Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота бакалаврського рівня на тему Розв'язування рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики загальноосвітньої школи

Виконала: студентка 4 курсу
групи МЕІ-41
спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)
Капран Юлія Василівна
Керівник : канд. фіз.-мат. наук, доц., зав. кафедри математики з МВ
Крайчук Олександр Васильович

Рецензент : канд. фіз.-мат. наук, проф. кафедри вищої математики
Петрівський Борис Петрович

Рівне -2021 рік

ЗМІСТ

ВСТУП

На сучасному етапі розвитку Української школи, навчання математики передбачає передусім формування предметної математичної компетентності. Вона проявляється у свідомому застосуванні знань, умінь і навичок у практичних цілях, у повсякденному житті, при дослідженні та обробці експериментальних даних.

Матеріал, пов'язаний з вивченням рівнянь і нерівностей є важливою частиною шкільної програми з математики та сприяє формуванню предметної математичної компетентності. Дана тема покладена за основу змістовно-методичної лінії рівнянь і нерівностей. Значення якої полягає у наявності зв’язків між курсами та дисциплінами та при розв’язуванні практичних задач.

Одним з ефективних способів здійснення принципу зв'язку математичної науки з життям, підготовкою школярів до вільного вибору майбутньої професії є метод рівнянь і нерівностей, значення якого полягає у розв’язуванні задач життєвого змісту, задач пов'язаних з основами сучасного виробництва, економікою і народним господарством, із суміжними дисциплінами.

Курс алгебри середньої школи включає розгляд лінійних, квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до лінійних або квадратних, дробово-раціональних, систем лінійних рівнянь. А також протягом вивчення курсу математики систематично здійснюється формування компетенцій роботи з текстовими задачами. Знання отримані раніше про числові нерівності аналізуються і поглиблюються завдяки вивченню числових, лінійних, квадратних нерівностей.

Лінія рівнянь та нерівностей допомагає учням формувати різні види мислення: логічне, наочно-образне, практичне та репродуктивне, що сприяє виробленню необхідних математичних компетентностей.

Аналіз навчальної, наукової та методичної літератури показує, що даній тематиці приділяється велика увага. Вивченню методики викладання рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики присвячені роботи З. І. Слепкань, Г. П. Бевза, Я. І. Грудьонова, Є. П. Неліна, М. І. Бурди та ін. Тому тематика обраного дослідження є актуальною.

Актуальність досліджуваного питання зумовлена також і тим, що перевірка знань із багатьох тем математики (наприклад, завдання ЗНО та ДПА) зводиться до розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Однак доводиться констатувати той факт, що, незважаючи на велику увагу, що приділяється вивченню даного матеріалу в курсі математики основної школи, результати оволодіння цими знаннями не є високими.

Мета бакалаврської роботи: систематизація і узагальнення способів і принципів навчання рівнянь та нерівностей в курсі алгебри основної школи з метою формування у них відповідних компетентностей.

Завдання бакалаврської роботи:

- дослідити наукову та методичну літературу, що стосується вивчення рівнянь і нерівностей;
- систематизувати теоретичні та практичні аспекти навчання рівнянь та нерівностей в 7-9 класах;
- здійснити аналіз програми вивчення даної теми в курсі алгебри;
- розглянути основні типи рівнянь та нерівностей і способи їх розв’язування; розробити систему завдань по даній темі.

Предметом бакалаврської роботи є основні методи розв’язування рівнянь та нерівностей.

Об'єктом дослідження є методичні основи навчання учнів розв’язуванню рівнянь та нерівностей.

Для досягнення мети та розв’язання поставлених завдань були використані **теоретичні** (аналіз психолого-педагогічної, навчальної та методичної літератури з проблеми дослідження, змісту програм і підручників для різних типів шкіл) та **емпіричні** (вивчення вітчизняного та зарубіжного педагогічного досвіду, аналіз уроків, спостереження, бесіди з вчителями, батьками та учнями) методи досліджень.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблений зміст і методика можуть бути використані вчителями школи при організації навчання математики на уроках, на факультативних заняттях, для підвищення якості знань учнів, активізації їх пізнавальної діяльності.

Структура роботи. Робота складається із вступу, чотирьох основних розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

Апробація роботи. Основні результати дослідження були анонсовані на звітній науковій конференції викладачів, співробітників, докторантів, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету в 2021 році.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1 Різні шляхи підходу до визначення понять рівняння і нерівності зі змінними

Серед загальних математичних понять провідне місце належить рівнянням та нерівностям. У зв'язку з цим постає питання як означити дані поняття, щоб вони були водночас формально точні, і доступні для учнів, які опановують шкільний курс алгебри.

У математиці існує декілька критеріїв до визначення рівняння залежно від понять, через які воно трактується. Ключові з них тлумачать рівняння через функцію, вираз і предикат.

Означення 1. Рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x) називають рівність $f_1(x) = f_2(x)$ виразів $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що визначені відповідно на множинах M_1 і M_2, і для якої визначено завдання знайти множину всіх значень x з $M_p \subseteq M = M_1 \cap M_2$ таких, щоб вирази $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мали ті самі значення [21, с.217].

Означення 2. Рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x) називають рівність $f_1(x) = f_2(x)$ двох аналітично заданих функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ з областями визначення D_1 і D_2 і областями зміни $Y_1 \subseteq R$, $Y_2 \subseteq R$, для якої визанчено завдання знайти значення x з $D_r \subseteq D = D_1 \cap D_2$ такі, щоб обидві функції мали ті самі числові значення [21, с.217].

Означення 3. Предикат $f_1(x) = f_2(x)$ з множиною визначення D, для якого взначено завдання відшукати множину істинності $D_r \subseteq D$, називають рівнянням з однією змінною x (або з одним невідомим x) [21, с.217].

Подібно можна трактувати і рівняння з кількома змінними. У даному випадку вирази (або функції, або предикати) потрібно розглядати з кількома змінними:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ і } f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Здійснення вибору підходу щодо способу пояснення даного поняття залежить від індивідуальних властивостей та рівня підготовки учнів, а також від форми навчального процесу. Зазвичай, перше визначення найлегше зрозуміти, тому що загальний термін "вираз" простіший, ніж "функція" або "предикат".

Означення через функцію має певні незручності порівняно з іншими. Наприклад, розв'язуючи трансцендентне рівняння $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \psi(x)$, за такого підходу інколи втрачають розв'язки. Справді, функція $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$за означенням визначена лише для $f(x) > 0$. Тому виключаються випадки, коли $f(x) \le 0$, що приводить до звуження множини розв'язків рівняння. Наприклад, для рівняння $x^{x+1} = x^2$ значення $x = -1;\ x = 0$ виключаються з множини розв'язків при функціональному означенні рівняння. За означенням 1 ці значення x є коренями рівняння [21, с.218].

В підручниках математики рівняння вводиться двома способами:

1) як рівність, що містить невідоме число;

2) як рівність зі змінною.

Безпосередньо після зазначених формулювань слід дати визначення кореня рівняння. У першому випадку корінь рівняння визначається як знайдене значення невідомого числа, а в другому – як значення змінної, при якому рівняння перетворюється в правильну рівність.

Поняття «нерівність» в курсі алгебри основної школи вводиться описово, на інтуїтивному рівні (тобто на рівні уявлення про об'єкт), хоча цілком може бути визначено аналогічно поняттю рівняння. Проте довгий час у підручниках з алгебри обмежувалися геометричним трактуванням, а саме : число a називається більшим за число b, якщо точка, що зображує число a на числовій прямій, міститься праворуч від точки, що зображує число b; число a називається меншим за число b, якщо точка, що зображує число a на числовій прямій, міститься ліворуч від точки, що зображує число b. З логічної точки зору нерівність є виразом зі змінною, що містить знак нерівності (<, >, ≤, ≥).

Вираз зі змінною, що містить знак нерівності ">" ("<", "≥","≤ "), прийнято називати *нерівністю*. Таким чином, в шкільному курсі математики можна дати наступне визначення: вираз із змінною, що містить знак ">,<, ≤, ≥", називається нерівністю зі змінною.

1.2 Роль рівнянь і нерівностей в шкільному курсі математики, їх пропедевтичне вивчення

Змістовно-методична лінія рівнянь і нерівностей передбачає вивчення понять рівнянь і нерівностей, загальних способів їх розв’язування, взаємозв’язок з лініями курсу математики в школі. Розгортання лінії рівнянь і нерівностей в шкільній програмі математики включає три основні напрямки:

1. Алгебраїчний метод розв'язання текстових задач характеризує прикладну спрямованість лінії рівнянь і нерівностей. Цей аспект лінії рівнянь і нерівностей багато в чому забезпечує мотивацію вивчення математики в цілому. При розв’язуванні текстових задач основним інструментом є математичне моделювання, а рівняння – один із засобів побудови моделей.

2. Теоретико-математична спрямованість характеризує два аспекти:

- визначення і вивчення найважливіші класи рівнянь, нерівностей та систем;
- вивчення узагальнених понять всієї лінії загалом, формуючи, у такий спосіб, узагальнений апарат теорії (невідоме, рівність, еквівалентність, логічний наслідок, система і сукупність рівнянь, методи розв’язання).

3. Між лінією рівнянь і нерівностей та іншими лініями курсу математики існує взаємозв’язок. Вона тісно пов'язана з числовою лінією, а також з функціональною лінією. Методи, розроблені в теорії рівнянь і нерівностей, застосовуються у дослідженні функції (елементарні методи дослідження функцій з метою побудови графіка). Дослідження рівнянь, нерівностей та їх систем здійснюється за допомогою функціональної лінії (графік і графічні уявлення).

Також слід зазначити зв'язок даної лінії з теорією тотожних перетворень. Остання набуває нового змісту і сенс при вивченні рівносильних перетворень рівнянь і нерівностей. Насамперед, володіння змістом лінії рівнянь і нерівностей дозволяє розширити список здійсненних перетворень. Так, вміння розв’язувати квадратні рівняння дозволяє здійснювати скорочення дробів. Задачі, які розв’язуються методом рівнянь або нерівностей є одним з ефективних способів здійснення міжпредметних зв'язків.

Операції над числами і властивості цих операцій, функції і властивості функції, метричні співвідношення між елементами геометричних фігур, тотожності і тотожні перетворення в процесі навчання відразу ж можуть знаходити відображення у завданнях на розв’язування рівнянь і нерівностей.

У 1-4 класах надаються елементарні відомості про рівняння і змінну. Спочатку здійснюють підбір для відшукання невідомого числа, а згодом розв’язують рівняння на основі пошуку невідомих компонентів. У 5-6 класах розглядають поняття рівняння як рівності, що містить змінну величину. Прийоми і методи, які використовувалися в попередніх класах, застосовуються у 5 класі, але наперед виконується спрощення.

У 6 класі розв’язують рівняння за допомогою перенесення членів рівняння з однієї частини в іншу, змінюючи знак перенесених членів на протилежний. Якщо до 6 класу учні користувалися різними правилами: в одних випадках правилом знаходження невідомого доданка, в других – правилом знаходження невідомого зменшуваного, а в третіх – правилом знаходження невідомого від'ємного, то тепер після вивчення операцій над додатніми і від’ємними числами, рівняння розв’язують одним способом, використовуючи основні властивості рівнянь.

У 7 класі систематизуються дані про рівняння: вивчаються лінійні рівняння з одним та двома невідомими, системи лінійних рівнянь та способи їх розв’язування. Квадратні рівняння опановуються учнями у 8 класі. А саме дається визначення квадратного рівняння і неповних квадратних рівнянь, при цьому, наводячи методи розв’язання кожного виду рівнянь. Для того, щоб вивести формули коренів квадратного рівняння, необхідно показати учням спосіб виділення квадрата двочлена. Дослідження є необхідним кроком для виведення формули коренів. В результаті, якого існує 3 можливі випадки: розв'язків не має; один розв'язок; два розв'язки. Також у 8 класі розглядаються дробово-раціональні та рівняння, що зводяться до квадратних.

