однорідними тригонометричним рівнянням другого степеня*. Тригонометричне рівняння виду $a\sin x + b\cos x = 0$, де $a\ i\ b$ одночасно не дорівнюють нулю називають *однорідними тригонометричним рівнянням першого степеня*.

4. Тригонометричні рівняння виду $a\sin x + b\cos x = c$, де a, b, c довільні дійсні числа називаються *лінійними рівнянням.*

- Зведення до однієї тригонометричної функції;
- зведення рівняння до однорідного відносно синуса і косинуса;
- перетворення різниці (суми) тригонометричних функцій у добуток;
- введення допоміжного аргументу;
- розкладання на множники;
- заміна $\sin x$ і $\cos x$ та тангенс половинного кута;
- графічний

все це способи розв’язування лінійних тригонометричних рівнянь, коли $a \neq b \neq c$.

V. Закріплення нового матеріалу.

1. *Спосіб зведення до однієї тригонометричної функції.*

Оскільки $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, то

$$\sin x - \cos x = 1,$$
$$\sin x = 1 + \cos x,$$
$$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 + \cos x.$$

Піднесемо обидві частини до квадрата:

$$1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x,$$
$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0,$$
$$\cos x(\cos x + 1) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x + 1 = 0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in z\\ x = \pi + 2\pi n, \quad n \in z\end{array}\right.$$

Оскільки ми використовували піднесення обох частин рівняння до квадрата, то могли з’явитися сторонні корені. Тому необхідно виконати перевірку. Перепишемо останню сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in z\\ x = \pi + 2\pi n, \quad n \in z\\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in z\end{array}\right.$$

Підставимо кожне значення змінної у дане рівняння:

якщо $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z,$ то

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1,$$
$$1 = 1;$$

якщо $x = \pi + 2\pi n, n \in z$, то

$$\sin(\pi + 2\pi n) - \cos(\pi + 2\pi n) = \sin\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1,$$
$$1 = 1;$$

якщо $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in z$, то

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1$$
$$-1 \neq 1.$$

Отже, задане рівняння задовольняють лише

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z;$$
$$x = \pi + 2\pi n, n \in z.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in z, \quad \pi + 2\pi n, n \in z.$

2. Спосіб зведення рівняння до однорідного відносно синуса та косинуса

До лівої частини даного рівняння застосовуємо формулу подвійного аргументу, а праву частину замінимо тригонометричною одиницею:

$$\sin x - \cos x = 1,$$
$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2},$$
$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$
$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2} = 0,\\ \sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} = 0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2} = 0,\\ tg\dfrac{x}{2} = 1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in z\\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + \pi m, m \in z\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi + 2\pi n, n \in z\\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in z.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in z, \quad \pi + 2\pi n, n \in z.$

3. Спосіб перетворення різниці (суми) тригонометричних функцій у добуток.

Рівняння можна записати так:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

Застосовуємо формулу різниці синусів:

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1;$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi m, m \in z \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z \end{array}\right.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in z; \pi + 2\pi n, n \in z.$

4. Спосіб введення допоміжного аргументу.

Домножимо обидві частини даного рівняння на $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi m, m \in z \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}+2\pi n; n\in z, \quad \pi+2\pi m, m\in z.$

5. Спосіб розкладання на множники.

Подане рівняння записуємо так:

$$\sin x-(1+\cos x)=0.$$

Оскільки $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}, \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$ то

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

Розв'язуємо аналогічно, як при застосуванні способу зведення рівняння до однорідного відносно синуса та косинуса.

Відповідь. $\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in z, \pi+2\pi n, n\in z.$

6. Спосіб заміни $\sin x$ і $\cos x$ на тангенс половинного кута.

Нехай $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in z.$ Тоді

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

Отримаємо:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=1,$$

$$2tg\frac{x}{2}-1+tg^2\frac{x}{2}=1+tg^2\frac{x}{2},$$

$$2tg\frac{x}{2}=2,$$

$$tg\frac{x}{2}=1,$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in z$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in z.$$

Нехай $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in z; x=\pi+2\pi k, k\in z.$

Перевіримо, чи буде $x=\pi+2\pi k, k\in z$ буде розв'язком поданого рівняння:

$$\sin(\pi+2\pi k)-\cos(\pi+2\pi k)=\sin\pi-\cos\pi-\cos\pi=0-(-1)=1;$$
$$1=1.$$

Отже, $x=\pi+2\pi k, k\in z$ - є розв'язком поданого тригонометричного рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in z, \pi+2\pi k, k\in z.$

7.Графічний спосіб

Дане рівняння перепишемо так:

$\sin x=\cos x+1.$

Розв'язки знайдемо як абсциси точок перетину графіків функцій

$y=\sin x$ та $y=\cos x+1.$

Для полегшення процесу проектування існують спеціалізовані навчальні програми. Ознайомтеся з навчальну програму, щоб полегшити процес побудови графіків. Переглянемо навчальну програму для підтримки викладання математики GRAN 1.

