Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота

бакалаврського рівня

на тему:

Методика вивчення теми «Степенева функція»
у загальноосвітній школі

Виконала: студентка IV курсу,

групи МЕІ-41

спеціальності: 014 Середня освіта (Математика)

Куца Ірина Олександрівна

Керівник ______________________________

Рецензент ______________________________

Рівне – 2021

Зміст

Вступ

У роботі розглядаються: основні означення степеневої функції, її властивості, особливості вивчення теми «Степенева функція›› у шкільному курсі математики. **Актуальність теми.** Державна програма ,,Освіта”, Національна доктрина розвитку освіти, Концепція середньої освіти (12 – річна школа) підтверджують, що прогрес сучасного суспільства, потреби України розвиватись у групу найбільш розвинутих країн світу потребують від школи виховання творчої індивідуальності, здатності пристосуватися до динаміки перемін та професійних пріоритетів. Дивлячись на це шкільний курс математики має зосереджуватися на розвитку кращої обізнаності учнів.

Значуща роль у підготовці прийдешніх фахівців належить розвитку умінь створювати та досліджувати різні залежності, зокрема функціональні. Функції дозволяють багатьма випадками розглядати з єдиних позицій теорії та приклади всередині самої математики. Таким чином, пізнавання і вивчення функцій є фундаментальним у курсі математики як з теоретичного, так і прикладного погляду, зокрема при поглибленому вивченні математики в профільних фізико – математичних класах, робота яких спрямовується на виховання майбутньої технічної та наукової еліти. У поданні профільного навчання в старших класах наголошується на доступному пояснені профільної фізико – математичної освіти, яка в теперішніх умовах спрямовується на навчання не лише обдарованих учнів. Звідси ґрунтовне вивчення навчального матеріалу функціональної змістовної лінії потрібне для всіх випускників фізико – математичних класів.

Заразом практика навчання показує, що при вивченні функцій учні доволі часто стикаються з проблемним їх вивченням, роблять помилки під час їх знаходження, використання та дослідження. Проте присутність цих знань та умінь, на думку викладачів математичних кафедр університетів є обов’язково потрібне для хорошого вивчення математики у вищих навчальних закладах. Тому запровадження компетентнісного підходу в навчанні функцій – термінова потреба сьогодення. [11]

Проблема організації вивчення функцій завжди перебувала в центрі уваги педагогічної науки і практики. Концепції змісту навчання функцій, зокрема поглибленого, розробляли математики і методисти О. Д. Александров, П. С. Александров, Н. Я. Віленкін, В. Г. Дорофєєв, Г. М. Карпенко, Т. В. Колесник, А. М. Колмогоров, В. Г. Кузнєцов, О. І. Маркушевич, Ф. Ф. Нагибін, Є.І. Нелін, Т. А. Пєсков, В. І. Севбо, З. І. Слєпкань, С. О. Теляковський, Ф. В. Томашевич, А. Я. Хінчин, Т. М. Хмара, С. І. Шварцбурд, Г. Є. Шилов, М. І. Шкіль, І. М. Яглом та ін. Широке коло питань, пов'язаних з організацією вивчення функцій, досліджено в працях М. М. Білоцького, М. І . Жалдака, Т.В. Крилової, В. Г. Моторіної, В. І. Лагна та ін. Вивченню функцій присвяченій дисертаційні роботи І. В. Антонової (організація роботи вчителя при формуванні поняття функцій в основній школі), І. В. Калашникова (розвиток творчої діяльності учнів у процесі вивчення функцій в основній школі), В. О. Бахтіної (методика навчання диференціального та інтегрального числення при поглибленому вивченні математики), О. Л. Швай (формування функціональних уявленьна міжпредметній основі), С. М. Макишинського (перетворення та симетрії в системі міжпредметних пов'язань математики та фізики), С. Ж. Кєнжалієвої (ідеї математичного аналізу в шкільному курсі математики), С. В. Карпухіної (використання професійних комп'ютерних систем при навчанні учнів елементів математичного аналізу), Н. М. Шунди (формування знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики та фізики). Але відсутні системні дослідження щодо організації проведення компетентнісно орієнтованого навчання функцій у профільних фізико – математичних класах в умовах реформування вітчизняної школи. [11]

Отже, існує протиріччя між вимогами суспільства до математичної підготовки випускників фізико – математичних класів і реальними станом профільної фізико – математичної освіти в її загальноосвітній ланці, необхідність розв'язання якого зумовлює актуальність теми **"Методична система вивчення функцій у класах фізико – математичного профілю".**

Мета дослідження – розробити, науково обгрунтувати методичну систему навчання функцій у класах фізико – математичного профілю, побудовану на засадах компетентнісного підходу в освіті.

Реалізація поставленої мети передбачає аналіз і розв'язування таких **завдань:**

1. Провести аналіз психолого – педагогічну, математичну, методичну літературу з теми дослідження, з'ясувати яка є організація вивчення функцій у загальноосвітніх навчальних закладах фізико – математичного профілю, яка її специфіка та основні етапи і тенденції розвитку;
2. описати теоретичні норми реалізації компетентнісного підходу при вивченні функцій у школах і класах фізико – математичного профілю;
3. науково довести й розробити модель компетентнісно налаштованої методичної системи вивчення функцій у класах фізико – математичного профілю та схвалення щодо запровадження її навчальному процесі;
4. за допомоги експериментів перевірити ефективність розробленої методичної системи;

Об'єкт досліження – процес навчання математики в класах фізико - математичного профілю.

Предмет дослідження – цілі, зміст та організація вивчення функцій в класах фізико - математичного профілю.

Для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань **такі методи дослідження:**

теоретичні – системний і порівняльний аналіз психолого – педагогічної і науково – методичної літератури для виявлення провідних напрямків у математиці, з'ясування цілей та завдань для вивчення функцій при поглибленому вивченні математики. Висвітлення психолого педагогічних основ навчання математики в класах фізико – математичного профілю; аналіз програм, навчальних посібників , підручників для описання основних підходів для вивчення функцій учнями, з’ясувати класифікацію основних задач, пов’язаних з функціями; порівняння, синтез наявних науково – теоретичних положень, що уможливило розробку концептуальних засад поглибленого вивчення функцій у класах фізико – математичного профілю; моделювання педагогічних процесів для оцінки можливості організації навчання в активному й фоновому режимах при вивченні основних питань змістовної лінії функцій; методи математичної статистики, зокрема методи теорії статистичної перевірки гіпотез для обробки результатів педагогічного експерименту;

емпіричні – спостереження, бесіди з учителями, учнями та викладачами вищих навчальних закладів, аналіз письмових робіт учнів, уроків, анкетування, тестування для виявлення помилок і труднощів, що виникають в учнів при вивченні функцій; узагальнення передового педагогічного досвіду; організація і проведення констатувального, пошукового й формувального експериментів для перевірки ефективності розробленої методичної системи.

Розділ 1. Науково – теоретичні основи дослідження степеневої функції

1.1. З історії вивчення функції

Поняття про функції в математиці виникло порівняно недавно. Для того щоб зрозуміти доцільності його введення й отримати перші досить чіткіші означення, були потрібні зусилля відомих математиків декількох поколінь. Великі зміни в математиці, що відбулися в XVII сторіччі, були викликані роботами багатьох вчених, що представляють різні країни і народи. В першу чергу варто назвати імена : П. Ферма (1601 – 1665), Р. Декарта (1596 – 1650), І. Ньютона (1643 – 1727), Г. В. Лейбніца (1646 – 1716).

Передумови які необхідні до виникнення поняття функції створені, були створені в 30-х роках XVII, коли виникла аналітична геометрія, що відзначається, на відміну від класичних методів геометрів Древньої Греції, активним залученням алгебри до рішення геометричних задач. Практично одночасно (і незалежно один від одного) французькі математики П. Ферма і Р. Декарт помітили, що введення системи координат на площини і завдання фігур їхніми рівняннями дозволяють звести багато задач геометрії до дослідження рівнянь геометричних фігур. Декарт, дав розгорнутий виклад нового методу в книгах «Геометрія» і «Міркування про метод», тому прямокутна система координат пізніше була названа на його честь, декартовою. Істотно помітити, що в той же час формувалася й алгебра, створювалося «буквене числення», те саме, за допомогою якого зараз перетворюються алгебраїчні вирази, розв'язуються , текстові за дачі , рівняння і т. п.

Великий англійський учений, фізик, математик І. Ньютон, досліджуючи залежності координат точки, що рухається, від часу, фактично вже займався дослідженням функцій. Хоча не він увів це поняття, Ньютон ясно усвідомлював його значення. Так, у 1676 р. він відзначав: «Я не міг би, звичайно, одержати цих загальних результатів, перш ніж не відвернувся від розгляду фігур і не звів усе просто до дослідження ординат» (тобто фактично функцій від часу).

Сам термін «функція» зустрічається уперше в рукописі великого німецького філософа і математика Г. Лейбніца — спочатку в рукописі (1673 р.), а потім і в друкованому вигляді (1692 р.). Латинське слово function перекладається як «здійснення», «виконання» (дієслово fungor перекладається також словом «виражати»). Лейбніц це поняття увів для назви різних параметрів, зв'язаних з положенням точки на площині. Лейбніц у ході переписування і його учень — швейцарський математик И. Бернуллі (1667—1748) приходять поступово до розуміння функції як аналітичного виразу й дають у 1718р. таке означення: «Функцією змінної величини називається кількість, складена яким завгодно способом з цієї перемінної і постійних».

У своїй книзі «Введення в аналіз» (1748 р.) Л. Ейлер формулював означення функції так: «Функція перемінної кількості є аналітичне вираження, складене яким-небудь способом з цієї перемінної кількості і чисел чи постійних кількостей».

Прийняті зараз позначення для функцій ввів Ейлер. Сучасне означення числової функції, у якому це поняття вже звільнялося від способу завдання, дано було незалежно один від одного німецьким математиком Й. Лежен – Діріхле (1837р.) і російським математиком Н. І. Лобачевским (1834 р.)

В наступному полягала основна ідея цих визначень: не істотно, яким образом (і зокрема, необов'язково шляхом завдання аналітичного вираження) у відповідність визначене значення кожному поставлено, ця відповідність установлена, це тільки важливо.

Власне кажучи сучасне поняття функції з довільними областями значень і означення сформувалося, зовсім недавно, десь у першій половині поточного сторіччя, після робіт творця теорії множин Г. Кантора (1845—1918).

Поняттю функції досить типовий складний і, дуже тривалий шлях розвитку. Для того щоб краще усвідомити необхідність уведення нового абстрактного поняття, потрібно дати означення, яке по можливості точно відбиває його зміст , виділити його в процесі рішення багатьох конкретних задач.

Відштовхуючись від конкретних і важких задач математики і її додатків, математики прийшли до поняття функції. Відбувалося це в процесі створення нового великого апарата досліджень — інтегрального і диференціального числення. Розширило можливості математики відкриття інтегрального і диференціального числення, а центральним поняттям яких Ейлер проголосив функцію («Нескінченного обертається весь аналіз навколо перемінних кількостей і їхніх функцій»).

Після відкриття теорії множини у другій половині XIX ст. до означення функції, крім ідеї відповідності, залучено було ідею множини, а тому сучасне означення функції формулюють так: " Відповідність між множинами х і у, при якій кожному елементу х множина X відповідає певний елемент у множини У, називають функцією".

Подальше розширення поняття функції відбулося у XX ст., викликане потребами фізики. Англійський фізик Поль Дірак (1902 – 1984) у 1930 р. ввів поняття так званої " дельта – функції ", а російський механік математик С. Л. Соболєв (1908 – 1990) у 1936 р. ввів більш широке поняття узагальненої функції, яке охоплює і дельта – функцію.

Отже, поняття функції продовжує розширюватися і розвиватися відповідно до практичних застосувань та потреб розвитку математичної науки.

Весь математичний аналіз і корені якого сягають глибокої давнини, ґрунтується на походженні поняття границі, пов'язане з обчисленням площ криволінійних фігур, об'ємів тіл, обмежених кривими поверхнями. Вперше було використано стародавнім грецьким математиком IV ст. до н.е. Евдоксом Кнідським ідею границі. Так званий " метод вичерпування " це метод Евдокса, його використовували Архімед, Евклід, та інші вчені стародавнього світу.

Англійський математик Джон Вал ліс (1616 – 1703) дав перше означення границі у середині XVII ст.. Ще тоді, в той час не було чіткого розуміння про основні поняття, пов'язані з теорією границь. Але термін " нескінченно мала " вже розуміли як вказівку на розмір величини, а не характер її зміни.

Англійським математиком і механіком Ісааком Ньютоном (1643 – 1727) вперше було введено термін "границя" і відповідний символ lim.

Французький математик Огюстен Луї Коші (1789 – 1857) сформулював у 1823 р. строге означення границі і неперервності функції. Чеський математик Бернард Больцано (1781 – 1848) ще раніше за Коші сформулював означення неперервності функції. Строге обґрунтування основних положень математичного аналізу було здійснене за цим означення на базі теорії дійсних чисел.

Роботи французького юриста та математика П’єра Ферма (1601 – 1665) передували відкриттю похідних і основ диференціального числення, який у 1629р. запропонував проведення дотичних до довільних кривих, що фактично спиралися на застосування похідних та способи знаходження найменших і найбільших значень функцій. Роботи Рене Декарта (1596 – 1650) також сприяли цьому, він розробив основи аналітичної геометрії та метод координат. Теорію диференціального числення лише в 1666 р. побудували Ньютон і дещо пізніше Лейбніц незалежно один від одного. Розв’язуючи задачі про миттєву швидкість Ньютон прийшов до поняття похідної , а Лейбніц, коли розглядав геометричну задачу про проведення дотичної до кривої. Ньютон і Лейбніц досліджували Проблему максимумів і мінімумів функцій досліджували Лейбніц і Ньютон. Зокрема, теорему про достатню умову зростання і спадання функції на відрізку сформував Лейбніц.

Як правильно розрізняти локальний екстремум і найбільші та найменші значення функції на певному відрізку, показав Ейлер в своїй роботі "Диференціальне числення" (1755р.). Для позначення приросту аргументу $\Delta_X = X_2 - X_1$ і приросту функції $\Delta_Y = Y_2 - Y_1$ Ейлер перший почав використовувати грецьку букву Δ.

Французький математик Жозеф Луї Лагранж (1736 – 1813) ввів позначення похідної y' і $f'(x)$.

Поняття інтеграла та інтегральне числення виникли з потреб обчислення об’ємів довільних тіл та площ плоских фігур. Беруть свій початок у роботах стародавніх математиків ідеї інтегрального числення . Нам дано, що Архімед у III ст. до н. е. використав "метод вичерпування" Евдокса. Суть цього методу полягала в тому, що для обчислення площі плоскої фігури і, збільшуючи кількість сторін многокутника , знаходили границю, до якої прямували площі ступінчастих фігур. Проте обчислення границі для кожної фігури залежало від вибору спеціального прийому. Залишалась нерозв'язаною проблема загального методу обчислення об'ємів фігур і площ. В неявному вигляді загальне поняття границі та інтеграла використовувалось, але Архімед ще явно його не застосовував.

