Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота бакалаврського рівня
на тему:

Методика розв′язування рівнянь та нерівностей в курсі алгебри основної школи

Виконала:
студентка IV курсу групи МІ-41
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Муржак Інна Василівна

Керівник: канд. пед. наук, проф.
кафедри математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: канд. фіз.-мат.,
доц. кафедри вищої математики
Сапіліді Тамара Михайлівна

Рівне - 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Рівняння та нерівності в програмі шкільної алгебри відіграють дуже важливу роль. Вони є засобом поглиблення, розширення та закріплення теоретичних знань учнів. На їх вивчення відводиться набагато більше часу, ніж на будь-яку іншу тему. Справді, рівняння мають не тільки важливе теоретичне значення, а й служать цілям прикладного характеру. Більшість задач про просторові форми й кількісні співвідношення реального світу зводяться до розв'язування різних типів рівнянь. Вивчаючи способи їх розв'язування, можна отримати відповіді на різні запитання з науки та техніки (сільське господарство, транспорт, промисловість, зв'язок).

Змістова лінія нерівностей присутня у всьому курсі математики. Вправи з нерівностями допомагають удосконалювати учням уміння розв'язувати задачі, закріплюють та покращують обчислювальні навички. Нерівності зустрічаються при вивченні границь, похідної та інтегралів. Проте в учнів часто виникають труднощі при доведенні навіть простих нерівностей. Спеціальної літератури присвяченої нерівностям, а саме їх доведенню дуже мало. Тому це і призводить до того, що задачі на розв`язування та доведення нерівностей є чи не найскладнішими задачами шкільної програми. Також важливе місце відіграють нерівності у окремих галузях сучасної математики, а саме: лінійне та нелінійне програмування, теорія ігор, дослідження операцій, теорія інформації. [16]

Актуальність даної теми базується на тому, що рівняння вивчаються як у програмі початкової школи, так і в кожному наступному класі загальноосвітніх закладів. Багато геометричних задач та задач з природничої галузі розв'язуються за допомогою рівнянь. Рівняння та нерівності часто використовуються в різних розділах математики. Також завдання на розв'язування рівнянь та нерівностей часто використовуються в ЗНО та ДПА.

Мета дослідження полягає в розробці методики вивчення теми «Рівняння та нерівності» в шкільному курсі алгебри основної школи, формуванні в учнів умінь застосовувати набуті знання при розв'язуванні рівнянь та нерівностей.

Об'єкт дослідження – процес навчання учнів розв'язувати рівняння та нерівності в курсі алгебри.

Предмет дослідження – зміст і методика розв'язування рівнянь та нерівностей.

Для досягнення поставленої мети були сформульовані наступні **завдання бакалаврської роботи:**

- здійснити теоретичний аналіз літератури з теми дослідження;
- розкрити методику вивчення рівнянь та нерівностей в основній школі;
- підібрати приклади розв'язування рівнянь та нерівностей в курсі алгебри.

Теоретичне та практичне значення полягає у тому, що даний матеріал може бути використаний в освітньому процесі вчителями математики, школярами та студентами педагогічних вузів, зокрема при підготовці до уроку чи розширенні своїх власних знань з даної теми.

Структура роботи. Бакалаврська робота складається зі змісту, вступу, двох розділів, висновків, списку використаної літератури.

РОЗДІЛ І. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

1.1 З історії виникнення рівнянь

Алгебра тривалий період входила до складу арифметики – однієї з найдавніших математичних дисциплін. У перекладі з грецької мови поняття «арифметика» означає «мистецтво чисел». Алгебру ж довгий час вважали як мистецтво розв’язування рівнянь. Саме з рівняннями пов′язане походження слова «алгебра».

Першими вміли розв’язувати лінійні рівняння єгиптяни і вавилоняни. Про розвиток алгебри в Давньому Єгипті свідчать математичні тексти, які були написані на папірусі. Написання деяких папірусів відносять до XVIII ст. до н.е., хоча описані в них математичні факти були відомі давнім єгиптянам ще задовго до їх написання.

Рівняння в Стародавньому Вавилоні

Алгебра виникла у зв′язку з необхідністю розв′язування різних задач за допомогою рівнянь. Найчастіше в задачах потрібно знайти одне або декілька невідомих, знаючи при цьому результати деяких дій, здійснених над невідомими та даними величинами. Такі завдання завжди зводяться до розв′язування одного або системи кількох рівнянь, до знаходження невідомих за допомогою алгебраїчних дій над даними величинами. В алгебрі також вивчаються загальні властивості дій над величинами.

Близько 4000 років тому в Стародавньому Вавилоні були відомі деякі алгебраїчні прийоми розв′язування лінійних і квадратних рівнянь.

Ще в давнину виникала необхідність розв′язання рівнянь через потребу розв′язувати задачі, які пов′язані з перебудуванням площ земельних ділянок і з земельними роботами військового характеру, а також з розвитком математики та астрономії.

Квадратні рівняння вміли розв′язувати близько 2000 років до нашої ери вавилоняни. Опрацьовуючи сучасні алгебраїчні записи, можна сказати, що в їх клинописних текстах зустрічаються як неповні, так і повні квадратні рівняння. Хоча рівень розвитку алгебри у Вавилоні був досить високим, поняття від′ємного числа та загальні методи розв′язання квадратного рівняння в клинописних текстах були відсутні.

Рівняння арабів

Арабами були виведені деякі способи розв'язання рівнянь як квадратних, так і рівнянь вищих степенів. Відомий арабський математик Ал-Хорезмі у своїй книзі «Ал - Джабар» описав багато способів розв'язання різних рівнянь. Їх особливість полягала в тому, що Ал-Хорезмі використовував складні радикали для знаходження коренів рівнянь. Потреба у розв′язанні таких рівнянь виникала через питання про розподіл спадщини.

Рівняння в Індії

Квадратні рівняння вміли розв'язувати і в Індії. Задачі на квадратні рівняння можна зустріти в астрономічному трактаті «Аріабхаттіам», складеному в 499 році індійським математиком та астрономом Аріабхаттой. Індійський учений Брахмагупта (VII століття) написав загальне правило розв′язання квадратних рівнянь, яким користуються і сьогодні: $ax^2 + bx = c$, де $a > 0$.

Різні рівняння як квадратні, так і рівняння вищих степенів розв′язувалися нашими далекими предками. Потреба в їх розв′язанні була значною. Адже, рівняння застосовувалися в будівництві, у військових справах, і в побутових ситуаціях. [22]

1.2. Основні теоретичні відомості про рівняння та нерівності

У навчальній програмі з математики для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів затверджений 2017 року зазначено, що у 7-9 класах значного розвитку набуває змістова лінія рівнянь та нерівностей. Процес розв'язування рівняння грунтується як послідовна заміна даного рівняння рівносильними йому рівняннями. На основі узагальнення відомостей про рівняння, здобутих у попередні роки навчання, вводиться поняття лінійного рівняння з однією змінною. [14]

Курс передбачає вивчення лінійних рівнянь, квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до лінійних або квадратних. Розглядаються системи лінійних рівнянь та рівнянь другого степеня з двома змінними. Щодо останніх, то увага зосереджується на системах, де одне рівняння – другого степеня, а інше – першого степеня. Розглядаються лише найпростіші системи рівнянь, у яких обидва рівняння другого степеня.

Важливе місце відводиться вивченню застосувань рівнянь до розв’язування різноманітних задач. Особливе значення надається формуванню умінь застосовувати алгоритм розв’язування задачі за допомогою рівняння.

Елементарні відомості про числові нерівності доповнюються і розширюються за рахунок вивчення властивостей числових нерівностей, лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей. Розглядається розв’язування систем двох лінійних нерівностей з однією змінною.

У 7 класі вивчаються: теореми про рівносильність рівнянь, рівняння з двома змінними, лінійні рівняння та їх системи, графік лінійного рівняння із двома змінними. На їх вивчення відводиться 18 годин.

У 8 класі учні знайомляться з означенням квадратного рівняння та квадратного тричлена, коренем квадратного рівняння, вивчають та застосовують теорему Вієта. На вивчення цього матеріалу відводиться 16 годин.

У 9 класі відводиться 14 годин на вивчення теми «Нерівності». Учням необхідно засвоїти знання про числові нерівності, основні властивості числових нерівностей, нерівності зі змінними, лінійні нерівності з однією змінною, числові проміжки, рівносильні нерівності, системи лінійних нерівностей з однією змінною.

Таким чином, функціональна лінія пронизує весь курс алгебри основної школи і розвивається в тісному зв’язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. [14]

Основні теореми про рівносильність рівнянь

1. Якщо до обох частин рівняння додати одне й те ж саме число або вираз зі змінною, який не втрачає змісту за жодного її значення, то матимемо рівняння, яке є рівносильним даному.

Наприклад: рівняння x+1=3 є рівносильним рівнянню x=2, оскільки друге рівняння можна отримати з першого додаванням до обох частин першого рівняння числа -1 (або перше рівняння можна отримати з другого додаванням до обох частин другого рівняння числа 1).

2. Якщо з однієї частини рівняння перенести в другу частину доданок із протилежним знаком, то отримаємо рівняння, що є рівносильним даному.

Наприклад: рівняння x-3=7 є рівносильним рівнянню x=7+3, тобто рівнянню x=10.

3. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те ж саме число, яке не дорівнює нулю, або на вираз зі змінною, який не стане нулем за жодного значення змінної і не втратить змісту на множині допустимих значень змінної для даного рівняння, то отримаємо рівняння, яке є рівносильним даному.

Наприклад: рівняння 5x=20 є рівносильним рівнянню 5x:5=20:5, тобто рівнянню x=4; рівняння $-\frac{1}{2}\mathrm{x} = 5$ є рівносильним рівнянню $-\frac{1}{2}\mathrm{x}(-2) =$
$= 5 \cdot (-2)$, тобто рівнянню x= - 10.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння 5x+3(3x+7)=35.

Розв’язання

Для початку спростимо рівняння, для цього розкриємо дужки в лівій частині рівняння:

$$5x+9x+21=35.$$

Перенесемо число 21 в іншу частину рівняння та змінимо знак на протилежний:

$$5x+9x=35-21.$$

Зведемо подібні члени в лівій і правій частинах рівняння:

$$14x=14.$$

Поділимо ліву і праву частини рівняння на 14 і отримаємо: x=1.

Відповідь: x= 1. [3]

Рівняння з одним невідомим

Рівнянням з одним невідомим називається співвідношення виду

$$f(x) = 0,$$

де $f(x)$-певний вираз, який містить букву x, числа, функціональні символи та символи арифметичних дій. Якщо не буде зроблено відповідного застереження, то вважатимемо, що всі числа, які входять до виразу $f(x)$, дійсні.

