Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота бакалаврського рівня
на тему:

Методика вивчення теми «Первісна та інтеграл» у класах профільного рівня

Виконала:
студентка IV курсу групи МІ-41
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Михалко Катерина Олександрівна

Керівник: канд. пед. наук, проф. кафедри математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. кафедри вищої математики
Сапіліді Тамара Михайлівна

Рівне – 2023 р.

Зміст

ВСТУП

Математика займає особливе місце у системі знань людства, виконуючи роль універсального та потужного методу сучасної науки. Тому особливу увагу варто приділити з'ясуванню ролі математики в сферах її застосувань.

Для курсу «Алгебра і початки аналізу» однією з провідних змістових ліній навчання є функціональна, тому у процесі навчання приділяється особлива увага дослідженням властивостей функцій у тій чи іншій формі. Важливо при цьому демонструвати взаємозв'язок між основними поняттями курсу: функція, рівняння та нерівність. Зокрема, розв'язання рівняння $f(x) = 0$, нерівностей $f(x) > 0,\ f(x) < 0$, є окремими випадками задачі на дослідження функції $y = f(x)$ (знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості). Функції моделюють реальні процеси, тому в уявленні учнів має асоціюватися характер реального процесу із відповідною функцією, її графіком та властивостями. Наприклад, змінювання маси радіоактивної речовини має викликати уявлення про функцію $m = m_0e^{-kt}(k > 0)$. Важливо, щоб притаманні явищу властивості (наприклад, зменшення чи збільшення маси, розпад речовини з часом) пов'язувались із властивостями функцій (спадання, зростання, прямування до нуля, коли $t \to \infty$).[27]

Одним із головних завдань вивчення математики на профільному рівні є розвиток графічної культури учнів.[27]

Однією з тем шкільного курсу математики, яка вивчається учнями в 11 класі є тема «Первісна та інтеграл». Інтеграл з'явився в школі внаслідок реформи шкільної математичної освіти кінця 60-х початку 70-х років XX століття, саме тоді почали вводити в школі елементи математичного аналізу. Багато науковців, зокрема Г. Бевз, підкреслювали, що ознайомлення учнів з поняттями і методами математичного аналізу навіть на рівні загальних уявлень має для них велике пізнавальне, розвивальне, загальнокультурне значення. Така точка зору не втратила своєї актуальності і на сьогодні. Специфіка міркувань, властивих математичному аналізу, сприяє формуванню уявлень про математику як науку, що розвивається, мислення, яке необхідне в даний час кожній освіченій людині, і відповідає соціальним вимогам концепції модернізації освіти, яка полягає в орієнтації не тільки на засвоєння учнями певних знань, а й на розвиток пізнавальних і творчих здібностей, успішної соціалізації в суспільстві.

До поняття похідної приводять багато задач природознавства, математики, техніки. Тому його доцільно вводити як узагальнення результатів розв'язання відповідних прикладних задач. Це одразу виділяє головний прикладний зміст поняття, робить його більш природним і доступним для сприймання. При формуванні поняття похідної слід виробляти розуміння того, що похідна моделює не лише швидкість механічного руху, а й швидкість зміни будь-якого процесу з часом (наприклад, швидкість нагрівання тіла, швидкість випаровування тощо). Одночасне вивчення фізичного та геометричного змісту похідної дає можливість показати учням зв'язок між швидкістю протікання процесу та «крутизною» його графіка.[27]

Вивчення теми «Інтеграл та його застосування» починається з розгляду сукупності первісних даної функції. Формування технічних навичок інтегрування не повинно підмінювати використання інтегралів при моделюванні реальних процесів.[27]

Основною формою проведення занять залишається система уроків: вивчення нового матеріалу, формування вмінь розв'язувати задачі, узагальнення та систематизації знань, контролю та корекції знань. Поряд із цим ширше, ніж при вивченні курсу математики на академічному рівні, використовується шкільна лекція, семінарські та практичні заняття, а також нетрадиційні форми навчання (динамічні слайд-лекції, дидактичні ігри, уроки «однієї задачі», «однієї ідеї», математичні «бої», інтегровані уроки математики і фізики, поєднання вивчення алгебри і початків аналізу з обробкою (у тому числі комп'ютерною) даних, одержаних під час проведення лабораторних і практичних робіт на уроках фізики, астрономії, хімії, біології тощо.[27]

Вибір вивчення математики на профільному рівні передбачає наявність стійкого усвідомленого інтересу кожного учня до математики, схильності до вибору в майбутньому професії, пов'язаної з нею.

Формування навичок знаходити первісну та інтеграли є важливим аспектом при вивченні алгебри і початків аналізу, оскільки більшість учнів складають зовнішнє незалежне оцінювання з математики, в якому широко представлені завдання з даної теми. В класах з поглибленим вивченням математики, зазвичай, здібні діти, мотивовані до вивчення математики, але в них також виникають труднощі при вивченні цієї теми, оскільки високий рівень абстракції понять, складна логічна структура їх означень, недостатність часу для осмислення складних питань та багато іншого. В результаті це призводить до того, що знання учнів з теми носять формальний характер. В них не складається цілісного уявлення про поняття інтеграла. Отже, актуальною на сьогодні є проблема визначення і обґрунтування можливостей удосконалення методики вивчення інтеграла у курсі алгебри і початків аналізу в класах з поглибленим вивченням математики.

Все вищезазначене і обґрунтовує вибір теми кваліфікаційної роботи та визначає її актуальність.

Мета дослідження: розкрити методику вивчення теми «Первісна та інтеграл» в курсі алгебри та початків аналізу у класах профільного рівня.

Об'єкт дослідження: процес навчання алгебри і початків аналізу на поглибленому рівні в загальноосвітніх школах.

Предмет дослідження: зміст і методика вивчення первісної та інтеграла в класах профільного рівня.

Відповідно до мети було поставлено **завдання дослідження:**

1. Проаналізувати науково-теоретичні джерела, навчальні програми та підручники з теми дослідження.
2. Розкрити методику вивчення первісної та інтеграла.
3. Підібрати систему завдань по первісній та інтегралу з шкільного курсу математики.

Методи дослідження:

– теоретичні: аналіз психолого-педагогічної, навчально-методичної літератури, змісту навчальних програм підручників і посібників з курсу «Алгебра і початки аналізу» для поглибленого рівня;

– емпіричні: спостереження за процесом вивчення теми «Первісна та інтеграл» в загальноосвітніх школах.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містять 40 найменувань та додатків.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ПЕРВІСНОЇ ТА ІНТЕГРАЛА

1.1 Становлення та розвиток понять «первісна» та «інтеграл» в математиці

Інтегрування можна простежити ще в Стародавньому Єгипті, приблизно в 1800 році до н. е.

Першим відомим методом для обчислення інтегралів був метод вичерпування Евдокса (приблизно 370 до н. е.), який намагався знайти площі та об'єми, розбиваючи їх на нескінченну кількість частин з відомою площею чи об’ємом. Цей метод був підхоплений і розвинений Архімедом для обчислення площі параболи і наближеної площі кола. Подібні методи незалежно розвинулися в Китаї в 3 столітті н. е. Лю Хуейєм, який використовував їх для знаходження площі круга. Цей метод був згодом використаний Дзю Чонгши для знаходження об'єму кулі.

Фундаментальним внеском Евдокса в математику став метод вичерпування, що отримав таку назву в XVII ст. і застосовувався при доведенні теорем, пов'язаних з обчисленням площ, об'ємів і інших величин. Він вважається першим варіантом теорії меж.

У основі методу лежала лема: якщо a і b, $a > b$ – дві величини, підлеглі аксіомі Евдокса—Архімеда, і якщо відняти з a більше її половини, із залишку більше його половини і продовжувати так необмежено, то після деякого кінцевого числа операцій вийде залишок $\alpha_k < a/2^4 \leq b$. Це означає, що межа α_k рівна 0.

Пояснимо застосування методу вичерпування. Припустимо, що необхідно обчислити площу деякої фігури, тобто знайти величину А. У цю фігуру вписувалися фігури, площі яких відомі і утворюють монотонну послідовність $A_1 < A_2 < \cdots < A_n$ причому повинно бути

$$A - A_1 < {}^{A}/_{2}, A - A_2 < (A - A_1)/2 < {}^{A}/_{4}, \ldots, A - A_n < {}^{A}/_{2^n}.$$

Тоді через основну лему при великому n різниця $A - A_n$ може бути менше будь-якої величини b. Далі відшукувалася границя послідовності $\{A_i\}$, тобто таке число B, що різниця $B - A_n$ ставала як завгодно малою. Завершувалося знаходження A доведенням того, що A = B. Якщо скористатися сучасною термінологією елементарного аналізу, то доводилося, що з рівності $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim_{n\to\infty} A_n = B$ слідувало A = B.

У стародавні часи математичний метод вичерпування використовувався для суворого підтвердження достовірності результатів, отриманих різними неправильними операціями з нескінченністю, граничними переходами. Шляхом вичерпання Евдокс довів такі теореми: площі кругів відносяться як квадрати діаметрів; об'єм піраміди рівний 1/3 об'єму призми, що має з пірамідою ті ж основу і висоту; об'єм конуса рівний I/3 об'єму циліндра, що має з конусом ті ж основу і висоту. Евклід до них додав ще теорему про те, що об'єми куль відносяться як куби діаметрів.

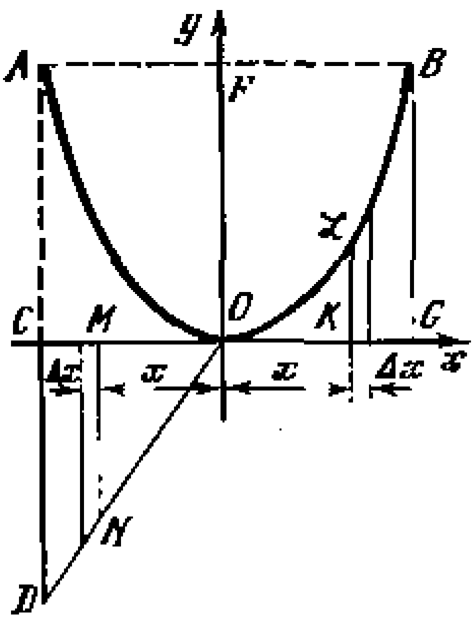
Архімед вдосконалив метод вичерпування Евдокса і успішно використовував його для доведення багатьох теорем. Це початок інтегрального методу.

За допомогою методу вичерпування Архімед знайшов, наприклад, наступні найважливіші результати: площа сегменту параболи рівна $\frac{4}{3}$ площі вписаного в нього трикутника; об'єм кулі більший у чотири рази за об'єм конуса, у якого основою служить великий круг кулі, а висотою його радіус; площа поверхні кулі рівна збільшеній у чотири рази площі великого круга. Архімед застосовував метод вичерпування не тільки для встановлення нових фактів, а і обґрунтування відомих раніше, але не доведених.

Далі Архімед оголосив, що опублікує цей метод, сподіваючись вшанувати попередні згадки про нього та допомогти теперішнім і майбутнім математикам зробити нові відкриття.

При обчисленні площі сегмента параболи Архімед розглядав його і відповідний трикутник як «суми відрізків», а об'єми — як «суми площ». Він встановив об'єми кулі і кульового сегменту, еліпсоїда обертання, параболоїда обертання, центрів тяжіння фігур і тіл; розглянув завдання про знаходження об'єму «циліндрового копита» — тіла, отриманого при перетині циліндра площиною, що проходить через діаметр основи, і «монастирського зведення» — частини простору, що висікається двома рівними циліндрами, осі яких перпендикулярні. Об'єм «циліндрового копита» Архімед знаходив за допомогою принципу важеля, після чого проводив геометричне доведення.

Пояснимо суть механічного методу Архімеда на прикладі як він обчислював площу параболічного сегменту. Архімед визначав площу сегменту



AOB з основою $\mathrm{AB} = 2l$ і висотою $OP = h$. Для простоти знайдемо площу, ув'язнену між дугою параболи $y = ax^2$, віссю $0x$ л прямої $x = l$. Це не буде значним відхиленням від міркування Архімеда. Розглянемо важіль CG довжини $2l$ з точкою опори 0. На правому плечі важеля хай знаходитиметься фігура $0BG$; розіб'ємо її на вузькі смуги ширини Δx. На малюнку така смужка KL розташована від початку координат на відстані x. Ордината KL буде ax^2, тому площа смужки приблизно рівна $ax^2 \cdot \Delta x$. Зрушимо цю смужку на кінець важеля, в точку G, і підрахуємо момент її щодо точки O; знайдемо $l \cdot ax^2 \cdot \Delta x$. Зрівноважимо цю смужку смужкою площі $MN \cdot \Delta x$, підвішеною до лівої частини важеля на відстані $\mathrm{OM} = x$ від точки O. Ординату MN отримаємо, якщо прирівняємо моменти смуг щодо точки O. Це дасть: $x \cdot MN \cdot \Delta x = l \cdot ax^2 \cdot \Delta x, MN = alx$.

Зробимо так з кожною смужкою і отримаємо на лівому плечі важеля ряд безперервно розподілених смужок по всій довжині його OC. Ординати їх пропорційні x, тому кінці підвісків розташовуватимуться на прямій OND, при цьому $CD = al^2$.

