Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
Бакалаврського рівня
на тему

Формування предметних і ключових компетентностей школярів при вивчені показникових і логарифмічних рівнянянь та нерівностей

Виконала: студентка IV курсу
групи МЕІ-41
Спеціальності 014
Середня освіта (Математика)
Дзюбук Оксана Вікторівна
Керівник: проф. Крайчук О.В
Рецензент:

Рівне – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження . Вивчення математики у 2020/2021 навчаль- ному році має забезпечувати реалізацію «Національної доктрини розвитку освіти» та «Національної стратегії розвитку освіти в Україні на 2012–2021 роки». На даний час для держави є важливим виховання не лише людини інноваційного типу мислення, а і формування свідомої особистості, в тому числі і засобами математики [1].

Одним з головних завдань на уроках математики є формування ключових компетентностей, оскільки доволі часто учні не розуміють як правильно та продуктивно використовувати отриманні знання у повсякденному житті. Тому впровадження компетентнісного підходу в освіту дає великий поштовх для вирішення цих проблем.

Тема «Показникова та логарифмічна функції» одна з головних у навчальній програмі загальноосвітнього закладу освіти, яка займає доволі важливе місце у шкільній програмі, і якій приділяється велика кількість годин у навчальній програмі. У процесі вивчення даної теми учні, узагальнюють знання про степені і корені та їх властивості, систематизують та вивчають поняття показникової і логарифмічної функцій, розвивають навички та вміння виконувати тотожні перетворення виразів, розв'язувати показникові і логарифмічні рівняння та нерівності, їх системи.

Розв'язуванню рівнянь та нерівностей, зокрема, показникових і логарифмічних, приділяється доволі багато уваги на вступних екзаменах до вищих навчальних закладів

Школа виконує дві основні функції — навчально-розвивальну і виховну. Таким чином, вона формує психічно і фізично здорову, освічену, здатну до саморозвитку та удосконалення, високоморальну особистість. Цим і обумовлена актуальність вибраної теми.

Проблема потреби формування в учнів ключових і предметних компетентностей перебуває нині у центрі уваги наукових співробітників

НАПН України. Тому на даний час визначила для себе педагогічну проблему – **«Формування ключових компетентностей учнів старшої школи на уроках математики».**

Мета роботи – систематизувати відомості про показникові та логарифмічні рівняння та нерівності в шкільному курсі алгебри старшої школи і розкрити роль і місце вивчення показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей у загальноосвітній школі; дослідити теоретичні та методичні основи формування ключових компетентностей при розв'язуванні задач.

Об'єктом дослідження є процес навчання учнів розв'язуванню показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Предметом дослідження є компетентнісно-орієнтоване навчання показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Для досягнення мети були поставлені такі **завдання:**

- сформувати поняття про розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей в шкільному курсі алгебри старшої школи.
- з'ясувати місце показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей в програмах різного рівня вивчення математики.
- подати приклади та методику розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей різної складності.
- проаналізувати ключові та предметні компетентності при вивченні показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей.
- підібрати задачі на формування ключових компетентностей при вивченні даної теми.

Для реалізації поставлених завдань були використані такі **методи дослідження**:

- загальнонауковий;
- історіографічний;
- пошуково-бібліографічний;

- метод термінологічного аналізу;

Структура і обсяг. Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (40 найменувань) та додатків. Обсяг даної роботи складає 75 сторінок.

РОЗДІЛ І. ПОНЯТТЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ У ПЕДАГОГІЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

1.1. Сутність поняття «компетентність» та «компетентнісний підхід»

Поняття «компетентність» знаходиться нині в епіцентрі світової думки тому що, воно розкриває якісно нові перспективи розуміння місії школи, життєвих результатів освітньої діяльності.

Професійно-педагогічна діяльність сучасних учителів за умов впровадження компетентнісного підходу характеризується зосередженням на формуванні низки компетентностей здобувачів освіти, тому вважаю за необхідне проаналізувати назване поняття у контексті педагогічної діяльності.

Компетентність (від лат. competens (competentis) – належний, відповідний), за матеріалами словника іншомовних слів, означає поінформованість, обізнаність, авторитетність [2, с. 282].

Компетентність як властивість за значенням компетентний, тобто: 1) такий, що має достатні знання в якій-небудь галузі; який з чим-небудь добре обізнаний; тямущий; який ґрунтується на знанні; кваліфікований; 2) який має певні повноваження; повноправний, повновладний – вживається у тлумачному словнику української мови [3].

Компетентність (від лат. competens – належний, відповідний) становить сукупність необхідних щодо ефективної професійної діяльності, систематичних функціональних знань й умінь А «компетенція», на думку багатьох дослідників, є наперед заданою вимогою до освітньої підготовки учня, що складає «анатомію» компетентності [2, с. 282].

Компетентність – це наявність у людини відповідної компетенції у конкретній галузі діяльності, що включає особисте її ставлення до предмета діяльності чи даної галузі [3].

У Державному стандарті початкової загальної освіти компетентність розуміється як набута у процесі навчання інтегрована здатність особистості, яка складається зі знань, досвіду, цінностей і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці. На відміну від терміну «кваліфікація» компетентність – не проста сума знань, умінь і навичок, вона інтегрує в собі знання, способи діяльності і готовність до діяльності та наявність певних цінностей. Точніше, людина може стати компетентнісною тільки після здобуття нею адекватної інформації, знань і практичного досвіду. Зокрема компетентнісний підхід покладено в основу Наказу Міністерства освіти і науки України «Про затвердження критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів в системі загальної середньої освіти від 05.05.2008р.

У 80-ті роки розуміння слова «компетентність» значно розширюється та розглядається з точки зору сукупності інтелектуальних, фізичних, політичних, соціальних, моральних та естетичних пізнань. Згодом сучасна вітчизняна педагогіка розглядає поняття «компетентність» як термін, що описує кінцевий результат навчання [3] .

В основі змісту поняття компетентності лежить ідея виховання людини й працівника, який не лише має необхідні знання, професіоналізм, але й уміє застосовувати їх відповідних ситуаціях, уміє брати на себе відповідальність..

Розглядаючи та проаналізувавши досвід освітніх систем багатьох європейських країн, можна зробити висновок, що одним зі шляхів оновлення змісту освіти й навчальних технологій, відповідно до сучасних потреб, є орієнтація навчальних програм на компетентнісний підхід та його запровадження.

Компетентнісний підхід — спрямованість освітнього процесу на досягнення результатів у навчанні, якими є загальні (базові, ключові) і спеціальні (предметні) компетентності тих, хто навчається [2].

Загальні компетентності забезпечують навчання протягом усього життя людини, вони також поступово розвиваються в залежності від рівня освіти.

Відомі міжнародні організації, що працюють у сфері освіти, останнім часом вивчають проблеми, що пов'язані з впливом на освіту появи компетентнісного підходу орієнтованої освіти, зокрема це ЮНЕСКО, ЮНІСЕФ, ПРООН, Рада Європи, Міжнародний департамент стандартів [4].

Слід розуміти, що компетентнісний підхід в освіті є поєднанням таких провідних ознак [4]:

- спрямованість на досягнення інтегральних показників підготовки майбутнього фахівця.
- системність набуття основних груп компетентностей – загальних (ключових), професійних і фахових.
- залежність системи компетентностей від рівня і ступеня вищої освіти, її поступове ускладнення, оновлення і збагачення.
- зорієнтованість на соціалізацію і професіоналізацію особистості, постійне поглиблення (вдосконалення) компетентностей в умовах неперервної освіти.

Також варто зазначити, що досить органічно та доречно компетентнісний підхід поєднується, і доповнюється такими методологічними підходами: системний, діяльнісний, розвивальний, суб'єкт-суб'єктним, тощо. Таким чином створюючи початок для нових форм і методів навчання, посилення навчальної мотивації, інтеграції видів освітньої, професійної, культурно творчої діяльності.

Сучасна компетентнісно-орієнтована вища школа відмовляється від застарілої практики передавання та відтворення готових знань, вона спрямовує всіх учасників освітнього процесу на досягнення нових необхідних показників в особистісному та професійному розвитку.

1.2. Реалізація положень компетентнісно-орієнтованої освіти в «Загальних критеріях оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти»

В Україні розробку ідеї компетентнісної освіти на нормативному рівні започаткував документ про введення у 2000 р. нових «Критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти» після введення дванадцятибальної системи оцінювання. Ці Критерії визначають загальні підходи до оцінювання результатів навчання учнів у системі повної загальної середньої освіти та встановлюють відповідність між вимогами до результатів навчання учнів, визначених Державними стандартами, та показниками їх вимірювання [6].

«Компетентність – це загальна здатність, що базується на знаннях, досвіді та цінностях особистості». Так даний термін описано в наказі МОН України №371 від 05. 05. 2008 р. «Про загальні критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти»[6].

Відповідно до цих Критеріїв результати навчання учнів характеризуються за чотирма рівнями: початковий, середній, достатній, високий.

Головні ознаки, що визначають рівень результатів навчання учнів є: рівень сформованості ключових та предметних компетентностей; рівень вміння вирішувати проблеми, висувати і формулювати гіпотези; рівень пізнавальної діяльності; рівень вміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, класифікувати, узагальнювати, робити висновки тощо; рівень вміння самостійно виконувати навчальні завдання. Тобто удосконалення загальної середньої освіти спрямоване на переорієнтацію процесу навчання на розвиток особистості учня, навчання його самостійно оволодівати новими знаннями.

За даними Критеріями здійснюється поточне та підсумкове оцінювання результатів навчання учнів незалежно від форми здобуття освіти. Поточне та підсумкове оцінювання здійснюється у таких формах: усній (зокрема індивідуальне, групове та фронтальне опитування); письмовій (зокрема діагностичні, самостійні та контрольні роботи, тестування); цифровій (зокрема тести в електронному форматі); графічній (зокрема робота з діаграмами, графіками, схемами, контурними картами); практичній (зокрема виконання різних видів експериментальних досліджень та навчальних проектів) [6].

За Державним стандартом виокремлюють такі ключові компетентності [7]:

1. Уміння вчитися- не боятися складних завдань; уміти здійснювати цілеспрямований пошук; самостійно приймати рішення, виявляти власні проблеми, пов’язані з браком досвіду, знань, навичок, упевненості; регулювати власні переживання; формування індивідуального досвіду участі здобувача освіти в навчальному процесі, саморозвиток, самоаналіз, самоконтроль та самооцінювання [7];
2. Спілкування рідною державною мовою, знання іноземних мов.
3. Математична компетентність — ознака високої якості його навчальних умінь, можливості установлювати зв’язки між набутими математичними знаннями та реальною ситуацією, здатність знаходити метод розв’язання, що відповідає проблемі, та успішно використовувати свої уміння, сформовані протягом вивчення математики як навчальної дисципліни [7];
4. Інформаційно-комунікаційна компетентність- здатність учня використовувати засоби ІКТ для виконання особистісних та суспільно-значущих завдань [7];
5. Соціальна — здатність особистості співпрацювати з партнерами у групі та команді, виконувати різні ролі та функції у колективі [7];

6. Здоров'я та безпека — здатність учня застосовувати в умовах конкретної ситуації сукупність здоров'язбережувальних компетенцій, дбайливо ставитися до власного здоров'я та здоров'я інших людей [7];
7. Громадянська – здатність учня активно, відповідально та ефективно реалізовувати права та обов'язки з метою розвитку демократичного суспільства [7];
8. Загальнокультурна— здатність учня аналізувати та оцінювати досягнення національної та світової культури, орієнтуватися в культурному та духовному контексті сучасного суспільства, застосовувати методи самовиховання, орієнтовані на загальнолюдські цінності [7];
9. Підприємницька компетентність полягає в здатності організувати власну та колективну діяльність, оцінити власні професійні можливості, здібності, співвіднести їх з існуючими потребами, розробляти особисті проекти [7];

Отже, компетентність є результатом навчання, а компетентнісна освіта зорієнтована на практичні результати, досвід особистої діяльності, вироблення ставлень, що зумовлює принципові зміни в організації навчання, яке стає спрямованим на розвиток конкретних цінностей і життєво необхідних знань і умінь учнів.

Висновки до першого розділу

У першому розділі за допомогою методу системного аналізу літератури описано зміст понять «компетентність» та «компетентнісний підхід», реалізація положень компетентнісно-орієнтованої освіти в «Загальних критеріях оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти».

Даний розділ розкриває необхідність формування ключових компетентностей в учнів, оскільки вони тісно пов’язані з визначенням загальноосвітніх цілей , розвитком особистості та розвиток відповідального громадянина.

Усвідомлюючи визначення компетентності, можна дійти таких висновків:

Висновок 1. Компетентність - це результат навчання.

Компетентнісна освіта зорієнтована на практичні результати, формування ставлень, досвід власної діяльності, що призводить до принципових змін в організації навчання. Компетентність- динамічна комбінація знань, вмінь і практичних навичок, способів мислення, професійних, світоглядних і громадянських якостей, морально-етичних цінностей, яка визначає здатність особи успішно здійснювати професійну та подальшу навчальну діяльність і є результатом навчання на певному рівні вищої освіти [5].

Висновок 2. Структура компетентності доволі складна.

Оскільки компетентність є результатом персональної навчальної діяльності учнів та формується за допомогою оволодіння мотиваційними, процесуальними та змістовними компонентами, то для її формування потрібно докласти максимум зусиль і бажання навчатися, самовдосконалюватися, саморозвитку.

РОЗДІЛ ІІ. ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

2.1. Ключові освітні компетентності

В останні роки поняття «компетентність» вийшло на загальнодидактичний і методологічний рівень. Це пов'язано з його системно-практичними функціями й інтеграційною роллю в загальній освіті. Варто зазначити, що не існує єдиного узгодженого визначення та переліку ключових компетентностей. Основні ключові компетентності на рівні освітніх галузей доволі часто узагальнюються та конкретизуються для кожного ступеня навчання. [8].

