Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота бакалаврського рівня
на тему:

Методика розв'язування планіметричних задач з використанням властивостей прямокутного трикутника

Виконала:
студентка IV курсу групи МІ-41
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Пасічник Оксана Олегівна

Керівник: канд. пед. наук, проф. кафедри математики з МВ
Павелків Ольга Миколаївна

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук. доцент кафедри вищої математики
Сапіліді Т. М.

Рівне – 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Протягом кількох останніх століть вивчення трикутника займає важливу роль в одному з розділів математики. Вчені-математики доводять, що вагоме місце належить трикутнику, який має кут 90°. Прямокутний трикутник має ряд властивостей, вивчення яких сприяє розвитку логічного мислення, пам'яті, уяви учнів.

У програмі з геометрії автори шкільних підручників приділяють велику увагу одній із тем «Властивості прямокутного трикутника». Багато задач на використання властивостей прямокутного трикутника займають значну частину у планіметрії. Вчителі-математики пояснюють методику розв'язування планіметричних задач з використанням властивостей прямокутного трикутника найкраще у задачах на трапецію, паралелограм, ромб, коло та круг. Дана тема, на думку педагогів, є нескладною у вивченні і улюбленою темою для учнів. Спираючись на статтю «До питання про формування навичок при систематизації та класифікації метричних задач шкільного курсу геометрії» з збірника наукових праць «Проблеми трудової, загальноосвітньої та професійно-технічної підготовки учнів» [27], можна зробити висновок про важливість теми.

Опрацювання різних наукових джерел з теми дослідження показали, що властивості прямокутного трикутника вивчали ще з давніх часів до нашої ери, не називаючи їх «властивостями». З історичних фактів відомий вчений Піфагор залишив вагомий внесок у вивченні прямокутного трикутника (теорема Піфагора). Основні відомості про прямокутні трикутники були наведені Евклідом в його праці «Начала» біля 300 до н.е.

Розробка планіметричних задач з використанням властивостей прямокутного трикутника вимагала звернення до всіх діючих підручників шкільного курсу геометрії різних класів та до наукових посібників і статей. Авторами яких є: Г.П. Бевз, З.І. Слєпкань, О. А. Кадубовський та ін.

Задачі з використанням властивостей прямокутного трикутника відіграють особливу роль у навчанні учнів, розвиваючи їх математичну компетентність. Це все зумовило вибір теми «Методика розв’язування планіметричних задач з використанням властивостей прямокутного трикутника».

Мета дослідження – розкрити суть використання властивостей прямокутного трикутника при розв’язуванні різних типів планіметричних задач.

Об’єкт дослідження – методика вивчення прямокутних трикутників, основних метричних співвідношень, застосування теореми Піфагора в процесі навчання геометрії.

Предмет дослідження – застосування властивостей прямокутного трикутника до розв’язування планіметричних задач.

Відповідно до поставленої мети слід виконати такі **завдання**:

- проаналізувати науково-методичну літературу з теми дослідження;
- з’ясувати суть основних понять прямокутного трикутника та його властивостей;
- дослідити методику розв’язування задач за допомогою властивостей прямокутного трикутника;
- підібрати задачі, розв’язування яких будується на властивостях прямокутних трикутників;
- розробити задачі прикладного змісту на прямокутний трикутник;
- показати використання програми GeoGebra до розв’язування задач.

У бакалаврській роботі застосовували теоретичні та емпіричні **методи дослідження.** При написанні даної роботи здійснюється аналіз наукової літератури з обраної теми, шкільних підручників, розв’язків різних прикладних задач.

Практичне значення дослідження полягає у тому, що матеріали бакалаврської роботи можуть бути використані учнями та вчителями під час вивчення теми «Прямокутний трикутник», підібрані задачі можна застосовувати для перевірки та контролю знань учнів.

Бакалаврська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатків.

РОЗДІЛ І. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. З історії вивчення прямокутних трикутників

Трикутник є першою фігурою, яка не може розкластися в інший вигляд більш простої фігури… і тому перший фундаментом будь – якої речі, яка має границю й форму. [18]

Джордано Бруно

Дослідженнями розділу геометрія займалися багато вчених з різних країн, серед них: давньогрецький вчений Піфагор, Аполонній, Евклід, Фалес Мілетський, Архімед, Рене Декарт, Герон та інші. Всі вони зробили великий внесок в історію розвитку науки. Початком зародження геометрії вважають Єгипет та столицю стародавньої Вавилонії (5 ст. до н.е.).

Геометрія – це наука, яка вивчає властивості геометричних фігур. [9] Процес нагромадження людством геометричних знань був довготривалим. Спершу єдиним початком цих знань був досвід та особисте спостереження. У геометрії значне місце серед геометричних фігур посідає прямокутний трикутник. Тема прямокутного трикутника є фундаментом вивчення геометрії, тому вона повинна бути представлена у доступній та цікавій формі для учнів. Прямокутний трикутник має древню історію.

В давнину людство стикалося з проблемою вимірювання полів, будівництвом споруд. На той час Стародавній Єгипет прославився своїми величними пірамідами посеред пустелі. Піраміди мали великі розміри, з прямими і рівними геометричними формами. Єгипетські піраміди дуже зацікавили вчених-математиків, зокрема й Піфагора.

У 535 році до нашої ери давньогрецький філософ Піфагор мав своє бачення щодо пірамід Єгипту. Сумлінно взявшись за вивчення цих конструкцій, Піфагор зазначив чітку закономірність у співвідношенні розмірів і форм споруд. Одними з таких пірамід є піраміди Хеопса та Хефрена. Піраміда Хефрена особлива тим, що відношення граней цієї піраміди пропорційні як 3:4, де в основі лежить правильний чотирикутник. Такі розміри пірамід називають єгипетським трикутником, оскільки співвідношення їх сторін становить 3:4:5. Можна зробити висновок, що життя людей Стародавнього Єгипту було тісно пов'язане з наукою і знаннями про пропорції такого трикутника, якими володіли ще задовго до відкриття Піфагора. Тому назва єгипетський трикутник пішла від стародавніх греків. На сьогоднішній день єгипетський трикутник залишається досі актуальним в будівництві. Особливість даної фігури полягає в тому, що дає точні виміри при будівництві тих чи інших споруд.

Починаючи з VII ст. до нашої ери єгиптяни шукали різні способи, щоб побудувати прямий кут. Для того, щоб правильно побудувати прямий кут, вони винайшли метод ділення мотузки на 12 рівних частин. Поділивши 12 частин на 3, 4 та 5 частин утворювався прямокутний трикутник, де прямий кут знаходився між 3 і 4 частинками.

Прямокутний трикутник ще у давні часи визнали найдосконалішою і найкращою геометричною фігурою. Трикутник називають прямокутним, якщо один із його кутів – прямий. [3] Вперше даний трикутник зустрічається в математичному папірусі Ахмеса. У цьому папірусі згадується про властивості прямокутного трикутника, датований понад 4000 років тому. Трикутник має два катети та гіпотенузу. Терміни цих сторін походять від грецьких слів: «kathetus», що означало «перпендикуляр» та «hypoteinsa», значення якого «та, що стягує». На основі прямокутного трикутника Піфагор створив свою відому теорему, якою користуються по сьогоднішній день. Так за теоремою Піфагора доведено про суму площ квадратів, які побудовані на катетах прямокутного трикутника, яка дорівнює площі квадрата, що побудований на гіпотенузі. Перші задачі про прямокутний трикутник містились у старовинних індійських книгах, давньоєгипетських папірусах. Індійські науковці приводили розв'язування задач усяких трикутників до розв'язування прямокутних трикутників.

З історії геометрії науковці зазначають, що для побудови прямокутного трикутника одним зі способів був поділ правильного трикутника на два рівні трикутники. Таке твердження випливає з властивості медіани правильного трикутника, яка є і висотою, і бісектрисою.

В історії трикутників давньогрецький вчений Герон перший увів знак "Δ", що заміняє слово трикутник ще з I століття. Застосовувати його у математиці почали в IV столітті.

1.2. Характеристика основних понять та тверджень прямокутного трикутника. Місце прямокутного трикутника в програмі планіметрії

У планіметрії характерне місце займає прямокутний трикутник. Прямокутний трикутник – це трикутник, який має лише один внутрішній кут, який дорівнює 90°. Два прямих кути у трикутнику існувати не може, оскільки сума кутів трикутника становить 180°.

Прямокутний трикутник в свою чергу має прості співвідношення між кутами та сторонами. Такий трикутник має власні назви сторін, а саме: сторони, які лежать на перпендикулярних прямих, називаються катетами, а сторона, яка розміщена проти прямого кута – гіпотенузою.

Гіпотенуза у прямокутному трикутнику є найдовшою стороною, оскільки розміщена навпроти більшого кута, а меншою стороною - катет, який розміщений навпроти гострого кута.

З поняттям прямокутного трикутника учні вже ознайомлені з початкових класів при вивченні теми «Просторові відношення. Геометричні фігури». У 1-4 класах здобувачі освіти вчаться будувати трикутник, класифікують трикутники за формою, розміром та іншими ознаками. У програмі математики 5-6-го класу Нової української школи прямокутний трикутник використовується при розв’язуванні текстових задачах. З 7 класу за навчальною програмою учні повинні вміти формулювати властивості прямокутного трикутника, зображувати та знаходити прямокутний трикутник та його елементи.

Метою навчального предмета «Математика» є формування в здобувачів освіти предметної математичної компетентності, що передбачає здатність розвивати й застосовувати математичні знання та методи для розв'язання широкого спектра проблем у повсякденному житті, усвідомлення ролі математичних знань і вмінь в особистому та суспільному житті людини. [32]

Прямокутний трикутник може поділятися на два типи, в залежності від довжин сторін трикутника. Існують такі типи прямокутного трикутника як рівнобедрений прямокутний трикутник, у його два катети рівні, та так званий масштабний трикутник або трикутник Скалена. Масштабний трикутник прямокутний тоді і тільки тоді, коли один внутрішній кут – правильний, тобто 90°, його ще називають правим масштабним трикутником.

Зазвичай, у математиці прийнято позначати сторони даного трикутника маленькими латинськими літерами, катети літерами a, b, а гіпотенузу – c. (Рис.1.1)

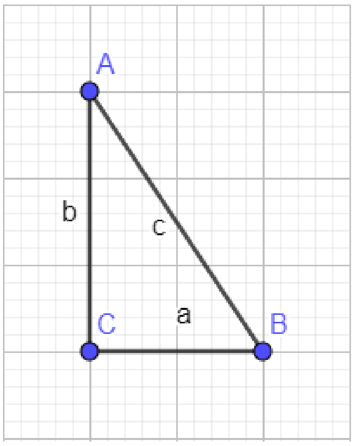


Рис. 1.1

Прямокутний трикутник є елементом інших геометричних фігур. Фігурують здебільшого такі чотирикутники: квадрат, прямокутник, паралелограм, трапеція, ромб тощо. Використовуючи знання про прямокутний трикутник та вміння працювати з ним, можна розв'язати безліч планіметричних та стереометричних задач.

При розв'язуванні задач чи доведенні деяких теорем важливо знати ознаки рівності прямокутних трикутників та їх властивості. В шкільному курсі геометрії розглядаються такі ознаки рівності прямокутних трикутників:

1. За двома катетами.

Якщо два катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють двом катетам другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні. (Рис. 1.2) [13]

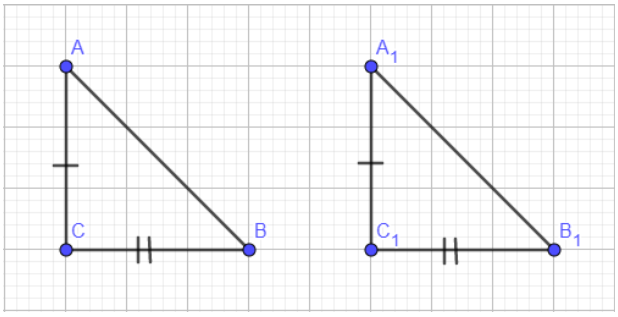


Рис. 1.2

2. За катетом і протилежним кутом.

Якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні. (Рис. 1.3) [13]

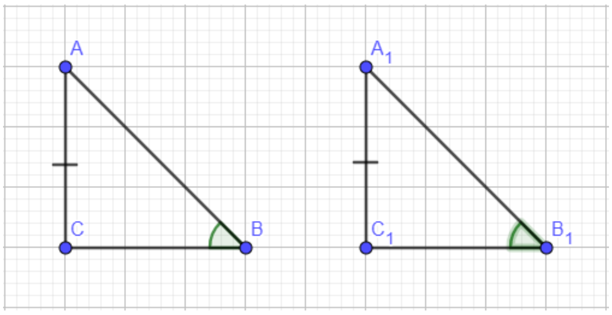


Рис. 1.3

3. За гіпотенузою і катетом.

Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні. (Рис. 1.4) [13]

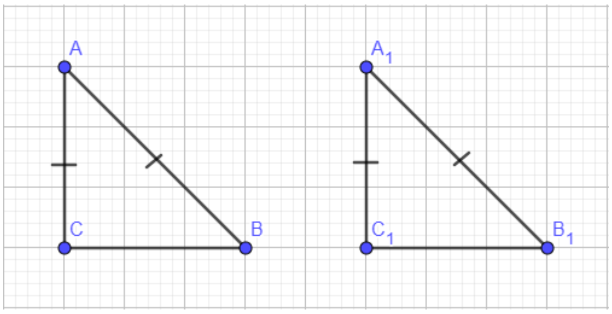


Рис. 1.1

4. За катетом і прилеглим гострим кутом.

Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні. (Рис. 1.5) [13]

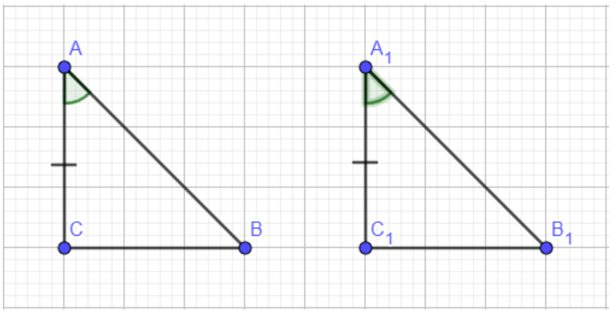


Рис. 1.2

5. За гіпотенузою і гострим кутом.

Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні. (Рис. 1.6) [13]

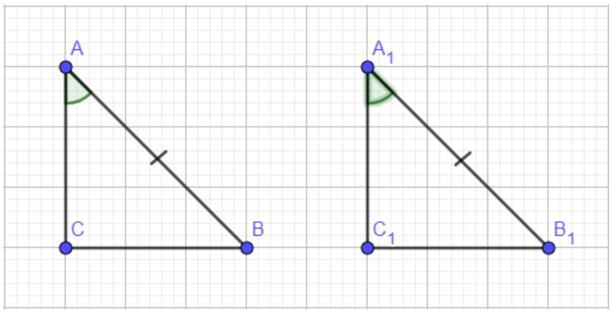


Рис. 1.3

Також важливим аспектом прямокутного трикутника є його властивості. У прямокутному трикутнику кожна властивість відіграє важливу роль у розв’язуванні різноманітних планіметричних задач. Використовуючи ці властивості при розв’язуванні задач, можна легко та швидко знайти шукані значення.