Вважатимемо, що вираз $f(x)$ має значення, якщо існує хоча б одне дійсне число a, для якого цей вираз можна обчислити. Під останньою фразою розумітимемо: замінюємо букву x скрізь, де вона зустрічається у виразі $f(x)$, на число a. Якщо після цього всі операції, визначені виразом $f(x)$, можна виконати та результатом їх виконання буде деяке дійсне число, яке позначимо через $f(a)$, то вважатимемо, що для $x=a$, або в точці a, вираз $f(x)$ можна обчислити. Про точку a, в якій вираз $f(x)$ можна обчислити, кажуть, що в ній вираз $f(x)$ є визначеним. Множина всіх точок, які мають цю властивість, називають областю визначення виразу $f(x)$. Позначатимемо область визначення виразу $f(x)$ через x_f.

Використовуючи загальновживані терміни, які стосуються поняття «функціональної залежності», то сказане вище можна подати у коротшій формі. У лівій частині рівняння $f(x)=0$, стоїть певний аналітичний вираз. Вважатимемо, що він подає аналітично якусь функцію $y=f(x)$. X_f - область визначення цієї функції.

Через Y_f позначатимемо область зміни функції $f(x)$, тобто множину всіх тих дійсних чисел b, кожне з яких є значенням функції $f(x)$ при певному значенні аргументу x. Іншими словами, b тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одне a для якого $f(a)=b$.

Число a називається нулем функції $f(x)$, якщо $f(a) = 0$.

Нулі функції $f(x)$ називаються коренями (розв′язками) рівняння $f(x)=0$. Завдання полягає в тому, щоб знайти всі його корені.

Іноді зручно мати справу з рівнянням виду: $g(x)=b$,
не записуючи його у вигляді $f(x)=0$. Число $a \in X_g$, називається b- точкою функції $g(x)$, якщо $g(a)=b$. b-точки функції $g(x)$ називаються коренями (розв'язками) рівняння $g(x)=b$.

Очевидно, рівняння $g(x)=b$ має розв'язки тоді і тільки тоді, коли $b \in Y_g$, Рівняння $f(x)=0$ має розв'язки тоді і тільки тоді, коли $0 \in Y_f$.[18]

Рівняння з двома змінними

Рівність, яка містить дві змінні (невідомі), називається рівнянням із двома змінними (невідомими).
Наприклад: x-y=4, xy=12 рівняння з двома змінними.

Розв’язком рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, які перетворюють це рівняння на правильну числову рівність.
Наприклад: пара чисел x=7 і y=3 є розв’язком рівняння $2x$-$4y=2$, оскільки 2·7-4·3=2.

Рівняння із двома змінними, які мають однакові розв’язки, будуть рівносильними. Рівняння із двома змінними, які не мають розв’язків, також вважають рівносильними.

У рівнянні із двома змінними можна переносити доданки з однієї частини в іншу, змінивши їх знаки на протилежні. Обидві частини рівняння можна помножити на одне й те ж саме число або поділити на одне й те ж саме число, яке не дорівнює нулю. При цьому отримаємо рівняння, яке буде рівносильним даному. [15]

Загальні відомості про нерівності

Два числа або два вирази, які зв′язані між собою одним із знаків (менше), (менше або дорівнює), > (більше), (більше або дорівнює), називають нерівністю. Вирази, які входять у нерівність, можуть бути числовими, наприклад: $1+\sqrt{2} > 2$ або $5! < 5^5$. У вирази можуть входити одна або кілька змінних величин, наприклад $x^2 - 1 < x$. У цьому разі при одних значеннях змінної (або змінних) нерівність виявляється справедливою, при інших – ні. У зв′язку з цим виникає завдання відшукати ті значення змінної, для яких нерівність справджується.

До найпростіших властивостей нерівностей відносять:

а) Якщо $a < b$, $b < c$, то $a < c$.

б) Якшо $a \leq b$, $b \leq a$, то $a = b$.

в) Якщо $a < b$, то $a + c < b + c$ для кожної величини c.

г) Якщо $a < b$, $c < d$, to $a + c < b + d$.

Зауважимо, що дві нерівності, зв'язані знаком < (або>), називаються нерівностями однакового змісту. Властивість г) можна сформулювати так: нерівності однакового змісту можна почленно додавати.

д) Якщо $a < b$, $c > d$, то $a - c < b - d$.

Дві нерівності, одна з яких із знаком>, а друга із знаком <, називаються нерівностями протилежного змісту. Властивість д) означає, що нерівності протилежного змісту можна почленно віднімати, залишаючи знак першої з них.

е) Нерівність можна почленно помножити на додатні числа.
тобто якщо $a < b$, $ak > 0$, то $ka < kb$.

При почленному множенні нерівності на від'ємне число дістанемо нерівність протилежного змісту: $a < b$, $k < 0$, то $ak > bk$.

Усі твердження а)-е) залишаються правильними, якщо замінити знаки <і> на ≤і≥.

З властивості в) випливає, що можна переносити деяку величину з однієї частини нерівності в іншу, змінюючи знак величини на протилежний; наприклад: якщо $a+b \leq c$, то $a \leq c-b$ (додати до обох частин - b). [18]

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ У ПРОГРАМІ АЛГЕБРИ

2.1.Основні способи розв'язування рівнянь

2.1.1. Лінійні рівняння і рівняння, що зводяться до лінійних

Рівняння виду $ax=b$, де a і b - дані числа, називають лінійним рівнянням із змінною x.

Числа a і b - коефіцієнти рівняння $ax=b$, a - коефіцієнт при змінній x, b - вільний член рівняння.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають рівнянням першого степеня з однією змінною. Його корінь $x=\frac{b}{a}$.

Кожне рівняння першого степеня з однією змінною може мати тільки один корінь. Лінійне рівняння може не мати коренів або мати один корінь чи безліч.

Лінійне рівняння $ax=b$:

- має один корінь, якщо $a \neq 0$;
- має безліч коренів, якщо $a=0$ і $b=0$;
- не має коренів, якщо $a=0$ і $b \neq 0$.

Наприклад, рівняння $0x = 5$ не має жодного кореня, бо не існує числа, яке при множенні на 0 у добутку дало б число 5.

Рівняння $0x=0$ має безліч коренів. Тому, що його задовольняє будь-яке значення змінної x.

Перш ніж розв'язати рівняння, його намагаються спростити, звести до лінійного. Роблять це в такій послідовності:

1. Позбуваються знаменників (якщо вони є).
2. Розкривають дужки (якщо вони є).
3. Переносять члени зі змінними в ліву частину рівняння, а іншу - в праву.
4. Зводять подібні доданки.

У результаті таких перетворень отримують рівняння, рівносильне даному; його корені є також коренями даного рівняння.

Приклад 1. Розв′яжіть рівняння:

$\frac{2x+5}{4} + \frac{x}{12} = \frac{x}{3} - 1\frac{1}{2}$

Розв'язання. Потрібно помножити обидві частини рівняння на найменше спільне кратне знаменників. Для чисел: 2, 3, 4 і 12 найменшим спільним кратним буде 12.

3(2x+5)+x=4x-18;

6x+15+x=4x-18;

6x+x-4x=-18-15;

3x=-33;

x=-11.

Відповідь: - 11

Приклади рівнянь:

1. а) 3(x-5)+x=4x-18;

3x-15+x=4x-18,

3x +x-4x=15-18,

0x =-3 - рівняння розв′язків не має.

б) 5(2 + 3x) - 7(2x + 3)=x-11.

10+15x-14x-21=x-11,

15x-14x-x=21-10-11,

0x =0 - будь-яке число задовольняє рівняння.

Відповідь: а) Рівняння розв′язків не має; б) *x* - будь-яке число.

2. Знайдіть два числа, півсума яких удвічі більша за їх піврізницю, що дорівнює 35, то різниця буде удвічі більшою, а саме 70.

Позначимо менше число буквою *x*, тоді більше дорівнюватиме 70 + *x* .

За умовою задачі (*x*+70+*x*)*:*2=2-35*,* або *x*+35=70, звідси *x*=35 - менше число, 70+35=105 - більше число.

Відповідь. 35 і 105.

Приклад 2. Розв′яжіть рівняння: |x- 2|= *5.*

Розв'язання.

Якщо модуль числа x-2 дорівнює 5,то це число дорівнює 5 або -5.

Маємо: x-2=5, звідси x=7; x-2=-5,звідси x=-3.

Отже, рівняння |x- 2|= 5має два корені: $x = 7$ *і* x=-3.

2.1.2. Дробово-раціональні рівняння та їх застосування при розв'язуванні задач

Дробово- раціональним рівнянням називають рівняння, яке можна звести до дробу $\frac{f(\mathrm{x})}{g(\mathrm{x})} = 0$. Якщо добре знати методику, а вона досить проста, то розв′язання дробово - раціональних рівнянь не є складним завданням.

Якщо рівняння містить декілька доданків, то їх потрібно перенести в одну сторону знака рівності і звести до спільного знаменника. В результаті отримаємо дробову функцію *f(x)/g(x),* яка дорівнюватиме нулю.

Далі необхідно знайти корені чисельника. Серед них відкидаємо ті, що не належать області допустимих значень (нулі знаменника) і записуємо правильну відповідь.

Теорія здається ніби простою, проте на практиці у школярів і в студентів виникають деякі труднощі при зведенні до спільного знаменника та знаходження коренів. Щоб краще зрозуміти як саме розв'язуються дані рівняння розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Знайти корені рівняння

$$\frac{-2\mathrm{x} - 4}{x^2 - 4} = \frac{\mathrm{x} + 5}{\mathrm{x} - 2}$$

Розв′язання: переносимо доданки та зводимо до спільного знаменника

$$\frac{\mathrm{x} + 5}{\mathrm{x} - 2} + \frac{2\mathrm{x} - 4}{x^2 - 4} = 0 \to \frac{(\mathrm{x} + 5)(\mathrm{x} + 2) + 2\mathrm{x} + 4}{x^2 - 4} = 0 \to$$

$$\frac{x^2 + 7\mathrm{x} + 10 + 2\mathrm{x} + 4}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 9\mathrm{x} + 14}{x^2 - 4}$$

Чисельник та знаменник прирівнюємо до нуля та знаходимо корені.

Перше рівняння розв′яжемо за теоремою Вієта

$x^2 + 9x + 14 = 0 \rightarrow x = -2; x = -7$

А друге розкладемо на множники

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0 \rightarrow x = -2; x = 2$

Якщо від коренів чисельника відкинути нулі знаменника, то отримаємо лише один розв′язок x=-7.