Перелік ключових освітніх компетентностей визначається насамперед на основі головних цілей загальної освіти, здатності до здійснення практичних діяльностей, розуміння, типу мислення, структурного представлення соціального досвіду й досвіду особистості. Також компетентність не зводиться тільки до знань чи тільки вмінь, вона є сферою відносин, що існують між знанням і дією в людській практиці.

З урахуванням даних позицій ключовими освітніми компетентностями є такі [9]:

1. **Ціннісно-смислова компетентність.**

Дана компетентність пов’язана з темою світогляду та ціннісними орієнтирами учня. Вона розкриває здатність бачити та розуміти навколишній світ, орієнтуватись у ньому, усвідомлювати свою роль і призначення, творчу спрямованість, уміти вибирати цільові та значеннєві установки для своїх дій і вчинків, приймати рішення, забезпечує механізм самовизначення учня в ситуаціях навчальної й іншої діяльності.

2. **Громадянська компетентність**

Сконцентрована на здатність учня активно, відповідально та ефективно реалізовувати права та обов’язки з метою розвитку демократичного суспільства.

3. **Інформаційна компетентність.**

   Дана компетентність забезпечує здатність учня використовувати інформаційно-комунікаційні технології та відповідні засоби для виконання особистісних і суспільно значущих завдань. За допомогою інформаційних технологій формуються вміння самостійно шукати, аналізувати , підбирати та редагувати та необхідну інформацію.

4. **Комунікативна компетентність.**

   Включає знання та здатність особистості застосовувати у конкретному виді спілкування знання мови та взаємодіяти з людьми, що її оточують. Вміння презентувати себе, написати лист, анкету, заяву, поставити запитання, вести дискусію й ін. Для освоєння даної компетентності в навчальному процесі фіксується необхідна й достатня кількість реальних об'єктів комунікації.

5. **Загальнокультурна компетентність**

   Дана компетентність забезпечує здатність учня оцінювати та аналізувати досягнення національної та світової культури, духовно-моральні основи життя людини й людства; поважати та берегти суспільні явища та традиції; розуміти роль науки та релігії в житті людини, їх вплив на світ. Тобто до загальнокультурної компетентності відноситься досвід засвоєння учнем наукової картини світу, що розширюється до культурологічного й загальнолюдського розуміння світу.

6. **Компетентність особистісного самовдосконалення**

   Спрямована на засвоєння способів фізичного, духовного й інтелектуального саморозвитку, емоційної саморегуляції та самопідтримки. Головним об’єктом компетентності виступає сам учень, оскільки самовдосконалення-це робота над самим собою.

7. **Екологічна грамотність і здорове життя.**

   Головним завданням даної компетентності є усвідомлення взаємозв’язку кожного окремого предмета та екології на основі різних даних; ощадне та бережливе відношення до природніх ресурсів, чистоти довкілля та дотримання санітарних норм побуту; вибір здорового способу життя; власна думка та позиція до зловживань алкоголю, нікотину тощо.

8. **Ініціативність і підприємливість.**

Передбачає уміння учня: знаходити нові ідеї та ухвалювати правильні рішення; аргументувати свою позицію; використовувати різні способи, шукаючи оптимального розв'язання життєвого завдання.

9. **Математична компетентність**

Розкриває уміння оперувати текстовою та числовою інформацією; усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного й оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін. ПрИ цьому учень вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних із ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач; вміє працювати з формулами тощо.

Під час навчання математики необхідно систематично розвивати та зміцнювати пізнавальний інтерес учнів. Важливим завданням вчителя математики є зробити певний внесок у формування не лише математичної компетентності, а у всі ключові компетентності. Також варто у кожному навчальному предметі визначити необхідну й достатню кількість пов'язаних між собою реальних досліджуваних об'єктів, сформованих при цьому знань, умінь, навичок і способів діяльності, що складають зміст визначених компетентностей.

Процедура конструювання освітніх компетентностей освіти містить у собі чотири етапи [9]:

1) пошук проявів ключових компетентностей у кожному конкретному навчальному предметі;

2) побудову ієрархічної надпредметної систематики - «дерева компетентностей»;

3) проектування загальнопредметних освітніх компетентностей на вертикальному рівні для всіх трьох ступенів навчання;

4) проекцію сформованих за ступенями компетентностей на рівень навчальних предметів та їх відображення в освітніх стандартах, навчальних програмах, підручниках і методиках навчання.

Формування компетентностей засноване на засобах змісту освіти. Таким чином, компетентнісний зміст освіти проходить наскрізною лінією через усі навчальні предмети (освітні галузі). Тобто, ключові компетентності, як уміння вчитися, ініціативність і підприємливість, екологічна грамотність і здоровий спосіб життя, соціальна та громадянська компетентності можуть формуватися відразу засобами усіх предметів.

2.2. Характеристика наскрізних ліній

1. **Наскрізна лінія «Екологічна безпека й сталий розвиток».**

Спрямована на формування в учнів соціальної активності, відповідальності та екологічної свідомості, сприяє розвитку бережливого ставлення до життя і здоров'я людини та навколишнього середовища.

На думку українського вченого, доктора філософських наук В. Оноприєнко, «екологічна компетентність – це системна інтегративна якість особистості, яка визначається сукупністю здатностей вирішувати проблеми і завдання різного рівня складності, що виникають у побуті і професійній діяльності, на основі сформованого ціннісного ставлення до природи, знань, освітнього і життєвого досвіду, індивідуальних здібностей, потреб і мотивів» [10].

Проблематика наскрізної лінії «Екологічна безпека та сталий розвиток» реалізується в курсі математики, насамперед, через завдання з реальними даними про використання природних ресурсів, їх збереження та примноження [11, с. 113].

Для формування в учнів на уроках математики екологічної грамотності та здорового життя варто розглянути такі напрямки :

- задачі на з'ясування роллі математики в розв'язуванні екологічних проблем;
- аналіз прикладів економного і ефективного використання природних ресурсів;
- розкриття математичних закономірностей певних явищ природи;
- виховання екологічного розуміння та екологічної культури, відповідальності за стан навколишнього середовища
- розкриття математичних закономірностей природи через вступні бесіди вчителя відповідно до теми уроку;
- складання графіків і діаграм, які ілюструють функціональні залежності результатів впливу людської діяльності на природу;
- уроки на відкритому повітрі.

Аналіз цих даних сприяє розвитку бережливого ставлення до навколишнього середовища, екології; критично оцінювати перспективи розвитку навколишнього середовища і людини. При розгляді цієї лінії в математиці важливе місце займають відсоткові обчислення, функції, елементи статистики [11].

2. Наскрізна лінія «Громадянська відповідальність»

Ця лінія сприяє формуванню відповідального громадянина своєї держави. Оскільки щоб стати відповідальним активним громадянином, учень повинен розвивати не лише знання й розуміння політичної та правової системи, а й вміти формулювати, комунікувати й відстоювати власну думку, бути впевненими в собі, співпрацювати з різними людьми, поважати себе й інших.

В основному вона проявляється при колективній роботі (дослідницькі роботи, роботи в групі, проекти тощо), яка поєднує математику з іншими навчальними предметами і розвиває в учнів готовність до співпраці. З цією наскрізною лінією пов'язані, наприклад, процентні обчислення, елементи статистики, що дозволяють учням зрозуміти значення кількісних показників при характеристиці суспільства і його розвитку.

3. Наскрізна лінія «Здоров'я і безпека»

Дана наскрізна лінія спрямована на формування емоційно-стійкої особистості, яка веде здоровий спосіб життя, слідкує та бережливо ставиться до свого здоров'я, формує навколо себе безпечне середовище.

В курсі математики реалізується через завдання з реальними даними про безпеку і охорону здоров'я (текстові завдання, пов'язані з середовищем дорожнього руху, рухом пішоходів і транспортних засобів, відсотковими обчисленнями і графіками, що стосуються чинників ризику), перевищенням швидкості.

4. Наскрізна лінія «Підприємливість і фінансова грамотність»

Націлена на розвиток лідерських ініціатив; забезпечить краще розуміння молодим поколінням практичних аспектів фінансових питань (заощадження. інвестування, запозичення та ін.).

Щодо реалізування в математиці, то ця наскрізна лінія пов'язана з розв'язуванням практичних задач щодо планування господарської діяльності, складання сімейного бюджету, формування економного ставлення і реалізується під час вивчення відсоткових обчислень, рівнянь та функцій.

2.3. Реалізація предметної математичної компетентності.

Предметна математична компетентність - особистісне утворення, що характеризує здатність учня (учениці) створювати математичні моделі процесів навколишнього світу, застосовувати досвід математичної діяльності під час розв'язування навчально-пізнавальних і практично зорієнтованих задач [12].

Основним завданням навчання математики є опанування учнями предметних математичних компетенцій:

- обчислювальних;
- інформаційно-графічних;
- логічних;
- геометричних;

- алгебраїчних.

Предметна математична компетентність – здатність учня активізувати, інтегрувати і застосовувати у конкретній ситуації навчальний досвід.

Основними ознаками сформованості предметної математичної компетентності є [12]:

- цілісне сприйняття світу;
- здатність розв’язувати сюжетні задачі, логічно міркувати, виконувати

дії за алгоритмом;

- розпізнання проблем, які розв’язуються із застосуванням

математичних методів;

- уміння користуватися математичною термінологією;
- уміння орієнтуватися на площині та у просторі;
- здатність застосовувати обчислювальні навички у практичних

ситуаціях;

- уміння користуватися математичною знаковою і графічною

інформацією;

2.4. Формування життєвих компетентностей учнів на уроках математики

Для формування життєвих компетентностей на уроках математики необхідно здійснювати зв’язок навчання з життям. Це означає:

- поєднувати вивчення основ наук з різними видами праці, в якій учні самі створюють ті чи інші цінності для колективу, школи та всього суспільства;

- використання життєвого досвіду учнів на уроках, розкриття практичної значимості знань, застосуванні їх у практичній діяльності.

У житті, в практичній діяльності, в процесі застосування знань людина перевіряє їх правильність, розвиває мислення.

З точки зору цілей вивчення математики можна виділити такі основні аспекти:

- оволодіння учнями необхідного комплексу знань, умінь та навичок , що пригодяться у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності.

- формування в учнів уявлень про роль математики у пізнанні дійсності, про ідеї та методи математики; наукового світогляду.

Життєва компетентність виконує дві основні функції

- забезпечує життєздатність;
- забезпечує життєстійкість.

Сучасна освіта працює по новій системі навчання. Якщо раніше завданням педагога було навчити, дати знання, що були накопичені до цього часу людством, то за останні роки вони швидко змінюються, оскільки школа не встигає вивчати інформацію і вона вже є застарілою. Учень в такому разі накопичує знання, а коли виходить за межі школи виявляється, що те, чого його навчили, вже непотрібно, бо є багато нової та більш актуальної на сьогодні інформації.

Життєві (психосоціальні) навички [13]:

- Прийняття рішень;
- Вирішення проблем;
- Критичне мислення;
- Креативне мислення;
- Спілкування;
- Вміння слухати;
- Ведення переговорів;
- Впевненість;
- Опір тиску одноліток;
- Самоповага;
- Співчуття(емпатія);
- Подолання стресу та керування.

Навички забезпечення життя [13]:

- Комп'ютерні навички.

- Знаходження роботи
- Проходження інтерв'ю.
- Приготування їжі.
- Малювання.
- Керування автомобілем
- Навички навчання.
- Читання.
- Вміння зробити презентацію.
- Вміння працювати з цифрами.

Цих компетенцій та навичок можна досягти, лише за допомогою своєї продуктивної діяльності, особистим досвідом та через пізнанням досвіду інших людей. Елементи життєвої компетентності (знання, уміння і навички, життєвий досвід, фізичний потенціал, задатки та здібності, риси характеру, креативність та інтелект, духовність особистості) допомагають у вирішенні конкретних завдань та розв'язання проблем, які ставить перед нею життя.

2.5. Індивідуалізація та диференціація навчання як умова формування базових компетентностей учнів на уроках математики

Формування базових компонентів математичної компетентності лежить в основі індивідуально-диференційованого підходу.

Індивідуалізація - організація процесу навчання на основі врахування індивідуальних особливостей учнів [2].

Диференціація - організація процесу навчання за декількома різними навчальними планами, програмами, завданнями в формі окремих груп, створених на основі врахування будь-яких узагальнених індивідуальних особливостей школярів [2].

Види диференціації:

- Рівнева
- Профільна

В основній школі важливішим видом диференціації є рівнева. Вона передбачає створення умов для розвитку і саморозвитку учнів, продуктивне використання їхніх потенційних можливостей, що вимагає глибокого осмислення і розуміння педагогами необхідності побудови нової парадигми уроку для максимальної реалізації змісту засобами навчальної книги. Оскільки рівнева диференціація передбачає врахування особистісних якостей та характеристик учня що і допомагає: достатньо оволодіти навичками розв'язування типових задач з теми; проявити творчі здібності; здійснювати саморозвиток і самоосвіту; поліпшити оцінку з теми.

Профільна диференціація припускає навчання в різних групах та за різними програмами. В її основі лежить поділ учнів за спеціальними здібностями, інтересами, нахилами, і, як наслідок, за проектованою професією.

Висновки до другого розділу

У другому розділі за допомогою методу системного аналізу літератури описано ключові компетентності, основні характеристики наскрізних ліній, реалізацію предметної математичної, життєвої компетентностей.

Проаналізувавши весь матеріал, що поданий, можна зробити висновки:

Висновок 1. Перелік ключових освітніх компетентностей визначається насамперед на основі головних цілей загальної освіти, здатності до здійснення практичних діяльностей, розуміння, типу мислення, структурного представлення соціального досвіду й досвіду особистості.