Було успішно здійснено першу спробу розвинути ідеї Архімеда, завдяки праці Йоганна Кеплера (1571 – 1630) у XVII ст., який відкрив закони руху планет. Кеплер обчислював об'єми тіл і площі плоских фігур, опираючись на ідею розкладання тіла і фігури на нескінченну кількість нескінченно малих частин. У результаті додавання з цих частин складалась фігура, площа якої відома і яка дає змогу обчислити площу шуканої. Італійський математик Бонавентуро Кавальєрі (1598 – 1647) на відміну від Кеплера , перетинаючи фігуру (тіло) паралельними прямими (площинами), вважав їх позбавленнями будь – якої товщини, але додавав ці лінії. Площу і об'єми обчислювали відомим в історії математик так званим "принцип Кавальєрі". За допомогою інтегрального числення пізніше цей принцип дістав теоретичне обґрунтування. Принцип кавальєрі для площ плоских фігур формулювали так: якщо прямі деякого пучка паралельних прямих перетинають фігури $Ф_1$ і $Ф_2$ рівні.

Відомі вчені Ньютон і Лейбніц завдяки ідеї Кеплера та інших вчених відкрили інтегральне числення. Розвиток інтегрального числення продовжили Ейлер та П. Л. Чебишов (1821- 1894) продовжили розвиток інтегрального числення, і ще П.Л. Чебишов розробив способи інтегрування деяких класів ірраціональних функції.

Коші належить сучасне означення інтеграла як границі інтегральних сум. Лейбіцем було введено символ $\int ydx$. Знак $\int$ нагадує розтягнуту S (першу букву латинського слова SUMMA – " сума "). Термін " інтеграл" був запропонований у

1690р. вченим Й. Бернуллі і цей термін походить від латинського INTEGER – " цілий.

Отже, потрібно також сказати й про те, що на цьому розвиток і поняття про функції не зупинилося (поняття узагальненої функції) і, швидше за все, буде змінюватися далі, і буде пристосовуватись до потреб науки. [9]

1.2. Поняття про функцію: основні означення, властивості й твердження

1. Поняття функції. Основні способи задання функції. Область визначення і область значень функції

Функція – це така залежність змінної у від змінної х , якщо кожному значенню х відповідає єдине значення у. Але ще є й таке означення функції (від лат. *functio* — звершення, виконання), може означати (в математиці) функціональне бінарне відношення;[8]

Позначення функцій: f (x), F(x), f , F, y = f (x), y x – аргумент (незалежна змінна) y – залежна змінна;

Множина значень, яких набуває незалежна змінна х називається **область визначення функції** . Позначається D(f), D_f.

Значення залежної змінної у це – **значення функції** .

Множина відповідних значень залежної змінної у , яких вона набуває при всіх значеннях х з області визначення це – **область значень (зміни функції).** Позначається E_f E(f).

Приклад: Потрібно знайти область значень і область визначення такої функції

y = $2x^2+4$.

Область значень – множина всіх дійсних чисел ≥ 4.

E(f) = [4; + ∞)

y ∈[4; + ∞)

Область визначення це множина всіх дійсних чисел.

D(f) = (– ∞; + ∞)

D(f) = R

x∈ R

x ∈ (– ∞ + ∞);

Функції, в яких область визначення і область значень є числовою множиною це **числові функції.** [8]

2. Способи задання функції:

а) Задання функції за допомогою формул це **аналітичний спосіб задання функції**. Наприклад: $y = 2x^2$.

б) Задання функції за допомогою графіка називається **графічний спосіб задання функції** .

в)Задання функції за допомогою таблиць це т**абличний спосіб задання функції**. Таблиці квадратів, кубів, тригонометричних функцій.

г) **Словесний спосіб задання функції** – це задання функції словами і за допомогою формул це **словесний спосіб задання функції**.

Наприклад : $y = |x| = \begin{cases} x, \text{якщо } x \geq 0 \\ -x, \text{якщо } x < 0 \end{cases}$

Множину точок x, y координатній площині, абсциси яких належать області визначення функції, а ординати є відповідними значеннями функції називається **графіком функції.** [6]

3.Позначення проміжків, відрізків.

[a; b] – позначення відрізка замкненого проміжку з кінцями a і b;

(a; b) – позначення інтервалу (відкритого проміжка);

(a; b] – позначення пів інтервала (пів відкритого проміжка) з кінцем b;

[a; b) – позначення пів відрізка (пів відкритого проміжка) з початком a;

$(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$, $[b; +\infty)$, $(b; +\infty)$ – позначення нескінченних проміжків;

$(-\infty; +\infty)$ – позначення множини всіх дійсних чисел;

Функцію можна задати за допомогою *таблиці*, *графіка*, *формули*. Зазвичай функцію найчастіше задають формулою, яка дає можливість одержати значення залежної змінної *y*, підставивши конкретне значення аргументу *x*.

Наприклад: якщо кожному значенню x із множини дійсних чисел відповідає куб цього числа, то функцію можна записати у вигляді формули: $y = x^3$, або $f(x) = x^3$.

Областю визначення функції $y=f(x)$, яка задана формулою, називають множину тих значень, яких може набувати x, тобто таких x, за яких формула має зміст (усі дії, указані формулою, можна виконати). [6]

При знаходженні області визначення слід пам'ятати:

1. Якщо функція є многочленом у = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, то D(y) = (−∞;+∞) = D(y) = (−∞;+∞) = R.

Наприклад: якщо у = $x^2 + 2x + 1$, то D(y) = D(y) = R.

2. Якщо функція має вигляд у = $\frac{f(x)}{g(x)}$, f(x), g(x)– многочлени, то слід вважати $g(x)\neq 0$ (знаменник дробу не дорівнює 0).

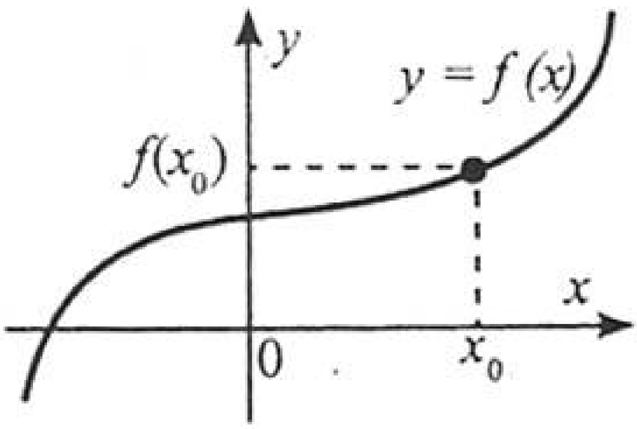
Наприклад: якщо у = $\frac{x}{x^2-1}$, то $x^2 - 1 \neq 0$. Тоді x≠1 і x≠-1. Отже, D(y) = (−∞;−1) ∪ (−1;1) ∪ (1;+∞) D(y) = (−∞;−1) ∪ (−1;1) ∪ (1;+∞).

3. Якщо функція має вигляд y=$\sqrt{\text{f(x)}}$,, то слід вважати $f(x) \geq 0$ (арифметичний квадратний корінь існує тільки з невід'ємних чисел).

Наприклад: якщо y=$\sqrt{5+x}$, то 5 + x ≥ 0, x≥ −55 + x ≥ 0, x ≥ −5, тобто D(y) = [−5;+∞) D (y) = [−5;+∞).

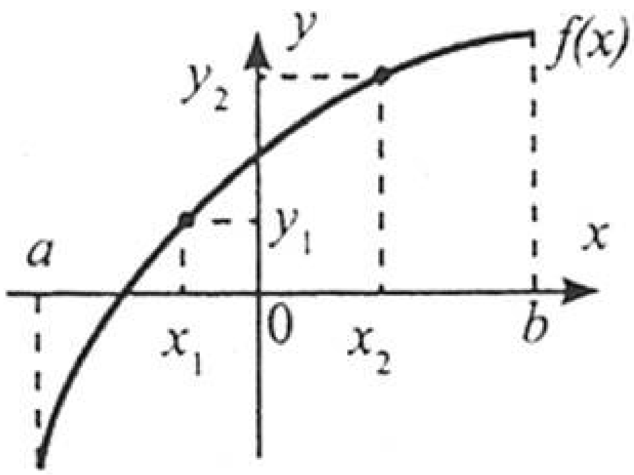
2. Графік функції

Графіком **функції** y = f(x) називають множину всіх точок площини з координатами (x; f(x)), де перша координата «пробігає» всю область визначення функції y=f(x), а друга – це відповідні значення функції у точці x.

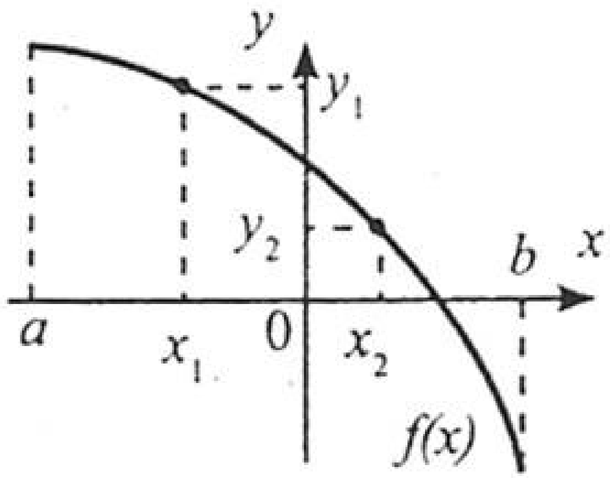


3. Зростання і спадання функції

Якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тоді функція y = f(x) є ***зростаючою.*** Тобто для будь-яких значень x_1,x_2 з області визначення функції як таких, x_1< x_2, що виконується нерівність f(x_1) < f(x_2) (або y_1< y_2), і навпаки, якщо y = f(x) – зростаюча, то за умови f(x_1) < f(x_2) виконується нерівність x_1<x_2.

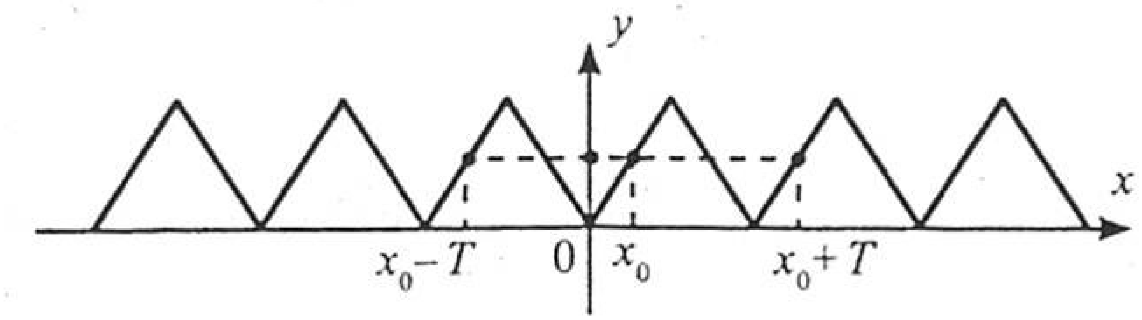


Якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тоді функція y = f(x) є ***спадною.*** Тобто для будь-яких значень x_1, x_2 з області визначення функції як таких, x_1< x_2, що виконується нерівність f(x_1) > f(x_2) (або y_1 > y_2), і навпаки, якщо y= f(x) – спадна, то за умови f(x_1) > f(x_2) виконується нерівність x_1 < x_2.



4. Періодичність функції

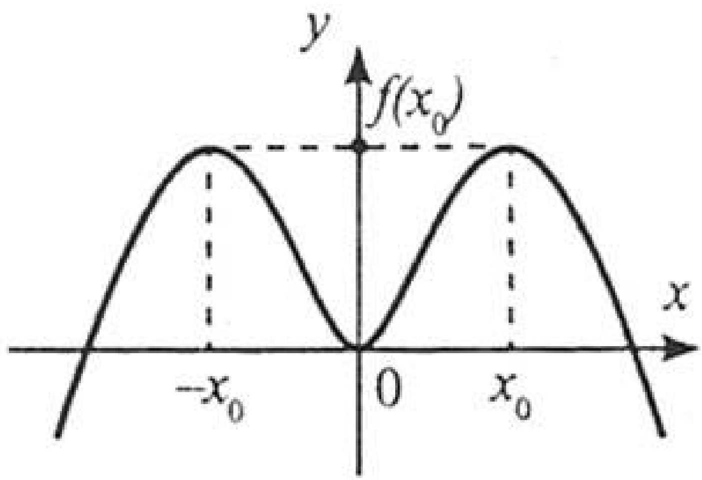
Якщо для будь-якого x з області визначення числа x +T і x - T також належать області визначення і виконується рівність: f(x + T) = f(x−T) = f(x), тоді функцію у = f(x) називають ***періодичною*** **з періодом T≠0** .



Якщо функція y = f(x) – періодична з найменшим додатним періодом T, то функція y = f(kx + b) теж періодична, і найменший додатний період її дорівнює $\frac{T}{|k|}$ (k ≠ 0).

5. Парні та непарні функції

Якщо для будь-якого значення x із D(y) значення – x також належить D(y) і виконується рівність f(−x) = f(x), функція у = f(x) є ***парною***. Графік парної функції симетричний відносно осі OY.



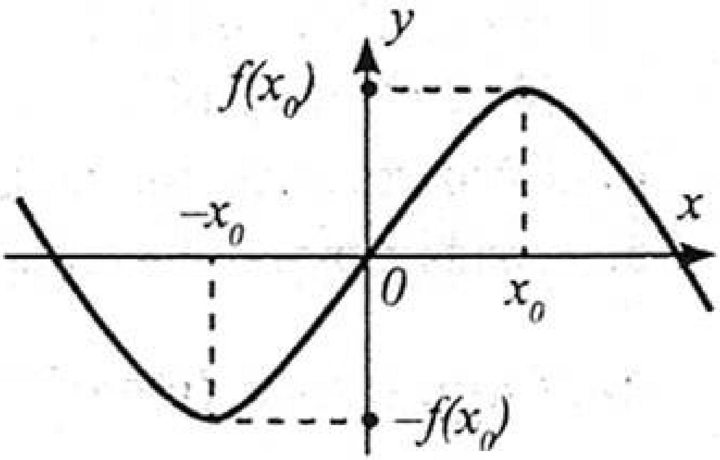
Приклад 1. Чи функція f(x) = $x^4 + x^2$ є парною?

Функція парна, оскільки D(f) = R і f(-x) = $(-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2$ = f(x).

Приклад 2. Чи функція f(x) = x^2+ x є парною?

Функція є непарною, оскільки D(f) = , але f(−x) = $(-x^2)$ + (−x) = x^2 − x ≠ f(x).

Непарною є функція y = f(x), якщо для будь-якого значення x із D(y) значення x ∈ D(y) і виконується рівність f(−x) = −f(x). Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.



Приклад 3. Чи функція f(x) = $x^3 - x^5$ є непарною?