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Використання властивостей прямокутного трикутника при розв'язуванні планіметричних задач

У шкільному курсі геометрії існує безліч задач, в яких не можна обійтися без застосування властивостей прямокутного трикутника. Властивості прямокутного трикутника учні вивчають поетапно, починаючи з 7 класу та до 8 класу, і використовують їх в подальшому вивченні математики.

Прямокутний трикутник визначається цілим рядом важливих властивостей:

- Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°;
- У прямокутному трикутнику катет, протилежний куту 30° градусів, дорівнює половині гіпотенузи;
- Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи. [13]

Ці властивості займають значне місце у розділі геометрії. Також до властивостей прямокутного трикутника в деяких підручниках автори вносять таке поняття описаного кола:

- Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина його гіпотенузи, а радіус дорівнює її половині. [3]

До властивостей прямокутного трикутника звертаються не лише у математиці, а й у фізиці.

Властивість суми гострих кутів прямокутного трикутника тісно пов'язана з теоремою про суму кутів трикутника. В праці «Начала» Евкліда написано, що сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°. З цієї теореми випливає властивість прямокутного трикутника.

Дану властивість легко довести, застосувавши теорему про суму кутів трикутника. Доведемо, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $90°$.

Доведення. Нехай дано прямокутний трикутник ACB.

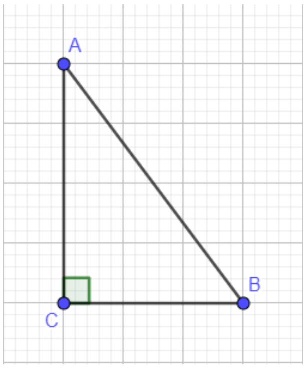


Рис. 2.1

Оскільки ΔACB – прямокутний, то $\angle C = 90°$.

За теоремою суми кутів трикутника випливає, що:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, звідси $\angle A + \angle B = 180° = 90°$, отже $\angle A + \angle B = 90°$, що і треба було довести.

Для розвитку практичних знань та вмінь учнів на уроці вивчення властивостей про суму гострих кутів прямокутного трикутника, доцільно провести лабораторну роботу по визначенню суми кутів прямокутного трикутника.

У ході роботи слід:

1. Побудувати прямокутний трикутник.
2. За допомогою транспортира, виміряти градусну міру кожного гострого кута трикутника.
3. Знайти суму виміряних кутів.
4. Узагальнити результати та зробити висновок.

У математиці часто використовується властивість про катет, що лежить проти кута $30°$, вона бере свій початок вивчення у 7 класі. Розглянемо підручники з геометрії для 7-го, 8-го та 9-го класу автора А. Г. Мерзляка. Проаналізувавши підручники для 7 класу інших авторів, Мерзляк А. акцентує велику увагу на цій властивості, а також звертає увагу учнів на обернену властивість, яка звучить так:

Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює $30°$.

Можливо, автор, спираючись на дану властивість, показує своє бачення щодо неї, доводячи, що вона є різнобічна у математиці. Аналізуючи тему, в якій вивчається ця властивість у різних підручниках, довідниках, можна зробити висновок, що дану властивість можна застосовувати для різних задач. Опорні задачі цієї властивості можуть виступати частиною розв'язку складніших планіметричних задач. Однією з таких опорних задач цієї властивості виступає задача, в якій потрібно здійснити доведення даної властивості.

Опорна задача. Доведіть, що катет, який лежить навпроти кута, градусна міра якого дорівнює 30°, дорівнює половині гіпотенузи. (Рис. 2.2)

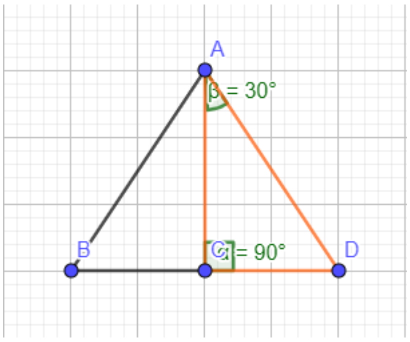


Рис. 2.1

Дано: ΔACD – прямокутний ($\angle ACD = 90°$), $\angle DAC = 30°$.

Довести: $CD = \frac{1}{2} AD$.

Доведення

На прямій CD від точки C відкладемо відрізок $BC = CD$. Сполучимо точку B з точкою A.

Розглянемо ΔACD і ΔACB, у них: 1) $\angle ACD = \angle ACB = 90°$;

2) $BC = CD$ (за побудовою);

3) AC – спільна.

Отже, ΔACD і ΔACB рівні за відповідно рівними сторонами і кутом між ними.

З рівності трикутників випливає: 1) $\angle DAC = \angle BAC = 30°$;

2) $\angle ABC = \angle ADC$.

$\angle BAD = 2 \cdot \angle DAC = 2 \cdot 30° = 60°$.

З ΔABD: $\angle ABD = \frac{180° - (\angle BAD)}{2} = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$. Отже, ΔBAD – рівносторонній, тоді $CD = \frac{1}{2} AD$. Доведено.

Проаналізувавши різні підручники геометрії з 7 по 9 клас, автори приділяють значну увагу задачам, які пов’язані з властивістю медіани прямокутного трикутника проведеної до гіпотенузи. Дана властивість займає характерне місце серед властивостей прямокутного трикутника. У підручниках автори подають дану властивість як опорну задачу, оскільки опорні задачі застосовують для більш вдалого засвоєння нових знань та навичок здобувачів освіти.

Отже, підсумовуючи вище наведе, можна зробити висновок, що властивості прямокутного трикутника можна застосовувати для розв’язування різних задач, де можна використати прямокутний трикутник.

2.1.1 Задачі на різні види трикутників з використанням властивостей прямокутного трикутника

Прямокутний трикутник визначають досить часто як елемент іншої геометричної фігури. Застосовувати властивості прямокутного трикутника для різних видів трикутників можна тоді і тільки тоді, коли цей трикутник містить прямокутний трикутник. Для дослідження даних задач, за основу будемо брати умови задач з підручників геометрії різних авторів. Скористаємося умовою задачі №475 з підручника геометрії для 7 класу О.С. Істера та сформулюємо власну задачу:

Задача 1. У трикутнику ABC проведено висоту AP, довжина якої 12. Відомо, що $\angle BAD = 62°, \angle DAC = 37°$. Розв’язати ΔABC.

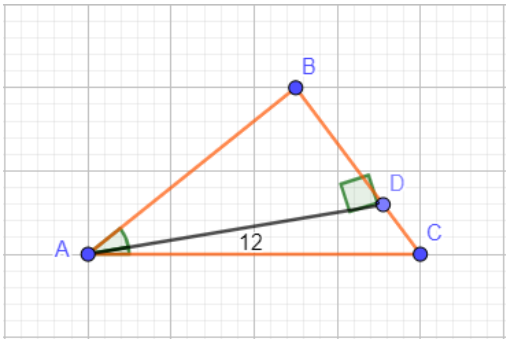


Рис. 2.3

Дано: $\angle BAD = 62°$,

$\angle DAC = 37°$.

AD – висота, $AD = 12$.

Розв'язати ΔABC.

Розв'язування

З ΔADB ($\angle D = 90°$): $\angle B = 90° - \angle BAD = 90° - 62° = 28°$;

$$\cos\angle \mathrm{BAD} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}};$$

$$\cos 62° = \frac{12}{\mathrm{AB}};$$

$$\mathrm{AB} = \frac{12}{\cos 62°} = \frac{12}{0,469} \approx 25,59.$$

З ΔADC ($\angle D = 90°$): $\angle C = 90° - \angle DAC = 90° - 37° = 53°$;

$$\cos\angle \mathrm{DAC} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}};$$

$$\cos 37° = \frac{12}{\mathrm{AC}};$$

$$AC = \frac{12}{\cos 37°} = \frac{12}{0,799} \approx 15,02.$$

$\angle A = \angle BAD + \angle DAC = 62° + 37° = 99°$.

За теоремою косинусів: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle \mathrm{A}$;

$$BC = \sqrt{25,59^2 + 15,02^2 - 2 \cdot 25,59 \cdot 15,02 \cdot \cos 99°};$$

$$BC = \sqrt{654,85 + 225,6 - 768,72 \cdot \cos(180° - 81°};$$

$$BC = \sqrt{880,45 - 768,72 \cdot (-\cos 81°)};$$

$$BC = \sqrt{880,45 + 768,12 \cdot 0,156};$$

$$BC = \sqrt{880,45 + 119,83} = \sqrt{1000,28} \approx 31,63.$$

Відповідь: $AB = 25,59, AC = 15,02, BC = 31,63$.

Для застосування властивості про катет, що лежить проти кута $30°$, скористаємося умовою задачі №762 з підручника геометрії 8-го класу М.І. Бурди.

Задача 2. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 13 см, а її проекція – 12 см. Друга похила утворює з прямою кут $30°$. Знайти периметр трикутника, утвореного даними похилими та прямою.

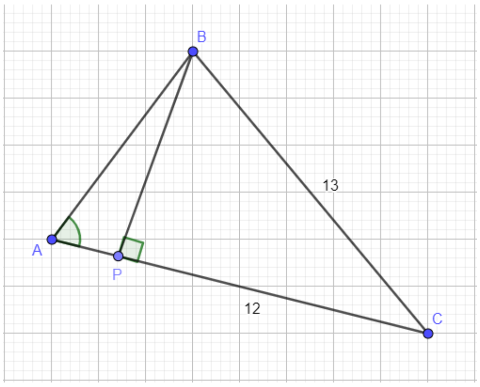


Рис. 2.4

Дано: $BC = 13$ см,

$PC = 12$ см,

$\angle BAC = 30°$.

Знайти P_Δ.

Розв'язування

З ΔBPC $(\angle P = 90°)$: $BP^2 = BC^2 - PC^2$;

$BP^2 = 169 - 144$;

$BP^2 = 25$;

$BP = 5$ см.

З ΔBPA $(\angle P = 90°)$: $AB = 2 \cdot BP = 2 \cdot 5 = 10$ см – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$;

$$AP = AB \cdot \cos \angle A = 10 \cdot \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ см.}$$

$AC = AP + PC = (5\sqrt{3} + 12)$ см.

$P_\Delta = AB + BC + AC = 10 + 13 + 5\sqrt{3} + 12 = 25 + 5\sqrt{3} = 5(5 + \sqrt{3})$ см.

Відповідь: $P_\Delta = 5(5 + \sqrt{3})$ см.

Задача 3. У трикутник зі сторонами 15 см, 26 см і 37 см вписане коло. Знайти медіану прямокутного трикутника, вписаного в дане коло, яка проведена з вершини прямого кута.

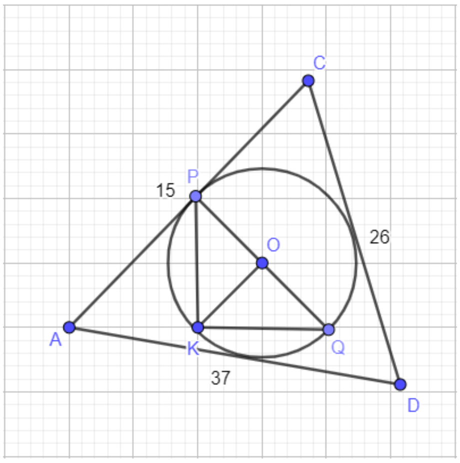


Рис. 2.5

Дано: $AC = 15$ см,

$BC = 26$ см,

$AC = 37$ см,

ΔPKQ – прямокутний.

Знайти KO.

Розв'язування

З ΔACD: $S_{\Delta ACD} = \sqrt{p(p - AC)(P - CD)(P - AD)}$;

$p = \frac{AC+CD+AD}{2} = \frac{15+26+37}{2} = \frac{78}{2} = 39$ см.

$S_{\Delta ACD} = \sqrt{39(39-15)(39-26)(39-37)} = \sqrt{39 \cdot 24 \cdot 13 \cdot 2} = \sqrt{24336}$;

$S_{\Delta ACD} = 156$ см^2.

$S_{\Delta ACD} = p \cdot r$;

$156 = 39 \cdot r$;

$r = \frac{156}{39} = 4$ см.

$PQ = 2r = 2 \cdot 4 = 8$ см.

З ΔPKQ ($\angle K = 90°$): $KO = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ см – за властивістю медіани, яка проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника.

Відповідь: $KO = 4$ см.

Підсумовуючи дані задачі, можна зробити висновок, що властивості прямокутного трикутника відіграють велику роль для довільного трикутника.

Для пояснення даних властивостей, доречно брати за основу дослідження прямокутний трикутник та вдало засвоювати ці властивості на практиці. Проаналізувавши навчальний посібник «Тематичні контрольні роботи» для 7-го класу О.С. Істера, можна виділити одну задачу про прямокутний трикутник.

Задача 4. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $30°$. Сума гіпотенузи і меншого катета дорівнює 120 см. Знайдіть медіану трикутника, що проведена з вершини прямого кута.

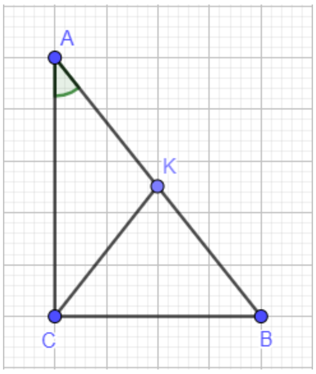


Рис. 2.6

Дано: ΔACB – прямокутний,

$\angle CAB = 30°, AB + BC = 120$ см.

Знайти CK.

Розв'язування

BC – менший катет, оскільки він лежить навпроти меншого кута.

$BC = \frac{1}{2}AB$ – за властивістю катета, що лежить навпроти кута $30°$.

$AB + \frac{1}{2}AB = 120;$

$\frac{3}{2}AB = 120;$

$AB = \frac{120}{\frac{3}{2}};$

$AB = 80$ см.

$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 80 = 40$ см – за властивістю медіани, яка проведена до гіпотенузи.

Відповідь: $CK = 40$ см.

Дана задача практична тим, що при її розв'язуванні потрібно застосувати дві властивості прямокутного трикутника. Таким чином можна більше вдосконалити свої знання та вміння на практиці про властивості прямокутного трикутника.

Задача 5. Дано два кути при основі трикутника величною по $45°$. Встановити тип трикутника та знайти площу трикутника, коли відомо, що основа дорівнює 10 см.

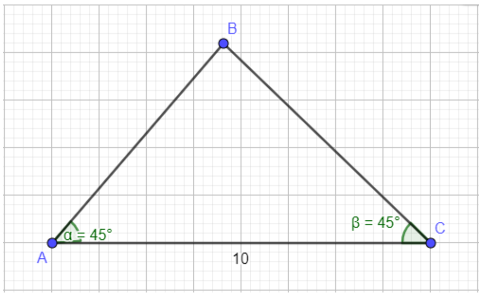


Рис. 2.7

Дано: $\angle BAC = \angle BCA = 45°$,

$AC = 10$ см.

Знайти $S_{\Delta ABC}$.

Розв'язування

$\angle BAC + \angle BCA = 90°$, звідси $\angle ABC = 90°$.

ΔABC – прямокутний рівнобедрений $AB = BC$.

$BC = AC \sin 45° = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ см.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$ см^2.

Відповідь: $S_{\Delta ABC} = 25\sqrt{2}$ см^2.

За властивістю суми гострих кутів прямокутного трикутника в даній задачі, ми легко визначили тип трикутника, знайшовши третій кут.