У 9 класі вивчають описове означення числової нерівності, розглядаються властивості числових нерівностей, розв'язуються лінійні нерівності з однією невідомою та квадратичні нерівності. Наводяться приклади розв'язування систем, які поєднують два рівняння першого і другого степенів. У 10-11 класах матеріал, отриманий учнями раніше, поглиблюється і систематизується. Особливістю вивчення лінії рівнянь у даному курсі є те, що ознайомлення з кожним різновидом рівнянь і його розв'язанням передує вивчення відповідної функції. Розглядається коло рівнянь і нерівностей: тригонометричні, показникові, логарифмічні, ірраціональні і диференціальні. Протягом шкільного курсу алгебри систематично розв'язуються текстові задачі за допомогою рівнянь.

Послідовність вивчення різних класів рівнянь, нерівностей і систем в підручниках відрізняється між собою. Можна виділити два основні шляхи розвитку змісту лінії рівнянь і нерівностей:

1. Спочатку вивчається матеріал, який відноситься до рівнянь і їх систем, потім до нерівностей. Роздільний виклад проводиться до теорії квадратного тричлена включно. Далі в наступних класах логарифмічні, показникові, тригонометричні рівняння і відповідні нерівності вивчаються в більш тісних зв'язках один з одним.
2. Основні класи нерівностей вивчаються відразу слідом за відповідними класами рівнянь.

Є і проміжні шляхи, коли деякі класи рівнянь і нерівностей пов'язані між собою по часу вивчення, а інші навпаки не пов'язані. Різні підходи вимагають і своїх методик, різноманітних прийомів вивчення матеріалів.

1.3 Поняття слідування одного рівняння або нерівності з іншого і рівносильності

Для кожного виду рівнянь (нерівностей) можна вказати найпростіші рівняння (нерівності), розв'язання яких здійснюється за певним алгоритмом. Наприклад, лінійні, квадратні рівняння (нерівності). У загальному ж випадку процесс розв'язування рівняння (нерівності) полягає в заміні даного рівняння (нерівності) іншим, простішим, корені (розв'язки) якого не завжди збігаються з коренями (розв'язками) вихідного. Також при цьому можуть з'явитися сторонні корені (розв'язки) або, навпаки, може бути втрата коренів (розв'язків). Найкраще, коли від данного рівняння (нерівності) переходять до більш простого рівняння (нерівності) з тими ж коренями (розв'язками) – рівносильного рівняння (нерівності). Такий перехід називається рівносильним.

Означення 4. Два рівняння

$$f_1(x) = g_1(x) \tag{1}$$

$$f_2(x) = g_2(x) \tag{2}$$

(відповідні їм нерівності) називаються рівносильними (еквівалентними) на заданій множині M, якщо вони мають на цій множині одні й ті ж корені(розв'язки), тобто множини їх розв'язків збігаються [13, с.9].

Зауваження 1: якщо два рівняння (нерівності), не мають коренів (розв'язків), то вони рівносильні.

Приклад 1. Розглянемо рівняння: $x^2 - 9 = 0$ і $(x+3)(x^2-9) = 0$. Оскільки ці два рівняння мають тільки по два кореня, то вони рівносильні на множині дійсних чисел:

$$x^2 - 9 = 0 \overset{R}{\Leftrightarrow} (x+3)(x-3).$$

Приклад 2. Розглянемо рівняння:$x^2 + 2 = 0$ і $\sqrt{x} = -5$. Вони є рівносильними, тому що обидва не мають дійсних коренів:

$$x^2 + 1 = 0 \overset{R}{\Leftrightarrow} \sqrt{x} = -3.$$

У розглянутому прикладі область допустимих значень (ОДЗ) рівнянь різні: рівняння $x^2 + 1 = 0$ має в якості ОДЗ множину всіх дійсних чисел, в той час як рівняння $\sqrt{x} = -3$ – множину невід'ємних чисел. Отже, еквівалентні рівняння можуть мати різні ОДЗ. Аналогічно, рівносильні нерівності можуть мати різні ОДЗ.

Зауваження 2: два рівняння (нерівності) можуть бути рівносильними на одній множині і не бути рівносильними на іншій.

З означення рівносильності випливає, що замість того, щоб розв’язувати задане рівняння, можна розв’язувати рівняння, яке йому рівносильне. Поняття рівносильності володіє властивістю транзитивності, тобто, якщо рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне рівнянню $t(x) = s(x)$ і рівняння $t(x) = s(x)$ рівносильне рівнянню $m(x) = p(x)$, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне рівнянню $m(x) = p(x)$. Кажуть, що рівняння рівносильне даній сукупності рівнянь, якщо множина всіх коренів рівняння співпадає з множиною всіх розв’язків сукупності рівнянь [13, с.7].

Рівняння (нерівність) можна замінити в процесі розв’язування рівносильною системою або сукупністю рівнянь, нерівностей та їх систем (сукупностей).

Означення 5. Якщо кожен корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2), то рівняння (2) називається наслідком рівняння (1) [13, с.7].

Головною причиною використання рівняння (нерівності) - наслідку – розширення ОДЗ рівняння (нерівності). Для цього застосовуються такі перетворення:

– зведення подібних членів;

– взаємне знищення однакових доданків рівняння (нерівності);

– заміна виразу тотожно рівним йому, якщо при цьому відбувається розширення ОДЗ рівняння (нерівності);

– множення обох частин рівняння на вираз, який визначений на ОДЗ рівняння;

– перетворення рівняння $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ в сукупність нянь $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$;

– відкидання знаку кореня, логарифмів і т. д.

При розширенні ОДЗ вихідного рівняння (нерівності) та виконанні самого перетворення можуть з'явитися сторонні корені, проте можливо і зворотне. В наслідок заміни виразу, що входить в рівняння (нерівність), тотожно рівним йому виразом і при цьому відбувається звуження ОДЗ, слідує втрата коренів (розв'язків). Також не допустимим є ділення обох частин рівняння на один і той же вираз *h (x)* (виняток коли $h(x) \neq 0$).

Застосування основних типів перетворення рівняння (нерівності) приводять до рівносильного рівняння (нерівності) .

Приклад 3. Чи є дані рівняння

$$x + 7 + \frac{10}{2x-1} = 8 - x + \frac{10}{2x-1} \text{ і } x + 7 = 8 - x$$

еквівалентними?

Розв'язання: додамо до обох частин рівняння вираз $-\frac{10}{2x-1}$, який не визначений при $x = \frac{1}{2}$.

При цьому число $\frac{1}{2}$ не є коренем першого рівняння, але може бути коренем другого. Виконавши перевірку, можна зробити висновок, що число $\frac{1}{2}$ є коренем другого рівняння. Звідси слідує те, що корінь другого рівняння $x = \frac{1}{2}$ не є коренем першого рівняння. Тому, можна дійти висновку, що дані рівняння не є еквівалентними.

В даному прикладі $x + 7 + \frac{10}{2x-1} = 8 - x + \frac{10}{2x-1} \Rightarrow x + 7 = 8 - x.$

До рівносильного рівняння (нерівності) переходимо також при заміні виразу, що входить в рівняння (нерівність), тотожно рівним йому виразом, якщо при цьому не відбувається зміни області допустимих значень рівняння (нерівності).

Приклад 4. Якщо в рівнянні $\frac{x^2-1}{x-1} = 5$ скоротити її ліву частину на спільний множник $x - 1$, то отримаємо еквівалентне рівняння $x + 1 = 5$. Розв'язавши рівняння отримаємо, що число 4 є коренем як рівняння $x + 1 =$ $= 5$, так і рівняння : $\frac{x^2-1}{x-1} = 5 \Leftrightarrow x + 1 = 5$.

Перехід від рівняння $f(x) = g(x)$ до рівняння $F(f(x)) = F(g(x))$ (і назад) є рівносильним, якщо функція F визначена на спільній частині A множин значень функцій f та g і, крім того, функція F монотонна на A.

Приклад 5. Рівносильними є дані рівняння

$$\lg(x^2 - 4) = \lg(4x - 7) \text{ і } x^2 - 4 = 4x - 7?$$

Розв'язання: застосувавши перетворення до другого рівняння

$$x^2 - 4 = 4x - 7,$$

отримаємо рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$, яке еквівалентне вихідному. Для другого рівняння множина всіх коренів складається із двох чисел: $x_1 = 3$ і $x_2 = 1$. Проте число 1 не є коренем першого рівняння, так як не належить області допустимих значень першого рівняння. Отже, дані рівняння не є еквівалентними.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ У 7-9 КЛАСАХ

2.1 Лінійні рівняння з однією та двома змінними

Лінійні рівняння з одним невідомим – це перший клас рівняння в курсі алгебри, тому від характеру його вивчення значною мірою залежать особливості організації всього подальшого вивчення лінії рівнянь і нерівностей. При вивченні цього класу рівнянь формується загальне поняття про рівняння, вводиться відповідна термінологія.

Означення 1. Рівняння виду $ax = b$, де x – змінна, a і b – задані числа, називають **лінійним рівнянням з однією змінною** [14, с.13].

В підручниках досліджується лінійне рівняння з однією невідомою, яке залежить від коефіцієнта a і вільного члена b (табл.2.1).

Таблиця 2.1

$ax = b$ – **лінійне рівняння з однією змінною**			
Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
Корені рівняння	$\frac{b}{a}$	x –будь-яке число	Коренів не має

Приклад 1. Знайдіть корінь рівняння:

$$2(x + 6) = x + 6.$$

Етапи знаходження розв’язку рівняння:

Крок 1. Перемножимо вираз $x + 6$ на 2:

$$2x + 12 = x + 6.$$

Крок 2. Всі члени рівняння зі змінною, переносимо в одну сторону рівняння, а всі інші –в другу. При перенесенні через знак рівності, знак, який стоїть перед відповідним членом рівняння, змінюється на протилежний:

$$2x - x = -12 + 6.$$

Крок 3. Спростимо вираз:

$$x = -6.$$

Крок 4. Зробимо перевірку:

$$2(-6 + 6) = -6 + 6,$$

$$0 = 0.$$

Відповідь: -6.

В системі вивчення рівнянь у 7 класі присутнє поняття “рівняння першого степеня”.

Означення 2. Алгебраїчне рівняння з одним невідомим називається **рівнянням першого степеня**, якщо одна і друга його частини є многочленами першого степеня відносно невідомого.

В кінці курсу алгебри сьомого класу учні знайомляться з поняттям лінійного рівняння з двома невідомими.

Означення 3. Рівняння виду $ax + by = c$, де $x, y -$ змінні, $a, b, c -$ деякі числа, називають лінійним рівнянням з двома змінними [14, с.246].

Випадки, які залежать від коефіцієнтів лінійного рівняння наведено схематично у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

$ax + by = c -$ лінійне рівняння з двома змінними		
Умова	***Графік***	***Розв’язок***
$b \neq 0, b = 0, a \neq 0$	Пряма	Пара чисел, які належать прямій
$a = b = c = 0$	Вся координатна площина	Будь-яка пара чисел
$a = b = 0, c \neq 0$	$-$	Розв’язків не має

Ідея знаходження розв’язку даного рівняння полягає в тому, що необхідно відшукати пару значень x і y, яка задовольняла б його, іншими словами перетворювала б рівняння з невідомими x і y правильну числову рівність. Знайти пару, яка задовольняла б рівняння можна за допомогою методу підбору.

Необхідно зауважити, що записувати отриману відповідь потрібно в дужках через крапку з комою. Першим вказується значення – x, другим – значення y.