Функція є непарною, оскільки D(f) = R і f(−x) = $(-x)^3 - (-x)^5 = -x^3 + x^5 = -(x^3 - x^5) =$ −f(x), то функція є непарною.

Приклад 4. Чи функція f(x) = $x^3 - x^2$ є непарною?

Функція не є непарною, оскільки D(f) = R і f(−x) = $(-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 = -(x^3 + x^2) \neq$ −f(x) = $-x^3 + x^2$.

6. Графіки деяких функцій та їх основні властивості

Функція y = kx

Властивості:

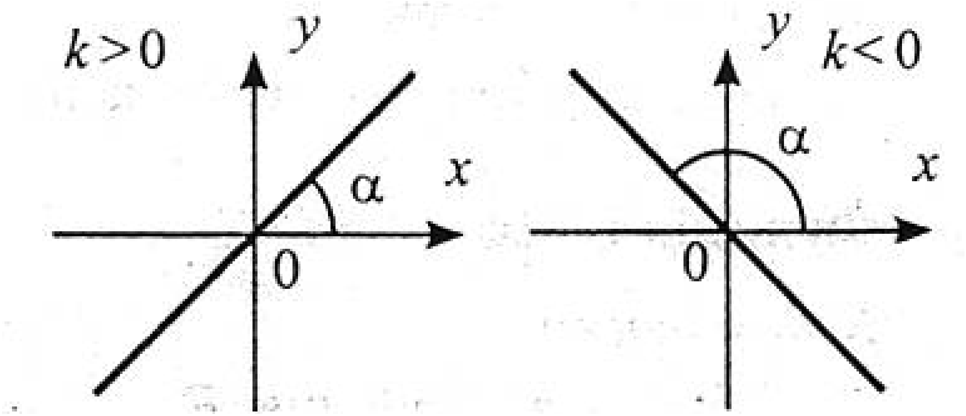
1. Область визначення: R.

2. Функція є непарною.

3. Для x ∈ R функція зростає, якщо k > 0; спадає, якщо k < 0.

4. Область значень: R.

5. Графік – пряма, що проходить через початок координат.



Функція y = b

Властивості:

1. Область визначення: R.

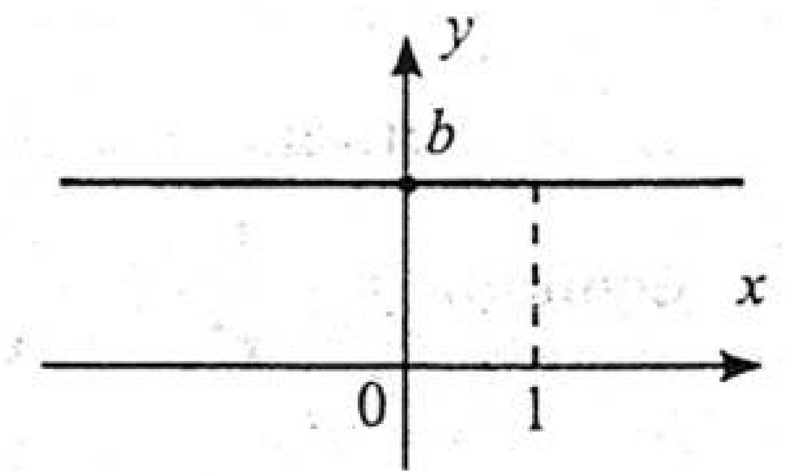
2. Функція є парною. Якщо b = 0, то функція і парна, і непарна.

3. Для x ∈ R функція стала.

4. Область значень: $\{b\}$.

5. Графік – пряма, паралельна осі x, якщо $b \neq 0$, і пряма, що збігається з віссю x, якщо b = 0.

6. Функція періодична, будь-яке число є періодом. Найменшого додатного періоду немає.



Функція y = $\frac{k}{x}$ $(y = \frac{k}{x^{2n+1}}$, n ∈ N, k ≠ 0)

Властивості

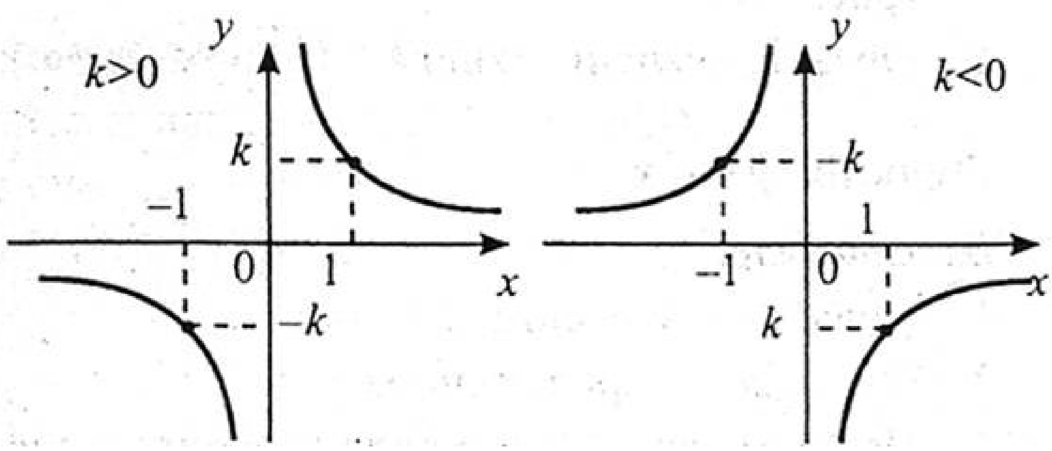
1. Область визначення: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Функція є непарною.

3. Якщо $k>0$, функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$ і на проміжку $(0; +\infty)$. Якщо $k<0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і на проміжку $(0;+\infty)$.

4. Область значень: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

5. Графік функції – гіпербола.



Функція $y = ax^2$ ($y = ax^{2n}$, $a \neq 0$, $n \in N$)

Властивості

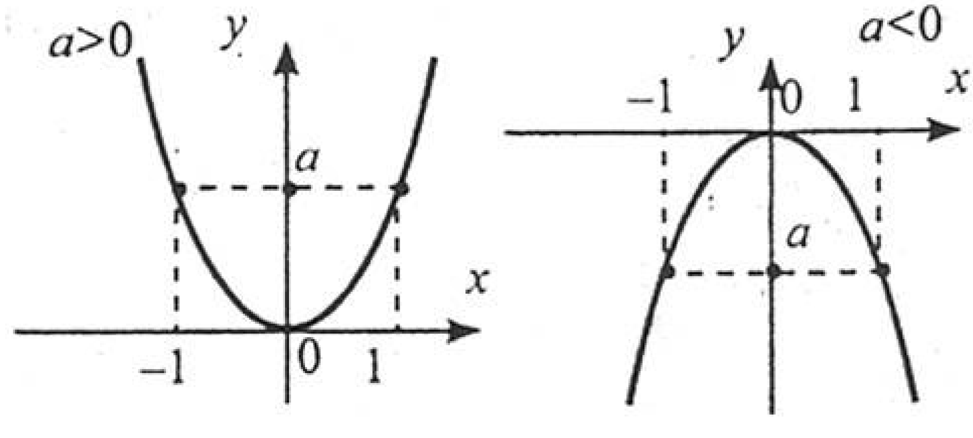
1. Область визначення: R.

2. Функція є парною.

3. Якщо $a > 0$, функція спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0;+\infty)$. Якщо $a < 0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$, спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

4. Область значень: якщо $a > 0$, то $y \in [0; +\infty)$; якщо $a < 0$, то $y \in (-\infty; 0]$.

5. Графік функції – парабола.



Функція y = ax^3(y = ax^{2n+1}, a ≠ 0, n ∈ N)

Властивості

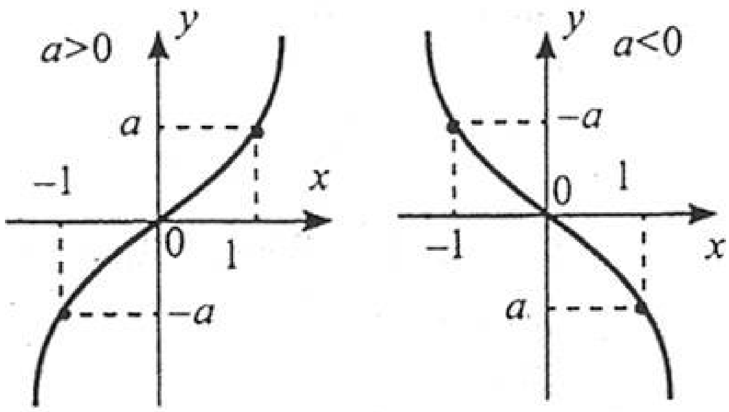
1. Область визначення: R.

2. Функція є непарною.

3. Для x ∈ R функція зростає, якщо a > 0; спадає, якщо a < 0.

4. Область значень: R.

5. Графік функції – кубічна парабола.



Функція y = |x|

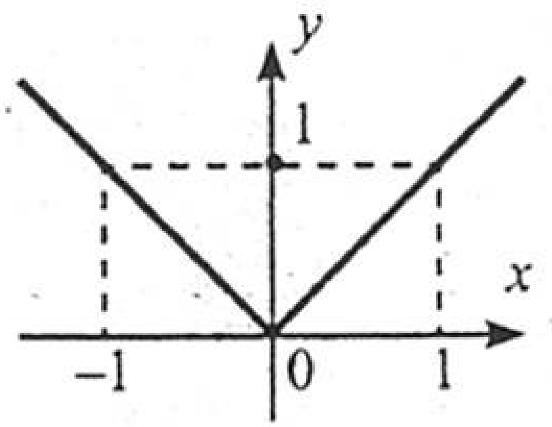
Властивості

1. Область визначення: R.

2. Функція є парною.

3. На проміжку (-∞; 0] функція спадає; на проміжку [0; +∞) функція зростає.

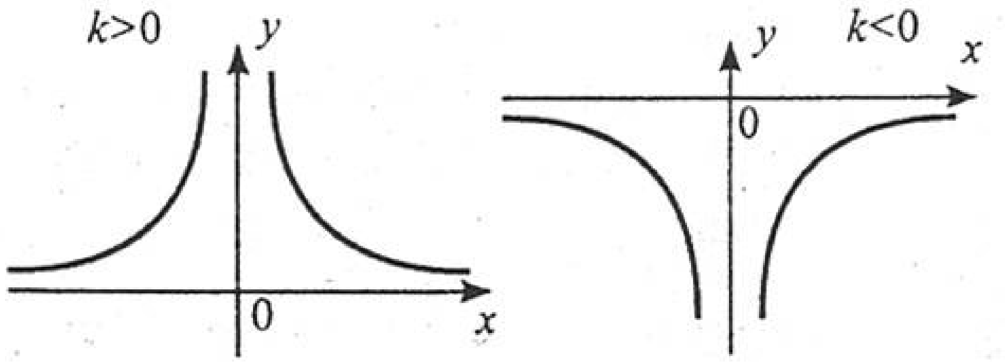
4. Область значень: [0; +∞).



Функція $y = \frac{k}{x^{2n}}$ ($y = \frac{k}{x^{2n+1}}$, $k \neq 0$, $n \in N$)

Властивості

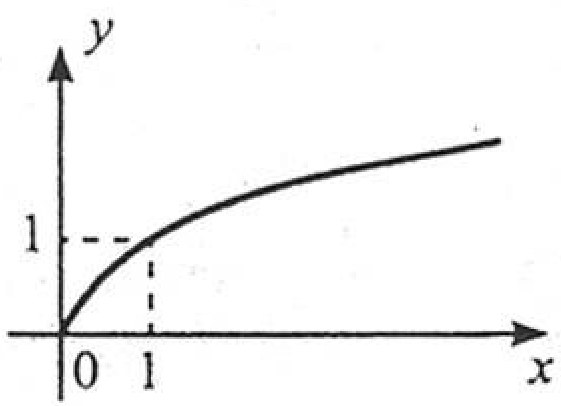
1. Область визначення: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Функція є парною.
3. Якщо $k > 0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і спадає на проміжку $(0;+\infty)$. Якщо $k < 0$, функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$ і зростає на проміжку $(0; +\infty)$.
4. Область значень: якщо $k > 0$, то $y \in (0; +\infty)$; якщо $k < 0$, то $y \in (-\infty; 0)$.



Функція $y = \sqrt{x}$

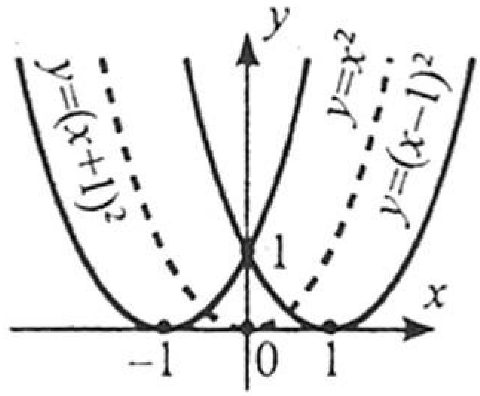
Властивості

1. Область визначення: $[0;+\infty)$.
2. Функція ні парна, ні непарна.
3. На проміжку $[0;+\infty)$ функція зростає.
4. Область значень: $[0;+\infty)$.

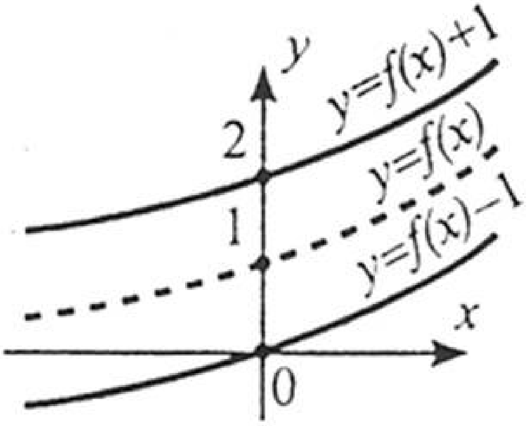


7. Перетворення графіків функцій

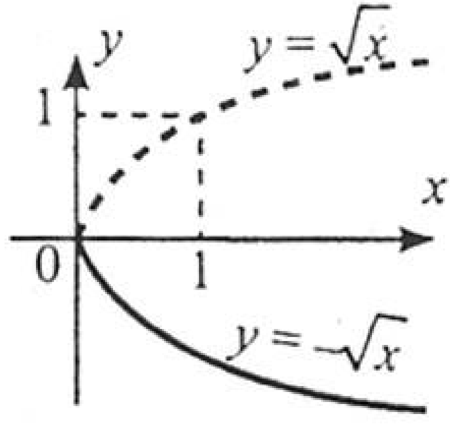
1. Цей **графік функції y = f(x + a)**, щоб побудувати, слід перенести графік функції $f(x)$ уздовж осі Оx на a одиниць: вправо, якщо $a < 0$; вліво, якщо $a > 0$.