Увага: Завжди потрібно перевіряти чи співпадають корені чисельника і знаменника. Якщо такі є, то не враховувати їх у відповіді.

Відповідь: x=-7.

Приклад 2. Розв′язати рівняння

$$\frac{(x^2 - x - 56)(x-3)}{x^2 + 5x + 6} = 0$$

Розв′язання: дане рівняння є дробово-раціональним. Спочатку знаходимо корені чисельника, для цього потрібно розв′язати квадратне рівняння $(x^2 - x - 56)(x-3) = 0 \rightarrow x = 3; x^2 - x - 56 = 0$

Знаходимо дискримінант D=$(-1)^2$- 4· $1 \cdot (-56) = 225 = 25^2$

та корені рівняння x= $\frac{1 \pm 15}{2}$ → x_1=8; x_2=-7

В результаті маємо три нулі чисельника x=8; x=-7; x=3.

Квадратне рівняння в знаменнику розв′яжемо за теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$$

Всі три знайдені значення x=8; x=-7; x=3 будуть розв′язками, тому, що чисельник і знаменник не мають спільних коренів.

Приклад 3. Знайти корені рівняння

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x\,(x-2)} = \frac{4-x}{x\,(x-2)}$$

Розв'язання: доданок виносимо за знак рівності

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x\,(x-2)} = \frac{4-x}{x\,(x+2)} = 0$$

далі зводимо до спільного знаменника

$$\frac{2x-(x+2)-(4-x)(x-2)}{x\,(x-2)(x+2)} = 0$$

Розкриваємо дужки в чисельнику та зводимо до квадратного рівняння

$$\frac{2x-x-2-4x+x^2+8-2x}{x\,(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)} = 0$$

Отримане дробово-раціональне рівняння запишемо системою двох рівнянь

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0 \\ x(x-2)(x+2) \neq 0 \end{cases}$$

Корені першого рівняння знаходимо через дискримінант $x^2-5x+6=0 \rightarrow D=(-5)^2-4\cdot 6=1$

$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2} \rightarrow x_1=2\,; x_2=3.$

Нулі другого обраховуємо без труднощів.

$x(x-2)(x+2) \neq 0 \rightarrow x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2.$

Відкидаємо із розв′язків чисельника значення x=2 та отримаємо.

Відповідь: x=3.

Задача на рух

Задача. Літак за вітром пролетів відстань 120 км і в зворотньому напрямку повернувся назад, на весь шлях він виратив 6 год. Яка швидкість вітру, якщо швидкість в штиль становить 45 км/год.

Розв'язання:

Нехай швидкість вітру буде x км/год. Тоді за вітром швидкість літака становитиме (45+x) км/год, і в зворотньому напрямку (45-x) км/год. За умовою задачі літак витратив 6 годин на дорогу. Поділимо відстань на швидкість та просумуємо і отримаємо час

$$\frac{120}{45+\mathrm{x}}+\frac{120}{45-\mathrm{x}}=0.$$

В результаті отримаємо дробово-раціональне рівняння, схема розв′язування якого нам вже відома

$$\frac{120}{45+\mathrm{x}}+\frac{120}{45-\mathrm{x}}-6=0\rightarrow$$

$$\frac{120(45-\mathrm{x})+120(45+\mathrm{x})-6(45+\mathrm{x})(45-\mathrm{x})}{(45+\mathrm{x})(45-\mathrm{x})}=0\rightarrow$$

$$\begin{cases}(6x^2-12150+10800=0\\ (45+\mathrm{x})(45-\mathrm{x})\neq 0\end{cases}$$

Розв′язок другого рівняння має вигляд: x= -45; x=45.

Корені чисельника знайдемо після спрощень

$6x^2-12150+10800=0\rightarrow 6x^2-1350=0\rightarrow x^2=225\rightarrow \mathrm{x}_1=-15;\ \mathrm{x}_2=15.$

Із фізичних міркувань перший розв′язок нас незадовільняє, тому його відкидаємо.

Відповідь: швидкість вітру 15 км/год.

Задача на спільну роботу

Задача. Два робітники, працюючи разом на заводі, виконали норму за 4 дні. Скільки днів потрібно на виконання цієї роботи кожному робітнику окремо, якщо першому для виконання норми потрібно на 6 днів менше, ніж другому?

Розв′язання

Нехай перший робітник виконує норму за *x* днів. Тоді другому необхідно (*x*+6) днів.

Це означає, що за один день перший виконає $\frac{1}{x}$, а другий $\frac{1}{x+6}$ частину всієї норми. За умовою виконують норму за 4 дні, тобто разом в день можуть виконати $\frac{1}{4}$ норми.

Складаємо і розв′язуємо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}\rightarrow\frac{4(x+6)+4x-x\,(x+6)}{4x(x+6)}\rightarrow\frac{-x^2+2x+24}{4x(x+6)}=0$$

Маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases}x^2-2x-24=0;\\ \quad 4x(x+6)\neq 0;\end{cases}\rightarrow$$

$$D=(-2)^2-4(-24)=100;$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 10}{2}\rightarrow x_1=6;\ x_2=-4.$$

Перший розв′язок $x_2=-4$ не задовільняє умову задачі. Час другого робітника x+6=6+6=12 (днів)

Відповідь: Перший робітник виконує норму за 6 днів, а другий за 12.

Подібних дробово-раціональних рівнянь можна розглянути безліч, але схема їх розв′язання залишається незмінною. Найважливіше в теоретичних задачах правильно складати рівняння та не помилятися при зведенні до спільного знаменника. Все решта в більшості випадків зводиться до розв′язання лінійних або квадратних рівнянь. [4]

2.1.3. Квадратні рівняння та рівняння, які зводяться до квадратних

У 8 класі вивчаються квадратні рівняння, формула коренів квадратного рівняння, теорема Вієта, квадратний тричлен, квадратне рівняння та рівняння, які зводяться до квадратних, як математичні моделі прикладних задач.

Означення. Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, називають квадратним рівнянням. Де x - змінна, a, b і c - деякі числа, при чому $a\neq 0$. Коефіцієнтами квадратного рівняння називають числа a, b і c.

Число a називають першим або старшим коефіцієнтом, число b -другим коефіцієнтом, число c - вільним членом.

Наприклад, квадратне рівняння $-2x^2+5x+3=0$ має такі коефіцієнти:
$a=-2$, $b=5$, $c=3$.

Якщо перший коефіцієнт квадратного рівняння дорівнює 1, то його називають зведеним.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2+bx+c=0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають неповним квадратним рівнянням.

Теорема Вієта. Якщо x_1, *і* x_2 - корені квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ то}$$

$$x_1+x_2= -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2=\frac{c}{a}$$

Доведення. Умовою теореми передбачено, що дане квадратне рівняння має корені. Тому його дискримінант D не може бути від'ємним.

Нехай D>0. Використавши формулу коренів квадратного рівняння, запишемо:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

Маємо: $x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}-b+\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}$

$$x_1 x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b^2)-(\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Нехай D=0. У цьому разі вважають , що $x_1= x_2= -\frac{b}{a}$.

Маємо: $x_1+x_2= 2\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$, $\quad x_1 x_2=\frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}= \frac{c}{a}$

Наслідок. Якщо x_1 і x_2 - корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1+x_2 = -b, \quad x_1x_2=c$$

Іншими словами, сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.

Означення. Квадратним тричленом називають многочлен виду

$ax^2 + bx + c$, де x - змінна, a, b і c - деякі числа, причому $a \neq 0$.

Означення. Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення квадратного тричлена дорівнює нулю.

Наприклад, число 2 є коренем квадратного тричлена x^2-$6x$+ 8. Щоб знайти корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, треба розв′язати відповідне квадратне рівняння $ax^2+bx+c = 0$.

Значення виразу $D=b^2$-$4ac$ називають дискримінантом квадратного тричлена ax^2 -$bx+c$.

Означення. Рівняння виду $ax+bx+ c = 0$, де x - змінна, a, b і c - деякі числа, причому $a \neq 0$, називають біквадратним рівнянням. [13]

Розв′язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь

Приклад 1. Розв′яжіть рівняння: x^4 - $13x^3$ + 36 = 0

Розв'язання. Нехай x^2= t. Тоді x^4 = t^2. Підставивши в задане рівняння замість x^2 і x^4 відповідно t і t^2, отримаємо квадратне рівняння зі змінною t:

t^2- 13t + 36 = 0.

Розв′язуючи це рівняння, знаходимо: t_1 = 4, t_2= 9. Оскільки t =x^2, то розв′язування заданого рівняння зводиться до розв′язування двох рівнянь:

x^2 = 4 і x^2 = 9.

Звідси x_1= -2, x_2= 2, x_3= -3, x_4= 3.

Відповідь: можна записати двома способами: -2; 2; -3; 3 або $\pm$2; $\pm$3.

Метод заміни змінної можна використовувати для розв′язування не лише біквадратних рівнянь.

Приклад 2. Розв′яжіть рівняння (2x - 1) + $(2x - 1)^2$ - 2 = 0.

Розв'язання. Зробимо заміну: $(2x - 1)^2 = t$. Тоді дане рівняння зводиться до квадратного рівняння

$$t^2 + t - 2 = 0$$

Звідси $t^2 = -2$, $t_2 = 1$.

Тепер треба розв'язати два таких рівняння:

$$(2x - 1)^2 = -2 \quad \text{і} \quad (2x - 1)^2 = 1.$$

Перше з них коренів не має. Із другого рівняння отримуємо:

$$2x - 1 = -1 \text{ або } 2x - 1 = 1.$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Відповідь: 0; 1.

2.2. Методика розв'язування нерівностей

2.2.1.Числові нерівності та їх властивості

Можна порівняти будь-які числа *a* і *b* і результати порівняння записати у вигляді рівності або нерівності, використовуючи знаки =, <, >. Для довільних чисел *a* і *b* виконується одне й тільки одне із відношень: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Розглянемо приклади.

1. Порівняємо звичайні дроби $\frac{5}{8}$ і $\frac{4}{7}$. Для цього зведемо їх до спільного знаменника: $\frac{5}{8} = \frac{35}{56}$; $\frac{4}{7} = \frac{32}{56}$

Оскільки 35 > 32, то $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

2. Порівняємо десяткові дроби 3,6748 і 3,675. Цифри в розрядах одиниць і сотих збігаються, а в розряді тисячних у першому дробі записана цифра 4, а в другому - цифра 5. Оскільки 4 <5 то 3,6748 <3,675.

3. Порівняємо звичайний дріб $\frac{9}{20}$ і десятковий дріб 0,45. Перетворивши дріб $\frac{9}{20}$ у десятковий, дістанемо, що $\frac{9}{20} = 0,45$.