2.2 Квадратні рівняння. Рівняння, що зводяться до квадратних

На початку вивчення курсу алгебри 8 класу основна увага зосереджується на способах розв’язування квадратних рівнянь. Дана тема характеризується глибиною викладу і багатством встановлених зв'язків у навчанні та логічною обґрунтованістю поданого матеріалу. Вона посідає особливе місце у змістовно-методичній лінії рівнянь і нерівностей. Уміння, навички та знання отримані при вивченні квадратних рівнянь служать базою для розв’язування різних практичних задач.

Означення 4. Квадратним рівнянням називають рівняння виду

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

де $x -$ змінна, $a,\ b, c -$ деякі числа, при чому $a \neq 0$ [15, с.142].

Число a називають **старшим коефіцієнтом квадратного рівняння**, число b −**другим коефіцієнтом**, число c −**вільним членом**.

Систематичне вивчення **квадратних рівнянь** включає розгляд окремих видів квадратного рівняння. Зазвичай, першими розглядаються неповні квадратні рівняння.

Означення 5. Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають **неповним квадратним рівнянням** [15, с. 142].

Основні види та способи їх розв’язування подано у наступній таблиці.

Таблиця 2.3

Коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$	***Неповне квадратне рівняння***	***Корені***
$b=c=0$	$ax^2=0$	$x=0$
$c=0$ і $b\neq 0$	$ax^2+bx=0$	$x_1=0$ і $x_2=-\frac{b}{a}$
$b=0$ і $c\neq 0$	$ax^2+c=0$	$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$

На другому етапі здійснюється перехід до вивчення повного квадратного рівняння.

Означення 6. **Повним** називається таке квадратне рівняння, у якому жодний з коефіцієнтів a, b, c не дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайдемо корені рівняння $x^2+6x-112=0$. Передусім до виразу x^2+6x додамо та, щоб нічого не змінилося віднімемо 9. Отримаємо, квадрат двочлена $x+3$ та додаткове число 9. Як наслідок $x^2+6x+9-9-$ $-112=0$ еквівалентне $(x+3)^2=121$. Таким чином, $x+3=\pm 11$, звідки $x=8, x=-14$.

Відповідь: $x_1=8, x_2=-14$.

Розглянутий спосіб називається **методом виділення квадрата двочлена**.

Виведемо формулу, використовуючи даний метод, для знаходження коренів рівняння $ax^2+bx+c=0, a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$.

До множимо обидві частини рівняння на $4a$, отримаємо:

$$4a^2x^2+4a^2bx+4ac=0$$

$$(2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2-b^2+4ac=0$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Вираз b^2-4ac називають **дискримінантом** даного квадратного рівняння і позначають буквою D, тоді

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

З цього рівняння виражають невідому змінну і знаходять відповідну формулу. Число коренів квадратного рівняння залежить від знака дискримінанта D (рис. 2.1.).

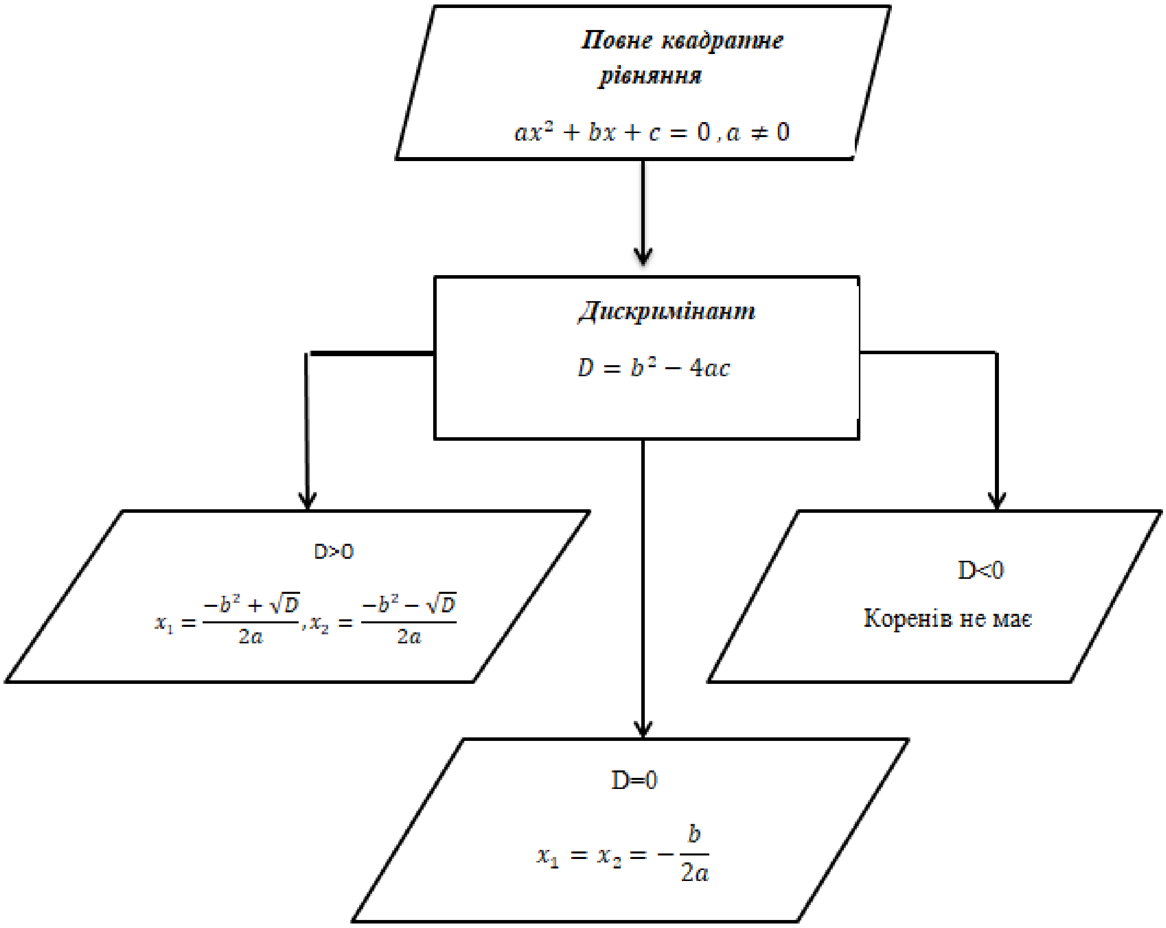


Рис. 2.1. Алгоритм розв'язування повного квадратного рівняння

Приклад 3. Знайдіть значення x, які задовольняють рівняння

$$3x^2 - 2x - 16 = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнти даного рівняння $a = 3, b = -2$, $c = -16$. Тоді дискримінант рівняння буде дорівнювати:

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196.$$

Маємо,

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2, x_2 = \frac{2 + \sqrt{196}}{6} = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Відповідь: -2; $2\frac{2}{3}$.

На третьому етапі розглядаються зведені квадратні рівняння.

Означення 7. Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним** [15, с.143].

Важливим моментом у вивченні квадратних рівнянь є розгляд теореми Вієта, яка стверджує про залежність між коренями і коефіцієнтами наведеного квадратного рівняння.

Теорема Вієта. Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + +c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}$ [15, с.157].

Приклад 4. Знайдіть значення виразів $x_1 + x_2$ та x_1x_2, не розв'язуючи рівняння

$$3x^2 - 15x + 2 = 0.$$

Розв'язання. Перш за все дослідимо дане рівняння.

Знайдемо: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0.$ Таким чином, рівняння має два корені x_1 і x_2.

Тоді застосувавши теорему Вієта, отримаємо:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5,$$

$$x_1x_2 = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: 5 і $\frac{2}{3}$.

Теорема обернена до теореми Вієта. Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння [15, с.158].

У 8 класі вивчаються також біквадратні рівняння.

Означення 8. Алгебраїчне рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c$=0, де $a \neq 0$ є різновидом неповного рівняння четвертого степеня [15, с.172].

Приклад 5. Знайдіть корені рівняння $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Розв'язання. Позначимо $x^2 = t$, тоді $x^4 = t^2$. Підставивши в задане рівняння замість x^2 і x^4, відповідним чином t і t^2, отримаємо квадратне рівняння зі змінною t:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, маємо: $t_1 = 4, t_2 = 9$. Оскільки $t = x^2$, то розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування двох рівнянь:

$$x^2 = 4 \text{ і } x^2 = 9.$$

Звідси $x_1 = -2,\ x_2 = 2, x_3 = -3,\ x_4 = 3$.

Відповідь: $\pm 2; \pm 3$.

2.3 Дробово-раціональні рівняння та нерівності

При розв'язуванні **дробово-раціональних рівнянь**, слід учням продемонструвати кілька можливих способів розв'язування в залежності від теоретичного підґрунтя , на якому базується спосіб.

Перший спосіб зводиться до того, щоб:

1)знайти спільний знаменник дробів, що входять до рівняння;

2)помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник;

3)розв'язати одержане ціле рівняння;

4)виключити ті корені, які перетворюють на нуль спільний знаменник.

Різновидом цього способу є такий, коли всі члени рівняння переносять в ліву частину і одержаний там вираз зводять до дробу виду

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Рівняння $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ розв'язують, скориставшись необхідною і достатньою умовами рівності нулю дробу: дріб дорівнює нулю лише тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. Прирівнюється до нуля чисельник, розв'язується одержане ціле рівняння і зі знайдених коренів виключаються ті, при яких знаменник дорівнює нулю. Такий метод розв'язування дозволяє учням краще зрозуміти необхідність позбутися коренів, які перетворюють знаменник на нуль.

Також можна звести дробове раціональне рівняння до виду

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{q(x)}{\varphi(x)}$$

і використати умову про рівність двох дробів з однаковими знаменниками. Для розв'язання такого рівняння досить прирівняти чисельники, розв'язати одержане рівняння і із знайдених розв'язків виключити ті, за яких знаменник стає таким, що дорівнює нулю.

Нарешті, можна записати дробове рівняння у вигляді

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{q(x)}{\psi(x)}$$

і, скориставшись властивістю пропорції, утворити ціле рівняння

$$f(x)\psi(x) = \varphi(x)q(x).$$

Після його розв'язування треба виключити ті корені, які перетворюють на нуль знаменники $\varphi(x)$ і $\psi(x)$.

Приклад 6. Знайти корені рівняння

$$\frac{-2x-4}{x^2-4} = \frac{x+5}{x-2}.$$

Розв'язання. За методикою переносимо доданки та зводимо до спільного знаменника

$$\frac{x+5}{x-2} + \frac{2x+4}{x^2-4} = 0,$$

$$\frac{(x+5)(x+2)+2x+4}{x^2-4} = 0,$$

$$\frac{x^2+7x+10+2x+4}{x^2-4} = 0,$$

$$\frac{x^2+9x+14}{x^2-4} = 0,$$

$$\begin{cases} x^2+9x+14=0, \\ x^2-4 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2, x=-7, \\ x \neq -2, x \neq 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x = -7$.

Розв'язуючи ***дробові нерівності***, учні допускають найбільше помилок в ході їх перетворенні. Переважаючою з них – відкидання знаменника із заміною, за аналогією з розв'язуванням дробових рівнянь і заміна дробової нерівності на цілу. У зв'язку з цим учнів треба переконати, використовуючи конкретні приклади, що робити цього не можна, і пояснити чому.

Якщо йдеться про алгебраїчні способи розв'язування дробових нерівностей, то доцільно, за аналогією з розв'язуванням дробових рівнянь, рекомендувати учням перетворити нерівність до вигляду

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0$$

або

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0,$$

перенесенням членів нерівності з правої частини в ліву і зведенням одержаного виразу до вигляду дробу.

Далі учень може застосувати один із трьох можливих способів: скористатися умовою додатності (від'ємності) дробу і скласти дві системи нерівностей; застосувати при розв'язуванні метод інтервалів; звести до цілої нерівності, множенням обох частин одержаної нерівності на квадрат знаменника і скористатися методом інтервалів або у випадку одержання нерівності другого степеня розв'язати її графічно.