Після завантаження програми ви бачите три вікна (рис. 3.8)

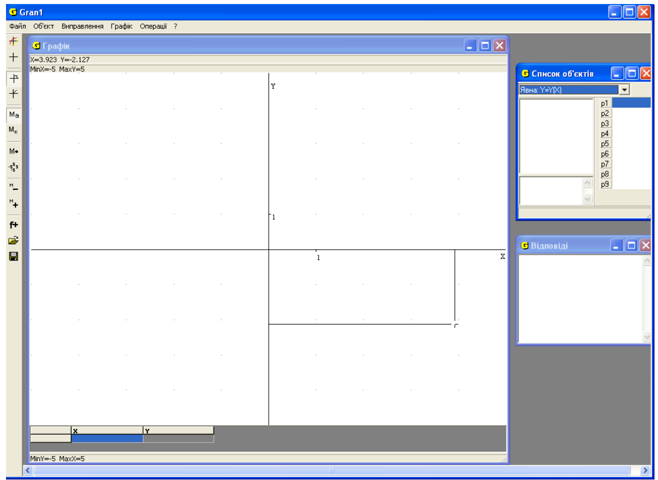


Рис. 3.8

У вкладці <u>*Об’єкт*</u> задаємо значення функції, графіки яких треба побудувати. Обираємо явний тип задання. У вкладці <u>*Об’єкт*</u> натискаємо на послугу <u>*Створити.*</u> Програма відкриває вікно, в якому ми вводимо формулу функції, встановлюємо верхню і нижню частину побудови графіка (рис.3.9) і натискаємо <u>*OK.*</u>

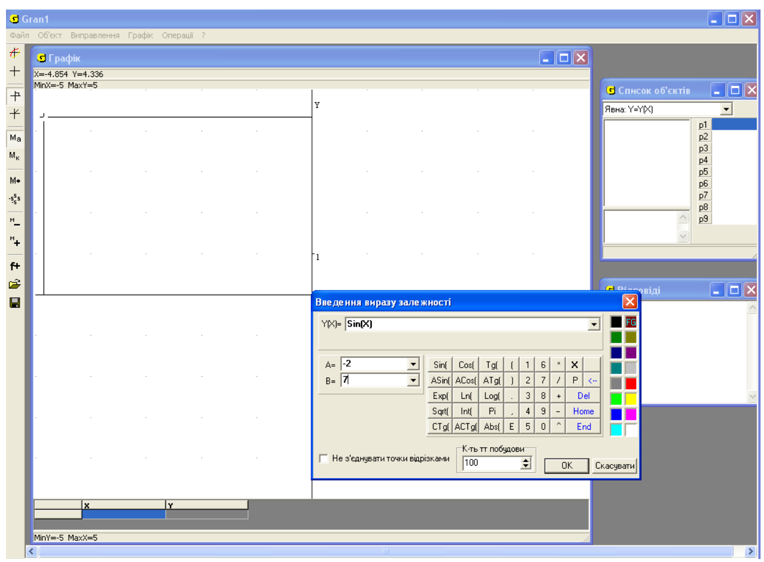


Рис. 3.9

Далі в меню вибираємо послугу *Створити* і вводимо формулу другої функції (рис. 3.10).