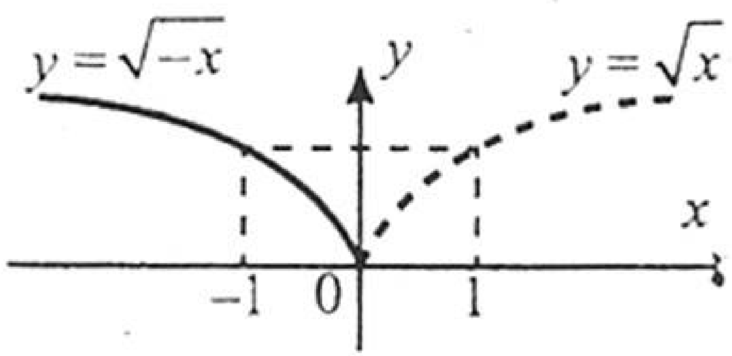
2. Щоб побудувати цей **графік функції y = f(x + b)**, слід перенести графік функції $f(x)$ уздовж осі Оy на b одиниць: вверх, якщо $b < 0$; вниз, якщо $b > 0$.



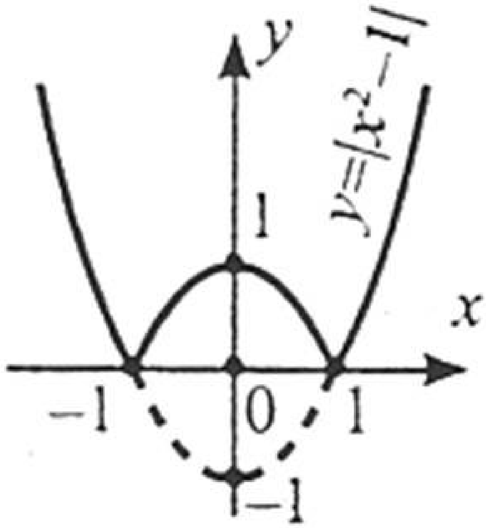
3. Щоб побудувати цей **y = −f(x) графік функції**, слід графік функції y = f(x) симетрично відобразити відносно осі абсцис.



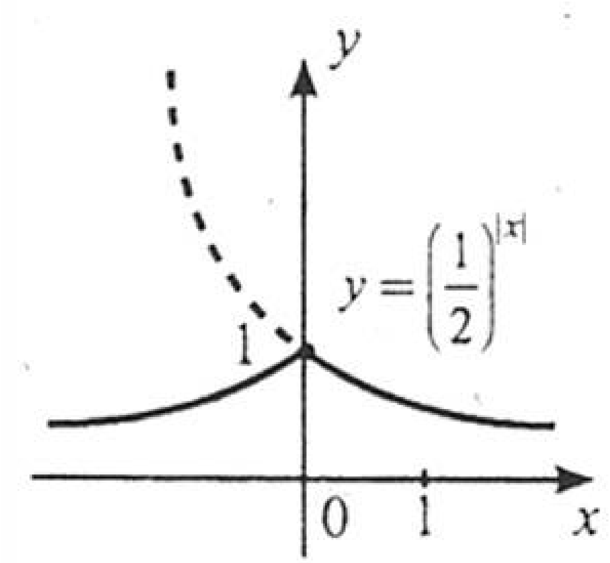
4.Щоб побудувати цей **y = f(−x) графік функції**, слід графік функції y=f(x) симетрично відобразити відносно осі ординат



5. Щоб побудувати цей **y = |f(x)| графік функції** , слід частину графіка функції y = f(x) у верхній півплощині і на осі абсцис залишити без змін, а замість частини графіка в нижній півплощині побудувати симетричну їй частину відносно осі О*x*.

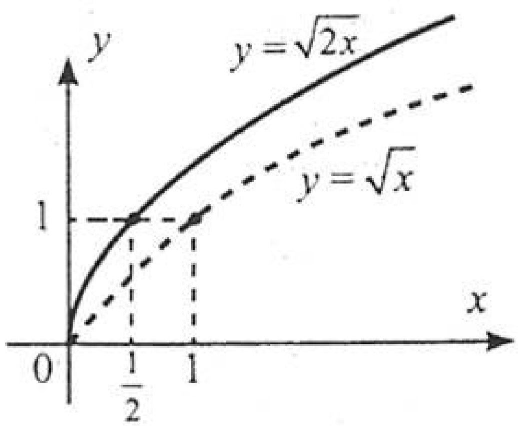


6. Щоб побудувати цей **y=f(|x|)** графік функції, слід частину графіка функції y=f(x) у правій півплощині і на осі ординат залишити без змін, а замість частини графіка в лівій півплощині побудувати симетричну їй частину відносно осі О*y*.

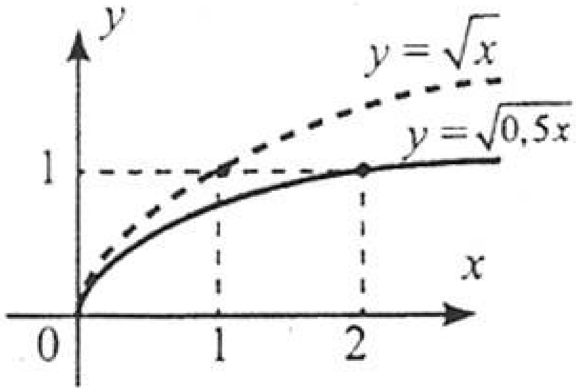


7. Щоб побудувати цей **y = f(kx),** k > 0 графік функції, слід:

1) при $k > 1$ стиснути графік функції y = f(x) до точки (0;0) уздовж осі абсцис у k разів;

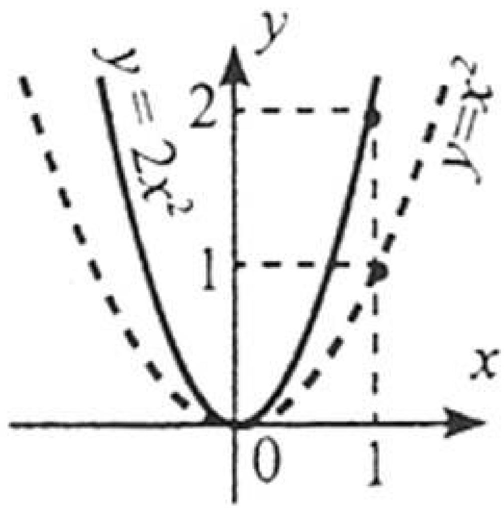


2) при $0 < k < 1$ розтягнути від точки (0;0) графік функції y = f(x) уздовж осі абсцис у $\frac{1}{k}$ разів.

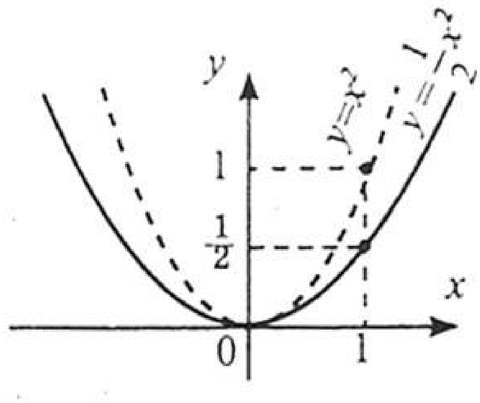


8. Щоб побудувати цей **y = kf(x), k > 0** графік функції, слід:

1) при $k > 1$ розтягнути графік функції y = f(x) до точки (0;0) уздовж осі ординат у k разів;



2) при $0 < k < 1$ стиснути від точки (0;0) графік функції y = f(x) уздовж осі ординат у 1k разів.



8. Функція, обернена до даної

Оборотною називають функцію, яка набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення.

Наприклад: функція у = x^2(визначена на всій числовій осі), але вона не є оборотною функцією, а от $y = 2x+1$ – оборотна функція.

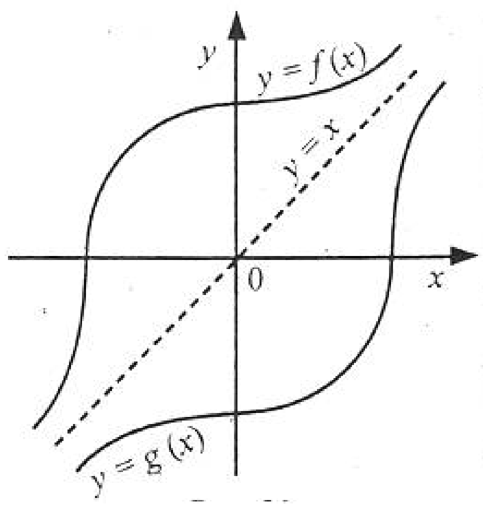
Для знаходження оберненої функції, яка задана формулою у = f(x) потрібно розв'язати рівняння f(x) = у відносно x, а потім поміняти місцями x і y.

Наприклад: функція у = $\frac{x-1}{2}$ є оберненою для функції у = 2х+1.

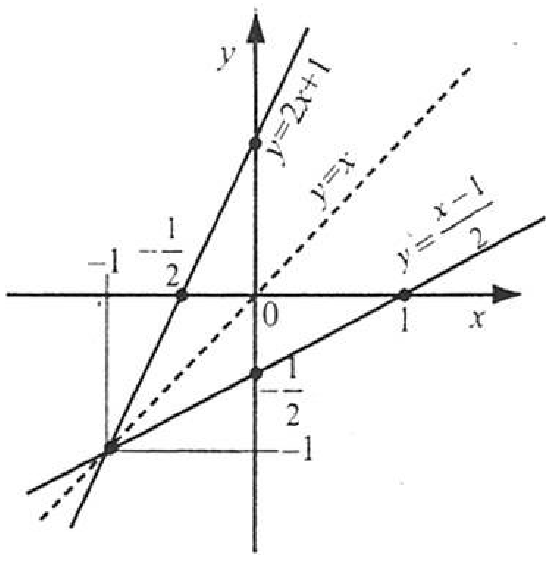
Функція у = f(x) не має оберненої функції, тоді якщо рівняння f(x) = =у відносно x має більше ніж один корінь.

Наприклад: оберненої функції не має функція у = x^2+1.

Симетричними відносно прямої $y = x$ є графіки даної функції і оберненої до неї.



Наприклад: оберненими є функції у = 2х+1, у = $\frac{x-1}{2}$, графіки яких симетричні відносно прямої $y = x$.



Оборотною функція є тоді, якщо функція y = f(x) зростає (спадає) на деякому проміжку. Також **зростаючою (спадною)** є функція, яка обернена до даної і визначена в області значень функції y = f(x).

Обернена функція має область визначення E і область значень D, тоді якщо функція y = f(x) визначена на області визначення D і має область значень E.

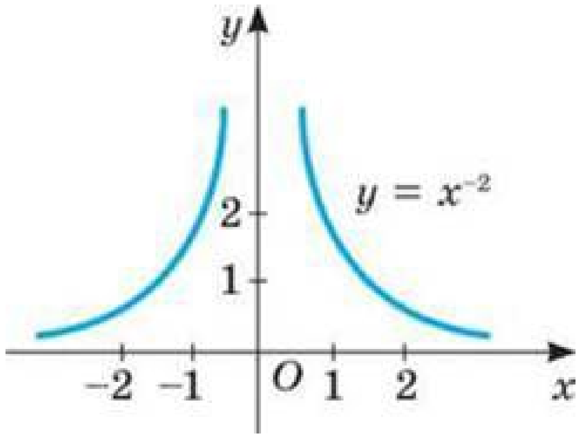
1.3. Поняття про степеневу функцію: основні означення, властивості й твердження

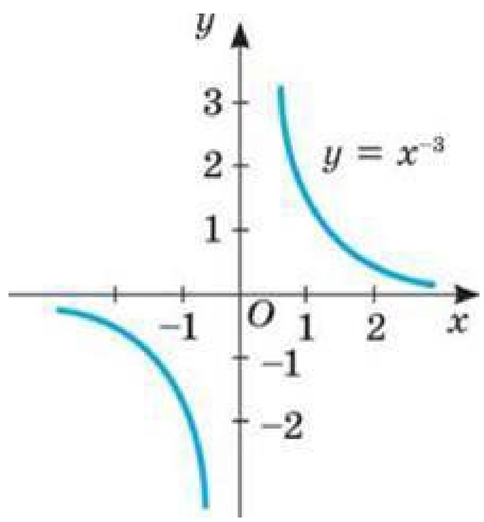
Сьогочасна людина живе у світі, що постійно розвивається і змінюється. І ці зміни нам зручніше відображати за допомогою функцій та їх графіків. У цьому підпункті ми розглянемо великий клас функцій, які допомагають описувати процеси реального світу.

Функція виду y $= x^n$, де n – стале дійсне число, а x (основа) – змінна називається **степеневою функцією**.

Відомі нам функції y = x ^{2} і y = x ^{3} є — прикладами степеневих функцій. Ще такі подібні властивості мають теж усі інші степеневі функції з натуральними показниками n. Нам відомо, що кожна степенева функція з натуральним показником степеня визначена на множині всіх дійсних чисел R. Наприклад властивості функції $y = x^{2k}$, k ∈ N, подібні на властивості функції $y = x^2$, а функції $y = x^{2k+1}$, k ∈ N, схожі до властивостей функції $y = x^3$.

Нам відомо, якщо показник а степеневої функції — ціле від'ємне число, то функція визначена на множині всіх дійсних значень аргументу x, крім x – 0. Наведемо приклад, функція $y = x^{-1}$ — це вже для нас відома обернена пропорційність $y = \frac{1}{x}$. На малюнках для нас зображено графіки функцій $y = x^2$ і $y = x^{-3}$. [5]

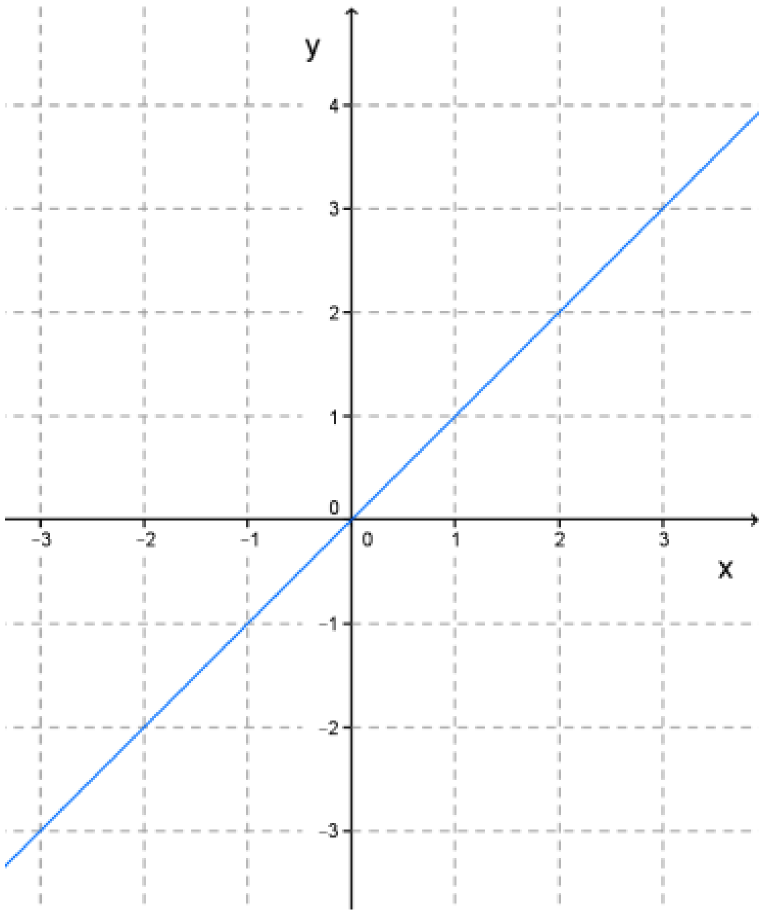




Нехай n — від'ємне парне ціле число, то графік функції $y = x^n$, буде симетричний відносно осі ординат, а якщо n — від'ємне непарне, тоді графік буде симетричний відносно початку координат.