Наскрізні лінії є соціально значимими темами, які допомагають формувати в учнів уявлення про суспільство в цілому, розвивати здатність застосовувати отримані знання у різних ситуаціях.

Наскрізні лінії фокусують увагу усього педагогічного колективу на досягнення життєво важливої для учня й суспільства мети.

Висновок 2. Математична компетентність, за С. Раковим, - це вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отриманні результати, оцінювати похибку обчислень [12].

Поняття «математична компетентність» на сучасному етапі розвитку педагогіки визначається і як ключове, і як предметне.

Формування базових компонентів математичної компетентності лежить в основі індивідуально-диференційованого підходу, а для формування життєвих компетентностей на уроках математики необхідно здійснювати зв’язок навчання з життям

РОЗДІЛ ІІІ. ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ПРИ ВИВЧЕНІ ТЕМИ «ПОКАЗНИКОВІ І ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ»

3.1. Коротка історія відкриття логарифмічної та показникової функцій

Перші розробки поняття логарифма можна знайти в Архімеда, але сама ідея розвитку не набула. Перші таблиці логарифмів розробив швейцарський механік, астроном і математик І. Бюргі (1552-1632), які було опубліковано лише в 1620 році за наполяганням Кеплера. Оригінал цих таблиць знаходиться зараз у Пулковській обсерваторії в С.-Петербурзі.

В 1614 році в Англії шотландський математик Джон Непер, вчений який займався різними науками, здебільшого це астрономією і математикою, роздрукував таблиці логарифмів тригонометричних функцій від 0^{o} до 90^{o}. Цікавий факт, що натуральний логарифм в честь Джона Непера називають Неперовим логарифмом.

Щодо десяткових логарифмів, то така ідея виникла в англійського професора Генрі Брігса, який після зустрічі з Джоном Непером вже в 1617 році опублікував такі таблиці для чисел першої тисячі. Після цього менше ніж за 7 років він обчислив 30000 логарифмів з 14 десятковими знаками. У 1628 році голландський математик А.Влакк узагальнив їх, згодом у 1703 році в Росії були надруковані таблиці логарифмів синусів та косинусів.

Для того щоб обчислювати логарифми довгий час використовували логарифмічну лінійку, яку розробив англійський математик, священик Оутред в 17 ст.

Таблиці логарифмів дуже спрощували та полегшували обчислення, оскільки дії 2-го ступеня (множення, ділення) звелися до дій 1-го ступеня (додавання, віднімання) над деякими логарифмами.

Щодо показникової функції, то до початку XVII ст. у математиці зовсім уникали вживання дробових і від'ємних показників степення. Лише згодом наприкінці XVII ст. у зв'язку з проблематичністю математичних задач виникла необхідність розширити область визначення показника степення на всі дійсні числа. Поняття степеня, дало змогу розглянути показникову і степеневу функції на множині дійсних і додатних чисел [18].

Показниковою функцією, займався Леонард Ейлер. У своєїй праці "Вступ до аналізу" він описав те, що показникові кількості можуть бути різноманітними залежно від того, "чи буде змінною кількістю один лише показник степеня, чи, крім того, ще і кількість, яку підносять до степеня" [18].

3.2 Показникові та логарифмічні рівняння та нерівності. Місце теми у програмі. Основна мета вивчення. Вимоги до знань учнів.

З 2010 – 2011 навчальних років учні старших класів, зокрема 10-х класів, розпочали навчатися за новими навчальними програмами та планами.

У старшій школі вивчення математики реалізується за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з яких відповідає своя окрема навчальна програма та план роботи.

Програма рівня стандарту рокриває зміст навчання предмета, спрямований на формування в учнів уявлення про предмет математика. При цьому не передбачається, що в подальшому учні-випускники школи пов’язуватимуть з нею свою професійну діяльність.

Однією з головних змістових ліній курсу «Математика» в старшій школі є функціональна лінія. Тому доцільно розпочинати вивчення курсу з теми «Функції, їхні властивості і графіки» – його фундаменту. На етапі вивчення цієї теми здійснюється повторення та систематизація матеріалу стосовно функцій, які вивчали в основній школі [22].

У наступних темах поняття функцій доволі розширується. Зокрема у темах «Тригонометричні функції» і «Показникова та логарифмічна функції» вміння досліджувати функції, закріплюється і застосовуються до моделювання закономірностей коливального руху, процесів зростання та спадання. Зокрема у курсі математики старшої школи також набувають розвитку й інші змістові лінії: обчислення, вирази і перетворення, рівняння та нерівності.

Не варто приділяти занадто багато часу та уваги громіздким перетворенням тригонометричних, степеневих, логарифмічних і показникових виразів, оскільки вони, як правило, не знаходять практичних застосувань.

На вивчення показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей відводиться 18 години. Цей розділ містить в собі такі теми: степінь із довільним дійсним показником; властивості та графіки показникової функції; логарифми та їх властивості; властивості та графік логарифмічної функції; похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій; показникові та логарифмічні рівняння і нерівності [22].

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів [22]:

- розпізнає і будує графіки показникової і логарифмічної функцій;
- ілюструє властивості показникової і логарифмічної функцій за допомогою графіків;
- застосовує показникову та логарифмічну функції до опису реальних процесів;
- розв’язує найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Програма профільного рівня передбачає оволодіння математичними знаннями, навичками і уміннями, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності

Наповнення даної програми повністю реалізує компетентнісний підхід. Вона спрямована на формування відповідних знань, навичок та досвіду що дає змогу обгрунтовано описувати застосування математики у реальному житті, та визначати готовність учня-випускника до успішної діяльності у соціумі.

На вивчення показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей за програмою профільного рівня відводиться 25 години. Цей розділ містить в собі такі теми: степінь із дійсним показником; показникова функція; логарифми та їх властивості; логарифмічна функція; показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами; похідні показникової і логарифмічної функцій; застосування показникової та логарифмічної функцій у прикладних задачах [23].

Вимоги до знань і вмінь на рівні обов'язкових результатів навчання [23]:

- формулює означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості;
- формулює означення логарифма та властивості логарифмів;
- будує графіки показникових і логарифмічних функцій;
- перетворює вирази, які містять логарифми;
- знаходить похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і застосовує їх до дослідження цих класів функцій;
- розв’язує показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами;
- застосовує показникову та логарифмічну функції до розв’язування прикладних задачах.

Програма поглибленого вивчення математики полягає у міцному оволодінні системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні не тільки у повсякденному житті та у вивченні інших шкільних дисциплін, а і для продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.

Зміст навчального матеріалу порівняно зі змістом загальноосвітнього курсу доповнено, а перелік навчальних досягнень учнів конкретизовано і уточнено у відповідності до вимог, що відповідають поглибленому рівню вивчення математики [24].

До поглибленого курсу включено декілька тем, які в стандартному і профільному курсі не вивчаються взагалі. Ця програми звертає увагу на обґрунтування тих відомостей, які в інших курсах подаються як елементарні поняття та терміни. Навчання в класі з поглибленим вивченням математики передбачає досить багато самостійної пізнавальної та практичної діяльності учнів.

На тему «Показникові та логарифмічні рівняння та нерівності» відводиться 30 години. Цей розділ містить в собі такі теми: степінь із дійсним показником; показникова функція; логарифми та їх властивості: логарифмічна функція; показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами; похідні показникової і логарифмічної функцій [*Нерівність Коші як наслідок нерівності Йєнсена*]; застосування показникової та логарифмічної функцій у прикладних задачах [24].

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів 11 класу:

- формулює означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості;
- формулює означення логарифма та властивості логарифмів;
- будує графіки показникових і логарифмічних функцій;
- перетворює вирази, які містять логарифми;
- знаходить похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і застосовує їх до дослідження цих класів функцій;
- розв'язує показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами.

3.3. Показникові рівняння

Означення: Рівняння, в яких невідоме входить до показника степення називається *показниковими*.

Найпростіше показникове рівняння – це рівняння виду

$$a^x = b, a > 0, a \neq 1.$$

Область значення функції $y = a^x -$ множина додатних чисел, тобто якщо $b > 0$, то розв'язком рівняння $a^x = b$ є $x = \log_a b$; якщо $\mathrm{b} \leq 0$, то рівняння

$a^x = b$ коренів не має.

Для успішного розв'язання показникових рівнянь, доцільно виписати на дошці (при проведенні уроку) та повторити основні формули дій із степенями.

Основні показникові тотожності:

$$a^{x+y} = a^x \times a^y$$

$$a^{x-y} = a^x \div a^y$$

$$a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$$

$$a^x \times b^x = (a \times b)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$a^0 = 1;\ a \neq 1$$

$$a^1 = a; a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a \neq 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; a > 0$$

Показникові рівняння найчастіше розв'язуються шляхом логарифмування обох його частин:

- рівняння виду $a^{f(x)} = b,$ де $a > 0, a \neq 1, b > 0$ розв'язують, логарифмуючи обидві його частини за основою a. Отримують рівносильне рівняння $f(x) = \log_a b$;
- рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)},$ де $a > 0, a \neq 1$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$;

- рівняння виду $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)\log_a b$;

Доречно також звернути увагу учнів на теорему про корінь.

Теорема: Якщо функція f зростає (або спадає) на деякому проміжку, то рівняння $f(x) = a$ не може мати більше ніж один корінь у цьому проміжку.

Розглянемо способи розв'язання різних типів показникових рівнянь:

1. Найпростіші показникові рівняння. Зведення до спільної основи.

Приклад 1: Розв'язати рівняння $3^{x+2} = 9$.

Розв'язання: Для того, щоб розв'язати дане рівняння, необхідно його праву частину записати у вигляді степення за основою 3. Отримаємо: $3^{x+2} = 3^2$. Оскільки основи степення рівні, можемо прирівняти їх показники, маємо:

$x + 2 = 2$. Отже, $x = 0$.

Відповідь: $x = 0$

Приклад 2: Розв'язати рівняння $5^{x-2} = 1$.

Розв'язання: Для того, щоб розв'язати дане рівняння, необхідно його праву частину записати у вигляді степення за основою 5. В даному випадку використаємо показникову тотожність $a^0 = 1$; $a \neq 1$, в результаті маємо: $5^{x-2} = 5^0$. Оскільки основи степення рівні, можемо прирівняти їх показники, маємо: $x - 2 = 0$. Отже, $x = 2$.

Відповідь: $x = 2$

Приклад 3: Розв'язати рівняння $5^{x-2} = -5$.

Розв'язання: Дане рівняння коренів не має, оскільки $-5 < 0$ (якщо $\mathrm{b} \leq 0$, то рівняння $a^x = b$ коренів не має).

Відповідь: рівняння не має коренів.

Приклад 4: Розв'язати рівняння $7^{x-1} = 3$.

Розв'язання: Для того, щоб розв'язати дане рівняння, необхідно його прологарифмувати за основою 7, отримаємо: $x - 1 = \log_7 3$. Звідси знаходимо $x = \log_7 3 + 1$. Отже, $x = \log_7 3 + 1$

Відповідь: $x = \log_7 3 + 1$

Приклад 5: Розв'язати рівняння $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$. Зводимо до спільної основи за допомогою основних показникових тотожностей. Маємо : $2^{7-3x} = (\frac{1}{2})^{x-4}$.Далі розв'язуємо як просте показникове рівняння: $2^{7-3x} = 2^{4-x}$, $7 - 3x = 4 - x$, $2x = 3$, $x = 1{,}5$

Відповідь: $x = 1{,}5$

Приклад 6: Розв'язати рівняння $9^{2sinx+\sqrt{3}} = 1$.

$$9^{2sinx+\sqrt{3}} = 1$$

$$9^{2sinx+\sqrt{3}} = 9^0$$

$$2sinx + \sqrt{3} = 0$$

$$2sinx = -\sqrt{3}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{то } x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

Відповідь: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

2. *Рівняння* $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ *, які не зводяться до однієї основи*

Приклад 1: Розв'язати рівняння $3^{x+2} = 7^{x+2}$(показники однакові, але основи рівні). Поділимо обидві частини рівняння на $7^{x+2} \neq 0$. Одержимо:

$$\frac{3^{x+2}}{7^{x+2}} = 1$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{7}\right)^0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Відповідь: $x = -2$

Приклад 2: Розв'язати рівняння $3^{2x-1} = 5^{2-x}$.

Дане рівняння розв'язується шляхом логарифмування обох сторін. Прологарифмуємо рівняння за основою 10 (логарифмувати можна й за основою 5 або за основою 3):

$$lg3^{2x-1} = lg5^{2-x}$$

$$(2x-1)\lg 3 = (2-x)\lg 5$$

$$2x\lg 3 + x\lg 5 = 2\lg 5 + \lg 3$$

$$x(2\lg 3 + \lg 5) = 2\lg 5 + \lg 3$$

$$x = \frac{2\lg 5 + \lg 3}{2\lg 3 + \lg 5} = \frac{\lg(5^2 * 3)}{\lg(3^2 * 5)} = \frac{\lg 75}{\lg 45} = \lg_{45} 75$$

Відповідь: $x = \lg_{45} 75$

3. Винесення спільного множника за дужки

Приклад 1: Розв'язати рівняння $3 \times 7^{x+1} - 5 \times 7^{x-1} - 7^{x} = 135$.

Винесемо за дужки 7^{x-1}- множник з найменшим показником. Матимемо:

$$7^{x-1}(3 \times 7^2 - 5 - 7) = 135$$

$$7^{x-1} \times 135 = 135$$

$$7^{x-1} = 1$$

$$7^{x-1} = 7^0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Відповідь: $x = 1$

4. Рівняння, які зводять до квадратних

а) Рівняння виду: $\boldsymbol{A \times a^{2x} + B \times a^{x} + C = 0}$

Введемо заміну $a^x = t, t > 0$ і отримаємо квадратне рівняння.