Приклад 7. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{(x+5)}{(x-2)} \leq 0.$

Розв'язання. Наведена нестрога дробова нерівність, яку можна переписати у вигляді системи:

$$\begin{cases}(x+5)(x-2) \leq 0 \\ x-2 \neq 0 \ \rightarrow x \neq 2\end{cases}.$$

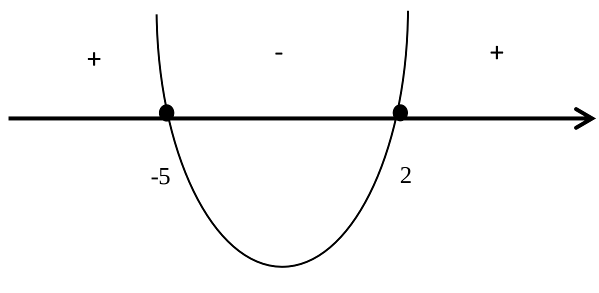


Рис. 2.2.

Для нерівності

$$(x+5)(x-2) \leq 0,$$

відповідне їй рівняння буде мати вигляд:

$$(x+5)(x-2) = 0.$$

З рівняння визначаємо$x_1 = -5, x_2 = 2$ точки і позначаємо їх на числовій осі (рис. 2.2.).

За допомогою підстановки точки (найкраще $x = 0$) визначаємо знак на кожному з проміжків і вибираємо той проміжок, який задовольняє умову завдання. Бачимо, що розв'язком нерівності буде проміжок $[-5; 2)$.

Відповідь: $[-5; 2)$.

2.4 Лінійні нерівності з однією змінною

З поняттям числових нерівностей учні знайомляться раніше. А от лінійні нерівності з однією змінною розглядається в школі лише в 9 класі. Цей клас – основа для вивчення наступних класів нерівностей. Навички і уміння розв'язування нерівностей, за виключенням квадратних, формуються на нижчому рівні ніж для рівнянь,оскільки об'єктивно теорія нерівності є більш складною, ніж теорія рівнянь.

При вивченні лінійних нерівностей з однією змінною рекомендується застосовувати аналогію з лінійними рівняннями.

Ознайомлення з даною темою починається з розкриття змісту поняття лінійної нерівності з однією змінною та загальної схеми розв'язування.

Означення 9. Лінійною нерівністю з однією змінною називають нерівність виду $ax < b$ або $ax > b$ (або $ax \geq b$ або $ax \leq b$), де x - змінна, a і b - сталі.

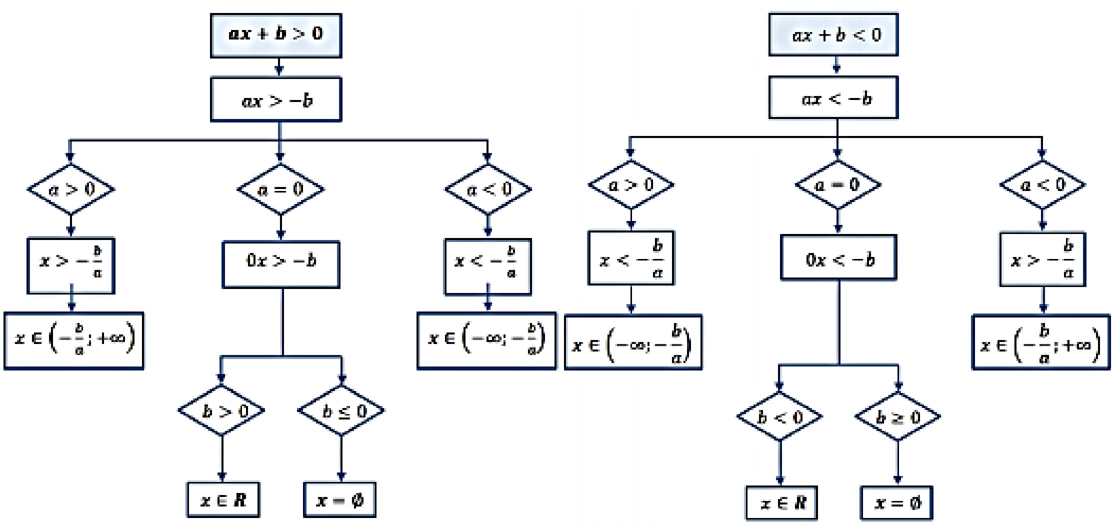


Рис. 2.3. Схема розв'язування лінійних нерівностей

Для формування дослідної та логічної компетентності в учнів на етапі застосування і закріплення знань застосовується прийом створення проблемної ситуації.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $5x + 7 > 3(2x - 5) - x$.

Розв'язання. Насамперед, розкриємо дужки: $5x + 7 > 6x - 15 - x$. Далі доданки з змінною перенесемо в одну сторону, а числа – в іншу:

$$5x - 6x + x > -7 - 15.$$

Звівши подібні доданки, маємо: $0x > -22$.

Ми отримали нерівність, яка рівносильна вихідній. Серед учнів знаходяться ті, які записують, що нерівність не має розв'язків, плутаючи з розв'язанням лінійного рівняння. Однак міркувати слід по іншому. Розв'язком нерівності буде будь-яке число, оскільки нуль завжди більше від'ємного числа (в лівій частині при множенні на нуль незалежно від значення завжди буде нуль).

Таким чином, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

2.5 Нерівності другого степеня

В програмі алгебри 9 класу передбачено вивчення **нерівностей другого степеня** з однією змінною, які взаємопов'язані з графіком квадратичної функції. Дослідження цієї теми починається з формування розуміння учнями змісту поняття "квадратна нерівність" та розрізнення квадратної нерівності між іншими нерівностями з однією змінною.

Означення 10. Квадратними нерівностями називаються нерівності виду

$$f(x) > 0, f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0,$$

де $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.

Перш ніж розв'язувати нерівності загального виду, треба розглянути способи розв'язування нерівностей виду $x^2 < a, x^2 > a$ (відповідно $x^2 \leq a$,

$x^2 \geq a$). При розв'язуванні таких нерівностей учні допускають найбільше помилок. Наприклад, для нерівності $x^2 < 4$ пишуть $x < \pm 2$, а для нерівності $x^2 > 4$ дістають $x > \pm 2$, використовуючи подібність до розв'язування квадратного рівняння $x^2 = 4$, $x = \pm 2$.

Варто розглянути три способи розв'язування, наприклад нерівності $x^2 < 4$.

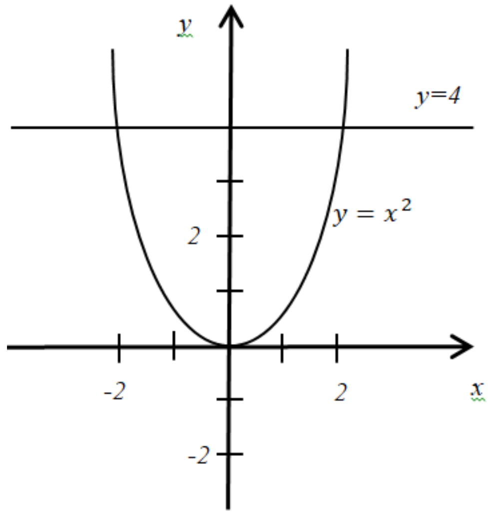


Рис. 2.4.

Графічний спосіб. Дану нерівність задають функції $y = x^2$, $y = 4$. В одній системі координат побудуємо графіки функцій (рис. 2.4.) і знайдемо множину значень x, при яких графік функції $y = x^2$ лежить нижче, ніж графік функції $y = 4$. Як бачимо, цією множиною є проміжок $(-2; 2)$, тобто $-2 < x < 2$. Інший спосіб полягає в тому, щоб побудувати графік функції $y = x^2 - 4$ і визначити ті значення x, при яких графік знаходиться під віссю x.

Метод розкладання на множники. Перенесемо число 4 в ліву частину нерівності і розкладемо її на множники .

Ми отримаємо

$$x^2 - 4 < 0,$$

$$(x-2)(x+2) < 0.$$

Оскільки, добуток двох співмножників від'ємний тоді і тільки тоді, коли їх знаки протилежні, то враховуючи це, маємо дві системи неріностей

$$1)\begin{cases} x-2>0, \\ x+2<0, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x>2, \\ x<-2. \end{cases}$$

Як бачимо, ця система не має спільних розв'язків.

$$2)\begin{cases} x-2<0, \\ x+2>0, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x<2, \\ x>-2. \end{cases}$$

Розв'язками системи є всі x, які належать проміжку $(-2; 2)$, або

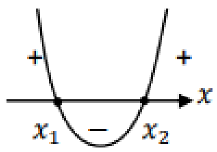
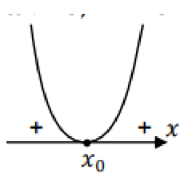
$$-2 < x < 2.$$

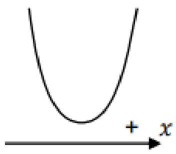
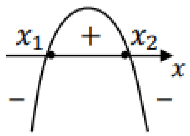
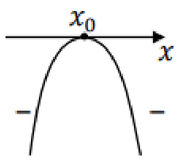
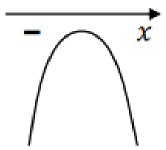
Метод добування арифметичного кореня з обох частин нерівності. У нашому випадку права частина нерівності – додатне число. Тому добувши корінь з обох частин нерівності, матимемо $|x| < 2$. Числа, у яких модуль менший від числа 2, належить проміжку $(-2; 2)$.

З аналізу розглянутих способів видно, що найкоротший з них – останній. Практика свідчить, що учні послуговуючись ним, застосовують тотожність $\sqrt{a^2} = |a|$ і припускаються помилок на зразок $\pm x < 2$.

Розглянувши конкретні приклади доцільно запропонувати учням схему, в якій наведені конкретні випадки розташування графіка квадратичної функції відносно осі *Ox* та розв’язки відповідних квадратних нерівностей. Подана таблиця (табл. 2.4) допомагає краще засвоїти та закріпити знання з теми, яка вивчається.

Таблиця 2.4 Випадки розташування графіка квадратичної функції відносно осі Ох та розв’язки відповідних квадратних нерівностей

Схема	**Квадратна нерівність** $(f(x) = ax^2 + bx + c)$			
	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) \leq 0$
$a > 0, D > 0$ 	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
$a > 0, D = 0$ 	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	x_0

$a > 0, D < 0$ 	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$
$a < 0, D > 0$ 	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$a < 0, D = 0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	x_0	$(-\infty; +\infty)$
$a < 0, D < 0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$

Нерівності **виду** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c} < 0$ **і** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c} > 0$, $a \neq 0$, доцільніше розв'язувати графічно. Поділимо дані рівняння на a, ($a > 0$):

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0 \text{ і } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0.$$

Застосувавши теорему Вієта, знайдемо корені квадратного тричлена. Запишемо відповідні нерівності $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ і $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Їх можна розв'язати одним із трьох способів:

1) зобразити графік квадратного тричлена і визначити ті значення x, при яких виконується задана нерівність;

2) застосувати метод інтервалів;

3) застосувати умови від'ємності або додатності добутку двох співмножників.

Приклад 8. Розв'яжіть нерівність $2x^2 - x - 1 \geq 0$.

Розв'язання. Для квадратного тричлена $2x^2 - x - 1$ маємо: $a = 2 > 0,\ D = 9 > 0$.

Розв'яжемо рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$.

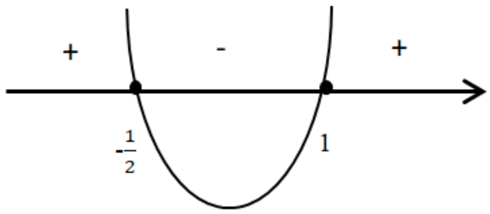


Рис. 2.5.