Розміщені таким чином по плечу ОС важеля смуги, складові трикутника OCD, зрівноважать зосереджену в точці G площа фігури OGB. Площа трикутника OCD рівна $\frac{1}{2}al^2 \cdot l$; його центр тяжіння знаходиться від вершини O на відстані $\frac{2OC}{3} = \frac{2l}{3}$. Користуючись тим, що важіль знаходиться в рівновазі, прирівняємо моменти щодо точки O площі трикутника OCD і площі фігури OGB, зосередженої в точці G. Отримаємо $\frac{2l}{3} \cdot \frac{al^2}{2} \cdot l = Sl$, звідки $S = \frac{al^3}{3}$. Оскільки ордината точки B рівна al^2 шукана площа буде $S = OG \cdot \frac{BG}{3}$.

Отже, площа сегменту AOB параболи складає $\frac{2}{3}$ площі прямокутника $ABGC$, тобто $\frac{4}{3}$ площі вписаного в сегмент трикутника, що і встановив Архімед.

Наведений приклад, очевидно, що не може залишити байдужими жодного знавця математики.. Але він не містить ще початків інтегрального числення. Ці початки з'являються, коли Архімед вводить аналоги сум Дарбу.

Уточнення Архімедом ідеї Демокріта щодо поділу плоских фігур на елементарні смуги «заповнених» фігур і поділу предметів на шари заповнених фігур мало важливе значення для розвитку числення. Таких елементарних частин могло бути нескінченна множина або скінченне число. Завдяки цим діям Архімед випередив ідеї Кеплера і Кавальєрі щодо визначення числових характеристик різних геометричних об’єктів. У Кавальєрі навіть деякі вирази співпадають з тими, які вживав Архімед: обидва говорили про всі лінії, що заповнюють плоску фігуру, і про всі плоскі перетини, що заповнюють об'єм.

Метод інтегральних сум розроблений Архімедом і застосований до обчислення площ і об'ємів в його творах «Про кулю і циліндр», «Про коноїди і сфероїди», «Про спіралі».

Отже, вперше ідею інтегрування знаходимо в працях Архімеда. Вона виникла з потреб практики і ніяк не була вільним творінням розуму.

У XVII ст. велика група математиків займалася наступними основними завданнями: проведенням дотичної до кривої, що привело до виникнення диференціального числення, і обчисленням квадратури, що спричинило виникнення інтегрального числення. Заслуга Ньютона і Лейбніца полягала у відшуканні внутрішнього зв'язку між цими завданнями, синтез яких і був основою для створення могутнього знаряддя науки і наукового природознавства. Користування теоремою про взаємну оберненість операцій диференціювання і інтегрування і знання похідних багатьох функцій дали Ньютону можливість по флюксіях отримувати флюенти (функції), тобто інтегрувати. Якщо інтеграли безпосередньо не обчислювалися, Ньютон розкладав підінтегральну функцію в степеневий ряд і інтегрував його почленно. Введення такого прийому – заслуга Ньютона. Для розкладання функцій в ряди він найчастіше користувався відкритим ним розкладанням степеня бінома, діленням чисельника на знаменник, знаходження кореня.

У творі "Аналіз за допомогою рівнянь з нескінченним числом членів" (1669 р., опублікований 1711 р.) Ньютон обчислив похідну й інтеграл будь-якої статечної функції.

Різні раціональні, дробово-раціональні, ірраціональні і деякі трансцендентні функції (логарифмічну, показову, синус, косинус, арксинус) Ньютон виражав за допомогою нескінченних ступеневих рядів. У цій же праці Ньютон виклав метод чисельного розв’язання алгебраїчних рівнянь, а також метод для знаходження розкладання неявних функцій у ряд по дробових ступенях аргументу.

Метод обчислення і вивчення функцій їхнім наближенням нескінченними рядами набув величезного значення для всього аналізу і його додатків.

Найбільш повний виклад диференціального й інтегрального числень міститься в "Методі флюксій..." (1670-1671 р., опубл. 1736 р.). Тут Ньютон формулює дві основні взаємо-зворотні задачі аналізу: 1) визначення швидкості руху в даний момент часу по відомому шляху, чи визначення співвідношення між флюксіями по даному співвідношенню між флюентами (задача диференціювання), і 2) визначення пройденого за даний час шляху по відомій швидкості руху, чи визначення співвідношення між флюентами по даному співвідношенню між флюксіями (задача інтегрування диференціального рівняння і, зокрема, відшукування первісних).

Метод флюксій застосовується тут до великого числа геометричних питань (задачі на дотичні, кривизну, екстремуми, квадратури, випрямлення тощо); тут же виражається в елементарних функціях ряд інтегралів від функцій, що містять квадратний корінь із квадратичного тричлена.

Велика увага приділена в "Методі флюксій" інтегруванню звичайних диференціальних рівнянь, причому основну роль відіграє представлення розв’язку у вигляді нескінченного степеневого ряду.

Ньютонові належить також розв’язок деяких задач варіаційного числення.

У введенні до "Міркування про квадратуру кривих" (основний текст 1665-66 р., введення й остаточний варіант 1670 р., опублікований 1704 р.) і в "Початках" він намічає програму побудови методу флюксій на основі вчення про межу, про "останні відносини зникаючих величин" чи "перших відношеннях величин, що зароджуються", не даючи, формального визначення межі і розглядаючи її як первісне. Необхідно відзначити, що ні у Ньютона, ні у Лейбніца не було формули:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), F'(x) = f(x),$$

званою зараз формулою Ньютона – Лейбніца. Але це правило вони знали. Ньютон писав: «...для отримання належного значення площі, прилеглої до деякої частини абсциси, цю площу завжди слід брати рівній різниці значень z, відповідних частинам абсцис, обмежених початком і кінцем площі».

Викликає інтерес розробка Лейбніцем символіки диференціального і інтегрального числень. Її можна прослідкувати по рукописах. Так, 26 жовтня 1675 року Лейбніц виражав квадратуру у дусі Паскаля словами *omn.* w (всі ординати); 29 жовтня відмітив, що зручніше писати замість *omn.* l вираз $\int l$ (сума ліній, знак $\int$ походить від першої букви слова summa), і вказав, що тут виникає новий рід числення. Інший рід числення з'являється, по словах Лейбніца, коли з виразу $\int l = a$ слідує $l = \frac{ya}{d}$. Знак $\int$ збільшував число вимірювань, а d –

зменшував (d – перша буква слова differentia – різниця). Вже в рукописі 11 жовтня символи $\frac{x}{d}$ і $\frac{y}{d}$ замінені на dx про dу.

Інтеграл Лейбніц розумів як суму нескінченного числа доданків – визначений інтеграл. У одному з рукописів є запис $dx =$ x. Це означає, що взаємна оберненість дій диференціювання і інтегрування у Лейбніца виступали на оперативному рівні. Лейбніц замість слова «інтеграл» вживав «сума»; термін «інтеграл» ввів І. Бернуллі.

Восени 1675 року Лейбніц сформулював основні поняття диференціального і інтегрального числення. Він дав загальні правила розв’язування завдань на квадратуру і дотичні, встановив зв'язок між завданнями диференціювання і інтегрування, ввів символіку обох операцій, що збереглася понині.

Дві роботи (1701 і 1703 рр.) Лейбніц присвятив інтегруванню раціональних дробів. Для інтегрування раціонального дробу він виділяв з неї цілу частину, після чого правильний раціональний дріб представляв у вигляді суми простіших. У зв’язку з інтегруванням раціональних дробів в аналіз увійшли комплексні числа і виникла суперечка про логарифми негативних чисел.

Відкриття Ньютона і Лейбніца зробило переворот в математиці. Якщо раніше вона була доступна лише вузькому колу фахівців, які виконували кожне окреме завдання придуманими ними методами, то після створення алгоритму диференціального і інтегрального числення, який застосовується до багатьох завдань, математика стала інструментом в руках людей, що займаються різними дослідженнями, але що не володіють достатньо глибокими математичними знаннями.

Після знаменного часу Ньютона і Лейбніца розвиток ідеї інтеграла пішов в двох напрямах: інтеграл, що трактувався як межа деякої суми, певний інтеграл, набував досконалих і всеосяжних форм, знаходив все більше і більше застосування при розв’язуванні задач самої математики, в якій він склався, механіки, фізики, проник в технічні науки і став інструментом, необхідним у всіх галузях природних наук; інтеграл як сімейство первісних, невизначений інтеграл, своїм розвитком викликав виникнення абсолютно нового розділу аналізу – методів інтегрування функцій, а це у свою чергу було зв'язано з появою функцій, не відомих раніше, – клас інтегрованих функцій весь час поповнювався; найважливіше застосування невизначеного інтеграла відноситься до інтегрування диференціальних рівнянь, складових могутнього апарату багатьох наук.

Дослідження інтеграла після Рімана не припинилися, а пішли прискореним темпом. Багато математиків зробили значний внесок в теорію інтеграла в другій половині XIX-XX ст. Інтеграл був, є і буде стрижньовим поняттям в математиці. Не випадково символом Міжнародного математичного конгресу, який проходив в Москві в 1966 р., був знак інтеграла.

Для подальших узагальнень інтеграла всередині самої математики повинні були дозріти умови, що допускають це. Такі умови створила, розроблена в кінці XIX ст.-поч. XX ст. теорія множин, з найважливішим поняттям міри множини. Виникло нове поняття – інтеграл Лебега, узагальнений інтеграл Рімана. Лебег ввів дескриптивне визначення інтеграла: сформулював його властивості, що не містять вказівок на побудову. Він дав також конструктивне визначення інтеграла – аналітичне і геометричне.

Роботи Лебега послужили значним імпульсом для подальших досліджень в математиці. Теорія міри і інтеграл Лебега служать теоретичним інструментом в сучасній теорії диференціальних рівнянь, в теорії математичної фізики, теорії узагальнених функцій, теорії лінійних операторів і спектральної теорії, теорії вірогідності, теорії випадкових процесів та інших розділах математики.

Майже одночасно з Лебегом при розв’язанні задачі про розподіл маси $\varphi(x)$ на інтервалі $[0, x)$ узагальнення інтеграла Рімана здійснив Т. Стілтьєс. Введення інтеграла Стілтьєса (1856-1894) також привело до нових робіт, присвячених його властивостям, різним застосуванням, з'ясуванню зв'язку інтеграла Стілтьєса з інтегралами Рімана і Лебега.

У 1912 році з'явилося узагальнення інтеграла Лебега – інтеграл А. Данжуа (1884-1973), що викликав новий потік досліджень. У 1930 р. А.І. Колмогоров (р. 1903) опублікував роботу, в якій охоплені всі інтеграли як межі різних інтегральних сум. Інтеграл Колмогорова знайшов застосування в математичній фізиці, при математичному обґрунтуванні квантової механіки.[17]

1.2 Аналіз теми «Первісна та інтеграл» у програмі математики з поглибленим вивченням

Тему «Первісна й інтеграл» вивчають в 11 класі. Вивчення полягає у запровадженні понять первісної та інтеграла, операції інтегрування як оберненої до операції диференціювання; застосуванні інтеграла до розв’язування задач.

Вимоги до учнів під час вивчення даної теми:

- знати означення первісної, інтеграла, розуміти зміст операції інтегрування як оберненої до операції диференціювання;

- уміти знаходити первісні та найпростіші інтеграли, користуючись таблицею і правилами знаходження первісних;

- уміти застосовувати інтеграл до обчислення площ криволінійних трапецій і об’ємів найпростіших тіл обертання.[27]

Не всі терміни, що вводяться в цій темі, відповідають тим, якими послуговуються у курсах математичного аналізу вищої школи. Програма і актуальні шкільні навчальні підручники не передбачають використання термінів «невизначений інтеграл», «визначений інтеграл». Вони використовують один термін «інтеграл», що означає «визначений інтеграл». Не використовується символ невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$. Для символу інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ вводяться а і b - межі інтегрування. Зміст множника dx і термін «диференціал аргументу» не використовуються тому, що поняття диференціала аргументу і функції в школі не вивчають. Через це залишається пояснити учням, як читати вираз $\int_a^b f(x)dx$, і запропонувати їм сприймати цей символ як єдиний для позначення інтеграла.

Темі «Первісна та інтеграл» передує тема «Похідна та її застосування». Така послідовність вивчення матеріалу створює передумови для:

1) розуміння учнями взаємозв'язку між операціями диференціювання та інтегрування функцій, а також основної ідеї методу диференціального й інтегрального числень;

2) усвідомлення учнями того факту, що апарат похідної та інтеграла - основа методу математичного аналізу.

З одного боку, він виступає як мова, що описує багато явищ, процесів світу. З іншого - як інструмент, за допомогою якого з урахуванням особливостей мови досліджуються ці явища і процеси. Основу змісту теми складають два типи питань, кожне з яких групується навколо двох понять: «первісна», «інтеграл». Основна увага при вивченні приділяється:

1) знаходженню первісних та обчисленню інтегралів на базі таблиць первісних та правил знаходження первісних,

2) обчисленню площ криволінійної трапеції.