Задача 6. Прямокутну трапецію з меншою основою 6 добудовано до прямокутного трикутника з кутом при вершині 30°. Довжина меншої бічної сторони становить 4, а її площа – 32. Знайти сторони прямокутного трикутника.

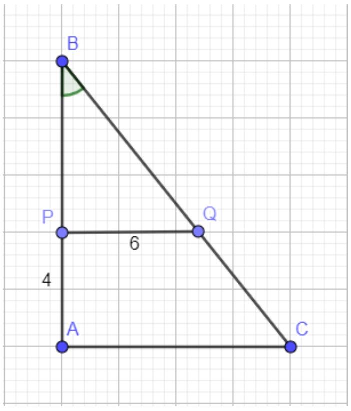


Рис. 2.8

Дано: $APQC$ – трапеція,

ΔBAC – прямокутний ($\angle A = 90°$),

$AP = 4, PQ = 6, \angle B = 30°$.

Знайти AB, BC, AC.

Розв'язування

Оскільки за умовою задачі $S_{APQC} = 32$, то $32 = \frac{PQ+AC}{2} \cdot AP$;

$32 = \frac{6+AC}{2} \cdot 4$;

$2(6 + AC) = 32;$

$6 + AC = 16;$

$AC = 10.$

$AC = \frac{1}{2}BC;$

$BC = 2AC = 2 \cdot 10 = 20$ – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$.

З ΔBAC ($\angle A = 30°$): $AB^2 = BC^2 - AC^2$;

$$AB^2 = 400 - 100;$$

$$AB = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}.$$

Відповідь: $10\sqrt{3}$, 20 і 10.

Розв'язавши подані задачі, робимо висновок, що оскільки прямокутний трикутник є елементом інших геометричних фігур, то вивчення цих властивостей прямокутного трикутника є важливими.

Задача 7. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 8 см. Знайти площу ромба, вписаного у рівносторонній трикутник із спільним кутом.

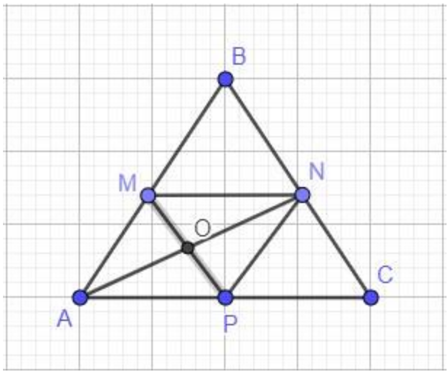


Рис. 2.9

Дано: $AB = 8$ см,

$\angle BAC$ – спільний.

Знайти S_{AMNP}.

Розв'язування

Нехай $AM = a$. $\angle A = \angle C = 60°$ (як кут рівностороннього трикутника).

$\angle APN = 180° - 60° = 120°$;

$\angle NPC = 180° - 120° = 60°$ - за властивістю суміжних кутів.

У ΔNPC: $\angle NPC = \angle NCP = 60°$;

$\angle PNC = 180° - (60° + 60°) = 60°$.

Отже, ΔNPC – рівносторонній, $NP = PC = a$.

$AC = AP + PC = a + a = 2a.$

$8 = 2a;$

$a = 4$ см.

AO – бісектриса $\angle A$, тому $\angle MAO = 30°$.

З $\Delta MAO(\angle O = 90°)$: $MO = \frac{1}{2}AM$ – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$.

$MO = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ см.

$AO = AM\cos\angle MAO = 4\cos 30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ см.

$MP = 2MO = 2 \cdot 2 = 4$ см.

$AN = 2AO = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ см.

$S_{AMNP} = \frac{MP+AN}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ см^2.

Відповідь: $S_{AMNP} = 8\sqrt{3}$ см^2.

Задача 8. У рівнобедреному трикутнику, висота проведена до бічної сторони дорівнює 12 см і утворює з іншою бічною стороною кут 60°. Знайти висоту трикутника, проведеної до основи (відповідь заокруглити до сотих).

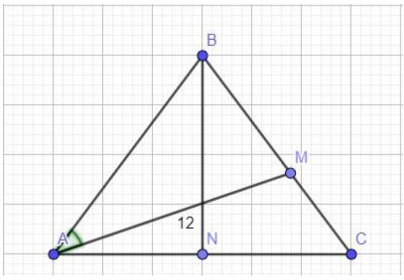


Рис. 2.10

Дано: ΔABC – рівнобедрений,

$\angle BAM = 60°, AM = 12$ см.

Знайти BN.

Розв'язування

З ΔAMB $(\angle M = 90°)$: $\angle B = 90° - 60° = 30°$.

$AB = 2AM = 2 \cdot 12 = 24$ см.

BN – висота, бісектриса, медіана. Тому $\angle ABN = \frac{\angle B}{2} = 15°$.

З ΔANB $(\angle N = 90°)$: $BN = AB\cos 15° = 24 \cdot 0{,}966 = 23{,}184 \approx 23{,}18$ см.

Відповідь: $BN \approx 23{,}18$ см.

В даному розділі розглянуто приклади задач на різні види трикутників, розв’язування яких пов’язане з використанням властивостей прямокутного трикутника.

2.1.2 Роль прямокутного трикутника при вивченні теми «Чотирикутники»

Для будь-якого чотирикутника завжди можна застосувати прямокутний трикутник, провівши висоти на протилежні сторони чотирикутника. Наприклад, невід’ємним елементом для обчислення площі чотирикутників, таких як трапеція, ромб, паралелограм виступає висота. Такі задачі буде складно або неможливо розв’язати без застосування властивостей прямокутного трикутника. Прямокутний трикутник для чотирикутника виступає допоміжним елементом при розв’язуванні планіметричних задач.

У даному підпункті розглянемо задачі на трапецію, паралелограм, ромб, які потребують використання властивостей прямокутного трикутника. За основу дослідження візьмемо умову задачі з підручника геометрії А.Г. Мерзляка 8 клас №621 та використаємо для формулювання власної задачі.

Задача 1. Знайти периметр паралелограма, якщо один із його кутів дорівнює 30°, а діагональ паралелограма перпендикулярна до його сторони і дорівнює $\frac{a}{2}$.

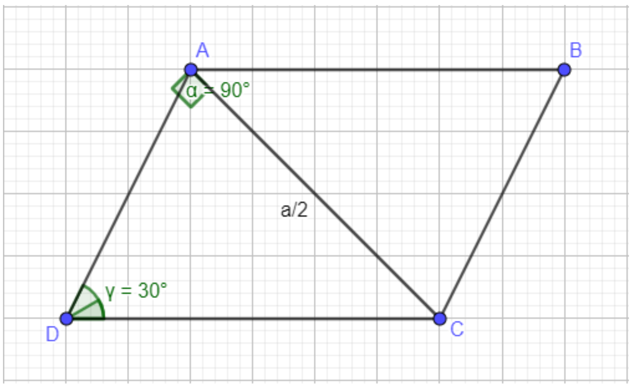


Рис. 2.11

Дано: $AC = \frac{a}{2}$,

$AC \perp AD$,

$\angle ADC = 30°$.

Знайти P_{ABCD}.

Розв'язування

Оскільки за умовою задачі $AC \perp AD$, то ΔCAD – прямокутний.

З ΔCAD $(\angle A = 90°)$, де $CD = 2 \cdot AC = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$ – за властивістю катета, який розміщений навпроти кута 30°.

$\cos \angle D = \frac{AD}{CD}$;

$\cos 30° = \frac{AD}{a}$;

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{a}$;

$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

Знайдемо $P_{ABCD} = (AD + CD) \cdot 2 = (\frac{a\sqrt{3}}{2} + a) \cdot 2 = a\sqrt{3} + 2a = a(\sqrt{3} + +2)$.

Відповідь: $P_{ABCD} = a(\sqrt{3} + 2)$.

У 9 класі учні використовують властивості прямокутних трикутників для розв'язування більш складніших планіметричних задач. За основу дослідження візьмемо умову задачі з підручника геометрія 9 клас А.Г. Мерзляка 2021 рік №5.23 та сформулюємо задачу.

Задача 2. Знайти площу прямокутної трапеції $KBCD$, якщо дві сусідні сторони паралелограма $ABCD$, де $AB = a$, $BC = b$ відповідно дорівнюють двом сусіднім сторонам прямокутника $MPNQ$. Відомо, що BK – висота паралелограма та площа паралелограма вдвічі менша від площі прямокутника.

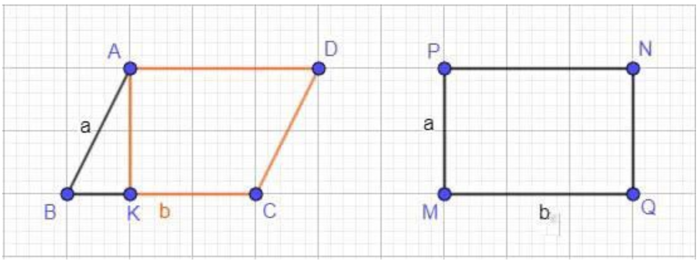


Рис. 2.12

Дано: $AB = a$,

$BC = b$,

$AB = PM$, $BC = MQ$.

Знайти: S_{AKCD}.

Розв'язування

<u>І спосіб.</u> Оскільки, за умовою $S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{MPNQ}$,

$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot sin\angle B = a \cdot b \sin\angle B$;

$S_{MPNQ} = MP \cdot MQ = a \cdot b$;

$a \cdot b \sin\angle B = \frac{1}{2} a \cdot b$;

$\sin\angle B = \frac{1}{2}$;

$\angle B = 30°$.

З ΔAKB ($\angle K = 90°$): $BK = AB\cos\angle B = a\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ – за властивістю катета, що лежить навпроти кута 30°.

$KC = BC - BK = b - \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S_{AKCD} = \frac{KC+BC}{2} \cdot AK = \frac{b-\frac{a\sqrt{3}}{2}+b}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{2b-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \left(b - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

<u>ІІ спосіб</u>. $S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = a \cdot b \sin\angle B$;

$S_{\Delta AKB} = \frac{1}{2} AK \cdot BK$;

$a \cdot b \sin\angle B = \frac{1}{2} a \cdot b$;

$\sin\angle B = \frac{1}{2}$;

$\angle B = 30°$.

З ΔAKB ($\angle K = 90°$): $BK = AB \cdot cos\angle B = a\, cos\, 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ – за властивістю катета, що лежить навпроти кута 30°.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC \sin\angle B = a \cdot b \sin\angle B = \frac{ab}{2}$;

$S_{\Delta AKB} = \frac{1}{2} AK \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$;

$S_{AKCD} = S_{ABCD} - S_{\Delta AKB} = \frac{ab}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Відповідь: $S_{AKCD} = \frac{ab}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Задача 3. Дано ромб $ABCD$ у якому проведено висоту з вершини гострого кута B, довжина якої 8. Дана висота утворює зі стороною ромба BC кут $34°$. Знайти кути ромба та діагональ BD. Результат обчислення довжини округлити до сотих.

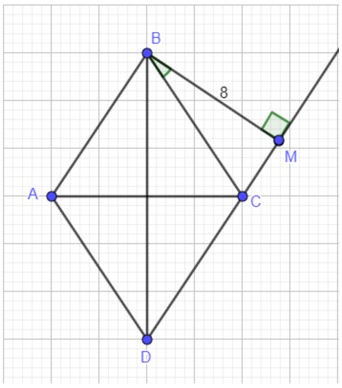


Рис. 2.13

Дано: $ABCD$ – ромб, BM – висота,

$BM = 8, \angle MBC = 34°$.

Знайти $\angle A, \angle B$, BD.

Розв'язування

З $\Delta BMC(\angle M = 90°)$: $\angle BCM = 90° - \angle MBC = 90° - 34° = 56°$.

$\angle BCD = 180° - \angle BCM = 180° - 56° = 124°$ - за властивістю суміжних кутів.

$\angle A = \angle C = \angle BCD = 124°$ - за властивістю протилежних кутів ромба.

$\angle B = \angle D = 180° - \angle A = 180° - 124° = 56°$.

$\angle ODC = \frac{1}{2} \cdot 56° = 28°$ - за властивістю діагоналей ромба.

З $\Delta BMC(\angle M = 90°)$: $\sin \angle BDM = \frac{BM}{BD}$;

$$\sin 28° = \frac{8}{BD};$$

$$0{,}469 = \frac{8}{BD};$$

$$BD = \frac{8}{0{,}469} \approx 17{,}06.$$

Відповідь: $\angle A = 124°, \angle B = 56°, BD = 17{,}06$.

Задача 4. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює 10 см, а діагональ є бісектрисою її гострого кута, який дорівнює $60°$. Знайти периметр трапеції.

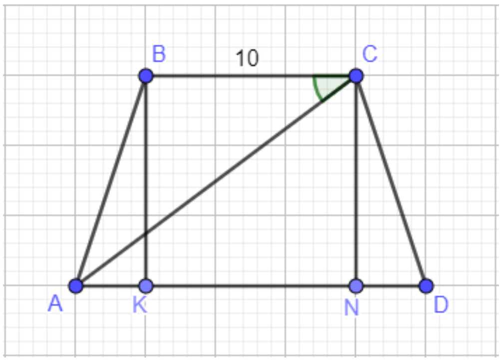


Рис. 2.14

Дано: $ABCD$ – трапеція,

$\angle ACB = 60°$,

$BC = 10$ см.

Знайти P_{ABCD}.

Розв'язування

$\angle BAC = \angle CAD$ – за властивістю бісектриси AC.

$\angle CAD = \angle ACB$ – як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ і січній AC.

Отже, $\angle BAC = \angle ACB$, тому ΔACB – рівнобедрений.

$AB = BC = 10$ см.

$AB = CD = 10$ см – як бічні сторони рівнобічної трапеції.

$AK = ND$ – за властивістю рівнобічної трапеції.

З $\Delta AKB(\angle K = 90°)$: $\angle ABK = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$.

$AK = \frac{1}{2}AB$ – як катет, що лежить навпроти кута $30°$.

$AK = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ см.

$ND = 5$ см.

$KN = BC = 10$ см – як протилежні сторони прямокутника $KBCN$.

$AD = AK + KN + ND = 5 + 10 + 5 = 20$ см.

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 10 + 10 + 10 + 20 = 50$ см.

Відповідь: $P_{ABCD} = 50$ см.

Досліджуючи навчальні посібники для перевірки знань учнів 8-го класу, можна зробити висновок, що задачі, у яких застосовується прямокутний трикутник, це, здебільшого, задачі на обчислення площі чотирикутника. Виділимо один з таким збірників, як збірник самостійних і контрольних робіт з геометрії для 8-го класу А.П. Єршова [17]. Він містить безліч задач на знаходження площ чотирикутників.

За основу дослідження властивості медіани прямокутного трикутника проведеної до гіпотенузи, візьмемо умову задачі із збірника [17] та застосуємо для формулювання власної задачі.

Задача 5. У трапеції проведено середню лінію, яка дорівнює 9 см. Відомо, що медіана, яка проведена з прямого кута утвореного з більшою основою та висотою трапеції до однієї з бічних сторін дорівнює 3 см та менший катет прямокутного трикутника дорівнює 3 см. Знайти площу трапеції.