4. Порівняємо від′ємні числа -15 і -23. Модуль першого числа менший від модуля другого. Отже, перше число більше від другого, тобто -15>-23.

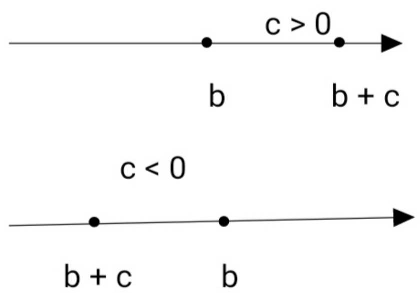
Залежно від конкретного виду чисел можна застосувати той чи інший спосіб порівняння. Проте зручно мати такий спосіб порівняння чисел, який охопив би усі випадки. Він полягає в тому, що складають різницю чисел і з′ясовують, буде вона додатним числом, від′ємним числом чи нулем. Цей спосіб порівняння чисел підтверджується таким означенням.

Означення. Число *a* більше від числа *b*, якщо різниця *a-b* - додатне число; число *a* менше від числа *b*, якщо різниця *a-b* – від′ємне число.

Зауважимо, що коли різниця *a-b* дорівнює нулю, то числа *a* і *b* рівні.

На координатній прямій більше число зображається точкою, що лежить справа, а менше - точкою, що лежить зліва. Нехай *a* і *b* — деякі числа. Позначимо різницю $a - b$ буквою *c*. Оскільки $a - b = c$, то $a = b+c$. Коли *c* -додатне число, то точка з координатою $b+c$ лежить справа від точки з координатою *b*, а якщо с - від′ємне число, то зліва (мал.1). Отже, коли

$a > b$, то точка з координатою *a* лежить справа від точки з координатою *b*, а коли $a < b$ – зліва.



Мал. 1

Покажемо, як наведене означення можна використати при розв′язуванні задач.

Приклад 1. Доведемо, що при будь-яких значеннях *a* правильна нерівність

$(a - 3)(a - 5) < (a-4)^2$

Складемо різницю лівої й правої частин нерівності і перетворимо її:

$(a - 3)(a - 5) - (a-4)^2 = a^2 - 3a - 5a + 15 - a^2 + 8a - 16 = -1$

При будь-якому *a* ця різниця від′ємна. Отже, при будь-якому *a* правильна нерівність $(a - 3)(a - 5) < (a-4)^2$

Приклад 2. Доведемо, що сума квадратів будь-яких двох чисел не менша від їх подвоєного добутку.

Нехай *a* і *b* - довільні числа. Потрібно довести, що $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Перетворимо різницю лівої і правої частин нерівності:

$(a^2 + b^2) - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Різницю $(a^2 + b^2) - 2ab$ ми подали у вигляді квадрата деякого виразу. Оскільки $(a - b)^2 \geq 0$ при будь-яких *a* і *b*, то і нерівність $a^2 + b^2 > 2ab$ правильна при будь- яких *a* і *b*. [9]

Властивості числових нерівностей:

Розглянемо нерівності виду $a<b$, $c> d$ та ін., де *a, b, c, d* – довільні дійсні числа.

Теорема 1. Якщо $a<b$ і $b < c$, то $a < c$.

Доведення. Якщо $a < b$ і $b < c$, то числа $a - b$ і $b - c$ - від′ємні. Їх сума $(a-b) + (b-c) = a-c$ - також число від′ємне. А якщо $a-c$ - число від′ємне, то $a<c$. Це й треба було довести.

Теорема 1 виражає властивість транзитивності нерівностей з однаковими знаками.

Приклад. Оскільки $\sqrt{1,9} < \sqrt{2}$ і $\sqrt{2} < 1,42$, то $\sqrt{1,9} < 1,42$.

Теорема 2. Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.

Наприклад, якщо $a < b$ і c - довільне дійсне число, то $a+c<b+c$.

Доведення. Якщо a, то a - b - число від'ємне. Оскільки

a-b=(a+c)-(b+c), то різниця (a+c)-(b+c) число також від'ємне. А це означає, що $a+c<b+c$.

Теорема 3. Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від'ємне число і змінити нерівності на протилежні, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай $a<b$ і c - будь-яке додатне число. У цьому випадку числа a-b, (a-b) c, отже, і різниця ac-bc- числа від'ємні, тобто $ac<bc$.

Якщо $a<b$ і c - довільне від'ємне число, то добуток (a - b)c, а отже, і різниця $ac - bc$ – числа додатні. Тому $ac>bc$.

Приклади. а) 3 < 4 і 5 > 0, тому 3 · 5 < 4 · 5 або 15 < 20;

б)3<4 і -2 < 0, тому 3 (-2) >4 (-2) або -6 > -8.

Оскільки ділення можна замінити множенням на число, обернене до дільника, то в теоремі 3 слово «помножити» можна замінити словом «поділити».

Якщо $a<b$ і $c>0$, то $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$; якщо $a<b$ і $c<0$, то $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

Теорема 4. Нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати

Наприклад, якщо $a<b$ і $c<d$, то $a+c<b+d$.

Доведення. Якщо $a<b$ і $c<d$, то за теоремою 2

$a+c<b+c$ і $b+c<b+d$, звідси за теоремою 1 $a+c<b+d$.

Приклад. 2 3 і 5<7, тому 2+5<3+7 або 7<10.

Теорема 5. Нерівності з однаковими знаками можна почленно перемножати, якщо їх ліва й права частини – додатні числа.

Наприклад, якщо $a<b$, $c<d$ і числа a, b, c, d – додатні, то $ac<bd$.

Доведення. Нехай $a<b$ і $c<d$, а числа c і b - додатні. Згідно з теоремою 3 $ac<bc$ і $bc<bd$, звідси за теоремою 1 $ac<bd$.

Зауваження. Теореми 4 і 5 правильні також для трьох і довільної кількості нерівностей. Наприклад, якщо *ab,c<d* і *n<m*, то *a +c+n<b+d+m.*

Доведення теорем 1-5 для нерівностей зі знаком « < » майже дослівно можна повторити для аналогічних нерівностей зі знаком « > », « ≥ » або « ≤». [2]

2.2.2. Лінійні нерівності з однією змінною. Числові проміжки

Властивості числових рівностей допомагають розв′язувати рівняння. Аналогічно властивості числових нерівностей допоможуть розв′язувати нерівності.

Розв′язуючи рівняння, заміняємо його іншим, більш простим рівнянням, але рівносильним даному. За аналогією розв′язують і нерівності.

При заміні рівняння на рівносильне використовують теореми про перенесення доданків з однієї частини рівняння в другу і про множення обох частин рівняння на одне й те саме відмінне від нуля число.

Аналогічні правила застосовують і під час розв′язування нерівностей.

- Якщо який-небудь доданок перенести з одної частини нерівності в іншу, замінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від′ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

За допомогою цих правил розв′яжемо нерівність

Маємо: 14+ 2x> 44

Переносимо доданок 14 у праву частину нерівності:

2x> 44-14

Звідси 2x >30.

Поділимо обидві частини нерівності на 2:

$x > 15$

Зауважимо, що отримана нерівність рівносильна заданій нерівності. Множина її розв′язків складається з усіх чисел, які більші за 15. Цю множину називають числовим проміжком позначають $(15; +\infty)$ (читають: «проміжок від 15 до плюс нескінченності»).

Точки координатної прямої, які зображують розв′язки нерівності $x>15$, розміщені праворуч від точки, яка зображує число 15, і утворюють промінь, у якого «виколото початок» (рис. 5).

Рис. 5

Відповідь може бути записана одним зі способів: $(15; +\infty)$ або $x>15$.

Зауважимо, що для зображення на рисунку числового проміжку використовують два способи: за допомогою штриховки (рис. 5 а) або дужок (рис. 5 б). Використовуватимемо другий спосіб.

Приклад 1.

Розв′яжіть нерівність $3+\frac{x}{2} \leq 7+x$.

Розв'язання. Перенесемо доданок *x* з правої частини нерівності в ліву, а доданок 3 - з лівої частини в праву і зведемо подібні члени:

$$-x+\frac{x}{2} \leq 7-3$$

$$-\frac{x}{2} \leq 4$$

Помножимо обидві частини нерівності на -2:

$$x \geq -8.$$

Множиною розв'язків цієї нерівності є числовий проміжок, який позначають $[-8; +\infty)$ (читають: «проміжок від -8 до плюс нескінченності, включаючи -8»). Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності x ≥ 8, утворюють промінь (рис. 6).

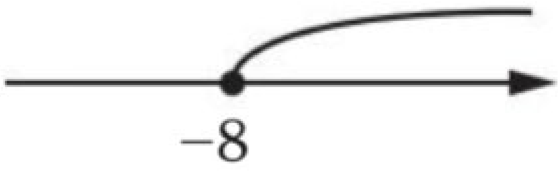


Рис. 6

Відповідь можна записати одним зі способів: [-8; +∞) або x≥ 8.

Приклад 2.

Розв′яжіть нерівність 2 (2 - 3x)> 3(x+6)- 5.

Розв'язання.

Запишемо ланцюжок рівносильних нерівностей:

4-6x >3x+18-5;

4-6x >3x+13;

-3x-6x > -4 + 13;

-9x > 9;

x < -1.

Множиною розв′язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають (-∞; -1) (читають: «проміжок від мінус нескінченності до -1»). Точки координатної прямої, які зображують розв′язки нерівності x<-1, розміщені ліворуч від точки -1 (рис. 7) і утворюють промінь, у якого «виколото» початок.

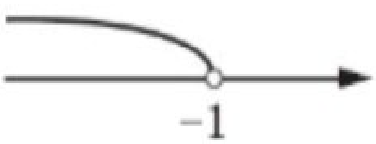


Рис. 7

Відповідь можна записати одним зі способів: (-∞; -1) або x<-1.

Приклад 3.

Розв′яжіть нерівність $\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}\leq\frac{1}{6}$.

Розв'язання

Запишемо ланцюжок рівносильних нерівностей:

$3x - 3 + 2x \leq 1$;

$5x\leq 4$;

$x\leq \frac{4}{5}$.

Множиною розв'язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають $(-\infty;\frac{4}{5}]$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до $\frac{4}{5}$, включаючи $\frac{4}{5}$ »). Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x\leq \frac{4}{5}$ утворюють промінь (рис. 8).

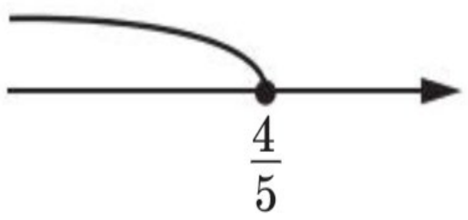


Рис. 8

Відповідь можна записати одним зі способів: $(-\infty;\frac{4}{5}]$ або $x\leq \frac{4}{5}$.