Можна виділити наступні основні завдання при вивченні теми:

– Введення понять первісної та інтеграла;

– Ознайомлення учнів з основними властивостями первісних і правилами знаходження первісних;

– Розкриття змісту операції інтегрування як операції, зворотної по відношенню до операції диференціювання заданої функції;

– Провести класифікацію типів завдань (знаходження площі криволінійної трапеції, знаходження об'єму тіла, завдання з фізичним змістом), показати, яким чином реалізується метод інтегрального числення.

При цьому звернути увагу на виділення в процесі їх виконання етапів, що характеризують процес математичного моделювання.

Теоретичний матеріал включає в себе поняття первісної та її основну властивість поняття інтеграла функції; зв'язок між поняттями «інтеграл» і «первісна», який встановлюється за допомогою формули Ньютона-Лейбніца; формула Ньютона-Лейбніца як апарат обчислення інтеграла даної функції. Перераховані поняття вводяться на дедуктивній основі, дається ілюстрація використання визначення основного поняття, його властивостей за допомогою конкретних прикладів. Завдання, крім використання їх як засобу ілюстрації, служать засобом закріплення теоретичного матеріалу, про що свідчать їхні формулювання, наприклад: «Знайти таку первісну функцію, графік якої проходить через дану точку».

Успішне використання набутих математичних знань у практиці пов'язане з переходом від абстрактних теоретичних знань до практичних дій в умовах життєвих і виробничих ситуацій.[35]

Дослідження психологів і практиків свідчать, що завдання вчителя – навчити учнів математизувати життєві практичні ситуації, навчити теоретичного аналізу, що є безпосередньо реалізацією ідей моделювання.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ПЕРВІСНОЇ ТА ІНТЕГРАЛА

2.1 Поняття первісної

Введення первісної, як і похідної, можна було б почати з метою мотивації розв'язування задач, обернених до тих, які привели до поняття похідної. Проте доцільніше не починати із задач, а із введення на конкретному прикладі первісної як функції, похідна якої дорівнює даній функції на певному проміжку. Варто розглянути згадані задачі з метою пояснення фізичного і геометричного змісту сталої інтегрування та мотивації введення інтеграла.

Насамперед потрібно звернути увагу учнів на те, що кожна операція, яка вивчалась у шкільному курсі, має обернену: додавання - віднімання, множення - ділення, піднесення до степеня - добування кореня. Деякі обернені операції в цьому разі виявились неоднозначними. Наприклад, дія добування квадратного кореня з числа, яка є оберненою до дії піднесення числа до квадрата, є двозначною. Справді, існують два значення квадратного кореня числа 16: числа 4 і -4.

Основною операцією диференціального числення є знаходження похідної $y' = f'(x)$ даної функції $y = f(x)$. Проте під час розв'язування різних задач, зокрема фізичних і геометричних, іноді потрібно виконати обернену задачу: за відомою похідною $y' = f'(x)$ деякої функції знайти (відновити) саму функцію, яку називають первісною для відомої функції $y = f(x)$.

Приклад 1. Нехай дано функцію $f(x) = x^2$, яка є похідною невідомої функції $F(x)$. Треба відшукати (відновити) невідому функцію F (формулу, що задає її). Поміркувавши, учні самі назвуть функцію $F(x) = \frac{x^3}{3}$ похідна якої дорівнює x^2, тобто даній функції $f(x) = x^2$.

Первісною для даної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку (a, b) називається така функція F, похідна якої для всіх x з інтервалу (a, b) дорівнює $f(x)$, тобто $F(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a, b)$.

Виникає ще одне запитання: чи існують інші функції , похідні яких дорівнюють x^2? Виявляється, що існують, бо не лише $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, а й

$$\left(\frac{x^3}{3} + 5\right)' = x^2, \left(\frac{x^3}{3} - 0{,}2\right)' = x^2, \left(\frac{x^3}{3} + \sqrt{5}\right)' = x^2, \dots$$

Отже, існує безліч функцій, похідні яких дорівнюють x^2. Їх можна записати у вигляді однієї множини $\frac{x^3}{3} + C$, де C - довільна стала (число). Якщо $F(x)$ - одна первісна, то $F(x) + C$ - загальний вигляд первісної для функції $y = f(x)$.

Геометричне тлумачення первісної $F(x) = \frac{x^3}{3}$ для даної функції $y = x^2$ зробити неважко - це кубічна парабола, графік якої дістаємо з графіка функції $y = x^3$, стискуючи його у 3 рази до осі $0x$. Загальним виглядом первісної для функції $y = x^2$ є множина кубічних парабол, які дістаємо з графіка $y(x) = \frac{x^3}{3}$ паралельним перенесенням його вгору вздовж осі $0y$ чи вниз на відстань C залежно від знака C. Отже, у загальному вигляді первісною для $y = x^2$ є множина $\frac{x^3}{3} + C$ кубічних парабол.

Операція знаходження первісної F для даної функції $y = f(x)$ називається *інтегруванням*. Вона є оберненою до операції диференціювання. Отже, операція інтегрування є багатозначною.

Приклад 2. Для функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на інтервалах $(-\infty; 0) і (0; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = -\frac{1}{X}$, бо $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.

$F(x) = 2\sqrt{x}$, бо $\left(2\sqrt{x}\right)' = \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Приклад 3. Для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на інтервалі $(0; +\infty)$ первісною є

$F(x) = 2\sqrt{x}$, бо $\left(2\sqrt{x}\right)' = \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

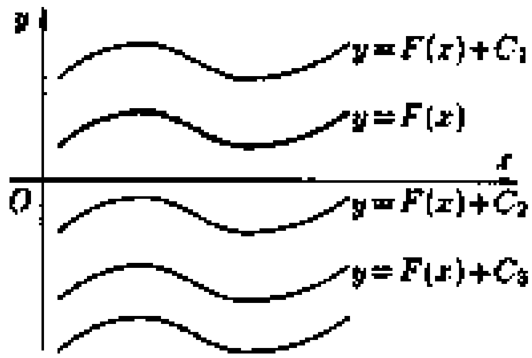
Учні зроблять висновок: існує безліч функцій, похідні яких дорівнюють даній функції $f(x) = x^2$. Множину всіх первісних записують у вигляді $F(x) + C$, де C - довільна стала. Цей вираз називають загальним виглядом первісної.

Доцільно, щоб, користуючись таблицею похідних, учні самостійно на уроці заповнили таблицю первісних.

Функція $f(x)$	**Первісна $F(x)$**	
a	$\boldsymbol{ax + C}$	a – стала
x^p	$\boldsymbol{\frac{x^{p+1}}{p+1} + C}$	$p \neq -1$
$ax + b$	$\boldsymbol{\frac{ax^2}{2} + bx + C}$	
$\sqrt{x}$	$\boldsymbol{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C}$	
$\sin x$	$\boldsymbol{-\cos x + C}$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\boldsymbol{-\mathrm{ctg}\, x + C}$	$x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos x$	$\boldsymbol{\sin x + C}$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\boldsymbol{\mathrm{tg}\, x + C}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Основна властивість первісної

Якщо функція F(x) є первісною для функції f(x) на даному проміжку, а C – довільна стала, то $F(x) + C$ є також первісною для функції f(x) при цьому будь-яка первісна для функції f(x) на даному проміжку може бути записана у вигляді F(x) + C , де C – довільна стала.



Графіки будь-яких первісних одержуються один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Оу.

Наприклад, розв'яжемо задачу.

Для функції $f(x) =-x^2 + 3x$ обчисліть первісну, графік якої проходить через точку $M(2;-1)$.

Розв'язання: Знайдемо загальний вигляд первісної даної функції:

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 3\ \frac{x^2}{2} + C. \qquad (1)$$

Оскільки графік шуканої первісної задовольняє рівнянню (1), підставимо в рівняння замість аргументу значення 2, замість функції значення -1, матимемо:

$$-1 = -\frac{8}{3} + 6\ + C,$$

Отже $C = -\frac{13}{3}$.

Шукана первісна матиме вигляд: $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 3\ \frac{x^2}{2} - \frac{13}{3}$

Правила знаходження первісної

Правило 1. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ — первісні відповідно функцій $f(x)$ і $g(x)$ на деякому проміжку, то функція $F(x) \pm\ G(x)$ є первісною функції $f(x) \pm\ g(x)$.

Це правило можна сформулювати в іншій формі: інтеграл суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Правило 2. Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а C — стала, то $CF(x)$ — первісна для функції $CF(x)$.

Дійсно, оскільки $F(x) =\ f(x)$ то $\left(CF(x)\right)' =\ CF'(x) =\ Cf(x)$

Це правило можна сформулювати в іншій формі: постійний множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx.$$

Правило 3. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$ а k і b — постійні числа, причому $k \neq 0$, то $F(kx+b)$ є первісною для функції $f(kx+ b)$.

Це правило можна записати в інтегральній формі:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Приклад 4. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

$$1)\ f(x) = x^4 + \frac{1}{\cos^2 x};\ 2) f(x) = 7e^x.$$

Розв'язання.

1) Оскільки $\frac{x^5}{5}$ первісна для x^4, а $tg(x)$ - первісна для $\frac{1}{\cos^2 x}$, то використовуючи правило 1, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції:

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + tgx + C.$$

2) Оскільки e^x - первісна для e^x, то використовуючи правило 2, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції $F(x) = 7e^x + C$.

Приклад 5. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції

$$f(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{8}\right).$$

Розв'язання.

Для $\cos x$ однією з первісних є $sinx$. Використовуючи правило 3, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції:

$$F(x) = \frac{1}{4}\left(\sin 4x - \frac{\pi}{8}\right) + C.$$

Приклад 6. Для функції $f(x) = (\frac{1}{6}x - 1)^5$ знайдіть первісну $F(x)$ таку, що $F(12) = 3$.

Розв'язання.

Використовуючи правило 3 та той факт, що однією з первісних для функції x^5 є $\frac{x^6}{6}$ матимемо:

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{6}x-1\right)^6}{6} + C; F(x) = \left(\frac{1}{6}x - 1\right)^6 + C.$$

Оскільки $F(12) = 3$, то матимемо $3 = \left(\frac{1}{6} \cdot 12 - 1\right)^6 + C, 3 = 1 + C, C = 2$.

Отже, $F(x) = \left(\frac{1}{6}x - 1\right)^6 + 2$ - шукана первісна.

2.2 Інтеграл та його застосування в задачах шкільного курсу

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, що задана на проміжку $[a; b]$. Розіб'ємо $[a; b]$ на n частин точками x_i, так що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i,\ i(\overline{1, n}),\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Позначимо $\lambda = max\ \Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$ і не залежить ні від способу розбиття $[a; b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a; b]$ і позначається:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

де $\int_a^b -$ знак визначеного інтеграла;

a, b — нижня та верхня межі інтегрування;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)\,dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ — число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку $[a; b]$; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Означення. Функція, для якої на $[a; b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *інтегрованою на цьому проміжку*.

Зауваження: неперервні функції — інтегровані.

Властивості визначеного інтеграла

1) Якщо $f(x) = c = const$, то

$$\int_a^b cdx = c \cdot (b - a).$$

2) Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

3) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій, тобто:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Ця властивість поширюється на будь-яке скінченне число доданків.

4) Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5) Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

6) Якщо точка с ділить проміжок $[a; b]$ на частини $[a;$ с$]$ і $[$с$; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7) Якщо $f(x) \geq 0$ інтегрована для $x \in [a, b], b > a$ то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8) Якщо $f(x),\ g(x)$ — інтегровані та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b],\ b > a$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

9) Якщо $f(x)$ — інтегрована та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a, b],\ b > a$, то

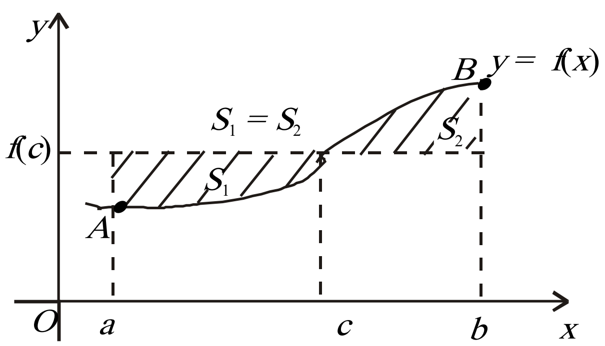
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

10) *Теорема* (*про середнє*).

Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a, b],\ b > a$, то знайдеться така точка $x = c \in [a, b]$, що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

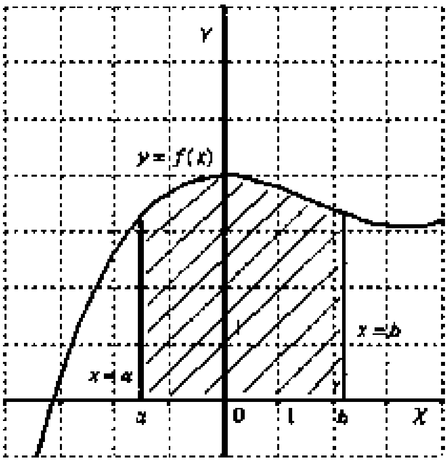
Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник із сторонами $f(c),\ c \in [a, b]$ та $b - a$, який рівновеликий криволінійній трапеції аАВв за умови, що функція $f(x) \geq 0$ неперервна на проміжку $[a; b]$.