Отримаємо $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$. Зобразимо графік функції $y = 2x^2 - x - 1$.

Із рис. 2.5 видно, що відповідна квадратична функція виконується на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ і $(1; \infty)$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$.

2.6 Системи рівнянь і нерівностей

Значення систем рівнянь і нерівностей полягає у тому, щоб не затрачати багато зусиль до розв'язування різноманітних задач, в той же час як при розв'язуванні задач за допомогою рівнянь (нерівностей) все навпаки. Для розв'язування цих систем застосовуються традиційні прийоми. В більшості випадків це метод послідовного виключення змінних, використання підстановок для спрощення системи. Вибір способу розв'язування залежить насамперед від постановки задачі.

Системи рівнянь розв'язуються протягом всього курсу математики в школі, починаючи з 7 класу.

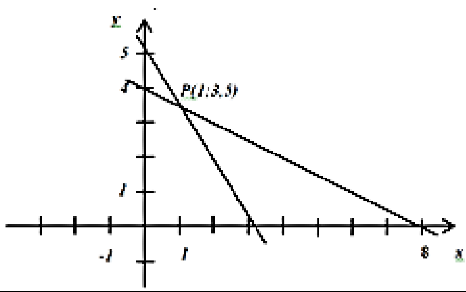
У 7 класі вводиться поняття системи рівнянь з двома невідомими. Починати вивчення даної теми потрібно з розв'язування текстової задачі, для розв'язування, якої необхідно скласти систему рівняння з двома невідомими. Для того, щоб дати відповідь на задачу потрібно знайти такі два значення невідомих, які перетворюють на правильну числову рівність кожне з рівнянь. Визначення системи не вводиться, але в поясненнях до прикладу говорять про те, що результати, отримані під час розв'язування задачі рівняння, утворюють систему рівнянь, яка позначається фігурними дужками.

Означення 11. *Розв'язком системи рівнянь* називають такий набір значень невідомих, який задовольняє кожне з рівнянь системи.

Спочатку вводиться графічний метод розв'язування системрівнянь, для того, щоб геометрично пояснити розв'язки кожного з рівнянь системи.

Даний матеріал краще сприймається учнями, коли головні аспекти **графічного методу** формулюють під час практичного застосування (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

Алгоритм графічного методу розв'язування систем рівнянь	***Приклад*** $\begin{cases} \mathbf{3x+2y=10} \\ \mathbf{x+2y=8} \end{cases}$
1.Виразіть у через x.	$\begin{cases} y = 5 - \frac{3}{2}x \\ y = 4 - \frac{1}{2}x \end{cases}$
2.Побудуйте на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи.	
3.Знайдіть координати всіх точок перетину побудованих графіків.	Для даної системи точка P має абсцису 1 і ординату 3,5.
4.Запишіть відповідь: $x = \cdots$; $y = \cdots$, або $(x; y)$	$(1; 3{,}5)$

Зрозуміло, що так можна розв'язувати системи лише наближено. Щоб переконатися, чи правильно знайдено розв'язок, треба підставити його в дану систему і виконати перевірку.

Для того, щоб розв'язати систему рівнянь з двома невідомими застосовують ще один спосіб. Він називається **методом підстановки** (табл. 2.6). Основна суть **методу підстановки** полягає в тому, що в одному з рівнянь системи (не важливо якому) одна невідома виражається через іншу. Після цього в друге рівняння системи, замість відповідної невідомої, підставляється вираз (отриманий на попередньому кроці), якому відповідає ця невідома.

Таблиця 2.6

Алгоритм	***Приклад*** $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$
1.Виразіть з якого-небудь одного рівняння системи одну змінну через іншу	1.Виразимо з першого рівняння y: $y = 2x - 8$
2.Підставте в інше рівняння системи замість цієї змінної здобутий вираз	2. Підставимо в друге рівняння системи замість змінної y вираз $2x - 8$: $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + 2(2x - 8) = 5 \end{cases}$
3.Розв'яжіть здобуте рівняння з однією змінною	3.Розв'яжемо рівняння: $3x + 2(2x - 8) = 5;$ $3x + 4x - 16 = 5;$ $7x = 21;$ $x = 3$
4.Знайдіть відповідне значення іншої змінної	4. Знайдемо з рівняння $y = 2x - 8$ значення y при $x = 3$: $y = 2 \cdot 3 - 8 = -2$
5.Запишіть відповідь	Відповідь: $(3; -2)$

Метод додавання полягає в тому, що рівняння системи множать на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами. Тоді, почастинно додавши ці рівняння, отримують алгебраїчне рівняння з однією змінною (табл.2.7).

Таблиця 2.7

Алгоритм	Приклад $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 4x + 5y = 5 \end{cases}$
1. Помножте за необхідності, обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами	В цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами
2. Додайте почленно рівняння системи	$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5$
3. Розв'яжіть одержане рівняння з однією змінною	$6x = 12;$ $x = 2$
4. Підставте знайдене значення змінної в одне з рівнянь даної системи і знайдіть відповідне їй значення іншої змінної	$2 \cdot 2 - 5y = 7;$ $-5y = 3;$ $y = -0{,}6.$
5. Запишіть відповідь	$(2; -0{,}6)$

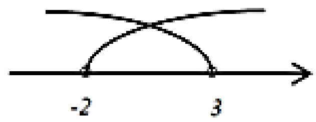
В різних задачах можуть бути відразу декілька умов або обмежень, при чому всі умови повинні виконуватися одночасно. Для цього і застосовуються у розв'язуванні таких задач системи нерівностей.

Учні вперше вивчають системи нерівностей з однією невідомою в 9 класі. Оскільки "системи нерівностей" – це неозначуване поняття, то його зміст розкривається через опис, показ, характеристику. Проте формулюється означення розв'язку системи нерівностей.

Означення 12. Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює кожну нерівність системи в правильну числову нерівність [16 ,с.42].

Означення 13. Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі його розв'язки або довести, що розв'язків немає [16, с.42].

Таблиця 2.8

Алгоритм розв'язання систем лінійних нерівностей	**Приклад** $\begin{cases} 3x - 1 > -7 \\ 3 - 4x > -9 \end{cases}$
1. Кожну з нерівностей системи розв'яжіть, користуючись алгоритмом розв'язування лінійної нерівності	$\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases} \begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$
2. Зобразіть на координатній прямій розв'язок кожної нерівності	
3. Знайдіть переріз числових проміжків	За допомогою координатної прямої знайдемо переріз множин розв'язків нерівностей даної системи, тобто переріз проміжків $(-\infty; 3)$ і $(-2; +\infty)$
4.Запишіть відповідь	Відповідь: $(-2; 3)$

У 9 класі програмою передбачено вивчення учнями систем, які містять рівняння другого степеня. Проте в підручниках наводиться тільки алгебраїчний метод їх розв'язування, хоча деякі системи можна і потрібно розв'язувати тільки графічним методом.

Тому в процесі навчання розв'язування вказаних систем рівнянь доцільно розглядати паралельно і графічний і, алгебраїчний методи розв'язання, порівнювати і обирати з них раціональніший. Для того, щоб розв'язати системи алгебраїчним або графічним методами використовують алгоритм аналогічний алгоритму розв'язання систем рівнянь з двома невідомими.

Приклад 9. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. **І. Алгебраїчний метод (спосіб підстановки)**

1. Насамперед, виразимо yіз другого рівняння системи:

$$y = x - 2.$$

2. В перше рівняння системи підставимо знайдений вираз замість y:

$$x^2 - (x - 2) = 8.$$

3. Знайдемо корені отриманого рівняння:

$$x^2 - x + 2 = 8,$$

$$x^2 - x - 6 = 0, \text{звідки } x_1 = 3, x_2 = -2.$$

4. Обчислимо значення $y = x - 2$, де

$$x_1 = 3, x_2 = -2:$$

$$y_1 = 3 - 2 = 1, y_2 = -2 - 2 = -4.$$

Відповідь: (3;1), (-2;-4).

II. Графічний метод

1. Із кожного рівняння системи виразимо yчерезx:

$$\begin{cases} y = x^2 - 8, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

2. Побудуємо в одній системі координат графіки першого і другого рівняння системи (рис. 2.6.). Графіком першого рівняння є парабола, а другого – пряма. Для побудови параболи знайдемо координати її вершини – це точка (0;-8), і координати точок перетину з віссю абсцис, для цього розв'яжемо рівняння: $x^2 - 8 = 0$, звідки $x_1 = -2\sqrt{2}, x_2 = 2\sqrt{2}$. Віссю симетрії параболи є вісь ординат.

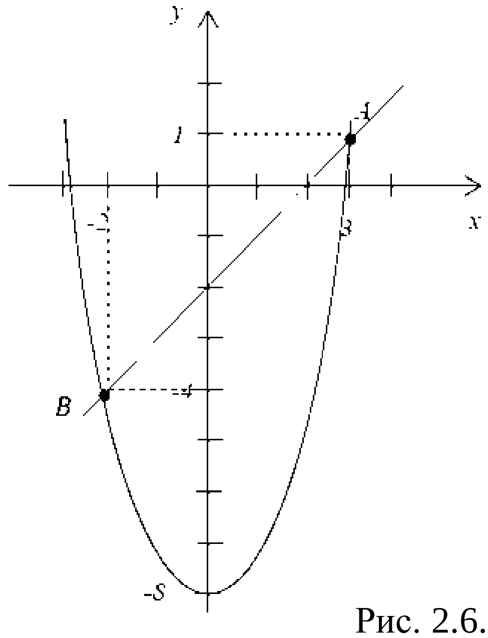


Рис. 2.6.

РОЗДІЛ 3. СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ТЕКСОВИХ ЗАДАЧ

У навчанні математики задачі займають важливе і різнобічне значення. Розв'язуючи математичну задачу, людина дізнається багато нового: знайомиться з новою ситуацією, описаною в завданні, із застосуванням математичної теорії до її розв'язання, пізнає новий метод або вивчає нові теоретичні розділи математики. Тобто, при розв'язуванні математичних задач людина набуває математичної компетентності. Основне завдання сучасного вчителя математики не створення у учнів механічних знань, умінь і навичок, а вміння їх застосувати в нестандартних ситуаціях.

Навчання учнів розв'язуванню текстових задач методом рівнянь або систем рівнянь займає в курсі алгебри досить велике місце. Значення цих завдань в тому, що це – найпростіша, але досить чітка модель застосування математики до вивчення дійсності. У ній містяться три характерних для будь-яких випадків використання математичних моделей моменти: переклад реального завдання на математичну мову, дослідження моделі і зіставлення результату з вихідним завданням. Проте на конкурсних іспитах, особливо в останні роки, трапляються такі завдання, які за допомогою одних тільки рівнянь розв'язати не можна. Це так звані задачі з невизначеною умовою (насправді ця невизначеність тільки здається). Для їх розв'язування необхідно використовувати не тільки рівняння, а й нерівності, системи нерівностей, а іноді і деякі додаткові умови, явно не зазначені в завданні. У багатьох текстових завданнях однозначний розв'язок можна знайти тільки в тому випадку, якщо врахувати нерівності, що випливають з умов. У ряді завдань тільки за допомогою нерівностей вдається отримати додаткові співвідношення і тим самим знайти розв'язок. Отже, існують текстові завдання, розраховані на вміння складати не тільки рівняння, а й нерівності, і за допомогою їх отримувати відповіді на поставлені в задачах питання.

Етапи розв'язування текстових задач включають:

1) розбір тексту задачі;

2) пояснення тексту мовою математики;

3) встановити взаємозв'язок між даними і питанням;

4) розробка плану розв'язування задачі;

5) реалізація плану;

6) перевірка та оцінка розв'язування задачі.