Приклад 4. Розв′яжіть нерівність $3(2x-1) + 7 \geq 2(3x + 1)$.

Розв'язання

Маємо:

$6x-3 +7 \geq 6x + 2$;

$6x-6x\geq 2-4$;

$0x\geq -2$.

Остання нерівність при будь-якому значенні *x* перетворюється в правильну числову нерівність $0\geq -2$. Отже, шукана множина розв'язків збігається з множиною дійсних чисел.

Відповідь: *x* - будь-яке число.

Цю відповідь можна записати інакше: (-∞; +∞) (читають: «проміжок від мінус нескінченності до плюс нескінченності»). Цей числовий проміжок називають числовою прямою.

Приклад 5. Розв′яжіть нерівність 4 (x-2) 1 <2 (2x-9).

Розв'язання

Маємо:

4x-8-1 < 4x – 18;

4x-4x< 9-18;

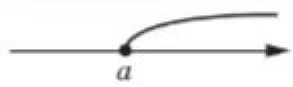
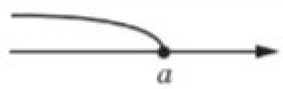
0x < - 9.

Отримана нерівність при будь-якому значенні x перетворюється в неправильну числову нерівність 0 < - 9.

Відповідь можна записати одним зі способів: розв'язків немає або ∅.

Кожна з нерівностей, які було розглянуто в прикладах 1-5, зводилася до рівносильної нерівності одного з чотирьох видів: $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, де x – змінна, a і b – деякі числа. Такі нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною. [11]

Наведемо таблицю позначень і зображень вивчених числових проміжків:

Нерівність	Проміжок	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	

2.2.3. Квадратні нерівності та способи їх розв’язування

Нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x - змінна, a, b і c - деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратними нерівностями (або нерівностями другого степеня з однією змінною).

Наприклад, квадратними є нерівності: $2x^2 + 3x - 5 > 0$, $4x^2 - 8 \geq 0$, $7x^2 - 9x < 0$, $x^2 - 9x + 17 \leq 0$.

Розв'язки квадратних нерівностей можна розглядати як проміжки, на яких квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних (для нерівності $ax^2 + bx + c > 0$), невід'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c \geq 0$), від'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c < 0$) і недодатних (для нерівності $ax^2 + bx + c \leq 0$) значень.

Отже, щоб розв'язати квадратну нерівність, достатньо знайти відповідні проміжки знакосталості квадратичної функції.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $x^2 + 3x - 4 < 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = x^2 + 3x - 4$. Графіком її є парабола, гілки якої напрямлені вгору. З'ясуємо, чи перетинає парабола вісь x. Для цього розв'яжемо рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$, тобто знайдемо нулі функції. Маємо: $x_1 = 1$; $x_2 = -4$.

Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами 1 і - 4. Будуємо схематично графік функції $y = x^2 + 3x - 4$, знаючи її нулі та напрям гілок (рис.9). За графіком з'ясовуємо, що функція набуває від'ємних значень, коли $x \in (-4; 1)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2+3x-4 <0$ є проміжок $(-4; 1)$.

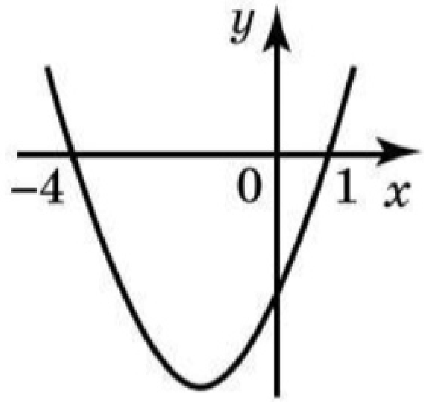


Рис.9

Відповідь. (-4; 1).

Приклад 2. Розв′язати нерівність:

1) $x^2+3x-4\leq0$; 2) $x^2+3x-4>0$; 3) $x^2+3x-4 \geq 0$.

Розв'язання. Розглянемо схематичне зображення графіка функції $y = x^2 + 3x- 4$ (рис.9).

1) Нерівність $x^2 + 3x-4 \leq 0$ задовольняють ті самі значення *x*, що й нерівність $x^2+ 3x - 4 < 0$, а також числа -4 і 1- нулі функції, тобто ті значення аргументу, при яких значення функції $y = x^2 + 3x - 4$ дорівнює нулю. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2+ 3x-4 \leq 0$ є проміжок [-4; 1].

2) з рисунка 9 бачимо, що функція $y = x^2 + 3x - 4$ набуває додатних значень, якщо $x \in (-\infty; -4)$ або $x \in (1; +\infty)$. Множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 > 0$ є об'єднання цих проміжків, тобто $(-\infty;-4)\cup (1; +\infty)$. 3)

3) Нерівність $x^2+ 3x - 4 \geq 0$ задовольняють ті самі значення *x*, що й нерівність $x^2 + 3x - 4 > 0$, включаючи нулі функції $y = x^2 + 3x-4$, тобто числа -4 і 1.

Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x-4 \geq 0 \in(-\infty; -4] \cup [1;+\infty)$.

Відповідь. 1) [-4; 1]; 2) $(-\infty;-4)$ $(1; +\infty)$; 3) $(- \infty:4] \cup [1; +\infty)$.

Зауважимо, що для запропонованого способу розв′язування ані положення вершини параболи, ані розташування параболи відносно осі *y* не мають значення. Важливо лише знати абсциси точок перетину параболи з віссю *x* (нулі функції) і напрям гілок параболи (вгору чи вниз).

Отже, для розв′язування квадратних нерівностей слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) знайти корені квадратного тричлена ax^2+bx+c (якщо вони існують);

2) якщо нерівність має строгий знак (> або <), то корені квадратного тричлена позначаємо на осі *x* «виколотими» точками (вони виключатимуться з множини розв′язків нерівності); якщо знак нерівності нестрогий ($\geq$або $\leq$), то корені квадратного тричлена позначаємо зафарбованими точками (вони включатимуться до множини розв′язків нерівності);

3) схематично зображуємо графік функції $y=ax^2+bx+c$, враховуючи напрям гілок параболи та точки її перетину з віссю x (якщо вони існують);

4) знаходимо на осі x проміжки, на яких функція $y=ax^2+bx+c$ задовольняє дану нерівність;

5) записуємо відповідь.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{3x - x^2}$

Розв'язання. Областю визначення цієї функції є розв'язки нерівності $3x - x^2 \geq 0$.

1) Коренями квадратного тричлена $3x- x^2$ є числа 0 і 3.

2) Зображуємо корені на осі x зафарбованими точками, оскільки знак нерівності є нестрогим.

3) Схематично зображуємо графік функції $y = 3x- x^2$. Це парабола, що перетинає вісь x у точках 0 і 3, гілки якої прямують униз (рис.10).

4) Нерівність справджується при $x \in [0; 3]$.

Відповідь. [0; 3].

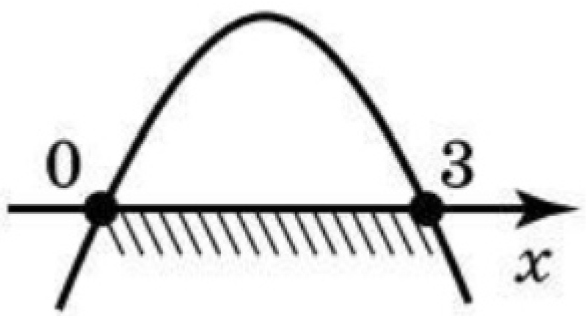


Рис.10

Приклад 4. Розв′язати нерівність $x^2-6x+9 > 0$.

Розв'язання.

1) Коренем рівняння $x^2-6x+9= 0$ є число 3.

2) Позначаємо точку 3 на осі x «виколотою», бо знак нерівності - строгий.

3) Схематично зображуємо графік функції $y=x^2-6x+9$ (рис. 11). Це парабола з вершиною на осі x, її гілки напрямлені вгору. З віссю x вона має лише одну спільну точку – точку 3 .

4) За рисунком 11 робимо висновок, що функція набуває додатних значень при будь- якому значенні x, крім числа 3. Отже, множиною розв'язків нерівності є $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; 3) \cup (3+\infty)$.

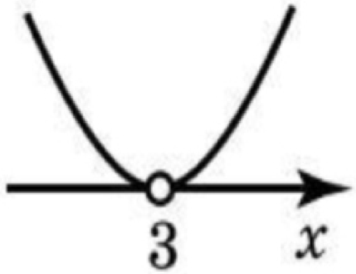


Рис.11

Приклад 5. Розв′язати нерівність $-x^2+2x-7<0$.

Розв'язання. Рівняння $-x^2+2x-7=0$ коренів не має, адже $D = 2^2-4(-1)(-7)=-24<0$. Отже, парабола $y=-x^2+2x-7$ вісь x не перетинає, а її гілки прямують униз (рис.12).

Оскільки всі точки параболи лежать нижче осі x, то множиною розв′язків нерівності $-x^2+2x-7<0$ є множина всіх чисел, тобто $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; +\infty)$.

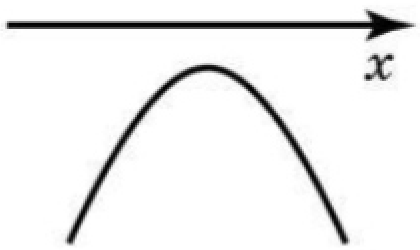


Рис. 12

Приклад 6. Розв’язати нерівність $-x^2+2x-7\geq 0$

Розв'язання. З рисунка 12 бачимо, що жодна з точок параболи не лежить вище осі x і не належить цій осі, тому нерівність $-x^2+2x-7\geq 0$ не має розв'язків.

Відповідь. Немає розв'язків.

Приклад 7. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0, \\ x^2 + x - 12 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язком системи нерівностей є спільні розв'язки нерівностей системи. Отже, щоб знайти розв'язки системи, треба розв'язати кожну нерівність окремо і знайти їх спільні розв'язки. Множиною розв'язків нерівності $x^2 + 2x > 0$ є $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. Множиною розв'язків нерівності

$x^2 + x - 12 \leq 0$ є $[-4;3]$. Зобразимо на координатній прямій отримані множини розв'язків нерівностей (рис.13). Множиною розв'язків системи буде переріз множин розв'язків нерівностей, тобто $[-4;-2) \cup (0; 3]$.