Приклад: Розв'язати рівняння $2^{2x} - 10 \times 2^x + 16 = 0$.

Нехай $2^x = t,$ тоді маємо: $t^2 - 10 * t + 16 = 0$. Розв'язавши квадратне рівняння отримали: $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = 8 \end{array}\right.$.

Повертаємося до заміни : $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^x = 8 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$

Відповідь: $\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$

b) Рівняння виду: $\boldsymbol{A \times a^x + B \times a^{-x} = C}$

Вводимо заміну $a^x = t, t > 0$ рівняння можна звести до квадратного.

Приклад: Розв'язати рівняння $2^x + 3 \times 2^{-x} = 4.$ Нехай $2^x = t$ тоді маємо:

$$t + \frac{3}{t} = 4$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\left[\begin{matrix} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{matrix}\right.$$

Повертаємося до заміни: $\left[\begin{matrix} 2^x = 1 \\ 2^x = 3 \end{matrix}\right.$; $\left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{matrix}\right.$

Відповідь: 0, $\log_2 3$

5. Однорідні показникові рівняння

Рівняння виду : $\boldsymbol{A \times a^{2x} + B \times a^x \times b^x + C \times b^{2x} = 0}$

Для того, щоб розв'язати однорідне показникове рівняння необхідно ліву і праву його частини поділити на a^{2x} (число а з найвищим степенем). Поділимо обидві частини рівняння на $a^{2x} \neq 0$, тоді одержимо рівняння

$$A + B \times \left(\frac{b}{a}\right)^x + C \times \left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = 0$$

Виконаємо заміну $\left(\frac{b}{a}\right)^x = t, t > 0$, і зведемо це рівняння до квадратного.

Приклад: Розв'язати рівняння $16^x + 2 \times 81^x = 3 \times 36^x$. Маємо:

$$16^x + 2 \times 81^x = 3 \times 36^x$$

$$4^{2x} + 2 \times 9^{2x} = 3 \times 6^{2x}$$

Поділимо обидві частини на $9^{2x} \neq 0$:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0$$

Введемо заміну, нехай $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t, t > 0$, отримаємо: $t^2 - 3t + 2 = 0$; $\left[\begin{matrix} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{2}{3} \end{matrix}\right.$.

Повертаємося до нашої заміни :

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{9}\right)^x=1\\ \left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{4}{9}\right)^0\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ 2x=1\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

6. Рівняння виду : $\boldsymbol{A^x+B^x=C}$, де $\boldsymbol{A\times B=1}$

Рівняння даного вигляду розв'язується за допомогою введення заміни :

$A^x=t, t>0$ (або B^x), тоді $B^x=\frac{1}{t}$ рівняння можна звести до квадратного.

Приклад 1: $\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)^x=2$. Нехай введемо заміну

$\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^x=t, t>0$. Звідси: $\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^x=\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Отримаємо: $t+\frac{1}{t}=2$; $t^2-2t+1=0$; $t=1$. Повернемося до заміни:

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^x=1$$

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^x=\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^0$$

Отже, $x=0$.

Відповідь: $x=0$

7. Рівняння які містять змінну в показнику степення і в основі $\boldsymbol{(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{h(x)}}$.

' Розв'язання рівнянь такого виду, зводиться до випадків:

- $f(x)=1$. Корені цього рівняння є коренями рівняння $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{h(x)}$, якщо $g(x)$ і $h(x)$ існують при цих коренях.
- $f(x)=-1$. Корені цього рівняння є коренями рівняння $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{h(x)}$, якщо значення $g(x)$ і $h(x)$- цілі числа однакової парності або дробові нескоротні з непарними знаменниками і однакової парності чисельниками.

- $f(x) = 0$. Корені цього рівняння є коренями рівняння $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$, якщо значення $g(x)$ і $h(x)$ –додатні
- $g(x) = h(x)$. Корені цього рівняння є коренями рівняння $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$, якщо $f(x) < 0, f(x) \neq -1$.

Приклад: $(x+1)^{x^2+x+1} =: (x+1)^2$

Розглянемо всі випадки:

- $x + 1 = 1, x = 0$. Отримаємо: $1^1 = 1^2, x = 0 -$ корінь рівняння
- $x + 1 = -1, x = -2$. Отримаємо: $(-1)^3 = 1^2, x = -2 -$ корінь рівняння
- $x + 1 = 0, x = -1$. Отримаємо: $(0)^0 = 0^2, x = -1 -$ не є коренем рівняння, оскільки вираз немає змісту.
- $x^2 + x + 1 = 2$. Отримаємо: $x^2 + x - 1 = 0$, $\begin{matrix} x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{matrix}$ - корені рівняння.

Відповідь: 0,-2, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

7. Системи показникових рівнянь

При розв'язуванні систем показникових рівнянь використовуються звичні прийоми розв'язування показникових рівнянь і відомі прийоми розв'язування систем рівнянь.

Наприклад, розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x - 7^y = 2 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$. Зробимо заміну

$3^x = a, 7^y = b$ тоді матимемо систему: $\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 16 \end{cases}$

Розв'яжемо її: $\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} 2a = 18 \\ -2b = -14 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 9 \\ b = 7 \end{cases}$.

Отже:

$$\begin{cases} 3^x = 9 \\ 7^y = 7 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}$.

3.4. Показникові нерівності

Означення: Нерівність, яка містить змінну в показнику степеня, називають *показниковою.*

Розв'язування показникових нерівностей, базується на властивостях показникової функції:

a) функція $y = a^x$ зростає, якщо $a > 1$;
b) функція $y = a^x$ спадає, якщо $0 < a < 1$;
c) функція $y = a^x$ набуває лише додатні значення.

Показникові нерівності класифікують за методами їх розв'язування:

1. Найпростіші і ті, які зводяться до них:
- зведення до однієї основи
- винесення спільного множника за дужки
- ділення обох частин на степінь.
2. Нерівності, які зводяться до алгебраїчних:
- зведення до квадратної нерівності шляхом заміни;
- однорідні.
3. Нестандартні показникові нерівності.

Існує також узагальнений метод інтервалів до розв'язування показникових нерівностей.

Алгоритм для розв'язання показникових нерівностей методом інтервалів [31]:

1. Знаходимо область визначення нерівності.

2. Знаходимо нулі функції.

3. Позначаємо нулі функції на області визначення і знаходимо знак у кожному інтервалі, на які розбивається область визначення.

Приклад: Розв'язати нерівність: $25 \times 2^x - 10^x + 5^x > 25$

Розв'язання: Перенесемо всі члени даної нерівності в ліву частину, отримаємо: $25 \times 2^x - 10^x + 5^x - 25 \ > 0$

Розв'яжемо цю нерівність методом інтервалів.

1. Область визначення: $x \in R$.

2. Нулі функції: $25 \times 2^x - 10^x + 5^x - 25 = 0$

$$25 \times 2^x - 25 - 10^x + 5^x = 0$$

$$25(2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) = 0$$

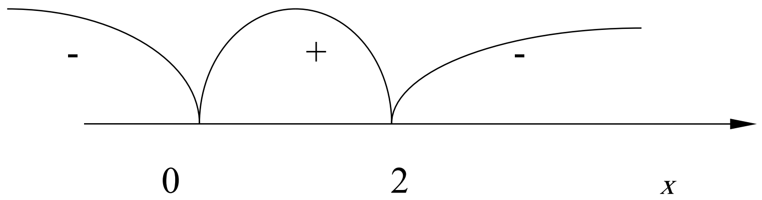
$$(2^x - 1)(25 - 5^x) = 0$$

$$2^x - 1 = 0 \text{ або } 25 - 5^x = 0$$

$$2^x = 1 \text{ або } 5^x = 25$$

$$x = 0 \text{ або } x = 2.$$

3. Позначимо нулі функції на області визначення і знайдемо знаки лівої частини нерівності в кожному інтервалі.



Відповідь: $x \in (0;2)$.

Розглянемо різні види та методи розв'язування показникових нерівностей.

I. Показникові нерівності виду $\boldsymbol{a^{nx}} <> \boldsymbol{b^{nx}} (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b})$

Рівняння даного вигляду розв'язуються за допомогою зведення до ділення обох частин на b^{nx} або a^{nx}($a^{nx} \neq 0,\ b^{nx} \neq 0$). Розглянемо на прикладі.

Приклад: Розв'язати нерівність $3^{3x-2} < 5^{3x-2}$.

Поділимо обидві частини на $5^{3x-2} > 0$. Отримаємо : $\left(\frac{5}{3}\right)^{3x-2} < 1$. Зведемо нерівність до однієї основи: $\left(\frac{5}{3}\right)^{3x-2} < \left(\frac{5}{3}\right)^{0}$. Оскільки $\frac{5}{3} < 1$, то одержимо $3x - 2 > 0$, звідси $x \in \left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.

Відповідь: $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.

II. Нерівності, що мають вигляд $\boldsymbol{a^{f(x)} > a^{g(x)}}$

Наприклад, розв'язати нерівність $0{,}25^x \geq \frac{1}{16}$. Маємо $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \left(\frac{1}{4}\right)^2$.

Оскільки основа $0 < \frac{1}{4} < 1$, то отримаємо: $x \leq 2$; $x \in (-\infty; 2)$.

Відповідь: $x \in (-\propto; 2)$

III. Нерівності виду $\boldsymbol{a^{f(x)} > b}$

Насамперед розглянемо випадки :

1) $b \leq 0,$ тоді $a^{f(x)} > b, x \in D(f)$;
2) $b > 0,$ тоді $a^{f(x)} > b$; $f(x) > \log_a b$, якщо $a > 1$, і $f(x) < \log_a b$, якщо $0 < a < 1$

Наприклад:

а) розв'язати нерівність $\left(\frac{2}{3}\right)^x > -4$. Оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$, якщо $x \in R$, то розв'язком нерівності $\left(\frac{2}{3}\right)^x > -4$ теж $x \in R$.

Відповідь: $x \in R$

б) розв'язати нерівність $3^x > 7$. Отримаємо нерівність $3^x > 3^{\log_3 7}$. Оскільки основа 3 > 1, то маємо: $x > \log_3 7$; $x \in (\log_3 7; +\propto)$

Відповідь: $x \in (\log_3 7; +\infty)$

IV. Нерівності виду $\boldsymbol{a^{f(x)} > b^{g(x)}}$

Для розв'язання таких нерівностей застосовують логарифмування обох частин за основами a або b. Врахувавши властивості функції, матимемо:

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \to f(x) > g(x) \log_a b, \text{якщо } a > 1,$$

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \to f(x) < g(x) \log_a b \text{ якщо } 0 < a < 1$$

Приклад: Розв'язати нерівність $13^{3-x} > 7^{2x-1}$.

Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 7. Отримаємо: $\log_7 13^{3-x} > \log_7 7^{2x-1}$; $(3-x)\log_7 13 > (2x-1)$; $(2+\log_7 13)\,x > 1 + 3\log_7 13$; Оскільки: $(2+\log_7 13) > 0$, звідси $x < \frac{1+3\log_7 13}{2+\log_7 13}$;

$x \in \left(-\propto; \frac{1+3\log_7 13}{2+\log_7 13}\right)$.

Відповідь: $\left(-\infty; \frac{1+3\log_7 13}{2+\log_7 13}\right)$.

V. Розв'язування показникових нерівностей методом заміни змінної

Приклад: розв'язати нерівність $\frac{1}{5^x-5} \leq \frac{2}{5^x+15}$. Введемо заміну $5^x = t$

Тоді одержимо: $\frac{1}{t-5} \leq \frac{2}{t+15}$; $\frac{1}{t-5} - \frac{2}{t+15} \leq 0$; $\frac{t+15-2(t-5)}{(t-5)(t+15)} \leq 0$;

$$\frac{t-25}{(t-5)(t+15)} \geq 0.$$

Отримали, $t \in (-15; 5) \cup (25; +\propto)$. Повертаємося до заміни:

$\left[\begin{array}{c} -15 < 5^x < 5 \\ 5^x \geq 25 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 5^x < 5^1 \\ 5^x \geq 5^2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$, $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

VI. Зведення показникових нерівностей до найпростіших шляхом винесення спільного множника за дужки

Показникові нерівності, що мають вигляд $A_0 * a^{kx+b_0} + A_1 * a^{kx+b_1} + \cdots + A_n * a^{kx+b_n} <> 0$.Зводяться до найпростіших винесенням за дужки спільного множника $a^{\,kx+b_i}$, де i- найменше з чисел $b_0 b_1, \dots, b_n$.

Приклад: $8 \times 4^x + 3 \times 4^{x+1} + 4^{x+2} \times 6 \leq 296$;

$$8 \times 4^x + 15 \times 4^x + 4^x \times 125 \leq 296;$$

$$4^x(8 + 15 + 125) \leq 296;$$

$$4^x \times 148 \leq 296;$$

$$4^x \leq 2;$$

$$2^{2x} \leq 2;$$

$$2x \leq 1;$$

$$x \leq 0{,}5$$

Відповідь:$x \in (-\infty; 0{,}5)$

VII. Зведення показникових нерівностей до квадратних шляхом уведення нової змінної

Показникові нерівності виду $A * a^{2x} + B * a^x + C <> 0$ зводяться до квадратних шляхом уведення заміни $a^x = t, t > 0$.

Приклад: $2^{2x} - 10 \times 2^x + 16 < 0$.