Взагалі, при кожному цілому показнику степеня n функція $y = x^n$ парна, якщо n — парне число, і непарна при непарному α.

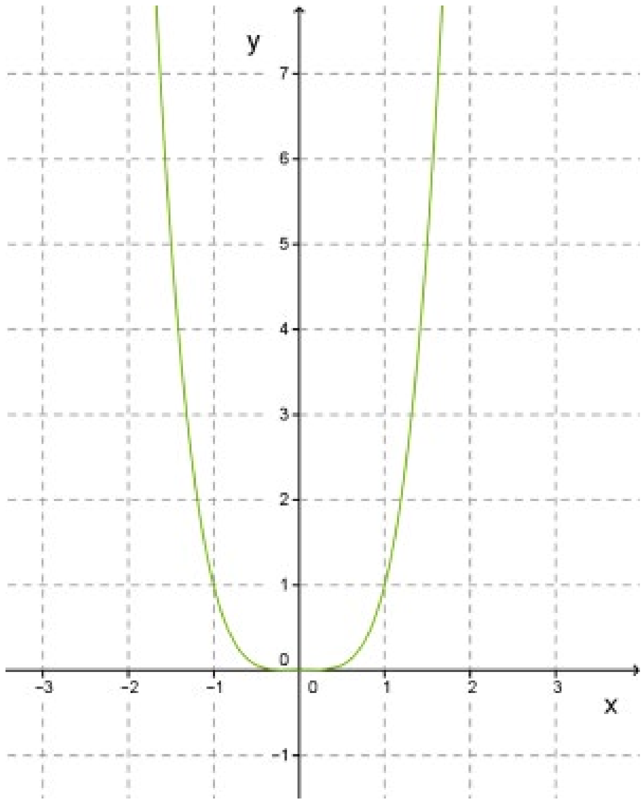
Наприклад: якщо n = 1, то y = x^1 або y = x — пряма.



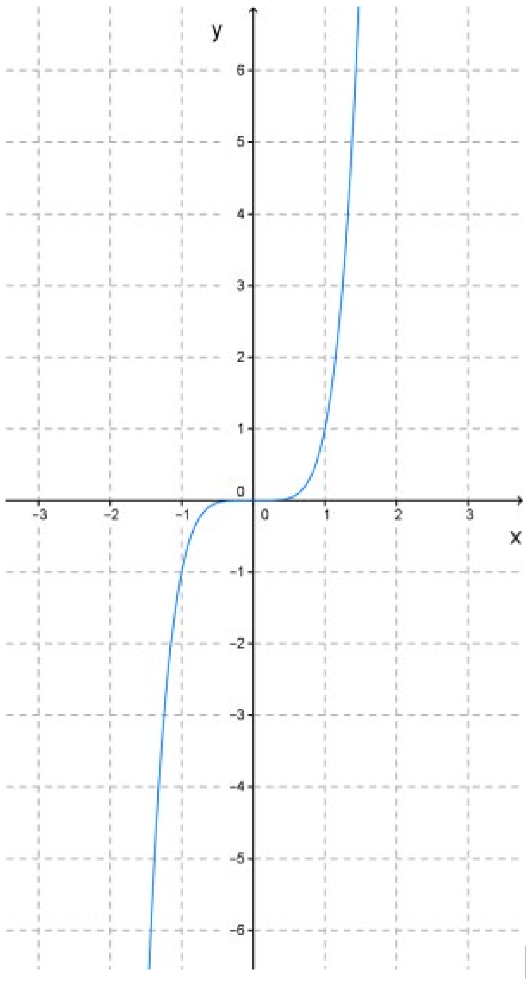
Наприклад: якщо n = 2, то y = x^2— парабола.

Наприклад: якщо n = 3, то y = x^3 — кубічна парабола.

Якщо графік степеневої функції y = x^n, де n – парне число (4,6,8), то графік набуває вигляду параболи.



Якщо графік степеневої функції $y = x^n$, де $n -$ непарне число $(5, 7, 9 \dots)$, цей графік набуває вигляду кубічної параболи.

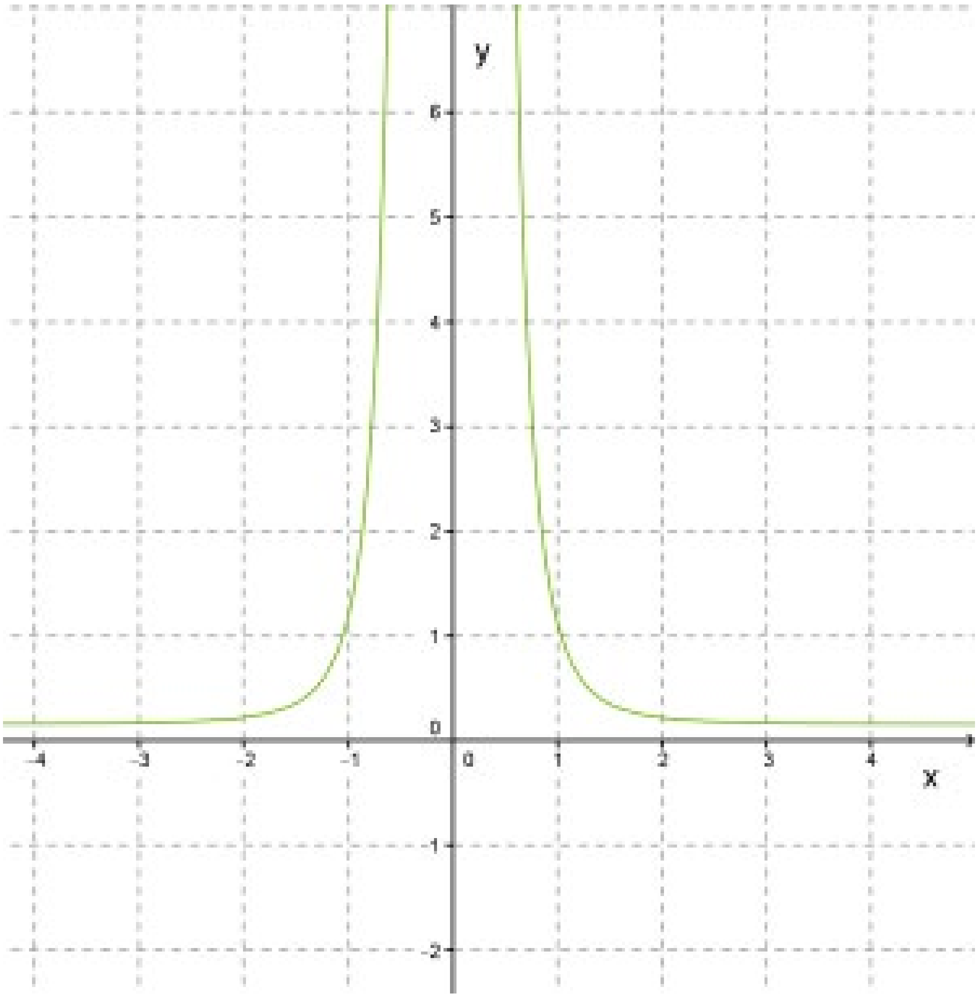


[7]

2. Степеневі функції (показник степеня – ціле від'ємне число)

Наприклад: якщо степеневий показник – ціле від'ємне число, то степенева функція записується формулою $y = x^{-n}$, або $y = \frac{1}{x^n}$.

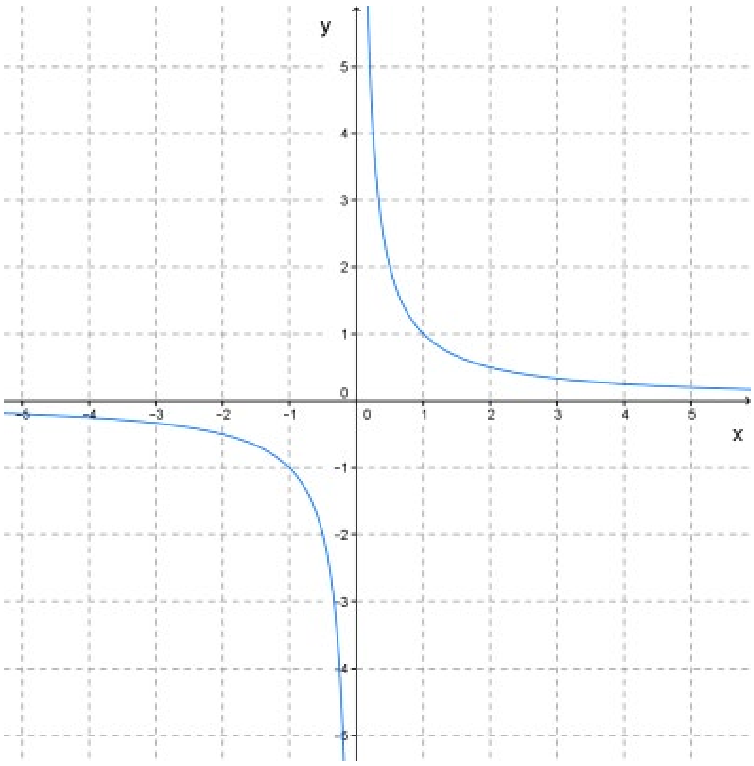
Якщо графік степеневої функції $y = x^{-n}$, у випадку, коли n – парне число (4, 6, 8…), має такий вигляд:



Наприклад, графіки функцій набувають такого вигляду $y = x^{-4}, y = x^{-8}$.

Тоді графік степеневої функції $y = x^{-n}$, набуває вигляду гіперболи, у випадку, коли n – непарне число (5, 7, 9…)

Наприклад, ще графіки функцій набувають такого вигляду $y = x^{-5}, y = x^{-11}$.

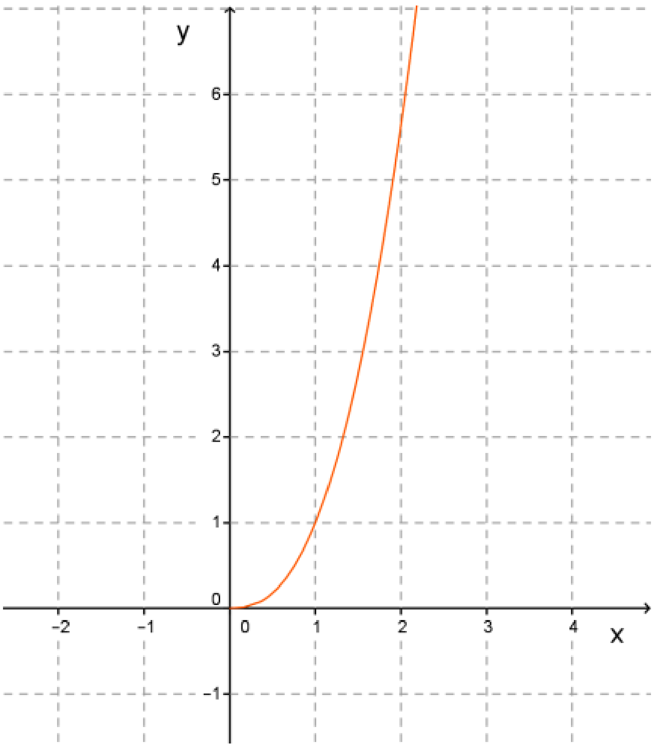


[5]

3. Степеневі функції (показник степеня – дробове додатне число)

1. **Будемо розглядати графіки степеневих функцій** $y = x^{\frac{m}{n}}$ з додатним дробовим показником $\frac{m}{n}$.

Наприклад, степенева функція виду $y = x^{\frac{m}{n}}$, де $\frac{m}{n} > 1$ – неправильний дріб (чисельник більший за знаменника). Тоді графік буде – вітка параболи.



Властивості функції $y = x^{\frac{m}{n}}$, де $y = \frac{m}{n} > 1$

1) D(f) = [0; +∞];

2) E(f) = [0; +∞];

3) не є ні непарною, ні парною**.**

4) зростає при x ∈ [0; +∞);

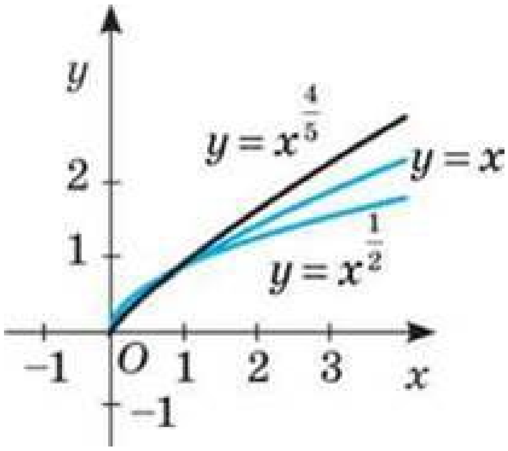
5) не має найбільшого значення, $y_{\text{найм.}} = 0$;

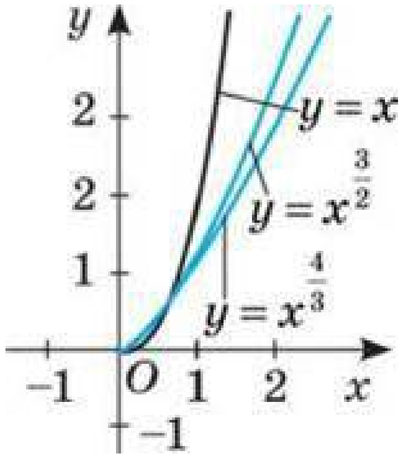
6) функція необмежена зверху, вона обмежена знизу;

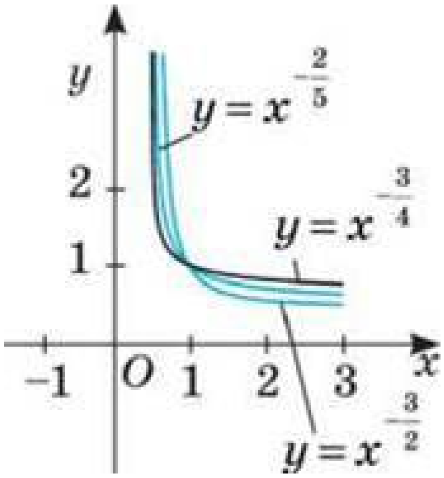
7) функція опукла вниз;

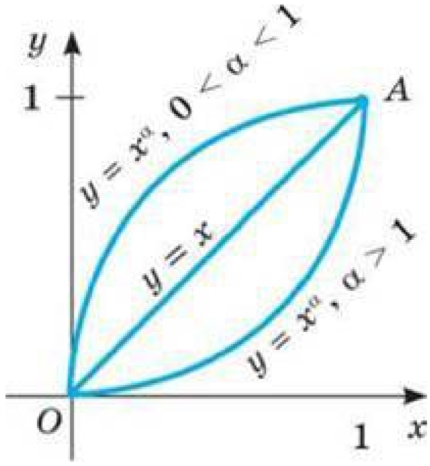
8) функція неперервна.