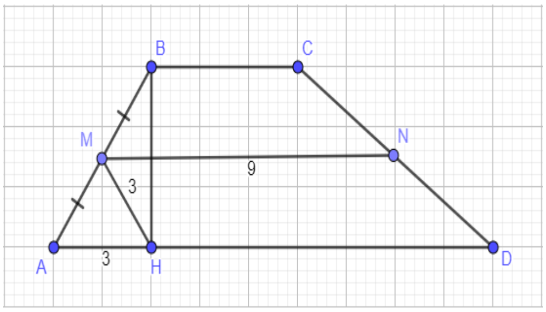


Рис. 2.15

Дано: $ABCD$ – трапеція,

HM – медіана ΔAHB,

$HM = 3$ см, $AH = 3$ см.

MN – середня лінія, $MN = 3$ см.

Знайти S_{ABCD}.

Розв'язування

Оскільки за умовою задачі HM – медіана, то $AB = 2MH = 2 \cdot 3 = 6$ см – за властивістю медіани, яка проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника.

З ΔAHB $(\angle H = 90°)$: $BH^2 = AB^2 - AH^2$;

$$BH = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ см}.$$

$S_{ABCD} = MN \cdot BH = 9 \cdot 5 = 45$ см^2.

Відповідь: $S_{ABCD} = 45$ см^2.

Задача 6. У ромб $MNPQ$, периметр якого дорівнює 56 см, вписане коло, яке дотикається до сторін ромба MN і PQ у точках A і B відповідно, $\angle M = 60°$. Знайти відстань між точками A і B та площу ромба.

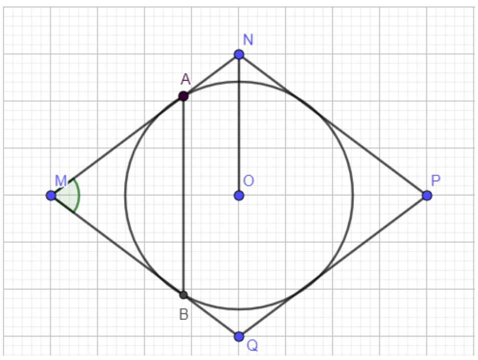


Рис. 2.16

Дано: $MNPQ$ – ромб,

$P_{MNPQ} = 56$ см,

$\angle M = 60°$.

Знайти AB, S_{MNPQ}.

Розв'язування

$P_{MNPQ} = 4 \cdot MN$;

$4MN = 56$;

$MN = 14$ см.

$MN = MQ$ – як сторони ромба, тому ΔMNQ – рівнобедрений.

$\angle MQN = \angle MNQ = \frac{180°-60°}{2} = 60°$, отже ΔMQN – рівносторонній, тому

$QN = 14$ см, $ON = \frac{1}{2}QN = 7$ см.

$OA \perp MN$ – як радіус кола, проведений в точку дотику дотичної до кола.

$\angle N = \angle Q = 180° - 60° = 120°$.

$\angle MNO = \frac{\angle N}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$ - за властивістю діагоналей ромба.

З $\Delta OAN(\angle A = 90°)$: $\angle AON = 90° - \angle ANO = 90° - 60° = 30°$;

$AN = \frac{1}{2}ON = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3{,}5$ см – як катет, що лежить навпроти кута $30°$;

$AO = ON \sin \angle ANO = 7 \sin 60° = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

$MA = MN - AN = 14 - 3{,}5 = 10{,}5$ см. Так як $AM = MB$, то ΔABM – рівнобедрений, і оскільки $\angle M = 60°$, то даний трикутник рівносторонній.

$AB = MA = 10{,}5$ см.

Висота ромба $h = 2AO = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$ см.

$S_{MNPQ} = MN \cdot h = 14 \cdot 7\sqrt{3} = 98\sqrt{3}$ см^2.

Відповідь: $S_{MNPQ} = 98\sqrt{3}$ см^2.

Задача 7. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 2 см, а гострий кут - 30°. Менша діагональ утворює з основою кут 60°. Знайти сторони трапеції.

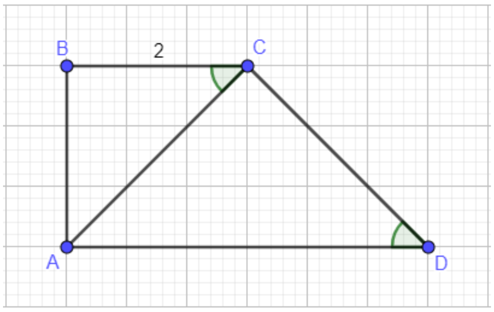


Рис. 2.17

Дано: $ABCD$ – прямокутна трапеція, $BC = 2$ см, $\angle BCA = 60°$, $\angle CDA = 30°$.

Знайти сторони трапеції.

Розв'язування

З $\Delta ABC(\angle B = 90°)$: $\angle BAC = 90° - \angle BCA = 90° - 60° = 30°$;

$AC = 2BC = 2 \cdot 2 = 4$ см – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$.

$AB = BC \operatorname{tg} \angle BCA = 2 \operatorname{tg} 60° = 2\sqrt{3}$ см.

$\angle BCA = \angle CAD = 60°$ - як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ і січній AC.

З ΔACD: $\angle ACD = 180° - (\angle CAD + \angle CDA) = 180° - (60° + 30°) = 90°$.

Отже, ΔACD – прямокутний.

$AD = 2AC = 2 \cdot 4 = 8$ см – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$.

$CD = AC \operatorname{tg} \angle CAD = 4 \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3}$ см.

Відповідь: $2\sqrt{3}$ см, 2 см, $4\sqrt{3}$ см, 8 см.

Дані приклади задач на чотирикутники ще раз доводять нам важливість вивчення властивостей прямокутних трикутників.

2.1.3 Використання властивостей прямокутного трикутника при розв'язуванні задач на коло та круг

Коло, яке вписане чи описане навколо трикутника має низку важливих понять. Серед них можна виділити поняття, які пов'язані з центром кола та прямокутним трикутником.

Для описаного кола навколо прямокутного трикутника гіпотенуза займає важливе місце. Оскільки точка перетину серединних перпендикулярів, проведених до сторін прямокутного трикутника, лежить на гіпотенузі. Вона є серединою цієї сторони і центром описаного кола навколо прямокутного трикутника. Гіпотенуза виступає діаметром описаного кола, звідси слідує, що половина гіпотенузи дорівнює радіусу описаного кола і обчислюється за формулою:

$$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \qquad (1)$$

де a, b – довжина катетів прямокутного трикутника.

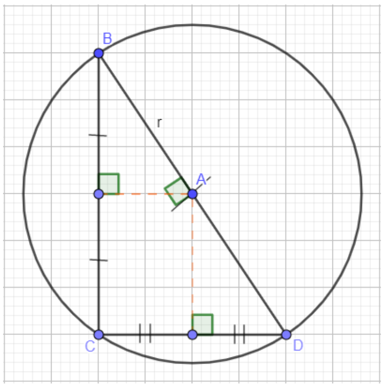


Рис. 2.18

Для вписаного кола в прямокутний трикутник радіус обчислюється за формулою:

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \qquad (2)$$

де a, b – довжини катетів прямокутного трикутника, c – довжина гіпотенузи.

Знаючи як шукати радіус кола вписаного чи описаного навколо прямокутного трикутника, можна легко знайти площу круга за формулою:

$$S_{\text{круга}} = \pi R^2 \qquad (3)$$

У даному підпункті розглянемо різні задачі на коло та круг, користуючись властивостями прямокутного трикутника. За основу візьмемо задачу №464 (А.Г. Мерзляка 7 клас 2020 рік) та сформулюємо її умову:

Задача 1. У колі проведено дві хорди PM і PK, де $PM \perp PK$. Відомо, що $PM = 14$ см. З точки P до відрізка MK проведено перпендикуляр PN, довжина якого становить 7 см. Знайдіть довжину хорди PK.

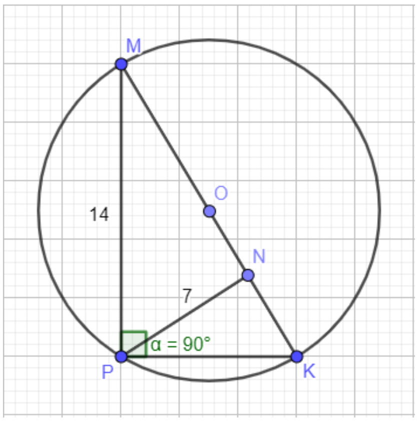


Рис. 2.19

Дано: $PM = 14$ см, $PN = 7$ см.

Знайти: PK.

Розв'язування

За умовою $PM \perp PK$, тому $\angle MPK = 90°$, даний кут спирається на діаметр кола MK.

З ΔPNM ($\angle N = 90°$): $PN = \frac{1}{2} PM$, тому $\angle M = 30°$ (як кут, протилежний катету, що в 2 рази менший за гіпотенузу).

З ΔMPK ($\angle P = 90°$): $\angle K = 90° - \angle M = 90° - 30° = 60°$.

З ΔPNK: $\sin \angle K = \frac{PN}{PK}$;

$\sin 60° = \frac{7}{PK}$;

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{PK}$;

$PK = \frac{7 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ см.

Відповідь: $PK = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ см.

У посібниках для підготовки до ЗНО з 2017 по 2022 рік автори подають задачі на коло та круг, в яких застосовується прямокутний трикутник майже до кожного варіанта. З посібника «ЗНО 2017» візьмемо умову задачі та доповнимо, використовуючи площу круга.

Задача 2. До кола, що обмежує круг площею 12π см^2, з точки В проведено дотичну BC та січну BA, що містить центр кола, кут між якими $15°$. Знайдіть $\angle AOC$ та радіус кола.

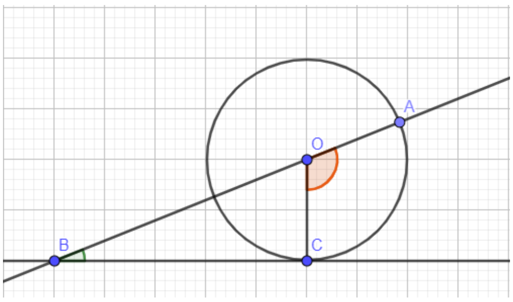


Рис. 2.20

Дано: BC – дотична, BA – січна,

$\angle ABO = 15°$.

Знайти $\angle AOC$, OC.

Розв'язування

За властивістю дотичної $OC \perp BC$, отже, ΔBCO – прямокутний ($\angle C = 90°$). $\angle BOC = 90° - \angle OBC = 90° - 15° = 75°$.

$\angle AOC = 180° - \angle BCO = 180° - 75° = 105°$ - за властивістю суміжних кутів.

$S_{\text{круга}} = \pi R^2$;

$\pi R^2 = 12\pi$;

$R^2 = 12$;

$R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ см.

Відповідь: $\angle AOC = 105°$, $R = 2\sqrt{3}$ см.

Задача 3. У коло вписаний рівнобедрений ΔASC з основою AC і прямокутний ΔBAC з катетом AC та $\angle ACB = 30°$. Відомо, що медіана прямокутного трикутника проведена до гіпотенузи дорівнює 2. Знайти площу ΔASC.

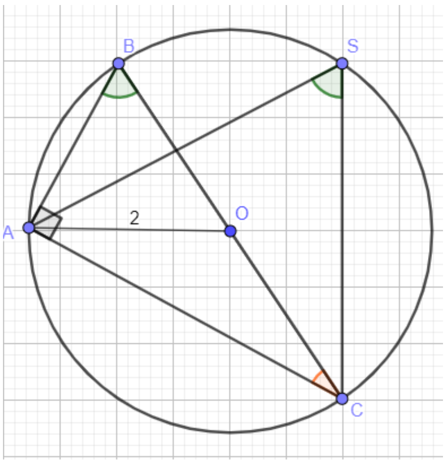


Рис. 2.21

Дано: ΔBAC- прямокутний,

ΔASC – рівнобедрений,

$\angle BCA = 30°$, $AO = 2$.

Знайти $S_{\Delta ASC}$.

Розв'язування

З $\Delta BAC(\angle A = 90°)$: $\angle ABC = 90° - 30° = 60°$;

$BC = 2AO = 2 \cdot 2 = 4$ – за властивістю медіани, що проведена до гіпотенузи;

$AB = \frac{1}{2}BC = 2$ – за властивістю катета, що лежить навпроти кута 30°;

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$\angle ABC = \angle ASC$ – за властивістю кутів, що спираються на одну дугу.

У ΔASC: $AS = SC$ – так як трикутник рівнобедрений, $\angle ASC = 60°$, тому $\angle SAC = \angle SCA = \frac{180°-60°}{2} = 60°$. Отже, ΔASC- рівносторонній.

$S_{\Delta ASC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ (кв.од).

Відповідь: $S_{\Delta ASC} = 3\sqrt{3}$ (кв.од).

Дана задача є чудовим прикладом, для показу учням як застосовувати властивості прямокутного трикутника при розв'язуванні задач на коло. Вона охоплює всі властивості прямокутного трикутника та властивості кола.

Задача 4. У ромб вписане коло. Діагоналлю ромба, що виходить з вершини кута $60°$ дорівнює 16 дм. Знайти довжину коло.

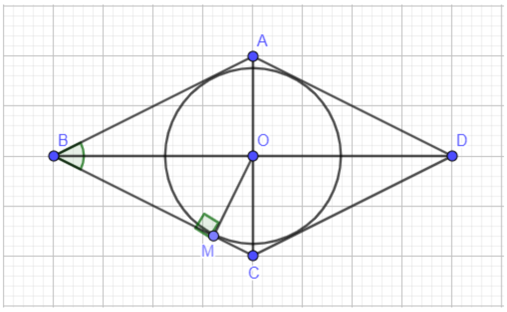


Рис. 2.22

Дано: $ABCD$ – ромб,

$\angle BAD = 60°$, $AC = 16$ дм.

Знайти C.

Розв'язування

$C = 2\pi R$;

$R = OM$;

За властивостями діагоналей ромба: $AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$ дм.

$\angle DAO = \angle CAO = \frac{\angle A}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$.

$OM \perp AD$ – за властивістю дотичної проведеної до кола, тому ΔOMA – прямокутний ($\angle M = 90°$).

З $\Delta OMA(\angle M = 90°)$: $OM = \frac{1}{2}AO$ – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$;

$$OM = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ дм}.$$

$C = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ дм.

Відповідь: $C = 8\pi$ дм.

Задача 5. У правильний шестикутник вписано коло. Діаметр кола, описаного навколо даного шестикутника, утворює з однією з сторін шестикутника кут $30°$, а його радіус дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Знайти меншу діагональ та периметр шестикутника.

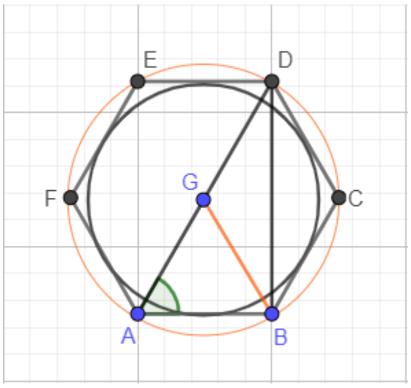


Рис. 2.23

Дано: $AFEDCB$ – правильний шестикутник, $\angle DAB = 30°$,

$BG = 5\sqrt{2}$ см.

Знайти DB, P_{AFEDCB}.