Нехай $2^x = t$, тоді маємо: $t^2 - 10 * t + 16 < 0$. Розв'язавши квадратне рівняння отримали: $\left[\begin{matrix} t_1 < 2 \\ t_2 < 8 \end{matrix}\right.$. $t \in (-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$

Повертаємося до заміни : $\left[\begin{matrix} 2^x < 2 \\ 2^x < 8 \end{matrix}\right.$; $\left[\begin{matrix} x_1 < 1 \\ x_2 < 3 \end{matrix}\right.$

Відповідь: $t \in (-\infty; 1)$

VIII. Розв'язування нерівностей, які містять однорідні функції відносно показникових функцій

Показникові нерівності виду $A_0 * a^{nx} + A_1 * a^{(n-1)x} b^x + A_2 * a^{(n-2)x} b^{2x} + \cdots A_{n-1} * a^x b^{(n-1)x} + A_n * b^{nx} <> 0$ є однорідними відносно функцій a^xі b^x. Поділимо обидві частини нерівності на $b^{nx} \neq 0$ й одержимо таку нерівність: $A_0 * \left(\frac{a}{b}\right)^{nx} + A_1 * \left(\frac{a}{b}\right)^{(n-1)x} + \cdots + A_{n-1} * \left(\frac{a}{b}\right)^x + A_n <> 0$, яку після заміни $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t, t > 0$, можна звести до раціональної нерівності $A_0 * t^n + A_1 * t^{(n-1)} + A_2 * t^{(n-2)} + \cdots A_{n-1} * t + A_n <> 0$.

3.5. Логарифмічні рівняння

Означення: Рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма або в основі логарифма, називають *логарифмічним.*

Під час роботи з логарифмічними рівняннями варто повторити основні логарифмічні тотожності :

Для будь-якого $a > 0, a \neq 1$ і будь-яких додатних x і y виконуються рівності:

1. Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

2. Логарифм в якого основа і вираз, що стоїть під знаком логарифму, рівні, то він дорівнює одиниці :

$$\log_a a = 1$$

3. Логарифм добутку:

а) якщо $x < 0$ і $y < 0$, то $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

б) якщо $x > 0$ і $y > 0$, то $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$.

4. Логарифм частки :

а) якщо $x > 0$ і $y > 0$, то $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

б) якщо $x < 0$ і $y < 0$, то $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$.

5. Формула логарифма степеня:

якщо $x > 0$, то $\log_a x^p = p \log_a x$

6. Формула переходу від одної основи логарифму до другої:

якщо $x > 0$, то $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ для будь-якого дійсного числа $b > 0, b \neq 1$.

7. Основна логарифмічна тотожність:

якщо $x > 0$ то $x = a^{\log_a x}$.

Найпростіші логарифмічні рівняння мають вигляд:

1. $\log_a x = b$, звідси $x = a^b, a > 0, a \neq 1$;
2. $\log_a f(x) = b$, звідси $f(x) = a^b, a > 0, a \neq 1$;
3. $\log_a f(x) = g(x)$, звідси $f(x) = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$;
4. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

   де $a > 0, a \neq 1$;
5. $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}.$$

Розглянемо декілька прикладів найпростіших:

Приклад: Розв'язати логарифмічне рівняння $\log_2 x = 3;\ x = 2^3;$ $x = 8.$

Відповідь: $x = 8$

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_2(x+2) = 3;\ x + 2 = 2^3;$ $x + 2 = 8; x = 6.$

Відповідь: $x = 6.$

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_2(4^x - 2) = x;\ 4^x - 2 = 2^x;$ $2^{2x} - 2 - 2^x = 0.$ Введемо заміну $2^x = t$, отримаємо: $t^2 - t - 2 = 0, \left[\begin{matrix} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{matrix}\right.$.

Повертаємося до заміни:

$$\left[\begin{matrix} 2^x = 2 \\ 2^x = -1 \end{matrix}\right.;\ \left[\begin{matrix} x = 1 \\ x \in \emptyset \end{matrix}\right.$$

Відповідь: $x = 1$

Приклад: Знайти розв'язок рівняння $\log_2(x^2 - x - 2) = \log_2(x+1);$

$$\begin{cases} x + 1 > 0; \\ x^2 - x - 2 = x + 1; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -1; \\ x^2 - 2x - 3 = 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1; \\ \left[\begin{matrix} x = -1; \\ x = 3; \end{matrix}\right. \end{cases} x = 3.$$

Відповідь: $x = 3$

I. Розв'язування логарифмічних рівнянь потенціюванням

Означення: Перехід від рівняння, яке містить логарифми, до рівняння, яке їх не містить, називають *потенціюванням.*

Наприклад, розв'язати рівняння $\lg(x-2) + \lg(2x-1) = 2.$ Необхідно число 2 подати у вигляді десяткового логарифму, і отримаємо:

$$\lg(x-2) + \lg(2x-1) = \lg 100.$$

Суму логарифмів замінимо добутком: $\lg((x-2)(2x-1)) = \lg 100/$

Врахувавши ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$, система рівносильна системі

$$\begin{cases} (x-2)(2x-1)=100 \\ x-2>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x^2-5x-88=0 \\ x>2 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-\frac{11}{2} \end{array}\right. \\ x>9 \end{cases} \quad x=8$$

Відповідь: $x=8$

II. Розв'язання логарифмічних рівнянь з використанням формул

$$\boldsymbol{f^{\log_a g}=g^{\log_a f}, a>0, a\neq 1, f>0, g>0}$$

Розглянемо *приклад*: $7x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$. ОДЗ: $x>0$. Оскільки на цій множині $x^{\log_5 2}=2^{\log_5 x}$, то вихідне рівняння буде рівносильне рівнянню $7\times 2^{\log_5 x}+2^{\log_5 x}=64;\ 8\times 2^{\log_5 x}=64;\ 2^{\log_5 x}=8;\ 2^{\log_5 x}=2^3;$
$\log_5 x=3;\ 5^3=x; x=125.$

Відповідь: $x=125.$

III. Зведення до однієї основи

Найпростіше логарифмічне рівняння $\log_a f(x)=b$, можна розв'язати також способом зведення до однієї основи. Якщо записати праву частину - як логарифм виразу за основою *а.* То отримаємо: $b=\log_a a^b$
оскільки $\log_a a^b=b\log_a a=b$. Тоді рівняння набуде вигляду $\log_a f(x)=\log_a a^b$, звідки $f(x)=a^b$, при умові, що $f(x)>0$.

Приклад: Розв'язати рівняння: $\log_4 x+\log_{\frac{1}{16}} x+\log_8 x^3=5.$

Розв'язання: Зведемо всі логарифми до спільної основи 2:

$\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{1}{4}\log_2 x+\log_2 x=5, \qquad x>0.$

Зведемо подібні доданки, та отримаємо:

$$\frac{5}{4}\log_2 x=5.$$

Поділимо ліву та праву частини рівняння на $\frac{5}{4}$ і розв'яжемо:

$$\log_2 x=4;$$

$$x=2^4;$$

$$x = 16.$$

Відповідь :16.

IV. Розв'язування рівнянь логарифмуванням обох частин рівняння

Логарифмуванням рівняння виду $f(x) = g(x)$ за основою a $(a > 0; a \neq 1)$ називається перехід до рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. При цьому область визначення рівняння звужується, оскільки логарифми існують лише при додатних числах. Розглянемо декілька прикладів:

Приклад: Розв'язати рівняння: $x^{\lg x} = \frac{100}{x}$.

Розв'язування: Насамперед знайдемо ОДЗ: $x > 0$. *Наступним кроком* прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10, та використаємо властивість логарифмів, зокрема логарифм степеня і частки:

$$\lg x \cdot \lg x = \lg 100 - \lg x\,;$$

$$\lg^2 \mathrm{x} = 2 - \lg x;$$

$$\lg^2 \mathrm{x} + \lg x - 2 = 0.$$

Розв'язавши квадратне рівняння відносно $\lg x$, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l}\lg x = -2; \\ \lg x = 1.\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 10^{-2}, \\ x = 10;\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 0{,}01 \\ x = 10.\end{array}\right.$$

Відповідь: 0,01; 10.

V.Розв'язування логарифмічних рівнянь методом заміни змінної

При розв'язувані рівнянь даним методом, варто звернути увагу на такі властивості:

1. $\log^2{}_a(x^2) = (\log_a x^2)^2 = (2\log_a|x|)^2 = 2^2(\log_a|x|)^2 = 4\log^2{}_a|x|$;
2. $\log^2{}_a(x^3) = (\log_a x^3)^2 = (3\log_a x)^2 = 3^2\log^2{}_a(x) = 9\log^2{}_a x$;
3. Для парних m: $\log^n{}_a(x^m) = m^n \log^n{}_a x$;
4. Для не парних m: $\log^n{}_a(x^m) = m^n \log^n{}_a|x|$

Приклад: $\frac{1}{12}\lg^2 \mathrm{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg\mathrm{x}$

Введемо заміну: $\lg|x| = t, x > 0$. Отримаємо:

$$\frac{1}{12}t^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}t$$

Розв’яжемо отримане квадратне рівняння відносно змінної t:

$$t^2 = 4 - 3t;$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -4; \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \lg|x| = -4, \\ \lg|x| = 1 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^{-4}, \\ x = 10; \end{array}\right. \rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = 0{,}0001; \\ x = 10. \end{array}\right.$

Відповідь: $x = 0{,}0001; x = 10$

Приклад: $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$. Перетворимо дане рівняння, за формулами вказаними вище, отримаємо:

$$\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2 \rightarrow 4^2 \lg^2|x| - 14\lg|x| - 2 = 0 \rightarrow$$

$16\lg^2|x| - 14\lg|x| - 2 = 0$, поділимо останнє рівняння на 2, і матимемо:

$$8\lg^2|x| - 7\lg|x| - 1 = 0.$$

Введемо заміну: $\lg|x| = t$. Отримаємо квадратне рівняння:

$$8t^2 - 7t - 1 = 0$$

Розв’язуємо квадратне рівняння відносно t: $\left[\begin{array}{l} t_1 = -\frac{1}{8}; \\ t_2 = 1. \end{array}\right.$

Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \lg|x| = -\frac{1}{8}, \\ \lg|x| = 1 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 10^{-\frac{1}{8}}, \\ |x| = 10; \end{array}\right. \rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}; \\ x = \pm 10. \end{array}\right.$

VI. Застосування монотонності

Розглянемо даний метод на прикладі.

Приклад: Розв'язати рівняння $\log_5(x+3) = 3 - x$

Розв'язання: Встановимо монотонність функції лівої і правої частин рівняння:

$$y = \log_5(x+3) - \text{ зростаюча}$$

$$y = 3 - x - \text{спадаюча}$$

Методом підбору знайдемо корінь: $x = 2$ (перевірка: $\log_5 5 = 3 - 2; 1 = 1$);

$$x = 2 - \text{корінь}$$

Відповідь: $x = 2$

VII. Графічний метод розв'язування логарифмічних рівнянь

Рівняння, які містять змінну не лише під знаком логарифма, роз-в'язуються графічним способом. При чому рівняння записують у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$. Наступним кроком будують графіки даних функцій $y = f_1(x), y = f_2(x)$ і знаходять точки їх перетину, які є розв'язком рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$\log_2 x = x - 2$$

Розв'язання: Розв'язками цього рівняння є абсциси точок перетину графіків функцій $y = \log_2 x$ $і$ $y = x - 2$ (рис. 1.2).

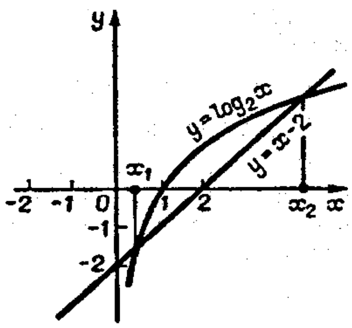


Рис.1.2

Відповідь: Розв'язками є точки x_1, x_2.

3.6. Логарифмічні нерівності

Означення: Нерівності, де хоча б одна з функцій логарифмічна, називаються *логарифмічними нерівностями*.

До найпростіших логарифмічних нерівностей відносять нерівності вигляду:

$\log_a f(x) > b$ (або $\log_a f(x) < b$),

$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ (або $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$)

Розв'язком нерівності, є інтервал (або кілька інтервалів), які містять нескінчену множину чисел.

Отже, для розв'язування нерівності варто знаходити відповідні значення змінної враховуючи усі обмеження. Доцільно запропонувати учням не шукати окремо ОДЗ , а записувати відразу повну систему обмежень, і рівносильну нерівність, оскільки все рівно буде необхідно розв'язувати систему нерівностей, яка включає й ОДЗ.

Основні види та методи розв'язування логарифмічних нерівностей:

1. $\log_a f(x) > b, \quad a > 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > a^b$
2. $\log_a f(x) > b, \quad 0 < a < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$
3. $\log_a f(x) < b, \quad a > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$
4. $\log_a f(x) < b, \quad 0 < a < 1 \quad \Leftrightarrow f(x) > a^b$
5. $\log_{g(x)} f(x) > b \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) > g(x)^b, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) < g(x)^b \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$
6. $\log_{g(x)} f(x) < b \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1 \\ f(x) < g(x)^b \\ f(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < g(x) < 1 \\ f(x) > g(x)^b \end{cases} \end{array} \right.$

7. $\log_a f(x) > \log_a h(x)$, $a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \end{cases}$ (знак нерівності не змінюється і варто враховувати ОДЗ)

8. $\log_a f(x) > \log_a h(x)$, $0 < a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < h(x) \\ h(x) > 0 \end{cases}$ (знак нерівності змінюється і враховується ОДЗ)

9. $\log_a f(x) < \log_a h(x)$, $a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < h(x) \\ h(x) > 0 \end{cases}$

10. $\log_a f(x) < \log_a h(x)$, $0 < a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \end{cases}$

11. $$\log_{g(x)} f(x) < \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) < h(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) < h(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Необхідно звернути увагу учнів на те, що методи, що використовувалися при розв’язуванні логарифмічних рівнянь, дозволяється використовувати при розв’язуванні логарифмічних нерівностей. Оскільки способи розв'язування логарифмічних нерівностей аналогічні способам розв'язування логарифмічних рівнянь.