Відповідь. $(-4;-2) \cup (0; 3]$. [8]

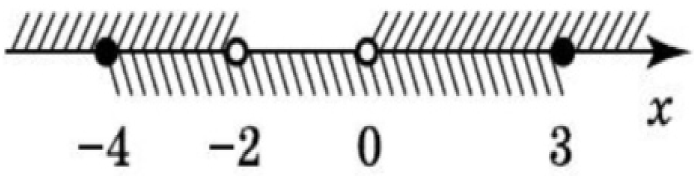


Рис. 13

Приклад 8. Розв’язати квадратну нерівність з модулем

$2x^2 + |x| - 1 > 0$

Врахуємо, що $x^2 = |x|^2$ і зробимо підстановку $|x| = t$

Отримаємо $2t^2 + t - 1 > 0 \leftrightarrow (t < -1$ або $t > \frac{1}{2})$.

Тепер маємо $(|x| < -1$ або $|x| > \frac{1}{2}) \leftrightarrow$

$(x \in \emptyset$ або $x < -\frac{1}{2}) \leftrightarrow (x > \frac{1}{2}$ або $x < -\frac{1}{2})$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$. [16]

2.2.4. Дробово-раціональні нерівності

У програмі дев'ятих класів з поглибленим вивченням математики вивчаються метод інтервалів та розв'язування раціональних нерівностей.

Раціональною нерівністю називають нерівність, у якій ліва і права частина є раціональними виразами. Будь-який раціональний вираз можна подати як раціональний дріб. Тому, щоб вміти розв'язувати раціональні нерівності потрібно всього лиш навчитися розв'язувати нерівності виду

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \text{або} \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0\,,$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени. [10]

Теорема. Нерівності $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ та $f(x)\,g(x) > 0$ рівносильні.

Справді, якщо $g(x) = 0$ то обидві нерівності не виконуються. Якщо ж $g(x) \neq 0$, то домножимо обидві частини першої нерівності на $g^2(x) > 0$ і одержимо другу нерівність.

Ця теорема допомагає звести дробово-раціональну нерівність до нерівності виду M(x) > 0, де M - деякий многочлен.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність

$\frac{4x+1}{x-3} < 0$

$\frac{4x+1}{x-3} < 0 \leftrightarrow (4x+1)(x-3) < 0.$

Отримаємо квадратну нерівність, розв'язавши яку, маємо відповідь:

$-\frac{1}{4} < x < 3.$

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність

$$\frac{3x-2}{2x+1} < 2$$

$$\frac{3x-2}{2x+1} < 2 \leftrightarrow \frac{3x-2}{2x+1} - 2 < 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{-x-4}{2x+1} < 0 \leftrightarrow \frac{x+4}{2x+1} > 0 \leftrightarrow$$

(x+4)(2x+1) $> 0 \leftrightarrow$ (x < -4 або x$> -\frac{1}{2}$).

Відповідь: x < -4 або x$> -\frac{1}{2}$. [16]

Існує більш загальний метод розв'язування нерівностей такого виду, який називається методом інтервалів. Він дозволяє розв'язувати нерівності, ліва частина яких є добутком *n* множників.

Зауважимо, що іноді функція може змінювати знак і при переході через точку розриву. А у випадку дотику графіка функції до осі *x* в цій точці функція знака не змінює.

Приклад 3. Розв′яжіть нерівність (x + 1) (3 - x)$(x - 2)^2 > 0$.

Розв'язання. Позначимо нулі функції *f* (x) = (x+1)(3-x) $(x - 2)^2$ на координатній прямій (рис. 13.7). Вони розбивають множину D (*f*) =R на проміжки знакосталості функції *f*. Дослідимо знак функції *f* на цих проміжках. Результат дослідження показано на рисунку 13.8.

Відповідь: (-1; 2) U (2; 3).

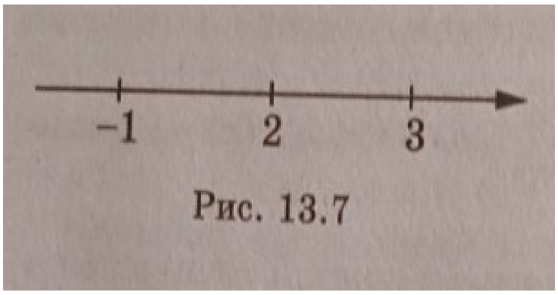


Рис. 13.7

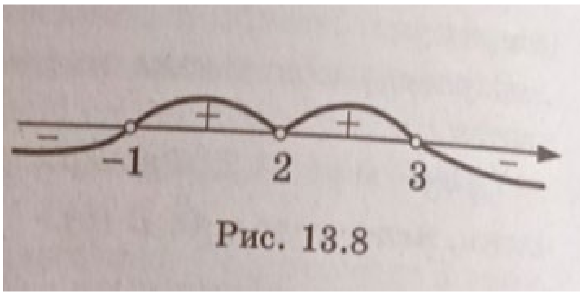


Рис. 13.8

Приклад 4. Розв'яжемо нерівність (x+2) (x-5)>0 методом інтервалів. Для цього визначимо нулі функції

F(x):x=-2,x=5, позначимо їх на координатній прямій (рис.14)

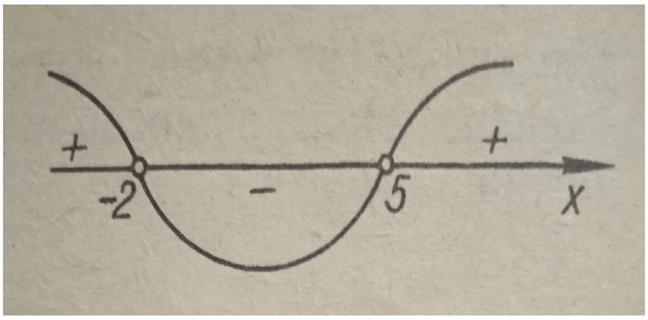


Рис.14

Щоб з'ясувати знак функції у кожному з інтервалів, розмістимо їх у порядку зростання коренів (- ∞; -2). (-2 ;5): (5; + ∞). Тепер, щоб з'ясувати знак функції у кожному проміжку, достатньо визначити знак у крайньому правому з них (5; + ∞), де F(x)>0. Далі, користуючись властивістю чергування знаків, встановимо знаки функції в решті проміжків. Отже сукупність проміжків
(-∞; −2) та(5, + ∞) є множиною розв'язків нерівності.

Приклад 5. Розв′язати нерівність (x+3)(x^2 -4)<0 Щоб застосувати метод інтервалів, треба розкласти двочлен x^2 - 4 на множники. Маємо:
(x+3)(x+2)(x-2)<0

Почнемо з визначення нулів функції. Зобразимо їх на координатній прямій (рис. 15)

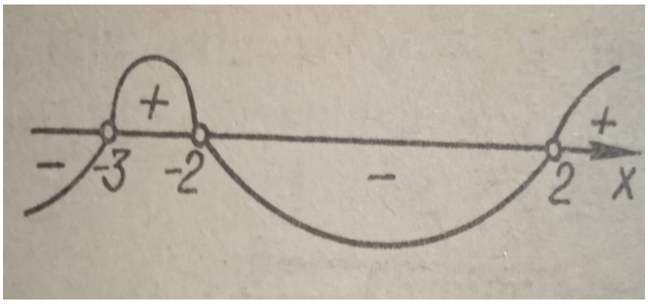


Рис. 15

У крайньому правому інтервалі (2; +∞) функція набуває додатного значення. Рухаючись по координатній прямій вліво, будемо чергувати знаки. Розв'язком нерівності буде сукупність проміжків (−∞;-3) і (-2; 2).

Приклад 6. Розв'язати нерівність (x-1) (x -7)<0

Знайдемо нулі функції $x_1 = 1$, $x_2 = 7$; встановимо знаки функції у кожному з утворених інтервалів, рухаючись справа наліво (рис. 16) Отже, розв'язком нерівності буде проміжок (1; 7). [5]

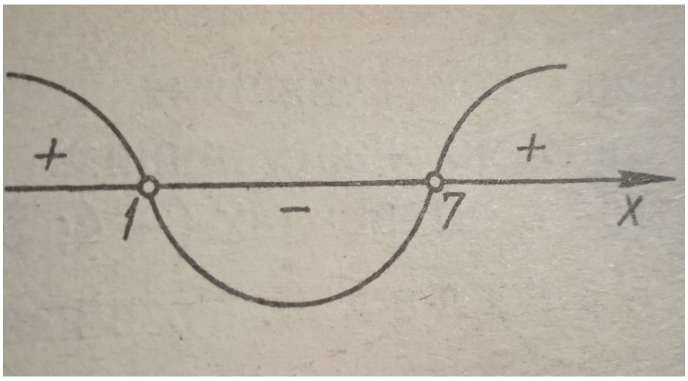


Рис.16

2.3. Місце теми у програмі ДПА та ЗНО

Міністерство освіти і науки затвердило Порядок прийому на навчання для здобуття вищої освіти в 2022 році. Через воєнні дії в Україні з 2022 року було скасовано проведення традиційних вступних випробувань до закладів вищої освіти, відповідно втратив чинність наказ, що регламентував проведення ЗНО.

Для вступу на перший курс для здобуття ступеня бакалавра (магістра з медичних та ветеринарних спеціальностей) будуть використовувати результати національного мультипредметного тесту (НМТ).

НМТ – це комп’ютерний онлайн-тест, який містить три блоки: українська мова, математика та історія України. Тест складається з 20 завдань з кожного блоку, для їх виконання відводиться 120 хвилин.

У 2022 році державна підсумкова атестація з математики проводилась у формі зовнішнього незалежного оцінювання. Програма зовнішнього незалежного оцінювання досягнень випускників навчальних закладів системи загальної середньої освіти з математики, що є конкурсним предметом при вступі до закладів вищої освіти за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавра (спеціаліста, магістра медичного та ветеринарно-медичного спрямувань) на основі повної загальної середньої освіти.

На підставі затвердженої програми укладаються тестові завдання для проведення зовнішнього незалежного оцінювання.

У завданнях зовнішнього незалежного оцінювання важливе місце займають: лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння і нерівності. Системи лінійних рівнянь і нерівностей. Системи рівнянь, з яких хоча б одне рівняння другого степеня. Розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь та їх систем.

Приклади завдань з ЗНО за даною темою:

Завдання 1.

Розв'яжіть рівняння $2x\,(x + 2) = 5(x+2)$.

А	Б	В	Г	Д
-2,5; 2	-2	2,5	-2; 0,4	-2; 2,5

Позначте відповіді:

А Б В Г Д

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Розв'язання:

$2x^2 + 4x = 5x + 10$

$2x^2 + 4x - 5x - 10 = 0$

$2x^2 - x - 10 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1+\sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{1+9}{4} = 2{,}5$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-\sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{1-9}{4} = -2$

Відповідь: $x_1 = 2{,}5;\ x_2 = -2$.

