Рівненський державний гуманітарний університет
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики з методикою викладання

Кваліфікаційна робота
бакалаврського рівня
на тему:

ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ МНОГОГРАННИКІВ ТА ТІЛ ОБЕРТАННЯ В СТАРШІЙ ШКОЛІ

Виконала: студентка IV курсу,
групи МІ-41
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Гришко Ольга Сергіївна

Керівник: канд. пед. наук, доц. кафедри
математики з методикою викладання РДГУ
Генсіцька-Антонюк Наталія Олександрівна

Рецензент: канд. техн. наук, доц. кафедри
вищої математики РДГУ
Присяжнюк Ігор Михайлович

Рівне – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Протягом всієї історії люди не припиняли збагачувати свої знання у різних галузях, включаючи вивчення многогранників та тіл обертання. Багато об’єктів у природі, фізиці, астрономії, географії та інших науках мають форму кулі, сфери, циліндра чи конуса. У наші дні визначення об’єму та площі поверхні об’єктів є важливою практичною необхідністю, що використовується у природничих науках, побуті та виробництві. Тому процес вивчення стереометрії має бути комплексним та спрямованим на розвиток навчально-пізнавальної та творчої активності учнів, а також на задоволення їх основних потреб життєдіяльності.

Методисти, науковці та автори підручників завжди звертали увагу на проблему запровадження прикладної спрямованості Н. В цьому питанні було проведено теоретичне обґрунтування та запропоновано шляхи її розв’язання в роботах таких вчених, як О. М. Астряба, Г. П. Бевза, О. С. Дубинчука, З. І. Слєпкань, І. Ф. Тесленка, І. А. Кушніра та інших.

Потрібно зазначити, що при вивченні даної теми також необхідно враховувати розроблені методики формування понять, пов’язаних з геометричними тілами, перегляд ролі доведень та підходів до доведення теорем, визначення місця та цільового призначення окремих видів задач, а також розвиток просторової уяви учнів. При цьому, потрібно враховувати різні методологічні підходи до структуризації навчального матеріалу в програмах з математики та шкільних підручниках.

Актуальність дослідження. Проблема дослідження многокутників та тіл обертання є актуальною, оскільки більшість старшокласників не мають розуміння, як правильно застосовувати отримані знання для розв’язання задач нестандартного змісту, часто допускають помилки при побудові рисунків геометричних тіл та визначенні їх основних властивостей. Підтвердженнями слугують результати випускників на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) та вступних іспитах до вищих навчальних закладів за останні роки. Крім того розв’язування задач тісно пов’язане із знаннями просторових тіл, їх властивостей і як результат - розвиток просторових уявлень учнів. Таким чином, потреба в глибоких знаннях стосовно властивостей стереометричних тіл, знаходження їх елементів, площ поверхонь і об'ємів тіл для застосування в умовах повсякденного життя та практичної діяльності залишається актуальною.

Задля детального вивчення, адже многогранники і тіла обертання охоплюють більше 90% всього навчального матеріалу геометрії в 11 класі і є невід'ємною складовою програми зовнішнього незалежного оцінювання, нами буда обрана **тема дослідження:** «Теоретичні та методичні основи вивчення многогранників та тіл обертання в старшій школі».

Об'єкт дослідження: процес навчання стереометрії в 11 класі.

Предмет дослідження: многогранники та тіла обертання.

Мета дослідження полягає в глибокому вивченні і систематизації теоретичних знань з тем «Многогранники» та «Тіла обертання» та аналізі методичних особливостей їх вивчення.

Задля досягнення мети наукової роботи передбачено розв'язання наступних **завдань**:

1. Узагальнити і систематизувати теоретичні і методичні основи вивчення тем «Многогранники» та «Тіла обертання»;
2. Проаналізувати навчальну програму та діючі підручники з математики по темі дослідження та здійснити їх порівняльну характеристику;
3. Опрацювати завдання зовнішнього незалежного оцінювання з теми дослідження;
4. Розробити рівневі тести з тем «Многогранники» та «Тіла обертання».