Найпростішу нерівність виду $\log_a f(x) > b$ (або $\log_a f(x) < b$) розв'язують зведенням лівої частини до логарифма за основою a, тобто $b = \log_a a^b$, і використовуючи властивості логарифмічної функції. Наведемо приклад:

Приклад: Розв’яжіть нерівність: $\log_{x-3}(x-1) < 2$.

Розв’язання: Розв’яжемо сукупність двох систем нерівностей:

$$\log_{x-3}(x-1) < \log_{x-3}(x-2)^2$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-3>1, \\ x-1<(x-3)^2, \\ x-1>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-3<1, \\ x-1>(x-3)^2; \end{cases}\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>4, \\ x^2-7x+10>0, \\ x>1; \end{cases} \\ \begin{cases} 3<x<4, \\ x^2-7x+10<0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>4, \\ (x-2)(x-5)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 3<x<4, \\ (x-2)(x-5)<0. \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>4, \\ \left[\begin{array}{l} x<2, \\ x>5, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 3<x<4, \\ 2<x<5. \end{cases}\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x>5 \\ 3<x<4 \end{array}\right. \rightarrow x \in (3;4) \cup (5;+\infty).$$

Відповідь: $x \in (3;4) \cup (5;+\infty)$.

Обов’язково враховувати область визначення виразів, які входять до складу системи нерівності.

Приклад. Розв'язати нерівність:

$$\lg\sqrt{3x-5} + \frac{1}{2}\lg(2x-4) < 2 - \lg 5$$

Розв'язання: Дана нерівність рівносильна такій:

$$\tfrac{1}{2}\lg(3x-5) + \tfrac{1}{2}\lg(2x-4) < \lg 20,$$

звідки :

$$\lg(3x-4) + \lg(2x-4) < \lg 400$$

Отримана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} (3x-5)(2x-4) < 400, \\ 3x-5>0, \\ 2x-4>0. \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{19}{3} < x < 10, \\ x > \dfrac{5}{3}, \\ x > 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in (2;10)$.

3.7. Показниково – степеневі рівняння та нерівності

Показниково – степенева функція має вигляд $y = u(x)^{v(x)}$. Її область визначення знаходимо, розглядаючи такі три випадки:

1) $u(x) > 0$; $v(x) -$ будь-яке число;

2) $u(x) < 0$; $v(x) -$ ціле число;

3) $u(x) = 0$; $v(x) -$ ціле додатне число.

Означення: Рівняння виду $\left(h(x)\right)^{f(x)} = \left(h(x)\right)^{g(x)}$ називається *степенево-показниковим рівнянням.*

Розглянемо частинні випадки цього рівняння.

1) $f(x) = g(x)$, то функція $h(x)$ існує;

2) $h(x) = 1$, то функції $f(x)$ і $g(x)$ існують;

3) $h(x) = 0$, $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$;

4) $h(x) = -1$, і $f(x)$ і $g(x)$ - цілі числа однакової парності.

Основні методи розв'язування *степенево-показникових рівнянь:*

I. Для випадку $\boldsymbol{f(x) > 0}$.

Насамперед, якщо можна, то використаємо основну логарифмічну тотожність у вигляді:

$$a^{\log_a N} = N \ (a > 0, a \neq 1, N > 0).$$

Приклад: $x^{\log_x(x+1)} = x^2 - 1$

Розв'язування. $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x_1 = -1 \text{ або } x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \ x = 2.$$

Відповідь: $x = 2$.

В іншому випадку, коли неможливо застосувати основну логарифмічну тотожність, логарифмуємо обидві частини за числовою основою або подаємо всі степені як степені з однією і тією ж самою числовою основою за формулою:

$$U(x) = a^{\log_a U(x)}, a > 0, a \neq 1, U(x) > 0.$$

Приклад : $x^{2\lg x+1} = 100x$

Розв'язання: ОДЗ ($x > 0$)

Оскільки обидві частини рівняння додатні, то після логарифмування обох сторін за основою 10 отримаємо рівняння, яке є рівносильне даному:

$$\lg\left(x^{2\lg x+1}\right) = \lg 100x$$

$$(2\lg x + 1)\lg x = \lg 100 + \lg x$$

Введемо заміну: $\lg x = t.$ рівняння набуде вигляду:

$$(2t+1)t = 2 + t; \quad t^2 = 1, t_1 = 1, t_2 = -1.$$

Переходимо до заміни матимемо:

$$\lg x = 1 \text{ або } \lg x = -1,$$

$x = 10, x = 0.1.$

Обидва корені входять до ОДЗ.

Відповідь: 10; 0,1.

II. Для випадку, коли $f(x)$ – довільний вираз

Два степні з однаковими основами можуть бути рівні в одному з чотирьох випадків:

1. $f(x) = -1$ і для коренів цього рівняння $g(x)$ і $\varphi(x)$- цілі числа однакової парності;
2. $f(x) = 0$ і для коренів цього рівняння $g(x) > 0$ і $\varphi(x) > 0$;
3. $f(x) = 1$ і для коренів цього рівняння $g(x)$ і $\varphi(x)$ існують;
4. $g(x) = \varphi(x)$ і для коренів цього рівняння існують $f(x)^{g(x)}\ i\ f(x)^{\varphi(x)}$.

Приклад : $x^{2x+4} = x^{20}$.

Розв'язання: Якщо вважати x числом, то:

1. При $x = -1 \rightarrow (-1)^2 = (-1)^{20}$ правильна рівність;
2. При $x = 0 \rightarrow 0^4 = 0^{20}$ рівність виконується;
3. При $x = 1 \rightarrow 1^6 = 1^{20}$ рівність вірна;
4. При $2x + 4 = 20,$ тобто $x = 8$ $8^{20} = 8^{20}$, правильна рівність.

Відповідь:-1;0;1;8.

ВИСНОВКИ

У даній дипломній роботі було розглянуто логарифмічну та показникову функції, зокрема показникові та логарифмічні рівняння і нерівності. Тема «Показникова і логарифмічна функції» є однією з головних у навчальній програмі загальноосвітнього закладу освіти, їй приділяється велика кількість навчального часу.

Метою даної роботи було систематизувати відомості про показникові та логарифмічні рівняння та нерівності в шкільному курсі алгебри старшої школи і розкрити роль і місце вивчення цієї теми у загальноосвітній школі; дослідити теоретичні та методичні основи формування ключових компетентностей при розв'язуванні задач.

На основі наукових праць було наведено властивості показникової та логарифмічної функцій, і методи розв'язування логарифмічних та показникових рівнянь і нерівностей .

Вивчення математики повинне зробити певний внесок у формування ключових компетентностей, З точки зору цілей вивчення математики можна виділити такі основні аспекти:

- оволодіння учнями необхідного комплексу знань, умінь та навичок , що пригодяться у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності.

- формування в учнів уявлень про роль математики у пізнанні дійсності, про ідеї та методи математики; наукового світогляду.

Отже, компетентність є результатом навчання, а компетентнісна освіта зорієнтована на практичні результати, досвід особистої діяльності, вироблення ставлень, що зумовлює принципові зміни в організації навчання, яке стає спрямованим на розвиток конкретних цінностей і життєво необхідних знань і умінь учнів.

При вивченні теми «Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності» виробляються такі ключові компетентності:

- предметна компетентність;

- ключові компетентності, а саме:

1) спілкування державною мовою;
2) інформаційно-цифрова компетентність;
3) уміння вчитися впродовж всього життя;
4) соціальна та громадська компетентності;
5) ініціативність та підприємливість.

Було досягнуто головних цілей та поставлених завдань**:**

- сформувати поняття про розв’язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей в шкільному курсі алгебри старшої школи.
- з’ясувати місце показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей в програмах різного рівня вивчення математики.
- подати приклади та методику розв’язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей різної складності.
- проаналізувати ключові та предметні компетентності при вивченні показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей.
- підібрати задачі на формування ключових компетентностей при вивченні даної теми.

Математика дає широкі можливості для всебічного розвитку особистості, розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, формування вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, моделювати тощо. І тому учитель постійно повинен пам’ятати, що у нього завдання – навчати, розвинути та виховати учня.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Указ президента України : за станом на 25 червня 2013 р. / Верховна Рада України. – Офіц. вид. – К. : Парлам. вид-во, 2013.
2. Професійна освіта: Словник: Навч. пос. / Уклад. С.У. Гончаренко та ін.; За ред. Н.Г. Никало. – К.: Вища школа, 2000. с. 149. (777)
3. Рудь, М. Компетентнісний підхід в освіті / М. Рудь // Вісник Львів – Серія : Педагогіка – 2006. – Вип. 21, ч. 1. – С. 73–82.
4. Компетентнісний підхід у сучасній освіті. Світовий досвід та українські перспективи / Під ред. О. В. Овчарук. — К.: К. І. С., 2004. — С.112.
5. Фішман, І.С. Ключові компетентності як результат освіти [Електроннийресурс] / І. С. Фішман. - [Режим доступу: http://www.conf.univers.krasu.ru/conf_9/docl_s.html].
6. Про загальні критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти [Електронний ресурс]: наказ МОН України від 5 травня 2008 р., №371 / Міністерство освіти України: сайт.
7. Державний стандарт базової і повної середньої освіти освітньої галузі «Математика» (2011)
8. Фішман, І.С. Ключові компетентності як результат освіти [Електроннийресурс] / І. С. Фішман. - [Режим доступу: http://www.conf.univers.krasu.ru/conf_9/docl_s.html].
9. Трубачова С.Е. Умови реалізації компетентнісного підходу в навчальному процесі // Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи. – К.: „К.І.С.”, 2004. – С.53-56.
10. Онопрієнко В. П. Екологічний контекст андрагогіки / В. П. Онопрієнко // Гілея: науковий вісник. - Київ, 2011. Спецвипуск. С. 489- 497.
11. Коробка А. В. Екологічна грамотність та здорове життя на уроках математики в 11 класі. *Молодий педагог:* зб. матеріалів XIII Міжнародної науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих науковців «Наука, освіта, суспільство очима молодих». Рівне: РДГУ,2020. С.

113-114.
12. Раков С. А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти / С. А. Раков // Математика в школі. — 2005. — № 5. — С. 2—8.
13. Тараненко І. Розвиток життєвої компетентності та соціальної інтеграції: досвід Європейських країн / І. Тараненко; За ред.. Єрмакова І.Г. // Кроки до компетентності та інтеграції в суспільстві. – К. : «Контекст», 2000.
14. Солодченко Л. І. Розвиток життєвих компетентностей на уроках математики: на основі принципу історизму та прикладної спрямованості. – Тернопіль – Харків: Видавництво «Ранок», 2011 – 144 с.
15. Зимова, І. А. Ключові компетенції - нова парадигма результату сучасної освіти [Електронний ресурс] / І. О. Зимня / / Інтернет-журнал «Ейдос». - [Режим доступу: http://www.eidos.ru/journal/]
16. Ткаченко О., Кожевнікова М. Формування компетентностей на уроках математики//Математика в школах України. – Х., 2014. – №6. – С.2-3.
17. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів / З. І. Слєпкань. – Київ, 2006. – 582 с.
18. Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов. — Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1952. — 33 с.
19. Клочко І. Я. Посібник з математики для школярів та абітурієнтів / І. Я. Клочко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. – 224 с.
20. Іванова, Т. В. Компетентнісний підхід до розробки стандартів для 11-річної школи: аналіз, проблеми, висновки [Текст] / Т. В. Іванова / / Стандарти і моніторинг в освіті. -2004. - № 1. - С. 16-20.
21. Ерднієв, П. М. Розвиток навичок самоконтролю при навчанні математиці [Текст] / П. М. Ерднієв. - М.: Учпедгиз, 1957. - 72 с.
22. Математика. 10–11 класи. Навчальна програма рівня стандарту для загальноосвітніх навчальних закладів // Міністерство освіти і науки України: сайт. – Електрон. дані і прогр. – Режим доступу:

https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx

23. Математика. 10–11 класи. Навчальна програма профільного рівня для загальноосвітніх навчальних закладів // Міністерство освіти і науки України: сайт. – Електрон. дані і прогр. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx
24. Математика. 10–11 класи. Навчальна програма поглибленого рівня для загальноосвітніх навчальних закладів // Міністерство освіти і науки України: сайт. – Електрон. дані і прогр. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-poglibl-rivenfinal.docx
25. Єгерев В. К. Збірник задач *з* математики для вступників до ВНЗ / В. К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський. 6-те вид. Київ: Арій, 2011.- 604 с.
26. Геворкян Ю. Л. Збірник задач з математики з розв’язками / Ю. Л. Геворкян. - Харків : Прапор, 1999.- 448 с.
27. Литвиненко В. Н. Практикум по елементарной математике. Алгебра. Тригонометрия./ В. Н. Литвиненко Москва : Просвещение, 1991. - 352 с.
28. Шарова Л. И. Уравнения и неравенства. Пособие для подготовительных отделений/ Л. И Шарова. - Київ: Вища школа, 1981.- 280 с.
29. Крамор В. С. Повторюємо і систематизуємо шкільний курс алгебри і початків аналізу. Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2012. - 412 с.
30. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук – К: Зодіак-ЕКО, 2001. – 346с.
31. Колмогоров А.М. Алгебра і початки аналізу: навч. посібник. / А.М. Колмогоров – М.: Просвещение, 1986. – 278с.
32. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник. / Г.П. Бевз – К.: Вища школа, 1989. – 265с.