Завдання 2.

Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-3}{3} = \frac{x+1}{6}$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$

Позначте відповіді:

А Б В Г Д

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Розв'язання:

Помножимо всі члени чисельників на два, щоб позбутися знаменників і отримаємо

4x-6=x+1

4x-x=1+6

3x=7

x=$\frac{7}{3}$

Відповідь: x=$\frac{7}{3}$

Завдання 3.

Розв'яжіть рівняння $||2x-1|-3|=5.$ Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть добуток усіх коренів.

Впишіть відповідь:

☐

Розв'язання:

З рівності ||2x-1|-3|=5 маємо, що |2x-1|-3=±5. Тоді маємо два рівняння: |2x-1|= -2 та |2x-1|=8. Перше не має коренів, а з другого маємо 2x-1=±8, корені якого x=4,5 та x= -3,5. Їх добуток дорівнює -15,75.

Відповідь: -15,75.

Завдання 4.

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}2x+5y=5,\\ x-2y=7.\end{cases}$ Для одержання розв'язку (x_0;y_0)

системи знайдіть суму (x_0+y_0).

А	Б	В	Г	Д
-18	3	4	8	12

Позначте відповіді:

А Б В Г Д

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Розв'язання:

Розв'яжемо дану систему способом підстановки. Для цього виразимо змінну x в другому рівнянні і підставимо замість x у перше рівняння

$\begin{cases} 2x + 5y = 5, \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \cdot (2y + 7) + 5y = 5, \\ x = 2y + 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 4y + 14 + 5y = 5, \\ x = 2y + 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 9y = -9, \\ x = 2 \cdot (-1) + 7 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1, \\ x = 5. \end{cases}$

Отримали x_0=5; y_0= -1. Знайдемо суму x_0+ y_0=5+(-1)=5-1=4.

Відповідь: x_0+ y_0 =4.

Завдання 5.

Розв'яжіть рівняння $x^2 - 8x + 15 = 0$

А	Б	В	Г
3;5	-3;-5	-3;5	3;-5

Позначте відповіді:

А Б В Г

☐ ☐ ☐ ☐

Розв'язання:

Маємо квадратне рівняння, тому використаємо дискримінант:

D=b^2-4ac=(-8)^2-4$\cdot$ $1 \cdot 15$=4

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{8+\sqrt{4}}{2\cdot1} = \frac{8+2}{2} = 5$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{8-\sqrt{4}}{2\cdot1} = \frac{8-2}{2} = 3$

Відповідь: $x_1 = 5;\ x_2 = 3$. [20].

2.4. Використання новітніх технологій (програм, сайтів) при вивченні даної теми

На сьогоднішній день, напевно, не існує галузі, де б не використовувалися комп′ютерні технології, тому освітня галузь також не є виключенням. Інтерес учнів до вивчення предмету багато в чому залежить від того, в якій формі вчитель проводитиме уроки. Використання комп′ютерної техніки на уроках дозволяє вчителю зробити урок нетрадиційним, яскравим, насиченим. Наповнити його зміст знаннями з інших предметів, що перетворюють математику з об′єкта вивчення в засіб отримання нових знань.

Ось декілька факторів, які зумовлюють ефективне застосування нових інформаційних технологій на уроках математики:

1) чергування форм для цікавої подачі нової інформації;

2) висока степінь наочності;

3) можливість здійснювати демонстрації різноманітних об′єктів та процесів за допомогою комп′ютера;

4) звільнення від рутинної роботи, що відвертає увагу від засвоєння основного змісту;

5) організація індивідуальної та колективної дослідницької роботи;

6) можливість розподіляти роботу учнів у залежності від їх рівня підготовки пізнавальних інтересів, застосовуючи при цьому сучасні інформаційні технології;

7) можливість здійснювати комп’ютерний оперативний контроль та допомогу з боку вчителя;

8) використання комп′ютера дає змогу учню активно приймати участь у процесі пізнання.

Розглянемо математичний процесор GRAN1 (Graphic Analysis). Він є програмним засобом для розв′язування рівнянь, систем рівнянь та інших математичних задач. Цей процесор дозволяє побудувати графіки функцій та рівнянь і за допомогою цих графіків знаходити наближені значення розв′язків.

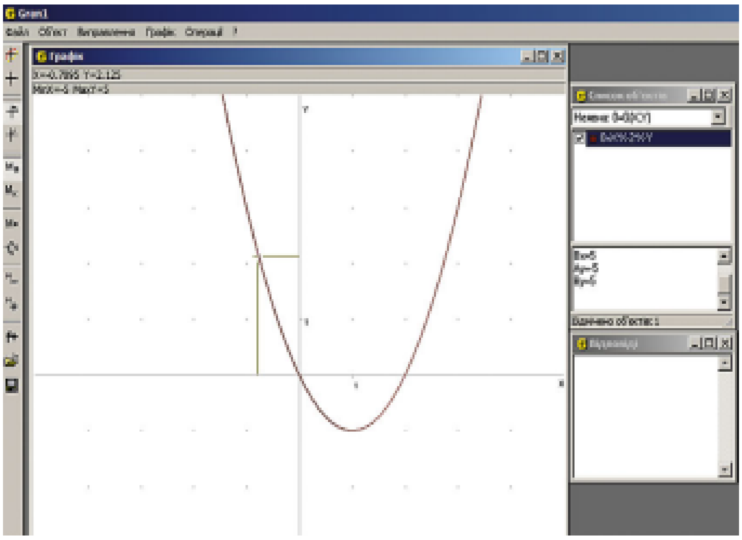
GRAN1 є вільно розповсюджуваним математичним процесором, який можна запустити на комп′ютері.

Після запуску GRAN1 відкриється головне вікно програми, яке містить три підвікна:

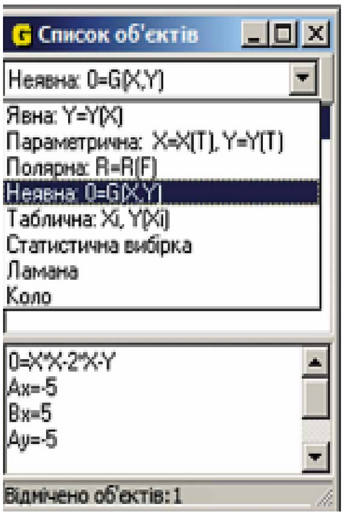
1. Вікно «Графік». Це вікно використовується для побудови графіків функцій та рівнянь. Можна ввести математичний вираз у поле введення і побудувати графік, натиснувши кнопку "Побудувати". Графік буде відображений у цьому вікні.

2. Вікно «Список об′єктів» (мал. 2.36). Це вікно містить список всіх об′єктів (графіків, рівнянь і т. д.), які побудували або ввели у програмі. Можна керувати цими об′єктами, змінюючи їх параметри або видаляючи їх із списку.

3. Вікно «Відповіді». Це вікно містить результати розв′язків рівнянь або систем рівнянь, а також інші відповіді на математичні запити.



Мал. 2.35. Вікно програми **GRAN1**



Мал. 2.36. Розкривний список вікна **Список об'єктів**

Таким чином, після запуску GRAN1 матимете доступ до цих трьох підвікон (мал. 2.35), що дозволить побудувати графіки функцій рівнянь та нерівностей.

Вікно "Список об′єктів" у GRAN1 містить розкривний список, де можна вибрати тип об′єкта, графік якого потрібно побудувати. Ось перелік доступних типів об′єктів:

1. Функція, задана формулою (Явна: Y=f(X)): Виберіть цей тип об′єкта, якщо хочете побудувати графік функції, яка задана у вигляді явної формули. Слід ввести формулу функції у поле введення і побудувати її графік.

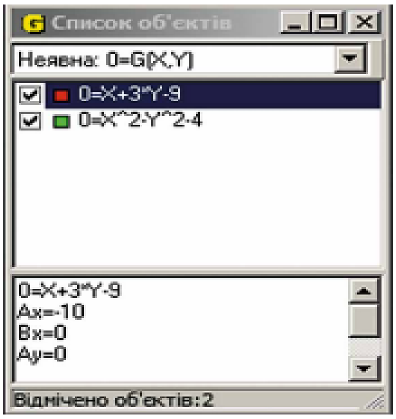
2. Рівняння (Неявна: 0 = G(X, Y)): Виберіть цей тип об′єкта, якщо хочете побудувати графік рівняння, заданого у неявній формі. Слід ввести рівняння у поле введення і побудувати графік його розв′язків.

3. Функція, задана таблицею (Таблична: Xi, Y(Xi)): Виберіть цей тип об′єкта, якщо хочете побудувати графік функції, яка задана у вигляді таблиці значень. Слід ввести значення X і відповідні значення Y у таблицю і побудувати графік за цими значеннями.

4. Ламана (Ламана): Виберіть цей тип об′єкта, якщо хочете побудувати графік ламаної лінії. Можна вказати координати точок, через які проходить ламана, і програма побудує графік відповідно до цих точок.

5. Коло (Коло) та інші: Виберіть цей тип об′єкта, якщо хочете побудувати графік круга або іншої геометричної фігури. Можна вказати параметри цієї фігури і програма побудує графік відповідно до них.

6. У центральній частині цього вікна знаходиться список усіх уведених об’єктів (мал . 2 .37) .



Мал. 2.37. Вікно **Список об'єктів** зі списком уведених об'єктів

Щоб додати новий об′єкт до вікна «Список об′єктів» у GRAN1, слід виконати наступні кроки:

1. Клікніть на меню «Об′єкт» у верхньому меню програми.

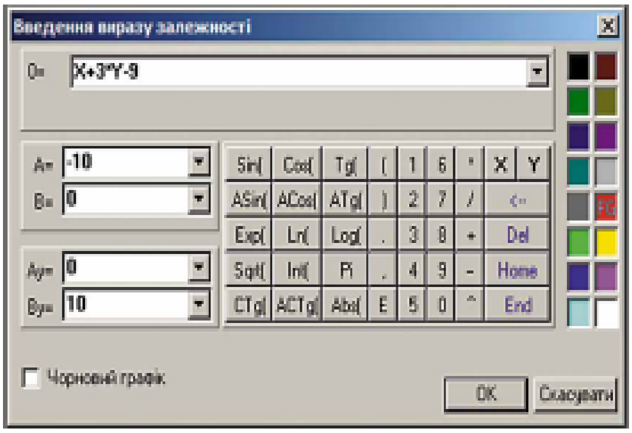
2. У випадаючому меню оберіть опцію «Створити».

3. У вікні «Введення виразу залежності» (мал. 2.38) задайте залежність об′єкта залежно від його типу, відрізки на осі x (A і B) та на осі y (Ay і By), на яких будується графік цього об′єкта. Також можна встановити колір лінії графіка та інші параметри за необхідністю.