Наприклад, ми маємо зображені на малюнках графіки функцій з різними дробовими показниками:

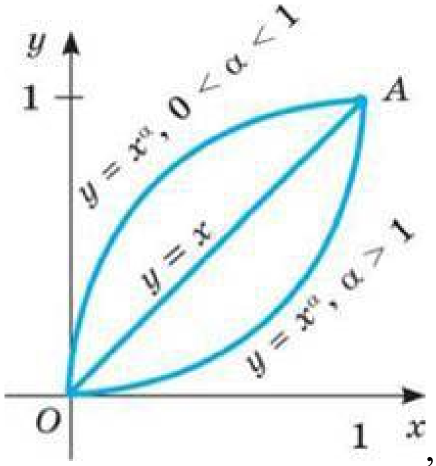








Звернемо увагу на те, і побачимо який вигляд має графік степеневої функції з додатним показником степеня α на проміжку [0; 1]. На цьому проміжку, який зображений на малюнку



, графіком функції $y = x^{\alpha}$ є:

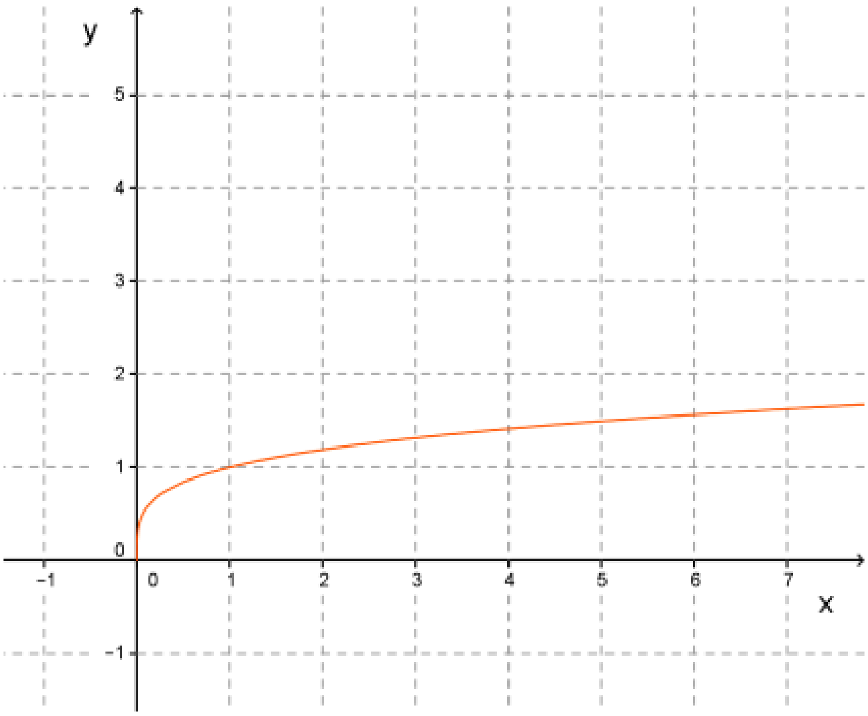
1) відрізок ОА, тоді якщо $\alpha = 1$;

2) коли крива, напрямлена опуклістю вниз, якщо $\alpha > 1$;

3) коли крива, напрямлена опуклістю вгору, якщо 0 < α < 1.

Тоді нам потрібно знати, що чим більше додатне значення α (α > 1), тим нижче від відрізка ОА розміщується графік функції $y = x^{\alpha}$.[7]

2. Будемо розглядати степеневу функцію $y = x^{\frac{m}{n}}$, де $0 < \frac{m}{n} < 1$ – правильний дріб (чисельник менший від знаменника).

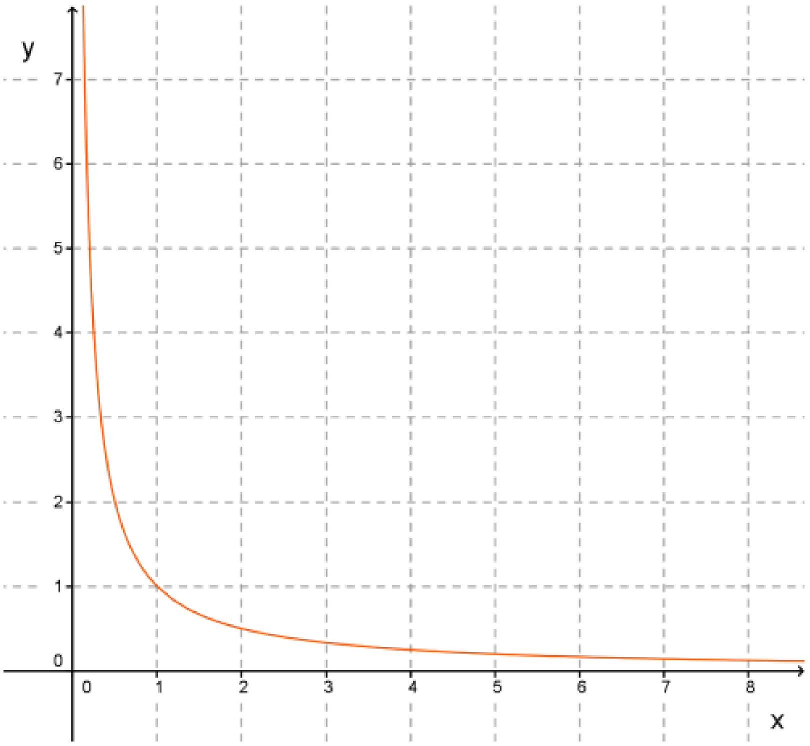


Властивості функцій $y = x^{\frac{m}{n}}$, де $0 < \frac{m}{n} < 1$

1. D(f) = [0; +∞];
2. E(f) = [0; $+\infty$];
3. не є ні непарною, ні парною.
4. зростає при $x \in [0;\ +\infty)$;
5. не має найбільшого значення, $y_{\text{найм.}} = 0$;
6. функція необмежена зверху, вона обмежена знизу;
7. функція опукла вгору;
8. функція неперервна.

4. Степеневі функції (показник степеня – дробове від′ємне число)

Розглянемо степеневі функції з **від'ємним дробовим показником** степеня $y = x^{-\frac{m}{n}}$. Тоді графік буде — вітка гіперболи.



Графік має вертикальну асимптоту x = 0 і горизонтальну асимптоту y = 0.

Властивості функції $y = x^{-\frac{m}{n}}$

1) D(f) = (0;+∞);

2) E(f) = (0;+∞);

3) не є ні парною, ні непарною;

4) спадає при x∈ (0;+∞);

5) не має ні найбільшого, ні найменшого значення;

6) необмежена зверху, обмежена знизу;

7) опукла вниз;

8) неперервна.

Властивості степеневої функції :

- Область визначення: (0, ∞) при *a* < 0, [0, ∞) при *a* > 0.
- При натуральних показниках степеня *a* область визначення розширюється на всю числову вісь: (-∞; ∞).
- Область значень: (0, ∞) при *a* < 0, [0, ∞) при *a* > 0.

Функція монотонно спадає при $a < 0$, а монотонно зростає при $a > 0$.

Функція має єдиний нуль при $a > 0$ в точці x = 0. Точок перетину не має.

При $a < 0$ має особливу точку при x = 0.

- Похідна $(x^a)' = ax^{a-1}$
- Невизначений інтеграл $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \; C$

Аналітичне продовження

Степенева функція комплексного аргумента

f(z) = z^a аналітична (голоморфна) всюди, окрім точки z = 0 при нецілих значеннях показника *a*.

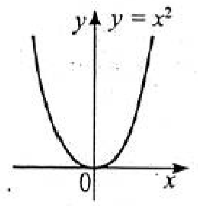
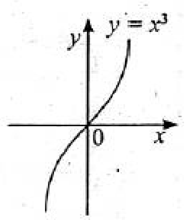
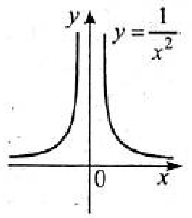
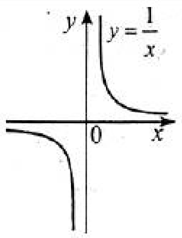
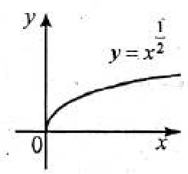
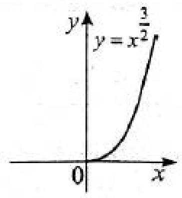
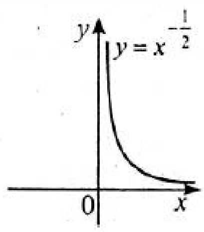
Голоморфна функція – це комплексна функція, яка визначена на відкритій підмножині комплексної площини C, вона має комплексну похідну в кожній точці тієї множини.

При раціональному показнику a = p / q, де p та q – цілі числа, функція визначається на рімановій поверхні із q листів, розріз проводиться вздовж півосі x = Re z > 0. Таким чином, якщо скористатися представленням комплексного числа в експоненційній формі, z = $r^{i\varphi}$, то φ змінюється від 0 до $2\pi q$.

f (z) = z^a = $r^a e^{ip\varphi/q}$. Кількість ріманових листів обмежена для дійсного числа a.

Властивості та графіки степеневих функцій подано в таблиці 1.

Функція виду $y = x^p$

№ з/п	p	Графік	D(y)	E(y)	Парність (непарність)	Зростання (спадання)
1	$2k, k\epsilon N$		R	[0;+∞)	парна	спадає, якщо $x\epsilon(-\infty; 0]$; зростає, якщо $x\epsilon[0; +\infty)$
2	$2k+1,\ k\epsilon N$		R	R	непарна	зростає
3	$-(2k),\ k\epsilon N$		$x\neq0$	(0;+∞)	парна	зростає, якщо $x\epsilon(-\infty; 0)$; спадає, якщо $x\epsilon(0; +\infty)$
4	$-(2k-1)$, $k\epsilon N$		$x\neq0$	$y\neq0$	непарна	спадає на проміжках (-∞;0), (0;+∞)
5	p>0, p- неціле, 0<p<1		[0;+∞)	[0;+∞)	ні парна, ні непарна	зростає
6	p>0, p- неціле, p>1		[0;+∞)	[0;+∞)	ні парна, ні непарна	зростає
7	P<0, p- неціле		[0;+∞)	(0;+∞)	ні парна, ні непарна	спадає

Слід пам'ятати, що при знаходженні області визначення, якщо функція має вигляд y = x^p, то:

1) тоді якщо α – натуральне число, то D(y) = R;

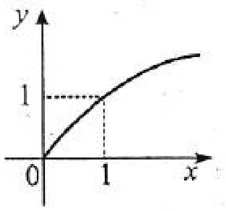
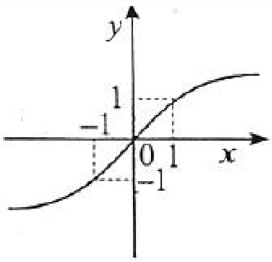
2) тоді якщо α – ціле від'ємне число або нуль, то D(y) = (−∞;0) ∪ (0;+∞);

3)тоді якщо α – додатне неціле число, то D(y) = [0;+∞);

4)тоді якщо α – від'ємне неціле число, то D(y) = (0;+∞).

Функція $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x}}$

У таблиці 2 подано властивості та графіки функції $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x}}$

№ з/п	*Показник степеня n*	Графік	D(y)	E(y)	Парність (непарність)	Зростання (спадання)
1	$2k, k\epsilon N$		[0;+∞)	[0;+∞)	ні парна, ні непарна	зростає, якщо $x\epsilon[0;+\infty)$
2	$2k+1,\ k\epsilon N$		R	R	непарна	зростає

Наприклад, якщо функція має вигляд $y = \sqrt[2k]{f(x)}$, k ∈ N, то слід вважати $f(x)$ ≥0 (тільки з невід'ємних чисел може існувати арифметичний корінь парного степеня).

Наприклад: якщо функція має вигляд $y = \sqrt[6]{6-x},$ то $6 - x\ \geq 0$, тобто D(y) = (-∞;6].

Інформація для тих хто хоче знати більше.

Отож, досі були відомі тільки степені з раціональними показниками, і степеневі функції розглядаємо тільки з раціональними показниками. З часом поняття степеня буде розширюватися: розглядатимемо також степені з довільними дійсними показниками. Також відповідно і поняття степеневої функції буде розширено. Науковці тепер степеневою називають функцію $y = x^{a}$, де а — довільне дійсне число. Деколи поняття степеневої функції ще більш узагальнюють. Так можна називати кожну функцію, яку можна задати формулою у = k x^{a}.

Степенева функція поєднує кілька різних видів функцій. На малюнку який нам даний схематично зображено співвідношення між деякими видами функцій.

Отже, цифрами 1, 2 і 3 позначено: 1 — функція, яка водночас є лінійною і степеневою (тільки у = х); 2 — функція, яка водночас є квадратичною і степеневою (тільки одна: $у = х^{2}$); 3 — функція, яка водночас є і степеневою, і оберненою пропорційністю (тільки одна: $у = х^{-1}$).[3]

2.1 Методика вивчення теми «Степенева функція. Короткий опис арифметичного кореня n-го степеня, степення з раціональним показником, ірраціональних рівнянь та ірраціональних нерівностей.»

1. Арифметичний корінь n-го степеня та його властивості

Дане нам означення – коренем *n*-го степеня з числа a таке число, *n*-й степінь якого дорівнює a . Отже, якщо n — число непарне, тоді існує — і до того ж тільки один — корінь n-го степеня з довільного числа a. Отже, цей корінь — число того ж знака, що число a, і дорівнює 0, якщо $a = 0$.
Введемо позначення: $\sqrt[n]{a}$, де n — показник кореня, a — підкореневий вираз. Нехай візьмемо n — парне число. Якщо $a > 0$, то існує два протилежних числа, які є коренями n-го степеня з a. Тоді введемо позначення: $\sqrt[n]{a}$ — додатний корінь n-го степеня з a, $-\sqrt[n]{a}$ — протилежне йому число (n — парне).
Маємо вираз $\sqrt[n]{a}$, якщо n — парне, має зміст для $a \geq 0$. Тоді, якщо n — непарне, то вираз буде $\sqrt[n]{a}$ має зміст при будь-якому a. Тоді $(\sqrt[n]{a})^n = a$ для всіх значень a, для яких $\sqrt[n]{a}$ має зміст.