В основу дослідження було покладено **теоретичні** (аналіз програм, підручників, періодичних видань, науково-методичних матеріалів, тощо) і **емпіричні** (бесіди з вчителями, спостереження діяльності учнів при вивченні стереометрії) **методи**.

Практичне значення. Результати даного дослідження можуть бути використанні вчителями і учнями при вивчені тем «Многогранники» та «Тіла обертання» для більш ґрунтового ознайомлення з навчальним матеріалом в загальноосвітніх навчальних закладах і при підготовці до ЗНО (НМТ) та студентами у закладах вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика) при вивченні методики викладання математики.

Теоретичне значення. Узагальнені та систематизовані теоретико-методичні матеріали можуть слугувати основою для подальшого наукового дослідження.

Апробація результатів дослідження. Розділи бакалаврського дослідження обговорювалися на засіданнях кафедри математики з методикою викладання РДГУ 23 травня 2023 року та основні тези дослідження були викладені на звітній науково-практичній конференції РДГУ (2023 р.).

При написанні кваліфікаційної роботи були використанні програмний засіб Geogebra для побудови рисунків та Google Form для побудови тестів.

Структура роботи зумовлена її метою і завданнями. Вона складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатків. Загальний обсяг роботи становить 96 сторінок, з яких 56 сторінок – основного тексту.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИКО - МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ МНОГОГРАННИКІВ ТА ТІЛ ОБЕРТАННЯ В СТАРШІЙ ШКОЛІ

1.1 Аналіз програми старшої школи за темою дослідження

Аналізуючи математичні програми для загальноосвітніх закладів від 5 до 11 класу в загальному, можна зазначити, що поняття «многогранники» вперше вводяться для учнів в 5 класі під час вивчення теми «Прямокутний паралелепіпед. Піраміда». Наприклад, прямокутний паралелепіпед є одним з видів многогранників - геометричних фігур, поверхні яких складаються з многокутників. Також учні знайомляться з поняттям піраміди як іншого виду многогранника [27]. При вивченні даної теми вводяться основні поняття про паралелепіпед, куб та піраміду, а також їх складові елементи. Учні також вивчають об'єм прямокутного паралелепіпеда та деяких інших фігур, а також їх властивості. У 6 класі з'являється тема «Циліндр. Конус. Куля», яка є безпосереднім введенням у більш поглиблене вивчення теми в старшій школі [28, с.130].

На сайті Міністерство освіти на науки України розміщено навчальні програми з математики для учнів 10-11 класів на 2022-2023 навчальний рік. Програми пропонуються для трьох основних рівнів вивчення предмету: рівень стандарту [29], профільний рівень [30], та поглиблений рівень навчання (що бере свій початок у 8 класі). [31]. Для порівняння і систематизації відмінностей у кількості годин та змісті матеріалу в згаданих вище навчальних програмах стосовно теми дослідження нижче наведено таблицю.

Таблиця 1.