Розв'язування

Оскільки $AFEDCB$ – правильний шестикутник, то $BG = AB = BC = CD = DE = EF = AF = 5\sqrt{2}$ см.

$AD = 2R = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ см.

$\angle DBA = 90°$ - як кут, що спирається на півколо.

З $\Delta DBA(\angle B = 90°)$: $DB = \frac{1}{2}AD = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ см – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$.

$P_{AFEDCB} = 6 \cdot 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$ см.

Відповідь: $DB = 5\sqrt{2}$ см, $P_{AFEDCB} = 30\sqrt{2}$ см.

Задача 6. У трапецію, у якій бічні сторони рівні, вписано коло. Середня лінія дорівнює 32 дм, а бічна сторона з більшою основою утворює кут 30°. Знайти площу вписаного круга.

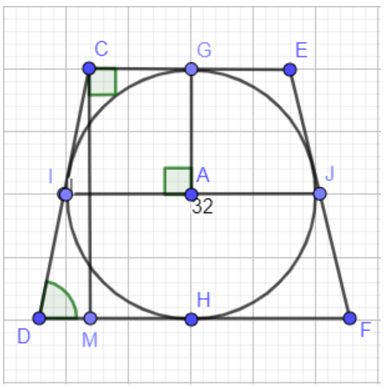


Рис. 2.24

Дано: $DCEF$ – рівнобічна трапеція, $CD = EF$, IJ – середня лінія, $IJ = 32$ дм, $\angle CDF = 30°$.

Знайти $S_{\text{круга}}$.

Розв'язування

Оскільки за умовою задачі коло вписане у рівнобічну трапецію, то виконується умова $DC + FM = CE + DF$.

$IJ = \frac{CE+DF}{2}$;

$CE + DF = 2IJ = 2 \cdot 32 = 64$ дм.

За умовою $CD = EF$, тому $2CD = 64$ дм;

$CD = \frac{64}{2} = 32$ дм.

З $\Delta CDM(\angle M = 90°)$: $CM = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$ дм – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$.

$CM = GH = 16$ дм;

GH – діаметр вписаного кола, $GH = 2R$;

$R = \frac{GH}{2} = \frac{16}{2} = 8$ дм.

$S_{\text{круга}} = \pi R^2$;

$S_{\text{круга}} = 8^2\pi = 64\pi$ дм^2.

Відповідь: $S_{\text{круга}} = 64\pi$ дм^2.

Властивості прямокутного трикутника для задач на коло та круг не менш важливіші, як для інших геометричних фігур.

Отже, можна підсумувати, що властивості прямокутного трикутника відіграють важливу роль при розв'язуванні планіметричних задач для різних видів геометричних фігур.

2.2. Прямокутний трикутник в задачах прикладного змісту

Що означає прикладна задача в математиці? Задачі, які з'явилися мимо математики, але які можна звести до побудови математичної моделі.

Прямокутний трикутник бере важливу участь у розв'язуванні прикладних задачах. Прямокутний трикутник широко використовується у повсякденному житті. За допомогою прямокутного трикутника та його властивостей можна обчислити довжину східців, висоту дерева тощо, які підносяться до розрахунку складових даного трикутника. Розв'язування прикладних задач з використанням прямокутного трикутника сприяє кращому орієнтуванню в практичних питаннях, які виникають у повсякденному житті людини.

У математиці існує безліч задач прикладного змісту на прямокутний трикутник. Розглянемо цікаву задачу, яка пов'язана з архітектурою однієї з країн Європи.

Задача 1. Висота Пізанської вежі становить 57 метрів, а відхилення від центра споруди на 2018 рік становить 5,5 метрів. Визначити кут нахилу вежі.

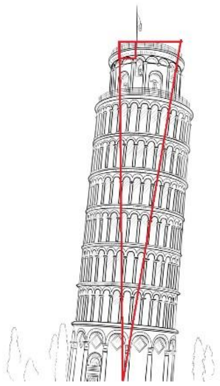


Рис. 2.2.1

Дано: $a = 57$ м, $b = 5{,}5$ м.

Знайти $\angle\beta$.

Розв'язування

За тригонометричними співвідношеннями знайдемо кут нахилу вежі: $\mathrm{t}g\,\angle\beta = \frac{b}{a} = \frac{5{,}5}{57} = \frac{55}{570} \approx 0{,}096$. Користуючись таблицею значень тригонометричних функцій, знаходимо $\angle\beta = 5°$.

Відповідь: $\angle\beta = 5°$.

Задача 2. Ескалатор магазину «Tor-Ba», що знаходиться у м. Рівному нахилений до поверхні землі під кутом $30°$. Висота другого поверху становить 5,2 метра. Знайти довжину ескалатора.

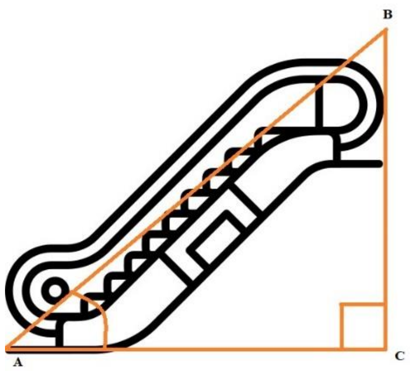


Рис. 2.2.2

Дано: ΔABC – прямокутний,

$\angle BAC = 30°$, $BC = 5{,}2$ м.

Знайти AB.

Розв'язування

З $\Delta ACB(\angle C = 90°)$: $AB = 2BC = 2 \cdot 5{,}2 = 10{,}4$ м – за властивістю катета, що лежить проти кута 30°.

Відповідь: $AB = 10{,}4$ м.

Задача 3. Під час штрафного удару футболіст знаходиться в точці A футбольного поля. Відстань від футболіста до правої штанги становить 20 метрів, а ширина воріт 5 метрів. Під яким кутом футболіст попаде у ворота між B і C?

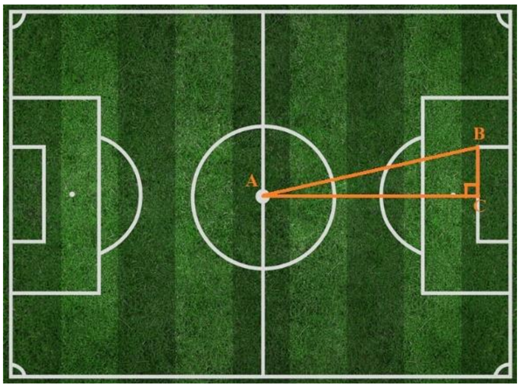


Рис. 2.2.3

Дано: ΔACB – прямокутний,

$AB = 20$ м, $BC = 5$ м.

Знайти $\angle A$.

Розв'язування

З $\Delta ACB(\angle C = 90°)$: $\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25$;

Користуючись таблицею значень тригонометричних функцій, знаходимо $\angle B \approx$ $\approx 75°$;

$\angle A = 90° - \angle B = 90° - 75° = 15°$ - за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника.

Відповідь: $\angle A = 15°$.

Задача 4. Знайти відстань від точки B до входу фортеці, якщо ширина дороги дорівнює 10 м. Пряма відстань дорівнює 60 метрів, а відстань від точки C до половини шляху до фортеці дорівнює 35 метрів.

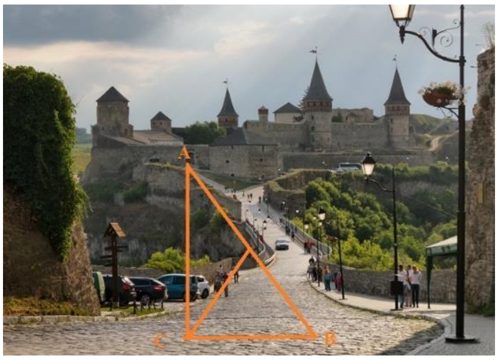


Рис. 2.2.4

Дано: $BC = 10$ м, $AC = 60$ м, $CO = 35$ м.

Знайти AB.

Розв'язування

Оскільки за умовою задачі CO – середина відстані AB, тоді CO у ΔACB – медіана.

З $\Delta ACB(\angle C = 90°)$: $AB = 2CO = 2 \cdot 35 = 70$ м – за властивістю медіани, яка проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника.

Відповідь: $AB = 70$ м.

Задача 5. В обідню пору о 14:25 мотоцикліст, порушуючи правила дорожнього руху повернув з головної дороги на шосе зі швидкістю 130 км/год. Екіпаж патрульної поліції отримав виклик о 14:26, щоб зупинити порушника й поїхав піщаною дорогою на зустріч зі швидкістю 70 км/год. Чи зустрінуться патрульні з мотоциклістом на перехресті доріг?

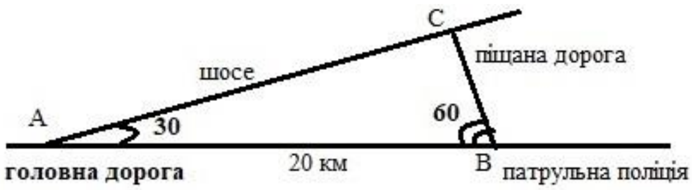


Рис. 2.2.5

Дано: $t_м = 14$год 25хв, $t_п = 14$год 26 хв,

$V_м = 130$ км/год,

$V_п = 70$ км/год.

Знайти AC, BC.

Розв'язування

Щоб мотоцикліст та патрульні зустрілися в точці C потрібно, щоб час руху мотоцикліста і патрульних з моменту виклику був рівний. Знайдемо час руху мотоцикліста на відрізку AC та патрульних на відрізку BC:

1. У ΔACB: $\angle C = 180° - (\angle B + \angle A) = 180° - (30° + 60°) = 180° - -90° = 90°$. Отже, ΔACB – прямокутний.

$BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ км – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$;

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{400 - 100} = \sqrt{300};$$

$$AC = 10\sqrt{3} \text{ км.}$$

$t_\text{м} = \frac{AC}{V_\text{м}} = \frac{10\sqrt{3}}{130} \approx 0{,}13$ год ≈ 8 хв.

$t_\text{п} = \frac{BC}{V_\text{п}} = \frac{10}{70} \approx 0{,}14$ год ≈ 8 хв.

Але оскільки патрульні вирушили на 1 хв пізніше, ніж повернув мотоцикліст, то час руху мотоцикліста 7 хв. Отже, мотоцикліст на 1 хв раніше буде перебувати в точці C, ніж патрульні, тому вони не зустрінуться на перехресті.

Задача 6. Знайти ширину річки, якщо довжина доступного берега дорівнює 10 м, а кут $\angle BAC = 60°$.

Рис. 2.2.6

Дано: ΔABC – прямокутний,

$\angle BAC = 60°$, $CB = 10$ м.

Знайти AB.

Розв'язування

З $\Delta ABC(\angle B = 90°)$: $\sin \angle A = \frac{BC}{AC}$

$\sin 60° = \frac{10}{AC}$;

$\frac{\sqrt{3}}{2}AC = 10$;

$AC = 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}5$ м.

За властивістю гострих кутів прямокутного трикутника $\angle C = 30°$. Отже, $AB = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 11{,}5 = 5{,}75$ м.

Відповідь: $AB = 5{,}75$ м.

Для підвищення ефективності вивчення математики рекомендується вчителям застосовувати задачі прикладного змісту. Такі задачі підкреслюють зв’язок математичної науки з реальним життям, викликають в учнів інтерес щодо вивчення даної теми і математики загалом.

2.3. Використання програми GeoGebra до розв’язування задач на прямокутний трикутник

Сучасна школа кардинально змінила свої вимоги щодо надання знань учням. Кожен навчальний заклад шукає фахівців, які намагаються йти в ногу з сучасними інформаційними технологіями. У сучасному світі вчителі математики повинні не тільки добре володіти знаннями математики, а й знаннями інформатики, адже на сьогоднішній день існує безліч електронних програмних засобів, які використовуються для пояснення математики. Серед таких програм для використання пояснення та розв’язування різних задач у школах використовують програми Maple, MathCad, Gran1, Gran 2D, Gran 3D та найпопулярнішою програмою є GeoGebra.

Програма GeoGebra – це програма, яка призначена для вивчення та пояснення математики, що вміщює в собі геометрію, алгебру тощо. Дана програма є затребуваною у всьому світі, вона локалізована понад 50-ма мовами, зокрема і українською. Geogebra зручна тим, що дозволяє будь-яким чином керувати рисунком у своєму середовищі, за одним кліком будувати правильні фігури, коло, бісектриси кутів, кути та інше. Також можна під час розв’язування задач знаходити площу фігури, довжину відрізка, градусну міру кута.

Дана програма є як на онлайн-ресурсі, так і для встановлення програми на комп’ютер. Користуючись посиланням, можна перейти на онлайн-ресурс програми та використовувати її, не встановлюючи на комп’ютер: Посилання для переходу програми GeoGebra.

Розв’яжемо деякі планіметричні задачі з детальними поясненнями у середовищі програми GeoGebra.

Задача 1. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 6 см, більший катет – 5 см, а кут між більшим катетом і гіпотенузою дорівнює 30°. Знайти менший катет.

Розв'язування

Для знаходження катета прямокутного трикутника проаналізуємо задачу. Оскільки за умовою задачі у прямокутному трикутнику відомо, що гіпотенуза дорівнює 6 см, більший катет – 5 см, а кут між ними дорівнює 30°, то за властивістю катета, що лежить проти кута 30°, катет дорівнюватиме 3 см. Побудуємо прямокутний трикутник з гіпотенузою 6 см, більшим катетом 5 см та з кутом 30°. Для цього:

- у контекстному меню обираємо функцію «Відрізок заданої довжини» (Рис.2.3.1);

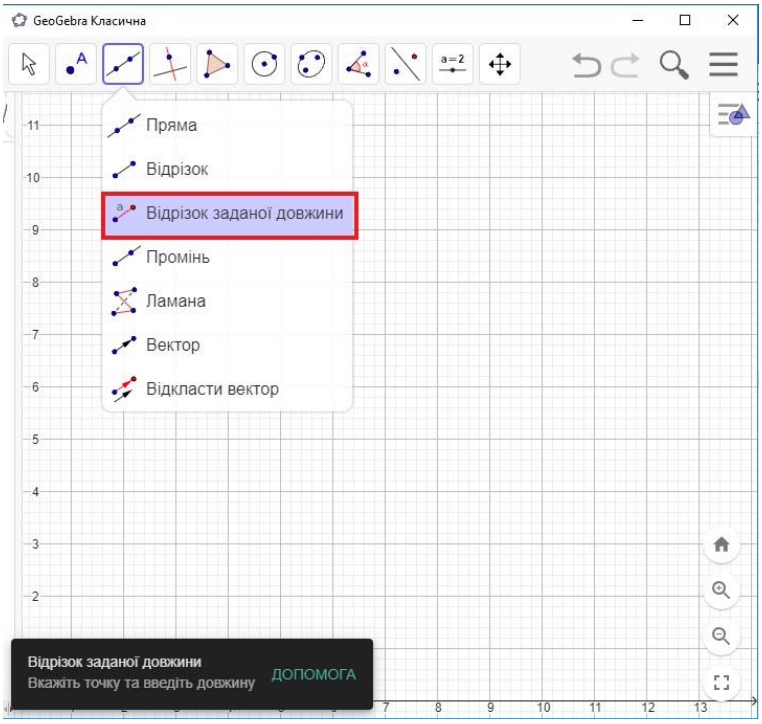


Рис. 2.3.1

Клацнувши по цій функції, у лівому нижньому кутку з'являється підказка (Рис. 2.3.2) . Будуємо більший катет довжиною 5 см.