Наприклад: знаємо, що корінь 3-го степеня з 8 дорівнює 2, оскільки 2^3=8. Тоді коренем 4-го степеня з числа 1 дорівнює 1 або -1, оскільки $1^4 = 1$ або $(-1)^4 = 1$.

Ми знаємо, що арифметичним коренем n-го степеня з числа a називають невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a, отже тоді $\sqrt[n]{a} = x$ це означає, що $x^n = a$ або $(\sqrt[n]{a})^n$ = а. Наведемо приклад: $\sqrt[3]{27} = 3, \sqrt[4]{1} = 1, \sqrt[5]{32} = 2$. Отже, арифметичний корінь парного степеня лише існує з невід'ємних чисел:

$$\sqrt[2k]{a} = x, k \in N, a \geq 0.$$

Ми знаємо, що арифметичний корінь непарного степеня існує з будь – якого числа, оскільки $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$, для k$\in N$.

Справді, $(-\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = (-1)^{2k+1}(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = -a$.

Основні властивості коренів:

1. Для будь – якого дійсного x
   $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, n - \text{парне} \\ x, n - \text{непарне} \end{cases}$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\ a \geq 0, b \geq 0.$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b \neq 0.$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, a \geq 0.$
5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, a \geq 0.$
6. $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k, a \geq 0.$
7. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

2. Степінь із раціональним показником

Число $\sqrt[n]{a^m}$ називають степенем $a^{\frac{m}{n}}$ числа а > 0 із раціональним показником $\frac{m}{n}$, де $m \in Z, n \in N(n > 1)$. Отже, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Наведемо приклад: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$; $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$.

Тоді степінь числа 0 визначений тільки для додатних показників за означенням: $0^r = 0$ для будь – якого $r > 0$.

Для будь – яких раціональних чисел p і q і будь – яких додатних чисел a і b виходять рівності:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q};\ a^p : a^q = a^{p-q};$$

$$(a^p)^q = a^{pq};\ (ab)^p = a^p \cdot b^p;$$

$$(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p};\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = (\frac{b}{a})^p.$$ [2]

3. Ірраціональні рівняння

Ірраціональними називаються рівняння, у яких під знаком кореня міститься змінна (невідома).

Ми маємо приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt[3]{x}-5x+4=0,\quad \sqrt{x-1}=3-x,\quad \sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$$

Зокрема, більшість ірраціональних рівнянь розв'язують піднесенням обох їх частин до степеня з тим самим натуральним показником. При піднесенні можуть з'явитися незнайомі розв'язки, їх усувають у результаті перевірки.

Приклад 1. Нам потрібно розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x^2+x+11}=2x+1.$$

Розв'яжемо рівняння. Спочатку піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$3x^2 + x + 11 = 4x^2 + 4x + 1$ або $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Потім у нас утворяться корені квадратного рівняння: -5 і 2.

Тоді, якщо x = -5, то маємо $\sqrt{75-5+11} \neq -10 + 1$, бо > $\sqrt{81} \neq -9$;

Тоді, якщо x = 2, то маємо $\sqrt{12+2+11} = 4 + 1$, $\sqrt{25} = 5$.

Отримали відповідь: 2.

Теорема. Маємо рівняння f(x) = g(x) і $f^n(x) = g^n(x)$ рівносильні, якщо натуральне число n непарне або функції f(x) і g(x) можуть набувати тільки невід'ємних значень.

Доведення. Маємо, якщо при деякому значенні x виконується рівність f(x) = g(x), то за однозначністю дії піднесення до степеня і $f^n(x) = g^n(x)$. Це означає, що кожний розв'язок першого рівняння є також розв'язком другого рівняння.

Тоді, якщо вирази f(x) і g(x) можуть набувати тільки невід'ємних значень або якщо число n — непарне, то з рівності $f^n(x) = g^n(x)$ завжди буде випливати рівність f(x) = g(x), бо за таких умов якщо f(x) ≠ g(x), то і $f^n(x) \neq g^n(x)$. Останнє буде випливає з тотожності $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. А це буде означати, що за зазначених умов ми знаємо, що кожний розв'язок рівняння $f^n(x) = g^n(x)$ є також розв'язком рівняння f(x) = g(x). Отже, ми зрозуміли, що множини розв'язків розглядуваних рівнянь збігаються, тому ці рівняння — рівносильні. Тоді маємо:

1) $\left(\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)\right) \Leftrightarrow (f(x) = g^{2k+1}(x))$;

2) якщо $g(x) \geq 0$, то $\left(\sqrt[2k]{f(x)} = g(x)\right) \Leftrightarrow (f(x) = g^{2k}(x))$.

Приклад 2. На потрібно розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{2x^2 - 14x - 15} = -3.$$

Розв'язання. Якщо ми обидві частини рівняння піднесемо до куба, то отри маємо рівняння, рівносильне даному:

$$2x^2 - 14x - 15 = -27 \text{ або } 2x^2 - 14x + 12 = 0,\ x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Тоді будемо мати корені цього рівняння $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. Отже, такі самі корені має і задане рівняння. Отримали відповідь. 1; 6.

Приклад 3. Розв'яжемо дане нам рівняння $\sqrt{x}$+ 6 = x - 1.

Маємо розв'язання. Нам потрібно піднести обидві частини рівняння до квадрата, тоді отримаємо: $x + 6 = x^2 - 2x + 1$, або $x^2 - 3x - 5 = 0$. Коренями цього рівняння отримаємо числа : $x_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{2}$ i $x_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{2}$. Тоді очевидно, що у цьому випадку виконувати перевірку буде складно. Потрібно використати метод рівносильних перетворень. Потрібно звернути увагу! Рівняння виду $\sqrt{f(x)}$= g(x) рівносильне системі:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

У цьому випадку (для рівняння $\sqrt{x}$+ 6 = x - 1) тоді отримаємо: g(x) = x – 1, a x – 1 > 0, якщо x > 1. Оскільки $x_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{2} > 1$, а $x_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{2} < 1$, тоді рівняння має лише один корінь $x_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{2}$. Отримали відповідь. $\frac{3+\sqrt{29}}{2}$.

Тоді звернемо увагу! Ми знаємо, що рівняння виду $\sqrt{\mathrm{f(x)}} = \sqrt{\mathrm{g(x)}}$ $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$рівносильне системі:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

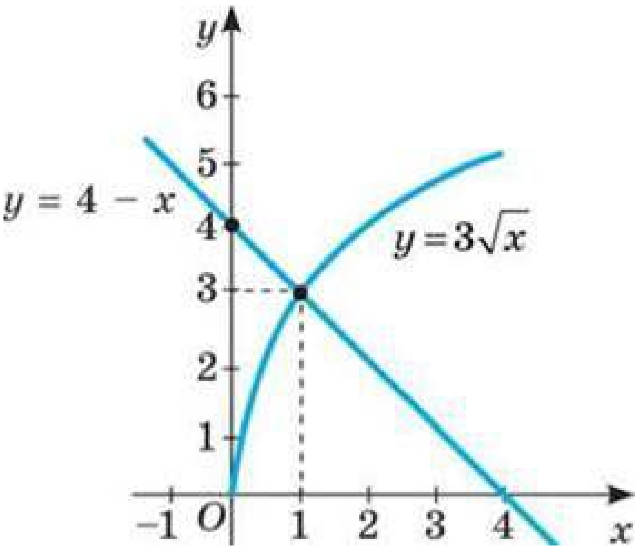
Потрібно обирати ту із систем, у якій нерівність розв’язати простіше.

Приклад 4. Розв’яжемо дане нам рівняння x + $\sqrt[3]{x}$ - 4 = 0.

Розв’язання. Перший спосіб (метод заміни).

Заміною $\sqrt{x}$ = і, тоді t ≥ 0 зведемо дане рівняння до рівняння $t_2 + 3t - 4 = 0$, корені якого отримаємо t_1 = -4, t_2 = 1. Оскільки маємо, що t_1 < 0, то залишилося розв’язати рівняння $\sqrt{x}$= 1, звідси x = 1.

Другий спосіб (графічний). Будемо розв’язувати рівняння $x + \sqrt[3]{x} - 4 = 0$ графічно. Для цього потрібно записати його у вигляді $\sqrt[3]{x}$ = 4 - x і побудувати в одній системі координат графіки функцій y = $\sqrt[3]{x}$ і y = 4 – x, які зображені на малюнку:



На малюнку видно, що графіки перетинаються в точці з абсцисою x = 1.

Ще маємо третій спосіб (з використанням властивостей функцій). Потрібно записати рівняння у вигляді $\sqrt[3]{x}$ = 4 - x. Для всіх має бути x ≥ 0 функція y = $\sqrt[3]{x}$ – зростаючою, а функція y = 4 - x — спадною. Отже, ми отримали, що рівняння може мати тільки один корінь. Тоді випробуванням установлюємо, що x = 1. Відповідь. 1. [2]

2.Ірраціональні нерівності

Ірраціональна нерівність це нерівність, яка містить змінну під знаком кореня. Наприклад, маємо ірраціональну нерівність:

$\sqrt{x+1} > 4, \sqrt[3]{x^2-6} \geq 3, \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2 < 0$. Зазвичай ірраціональні нерівності розв’язують найчастіше методом піднесення обох її частин до одного і того самого степеня.

Теорема. Нехай нерівності f(x) > g(x) і $f_n(x) > g_n(x)$ рівносильні, тоді якщо натуральне число n непарне або функції f(x) і g(x) можуть набувати тільки невід’ємних значень.

Наприклад маємо:

1) Тоді нерівність $\sqrt[3]{2-x}-x\ >x$ рівносильна нерівності 2 - x > x^3. Її неважко буде розв'язати графічно. Розв'язавши, отримаємо: x (-∞; 1).

2) Тоді нерівність > 3 рівносильна нерівності x - 1 > 9. Розв'язавши її, отримаємо: x ∈ (10; +∞).

Тоді розглянемо ірраціональну нерівність виду $\sqrt{f(x)}\ <g(x)$. Цю нерівність можуть бути тільки такі значення x, при яких:

1) f(x) > 0, тому, що підкореневий вираз не може бути від'ємним;

2) g(x) > 0, тому, що невід'ємне число f(x) не може бути менше за від'ємне;

3) f(x) < g^2(x), тому якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то їх можна підносити до квадрата.

Отже, отримали нерівність: $\sqrt{f(x)}\ <g(x)$, яка рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g^2(x). \end{cases}$$

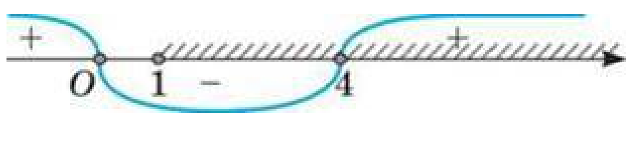
Приклад 1. Потрібно розв'язати нерівність: $\sqrt{2x+1}\ <x-1$.

Розв'язання. Маємо, що дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x+1\geq 0, \\ x-1>0, \\ 2x+1<x^2-2x+1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x\geq -0{,}5, \\ x>1, \\ x^2-4x>0, \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \begin{cases} x>1, \\ x(x-4)>0. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему, ми отримаємо розв'язок на малюнку: x > 4.

Відповідь. (4; +∞).



Тоді розглянемо нерівність виду: $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Отже, нам зрозуміло, що розв'язки даної нерівності повинні задовольняти умову f(x) ≥ 0. Тоді очевидно, що при g(x) < 0 дана нерівність (на множині розв'язків нерівності f(x) ≥ 0) виконується завжди. Тоді якщо g(x) ≥ 0, то отримаємо, що обидві частини нерівності будуть невід'ємними, і їх можна піднести до квадрата. Отже, ми отримали, що дана нам нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Тоді у другій системі перша нерівність є наслідком третьої, тому її можна не враховувати. Отже, ми отримаємо сукупність таких двох систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Приклад 2. Потрібно розв'язати нерівність: $\sqrt{2x+1} > x-1$

Розв'язання. Отже, дана нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1<0, \\ 2x+1 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 2x+1 > x^2-2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \text{ або } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1, \\ x \geq -0,5; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1, \\ x(x-4)<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відомо, що з першої системи x ∈[-0,5; 1), а з другої — x[1; 4). Коли об'єднаємо ці розв'язки, отримаємо: x[-0,5; 4).

Відповідь. [-0,5; 4).[1]

Якщо хочете знати ще більше? Деколи нам потрібно не розв'язати ірраціональну нерівність, а довести її. Нам відомо, що до ірраціональних належать нерівності, пов'язані із середнім квадратичним і середнім геометричним, які часто застосовують у сучасній математиці та прикладних науках.

Зокрема нерівності, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$ відповідно називають середнім арифметичним, середнім геометричним і середнім квадратичним чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і позначають відповідно літерами A_n, Γ_n, K_n. Тоді можна довести, що для додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$завжди $\Gamma_{n,} \leq A_n \leq K_n$. Тоді нам потрібно записати такі твердження для n = 3 і n = 4 і спробувати їх довести. Нерівність $\Gamma_{n,} \leq$ A для n додатних чисел називають нерівністю Коші:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n,} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Далі ми розглянемо ще одну нерівність.

Приклад 3. Потрібно довести, що для невід'ємних чисел a, b, c, d і виконується нерівність: $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ (*)

Тоді потрібно скористатися методом від супротивного. Отже, припустимо, що існують невід'ємні числа a, b, c, d, для яких буде виконуватися нерівність:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Оскільки ми дізналися, що обидві частини невід'ємні, то потрібно піднести їх до квадрата. Тоді отримаємо:

$(a+c)(b+d) < ab + 2\sqrt{abcd} + cd$ або $ab + ad + cb + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd,$ звідси маємо :

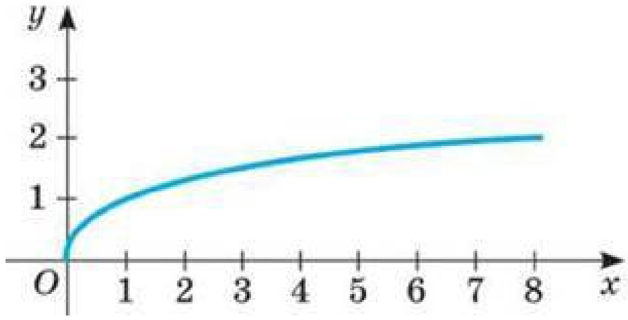
$$ad + cb < 2\sqrt{abcd},$$

тобто $(\sqrt{ad} + \sqrt{cb})^2 < 0$, цього не може бути. Отже, тоді наше припущення неправильне, тобто має місце нерівність (*).[1]

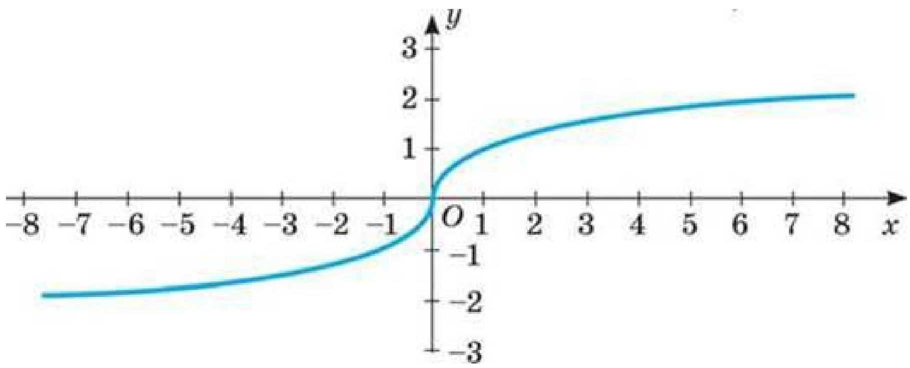
2.2 Розв'язування вправ з теми «Степенева функція» .