<table>
<tr><td colspan="2">Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів
Рівень стандарту</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Геометрія. 11 клас</u></td></tr>
<tr><td colspan="2">Тема 1. МНОГОГРАННИКИ (14 годин)
2 години на тиждень</td></tr>
<tr><td>Зміст навчального матеріалу</td><td>Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів</td></tr>
<tr><td>Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників.
Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди.</td><td>Учень/учениця:
розпізнає основні види многогранників та їх елементи;
зображує основні види многогранників та їх елементи;
має уявлення про перерізи многогранника площиною;
формулює означення вказаних у змісті многогранників;
записує формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь призми та піраміди
обчислює величини основних елементів многогранників;
застосовує вивчені формули і властивості до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ (12 годин)
2 години на тиждень</td></tr>
<tr><td>Циліндр, конус, їх елементи. Перерізи циліндра і конуса: осьові перерізи</td><td>Учень/учениця:
обчислює величини основних елементів тіл обертання;</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>циліндра і конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі.
Куля і сфера. Переріз кулі площиною.</td><td>застосовує властивості тіл обертання до розв’язування задач;
розпізнає види тіл обертання, їхні елементи; многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях в об’єктах навколишнього світу.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів
Профільний рівень</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Геометрія. 10 клас</u></td></tr>
<tr><td colspan="2">Тема 1. ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ (15 годин)
3 години на тиждень</td></tr>
<tr><td>Зміст навчального матеріалу</td><td>Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів</td></tr>
<tr><td>Основні поняття стереометрії.
Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Поняття про аксіоматику та побудову науки.
Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники.
Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та призми методом слідів.</td><td>Учень/учениця
наводить приклади точок і прямих, що належать одній площині; многогранників та інших стереометричних фігур;
пояснює що таке плоска і просторова геометричні фігури; поверхня многогранника; перетин многогранника січною площиною;
формулює основні поняття, аксіоми, наслідки з них;
виокремлює серед многогранників: піраміду та призму;
ілюструє текстовий зміст аксіом, теорем, задач за допомогою рисунка;
характеризує форму просторової геометричної фігури; розв’язує вправи, що передбачають: використання аксіом стереометрії та наслідків з них; виконання</td></tr>
</table>

	найпростіших побудов перерізів пірамідах та призмах.
Геометрія. 11 клас	
Тема 1. МНОГОГРАННИКИ (24 годин) *3 години на тиждень*	
Многогранник та його елементи. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Зрізана піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної піраміди. Відношення площ поверхонь подібних многогранників. Правильні многогранники. Тригранний кут та його властивості. Перша теорема косинусів для тригранного кута. Друга теорема косинусів для тригранного кута. Теорема синусів для тригранного кута. Поняття геометричного тіла. Теорема Ейлера.	**Учень/учениця** **наводить** приклади: геометричних тіл і фігур; многогранників і їх видів; **пояснює** що таке: многогранний кут; бічна та повна поверхня призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди; перетин многогранника січною площиною; **формулює** означення основних понять та властивостей многогранників, зазначених у змісті теми; **формулює** і доводить теореми про: діагоналі паралелепіпеда та наслідки з неї; площу бічної поверхні прямої призми; площу бічної поверхні правильної піраміди; площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди; **класифікує** многогранники: призми – за видом і формою, піраміди – за видом і розміщенням проекції вершини піраміди (зокрема, за рівністю бічних ребер та кутів, які утворюють бічні ребра/грані з площиною основи); правильні многогранники; **розрізняє** геометричні фігури і геометричні тіла; елементи призми, паралелепіпеда, піраміди; прямі, правильні, опуклі многогранники; плоский кут многогранника при вершині

	та двогранний кут многогранника при ребрі; прямий і прямокутний паралелепіпеди; правильну піраміду і тетраедр; **зображає** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проектування: призму; паралелепіпед;, піраміду; зрізану піраміду та їх елементи; **визначає** відношення площ поверхонь подібних многогранників; **обчислює** площі бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; **розв'язує** вправи, що передбачають: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т. ч. прикладного та практичного змісту; обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду.
Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ (12 годин) *2 години на тиждень*	
Тіла і поверхні обертання. Циліндр, конус, зрізаний конус, їх елементи. Перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса: осьові перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі; перерізи циліндра площинами, паралельними його осі;	**Учень/учениця** **наводить** приклади геометричних тіл і поверхонь обертання; **пояснює** що таке: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульовий сегмент, сектор, пояс; **формулює** означення основних понять та властивостей для геометричних тіл, зазначених у змісті теми;