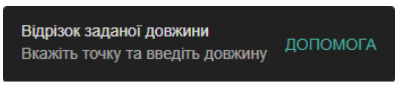


Рис. 2.3.2

- з точки A будуємо кут $30°$, для цього у контекстному меню обираємо функцію «Кут заданої величини» (Рис. 2.3.3);

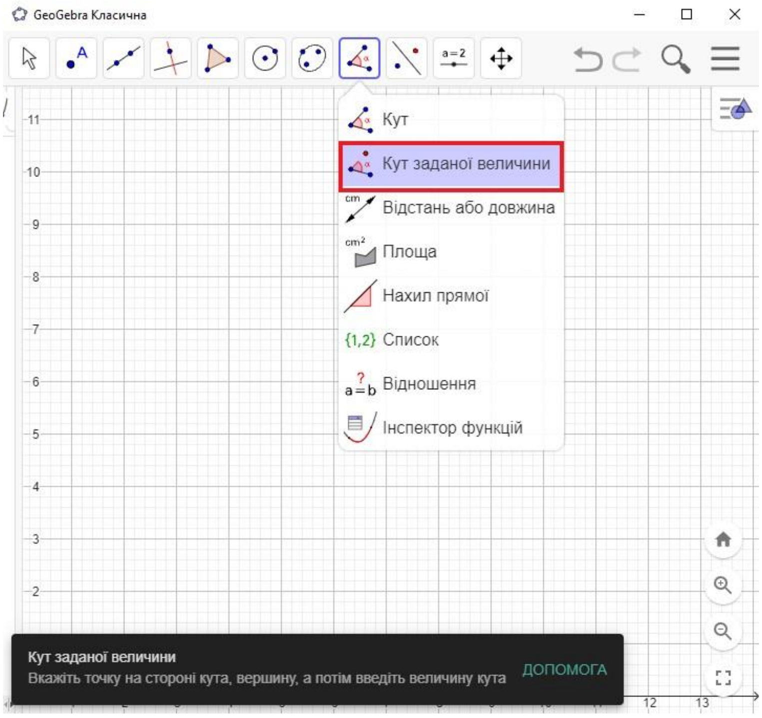


Рис. 2.3.3

- з цієї ж точки A будуємо гіпотенузу таким же способом, що й будували більший катет;
- за допомогою функції «Переміщення» точку C крутимо таким чином, щоб гіпотенуза перетнула точку B' (Рис. 2.3.4);

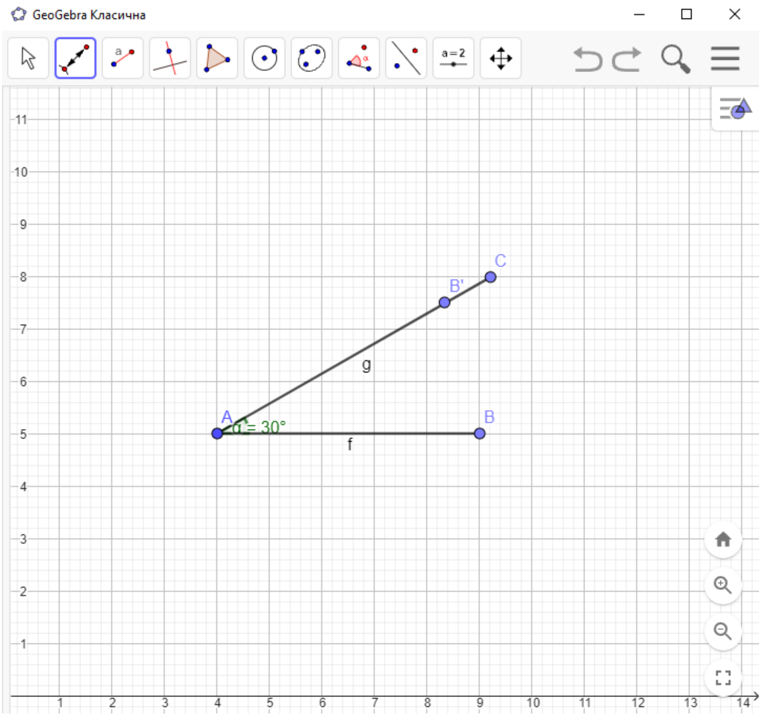


Рис. 2.3.4

- з'єднаємо точку C з точкою B, обравши у контекстному меню функцію «Відрізок»;
- отримали прямокутний трикутник. Для визначення довжини меншого катета скористаємся функцією «Відстань або довжина». Клацаємо по меншому катету та отримаємо довжину сторони (Рис. 2.3.5).

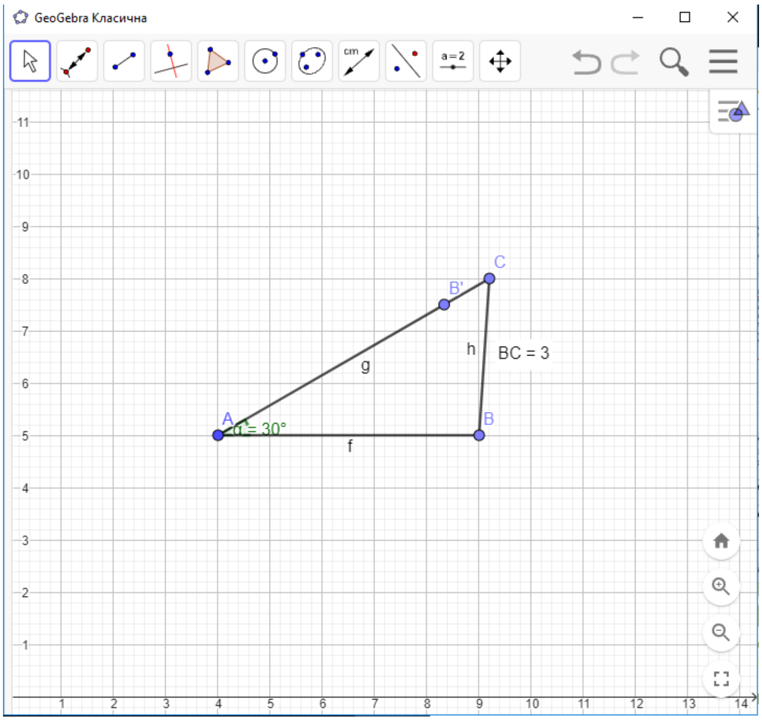


Рис. 2.3.5

Відповідь: $BC = 3$ см.

Задача 2. Знайдіть площу і гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо катети дорівнюють 9 і 12 відповідно.

Розв'язування

Для того, щоб точно побудувати прямокутний трикутник, скористаємося такими вказівками:

- побудуємо катет з довжиною 9, використовуючи функцію «Відрізок заданої довжини» ;
- у точці B проведемо перпендикулярну пряму до прямої AB, користуючись функцією «Перпендикулярна пряма» ;
- з точки B побудуємо другий катет довжиною 12;
- у контекстному меню обираємо функцію «Приєднати / Від'єднати точку». Точку C приєднуємо до перпендикулярної прямої;
- приєднавши точку C до перпендикулярної прямої, встановлюємо довжину катета 12 на цій прямій;
- точку A з'єднуємо з точкою C;
- за допомогою функції «Відстань або довжина» визначаємо довжину гіпотенузи;
- щоб визначити площу трикутника, обираємо функцію «Многокутник» та клікаємо по порядку, починаючи та закінчуючи точкою A;
- утворився трикутник зафарбований червоним кольором;
- для обчислення площі трикутника, користуємося функцією «Площа» та клацаємо на наш трикутник;
- задачу розв'язано (Рис. 2.3.6).

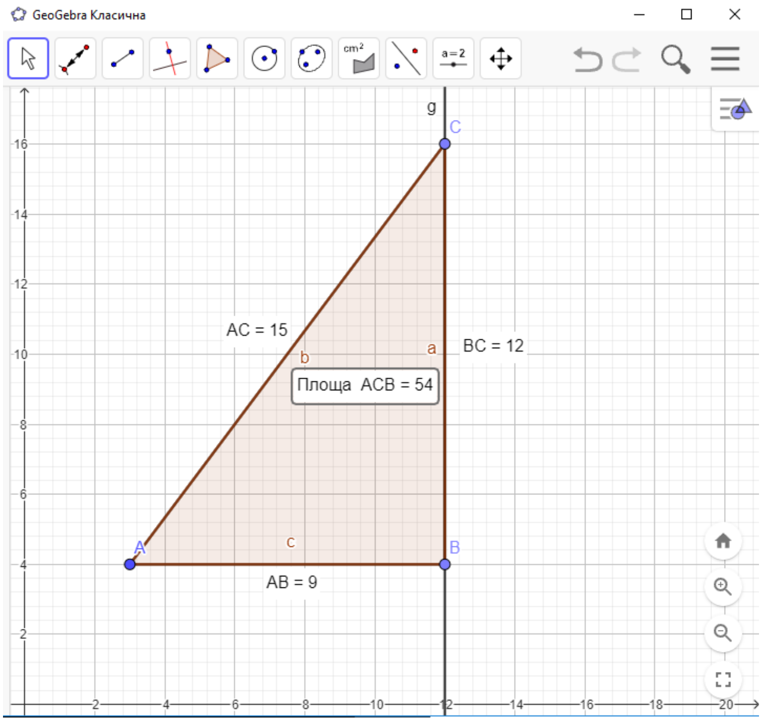


Рис. 2.3.6

Відповідь: $S_{ACB} = 54, AC = 15.$

Задача 3. У прямокутному трикутнику, висота, що проведена до гіпотенузи ділить прямий кут на два довільні кути. Знайти гострі кути прямокутного трикутника.

Розв'язування

У прямокутному трикутнику сума гострих кутів дорівнює 90°. Знайдемо гострі кути, користуючись програмою GeoGebra:

- побудуємо довільний прямокутний трикутник у середовищі програми, користуючись функцією «Відрізок» та «Перпендикулярна пряма»;
- з прямого кута проведемо висоту до гіпотенузи, використовуючи функцію «Перпендикулярна пряма»;
- функцією «Перетин» утворюємо точку перетину перпендикуляра та гіпотенузи трикутника;
- обираємо функцію «Кут» та клацаємо на менший катет та висоту;
- утворився кут градусна міра якого дорівнює 39,81°;
- таким ж чином знаходимо другий гострий кут меншого трикутника;

- другий гострий кут дорівнює 50,19°;

Отже, один гострий кут прямокутного трикутника дорівнює $\angle B = 59{,}19°$. Знаходимо таким же чином другий гострий кут трикутника.

Перевіривши за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника, $\angle C = 90° - 59{,}19° = 39{,}81°$.

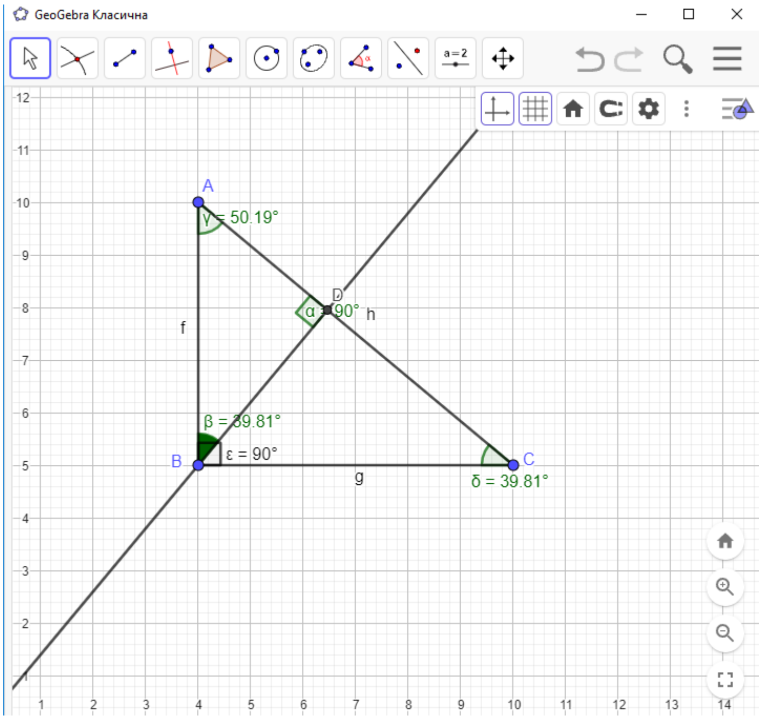


Рис. 2.3.7

Відповідь: 50,19°, 39,18°.

Задача 4. Відомо, що у прямокутному трикутнику менший катет і гіпотенуза дорівнюють 10 см і 20 см, а кут між ними 60°. Знайдіть площу трикутника, утвореного середньою лінією та спільним кутом прямокутного трикутника.

Розв'язування

Знайдемо довжину другого катета, побудувавши трикутник за двома сторонами і кутом між ними:

- за допомогою функції «Відрізок заданої довжини» будуємо катет довжиною 10 см;

- у точці A будуємо кут $60°$, користуючись функцією «Кут заданої довжини»;
- з точки A будуємо гіпотенузу довжино 20 см;
- користуючись функцією «Переміщення» точку C крутимо таким чином, щоб гіпотенуза перетнула точку B';
- точку B' приєднуємо до відрізка AC за допомогою функції «Приєднати / Від'єднати точку»;
- з'єднуємо точку C з точкою B;
- щоб побудувати середню лінію, шукаємо середину гіпотенузи та більшого катета за допомогою функції «Середня точка або центр».

Клацаємо по відрізку AC, утворилася точка, яка є серединою відрізка, таким ж методом шукаємо середину відрізка BC;

- з'єднуємо точки D і E;
- утворився трикутник ΔCDE з кутом $30°$. Для обчислення площі трикутника, обираємо функцію «Многокутник» та клікаємо по порядку, починаючи та закінчуючи точкою D;
- шукаємо площу, користуючись функцією «Площа» та клацаємо на червоний трикутник (Рис. 2.3.8);

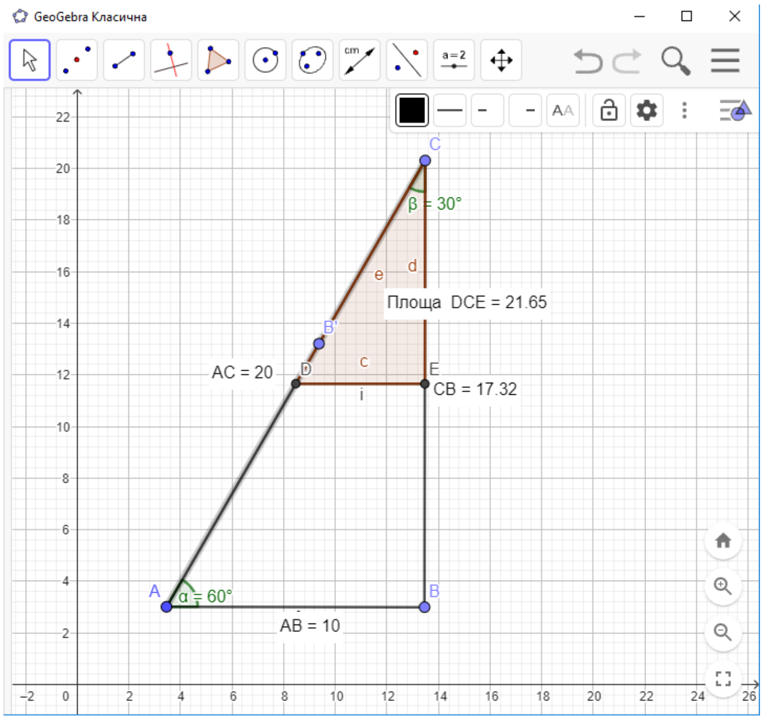


Рис. 2.3.8

- задачу розв’язано.