33. Геворкян Ю. Л. Збірник задач з математики з розв'язками / Ю. Л. Геворкян. - Харків : Прапор, 1999.- 448 с.
34. Особливості поглибленого вивчення математики в 11 класі / Навчально-методичний посібник / К.: Освіта, 1992 р.
35. Вишневський В. Збірник задач з математики: навчальний посібник / В. Вишневський - Київ : Либідь, 1990. - 328 с.
36. Шарова Л. И. Уравнения и неравенства. Пособие для подготовительных отделений/ Л. И Шарова. - Київ: Вища школа, 1981.- 280 с.
37. Михайловський В. К. Практикум з розв'язання задач з математики / В. К. Михайловський: Вища школа, 1978. – 478 с.
38. Петрик М. Основи математичного моделювання та застосування математичних методів у наукових дослідженнях / М. Петрик ,М. Баб'юк — Тернопіль Підручники і посібники, 1998.
39. Яремчук Ф.П. Алгебра и елементарне функции. Справочник. / Ф.П. Яремчук, П.А. Рудченко – К.: Наукова думка, 1976. – 254с.
40. Сиваківський Б. Систематизація та узагальнення знань на завершальному етапі вивчення алгебри. / Б. Сиваківський, Н. Шубович – К.: Шкільний світ, 2005. – 96 с.

ДОДАТКИ

Додаток 4

до Критеріїв оцінювання результатів навчання учнів (вихованців) у системі повної загальної середньої освіти

Рівні результатів навчання	Бал	Загальна характеристика
І. Початковий	1	Учень/учениця володіє уміннями на рівні копіювання зразка виконання певної навчальної дії, але під час копіювання припускається помилок; не завжди виконує елементарні завдання, навіть з допомогою вчителя, потребує детального кількаразового їх пояснення; не завжди виявляє та виправляє власні помилки, навіть з допомогою вчителя; виправляє правильне на неправильне; не завжди розпізнає проблемну ситуацію, навіть за певної допомоги з боку інших; частково відтворює основний навчальний матеріал тільки з допомогою вчителя.
	2	Учень/учениця володіє уміннями на рівні копіювання зразка виконання певної навчальної дії, але під час копіювання припускається помилок; з допомогою вчителя частково виконує елементарні завдання, потребує детального кількаразового їх пояснення; не завжди виправляє власні помилки, навіть з допомогою вчителя; виправляє правильне на неправильне; не завжди розпізнає проблемну ситуацію, навіть за певної допомоги з боку інших; відтворює основний навчальний матеріал завжди з допомогою вчителя.
	3	Учень/учениця володіє уміннями на рівні копіювання зразка виконання певної навчальної дії; з допомогою вчителя виконує елементарні завдання, потребує детального кількаразового їх пояснення; не завжди самостійно виправляє власні помилки, навіть після допомоги вчителя; не завжди розпізнає проблемну ситуацію, навіть за певної допомоги з боку інших; відтворює основний навчальний матеріал, іноді з допомогою

		вчителя.
II. Середній	4	Учень/учениця здатний/здатна повторити за зразком певну операцію, дію; будує відповідь у засвоєній послідовності; виконує навчальні дії за алгоритмом, у разі утруднення звертається до вчителя по допомогу; не завжди вносить уточнення і робить виправлення помилок після допомоги вчителя; не завжди розпізнає проблемну ситуацію, відтворює основний навчальний матеріал з помилками й неточностями.

	5	Учень/учениця здатний/здатна повторити за зразком певну операцію, дію; будує відповідь у засвоєній послідовності; виконує навчальні дії за алгоритмом, у разі утруднення звертається до вчителя по допомогу; частково вносить коректні уточнення і робить виправлення помилок після допомоги вчителя; розпізнає проблемну ситуацію за певної допомоги з боку інших, не завжди визначає шляхи розв’язання проблемної ситуації; відтворює основний навчальний матеріал з помилками й неточностями, здійснює пошукову діяльність у супроводі вчителя.
	6	Учень/учениця здатний/здатна повторити за зразком певну операцію, дію; будує відповідь у засвоєній послідовності; виконує навчальні дії за алгоритмом, у разі утруднення звертається до вчителя по допомогу; здатний/здатна внести коректні уточнення і зробити виправлення помилок після допомоги вчителя; розпізнає проблемну ситуацію, не завжди визначає шляхи розв’язання проблемної ситуації ; відтворює основний навчальний матеріал, здійснює пошукову діяльність у супроводі вчителя.
III. Достатній	7	Учень/учениця демонструє уміння на рівні свідомого вибору способу дії у стандартних ситуаціях; висловлює власні думки, може наводити окремі приклади на їх підтвердження; під час відповіді може відтворити засвоєний зміст в іншій послідовності, не змінюючи логічних зв'язків; самостійні роботи виконує із незначною допомогою вчителя; здатний/здатна внести коректні уточнення після допомоги вчителя, виправити помилки в усній відповіді / письмовій роботі самостійно; складає план роботи для розв’язання проблемної ситуації у співпраці з учителем, виконує етапи розв'язання проблеми за зразком.
	8	Учень/учениця демонструє уміння на рівні свідомого вибору

		способу дії у стандартних ситуаціях; висловлює власні думки, можуть наводити окремі приклади на їх підтвердження; під час відповіді може відтворити засвоєний зміст в іншій послідовності, не змінюючи логічних зв'язків; самостійні роботи виконує із незначною допомогою вчителя; здатний/здатна внести уточнення, виправити помилки в усній відповіді / письмовій роботі самостійно, за потреби звертаються до вчителя; складає план роботи для розв'язання проблемної ситуації, виконують окремі етапи розв'язання проблеми у співпраці з учителем, а окремі етапи виконують за зразком
	9	Учень/учениця демонструє уміння на рівні свідомого вибору способу дії у стандартних ситуаціях; висловлює власні думки, може наводити окремі приклади на їх підтвердження; під час відповіді може відтворити засвоєний зміст в іншій послідовності, не змінюючи логічних зв'язків; самостійні роботи виконує із незначною допомогою вчителя; здатний/здатна внести уточнення, виправити помилки в усній відповіді / письмовій роботі самостійно; складає план роботи для розв'язання проблемної ситуації, розв'язує проблемні ситуації у співпраці з учителем.
IV. Високий	10	Учень/учениця демонструє уміння на рівні свідомого вибору способу дії в нових ситуаціях (нестандартних); аналізує, класифікує, узагальнює об'єкти, які охоплюються засвоєними поняттями; ілюструє прикладами власні відповіді, судження; самостійні роботи виконує під опосередкованим керівництвом учителя; здатний/здатна до аналізу чужих відповідей / письмових робіт за підтримки вчителя та наступного самостійного коригування та уточнення їх; частково обґрунтовує способи розв'язання навчальних /життєвих

		проблем та ситуацій, спираючись на набуті знання; складає план роботи для розв’язання проблемної ситуації самостійно, погоджуючи з учителем; розв’язує проблемні ситуації, дослідницькі та творчих навчальних завдань.
	11	Учень/учениця демонструє уміння на рівні свідомого вибору способу дії в нових ситуаціях (нестандартних); аналізує, класифікує, узагальнює об'єкти, які охоплюються засвоєними поняттями; ілюструє прикладами власні відповіді, судження; самостійні роботи виконує під опосередкованим керівництвом учителя; здатний/здатна до аналізу власних відповідей / письмових робіт за підтримки вчителя та наступного самостійного коригування та уточнення їх; частково обґрунтовує способи розв’язання навчальних /життєвих проблем та ситуацій, спираючись на набуті знання, власний досвід; складає план роботи для розв’язання проблемної ситуації самостійно, за потреби погоджує з учителем; розв’язує проблемні ситуації, дослідницькі та творчих навчальних завдань.
	12	Учень/учениця демонструє уміння на рівні свідомого вибору способу дії в нових ситуаціях (нестандартних); аналізує, класифікує, узагальнює об'єкти, які охоплюються засвоєними поняттями; ілюструє прикладами та обґрунтовує власні відповіді, судження; самостійні роботи виконує під опосередкованим керівництвом учителя; здатний/здатна до аналізу власних відповідей / письмових робіт та їх коригування та уточнення (за потреби); обґрунтовує способи розв’язання навчальних /життєвих проблем та ситуацій, спираючись на набуті знання, власний досвід; здатний/здатна до розв’язання проблемних ситуацій, дослідницьких та творчих навчальних завдань.

План - конспект уроку на тему «Показникові рівняння».

Мета:

навчальна: повторити властивості показникової функції; удосконалити знання та вміння розв’язувати показникові рівняння; систематизувати методи розв’язування показникових рівнянь;

розвивальна: розвивати навички колективної та самостійної роботи;

виховна: виховувати увагу, старанність, культуру математичного мовлення.

Тип уроку: Узагальнення та систематизація знань.

Обладнання: підручник – алгебра 11 клас А.Г. Мерзляк.

Хід уроку.

І. Організаційний момент.

ІІ. Мотивація навчальної діяльності.

Сьогодні узагальнюючий урок з теми „ Показникові рівняння”, метою якого є:

- повторити властивості показникової функції;
- удосконалити знання та вміння розв’язувати показникові рівняння;
- систематизувати методи розв’язування показникових рівнянь;
- розвивати навички колективної та самостійної роботи;
- виховувати увагу, старанність, культуру математичного мовлення.

ІІІ. Узагальнення та систематизація знань.

Даний урок сьогодні проведемо у вигляді змагання двох команд. Учні діляться на команди довільна або по розміщенню: перша команда – І ряд від вікна, а друга – ІІ ряд. Всі учніповинні бути активними, оскільки оцінки отримають залежно від активності.

І. Бліц - опитування (*Команди відповідають по черзі на запитання. Якщо відповідь не правильна, то даємо слово іншій команді. За кожну правильну відповідь – 1 бал):*

1. Яка функція називається показниковою? (*Функція виду* $y = a^x$*, де* $a > 0$*,* $a \neq 1$*, називається показниковою)*

2. Яка область визначення показникової функції? ($D(y) = R$)

3. Яка область значень показникової функції? ($E(y) = (0; +\infty)$)

4. При якій умові показникова функція є зростаючою? ($a > 1$)

5. При якій умові показникова функція є спадною? ($0 < a < 1$)

6. Чи є спільна точка у графіків функцій $y = 3^x$ і $y = 0{,}19^x$? (Так, (0;1))

7. Яке рівняння називають показниковим? (*Показниковими називаються рівняння, у яких невідоме міститься в показнику степеня при постійних основах.*)

8. Скільки розв'язків може мати рівняння $a^x = b$, *де* $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$? (Один розв'язок)

9. Чи має розв'язок показникове рівняння $a^x = y$, коли $y = 0$? (Розв'язків не має)

10. У чому полягає спосіб зведення до спільної основи при розв'язування показникових рівнянь? *(частини рівняння зводяться до вигляду* $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ *тоді* $f(x) = \varphi(x)$ *– рівносильні)*

11. Як розв'язується показникові рівняння виду $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$? *(Вводимо заміну та отримуємо квадратне рівняння)*

12. Як розв'язати графічно рівняння $2^x = x+2$? *(Малюємо графік функцій* $y = 2^x$ *та* $y = x+2$*, точка перетину графіків - корінь рівняння)*

ІІ. Які з наведених функцій є показниковими? *(кожна команда називає одну, далі наступна команда відповідає, правильна відповідь – 1 б).*

$1)\, y=3^x;$ $2)\, y=x^3;$ $3)\, y=1^x;$ $4)\, y=(-4)^x;$ $5)\, y=\left(\sqrt{201}\right)^{x+3};$ $6)\, y=x^{0,6};$

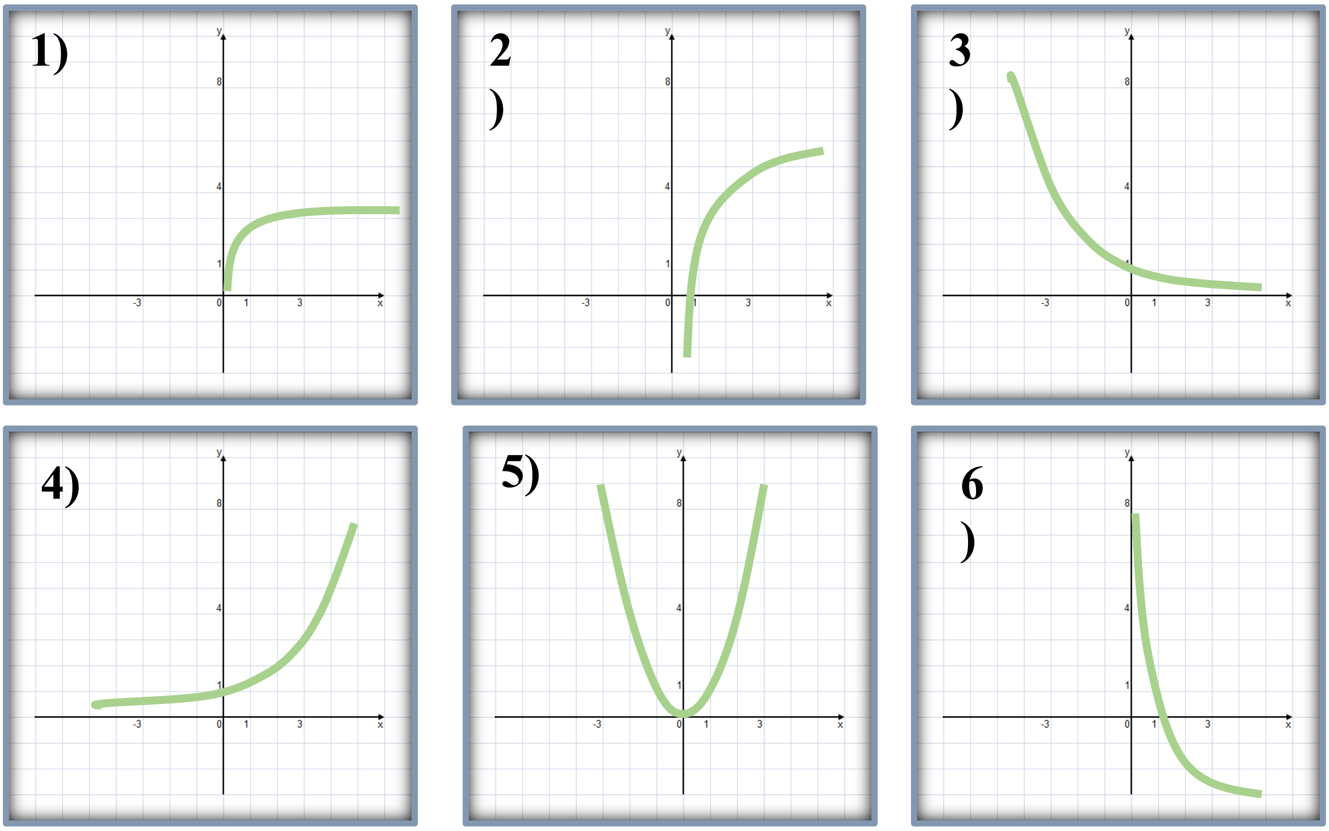
$7)\, y=(x-5)^8;$ $8)\, y=\left(1-\sqrt{7}\right)^x;$ $9)\, y=9^{-x};$ $10)\, y=x^{-x};$ $11)\, y=\pi^x;$

$$12)\, y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{5-x}}.$$

Відповідь: 1, 5, 9, 11, 12.