перерізи конуса площинами, які проходять через його вершину. Куля і сфера. Переріз кулі площиною. Частини кулі: сегмент, сектор, пояс. Площина, дотична до сфери. Комбінації циліндра з призмою. Комбінації конуса з пірамідою. Рівняння сфери. Многогранники, вписані в сферу. Многогранники, описані навколо сфери. Комбінації циліндра і сфери. Комбінації конуса і сфери.	**формулює і доводить** теореми про: переріз циліндра і конуса площиною, перпендикулярною до осі циліндра; переріз кулі будь-якою площиною; **класифікує** геометричні тіла за видом: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульові сегмент, сектор, пояс; **розрізняє** геометричні фігури і геометричні тіла; елементи циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, сегмента, сектора, пояса; центральний кут та плоскі кути, утворені перерізом площини, що проходить через вершину конуса; **зображає** відповідно до властивостей проектування: циліндр; конус; зрізаний конус, кулю, сегмент, сектор, пояс; **розв'язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т. ч. прикладного та практичного змісту.
Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів **Поглиблений рівень (початок вивчення у 8 класі)**	
Геометрія. 10 клас	
Тема 1. ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ (15 годин) *3 години на тиждень*	
Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії та наслідки з них. Поняття про аксіоматику та побудову науки.	**Учень/учениця** **наводить** приклади точок і прямих, що належать одній площині; многогранників та інших стереометричних фігур;

Просторові геометричні фігури. Початкові уявлення про многогранники. Найпростіші задачі на побудову перерізів піраміди та призми методом слідів.	**пояснює** що таке плоска і просторова геометричні фігури; поверхня многогранника; перетин многогранника січною площиною; **формулює** основні поняття, аксіоми, наслідки з них; **виокремлює** серед многогранників: піраміду та призму; **ілюструє** текстовий зміст аксіом, теорем, задач за допомогою рисунка; **характеризує** форму просторової геометричної фігури; розв'язує вправи, що передбачають: використання аксіом стереометрії та наслідків з них; виконання найпростіших побудов перерізів пірамідах та призмах
Геометрія. 11 клас	
Тема 5. МНОГОГРАННИКИ (20 годин) *3 години на тиждень*	
Многогранник та його елементи. Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед. Піраміда. Зрізана піраміда. Правильна піраміда. Перерізи многогранників. Площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної піраміди. Відношення площ поверхонь подібних многогранників. Правильні многогранники. Тригранний кут та його властивості. Перша теорема косинусів для тригранного кута.	**Учень/учениця** **наводить** приклади: геометричних тіл і фігур; многогранників і їх видів; **пояснює** що таке: многогранний кут; бічна та повна поверхня призми, паралелепіпеда, піраміди, зрізаної піраміди; перетин многогранника січною площиною; **формулює** означення основних понять та властивостей многогранників, зазначених у змісті теми; **формулює** і доводить теореми про: діагоналі паралелепіпеда та наслідки з неї; площу бічної поверхні прямої призми; площу бічної поверхні правильної

Друга теорема косинусів для тригранного кута. Теорема синусів для тригранного кута. Поняття геометричного тіла. Теорема Ейлера.	піраміди; площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди; **класифікує** многогранники: призми – за видом і формою, піраміди – за видом і розміщенням проекції вершини піраміди (зокрема, за рівністю бічних ребер та кутів, які утворюють бічні ребра/грані з площиною основи); правильні многогранники; **розрізняє** геометричні фігури і геометричні тіла; елементи призми, паралелепіпеда, піраміди; прямі, правильні, опуклі многогранники; плоский кут многогранника при вершині та двогранний кут многогранника при ребрі; прямий і прямокутний паралелепіпеди; правильну піраміду і тетраедр; **зображає** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проектування: призму; паралелепіпед;, піраміду; зрізану піраміду та їх елементи; **визначає** відношення площ поверхонь подібних многогранників; **обчислює** площі бічної та повної поверхні: прямої призми, паралелепіпеда, правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; **розв'язує вправи, що передбачають**: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т. ч. прикладного та практичного змісту; обчислення площ бічної та повної поверхні прямої призми, паралелепіпеда,