Відповідь: $S_{DCE} = 21{,}65$ см^2.

Важливою умовою організації навчально-виховного процесу є вибір вчителем використання ІКТ. GeoGebra є універсальною програмою для математики. Обрана програма викликає неабиякий інтерес учнів до розв’язування задач, таким чином можна підвищити ефективність вивчення будь-яких тем з математики.

ВИСНОВКИ

Бакалаврська робота присвячена дослідженню та розробці методики розв'язування планіметричних задач з використанням властивостей прямокутного трикутника.

Прямокутний трикутник є досконалою геометричною фігурою у геометрії. Такий трикутник особливий тим, що має один прямий кут та власні назви своїх сторін. Також особливий прямокутний трикутник своїми властивостями, які широко використовуються у різних задачах з геометрії.

Тема бакалаврської роботи є актуальною у курсі планіметрії. На прикладі розв'язаних задач було доведено, що властивості прямокутного трикутника є затребувані у математиці. Розв'язуючи задачі з використанням властивостей прямокутного трикутника, в учнів розвивається логічне мислення, математична компетентність, уява. Володіючи знаннями з даної теми, учні легко можуть вирішити проблему у повсякденному житті, переводячи її у математичну модель. Таким чином, тема «Властивості прямокутного трикутника» має бути досконало подана у курсі геометрії 7-го класу та широко використовуватися при подальшому вивченні геометрії.

Для розкриття поставленої мети було здійснено аналіз науково-теоретичної літератури, підручників, посібників та статтей за темою дослідження. Проаналізовано програму з математики щодо вивчення прямокутного трикутника у середній школі, а також частково у початковій школі. Підібрано і складено велику кількість задач, які потребують застосування властивостей прямокутного трикутника до їх розв'язання. Розроблено конспекти уроків для 7-го, 8-го класу, підготовлено самостійну роботу для 7-го класу, яка може бути використана для закріплення та перевірки знань здобувачів освіти.

На прикладі задач, показано практичне використання програми GeoGebra Classic.

До етапу розв'язування задач було сформульовано пояснення кожної властивості прямокутного трикутника, здійснено їх доведення у вигляді опорних задач.

Підсумувавши результати виконаної бакалаврської роботи, можна застосувати даний вислів О. М. Крилова: - «*Рано чи пізно будь-яка правильна математична ідея знаходить застосування в тій чи іншій справі*». [44]

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Баляс І. М., Баляс І. М. Прикладні задачі в шкільному курсі математики. URL: https://naurok.com.ua/stattya-prikladni-zadachi-v-shkilnomu-kursi-matematiki-140453.html

2. Бевз Г. П. Методика навчання математики: Навчальний посібник для інститутів. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

3. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н.Г. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Вид-во «Відродження», 2015. 192 с.

4. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. закл. загал. серед. освіти. Вид. 2, перероб. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2021. 273 с.

5. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.: іл.

6. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.

7. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: УОВЦ «Оріон», 2021. 195 с.

8. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: УОВЦ «Оріон», 2017. 224 с.: іл.

9. Геометрія. URL: *http://zno.academia.in.ua/materialy/matematyka/geometria/tema_1.pdf*

10. Гальперіна А. Р. Математика. Типові тестові завдання. Вид. 12, Київ: Літера ЛТД, 2021. 128 с.

11. Долюк Д. А., Порхун А. О. Створення інтерактивних моделей у середовищі GeoGebra. 62 с. URL: https://likt.edu.vn.ua/uploads/user/files/instructions/geogebra_doluk_porhun.pdf

12. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Вид-во «Ранок», 2015. 224 с.

13. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія: пробний підруч. для 7 кл. Харків: Веста: Вид-во «Ранок», 2007. 224 с.

14. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Вид-во «Ранок», 2016. 256 с.

15. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія: підруч. для 8 кл. закл. загал. серед. освіти. Вид. 2, перероб. Харків: Вид-во «Ранок», 2021. 256 с.: іл.

16. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія. 8 клас: контроль результатів навчання. Харків: Вид-во «Ранок», 2016. 80 с.

17. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія. 8 клас: Збірник самостійних і контрольних робіт. Вид. 3. Харків: Веста: Вид-во «Ранок», 2010. 80 с.

18. Єршова А. П., Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Вид-во «Ранок», 2017. 256 с.: іл.

19. Єршова А. П., Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія. 9 клас: контроль результатів навчання Харків: Вид-во «Ранок», 2017. 80 с.

20. Ізюмченко Л. В., Ткаченко Л. А. Інтенсифікація підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики (планіметрія). Кропивницький: КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», 2017. 100 с.

21. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 184 с.

22. Істер О. С. Алгебра і геометрія: 7 кл.: Тематичні контрольні роботи і завдання для експрес-контролю: Навч. посібн. Вид. 7, переробл. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2021. 80 с.

23. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти. Вид. 2, переробл. Київ: Генеза, 2021. 240 с.

24. Істер О. С. Алгебра і геометрія: 8 кл.: Тематичні контрольні роботи і завдання для експрес-контролю. Вид. 7: Навч. посібн. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2020. 80 с.

25. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 240 с.: іл.

26. Історія тригонометрії. URL: https://www.wikiwand.com/uk/%D0%86%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%97

27. Кадубовський О.А. До питання про формування навичок при систематизації та класифікації метричних задач шкільного курсу геометрії / Збірник наукових праць фізико-математичного факультету. 2009. №14. 10 с. URL: https://ddpu.edu.ua/fmk/publications/methodical%20articles/meth-art_04.pdf

28. Капіносов А. М., Білоусова Г. І., Гап'юк Г. В., Кондратьєва О. М. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА. Тернопіль: Підручники і посібники, 2016. 528 с.

29. Каплун О. І. Математика: навчально-практичний довідник. Харків: Торсінг плюс. 2012. 256 с.

30. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером: посіб. Для вчителів і студентів. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 272 с.

31. На допомогу вчителю: віршики до початку уроку. URL: https://bookwoed.blogspot.com/2017/11/blog-post_15.html

32. Міністерство освіти і науки України. URL: https://mon.gov.ua/ua

33. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. Вид. 2, переробл. Харків: Гімназія, 2020. 240 с.: іл.

34. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти. Вид. 2, переробл. Харків: Гімназія, 2021. 208 с.: іл.

35. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підруч. для 9 кл. закладів загальноосвіт. навч. закладів. Харків: Гімназія, 2017. 240 с.: іл.

36. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвіт. навч. закл. з поглибл. вивч. матем.: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Гімназія, 2017. 304 с.: іл.

37. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С., Рабінович Ю. М. Збірник задач і контрольних робіт з геометрії для 9 класу. Харків: Гімназія, 2009. 120 с.: іл.

38. Пєтков С. В., Коломоєць С. Д. Методика викладання в школі. Теорія та практика. Київ: Вид. «Центр учбової літератури», 2021. 216 с.

39. Прохорова О. Впровадження сучасних педагогічних технологій в практику роботи / Математика в школах України: науково – методичний журнал. 2006. №14. 213 с.

40. Ріжняк Р. Я., Пасічник Н. О. Розв'язування математичних задач з реалізацією поліпредметних (економіка, інформатика, математика) інтегративних компонентів / Фізико-математична освіта. 2020. №2. 10 с. URL: https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2020-v2-24/2020_2-24-Pasichnyk-Rizhniak_FMO.pdf

41. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів. Київ, 2000. 512 с.

42. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. Вид. 2, допов. і переробл. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

43. Тарасова Л. З., Муранова Н. П. Планіметрія. Задачі на доведення: навчально-методичний. Київ: НАУ, 2007. 48 с.

44. Танник Н. А. Цитати про математику / Світ математики. URL: http://matematukan.blogspot.com/p/blog-page_5.html

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Конспект уроку з теми «Прямокутний трикутник. Властивості прямокутного трикутника» для 7 класу

Тема: Прямокутний трикутник. Властивості прямокутного трикутника.

Мета:

- *навчальна:* вдосконалити знання про прямокутний трикутник та його властивостей, домогтися вдалого використання властивостей прямокутного трикутника у різних планіметричних задачах;
- *розвивальна:* розвивати в учнів математичну компетентність, увагу, логічне мислення, розвивати особисту думку;
- *виховна:* виховувати патріота України, культуру мовлення, активність, самостійність, кмітливість, формувати інтерес до дисципліни.

Тип уроку: формування і вдосконалення вмінь і навичок.

Обладнання: набір для креслення.

Підручник: Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. 2-ге вид., переробл. Харків: Гімназія, 2020. 240 с.: іл.

Хід уроку

I. Організаційний момент

Привітання вчителя з учнями:

Вчитель. Добрий день, хлопчики й дівчата.

З давніх пір і понині
Кажуть в нас в Україні
- Слава Україні! [33]

Підготовка до уроку, перекличка присутніх на уроці.

II. Перевірка домашнього завдання

Учні відповідають на запитання вчителя.

Бліц – опитування

1. Яким кутом славиться прямокутний трикутник? *(Прямим кутом)*
2. Яка градусна міра кута трикутника, якщо катет, що лежить проти нього, рівний половині гіпотенузи? *(30°)*
3. Яка властивість медіани прямокутного трикутника? *(Медіана, яка проведена з прямого кута до протилежної сторони дорівнює половині гіпотенузи)*
4. Продовжіть речення: «Сума гострих кутів прямокутного трикутника становить …»; *(90°)*
5. Який вчений – математик характеризується з прямокутним трикутником? *(Піфагор)*
6. Яка сторона прямокутного трикутника є найбільшою? Як її називають? *(Сторона, яка лежить навпроти більшого кута трикутника є найбільшою. У прямокутному трикутнику – гіпотенуза)*

III. Формулювання мети і завдань уроку

Вчитель пропонує подивитися на рисунок та знайти спільні характеристики прямокутних трикутників.

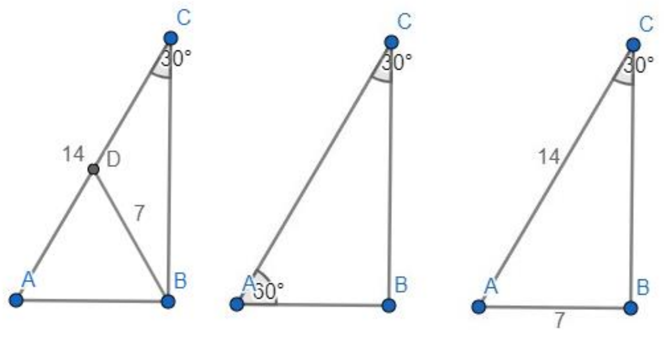


Рис. А. 1

Мабуть, діти побачать, що на рисунку подані властивості прямокутного трикутника, учні повинні назвати ці властивості.

Вчитель. На попередньому уроці, ми вивчали поняття «Прямокутний трикутник» та його властивості, розв’язували елементарні задачі. Сьогоднішнім завданням у нас буде, навчитися використовувати властивості прямокутного трикутника у більш складніших задачах.

IV. Актуалізація опорних знань

Поміркуймо!

1. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle B = 90°$), катети дорівнюють 9 і 12 см відповідно. Відомо, що пряма BD, де точка D - ділить AC на два рівних відрізка, дорівнює 7,5 см. Знайдіть сторону AC. *($AC = 15$ см, оскільки BD – медіана, проведена з прямого кута до гіпотенузи)*
2. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $6x$, а прямий кут $10x$. Знайдіть інший гострий кут. *(Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $10x$, тому $10x - 6x = 4x$)*
3. Відомо, що катет, який лежить проти кута $30°$ дорівнює 3 см, а інший катет – 4 см. Знайдіть периметр трикутника. *(За властивістю катета, що лежить проти кута $30°$ дорівнює половині гіпотенузи, то гіпотенуза дорівнює 6 см. Отже, периметр трикутника дорівнює $6 + 3 + 4 = 13$ см)*

V. Удосконалення вмінь і навичок

<u>*Виконання письмових вправ*</u>

№464. [33]

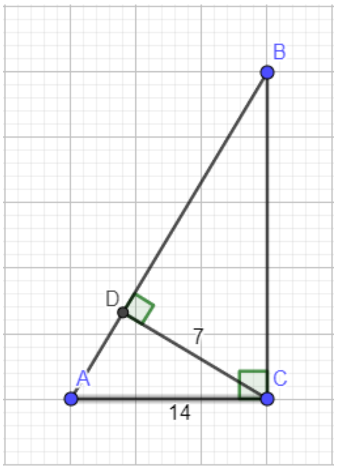


Рис. А. 2

Дано: ΔACB – прямокутний, $CD = 7$ см, $AC = 14$ см.

Знайти $\angle B$.

Розв'язування

З ΔADC ($\angle D = 90°$): $CD = \frac{1}{2}AC = 7$ см – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$.

Отже, $\angle A = 30°$. Оскільки у прямокутному трикутнику сума гострих кутів дорівнює $90°$, тому $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 30° = 60°$.

Відповідь: $\angle B = 60°$.

№466. [33]

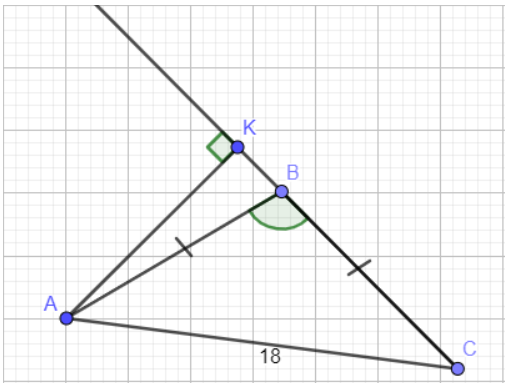


Рис. А. 3

Дано: ΔABC – рівнобедрений, $AB = BC$, $AC = 18$ см, $\angle B = 120°$, AK – висота.

Знайти AK.

Розв'язування

Оскільки за умовою задачі ΔABC – рівнобедрений, то $\angle A = \angle C = \frac{180° - \angle B}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$.

З $\Delta AKC(\angle K = 90°)$: $AK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$ см – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$.

Відповідь: $AK = 9$ см.

Додаткове завдання. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $30°$. Сума гіпотенузи і меншого катета дорівнює 120 см. Знайдіть медіану трикутника, що проведена з вершини прямого кута.

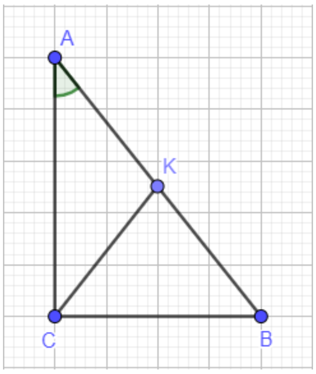


Рис. А. 4

Дано: ΔACB – прямокутний, $\angle CAB = 30°$, $AB + BC = 120$ см.

Знайти CK.

Розв'язування

BC – менший катет, оскільки він лежить навпроти меншого кута.