Визначений інтеграл має широке застосування у математиці та фізиці. Розглянемо застосування визначеного інтеграла у геометрії, зокрема для знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, та об'ємів тіл.

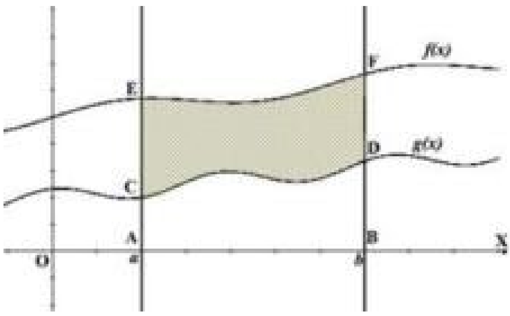
Площа криволінійної трапеції

Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної невід'ємної функції на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ $і$ $x = b$, дорівнює:



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Якщо на заданому проміжку $[a; b]$ неперервні функції y $= f(x)$ $і$ y $= g(x)$ мають ту властивість, що $f(x) > g(x)$ для всіх x з проміжку $[a; b]$, то :



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Розглянемо приклади

Приклад 1. (ЗНО 2010)

Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = sinx, y = 3cosx, x = \pi, x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання

1. Для обчислення площі фігури спочатку побудуємо графіки функцій $y = sinx$, $y = 3cosx$.

2. Межі інтегрування у даному випадку нам задані.

3. Шукана фігура обмежена на заданому проміжку згори графіком функції $y = sinx$, а знизу – $y = 3cosx$.

4. Обчислимо площу.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x - 3\cos x)dx = (-\cos x - 3\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

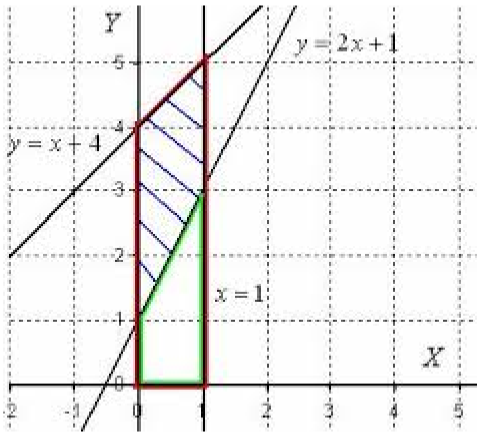
$$= (-\cos\pi - 3\sin\pi) - \left(-\cos\frac{\pi}{2} - 3\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 + 0 + 3 = 4$$

Відповідь: 4 кв. од.

Приклад 2.

Обчислити площу фігури, обмеженої прямими y= $x + 4, y = 2x + 1, x = 0,$ $x = 1.$

Розв'язання:

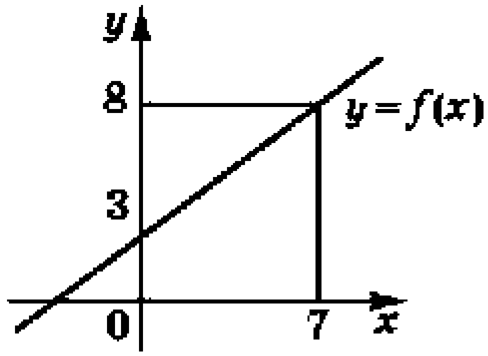


$$S = \int_0^1 (x + 4 - 2x - 1)dx = \int_0^1 (-x + 3)dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 3 = 2{,}5$$

Відповідь: 2,5 кв. од.

Приклад 3. (ЗНО 2011)

Обчислити $\int_0^7 f(x)dx$, використовуючи зображений на рисунку графік лінійної функції $y = f(x)$



Розв'язання

Застосуємо для розв'язання геометричний зміст визначеного інтегралу.

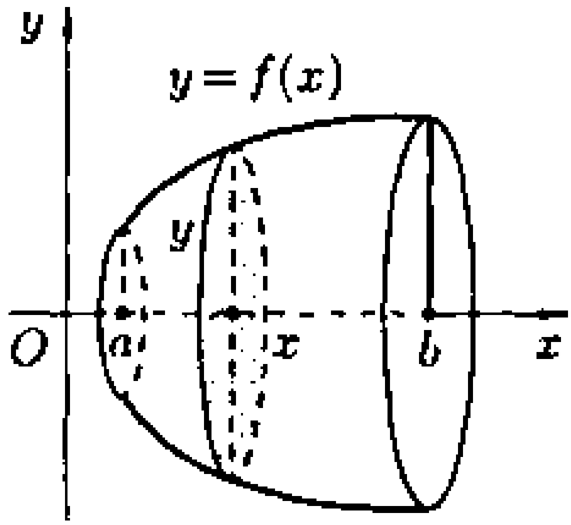
Шукана площа буде площею прямокутної трапеції з основами, що мають довжину: 8 од. та 3 од. та висотою 7 од.

$S = 0{,}5(3 + 8) * 7 = 36{,}5$ (кв. од.)

Відповідь: 36,5 кв. од.

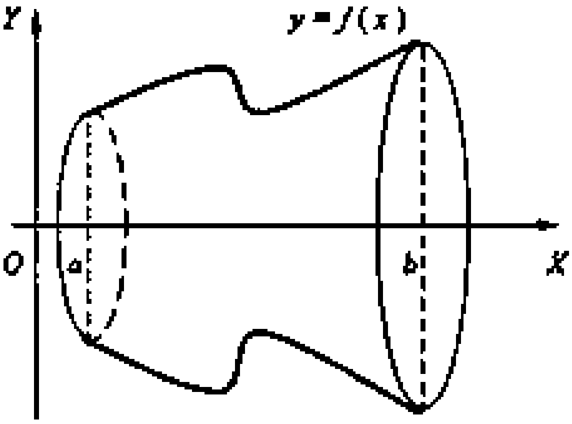
Об'єми тіл

Якщо тіло вміщено між двома перпендикулярними до осі $0x$ площинами, що проходять через точки $x = a$, x $= b$, функція $S(x)$ задає площу перерізу тіла площиною, яка проходить через довільну точку x відрізка $[a, b]$ і перпендикулярна до осі $0x$, то об'єм тіла знайдемо за формулою:



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Якщо тіло одержане в результаті обертання навколо осі $0x$ криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної і невід’ємної на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $\mathrm{x} = b$, то об’єм тіла знайдемо за формулою:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Розглянемо приклад

Приклад.

Обчислити об’єм тіла обертання навколо осі абсцис прямих $\mathrm{y} = \mathrm{x} + 4$, $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + 1$ на відрізку $[0,1]$. Шукане тіло знайдемо як різницю тіл утворених обертанням прямої та обертанням прямої . Маємо:

$$V = \pi \int_0^1 (x + 4)^2 dx - \pi \int_0^1 (2x + 1)^2 dx =$$

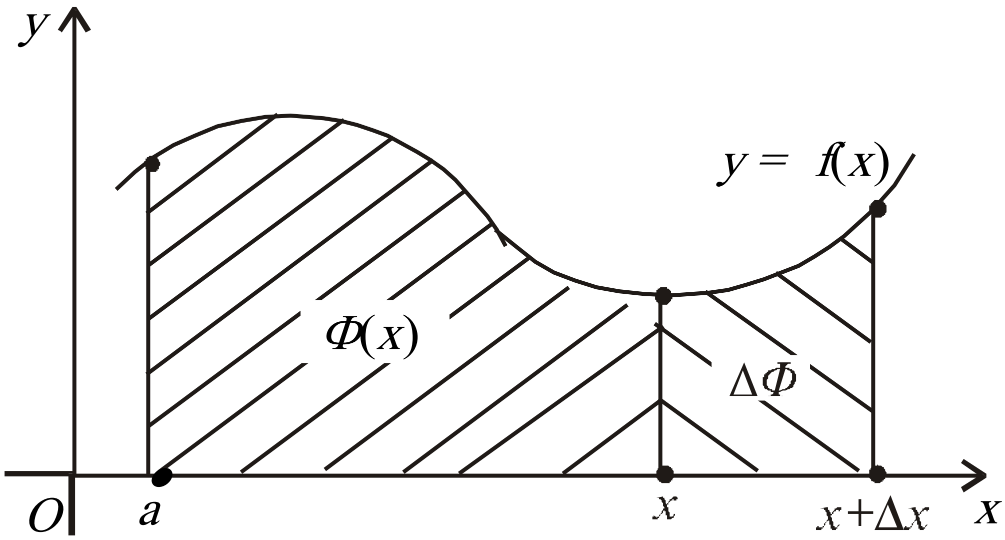
$$= \pi \int_0^1 (x^2 + 8x + 16 - 4x^2 - 4x - 1) dx = \pi \int_0^1 (-3x^2 + 4x + 15) dx =$$

$$= \pi(-x^3 + 2x^2 + 15x) \Big|_0^1 = \pi(-1 + 2 + 15) = 16\pi.$$

Формула Ньютона-Лейбніца

Розглянемо інтеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(x) dt$, який буде функцією від верхньої межі інтегрування. Змінній x надамо приросту Δx, що зумовить приріст функції.

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$



Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна для будь-якого $x \in [a,b]$ то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування по цій межі дорівнює підінтегральній функції від верхньої межі інтегрування, тобто

$$\Phi'_x(x) = (\int_a^x f(t)dt)'_x = f(x).$$

Наслідки:

1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є одна із первісних для $f(x)$.

2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a,b]$ має на цьому проміжку первісну, яку, наприклад, завжди можна побудувати у вигляді визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею, тобто

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dt.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $x \in [1; +\infty)$.

Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ — неперервна на проміжку $[1; +\infty)$,тому

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt + C, \forall x \in [1; +\infty).$$

Теорема (Ньютона—Лейбніца)

Якщо функція $f(x)$ — неперервна для $x \in [a, b]$ то визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ дорівнює приросту первісної функції $f(x)$ на цьому проміжку, тобто

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \qquad \text{де } F'(x) = f(x).$$

Позначимо дію подвійної підстановки так: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ тоді зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (F(x) + C)\Big|_a^b = (\int f(x)dx)\Big|_a^b$$

Наслідок. Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну із первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.

Приклад.

$$\int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^4 e^x dx = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)^4 d(e^x - 1) = \frac{1}{5}(e^x - 1)^5\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2} - 1\right)^5 - (e^0 - 1)^5\right) = \frac{1}{5}((2 - 1)^5 - (1 - 1)^5) = \frac{1}{5}$$

Розглянемо приклади застосування формули Ньютона-Лейбніца.

Приклад. Обчислити $\int_0^1 x^2 dx$.

Так як функція $\frac{1}{3}x^3$ є первісною для x^2, то за формулою Ньютона -Лейбніца

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2.3 Інтеграл у фізиці та економіці

Фізика вивчає різні явища і процеси, які пов'язані зі змінними величинами, обчислювати які значно легше за допомогою визначеного інтеграла.

Таблиця 11

№ п/п	Величини	Співвідно-шення	Знаходження похідної	Знаходження інтеграла
1	S — переміщення v — швидкість	$\Delta s = v(t)\cdot\Delta t$	$v(t) = s'(t)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
2	A — робота F — сила	$\Delta A = F(x)\cdot\Delta x$	$F(x) = A'(x)$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$
3	A — робота N — потужність	$\Delta A = N(t)\cdot\Delta t$	$N(t) = A'(t)$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$
4	m — маса тонкого стержня ρ — лінійна густина	$\Delta m = \rho(x)\cdot\Delta x$	$\rho(x) = m'(x)$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$
5	q — електричний заряд I — сила струму	$\Delta q = I(t)\cdot\Delta t$	$I(t) = q'(t)$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
6	Q — кількість теплоти c — теплоємність	$\Delta Q = c(t)\cdot\Delta t$	$c(t) = Q'(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$

З'ясуємо, як саме ми можемо застосувати визначений інтеграл у фізиці.

1) Знаходження переміщення точки за поданий проміжок часу.

Припустимо, що точка рухається по прямій (по осі Ox) і відома швидкість цієї точки. Знайдемо переміщення s точки за проміжок часу $[t_1; t_2]$. Розглянемо відрізок часу $[t; t+\Delta t]$ і будемо вважати швидкість на цьому відрізку сталою. Тоді одержимо: $\Delta s(t) = v(t)\Delta t,$ звідки

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

2) Обчислення величини заряду, що переноситься за певний проміжок часу через переріз провідника.

Обчислимо величину q заряду, що переноситься за проміжок часу $[t_1; t_2]$ через переріз провідника. Нехай задано закон зміни струму $I = I(t)$ залежно від часу. Тоді на малому проміжку часу $[t; t+\Delta t]$ можна вважати силу струму сталою, яка дорівнює $I(t)$, а $\Delta q = I(t)\Delta t$. Отже,

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt.$$

3) Обчислення роботи, яку треба виконати для переміщення тіла із однієї точки в другу.