Умовний поділ текстових задач, які вивчаються у школі: задачі "на рух", задачі "на роботу", задачі на суміші та сплави, задачі з цілочисельними значеннями, задачі "на відсотки". Для кожного виду задач існує своя специфіка розв'язання: формули, які використовуються; оформлення короткого запису задач; вибір невідомих. Спосіб заснований на використанні рівнянь і нерівностей при розв'язування задач називається алгебраїчним.Цим способом користуються вже учні з 5 класу. Розкриємо методику навчання розв'язання текстових завдань алгебраїчним способом на конкретних прикладах.

Завдання 1. За планом бригада повинна виконати замовлення за 10 днів. Але фактично вона перевиконувала норму на 27 деталей в день і за 7 днів роботи не тільки виконала передбачене планом завдання, а виготовила понад план 54 деталі. Скільки деталей в день повинна була виготовити бригада за планом?

Аналіз тексту завдання. Після прочитання тексту завдання аналіз може бути проведений за допомогою розгляду наступних питань (самими учнями або за допомогою вчителя):

1. За скільки днів бригада повинна виконати замовлення за планом?
2. За скільки днів бригада фактично виконала замовлення?
3. Скільки деталей виготовила бригада понад план?
4. Які величини містяться в задачі?

5. Як пов'язані між собою продуктивність праці, час і обсяг виконаної роботи? (Учитель може конкретизувати це питання, виходячи з можливостей учнів.)
6. Скільки різних ситуацій можна виділити в задачі?
7. Які величини, що входять в умову і питання завдання, невідомі?
8. Яка величина в задачі є шуканою?

В результаті першого етапу роботи над завданням виконується аналіз і запис тексту завдання. Таблична форма запису на перших етапах навчання розв’язування текстових завдань найбільш ефективна, тому що вміння учня оформити відповідну таблицю 3.1 говорить про те, зрозумів він завдання чи ні. Зауважимо, що існують і інші форми запису.

Таблиця 3.1

Величини	Ситуація	
	По плану	Фактично
Продуктивність бригади, дет.в день	? < На 27	?
Час роботи, (дн)	10	7
Об’єм виконаної роботи, (дет.)	? <На 54	?

Для з'ясування зв'язку між значеннями однієї і тієї ж величини перед учнями ставляться відповідні питання, наприклад:

1. В якому випадку продуктивність праці бригади була вище?

2. На скільки деталей в день бригада перевиконувала норму?

Правильна відповідь на перше питання дозволяє поставити в таблиці відповідний знак нерівності між невідомими значеннями однойменної величини. Відповідь на друге питання дозволяє записати: «На 27» (в зазначеному в таблиці місці). Отриманий запис дозволяє дійти висновку: продуктивність бригади, передбачена планом, на 27 деталей в день менше фактичної.

Пошук способу розв’язування задачі. На цьому етапі обговорюється стратегія розв’язування задачі. Потім вводиться позначення шуканої або іншої невідомої величини в залежності від обраної учителем разом з учнями стратегії. Далі, користуючись встановленими залежностями між значеннями однойменних величин і основним завданням (тобто залежністю між величинами), на основі табличного запису тексту завдання заповнюється таблиця 3.2 пошуку розв'язку задачі:

Таблиця 3.2

Величини	Ситуація		
	По плану		Фактично
Продуктивність бригади, дет.в день	x	< На 27	$x + 27$
Час роботи, (дн)	10		7
Об'єм виконаної роботи, (дет.)	$10x$	<На 54	$(x + 27) \cdot 7$

Виходячи з моделі пошуку розв'язку, записується нерівність

$$10x < (x + 27) \cdot 7$$

на 54, за допомогою якого складається рівняння

$$10x + 54 = (x + 27) \cdot 7 \text{ або } 10x = (x + 27) \cdot 7 - 54.$$

Здійснення плану. Звідси природно випливає план розв'язання задачі, який включає в себе пошук розв'язання (спосіб отримання рівняння) і розв'язку отриманого рівняння. Зауважимо, що таблична форма запису діяльності учнів зі складання рівняння не вимагає повторного її опису. Тому на третьому етапі залишається розв'язати отримане рівняння, виконати перевірку і записати відповідь.

Маємо рівняння: $10x + 54 = (x + 27) \cdot 7$. Розв'яжемо його:

$$10x + 54 = 7x + 189,$$

$$3x = 135,$$

$$x = 45.$$

Дане рівняння має один корінь – число 45. Але розв'язання задачі не може закінчуватися розв'язком рівняння, необхідно перевірити, чи задовольняє отриманий корінь рівняння, умови і вимогу завдання. У зв'язку з цим необхідно зробити перевірку кореня рівняння за змістом завдання. Перевірка полягає в тому, що по знайденому значенню x по порядку обчислюються значення, які входять до завдання. При цьому перевіряється, чи задовольняють ці величини умови. Якщо всі знайдені значення величин їм задовольняють, то корінь рівняння є розв'язком задачі. З цією метою скористаємося моделлю пошуку розв'язку задачі. За змістом даного завдання всі вхідні в неї величини повинні приймати позитивні значення. Перевіримо, чи виконується це для знайденого значення $x = 45$:

$x = 45$ Додатне число.

$x + 27 = 45 + 27 = 72$ Додатне число.

$(x + 27) \cdot 7 = 72 \cdot 7 = 504$ Додатне число.

$10x = 10 \cdot 45 = 450$ Додатне число.

$504 - 450 = 54$ Додатне число,яке задане.

Отже, значення $x = 45$ задовольняє умову завдання, тобто є її розв'язком. **Відповідь**: бригада повинна виготовити в день за планом 45 деталей.

Для того, щоб навчитись розв'язувати текстові задачі, потрібно набути досвіду їх розв'язання, шляхом багаторазового повторення операцій, дій, які складають предмет вивчення. Навички розв'язку текстових задач формуються на основі значущих знань і умінь, тому починати розв'язування текстової задачі необхідно зі створення математичної моделі умови задачі. Знання умовного поділу текстових задач значно може спростити пошуки правильного ходу розв'язку задачі.

РОЗДІЛ 4. ХАРАКТЕРНІ ТРУДНОЩІ УЧНІВ І ШЛЯХИ ЇХ ПОДОЛАННЯ ПРИ ВИВЧЕННІ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

“Помилятися корисно, так як в процесі виправлення помилок відбувається закріплення знань та їх розширення”, – говорить народна мудрість.

Проте для того, щоб вчитися на негативному досвіді, насамперед, потрібно відшукати помилку. Зазвичай, учень здатний її знайти під час вирішення того чи іншого завдання. Унаслідок чого необхідно визначити типові помилки учнів та шляхи їх усунення, наголошення на яких вчителем сприятиме підвищенню рівня якості навчання.

Помилки, допущені учнями при розв’язуванні рівнянь і нерівностей, найрізноманітніші: від неправильного оформлення розв’язку до помилок логічного характеру.

Поширена помилка учнів полягає в тому, що при розв’язуванні рівнянь і нерівностей використовують перетворення, які порушують рівносильність, цим самим призводять до втрати коренів та появи сторонніх коренів.

Розглянемо найпростіше ірраціональне рівняння:

$$\sqrt{2x+10} = \sqrt{x-5}.$$

Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрату. Отримаємо:

$$2x + 10 = x - 5,$$

$$x = -15.$$

Підставивши $x = -15$ у вихідне рівняння одержимо рівність, яка не має змісту. В такому випадку, кажуть, що $x = -15$ – сторонній корінь.

Весь набір помилок або навіть недоліків, полягає в тому, що учні не приділяють належної уваги знаходженню області визначення рівнянь, хоча саме вона в більшості випадків є ключем до розв’язку. Підґрунтям до допущення помилок в учнів є те, що вони не володіють необхідними знаннями, а саме: визначеннями понять, формулами, теоремами, алгоритмами. Багато помилок, яких припускаються при розв’язуванні рівнянь і нерівностей, є наслідком того, що учні дуже часто намагаються вирішувати завдання по шаблону.

Умовно можна класифікувати помилки учнів відповідно до типів завдань, які розглядаються в основній школі.

При вивченні квадратних нерівностей (рівнянь) та їх систем найчастіше учні допускають таких помилок:

1. Неправильно визначені коефіцієнти квадратного трьохчлена;

$$x^2 - 2x - 3 = 0, \qquad a = 1, b = 2, c = 3;$$
$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8.$$

Правильно:

$$x^2 - 2x - 3 = 0, \qquad a = 1, b = -2, c = -3;$$
$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16.$$

2. Неправильно застосована теорема Вієта:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}.$$

Правильно:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Зауваження: в даному випадку коефіцієнт при x^2 дорівнює 1, тому потрібно застосовувати теорему Вієта для незведеного квадратного рівняння.

3. Неправильно зображено графік квадратного трьохчлена (рис. 4.1):

$$-x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

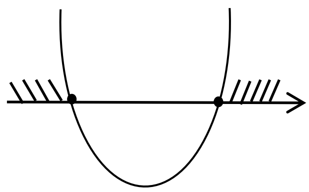


Рис. 4.1.

Зауваження: при побудові графіка квадратного трьохчлена потрібно дивитися на коефіцієнт при x^2, якщо він від'ємний, то вітки параболи направлені вниз, якщо додатній – вгору.

4. Ділення на вираз, який містить невідому величину:

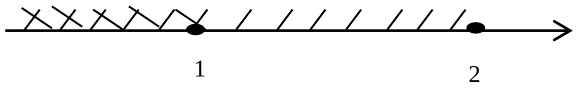
$$x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2.$$

Правильно:

$$x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

5. В системах нерівностей неправильно взято перетин розв'язків всіх нерівностей:

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}.$$



Відповідь: $x \in (-\infty; 2]$.

Зауваження: для того, щоб знайти розв'язок системи нерівностей необхідно на числовій прямій зобразити множини розв'язків кожної нерівності та знайти переріз отриманих проміжків. В даному випадку розв'язком даної системи буде проміжок $x \in (-\infty; 1]$:

6. Неправильно включені або невключені кінці інтервалів у відповідь:

$$x^2 - 5x > 0 \Rightarrow x(x-5) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [5; +\infty).$$

Правильно:

$$x^2 - 5x > 0 \Rightarrow x(x-5) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (5; +\infty).$$

Серед типових помилок при розв'язуванні дробово-раціональних рівнянь та нерівностей можна виділити наступні:

– Неправильно вказано або не вказано область допустимих значень:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = 0 \Rightarrow \text{ОДЗ}: x \in R.$$

Правильно:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = 0 \Rightarrow \text{ОДЗ}: \{\, x \in R: x \neq \pm 1\}.$$

– При отриманні відповіді не враховується область допустимих значень:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = 0 \Rightarrow \text{ОДЗ}: x \neq 1, x \neq -1.$$

Відповідь: $x = 1$.

Правильно:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = 0$$

Відповідь: $x \in \emptyset$.

– Нераціональність до приведення до спільного знаменника:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x(x^2-1)(x+1) - (3x+1)(x-1)(x+1) - 3(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x^2-1)(x+1)} = 0.$$

Правильно:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x(x+1) - (3x+1) - 3(x-1)}{(x^2-1)} = 0.$$

– Ділення на вираз, який містить невідому величину:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{(x^2-1)(x^2-2x+1)}{(x-1)(x^2-1)(x+1)} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0 \ \Rightarrow x = 1.$$

– Не врахована кратність кореня:

$$(x-2)^2 > 0 \ \Rightarrow x \in (2; +\infty).$$

Правильно:

$$(x-2)^2 > 0 \ \Rightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty).$$

Найчастіше труднощі у школярів з’являються саме під час розв’язування текстових задач. Серед яких:

- неправильно введені невідомі величини;
- складено рівняння (нерівність), яке пов’язує відомі величини з невідомими, не задовільняючи умовам задачі;

- при розв’язуванні отриманих рівнянь (нерівностей) допущені помилки;
- відібрані розв’язки не відповідають змісту задачі;
- неправильно застосовані формули середньої швидкості, шляху і т.д.;
- неправильно виконані перетворення з одиницями вимірювання.