$BC = \frac{1}{2}AB$ – за властивістю катета, що лежить навпроти кута $30°$.

$AB + \frac{1}{2}AB = 120;$

$\frac{3}{2}AB = 120;$

$AB = \frac{120}{\frac{3}{2}}$;

$AB = 80$ см.

$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 80 = 40$ см – за властивістю медіани, яка проведена до гіпотенузи.

Відповідь: $CK = 40$ см.

VI. Підсумки уроку

Дайте відповідь на запитання

1. Чи може катет бути більшим за гіпотенузу? *(Ні)*
2. Чи існує у прямокутному трикутнику дві гіпотенузи? *(Ні)*
3. Скільки можна провести медіан з прямого кута? *(Одну)*

VII. Домашнє завдання

1. Повторити теоретичний матеріал за параграфом №3.
2. Виконати завдання №463, №467.

Відповіді: №463 – оскільки один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $30°$, то другий гострий кут можна знайти $90° - 30° = 60°$. Отже, з $\Delta BDC(\angle D = 90°)$: $BC = 2BD = 2 \cdot 7 = 14$ см – за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$. З $\Delta ACB(\angle C = 90°)$: $AB = 2BC = 2 \cdot 14 = 28$ см. $\boldsymbol{AB = 28}$ **см.** №467 – знайдемо кут C: $90° - -15° = 75°$. Оскільки ΔABC – рівнобедрений, то $\angle C = \angle B = 75°$. $\angle A = 180° - (\angle C + \angle B) = 180° - -(75° + 75°) = 180° - 150° = 30°$. З $\Delta ABM(\angle M = 90°)$: $AB = 2BM = 2 \cdot 7{,}5 = 15$ см. $\boldsymbol{AB = AC = 15}$ **см**.

ДОДАТОК Б

Конспект уроку з теми «Розв'язування задач на многокутники» для 8 класу

Тема: Розв'язування задач на многокутники.

Мета:

- *навчальна:* узагальнити та систематизувати знання учнів з теми «Многокутники. Площі многокутників»;
- *розвивальна:* розвивати в учнів наполегливість, кмітливість, логічне мислення, вміння робити висновки;
- *виховна:* виховувати патріота України, дисциплінованість, самостійність, культуру мовлення.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань та вмінь.

Обладнання: картки з тестовими завданнями, лінійка.

Підручник: Істер О. С. Геометрія: підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти. 2-ге вид., переробл. Київ: Генеза, 2021. 240 с.

Хід уроку

I. Організаційний момент

Привітання вчителя з учнями, перекличка присутніх у класі. Підготовка учнів до уроку.

II. Перевірка домашнього завдання

Для перевірки домашнього завдання, вчитель обирає двох учнів, які пояснюватимуть домашнє завдання на дошці по черзі.

III. Формулювання, теми, мети і завдань уроку

Вчитель. Сьогодні на уроці, ми повторимо тему «Многокутники. Площі многокутників», розв'язуючи задачі. Таким чином, буде наша підготовка до контрольної роботи.

IV. Узагальнення та систематизація знань та вмінь

Підсумовуючи дану тему, учні повинні були навчитися таким пунктам:

- ✓ формулювати означення вписаного та описаного многокутника навколо кола;

- ✓ формулювати основні властивості площі многокутника;
- ✓ знаходити площі многокутників, сформулювавши їх теореми.

Отже, узагальнювати та систематизувати знань та вмінь учнів слід проводити за наступним планом:

1. Площа прямокутника

Запитання до класу

1) За якою формулою обчислюється площа прямокутника, квадрата?
2) Що таке прямокутник?

Виконання письмових вправ

№895. [23]

Розв'язування

Нехай $a = 15$ см, $b = 17$ см.

$S = S_b - S_a = 17^2 - 15^2 = 2 \cdot 32 = 64$ см^2

$S = c^2$;

$c^2 = 64$;

$c = 8$ см.

Відповідь: 8 см.

2. Площа паралелограма

Запитання до класу

1) Назвіть теорему про площу паралелограма.

Виконання письмових вправ

№930. [23]

Розв'язування

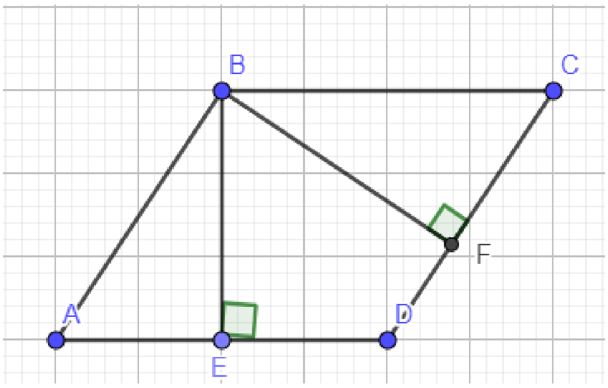


Рис. Б. 1

Дано: $ABCD$ – паралелограм, $AD = 8$ см, $DC = 12$ см, $BE + BF = 15$ см.

Знайти S_{ABCD}.

Розв'язування

$S = AD \cdot BE;$

$S = DC \cdot BF;$

$8BE = S;$

$12BF = S;$

Віднімемо ці два вирази: $12BF - 8BE = 0$. Розв'яжемо систему рівнянь:

$\begin{cases} BE + BF = 15 \\ 12BF - 8BE = 0 \end{cases};$

$\begin{cases} BE = 15 - BF \\ 12BF - 8(15 - BF) = 0 \end{cases};$

$\begin{cases} BE = 15 - BF \\ 12BF - 120 + 8BF = 0 \end{cases};$

$\begin{cases} BE = 15 - BF \\ 20BF = 120 \end{cases};$

$\begin{cases} BF = 6 \\ BE = 15 - 6 = 9 \end{cases};$

Отже, $S_{ABCD} = 6 \cdot 12 = 72$ см^2.

Відповідь: $S_{ABCD} = 72$ см^2.

3. Площа трикутника

Запитання до класу

1) Назвіть всі теореми про площу трикутника.

Виконання письмових вправ

№1. Дано два кути при основі трикутника величною по $45°$. Встановити тип трикутника та знайти площу трикутника, коли відомо, що основа дорівнює 10 см.

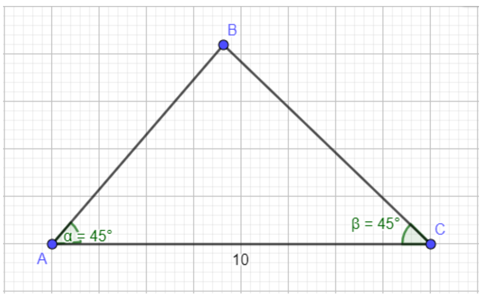


Рис. Б. 2

Дано: $\angle BAC = \angle BCA = 45°$,

$AC = 10$ см.

Знайти $S_{\Delta ABC}$.

Розв'язування

$\angle BAC + \angle BCA = 90°$, звідси $\angle ABC = 90°$.

ΔABC – прямокутний рівнобедрений $AB = BC$.

$BC = AC \sin 45° = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ см.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$ см^2.

Відповідь: $S_{\Delta ABC} = 25\sqrt{2}$ см^2.

4. Площа трапеції

Запитання до класу

1) Назвіть теорему про площу трапеції.
2) Сформулюйте наслідок з теореми про площу трапеції.

Виконання письмових вправ

№1. Знайти площу прямокутної трапеції $KBCD$, якщо дві сусідні сторони паралелограма $ABCD$, де $AB = a$, $BC = b$ відповідно дорівнюють двом сусіднім сторонам прямокутника $MPNQ$. Відомо, що BK – висота паралелограма та площа паралелограма вдвічі менша від площі прямокутника.

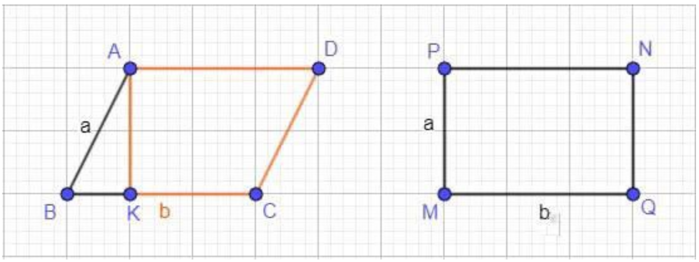


Рис. Б. 3

Дано: $AB = a$,
$BC = b$,
$AB = PM$, $BC = MQ$.
Знайти: S_{AKCD}.

Розв'язування

Оскільки, за умовою $S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{MPNQ}$,

$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = a \cdot b \sin \angle B$;

$S_{MPNQ} = MP \cdot MQ = a \cdot b$;

$a \cdot b \sin \angle B = \frac{1}{2} a \cdot b$;

$\sin \angle B = \frac{1}{2}$;

$\angle B = 30°$.

З ΔAKB ($\angle K = 90°$): $BK = AB \cos \angle B = a \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ – за властивістю катета, що лежить навпроти кута 30°.

$KC = BC - BK = b - \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S_{AKCD} = \frac{KC+BC}{2} \cdot AK = \frac{b-\frac{a\sqrt{3}}{2}+b}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{2b-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \left(b - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Відповідь: $S_{AKCD} = \frac{ab}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

V. Підсумки уроку

Виконання тестових завдань на картках

1. Яка з формул поданих в таблиці належить для обчислення площі трикутника?

Таблиця 1

А	Б	В	Г	Д
$S = \frac{1}{2}ah_a$	$S = ab$	$S = \frac{a+b}{2}h$	$S = a^2$	$S = ah_a$

2. Сторони паралелограма дорівнюють 10 і 14 см відповідно. Знайти площу паралелограма.

Таблиця 1

А	Б	В	Г	Д
24 см^2	56 см^2	140 см^2	120 см^2	72 см^2

3. У прямокутній трапеції середня лінія дорівнює 8 см. Відомо, що бічна сторона, яка утворює прямий кут дорівнює 5 см. Знайти площу трапеції.

Таблиця 3

А	Б	В	Г	Д
40 см^2	20 см^2	45 см^2	64 см^2	100 см^2

VI. Домашнє завдання

1. Повторити теоретичний матеріал з розділа 4.
2. Підготуватися до контрольної роботи.

ДОДАТОК В

Самостійна робота для 7 класу

Тема. Властивості прямокутного трикутника

ВАРІАНТ 1

1. За рисунком (Рис. В.1) знайдіть кут.

Рис. В.1

А	Б	В	Г
68°	58°	45°	32°

Таблиця В.1

2. За рисунком (Рис. В.2) знайдіть x.

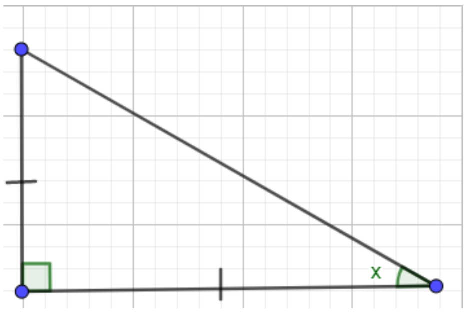


Рис. В.2

А	Б	В	Г
30°	60°	45°	50°

Таблиця В.2

3. За рисунком (Рис. В.3) знайдіть AB.

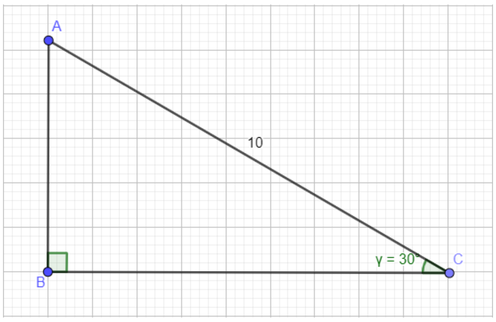


Рис. В.3

А	Б	В	Г
$AB = BC$	$AB = 20$ см	$AB = 5$ см	$AB = 10$ см

Таблиця В.3

4. У ΔKLM: $\angle M = 90°, \angle K = 30°, LM = 8$ дм. Знайдіть LK.
5. У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює $60°$. Менший катет та гіпотенуза в сумі становлять 12 см. Знайдіть медіану трикутника, що проведена до гіпотенузи.

   Відповідь: нехай $\angle A = 60°, \angle B = 90°, BM$ – висота. $\angle C = 90° - 60° = 30°$. AB – менший катет, бо лежить навпроти меншого кута. Нехай $AB = x$, тоді $AC = 2AB = 2x$. За умовою: $AB + AC = 12$ см. $x + 2x == 12$; $3x = 12$; $x = 4$ см. $AB = 4$ см, $AC = 8$ см. Отже, $BM = \frac{1}{2}AC == 4$ см.

ВАРІАНТ 2

1. За рисунком (Рис. В.4) знайдіть кут.

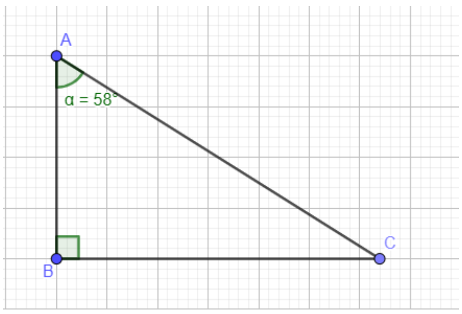


Рис. В.4

А	Б	В	Г
68°	58°	45°	32°

Таблиця В.4

2. За рисунком (Рис. В.5) знайдіть AB.

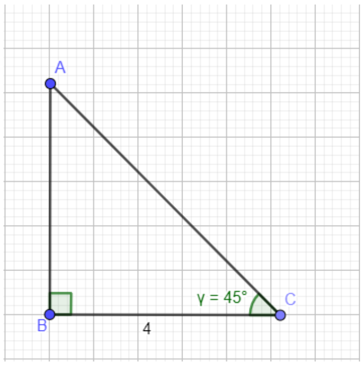
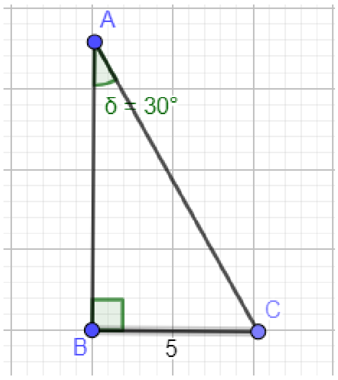


Рис. В.5

А	Б	В	Г
8 см	2 см	4 см	6 см

Таблиця В.5

3. За рисунком (Рис. С.6) знайдіть AC.



А	Б	В	Г
$AC = 25$ дм	$AB = BC$	$AC = 10$ дм	$AC = 2,5$ дм

Таблиця В.6

4. У ΔKLM: $\angle M = 90°, ML = 10$ см, $KL = 20$ см. Знайдіть $\angle K$.
5. У прямокутному трикутнику один із гострих кутів дорівнює $60°$. Гіпотенуза в сумі з меншим катетом становлять 18 см. Знайдіть медіану трикутника, що проведена до гіпотенузи.

   Відповідь: нехай $\angle A = 60°, \angle B = 90°, BM$ – висота. $\angle C = 90° - 60° = 30°$. AB – менший катет, бо лежить навпроти меншого кута. Нехай $AB = x$, тоді

$AC = 2AB = 2x$. За умовою: $AB + AC = 18$ см. $x + 2x = 18$; $3x = 18$; $x = 6$ см. $AB = 6$ см, $AC = 12$ см. Отже, $BM = \frac{1}{2}AC = 6$ см.