Нехай тіло рухається по осі Ox, у кожній точці якої прикладено деяку силу $F = F(x)$. Обчислимо роботу A, яку необхідно виконати під час переміщення із точки x_1 у точку x_2 . На малому відрізку шляху від точки x до точки $x + \Delta x$ можна вважати силу сталою, яка дорівнює $F(x)$. Тоді $\Delta A(x) = F(x)\Delta x$. Звідси одержуємо, що всю роботу на відрізку $[x_1; \mathrm{x}_2]$ можна записати у вигляді інтеграла:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

4) Обчислення кількості теплоти

Q – кількість теплоти, с – теплоємність

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt.$$

5) Обчислення маси неоднорідного стержня.

Обчислимо масу m неоднорідного стержня, якщо відомо, як змінюється його густина $\rho(x)$. Розглянемо відрізок $[x; x+\Delta x]$. Вважаючи, що на цьому відрізку густина стала, маємо: $\Delta m(x) = \rho(x)\Delta x$, звідси:

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx.$$

б) Економічний зміст визначеного інтеграла.

Якщо $f(t)$ - продуктивність праці в момент часу t, то

$U = \int_0^T f(t)dt$- обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[0; T]$;

$U = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$- обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[t_1; t_2]$.

Задача 1. Для кращого обслуговування заїзду гонок серії «Формула-1» майстри визначили найкращий закон зміни швидкості руху автомобіля прямою трасою:

$v(t) = 2(t+2)\frac{5}{2}$. Який шлях:

а) проїде пілот цієї гонки за 7 с. від початку руху;

б) він проїде за сьому секунду?

Розв'язання: Знаходимо шлях за формулою $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

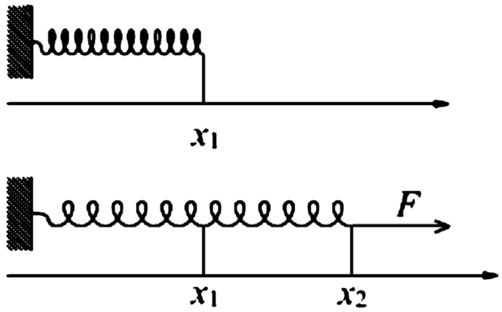
$$a)S = \int_0^7 2(t+2)^{\frac{5}{2}}dt = \frac{4}{7}(t+2)^{\frac{7}{2}}\Big|_0^7 = \frac{4}{7}\left(9^{\frac{7}{2}} - 2^{\frac{7}{2}}\right) \approx 1243(m);$$

$$б)\ S = \int_6^7 2(t+2)^{\frac{5}{2}}dt = \frac{4}{7}(t+2)^{\frac{7}{2}}\Big|_6^7 = \frac{4}{7}\left(9^{\frac{7}{2}} - 2^{\frac{7}{2}}\right) \approx 422(m).$$

Задача 2. Яку потрібно виконати роботу, щоб розтягнути пружину на 3 см, якщо сила в 10 Н розтягує пружину на 1 см?

Розв'язання:

Згідно з законом Гука, сила F, що розтягує пружину, пропорційна переміщенню x вільного кінця пружини, тобто $F = kx$.



Для знаходження коефіцієнта k скористаємось тим, що сила в 10Н розтягує пружину на 0,01 м:

$10 = 0{,}01 \cdot\ k,$

$k = 1000.$ Тоді $F = 1000\text{x}$ і роботу знаходимо за формулою

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

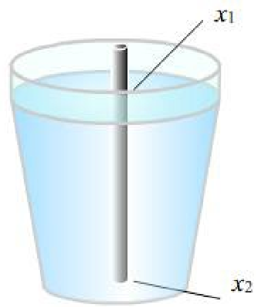
$$A = \int_{0}^{0{,}03} 1000xdx = 1000\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{0{,}03} = 0{,}45(\text{Дж.}).$$

Задача 3. Обчисліть масу ділянки стрижня від $\text{x}_1 = 1$ до $\text{x}_2 = 2$, якщо його лінійна щільність задається формулою $\rho(\text{x}) = 4\text{x}^3 + 5\text{x} + 2$ (г/см).

Розв'язання: Знаходимо масу ділянки за формулою $m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx.$

$$m = \int_{1}^{2} (4x^3 + 5x + 2)dx =$$

$$= x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 2x\Big|_{1}^{2} = 24{,}5(\text{г}).$$



Задача 4. Протягом 7 с. величина струму в провіднику змінювалась за законом $I(t) = 3t^2 + 2t$ (А). Знайдіть кількість електрики, що пройшла через провідник за цей час.

Розв'язання: За формулою $q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$ маємо

$$q = \int_0^7 (3t^2 + 2t)dt = t^3 + t^2 \Big|_0^7 = t^2(t+1) \Big|_0^7 = 49 \cdot 8 = 392(\text{Кл}).$$

Задача 5. Продуктивність праці робітничої бригади визначається в залежності від часу t функцією $f(t) = 4t^3 + 1$. Знайдемо обсяг продукції за другу і третю годину робочого дня.

Розв'язання:

За формулою $U = \int_0^T f(t)dt$ дістаємо:

$$U = \int_0^3 (4t^3 + 1)dt = t^4 + t \Big|_1^3 = 82(\text{од.}).$$

2.4 Використання новітніх інформаційних технологій до вивчення первісної та інтеграла. Програма Mathcad

З березня 2020 року, у наслідок поширення COVID-19, був оголошений довготривалий карантин, що спричинив перехід навчання в Україні на дистанційний формат. Протягом наступних двох навчальних років навчання відбувалося у змішаному форматі (оскільки періодично вводились карантини в областях, навчальних закладах чи окремих класах).

24 лютого 2022 року Російська федерація розпочала широкомасштабне вторгнення на територію України, внаслідок чого навчання знов перейшло у дистанційний формат. На цей момент у вчителів уже був певний досвід організації дистанційного навчання. Але таке навчання під час війни має свої особливості, що, звісно, ускладнює його організацію.

Під час війни утворились декілька груп учнів: ті, що перебувають удома (на неокупованих чи окупованих територіях) та ті, що залишили свою домівку (внутрішньо переміщені чи зовнішньо переміщені).

Кількість учнів, що не мають ґаджетів чи доступу до інтернету більша, ніж під час дистанційного навчання, зумовленого COVID-19. Під час війни є учні, які взагалі не навчаються, такі, які навчаються в одному з закладів, та такі, які одночасно навчаються в декількох закладах. У кожного з учнів свій досвід і, відповідно, різні емоційні стани. Більшість учнів перебувають у тривозі чи в стані стресу, що, звісно, впливає на когнітивні процеси.

При цьому класи є динамічними групами. Також під час синхронного онлайн уроку учні можуть як приєднуватись, так і від'єднуватись, наприклад, через необхідність спуститися до бомбосховища, де може не бути інтернету.

Дистанційне навчання – одна з форм організації навчально-виховного процесу, під час якого, весь навчальний процес відбувається з використанням сучасних інформаційних технологій за умови територіальної віддаленості викладача та здобувача освіти.

Дистанційне навчання дає можливість учасникам освітнього процесу підтримувати діалог на відстані. Навчання відбувається у зручному місці й у зручний час для кожного учня, стає більш індивідуалізованим, але потребує активної самостійної роботи.

Дистанційне навчання – це можливість для формування таких якостей: активність, самостійність, самовдосконалення, самоорганізація, самоконтроль, творчість тощо.

Для організації дистанційного навчання важливим є:

1. Єдине освітнє середовище для вчителів і для учнів.
2. Всі додатки знаходяться в одному місці.
3. Є можливість спільної та індивідуальної роботи.
4. Запис відеоуроків та їх зберігання.
5. Великий об'єм пам'яті для зберігання матеріалів.
6. Всі знаходяться в одному домені.
7. Інтегрування різних додатків (Google Drive, Box, DropBox)

Таке навчання передбачає оперативне інформування, повідомлення нового матеріалу, уточнювальні запитання та коментарі до виконаних робіт.

У підготовці до уроку можна застосовувати різний інструментарій, Google документи, презентації, таблиці, малюнки тощо. Вчителі разом з учнями можуть створювати і спільно використовувати документи, презентації, електронні таблиці, а також залишати коментарі.

Програма для створення скріншотів, записів відео дозволяє вчителям робити скріншоти у вигляді зображень, редагувати їх і обмінюватися, записувати відеоуроки.

Сервіси для створення хмари слів, інтерактивних вправ, ребусів, інфографіки, кросвордів урізноманітнять завдання до уроків.

Віртуальні дошки дозволяють зібрати в одному місці різноманітні ресурси до уроку та надати можливість учням залишати свої відповіді, посилання на виконані завдання.

Сервіси проведення відеоконференцій, вебінарів для проведення відеоуроків.

Google Форми, онлайн-тести, опитування в групах/месенджері для забезпечення зворотного зв’язку та проведення контролю.

Широкі можливості для інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення учнів надають сучасні інформаційні технології навчання [27]

Mathcad — система комп'ютерної алгебри з класу систем автоматизованого проєктування, орієнтована на підготовку інтерактивних документів з обчисленнями і візуальним супроводженням, відрізняється легкістю використання і застосування для колективної роботи.

Mathcad був задуманий і спочатку написаний Алленом Раздовим з Массачусетського технологічного інституту (MIT), співзасновником компанії Mathsoft Inc., яка з 2006 року є частиною корпорації PTC (Parametric Technology Corporation).

Mathcad має простий і інтуїтивний для використання інтерфейс користувача. Для введення формул і даних можна використовувати як клавіатуру, так і спеціальні панелі інструментів.

Деякі з математичних можливостей Mathcad (версії до 13.1 включно) засновані на підмножині системи комп′ютерної алгебри Maple (MKM, Maple Kernel Mathsoft). Версії 14 та 15 використовують символьне ядро MuPAD. Нове покоління — Mathcad Prime (поточна версія 8.0) зворотної сумісності із попередніми версіями Mathcad не має (можлива конвертація файлів попередніх версій у формат Mathcad Prime).

Робота здійснюється в межах робочого аркуша, на якому рівняння і вирази відображаються графічно, на противагу текстовому запису в мовах програмування. При створенні документів-програм використовується принцип WYSIWYG (What You See Is What You Get — «що бачиш, те й отримуєш»).

Незважаючи на те, що ця програма здебільшого орієнтована на користувачів-непрограмістів, Mathcad також використовується в складніших проєктах, щоб візуалізувати результати математичного моделювання, шляхом використання найбільш поширених обчислень і традиційних мов програмування.

Mathcad доволі зручно використовувати для навчання, обчислень і інженерних розрахунків. Відкрита архітектура застосунків у поєднанні з підтримкою технологій NET і XML дозволяють легко інтегрувати Mathcad практично в будь-які IT-структури і інженерні застосування. Є можливість створення електронних книг (e-Book).

Символьне інтегрування (знаходження первісної).

Для обчислення первісної достатньо поставити функцію під знак d. Якщо перед цим визначити значення змінної, то отримаємо чисельне значення.

Приклади знаходження первісної

Знак невизначеного інтеграла вводиться відповідною кнопкою панелі **Calculus** або комбінацією клавіш **<Ctrl+Shift+i>**

Приклад 1:

$$\int x \cdot e^{-2x}\,dx \rightarrow \frac{(-(2 \cdot x)-1) \cdot e^{-(2 \cdot x)}}{4}$$

Перевірка:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{2} \cdot x \cdot e^{-(2 \cdot x)} - \frac{1}{4} \cdot e^{-(2 \cdot x)}\right) \rightarrow x \cdot e^{-(2 \cdot x)}$$

Приклад 2:

$$\int x \cdot \ln(x)\,dx \rightarrow \frac{x^2 \cdot \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$$

Перевірка:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}\,x^2\right) \rightarrow x \cdot \ln(x)$$

Приклад 3:

$$\int \frac{1-\cos(x)}{(x-\sin(x))^2}\,dx \rightarrow \frac{1}{\sin(x)-x}$$

Перевірка:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin(x)-x}\right) \rightarrow \frac{-\cos(x)+1}{\sin(x)^2 - 2 \cdot x \cdot \sin(x) + x^2}$$

Символьне підсумовування і певні інтеграли

Приклад обчислення суми ступенів чисел відрізка натурального ряду.

$$k := 5$$

$$k := 5$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \rightarrow \frac{2 \cdot \mathrm{floor}(n)^6 + 6 \cdot \mathrm{floor}(n)^5 + 5 \cdot \mathrm{floor}(n)^4 - \mathrm{floor}(n)^2}{12}$$

Надаючи k різні цілі значення, можна отримати звідси багато корисних формул.

Як інший приклад застосування символьного підсумовування розглянемо обчислення визначеного інтеграла на інтервалі $[a, b]$ від функції

$$f(x) := x^2$$

Як границі послідовності інтегральних сум при необмеженому подрібненні розбиття відрізка інтегрування. Якщо розбивати відрізок $[a, b]$ на N рівних частин і обчислювати значення функції в лівих кінцях часткових відрізків, то N-а інтегральна сума матиме вигляд:

$$S(N, a, b) := \sum_{i=0}^{N-1} f\left[a + i \cdot \frac{(b-a)}{N}\right] \cdot \frac{(b-a)}{N}$$

Визначений інтеграл $I(a, b)$ рівний границі при N, що наближається до ∞послідовності інтегральних сум:

$$I(a, b) := \lim_{N \to \infty} S(N, a, b) \to \frac{-1}{3} \cdot a^3 + \frac{1}{3} \cdot b^3$$

Якщо застосувати оператора символьного обчислення визначеного інтеграла для функції x^2 (шаблон введення визначеного інтеграла викликається відповідною кнопкою панелі **Calculus**), то отримаємо той же результат.

$$\int_a^b x^2 \, dx \to \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Застосовується для інтегрування виразу із знаходженням первісною щодо виділеної змінної.