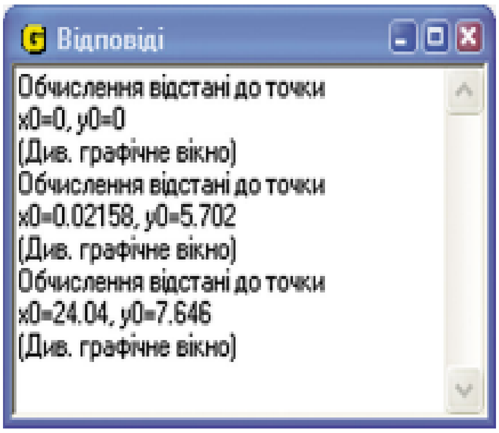
4. Після введення всіх необхідних параметрів натисніть кнопку «ОК» або «Побудувати», щоб додати об′єкт до вікна «Список об′єктів».

У нижній частині вікна «Список об′єктів» (мал. 2.37) побачите інформацію про виділений об′єкт, включаючи залежність, яку він визначає, відрізок, на якому його розглядають, мінімальне і максимальне значення, колір лінії графіка та інші параметри. Ця інформація допоможе керувати об′єктами у списку та налаштовувати їх відповідно до потреб.

У вікні Відповіді виводяться результати виконання операцій у програмі GRAN1 (мал. 2 .39) . Зліва в головному вікні програми GRAN1 знаходиться Панель інструментів, яка містить інструменти для виконання команд, наведених у таблиці 2.8. У програмі є Довідка, яку можна відкрити натисненням клавіші F1.



Мал. 2.38. Вікно **Введення виразу залежності**



Мал. 2.39. Вікно **Відповіді**

Приклад розв'язання рівняння за допомогою програми **GRAN1**

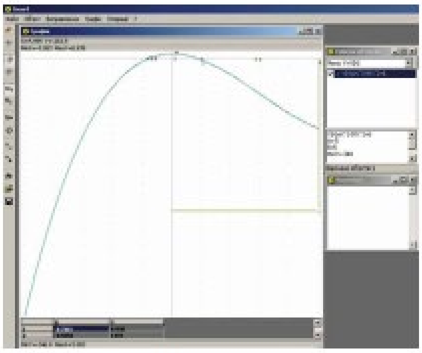
Щоб розв′язати рівняння $x^3 - 9x^2 + 6 = 0$ за допомогою програми GRAN1, слід виконати наступні кроки:

1. Запустити програму GRAN1
2. У вікні «Список об′єктів» (яке відкриється після запуску програми), вибрати тип «Явна: Y Y(X)» з розкривного списку.
3. У меню «Об′єкт» обрати команду «Створити».

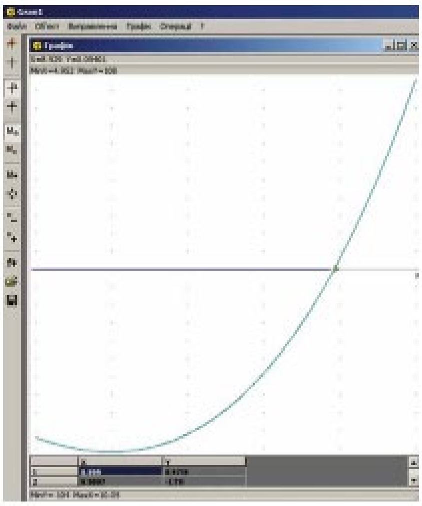
1. У текстовому полі «Y(X)» вікна «Введення виразу залежності» потрібно ввести вираз «x^3- $9x^2$ + 6 = 0».

5. У меню «Графік» обрати команду «Побудувати». Вікно «Графік» відобразить графік даної функції (мал . 2 .41) .

Після виконання цих кроків отримаємо графік функції, який відображатиме розв′язки рівняння x^3- $9x^2$ + 6 = 0. На малюнку 2.41 можна побачити дві точки перетину графіка з віссю OX. Навівши по черзі на них вказівник, у лівому куті вікна відобразяться наближені значення двох коренів рівняння: $x_1 \approx -0{,}75$ і $x_2 \approx 0{,}94$. Також проаналізувавши цей графік , можна припустити, що він ще раз перетне вісь OX при $x > 5$. Для побудови графіка функції на відрізку від 5 до 10 застосуємо наступні кроки:



Мал. 2.41



Мал. 2.42

1. У вікні «Список об′єктів» натискаємо правою кнопкою миші на об′єкт і вибераємо «Змінити» з контекстного меню.

2. У вікні «Введення виразу залежності» вводимо число 5 в поле «A» та число 10 в поле «B».

3. Натискаємо «OK».

4. Після цього вікно «Графік» відобразить графік заданої функції на відрізку від 5 до 10 (мал. 2.42).

За допомогою вказівника підведіть його до точки перетину графіка з віссю Ox. У лівому верхньому куті вікна буде відображено наближене значення третього кореня рівняння: x3 ≈ 8,93.

Корені рівняння можна заносити у табличку, яка знаходиться в лівому нижньому куті вікна Графік.

Для цього потрібно:

1. Виконати Графік → Список точок на графіку →Очистити .

2. Виконати Графік → Список точок на графіку і, якщо відсутня позначка Запис, установити її. [17]

3. Вибирати послідовно точки перетину графіка функції з віссю Ох. Також за допомогою ПК зручно проводити поточне оцінювання у вигляді тестів. Для цього можна використовувати програму створення тестів TESTW. Вихідний тест може містити будь-яку кількість питань, але рекомендується від 30 до 50 і більше. З вихідного тесту методом випадкового відбору послідовно виводиться задана кількість питань (наприклад, 25). Тому кожен учень одержує свій відмінний від інших набір питань, що забезпечує індивідуалізацію та об′єктивність оцінки. Кожне питання тесту має 5 варіантів відповідей, серед яких вірною може бути або одна, або максимум три. Учню потрібно обрати правильні на його думку відповіді і перейти до наступного питання. Час відповіді на тест обмежений. Рекомендується проводити тестування від 10 до 15 хвилин для кількості питань 20-25. [13]

Висновки

Вивчення математики в закладах загальноосвітньої середньої школи сприяє міцному та свідомому оволодінню учнями системою математичних знань та умінь, формує рівень математичної культури, що є необхідним для продовження здобуття освіти та майбутньої трудової діяльності.

У процесі написання роботи було проведено пошук та аналіз інформації, що стосується даної теми, використовуючи різні джерела, такі як довідкова література, методичні рекомендації та матеріали з Інтернету. Також була проаналізована програма вивчення рівнянь та нерівностей у курсі математики основної школи, теоретичний матеріал представлений значною кількістю практичних завдань.

У бакалаврській роботі розглянуто рівняння та нерівності, які вивчаються в основній школі. Дана робота зорієнтована на розробку методики вивчення теми «Рівняння та нерівності в шкільному курсі алгебри основної школи», що сприяє розвитку особистості учня та формуватиме стійкий інтерес до предмета.

В даній роботі розкрита методика розв′язування рівнянь та нерівностей в основній школі, здійснено теоретичне обгрунтування даної теми дослідження та особливості викладання теми за діючими підручниками з алгебри основної школи.

В другому розділі розглянуто теоретичні відомості про кожний вид рівнянь та нерівностей, які вивчаються в 7-9 класах. Зазначено означення та загальні відомості різних видів рівнянь та алгоритми розв′язування цих рівнянь та нерівностей. Досліджено доцільність та необхідність використання мультимедійних засобів навчання та їх вплив на навчальний процес. Наведені зразки завдань з теми з зовнішнього незалежного оцінюванню. Показано приклад розв’язування рівнянь за допомогою програми GRAN1 та використання програми створення тестів TESTW для поточного контролю знань учнів.

Ця бакалаврська робота надає огляд теоретичних та практичних аспектів, пов'язаних з узагальненням, поглибленням та розширенням знань, навичок та умінь учнів у математичному курсі школи, зокрема у вивченні нерівностей. Вона також може бути корисною для студентів вищих навчальних закладів, що вивчають "Методику навчання математики", а також може бути використана як підготовчий матеріал для державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Вчителям математики також може стати в нагоді практичний матеріал даної роботи при підготовці до уроків з теми «Рівняння та нерівності в основній школі».

Список використаної літератури

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.

2. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Зодіак-ЕКО, 2009. 288 с.

3. Бевз Г.П. Методика навчання математики: Навчальний посібник для інститутів. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

4.Дробово-раціональні рівняння
URL: https://yukhym.com/uk/matematika/drobovi-ratsionalni-rivnyannya.html

5. Дубинчук О.С., Мальований Ю.І., Дичек Н.П. Методика викладання алгебри в 7-9 класах: Посібник для вчителя. Київ: Рад. шк., 1991. 254 с.

6. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 256 с.

7. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2016. 272 с.

8. Істер О.С. Алгебра: підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 264 с.

9. Макаричев Ю.М., Миндюк Н.Г., Нєшков К.І., Суворова С.Б. Алгебра: підруч. для 8 класу серед. шк. Київ: Освіта, 1994. 256с.

10. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М. С. Алгебра. 9 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики. Харків: Гімназія, 2014. 384 с.

11. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія, 2009. 320 с.

12. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М. С. Алгебра. 8 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики. Харків: Гімназія, 2013. 256 с.

13. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М. С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків: Гімназія, 2016. 240 с.

14. Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів. URL: https://mon.gov.ua/ua

15. Освітній портал «Академія». Підготовка до ЗНО. URL: http://zno.academia.in.ua/mod/book/view.php?id=3052&chapterid=726

16. Перехейда О. М., Ушаков Р. П. Розвʼязування нерівностей. Харків: Вид. група «Основа», 2003. 112с.

17. Розв’язування рівнянь, систем рівнянь [з використанням математичного процесора GRAN1]. URL:https://naurok.com.ua/rozv-yazuvannya-rivnyan-sistem-rivnyan-z-vikoristannyam-matematichnogo-procesora-gran-1-174208.html

18. Скороход А.В., Вишенський В.А., Дороговцев А.Я. Вибрані питання елементарної математики. Київ: Вища школа, 1982. 456 с.

19. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. Київ: «Зодіак-ЕКО», 2000.

20. Тести ЗНО/НМТ онлайн – тренувальні тести URL: https://zno.osvita.ua/

21. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: Метод проектів. Компʼютерні технології. Розвивальне навчання / Упоряд. І.С. Маркова. Харків: Вид. група «Тріада», 2007. 171с.

22. Учительський блог Ганни Пономарьової. З історії виникнення рівнянь. URL: http://sdfg23ert.blogspot.com/2013/10/blog-post_7374.html