	правильної піраміди, правильної зрізаної піраміди; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду.
Тема 6. ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРІЇ ТЕТРАЕДРА (11 годин) *3 години на тиждень*	
Ортоцентричний тетраедр та його ознаки і властивості. Рівногранний тетраедр та його властивості. Медіани тетраедра та їх властивості. Середні лінії тетраедра та їх властивості. Теорем Менелая для тетраедра.	**Учень/учениця** **наводить приклади:** ортоцентричних та рівногранних тетраедрів; **пояснює** що таке: медіана та середня лінія тетраедра; **формулює** означення основних фігур, зазначених у змісті теми; **формулює і доводить** ознаку ортоцентричного тетраедра, теорему про середні лінії тетраедра, теорему про медіани тетраедра, теорему Менелая для тетраедра; **класифікує** тетраедри за видом (правильний, ортоцентричний, рівногранний); **зображує** на рисунку, відповідно до властивостей паралельного проектування: середні лінії, медіани, висоти тетраедра; перерізи площинами.
Тема 7. ТІЛА ОБЕРТАННЯ (12 годин) *2 години на тиждень*	
Тіла і поверхні обертання. Циліндр, конус, зрізаний конус, їх елементи. Перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса: осьові перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса; перерізи циліндра і конуса площинами,	**Учень/учениця** **наводить приклади** геометричних тіл і поверхонь обертання; **пояснює** що таке: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульовий сегмент, сектор, пояс;

паралельними основі; перерізи циліндра площинами, паралельними його осі; перерізи конуса площинами, які проходять через його вершину. Куля і сфера. Переріз кулі площиною. Частини кулі: сегмент, сектор, пояс. Площина, дотична до сфери. Комбінації циліндра з призмою. Комбінації конуса з пірамідою. Рівняння сфери. Многогранники, вписані в сферу. Многогранники, описані навколо сфери. Комбінації циліндра і сфери. Комбінації конуса і сфери.	формулює означення основних понять та властивостей для геометричних тіл, зазначених у змісті теми; **формулює і доводить теореми** про: переріз циліндра і конуса площиною, перпендикулярною до осі циліндра; переріз кулі будь-якою площиною; **класифікує** геометричні тіла за видом: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульові сегмент, сектор, пояс; **розрізняє** геометричні фігури і геометричні тіла; елементи циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, сегмента, сектора, пояса; центральний кут та плоскі кути, утворені перерізом площини, що проходить через вершину конуса; **зображає** відповідно до властивостей проектування: циліндр; конус; зрізаний конус, кулю, сегмент, сектор, пояс; **розв'язує вправи, що передбачають:** використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв`язування задач, у т. ч. прикладного та практичного змісту.

Усі вищезгадані програми ґрунтуються на Державному стандарті базової та повної середньої освіти з урахуванням відповідних навчальних профілів.

Переглянувши основні вимоги до вивчення теми дослідження, можемо узагальнити, що:

1. Програма рівня стандарту передбачає ознайомлення з базовими поняттями та властивостями многогранників та тіл обертання, виконання простих завдань на їх розрахунок та вивчення основних методів їх

конструювання. Наприклад, у програмі рівня стандарту можна вивчити такі теми, як побудова та властивості правильних многогранників.

2. Програма профільного рівня передбачає детальніше вивчення геометричних понять та їх застосування у складніших задачах. Наприклад, у програмі профільного рівня можна здійснити аналіз та розв'язання задач на побудову неправильних многогранників та обчислення їх характеристик.

3. Програма поглибленого рівня передбачає вивчення складних задач, що потребують застосування геометричних знань у різних наукових галузях, а також вивчення додаткових тем. Для прикладу: учні вивчають теорему Ейлера та її застосування для побудови многогранників, досліджують тіла обертання за допомогою інтегральних методів, таких як, задачі на знаходження об'єму тіла обертання, утвореного обертанням фігури площини навколо осі.