Появу більшості помилок знижує доведення деяких обчислювальний операцій до автоматизму.

Для виконання навчального процесу необхідно використовувати спеціальну модель, яка використовує техніку для активізації рефлексивної діяльності учнів для запобігання та виправлення помилок, обумовлених формальними правилами навчання.

Свідомий аналіз помилок та власних дій з вирішення конкретного завдання визначає самостійна робота учнів, яка сприяє якості знань та розвитку логічного мислення.

Для того, щоб виправити і запобігти багатьом помилкам, важливо виховувати в учнів здатність до самоконтролю. Виробленню навичок самоконтролю допомагає і прийом наближеної оцінки очікуваного результату.

Ці навички складаються з двох частин:

а) вміння знайти помилку;

б) вміння її пояснити і виправити.

У процесі навчання використовуються кілька прийомів самоконтролю, які допомагають виявити помилки та вчасно їх виправити. До них належать:

- перевірка обчислення та тотожного перетворення шляхом виконання оберненої дії або перетворення;
- перевірка правильності вирішення завдань шляхом складання і розв’язування задач, обернених до даної;
- оцінка результату розв’язку задачі з точки зору здорового глузду;
- перевірка графічно аналітичного розв’язку.

Для того, щоб звести помилки до мінімуму потрібно:

- щоб тексти письмових завдань були розумно структуровані та легкими для читання;
- постійно проводити розбір типових помилок;
- підбирати цікаві завдання, які формують стійку увагу;
- якісному засвоєнню знань сприяють чіткі алгоритмічні правила.

А також при поясненні нового матеріалу необхідно акцентувати увагу на кожному елементі формули, підбирати систему завдань на відпрацювання правильного засвоєння поняття, виконання яких дозволить звести помилковість до мінімуму.

Для кожного учителя основним помічником у ліквідації прогалин, а, отже, і помилок є планомірне і систематичне повторення всього теоретичного і практичного матеріалу. В математиці, як ні в якій іншій науці, взаємозв'язок між матеріалами особливо сильний. Вивчення і розуміння нового неможливо без знання попереднього, тому обов'язково потрібно здійснювати повторення на кожному уроці. При поясненні нового матеріалу слід використовувати ряд досліджених раніше визначень та теорем.

ВИСНОВКИ

Головною метою бакалаврської роботи було дослідження та розробка методичної системи вивчення рівнянь та нерівностей у курсі математики основної школи як одного із засобів формування в учнів предметних математичних компетентностей. У результаті виконання роботи мета і поставлені завдання повністю реалізовані.

При виконанні роботи "Розв'язування рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики загальноосвітньої школи" було здійснено пошук інформації за тематикою бакалаврської роботи та проведено її аналіз з використанням інформаційних джерел (довідкова література, методичні рекомендації, матеріали Інтернет-ресурсів). Проаналізовано програму вивчення рівнянь та нерівностей у курсі математики основної школи, теоретичний матеріал проілюстрований значною кількістю практичних завдань, розроблена контрольна робота з теми «Квадратні рівняння. Теорема Вієта», яку можна використовувати на етапі закріплення та оцінювання знань і вмінь учнів. Підготовлений також план-конспект уроку на тему «Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння».

У роботі було розглянуто:

- науково-теоретичні основи вивчення рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики, а саме: різні шляхи підходу до визначення понять рівняння і нерівності зі змінними; роль рівнянь і нерівностей в шкільному курсі математики, їх пропедевтичне вивчення; поняття слідування одного рівняння або нерівності з іншого та рівносильності рівнянь і нерівностей;
- методику вивчення рівнянь і нерівностей у 7-9 класах, зокрема: лінійні рівняння з однією та двома змінними; квадратні рівняння; рівняння, що зводяться до квадратних; дробово-раціональні рівняння та нерівності; лінійні нерівності з однією змінною; нерівності другого степеня; системи рівнянь і нерівностей;
- складання рівнянь і нерівностей при розв'язуванні текстових задач;

- характерні труднощі учнів і шляхи їх подолання при вивченні рівнянь та нерівностей.

Матеріал даної бакалаврської роботи має як теоретичну, так і практичну цінність. Він може бути використаний для систематизації, поглиблення і розширення знань, навичок та умінь учнів з шкільного курсу математики, а також знайде своє застосування у вищих навчальних закладах при вивченні навчальної дисципліни «Методика навчання математики» і може слугувати підготовчим матеріалом до державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бантова М. А., Бельтюкова Т. В. Методика викладання математики. Київ : Генеза, 2008. 335 с.

2. Бевз Г. П. Методика навчання математики: Навчальний посібник для інститутів. Київ : Вища школа, 1989. 367 с.

3. Белешко Д. Т., Віннічук М. А., Крайчук О. В. Методика розв’язування нестандартних математичних задач. Частина 1. Херсон : Вид.група "Основа", 2017. 127 с.

4. Белешко Д. Т. Віннічук М. А., Крайчук О.В. Методика розв’язування нестандартних математичних задач. Частина 2. Херсон : Вид.група "Основа", 2017. 78 с.

5. Гаврин І. Ф. Квадратні рівняння. *Математика в школах України.* 2009 р. № 8. С.16-21.

6. Галицький М. Л. "Збірник задач з алгебри". Москва, 2002.

7. Затула Н. І., Зуб А. Л., Коберник Г. І. Математика : Навчальний посібник. Київ : Кондор, 2006. 560 с.

8. Зимова І. В., Зайцева Л. І. Формування елементарної математичної компетентності. Київ : МП «Око», 2005. 215 с.

9. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 7-го кл.загальноосвітн. нав. закл. Київ : Генеза, 2015. 256 с.

10. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8-гокл. загальноосвіт. навч. закл.– Київ : Генеза, 2016. 272 с.

11. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл.Київ : Генеза, 2017. 264 с.

12. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Петюренко А. Формування творчого мислення учнів при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. *Математика в школі*, 2005, №5. 40 с.

13. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Ріжняк Р. Я. Рівносильні перетворення рівнянь та нерівностей: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фі-

зико-математичної школи. Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. 52 с.

14. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Херсон : Гімназія, 2015. 256 с.

15. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Херсон : Гімназія, 2016. 240 с.

16. Мерзляк А. Г.,Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Херсон : Гімназія, 2017. 272 с.

17. Моторіна В. Г. Технології навчання математики в сучасній школі. Харків, 2001. 262 с.

18. Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів. – URL : https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednyaosvita/navchalniprogra-mi/nav-chal-ni-programi-5-9-klas. (дата звернення: 25.03.2021).

19. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за ред. В.О. Швеця. Київ : Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2012. 267 с.

20. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ. Херсон : Факт, 2005.360 с.

21. Слепкань З. І. Методика навчання математики. Підручник для студентів мат. спец. пед. навч. закладів. Київ: Зодіак–ЕКО, 2000. С.216-218.

22. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2006. 240 с.

23. Соловйов В. М.Теорія та методика навчання математики. Кривий Ріг : КДПУ, 2001.370 с.

24. Старова О. О. Алгебра 8 клас. Херсон : вид. група «Основа», 2012. 144 с.

25. Шевчук І. В. Методика вивчення освітньої галузі «Математика»: самостійні роботи до практичних занять. Частина 2: навчальний посібник. Умань: ВПЦ «Візаві», 2019. 166 с.

26. Шевченко С. М., Скубак О. М., Мусієнко А. П. Основи елементарної математики. Навчально-методичний посібник. Київ : ДУТ, 2015. 72 с.

27. Шунда Н. М. Збірник задач з алгебри для 7-9 класів: Навч. посібник. Київ : Техніка, 2003. 416 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Контрольна робота з теми “Квадратні рівняння. Теорема Вієта”

Варіант 1	Варіант 2
*(2 бали)*Знайдіть корені, які задовольняють дані рівняння:	
$x^2 - 5x + 4 = 0;$ $y^2 + 9x = 0;$ $2t^2 - 72 = 0;$ $7z^2 - z - 8 = 0.$	$m^2 - 7m + 6 = 0;$ $x^2 - 6x = 0;$ $6y^2 + y - 7 = 0;$ $5t^2 - 125x = 0.$
*(2 бали)*Розв’яжіть квадратне рівняння:	
$\frac{t^2 + 6t}{6} - \frac{2t + 3}{2} = 12?$	$\frac{t^2 + 10t}{10} - \frac{2t + 5}{2} = 20?$
*(2 бали)*Один із коренів даного рівняння дорівнює 4. Знайдіть другий корінь і число (коефіцієнт) *b:*	
$y^2 - y - b = 0$	$y^2 + by - 8 = 0$
*(3 бали)*Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, якщо корені цього рівняння дорівнюють:	
$\frac{2}{3}$ і -1	$-\frac{1}{5}$ і 2
*(3 бали)*Не розв’язуючи рівняння знайдіть значення виразу:	
$3x^2 - 7x - 11 = 0$ і $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	$2x^2 + 3x - 13 = 0$ і $x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2$

Додаток Б

План-конспект уроку

Тема: Квадратні рівняння (неповні квадратні рівняння та способи їх розв’язування).

Мета:

формувати предметні компетентності: сформувати знання про квадратне рівняння, неповне квадратне рівняння та методи його розв’язування.

формувати ключові компетентності:

математична компетентність: застосовувати обчислювальні навички та вміння у практичних завданнях;

комунікативна компетентність: виробляти в учнів правильну вимову математичних термінів;

інформаційна компетентність: використання інтерактивних методів, інформаційно-комунікаційні технології;

соціальна і громадська компетентності: розв’язання практичної задачі, яка збагачує життєвий досвід;

уміння вчитися впродовж життя: аналізувати та оцінювати результати своєї освітньої діяльності.

Тип уроку: засвоєння нових знань та вмінь.

Обладнання: інтерактивне мультимедійне обладнання, комп’ютерна презентація, підручник (Алгебра 8 клас, Мерзляк А. Г. Херсон : Гімназія , 2016 р.), роздавальний матеріал .

Хід уроку

I. **Організаційний етап.**

II. **Перевірка домашнього завдання.**

III. **Повідомлення теми, мети уроку. Мотивація навчальної діяльності.**

Ви знаєте, що математика посідає у житті кожної людини особливе місце. На думку, Ю. О. Митропольського застосування досягнень математичної науки чим далі, тим частіше можна спостерігати в різних галузях науки, техніки, економіки.

Більшість відкриттів у галузі математики обумовлені необхідністю покращити рівень життя людей. У реальній діяльності люди неодноразово стикаються із задачами, при розв`язанні яких отримуємо рівняння другого степеня.

Задача практичного змісту:

У квартирі проектуються дві кімнати однакової ширини. Довжина першої кімнати в 2 рази більше її ширини, а довжина другої дорівнює *9,5* м. Знайдіть ширину цих кімнат, якщо площа квартири повинна дорівнювати *72,4* м^2.

Розв'язання: нехай ширина кожної з кімнат дорівнює xм. Тоді довжина першої кімнати буде рівна $2x$ м, а її площа – $2x \cdot x$ м^2, а площа другої – $9{,}5 \cdot x$м^2. Згідно умови задачі, маємо:

$$2x^2 + 9{,}5x = 72{,}4, \qquad \text{або } 2x^2 + 9{,}5x - 72{,}4 = 0.$$

Розв'язати дану задачу ми зуміємо, коли будемо знати як називається дане рівняння, які існують його види та способи його розв'язання. Саме цим ми будемо займатися на сьогоднішньому та на наступних уроках. Тоді ви і зможете розв'язати задачу.

IV. Актуалізація опорних знань

Щоб пригадати відомості про рівняння, давайте виконаємо тест «Інтелектуальна розминка». За кожну правильну відповідь ставте на полях своїх зошитів 1 бал.

1. Рівняння – це ...