Це альтернативна, по відношенню до описаного вище способу з використанням команди **Symbolically** підменю **Evaluate**, можливість знаходження первісної.

Приклад 1:

Знаходження невизначеного інтеграла $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$

1. Ввести підінтегральну функцію (тут $\frac{1-x^2}{1+x^2}$)

2. Виділити змінну інтегрування (тут $\boldsymbol{x}$).

3. Вибрати команду **Integrate** підменю **Variable**.

$$\int \frac{\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)}\,dx$$

$$\frac{-1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot atan(x) - ln\left(1+x^2\right)$$

Приклад 2:

Знаходження визначеного інтеграла

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Визначений інтеграл - це площа криволінійної трапеції. Інтеграл достатньо легко обчислюється, якщо підінтегральна функція не має особливостей. Точність обчислень задається системною змінною TOL, яка може бути задана в меню Math / Options.. (Математика / Параметри).

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \rightarrow \mathrm{atan}(2) - \frac{\pi}{4}$$

2.5 Первісна та інтеграл у завданнях ЗНО та НМТ

Після початку повномасштабної війни 24 лютого навчальний рік в Україні опинився під загрозою зриву.

Під питанням опинилась і вступна кампанія до університетів у 2022 році, адже провести ЗНО в традиційному форматі було дуже небезпечно.

Для того, щоб вирішити цю проблему, в Міністерстві освіти і науки та Українському центрі оцінювання якості освіти запропонували фактично спрощену версію ЗНО – Національний мультипредметний тест.

Національний мультипредметний тест є різновидом зовнішнього незалежного оцінювання, який проводиться в тимчасових екзаменаційних центрах у комп'ютерному форматі та охоплює питання з декількох предметів.

НМТ став головною новацією та однією з передумов успішної вступної кампанії 2022 року в умовах воєнного стану.

Обов'язковий блок НМТ складається з чотирьох предметів: української мови, математики, історії України, однієї з іноземних мов (на вибір вступників запропоновані англійська, французька, німецька та іспанська мова).

В окремий день вступники можуть скласти додатковий блок НМТ з фізики, хімії чи біології, результатом якого можна буде замінити оцінку з історії України або іноземної мови.

Тестові завдання НМТ складають згідно з програмами ЗНО з відповідних предметів.

НМТ містить завдання ЗНО з попередніх років.

Розглянемо завдання на тему «Первісна та інтеграл», що були на ЗНО до 2022 року.

1) **ЗНО 2016**

Укажіть первісну $F(x)$ для функції $f(x) = \dfrac{1}{2x}$.

А	$F(x) = \dfrac{1}{x^2}$
Б	$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\lvert x\rvert$
В	$F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$
Г	$F(x) = 2\ln\lvert x\rvert$
Д	$F(x) = \ln\lvert 2x\rvert$

Дане завдання перевіряє учня на вміння знаходити первісну функції. Нагадаємо, що функція буде первісною, якщо для будь-якого $x \in (a; b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

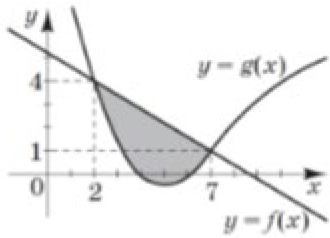
Якщо $F_1(x)$ - первісна для функції $f_1(x)$, а C-довільна стала, то $F(x) = CF_1(x)$ є первісною для $Cf_1(x)$.

У нашому випадку $f(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$. Оскільки функція $F_1(x) = \ln|x|$ є первісною для $f_1(x) = \frac{1}{x}$, то $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x|$ є первісною для заданої функції $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$.

Відповідь: Б.

2) ЗНО 2016

На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.



А	$S = \int_1^4 (f(x) - g(x))dx$
Б	$S = \int_1^4 (g(x) - f(x))dx$
В	$S = \int_2^7 (f(x) + g(x))dx$
Г	$S = \int_2^7 (f(x) - g(x))dx$
Д	$S = \int_2^7 (g(x) - f(x))dx$

Зафарбована фігура обмежена графіками функцій $y = g(x)$ та $y = f(x)$.

Площу даної фігури знаходимо за допомогою визначеного інтеграла. Абсциси точок перетину графіків $x = 2$ та $x = 7$ – межі інтегрування.

Функція $y = f(x)$ приймає більші значення на заданому проміжку (обмежує фігуру згори), а $y = g(x)$ – менші значення (обмежує знизу).

Тому, $S = \int_2^7 (f(x) - g(x))dx$.

Відповідь: Г.

3)ЗНО 2016

Використовуючи формулу Ньютона – Лейбніца, обчисліть $\int_1^2 6x^2 dx$.

А	Б	В	Г	Д
12	14	18	22	42

Дане завдання перевіряє учня на знання таблиці первісних основних функцій та вміння застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца до знаходження визначеного інтеграла.

За формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $F(x)$ на проміжку $(a; b)$, якщо для будь-якого $x \in (a; b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Визначимо первісну функції $y = 6x^2$.

$F(x) = 6F_1(x)$ є первісною функції $f(x) = 6x^2$, де $F_1(x)$ – первісна функції $f_1(x) = x^2$.

Однією з первісних степеневої функції x^n, причому $n \neq -1$, є $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Тому $F_1(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$. Отже, $F(x) = 6 \cdot \frac{x^3}{3} = 2x^3$.

Тоді $\int_1^2 6x^2dx = 2x^3 \Big|_1^2 = 2 \cdot (2^3 - 1^3) = 14$.

Відповідь: Б.

4) ЗНО 2017

Задано функцію $y = 3x$. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Будь-яка первісна цієї функції є парною.

II. Графік будь-якої первісної цієї функції проходить через точку $O(0; 0)$.

III. Графік будь-якої первісної цієї функції не перетинає вісь x

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише III	лише I та II	лише I та III

Первісна функції $y = 3x$ - $F = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{3x^2}{2} + C$.

Графік первісної – параболи, які переміщаються паралельно вздовж осі y.

Тому, не будь-який графік перетинає вісь x та не будь-який граік проходить через $O(0; 0)$. Але будь-яка первісна є парною.

Відповідь: А.

5) ЗНО 2017

Обчисліть інтеграл $\int_0^2 (f(x)+6)dx$, якщо $\int_0^2 f(x)dx = 8$.

А	Б	В	Г	Д
20	14	2	28	48

Правильна відповідь:

А	Б	В	Г	Д
☒	☐	☐	☐	☐

6) ЗНО 2017

Задано функцію $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

1	Визначте координати точок перетину графіка функції f з осями координат.
2	Побудуйте графік функції f.
3	Запишіть загальний вигляд первісних для функції f.
4	Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції f та осями x і y

1. Знайдемо координати точок перетину графіка з осями координат.

$$x = 0, \qquad f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 = 9;$$

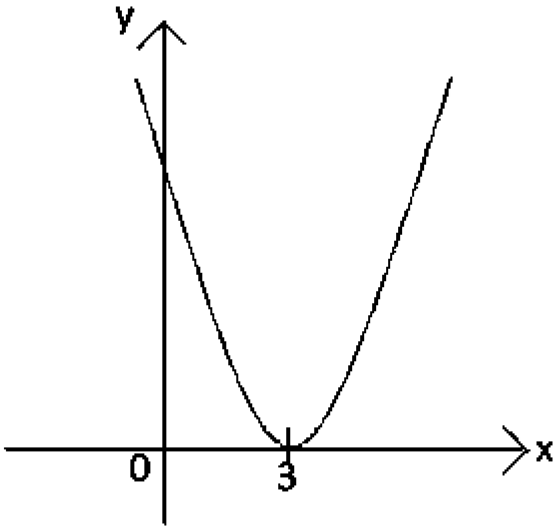
$$f(x), \qquad x^2 - 6x + 9 = 0, \qquad (x-3)^2 = 0, \qquad x = 3$$

Відповідь: $(0; 9)$, $(3; 0)$.

2. Будуємо графік.

$f(x) = x^2 - 6x + 9$ – графік парабола. $f(x) = (x-3)^2$.

Будуємо перетворенням графіка функції $y = x^2$ на 3 одиниці вправо вздовж Ox.



3. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 9x + C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C, \ \ C \in R$

Відповідь: $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C, \ \ C \in R.$

4. Обчислимо площу фігури:

$$S = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right)\Big|_1^2 = \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 =$$

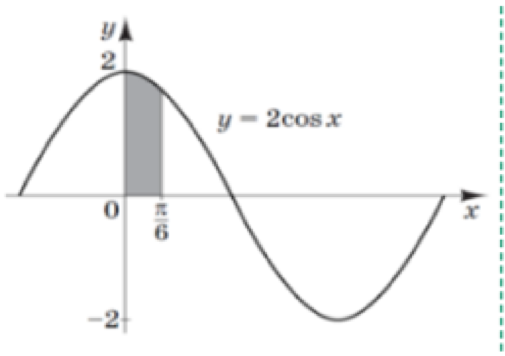
$$= 9 - 27 + 27 - 0 = 9(\text{кв. од.})$$

Відповідь 9 кв. од.

7) ЗНО 2018

Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$



$$S_{ф} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos x \, dx = 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\frac{\pi}{6} - 2\sin 0 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 0 = 1$$

Відповідь: В.

8) ЗНО 2018

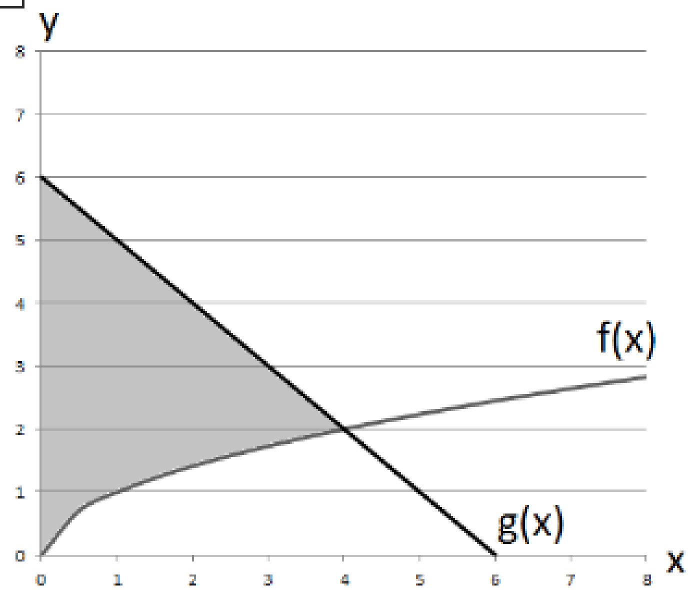
Задано функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = 6 - x$.

1	Побудуйте графік функції f.
2	Побудуйте графік функції g.
3	Визначте абсцису точки перетину графіків функцій f і g.
4	Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій f і g та віссю y.

1. $f(x) = \sqrt{x}$. Графік – вітка параболи $D(f): x \geq 0$.

2. $g(x) = 6 - x$. Графік – пряма

x	0	6
y	6	0



3. Знайдемо точку перетину графіків $f(x)$ і $g(x)$.

$$\sqrt{x} = 6 - x, \qquad \text{ОДЗ}: x \in [0; 6]$$

$$x = (6 - x)^2, \qquad x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x_1 = 9 \notin \text{ОДЗ}, \qquad x_2 = 4$$

Абсциса точки перетину $x = 4$.

4. Обчислимо площу фігури:

$$S_ф = \int_0^4 (6 - x - \sqrt{x})dx = \left(6 - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_0^4 = 24 - 8 - \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 = \frac{32}{3} =$$

$$= 10\frac{2}{3}(\text{кв. од.})$$

Відповідь: $10\frac{2}{3}(\text{кв. од.})$.

9) ЗНО 2018

Задано функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = 4|x|$

1	Побудуйте графік функції f.
2	Побудуйте графік функції g.
3	Визначте абсциси точок перетину графіків функцій f і g.
4	Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій f і g.

1. Побудуємо графік функції $f(x) = x^3$

x	0	1	2	–1	–2
y	0	1	8	–1	–8

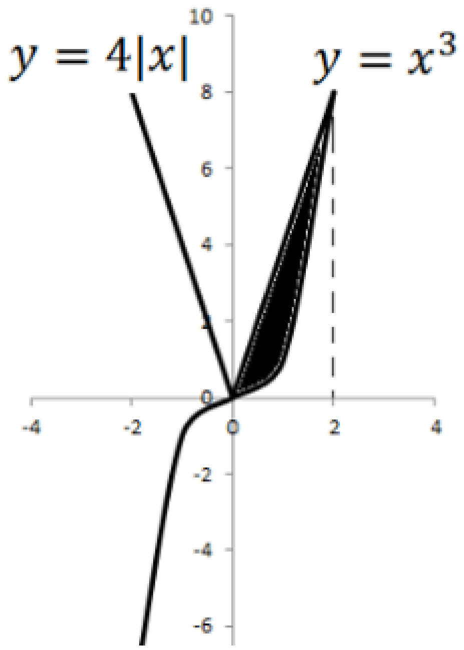
2. Побудуємо графік функції $g(x) = 4|x|$

при $x \geq 0$ будуємо $g(x) = 4x$

x	0	2
y	0	8

при $x < 0$ будуємо $g(x) = -4x$

x	0	–2
y	0	8



3. Абсциси знаходимо графічно $x = 0$ та $x = 2$, або як розв'язки рівняння $x^3 = 4|x|$ при $x \geq 0$ $\quad x^3 = 4x,\ x^3 - 4x = 0,\ x(x^2 - 4) = 0,$

$$x(x-2)(x+2) = 0, \qquad x = 0 \text{ або } x = 2 \text{ або } x = -2.$$

Проміжку $x \in [0; +\infty)$ належать корені $x = 0$ та $x = 2$.