Вибір навчальної програми залежить від потреб, здібностей учня та його майбутніх планів щодо вибору професії.

1.2 Особливості викладу тем «Многогранники» та «Тіла обертання» в шкільних підручниках

В сучасний час Міністерство освіти і науки України рекомендує багато підручників з геометрії для використання в закладах загальної середньої освіти. Однак, вчителі мають право самостійно вирішувати, який з них відповідає їхнім потребам і підходить до викладу матеріалу найкраще. При його виборі особливу увагу звертають на введення основних понять, які є основою для подальшого вивчення геометрії. Таким чином, важливо, щоб означення були зрозумілими і доступними для учнів.

Аналізуючи теми «Многогранники» та «Тіла обертання» в шкільних підручниках, можна зазначити, що вони розглядаються з різних точок зору та мають різний рівень складності.

Деякі підручники зводять тему «Многогранники» до вивчення формул для обчислення площі та об'єму простих тіл, таких як куб, паралелепіпед, піраміда та призма. Однак, більш глибокий підхід до вивчення многогранників, що включає аналіз їх властивостей, розкриття закономірностей у їх конструкції та взаємозв'язку з іншими геометричними фігурами, відсутній в більшості випадків.

Що стосується теми «Тіла обертання», то вона зазвичай розглядається більш повно та систематично. У шкільних підручниках зазвичай дається визначення тіла обертання та методи його побудови. Також, розглядаються формули для обчислення площі поверхні та об'єму тіла обертання. Однак, вивчення більш складних випадків, таких як тіла обертання, які утворюються після обертання криволінійних фігур, або розгляду взаємозв'язку між тілами обертання та іншими геометричними фігурами, також часто відсутнє у шкільних підручниках.

Завдання, які передбачають готові рисунки, грають важливу роль під час вивчення тем дослідження. Вони допомагають економити час, а також спрямовують увагу учнів на найважливіші моменти поточного матеріалу. Крім того, вони можуть бути корисні при вивченні нового матеріалу, коли учні можуть мати труднощі з візуалізацією нових понять. Готові рисунки можуть допомогти зрозуміти концепцію і показати, які конкретні дії потрібно виконати для завдання. Також, вони можуть бути корисні як для індивідуальної, так і для групової роботи, допомагаючи зрозуміти матеріал учням різних рівнів знань та здібностей.

У контексті підходів до викладу матеріалу можна зазначити, що деякі підручники намагаються зберегти інтерес учнів до теми за допомогою додаткових розділів, таких як «Цікаві факти про многогранники» або «Застосування тіл обертання в побуті». Такі розділи дозволяють показати учням реальні приклади використання теоретичних знань у повсякденному житті. Наприклад, у підручнику [8] є історична довідка, яка розповідає про історію створення многогранників та тіл обертання. У підручнику [9] звертається увага на використання тіл обертання в архітектурі та мистецтві.

Проте, деякі підручники можуть не забезпечувати достатнього рівня доступності матеріалу для учнів. Наприклад, у деяких підручниках може бути складне формулювання теорем та визначень, що може призвести до зниження рівня розуміння матеріалу школярами. Окрім того, деякі з них можуть не забезпечувати достатнього рівня практичних прикладів для розвитку практичних навичок учнів.

Підручники різняться за наповненістю матеріалом, як приклад, у підручнику [10] є рубрика для перевірки компетентності у тестовій формі та приділена увага побудовам перерізів призми та піраміди; у підручнику [11] застосовуються кольорові ілюстрації геометричних фігур, є історична довідка та рубрика «Головне в параграфі»; у підручнику [6] на початку кожного параграфа наведена таблиця з базовими означеннями та властивостями геометричних фігур, розглянуто теорему Ейлера про зв’язок кількості вершин, граней та ребер многокутника, винесено окремим параграфом «Метод слідів».