III. Які з графіків є графіками показникової функції?

(кожна команда називає одну, далі наступна команда відповідає, правильна відповідь – 1 б).



Відповідь: 3, 4.

IV. Серед наведених функцій виберіть ті, що зростають: *(Відповідає кожна команда. Після оголошення правильної відповіді нараховуються бали. За кожну правильну відповідь – 1 бал)*

$1)\, y=2^x$ $2)\, ó=10^{0,5ó};$ $3)\, ó=0{,}6^{5ó+2}$ $4)\, y=0{,}15^{1,5x}$

$5)\, y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ $\quad$ $6)\, y=\left(\frac{7}{5}\right)^{x}$ $\quad$ $7)\, y=\left(\sqrt{7}\right)^{\eth}$

Відповідь: 1, 2, 6, 7.

V. Серед наведених функцій виберіть ті, що спадають: ***(****Відповідає кожна команда. Після оголошення правильної відповіді нараховуються бали. За кожну правильну відповідь – 1 бал****)***

$1)\, y=4^{0,3x}$ $\quad$ $2)\, y=0{,}3^{x}$ $\quad$ $3)\, \acute{o}=6{,}9^{2\eth-1}$ $\quad$ $4)\, y=0{,}1^{12x}$

$5)\, y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^{x}$ $\quad$ $6)\, y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{x}$ $\quad$ $7)\, y=\left(\frac{2}{13}\right)^{x}$

Відповідь: 2, 4, 5, 7.

VI. **Естафета** ***(****До дошки виходять представники команди та виконують завдання. Члени команди виконують завдання в зошиті та можуть внести корективи до оголошення правильних відповідей. За кожну правильну відповідь – 1 бал****)***

Команда 1

Подайте у вигляді степеня з основою 2 число:

8, 1/16, $\sqrt{2}$, 0,25, 1024, 0,5, $\sqrt[3]{4}$, 0,0625

2^{3}, 2^{-4}, $2^{1/2}$, 2^{-2}, 2^{10}, 2^{-1}, $2^{2/3}$, 2^{-4}

Команда 2

Подайте у вигляді степеня з основою 3 число:

81, 1/27, $\sqrt[3]{3}$, 81^{-1}, $\sqrt[5]{9}$, 1, 729, 27^{π}

3^{4}, 3^{-3}, $3^{1/3}$, 3^{-4}, $3^{2/5}$, 3^{0}, 3^{6}, $3^{3\pi}$

VII. **Розминка перед** **(***Команди відповідають по черзі. Якщо відповідь не правильна, то інша команда має можливість відповісти та отримати додатковий бал. За кожну правильну відповідь – 1 бал)*

$2^x=16$ (4) **$3^x=81$** (4) **$5^x=125$** (3) **$10^x=10000$** (4) **$4^x=256$** (4)

$3^{x-1}=9$ (3) **$5^{x-3}=25$** (5) **$3^x=1/27$** (-3) **$12^x=1$** (0) **$(1/7)^x=7$** (-1)

$5^{-x}=25$ (-2) **$2^{-x}=16$** (-4) **$4^x=2$** (1/2) **$27^x=3$** (1/3) **$(1/3)^x=8$** (-3)

VIII. **Згрупуйте рівняння за способом розв'язування (***Команди відповідають по черзі. Якщо відповідь не правильна, то інша команда має можливість відповісти та отримати додатковий бал. За кожну правильну відповідь – 1 бал)*

1. $7^{x+2} - 14\cdot7^x = 5$
2. $4^{2x+2} + 4^{x+1} -1 = 0$
3. $4^{x+1} = 2$
4. $3^{x+1} - 2\cdot3^{x-2} = 75$
5. $7^x = 49$
6. $2^{2x} - 10\cdot2^x +16 = 0$

Зведення до спільної основи	**Винесення спільного множника за дужки**	**Введення нової змінної (зведення до квадратного рівняння)**
3. $4^{x+1} = 2$ 5. $7^x = 49$	1. $7^{x+2} - 14\cdot7^x = 5$ 4. $3^{x+1} - 2\cdot3^{x-2} = 75$	2. $4^{2x+2} + 4^{x+1} -1 = 0$ 6. $2^{2x} - 10\cdot2^x +16 = 0$

Марафон ***(****Команди розв'язують рівняння в зошиті. Обмінюються розв'язками, перевіряють і оцінюють роботу суперників****)***

команда 1	**команда 2**
Розв'яжіть рівняння:	
$2^x \cdot 3^x = 36$	$4^x \cdot 5^x = 400$
$7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$	$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$
$49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0.$	$4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$
(2; -1; 0;1)	***(2; 3; 1;3)***

Додаткове завдання: *представити на дошці розв'язок третього рівняння*

VI. Підбиття підсумків уроку:

Вчитель підводить підсумки роботи кожної групи, виставляє оцінки.

VII. Домашнє завдання:

1. Повторити теоретичний матеріал, необхідний для розв'язування показникових рівнянь.

2. Розв'язати рівняння: (вказівки до розв'язування)

$$4^{2x-1} = \frac{1}{64}$$

$$5^{x^2+x-12} = 1$$

$6^{2x} - 3 \times 6^x - 18 = 0$

VIII. Знайти помилку:

$15^{x^2-5x+6} = 15^0$

$15^{x^2-5x+6} = 15$

$x^2 - 5x + 6 = 1$

$x^2 - 5x + 5 = 0$

$$D = 25 - 20 = 5$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

План - конспект уроку на тему «Розв'язування логарифмічних рівнянь».

Мета:

навчальна: формування поняття показникової нерівності та вміння розв'язувати показникові нерівності;

розвивальна: розвивати навички колективної та самостійної роботи, розвиток пізнавальних інтересів, допитливості;

виховна: виховувати увагу, старанність, культуру математичного мовлення.

Тип уроку: Формування навичок та вмінь.

Обладнання уроку: Таблиці властивостей логарифмів.

Хід уроку.

І. Актуалізація опорних знань.

А) Вчитель пропонує учням відповісти на поставлені запитання.

1) Що називається логарифмом числа за даною основою ?

<u>Очікувана відповідь:</u> Логарифмом числа N за основою a ($a > 0$ і $a \neq 1$) називається показник степеня x, до якого треба піднести a, щоб дістати число N

2) Записати основну логарифмічну тотожність?

<u>Очікувана відповідь:</u> $a^{\log_a N} = N$.

3) Перерахуйте основні властивості логарифмів ?

<u>Очікувана відповідь:</u>

Логарифм добутку двох додатних множників дорівнює сумі їх логарифмів.

Логарифм частки двох додатних чисел (дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника (чисельника і знаменника).

Логарифм степеня додатного числа дорівнює показнику степеня , помноженого на логарифм основи цього степеня.

Логарифм кореня з додатного числа дорівнює логарифму підкореневого виразу, поділеному на показник кореня.

4) Записати формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої?

Очікувана відповідь: $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}, \ a > 0, \ a \neq 1, \ b > 0, \ b \neq 1.$

Б) Математичний диктант.

Читається кожне завдання окремо. Числові дані записуються на дошці.

1) Знаючи $\log_a N = n$, знайти $\log_a (N)^5$.

2) Знайти $\log_a \left(N^{\frac{1}{4}} \right)$, якщо $\log_a N = 4{,}28$.

3) Чи правильно, що $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$? Чому?

4) Довести, що $\log_a 2 + \log_a 0{,}5 = 0$.

5) Чи правильно, що $\log_a ab = 1 + \log_a b$? Чому?

Пропонується учням (на кожній парті) обмінятися виконаними завданнями і здійснити перевірку диктанту.

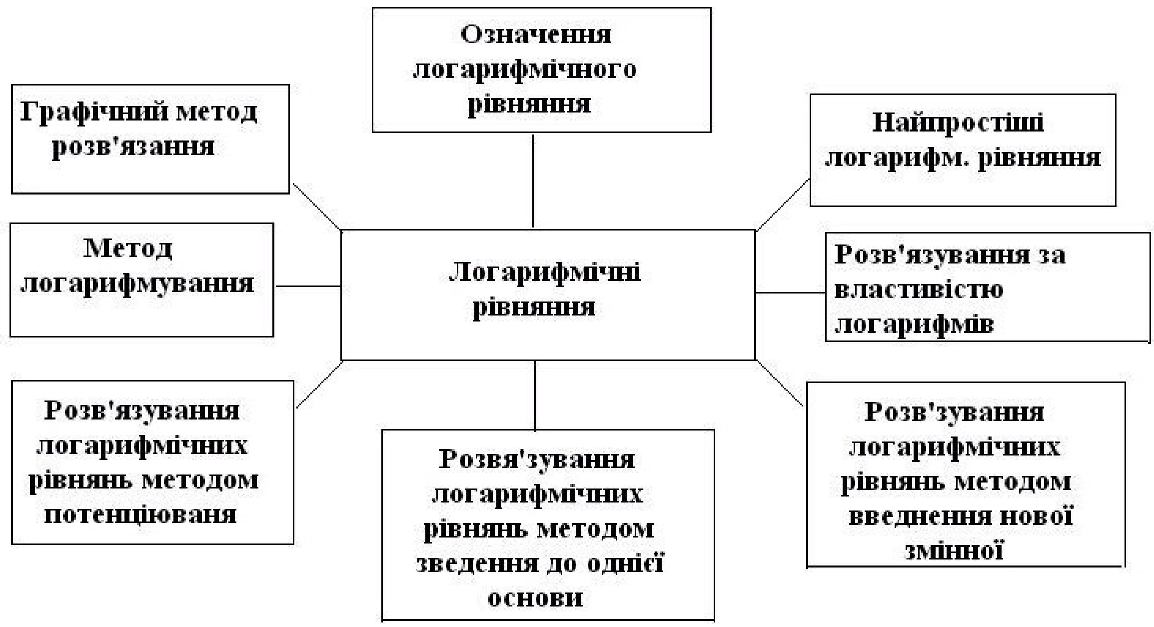
Правильні відповіді на всі завдання диктанту демонструються на дошці (були написані попередньо).

1. $\log_a (N)^5 = 5n.$
2. $\log_a \left(N^{\frac{1}{4}} \right) = 1{,}07$
3. Так, тому, що $\log_a \dfrac{1}{b} = \log_a (b)^{-1} = -\log_a b$
4. $\log_a 2 + \log_a 0{,}5 = \log_a \left(2 \cdot \dfrac{1}{2} \right) = \log_a 1 = 0$
5. Так, бо $\log_a ab = \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a b$

ІІ. Постановка задачі уроку.

Завдання даного уроку - навчитись розв'язувати логарифмічні рівняння різними методами.

ІІІ. Вивчення нового матеріалу .



При розгляданні методів розв'язування логарифмічних рівнянь звертається увага на знаходження ОДЗ, або обов'язкової перевірки коренів рівняння.

Розв'язування логарифмічних рівнянь за властивостями логарифмів.

$$\log_2(x-3) + \log_2(x-1) = 3 + \log_2(x-4)$$

1. Введення нової змінної.

   $(\lg x - 6)^{-1} + 5(\lg x + 2)^{-1} = 1$

2. Графічний метод.

   $\lg x = 1 - x$

3. Метод логарифмування.

   $x^{\log_2 x} = 16$

4. Метод потенціювання.

   $\log_5(x - 1) + \log_5(x - 2) = \log_5(x - 2)$

5. Метод зведення до однієї і тієї ж основи.

   $\log_3 x – 2\log_{1/3} x = 2$

I. Набуття умінь розв’язувати логарифмічні рівняння.

1. Усне розв’язування логарифмічних рівнянь.

   $\log_5 x = 2$

   $\log_9 x =?$

   $2^{\log_2 x} = 4$

   $\lg(x+3) = \lg x$

2. Виконуємо разом. №286 (б), №291 (а), №300 (а), №302 (в).
3. Самостійна робота з послідовною взаємоперевіркою. №300 (б), №287 (а), №283 (в).

II. Підсумок уроку.

Встановити відповідність між заданими рівняннями та їх коренями.

Рівняння	Корені
$\log_2(x^2-1)=3$	А) x=1/49
$\log_4(x+1)=2$	Б) x±3
$\log_7 x= -2$	В) x=2
$\log_2(x-1)=0$	Г) x=15

III. Домашнє завдання.

§7. I частина – вивчити. №280 (а), №282 (а,г), №287 (а,б), №291 (б), №292 (в), №302(а).