При $\quad x < 0\ \ x^3 = -4x,\ x^3 + 4x = 0,\ x(x^2 + 4) = 0,\ x = 0$ або $x^2 + 4 = 0$ немає коренів.

Відповідь: $x_1 = 0, x_2 = 2$.

4. Площу фігури знаходимо за допомогою визначеного інтеграла

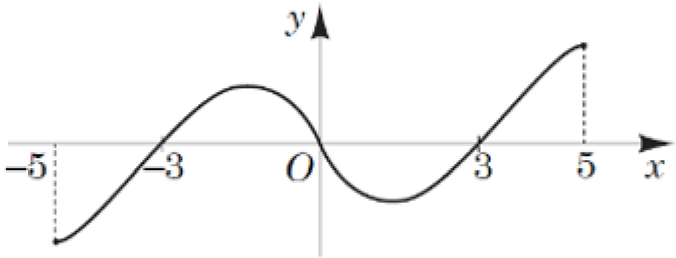
$$S_ф = \int_0^2 (4x - x^3)dx = \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} - 0 =$$

$$= 8 - 4 = 4(\text{кв. од.})$$

Відповідь: 4 кв. од.

10) ЗНО 2019

На рисунку зображено графік непарної функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$. Яке з наведених співвідношень є справедливим для $f(x)$?



А	Б	В	Г	Д
$\int_{-3}^{0} f(x)dx < 0$	$\int_{0}^{3} f(x)dx > 0$	$\int_{-3}^{3} f(x)dx < 0$	$\int_{-3}^{3} f(x)dx > 0$	$\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$

На рисунку зображено графік непарної функції.

Функція інтегрована на симетричному проміжку $[-5; 5]$.

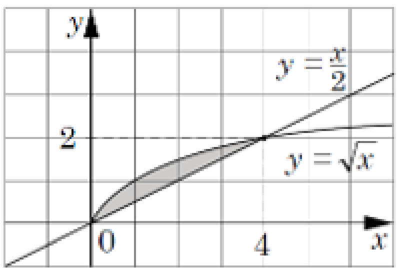
Так як площі фігур, розташованих вище та нижче осі Ox, рівні, то

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$$

Відповідь: Д.

11) ЗНО 2019

На рисунку зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = \frac{x}{2}$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.



А	Б	В	Г	Д
$\int_{0}^{2}\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$	$\int_{0}^{2}\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$	$\int_{0}^{4}\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$	$\int_{0}^{4}\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$	$\int_{0}^{4}\left(\frac{x}{2} + \sqrt{x}\right)dx$

Площу фігури знаходимо за допомогою визначеного інтеграла. Границі інтегрування – абсциси точок перетину графіків: $x = 0,\ x = 4$.

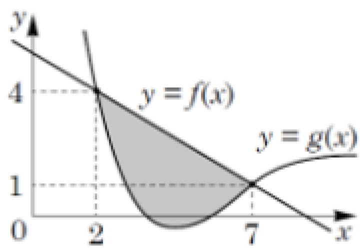
За правилом: від верхньої лінії віднімаємо нижню, знаходимо площу зафарбованої фігури.

$$S = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx$$

Відповідь: В.

12) ЗНО 2019

На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Укажіть формулу для обчислення площі зафарбованої фігури.



А $S = \int_1^4 (f(x) - g(x))dx$

Б $S = \int_1^4 (g(x) - f(x))dx$

В $S = \int_2^7 (f(x) + g(x))dx$

Г $S = \int_2^7 (f(x) - g(x))dx$

Д $S = \int_2^7 (g(x) - f(x))dx$

Коли фігура обмежена графіками двох функцій, границями інтегрування будуть точки їх перетину.

Для знаходження площі фігури, від верхньої лінії віднімаємо нижню.

Відповідь: Г.

13) ЗНО 2020

Функція $F(x) = 2x^3 - 1$ є первісною функції $f(x)$. Укажіть функцію $f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 6x^2 - 1$	$f(x) = 6x - 1$	$f(x) = 4x^2$	$f(x) = \frac{x^4}{2} - x$	$f(x) = 6x^2$

$$F(x) = 2x^3 - 1, \qquad F'(x) = f(x) = 6x^2$$

Відповідь: Д.

14) ЗНО 2020

Функція $F(x) = 5x^4 - 1$ є первісною функції $f(x)$. Укажіть функцію $G(x)$, яка також є первісною функції $f(x)$

А	Б	В	Г	Д
$G(x) = x^5 - x$	$G(x) = 5x^4 - x$	$G(x) = 20x^3$	$G(x) = 5x^4 + 1$	$G(x) = x^4 - 5$

Правильна відповідь:

А	Б	В	Г	Д
☐	☐	☐	☒	☐

ВИСНОВКИ

Основним завданням навчальних закладів у навчанні математики є забезпечення усвідомленого оволодіння учнями математичними знаннями та вміннями, формування рівня математичної культури, необхідного для продовження навчання та майбутньої трудової діяльності.

Метою даного дослідження є розробка методики вивчення первісної та інтеграла, яка сприятиме розвитку функціонального мислення учнів та формуватиме інтерес до теми «Первісна та інтеграл».

Освітня програма значно змінилася у навчальних закладах і ,за новою програмою, матеріал стиснуто і школярі не завжди розуміють його, саме тому викладання матеріалу повинне бути цікавим і доступним для учня.

У вступі було аргументовано актуальність теми, визначено предмет, об’єкт, мету, завдання дослідження та методи.

Дана робота складається з двох розділів. У першому розділі міститься історія розвитку понять «первісна» та «інтеграл». Здійснено аналіз викладання теми у класах з поглибленим вивченням математики. Особливу увагу було надано другому розділу «Методичні особливості вивчення первісної та інтеграла». В ньому розглянуто теоретичні відомості про первісну та інтеграл, використання інтеграла в задачах шкільного курсу . Також було показано використання новітніх інформаційних технологій у вивченні первісної та інтеграла., зокрема програму Mathcad та те, як правильно використовувати її для розв’язання задач з інтегралами. Проаналізовано завдання ЗНО попередніх років по темі «Первісна та інтеграл». У Додатках розроблено конспекти уроків для 11 класу, завдання для самостійної роботи під час дистанційного навчання..

У ході виконання роботи проаналізовано навчальну, науково-методичну літературу з теми, проілюстровано методику формування математичної компетентності при вивченні первісної та інтегралу на уроках математики в класах профільного рівня.

Під час вивчення теми «Інтеграл та його застосування» можна використовувати різноманітні програмні засоби навчання, такі як: GRAN1, GRAN2D, СДМ GeoGebra, Mathcad. Правильне використання таких програмних засобів сприяє реалізації одного з головних педагогічних принципів – принципу бачення, який передбачає створення в учня чуттєвого сприйняття об’єктів навчання, сприяння переходу від сприймання конкретних об’єктів до сприйняття абстрактних понять про них, а також надається можливість сприяти розумінню змісту математичних методів і алгоритмів. Правильний вибір наочних засобів навчання може полегшити сприйняття, підвищувати пізнавальний інтерес, активізувати мислення та сприяти розвитку математичних здібностей учнів.

За підсумками проведеної роботи, можна сказати, що тема «Первісна та інтеграл» є важкою для вивчення учнями і викладання вчителем. Але вона має важливе значення у вивченні алгебри, особливо для учнів, які збираються вступати у вищі навчальні заклади та працювати вчителями математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрєєв А. А. Комп’ютерні та телекомунікаційні технології в сфері освіти. *Шкільні технології*. 2007. №3. С. 151-170.

2. Антова О. Застосування похідної до розв’язування фізичних задач: інтегрований урок фізики та алгебри і початків аналізу, 11 клас. *Математика.* 2010. №38. С. 18-22.

3. Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. К.: Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Вид. 3-тє, доп. та перероб. Навч. посібник для студ. мат. фак. пед. інст. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

5. Безсмертна С. В. Дослідження функції за допомогою похідної та побудова їх графіків. Урок алгебри та початку аналізу в 11 класі з використанням 47 інформаційних комп’ютерних технологій. *Математика в школах України*. 2009. №29. С.18.

6. Бойчук В. В. Математика. Курс інтенсивної підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. Т.: Мандрівець, 2012. 256 с.

7. Бурмистренко Т. Похідна функції. Геометричний та механічний зміст похідної: 11 клас гуманітарного профілю. *Математика*. 2010. №2. С. 16-19.

8. Бучко М. Застосування інтеграла до розв’язування вправ. Алгебра і початки аналізу, 11 клас. *Математика.* 2009. №46-47. С.18.

9. Гайштут О. Г. Розв’язування алгебраїчних задач: Посібник для вчителів. Київ: Рад. шк., 1991. 224 с.

10. Гуревич Р. С. Впровадження комп’ютерних технологій у навчально-виховний процес закладів освіти. Вінниця: ВДПУ, 1999. 30 с.

11. Гуревич Р. С., Кадемія М. Ю. Інформаційно-телекомунікаційні технології в навчальному процесі та наукових дослідженнях: Навч. посіб. для студентів і слухачів післядипломної освіти. Вінниця: ДОВ «Вінниця», 2004. 366 с.

12. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології: Навчальний посібник. Київ: Академвидав, 2004. 352 с.

13. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. Видання 2-ге, перероблене та доповнене. Київ: РННЦ «Дініт», 2003. 324 с.

14. Завдання та тести з теми «Первісна та визначений інтеграл» ЗНО та НМТ.URL:https://zno.osvita.ua/mathematics/tag-pervisna_ta_viznachenij_integral/

15. Золочівська М. В. Роль і місце комп’ютера в навчально-виховному процесі. Київ, 2002. С. 27-30.

16. Істер О. С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2019. 304 с.

17. Конфорович А. Г. Історія розвитку математики: методичні вказівки. Київ: Вища школа, 1980. 91 с.

18. Котла С. Похідна. Алгебра і початки аналізу, 11 клас. *Математика*. 2008. №35. С. 15.

19. Кугай Н. Психолого-педагогічні засади навчання доведення у процесі вивчення початків аналізу. *Математика в школі*. 2008. №4. С. 17-21.

20. Кушнір В. Інноваційність освіти як дидактичний принцип. *Рідна школа.* 2012. №6(990). С. 3-8.

21. Мальцева Н. О., Роєва Т. Г. Готуємось д зовнішнього незалежного оцінювання. Алгебра. Харків: Країна мрій, 2009. 304 с.

22. Мерзляк А. Г. Алгебра 11 клас: підруч. для загальноосвіт. начальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень. Харків: Гімназія, 2013. 431 с.

23. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл.: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 304 с.

24. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2019. 208 с.

25. Москаленко О. А. Сучасні підходи до методичної підготовки вчителя математики. У кн.: Нові пед. технології викладання фіз.-мат. дисциплін у серед. навч. закладах нового типу: Матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. Полтава, 2001. С. 149-150.

26. Моторіна В. Г. Технології навчання математики в сучасній школі. Харків, 2001. 262 с.

27. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

28. Основне про національний мультимедійний тест. URL: https://testportal.gov.ua/osnovne-pro-nmt/

29. Офіційний сайт Mathcad. URL: https://www.mathcad.com/en/

30. Паламар Л. В. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики. Стрий, 2013. 83 с.

31. Пометун О. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід. Метод. посіб. Київ: А.П.Н. 2012. 136 с.

32. Прохорова О. Впровадження сучасних педагогічних технологій в практику роботи. *Математика в школах України*. 2005. №31(6-11).

33. Раков С. А. Математична освіта: компетентний підхід з використанням ІКТ: Моногр. Харків: Факт, 2005. С. 36.

34. Сидоренко Л. Первісна. Інтеграл: матеріали для діагностики навчальних досягнень учнів. *Математика*. 2010. №41. С. 11-19; *Математика*. 2010. №42. С. 15-23; *Математика.* 2010. №43. С. 17-18.

35. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. 240 с.

36. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ: Вища шк., 2006. 582 с.

37. Смульсов М. Л. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів: Рекомендовано Міністерством освіти України. Київ, 1997. 264 с.

38. Стасюк В. Використання похідної функції на прикладах розв'язання економічних задач. *Математика в школі.* 2008. №5. С. 39-41.

39. Столяр А. А. Методика викладання математики в середній школі. Харків, 1992. 304 с.