а) вираз, що містить невідомі числа;

б) вираз, що містить невідомі букви;

<u>в) рівність, що містить невідомі числа, позначені буквами;</u>

г) рівність, що містить невідомі числа.

2. Виберіть серед наведених неправильне твердження:

а) у будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки або розкрити дужки, якщо вони є;

б) обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля;

в) будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний;

г) обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число.

3. Два рівняння називають рівносильними, якщо...

а) кожне з них не має коренів;

б) кожне з них має корінь, що дорівнює нулю;

в) кожне з них має ті ж самі корені;

г) кожне з них має ті ж самі корені або обидва не мають розв'язків.

4. Розв'язати рівняння означає...

а) знайти його корені;

б) звести рівняння до вигляду $ax=b$;

в) знайти його корені або показати, що їх немає;

г) розкрити дужки, звести подібні доданки.

5. Лінійне рівняння – це рівняння виду...

а) $ax = b$;

б) $\frac{a}{x} = b$;

в) $|ax| = b$;

г) $a - bx = c$.

6. Рівняння першого степеня називають рівняння виду $ax=b$, якщо...

а) $a = 0$;

б) $b=0$;

в) $a \neq 0$;

г) $x = 0$.

Налаштування учнів на співпрацю, швидке включення в роботу

Учитель. Навчально-методична література з математики представляє різні визначення квадратних рівнянь.

Серед них можна визначити такі:

«Якщо у рівнянні найвищий показник степеня при невідомому дорівнює двом, то воно називається квадратним».

Це визначення є помилковим, оскільки існують такі рівняння, які не можна назвати квадратними, наприклад:

$$x^2 - \frac{9}{x} = 11.$$

Наведене рівняння можна подати у вигляді

$$\frac{x^3+11x-9}{x}=0.$$

Його найвищий показник – три.

«Рівняння виду $ax^2+bx+c=0,$ де $x-$ змінна, $a,\ b,c-$ деякі числа, при чому $a\neq 0$, називається квадратним».

Якщо слідувати даному визначенню, то $x^2=5x+8,\ x^2-7x+5=$

$=2$ – не квадратні рівняння. У зв'язку з цим формулюємо інше означення.

«Якщо рівняння після перетворень має вид

$$ax^2+bx+c=0,$$

де $x-$ змінна, $a,\ b,c-$ деякі числа, при чому $a\neq 0$, то воно квадратне».

Але це визначення має свої недоліки, оскільки рівняння

$$\frac{11}{x}=\frac{x}{x+5}-\frac{x-7}{x},2x-\sqrt{3x+6}=\frac{4}{5}$$

можна звести до виду $ax^2+bx+c=0$, але вони мають інші назви і квадратними їх називати не можна.

Внаслідок чого існує інше визначення, яке узагальнює певні аспекти з наведених визначень квадратного рівняння, а саме: “ ціле рівняння з одним невідомим, яке після розкриття дужок, перенесення всіх членів у ліву частину і зведення подібних членів набирає вигляду $ax^2+bx+c=0$, де a ≠ ≠0, b, c — довільні числа, називається квадратним рівнянням ”.

V. Засвоєння нових знань

Виконання вправ

Серед наведених рівнянь виберіть квадратні. У квадратних рівняннях назвіть старший і другий коефіцієнти, вільний член.

$$3x^3-4x^2+6x=0;$$

$$x^2+\frac{7}{2}=0;$$

$$-3x^2+3x+7=0;$$

$$1-3{,}16x^2=0;$$

$$-x^2+8x+21=0;$$

$$x(x-1)+7(x-1)=0;$$

$$2x-3+9x^2=0;$$

$$36-x^2=0.$$

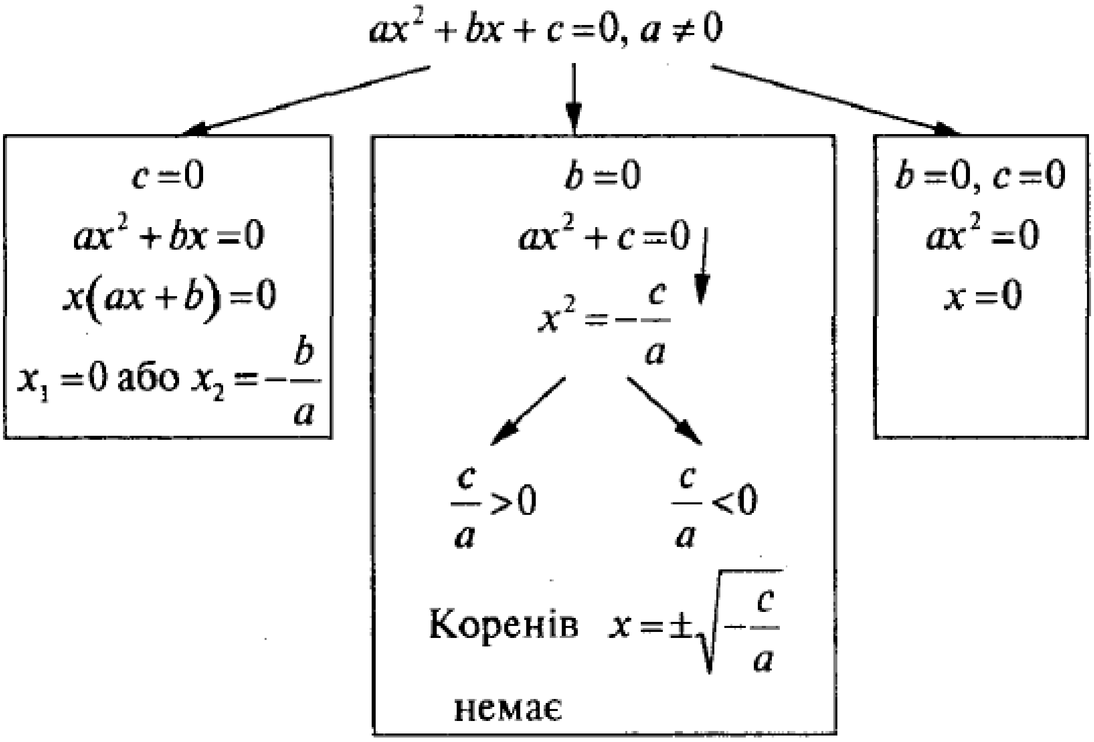
VI. Самостійне вивчення матеріалу

Прийом“Синтез думок”

Учні формують групи. Завдання кожної групи – скласти опорний конспект розв’язування неповних квадратних рівнянь.

Після цього учні обмінюються своїми версіями для доповнення і коригування(здійснюється різними кольорами) створених конспектів.

Опрацьовані таким чином аркуші передаються вчителю, який зіставляє письмовий зміст з власним варіантом, разом обговорюють і складають узагальнюючу схему.



VII. Засвоєння вмінь та навичок

<u>№594 Подайте рівняння у вигляді $ax^2+bx+c=0$, укажіть значення коефіцієнтів a, b, c :</u>

$$6x(3-x)=7-2x^2;$$

$$x(x+1)=(x-3)(7x+2);$$

$$(5x-1)^2=(x+4)(x-2);$$

$$4x(x+8)-(x-6)(x+6)=0.$$

$$\mathbf{1})\ \boldsymbol{6x(3-x)=7-2x^2};$$

$$18x-6x^2=7-2x^2;$$

$$-4x^2+18x-7=0;$$

$$\boldsymbol{a=-4, b=18, c=-7}.$$

2) $\boldsymbol{x(x+1)=(x-3)(7x+2)}$;

$$x^2+x=7x^2+2x-21x-6;$$

$$-6x^2+20x+6=0;$$

$$3x^2-10x-3=0;$$

$$\boldsymbol{a=3, b=-10, c=-3}.$$

3) $\boldsymbol{(5x-1)^2=(x+4)(x-2)}$;

$$25x^2-10x+1=x^2-2x+4x-8;$$

$$24x^2-12x+9=0;$$

$$8x^2-4x+3=0;$$

$$\boldsymbol{a=8, b=-4, c=3}.$$

4) $\boldsymbol{4x(x+8)-(x-6)(x+6)=0}$.

$$4x^2+32x-x^2+36=0;$$

$$3x^2+32x+36=0;$$

$$\boldsymbol{a=3, b=32, c=36.}$$

<u>№ 601 Розв’яжіть рівняння:</u>

1)$5x^2-45=0$;

$$5x^2=45;$$

$$x^2=9;$$

$x=3$ *або* $x=-3$.

В-дь.: $\mathbf{3}\ ;\mathbf{-3}$.

2)$x^2+8x=0$;

$$x(x+8)=0;$$

$x=0$ *або* $x+8=0$;

$$x = 0 \text{ або } x = -8.$$

В-дь.: 0; -8.

3) $2x^2 - 10 = 0$;

$$2x^2 = 10;$$

$$x^2 = 5;$$

$$x = \sqrt{5} \text{ або } x = -\sqrt{5}.$$

В-дь.: $\boldsymbol{\sqrt{5}; -\sqrt{5}}$.

4) $2x^2 - 10x = 0$;

$$2x(x - 5) = 0;$$

$$x = 0 \text{ або } x - 5 = 0;$$

$$x = 0 \text{ або } x = 5.$$

В-дь.: 0 ; 5.

5)$64x^2 - 9 = 0$;

$$64x^2 = 9;$$

$$x^2 = \frac{9}{64};$$

$$x = \frac{3}{8} \text{ або } x = -\frac{3}{8}.$$

В-дь.:$\boldsymbol{\frac{3}{8}; -\frac{3}{8}}$.

6)$x^2 + 16 = 0$;

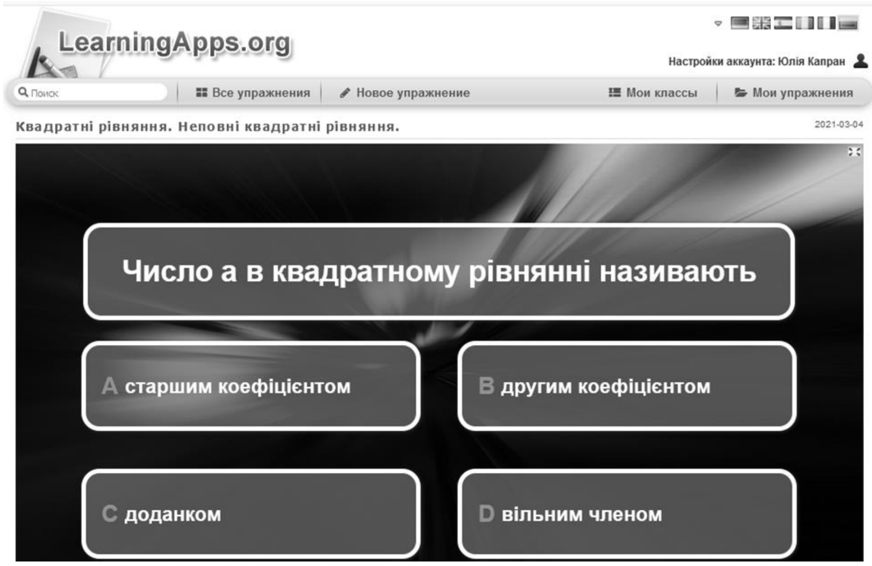
$$x^2 = -16.$$

В-дь.: коренів немає.

VIII. Підсумок урок

1.Гра “Перший мільйонер”(для перевірки засвоєних знань учнів)

Для того, щоб зіграти в гру, потрібно або перейти за відповідним посиланням - **https://learningapps.org/watch?v=pimgp5d1c21**, або відсканувати код за допомогою смартфона.



2.Рефлексія

- Що на сьогоднішньому уроці ви дізналися нового?
- Що вам найбільше сподобалось?
- Що не сподобалось?
- Як ви оцінюєте свою роботу?
- Хто з ваших однокласників був сьогодні найактивнішим?

IX. Домашнє завдання

§18 – опрацювати , № 591, 593, 595 – виконати.