1. **Приклад:** потрібно побудувати графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ $і$ $y = 3\sqrt{x}$. Визначимо, що є спільного у графіків цих функцій і чим вони відрізняються?

   Розв'язання. Відомо, що $y = x^{\frac{1}{3}}$ – степенева функція з дробовим показником. Область визначення буде D = [0; +∞). Графік розташований у І чверті, що зображено на малюнку:



Областю визначення буде функція $y = 3\sqrt{x}$— множина всіх дійсних чисел R. Її графік розташований у I і III чвертях, що зображено на малюнку:



Для x ≥ 0 графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ $і$ $y = 3\sqrt{x}$ будуть однакові. [12]

2. **Приклад:** Визначемо чи проходить графік функції $y = x^{0,75}$ через точку (16; 8)? Розв'язання. Дивимось, якщо x = 16, то $y = 16^{0,75} = 16^{\frac{3}{4}} = 8$. Отже, відповідь. Графік функції проходить.
3. **Приклад:** потрібно обчислити:

а) $3^{0,5} \cdot 9^{0,75}$; б) $\left(81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3,6}\right)$.

Розв’язання дане для: а) $3^{0,5} \cdot 9^{0,75} = 3^{0,5} \cdot 3^{2 \cdot 0,75} = 3^{0,5} \cdot 3^{1,5} = 3^2 = 9$;

$$б)\ \left(81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3,6}\right) = \frac{81^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{4}}{3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-3,6}} = \left(\frac{81}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2^{\frac{2}{5}}}{2^{-3,6}} = 27^{\frac{1}{3}}\left(2^{0,4} : 2^{-3,6}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{27} \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48.$$

Відповідь: отже, а) 9; б) 48.

4. **Приклад:** потрібно розв'язати рівняння $\sqrt{2x-6} = 5 - \sqrt{x+4}$.

Розв'язання:

Отже, обидві частини рівняння піднесемо до квадрата. Тоді одержимо $2x - 6 = 25 - 10^{\sqrt{x+4}} + x + 4$, або після перетворення $10^{\sqrt{x+4}} = 35 - x$.

Тоді, знову піднесемо до квадрата обидві частини рівняння:

100(x + 4) = (35 – x)2;

100x + 400 = x2 – 70x + 1225;

x2 – 170x + 825 = 0;

звідси $x_1 = 5$, $x_2 = 165$.

Перевірка: 1)$\sqrt{2 \cdot 5 - 6} = \sqrt{4} = 2,\ \ 5 - \sqrt{5+4} = 5 - 3 = 2;$

2) $\sqrt{2 \cdot 165 - 6} \neq 5 - \sqrt{165+4}$.

Відповідь: 5.

5. **Приклад:** потрібно розв’язати рівняння: 1)$\sqrt[3]{x}^{2} = 1$; 2*) $x^{\frac{2}{3}} = 1$.

Розв'язання

1) Якщо $\sqrt[3]{x}^2$ = 1. Тоді ОДЗ: x ∈ R,

$x^2 = 1$;

x = ±1.

Відповідь: ±1.

2*) Якщо $x^{\frac{2}{3}}$ = 1. Тоді ОДЗ: x > 0.

$x^2 = 1$;

x = ±1.

Враховуючи ОДЗ, ми одержуємо x = 1.

Відповідь: 1.

Внесемо коментар до завдання: якщо, область допустимих значень рівняння $\sqrt[3]{x}^2$= 1 будуть усі дійсні числа, а рівняння $x^{\frac{2}{3}}$ = 1 буде тільки x ≥ 0. Коли піднесемо обидві частини рівняння до куба, то одержемо рівняння, рівносильне заданому на його ОДЗ. Отже, тоді перше рівняння задовольняють усі знайдені корені, а друге — тільки невід'ємні. [12]

(У завданні 1 також ураховано, що $\sqrt[3]{x}^2 = x^2,$ а в завданні 2 — що $(x^{\frac{2}{3}})^3 = x^{\frac{2}{3}} \cdot 3 = x^2$.

6. **Приклад:** потрібно розв’язати рівняння:

а) 4 = $x^{\frac{2}{7}}$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} = 3$.

Розв'язання а) ОДЗ: (0; +∞). Нам потрібно піднести обидві частини рівняння до степеня 7. Тоді отримаємо: $(x^{\frac{2}{7}})^7 = 4^7$або $x^2 = 2^{14}$. Коренями цього рівняння будуть $x_1 = -2^7$, $x_2 = 2^7 = 128$. Від'ємний корінь потрібно відкинути.

б) ОДЗ: (0; + ∞). Нехай $x^{\frac{1}{3}} = y$, тоді $x^{\frac{2}{3}} = y^2$. Отримали рівняння: $y^2 + 2y - 3 = 0$. Його коренями будуть $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Від'ємний корінь потрібно відкинути. А якщо $x^{\frac{1}{3}} = 1$, то $x = 1$.

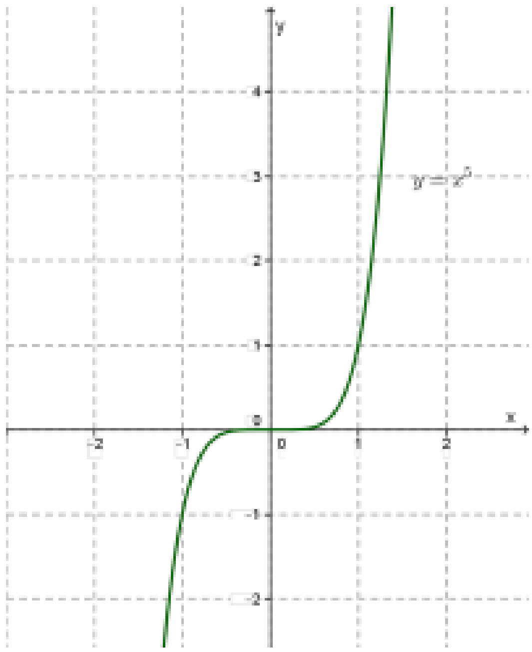
Зверніть увагу! Якби рівняння було записане у вигляді $\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} = 3$, тоді б воно мало б іншу ОДЗ і ще один корінь: x = -27.

Отримали відповідь. а) 128; б) 1. [4]

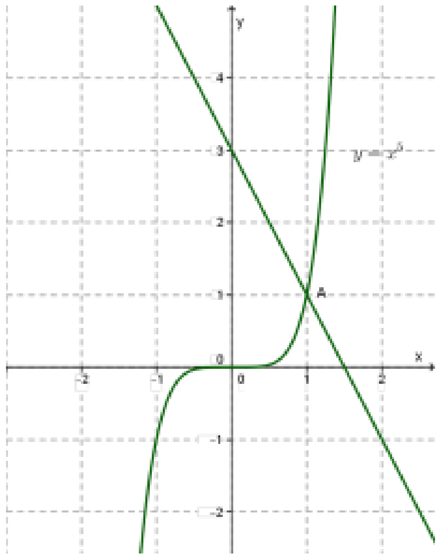
7) **Приклад:** потрібно розв'язати рівняння: $x^5 = 3 - 2x$

Розв'язання:

1. потрібно розглянути дві функції: $y = x^5$, $y = 3{-}2x$
2. тоді побудуємо графік функції $y = x^5$.



3. потрібно побудувати графік лінійної функції $y = 3{-}2x$. Це пряма лінія, що проходить через точки (0;3) та (1;1).



4. отже, за кресленням ми бачимо, що побудовані графіки перетинаються в точці А (1;1). Нам перевірка показує, що насправді координати точки А (1;1) задовольняють і рівняння у = x^5 , і рівняння у = 3–2х. Отже, відповідь: рівняння має один корінь: х=1 — це абсциса точки А.

8)Приклад. Для того, щоб побудови графік функції у = $(x-7)^6$–3 необхідно перейти до допоміжної системи координат. Тоді визначити координати початкової точки О1 в допоміжній системі координат.

9) Приклад. Нам функція задана формулою f(x) = x^4. Потрібно обчисли різницю f(3) − f(0) та f(1) − f(0) і порівняй отримані результати.

10) Приклад. Потрібно визначити розв'язок рівняння $|x-3|-|2-x|=-0{,}4$ у проміжку (2, 3).

Розв'язання

Для значень x з проміжку (2, 3) маємо $|x-3|=3-x$ і $|2-x|=x-2$ Отже, при $x\in(2,3)$ рівняння буде мати вигляд $-x+3+2-x=-0{,}4$. Звідси $-2x=-5{,}4$ і $x=2{,}7$

Відповідь: отримали 2,7 [4]

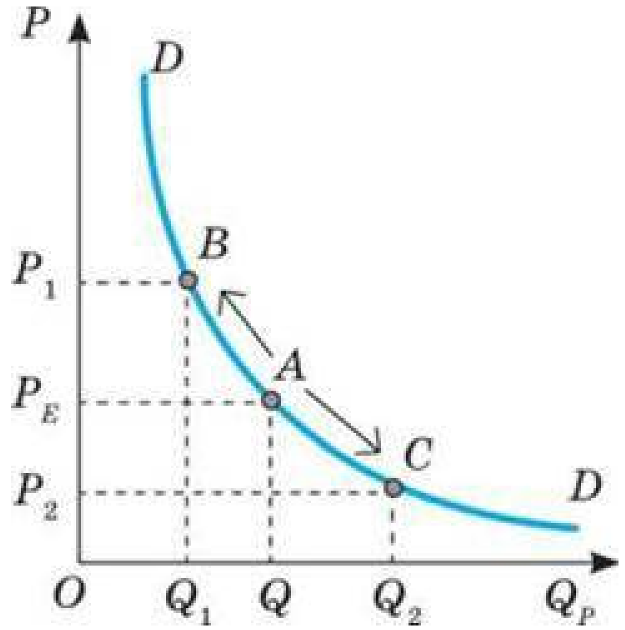
Висновки

Отже, вивчення теми «Степенева функція» сьогодні є доволі актуальною. Основною метою для вивчення є формування уявлення про функції як математичної моделі залежності між величинами й об'єктами, введення поняття про основні задання функції на прикладах прямої й оберненої пропорційності, розгляд функцій $y = kx + b, y = kx, y = \frac{k}{x}, y = x^2, y = x^3, y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ та їхніх графіків. Уже у сьомому класі вводиться одне з основних математичних понять — поняття функції. Також розглядається лінійна функція та її графік. Згодом ці основні поняття потрібно використовувати для графічної ілюстрації розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а також системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Тоді інші види функцій розглядаються у зв'язку з вивченням відповідного матеріалу, що стосується решти змістових ліній курсу. Зокрема, вже у 8 класі в темах ,,Раціональні вирази'' та ,,Квадратні корені'' учні уже ознайомлюються з функціями $y = \frac{k}{x}$ і y = $\sqrt{x}$, $y = kx + b, y = x^2, y = kx, y = x^3$та їх властивостями. У 9 класі розглядається квадратична функція. Вивчення її властивостей пов'язане з розв'язуванням різних квадратних нерівностей. Ще у 9 класі розглядається така функція: $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. У 10 класі учні повинні формулювати означення кореня *n-го* степеня, арифметичного кореня n-го степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів та степеня з раціональним показником,

обчислювати**,** оцінювати та порівнювати значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками, зображувати графік степеневої функції, розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами, застосовувати властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей. Отже, функціональна лінія проходить через весь курс алгебри основної школи і розвивається у тісному зв'язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. Властивості функцій встановлюються за допомогою їх графіків, інші властивості обґрунтовуються аналітично. Отож, у міру оволодіння учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується. Під час вивчення функцій важливе місце відводиться для формування умінь будувати і читати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують.

Зокрема, степеневі функції застосовують на практиці для опису різних економічних процесів, ще, їх використовують для опису кривих, а також попиту і пропозиції стосовно товарів різних категорій. Важливі елементи ринкової економіки є – попит і пропозиція, отож, їх співвідношення формує ціни на товари та послуги.

Крива попиту що зображена на малюнку, показує нам можливу кількість товару, який вдається продати за певний час за цінами даного нам рівня, зокрема, і те, що при підвищенні ціни ($P_1 > P_2$) величина попиту зменшується ($Q_1 < Q_2$).



У роботі було розглянуто: історію виникнення функції, її основні означення, теореми й твердження, розв’язування різних видів прикладів з теми функції, особливості вивчення степеневої функції .

Отже, дана робота може бути корисною для студентів математичних спеціальностей та учнів старших класів при ознайомленні і вивченні функції.

Результати роботи доповідались на звітній науковій конференції викладачів, співробітників і здобувачів вищої освіти Рівненського державного гуманітарного університету за 2021 рік.

Список використаних джерел

1. http://zno.academia.in.ua/mod/book/view.php?id=3043&chapterid=717
2. https://mon.gov.ua/ua
3. Агафонова А.О. Математичні дрібнички / А.О. Агафонова // Математика в школах України. – 2016. – № 31-32. – С. 71-74.
4. Бевз Г.П. Алгебра: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2007. – 208 с.
5. Бевз Г.П. Алгебра: підручник Алгебра і початки аналізу 10 клас (профільний рівень) - Г. П. Бевз - Освіта 2018 рік. – 210 с.
6. http://zno.academia.in.ua/mod/book/tool/print/index.php?id=3054
7. Вірченко Н. О. Графіки елементарних та спеціальних функцій : довідник / Н. О. Вірченко, І. І. Ляшко. – К. : Наук. думка, 1996. – 582 [1] с.
8. Гурский И. П. Функции и построение графиков : пособие для учителей / И. П. Гурский. – М. : Просвещение, 1968. – 215 с.
9. Танатар И. Я. Геометрические преобразования графиков функций : пособие для учителей / И. Я. Танатар. – М. : Учпедгиз, 1960. – 78 с.
10. Афанасьєва О.М. Я обираю математику! 7-9 класи.Посібник для факультативних занять і самостійної роботи учнів. – Х.: Вид. група «Основа», 2010.
11. http://ndavydkovo.blogspot.com/2016/03/blog-post_3.html
12. Сивашинский И. Х. Элементарные функции и графики : теория и задачи с решениями / И. Х. Сивашинский. – М. : Наука, 1966. – 242 с.