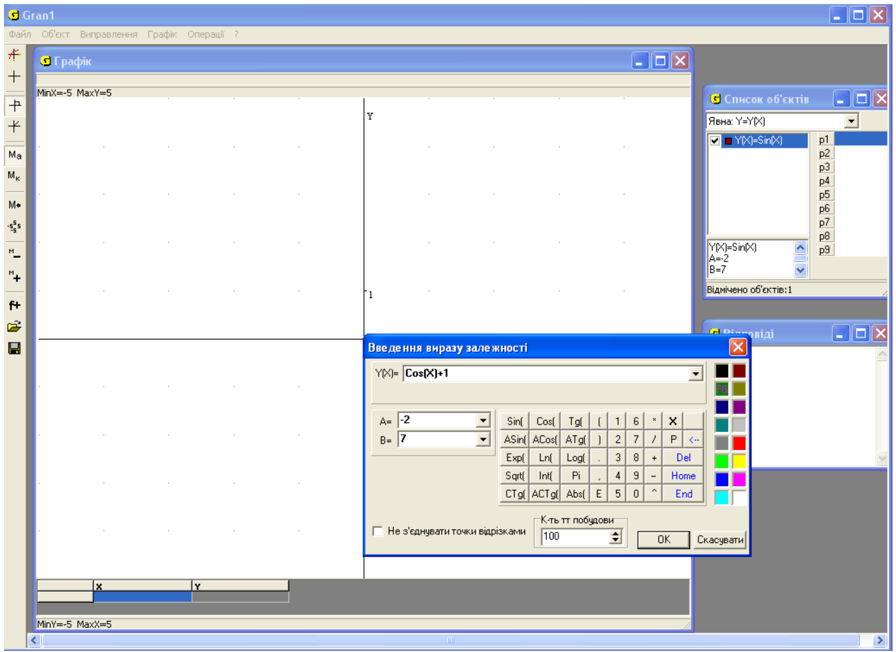


Рис. 3.10

У вкладці *<u>Графік</u>* натискаємо на послугу *<u>Побудувати</u>* . У вікні з’являється потрібний нам графік (рис. 3.11)

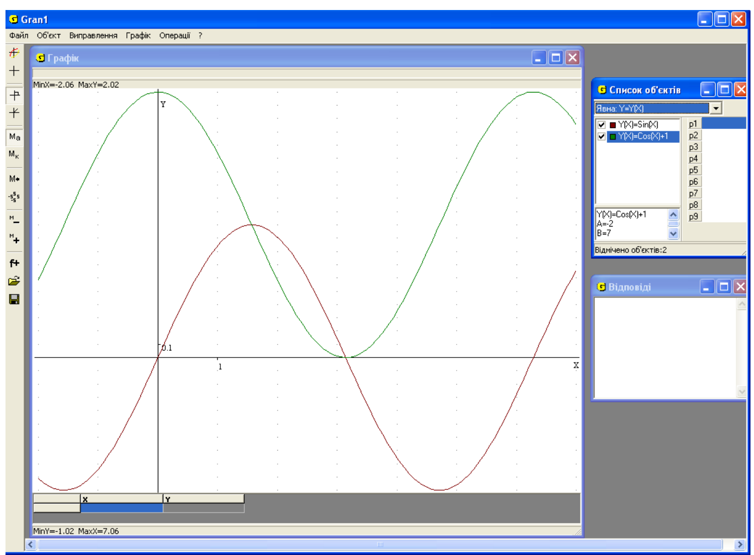


Рис. 3.11

Наводячи вказівник миші над перетином проведених графіків, ми отримуємо наближенні значення її абсцис - кореня рівнянь.

VI. Самостійна робота

Варіант 1

Скільки розв’язків має дане тригонометричне рівняння

$$x^2 = 2\cos x$$

Варіант 2

Скільки розв’язків має дане тригонометричне рівняння

$$x^2 = \sin 2x$$

VII. Підсумок уроку

А зараз час підвести підсумки нашої роботи. Скажіть, який спосіб розв’язування рівняння вам найбільше сподобався?

Назвіть способи розв’язання лінійного тригонометричного рівняння?

Рефлексія.

Закінчіть речення:

• Сьогодні я дізнався...

• Було цікаво...

• Було складно...

• Я виконував завдання...

• Тепер я можу...

• Вдома мені потрібно…

VIII. Домашнє завдання

Розв’язати тригонометричні рівняння різними способами та визначити, який з них є раціональним.

1. $\cos 2x = -\cos 4x$.
2. $\sin 5x = \sin x$.
3. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$.

Висновки

Дослідження, присвячене розробці методів вивчення курсу тригонометрії у старшокласників, спрямоване на пошук шляхів тренування навичок учнів у процесі навчання.

Для цього буде проведено вичерпний аналіз літератури та історії розвитку тригонометрії як галузі математичних знань, що дозволить майбутньому вчителю раціонально підійти до формування математичної компетентності учнів.

Методи розв'язання тригонометричних функцій, рівнянь та нерівностей у класичному курсі тригонометрії, які є основою навчального року та можуть бути представлені учням як узагальнення їх знань.