40. Суворова Н. А. Інтерактивне навчання: нові підходи. М.: Прогрес, 2005. 214 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Самостійна робота з теми «Первісна»

1. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = x^5 - x^3 + x - 2$

   А) $5x^4 - 3x^2 + 1 + C;$ *Б)* $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 1 + C;$

   В) $\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + C;$ *Г)* $\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C;$

2. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = -4\cos x$

   А) $-4\sin x + C;$ *Б)* $4\sin x + C;$ *В)* $-4\cos x + C;$ *Г))* $4\cos x + C;$

3. Яка з функцій задовольняє рівняння $f'(x) = \frac{10}{\sin^2 x}$

   А)10tgx; Б) – 10ctgx; В) – 10tgx; Г) 10ctgx;

4. Для функції $f(x) = \sin x$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку O(0;0)

   А) $\sin x;$ *Б)* $\cos x;$ *В)* $\cos x + 1;$ *Г)* $1 - \cos x$

5. Установити відповідність між функціями f(x) (1 – 4)та їх первісними F(x) (А-Д):

   1. $f(x) = x^3$ А) $F(x) = 3x^2 + C$
   2. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ Б) $F(x) = 6\ln x + C$
   3. $f(x) = 6x$ В) $F(x) = \frac{6}{x^2} + C$
   4. $f(x) = \frac{6}{x}$ Г) $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$

   Д) $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C$

6. Установити відповідність між функціями f(x) (1 – 4)та їх первісними F(x) (А-Д):

   1. $f(x) = \cos\frac{x}{4} + \sin 4x$ А) $F(x) = \sin\frac{x}{4} - \cos 4x + C$
   2. $f(x) = \cos 4x + \sin\frac{x}{4}$ Б) $F(x) = \sin 4x - \cos\frac{x}{4} + C$
   3. $f(x) = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4} + 4\sin 4x$ В) $F(x) = 16\sin 4x - \frac{1}{16}\cos\frac{x}{4} + C$
   4. $f(x) = 4\cos 4x + \frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}$ Г) $F(x) = \frac{1}{4}\sin 4x - 4\cos\frac{x}{4} + C$

Д) $F(x) = 4\,sin\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\,cos\,4x + C$

Самостійна робота з теми «Визначений інтеграл»

1 частина

1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x^{13}dx$

   А) 12; *Б)14;* *В)13;* *Г)* $\frac{1}{13}$; *Д)* $\frac{1}{14}$.

2. Обчислити інтеграл $\int_0^1 (x^2 - 4x)dx$

   А) $\frac{5}{3}$; *Б)* $\frac{1}{3}$; *В) 2;* *Г)* $-\frac{5}{3}$; *Д)* $\frac{7}{3}$.

3. Обчислити $\int_0^1 2x^5dx$

   А) $\frac{1}{2}$; *Б)* $\frac{1}{3}$; *В)* $-\frac{1}{3}$; *Г) 1;* *Д)* $\frac{1}{4}$.

4. Обчислити $\int_0^1 \sin\frac{x}{2}\,dx$

   А) 2; *Б)* $-\frac{1}{2}$; *В)* $\frac{1}{2}$; *Г) –2* *Д)0.*

5. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1 – 4)та їхніми числовими значеннями (А-Д):

1. $\int_0^1 2x^3dx$	*А)* $\frac{1}{2}$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\,dx$	*Б)* $\frac{1}{4}$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos x\,dx$	*В) 2*
4. $\int_0^1 (x+1)dx$	*Г)* $1\frac{1}{2}$
	Д) 1

2 частина

6. Обчислити інтеграл $12\int_2^3 \frac{1-x^2}{1-x}\,dx$.

7. Обчислити інтеграл $3\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

8. Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 12t^2 + 4$. Знайти: 1) миттєву швидкість *V(t);*

2)закон руху $S(t)$ точки, якщо в момент часу $t = 1c$ її швидкість дорівнювала 10 м/с, а $S(1) = 12м$.

У відповіді записати 1) $V(3)$ і 2) $S(3)$.

Додаток Б

Самостійна робота з теми «Інтеграл та його застосування» на період дистанційного навчання

Інтеграл та його застосування

Самостійна робота.

katyxamyhalko@gmail.com Змінити обліковий запис

Ім'я й фото з вашого облікового запису Google буде записано, коли ви завантажите файли та надішлете цю форму. У відповідь не буде включено вашу електронну адресу.

Ваше ПІБ

Ваша відповідь

1. Як називається операція знаходження первісної? 1 бал

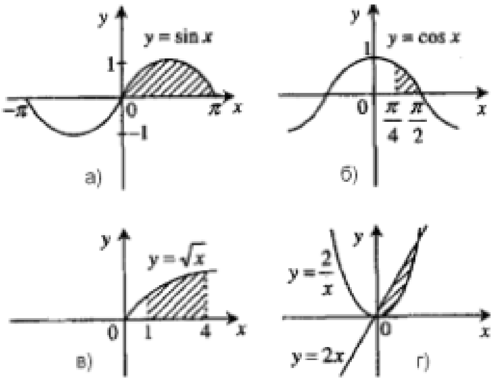
- Інтегрування.
- Потенціювання.
- Інше.
- Інше:

2. Скільки первісних існує для деякої неперервної функції f(x)? 1 бал

- Одна
- Дві
- Безліч
- Жодної

3. Яка з цих фігур не є криволінійною трапецією?

1 бал



- а
- б
- в
- г

4. Обчислити інтеграл:

1 бал

$$\int_{-1}^{2} 3x^2 dx$$

- 1
- 9
- 7
- 11
- 5

5. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: y= cosx, x=0, x=π/2

1 бал

- 2
- 0
- 1
- 4

6. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

1 бал

$y = x^2 + 2, \; y = x + 4$

- 4,5
- 10,5
- 5

7. Обчисліть інтеграл:

1 бал

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$$

- 3
- 3/4
- 4/3
- 4

8. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: (запишіть відповідь самі) 2 бали

$$y = 4 - 3x - x^2, \quad y = 4 + x$$

Ваша відповідь

9. Обчисліть інтеграл (Відповідь розпшіть на листочку та сфотографуйте 3 бали

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x \, dx$$

Додати файл

Надіслати

Очистити форму

URL посилання на ФОРМУ: https://forms.gle/Lm4HK4KnZQPykebG9

Додаток В

Конспект уроку

Тема. Поняття первісної. Основна властивість первісних

Мета: ввести означення первісної, закріпити знання учнів про основну властивість первісної, формувати уміння знаходити первісні функцій, застосовувати основну властивість та таблицю первісних до розв’язування вправ розвивати мислення учнів; виховувати позитивні риси особистості, інтерес до точних дисциплін.

Тип уроку: формування нових знань та вмінь;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання.

Хід уроку

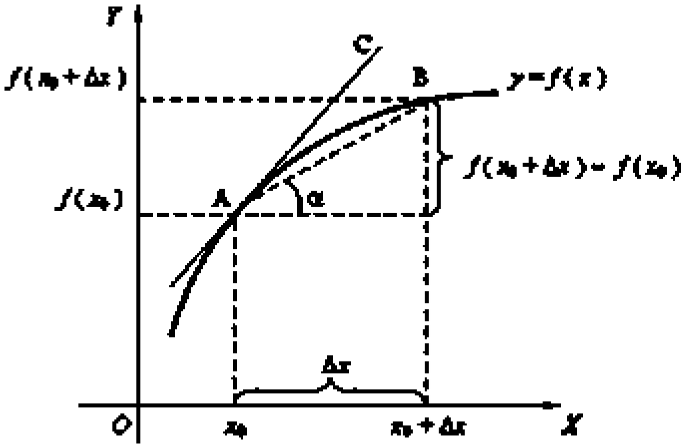
1. Актуалізація опорних знань.

Без знань з теми «Похідна функції» ви не зможете осягнути нову тему, оскільки поняття похідної є складовою частиною означення первісної, тому давайте пригадаємо.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Геометричний зміст похідної

Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної.



$k = tg\alpha = f'(x)$ кутовий коефіцієнт дотичної з рівнянням $y = kx + b$,

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – рівняння дотичної.

Механічний зміст похідної

Похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин.

Якщо функція $S = S(t)$ описує рух матеріальної точки, тобто залежність пройденої відстані S від часу t , то її похідна задає залежність миттєвої швидкості v від часу t , $S'(t) = v(t)$; похідна швидкості відповідно є прискоренням $v'(t) = a(t)$.

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

$c' = 0, c - const$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in R$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(ax+b)' = a$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	

2. Сприймання та усвідомлення нового матеріалу.

А)Пропоную переглянути відео, у якому представлене детальне пояснення поняття первісної https://www.youtube.com/watch?v=l9pmBIh6k8g

Б) За допомогою презентації конспектуємо означення та основні властивості первісної, а також таблицю первісних.

В)Розглянемо функцію $y = x^2 + 1$ і $y = x^2$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Тому обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де C – довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має багато розв'язків, тому в кінці обов'язково пишемо $+C$(тобто константа-довільне число)

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Основній властивості первісної можна надати геометричного змісту: графіки будь-яких двох первісних для функції f одержуються один із одного паралельним перенесенням вздовж осі OY

Г)Робота з підручником. Учні читають параграфи за даною темою.

3. Розв'язування вправ на закріплення нової теми.

Приклад:

Знайти первісну функції $f(x)=x^9$

Розв'язання:

скористаємося таблицею первісних, знайдемо там степеневу функцію

$f(x)$	$F(x)$
0	C
C	$Cx+C_1$
x	$\frac{x^2}{2}+C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$
$\frac{1}{x}$	$ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
e^x	e^x+C
$Sin\, x$	$-Cos\, x + C$
$Cos\, x$	$Sin\, x + C$
$\frac{1}{Cos^2 x}$	$tg\, x + C$
$\frac{1}{Sin^2 x}$	$-ctg\, x + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arcSin\frac{x}{a}+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2\pm x^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

Відповідно n-це степінь, у нас $n = 9$. Отже степінь збільшиться на одиничку і таке саме число йде у знаменник. Отримаємо первісну $F(x)=\frac{x^{10}}{10}+c$.

Правило 1 знаходження первісних

- Якщо *F(x)* і *G(x)* — первісні відповідно функцій *f(x)* і *g(x)* на деякому проміжку, то функція *F(x) ± G(x)* є первісною функції *f(x) ± g(x)*.
- **Доведення:** Оскільки $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, то $(F(x)\pm G(x))'=F'(x)\pm G(x)=f(x)\pm g(x)$.
- Це правило можна сформулювати в іншій формі: інтеграл суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Правило 2 знаходження первісних

- Якщо *F(x)* є первісною для функції *f(x)*, а *C* — стала, то *CF(x)* — первісна для функції *Cf(x)*.
- Доведення: Оскільки $F'(x)=f(x)$ то $(CF(x))'=CF'(x)=Cf(x)$.
- Це правило можна сформулювати в іншій формі: постійний множник можна виносити за знак інтеграла .

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$$

Правило 3 знаходження первісних

- Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k і b — постійні числа, причому $k \neq 0$, то $1/к * F(kx + b)$ є первісною для функції $f(kx + b)$.
- Дійсно, за правилом похідної складеної функції маємо: $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' =$

- $= \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b)$.
- Це правило можна записати в інтегральній формі: $$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

Приклад 1.
Знайдіть первісні для функції $f(x) = x + \cos x$.

- ***Розв'язання***
- Оскільки для x одна із первісних є $\frac{x^2}{2}$, а для

$\cos x$ однією із первісних є $\sin x$, то однією із первісних функції $x + \cos x$ є функція $\frac{x^2}{2} + \sin x$, отже,

$F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

- *Відповідь:* $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Приклад 2.
Знайдіть первісні для функції $f(x) = 3e^x + 5\sin x - 6x^2$.

Розв'язання

Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x, то однією із первісних для функції $3e^x$ є $3e^x$; оскільки однією із первісних для функція $\sin x$ є $-\cos x$, то однією із первісних для функції $5\sin x$ є $-5\cos x$; первісною функції $6x^2$ є $6\cdot\frac{x^3}{3} = 2x^3$.

Отже, $F(x) = 3e^x - 5\cos x - 2x^3 + C$ — первісні для функції $f(x) = 3e^x + 5\sin x - 6x^2$.

- Відповідь: $F(x) = 3e^x - 5\cos x - 2x^3 + C$.

Приклад 3. Знайдіть первісні для функцій:

а) $f(x) = (8 - 3x)^5$; б) $f(x) = e^{9x-1}$.

Розв'язання

Оскільки первісною для функції x^5 є функція $\frac{x^6}{6}$, то згідно з правилом 3 шукані первісні:

$$F(x) = -\frac{1}{3}\frac{(8-3x)^6}{6} + C = -\frac{(8-3x)^6}{18} + C$$

б) Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x, то згідно з правилом 3 маємо:

$F(x) = \frac{1}{9}e^{9x-1} + C.$

Домашнє завдання:

знайти первісні для функцій:

1) $y = x^7$;

2) $y = (3x-1)^7$;

3) $f(x) = 6x^2 - 3x + 1$;

4) $f(x) = \dfrac{3}{x^5} + \dfrac{4}{x^3} + 2$;

5) $y = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

6) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

7) $y = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}$;

8) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2\left(\dfrac{x}{4} - 1\right)}$.