Аналіз чинних програм та підручників для 10-11 класів з точки зору дослідницької проблеми дав можливість з'ясувати особливості викладання предмета на різних рівнях математичної підготовки та розробити методи формування практичної компетентності учнів. Базовий рівень підготовки. при вирішенні тригонометричних рівнянь. Елементи методології представлені як в основній частині роботи, так і в додатках, розробка уроків різного типу, системи вправ з предмета орієнтовані на формування ключових компетентностей учнів у вирішенні тригонометричних рівнянь, передбачених за програмою.

Розроблено метод формування ключових та тематичних компетенцій для учнів у процесі розв'язування тригонометричних функцій, рівнянь та нерівностей . Розроблена система вправ як для відпрацювання математичних компетентностей предмета з предмета, так і для контролю рівня сформованих компетентностей.

Для вивчення предмета підготовлені методичні рекомендації на основі компетентнісного підходу на профілю рівні.

Поставлена мета досягнута, завдання вирішені. Ми бачимо перспективу подальших досліджень у вивченні широкого використання ІКТ при тренуванні навичок учнів у викладанні курсу тригонометрії.

Список використаних джерел

1. Бардушкін В. Тригонометричні рівняння. Відбір коріння / В.Бардушкін, О. Прокоф’єв. // Математика. – 2005. – №12. – С. 23–27.

2. Бевз Г. П.Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.

4. Гальперіна А.Р. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Збірник завдань для контролю знань / А.Р. Гальперіна, І.О.Золотарьова. – Харків : Вид-во «Ранок», 2010. – 176 с.

5. Істер О.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики – 11 клас / О.С. Істер, О.І. Глобін, І.Є. Панкратова. – Київ : Центр навч.-метод. літератури, 2011. – 112с.

6. Істер О.С.Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2018. —384 с. : іл.

7. Історія тригонометрії. Електронний ресурс. – Режим доступу https://www.turkaramamotoru.com/uk97-209105.html

8. Каплун О. І. Алгебра і початки аналізу + геометрія. 10 клас: навчально-методичний посібник / О.І. Каплун. – Харків : ФОП Співак В. Л., 2010. – 320 с.

9. Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту. Профільний рівень – Електронний ресурс. Режим доступу https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

10. Мерзляк А. Г.Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія,рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський,В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. —256 с. : іл.

11. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, Д.А.Номіровський В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків : Гімназія, 2010. – 415с.

12. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики // А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2009. – 379 с.

13. Мерзляк А.Г. Тригонометрія. Вчимося розв'язувати задачі // А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Київ : Генеза, 2008. – 312 с.

14. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 328 с.

15. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень / С. І. Нелін. – Харків : Гімназія, 2010. – 416 с.

16. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Є.П. Нелін / [2-ге вид., виправ. і доп.]. – Харків : Світ дитинства, 2006. – 448 с.

17. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загаль-ноосвіт. навч. закладів / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова / [2-ге вид., виправл. і доп]. – Харків : Світ дитинства, 2006. – 416 с.

18. Перебийніс С.М. Тригонометрія у таблицях, схемах та розв'язках.10 клас / С.М. Перебийніс. – Тернопіль: Мандрівець, 2014. – 80 с.

19. Пінчук О.П. До проблем формування ключових компетенцій у старшокласників. Роль математики та інформатики у вирішенні цієї проблеми / О.П. Пінчук // Наука і сучасність: зб. наук. пр. / Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – Київ, Логос, 2002. – Том XXXIII. – С.109–116.

20. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [монографія] / С.А. Раков. – Харків : Факт, 2005. – 360с. 49. Резуненко В.О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів / В.О. Резуненко, В.О. Ярмак. – Харків : Вид. група «Основа», 2011. – 94 с.

21. Слєпкань З.І. Збірник завдань для ДПА з математики. Алгебра і початки аналізу. 11 клас. / З.І. Слєпкань. – Харків, «Гімназія», 2002. – 160 с.

22. Тарасенкова Н. А. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів / Н. А. Тарасенкова, В. К. Кірман // Математика в школі. – 2008. – No 6. – С. 3–9.

23. Тарасенкова Н.А. Засоби перевірки математичної компетентності в основній школі / Н.А. Тарасенкова, І.М.Богатирьова, О.М.Коломієць, З.О.Сердюк // Science and education a new dimension. – III (26), Issue: 71. – Budapest: SCASPEE, 2015. – P. 21-25.

24. Товкало М. Нова українська школа: основи Стандарту освіти [Електронний ресурс] / за загальною редакцією М.Товкало // Львів. - 2016.- 64с. – Режим доступу:

www.osvitportal.lviv.ua

25. https://uk.wikipedia.org/wiki.