Проведемо аналіз підручників [6], [10], [11] за викладом навчального матеріалу тем «Многогранники» та «Тіла обертання». У підручниках, що досліджувалися, автори використовують високий науковий та методичний рівні, дотримуючись принципу доступності для учнів, враховуючи їх вікові особливості. Кожен автор має свій стиль написання та своє бачення у поданні означень та понять. При цьому, важливо зазначити, що у досліджуваних підручниках використовуються різні методи та підходи до викладання матеріалу, що може вплинути на його сприйняття.

Перший підручник розбиває матеріал на тематичні блоки. Розділи складається з підрозділів, що органічно пов'язані між собою. В кожному з них подаються поняття, які логічно доповнюють одне одного. Підручник містить як стандартні, так і нетрадиційні задачі, що розвивають нестандартне мислення.

Другий підручник, порівняно з попереднім, містить значну кількість додаткової інформації. Він спрямований на глибоке засвоєння матеріалу та підготовку учнів до подальшого вступу на спеціальності, пов’язані з математикою. Задачі в цьому підручнику більш складні, орієнтовані на високий рівень підготовки учнів і студентів.

Третій підручник відрізняється лаконічним поданням матеріалу. Цей підручник більше схожий на методичний посібник, яким користуються студенти у вищих навчальних закладах. Він містить всі основні визначення і теореми з доведенням.

Можемо помітити, що у кожному з підручників підхід до подання матеріалу унікальний і спрямований на досягнення різних цілей. Важливо враховувати потреби та можливості учнів або студентів при виборі підручника для вивчення даних тем.

Не зважаючи на ці відмінності, усі підручники мають загальну мету - допомогти учням зрозуміти теоретичні та методичні основи вивчення многогранників та тіл обертання в старшій школі. У процесі роботи з цими підручниками, учні можуть отримати необхідні знання для розв'язування задач, пов'язаних з многогранниками та тілами обертання, а також розвинути свої когнітивні та аналітичні навички.

Отже, виклад тем «Многогранники» та «Тіла обертання» може бути здійснений різними методами та засобами. Варто звертати увагу на наявність доступної термінології та достатньої кількості прикладів для розвитку практичних навичок учнів. Також важливо забезпечити розвиток інтересу до теми за допомогою цікавих фактів та прикладів використання теоретичних знань у повсякденному житті.

1.3 Методичні вказівки до вивчення теми дослідження

1.3.1 Особливості вивчення теоретичного матеріалу за темою «Многогранники»

При вивченні теми «Многогранники» необхідно звернути увагу на три основні аспекти: розвиток графічних навичок учнів, розвиток просторової уяви та розвиток аналітичних навичок. Перш за все, прокоментуємо перший пункт, до нього можна віднести такі правила, як побудова рисунку за допомогою одного методу проектування [5], розуміння задачі через наочні зображення та простота побудови рисунка. Ці правила є актуальними як для учнів, так і для вчителів, оскільки наочні зображення допомагають зрозуміти суть задачі та розвивати просторову уяву.

Учитель, організовуючи вивчення геометричних тіл, користується системою понять, які характеризують їх властивості. Ці поняття відображають загальні, істотні та специфічні особливості реальних об'єктів і явищ. Вони є ментальними образами навколишнього світу або нашої свідомості. В розділі стереометрії головними поняттями є: многогранник, куб, паралелепіпед, призма, піраміда, зрізана піраміда, площа поверхні та об'єм. Формування цієї системи понять відіграє важливу роль у процесі вивчення геометрії. Одним з важливих умов покращення навчання геометрії в школі є зміна підходу до формування геометричних понять [2].

Під час вивчення початкових відомостей стереометрії у 10 класі, після вивчення паралельності прямих і площин, проводиться аналіз зображень просторових фігур на площині. Учні повинні вміти визначати паралельні та перпендикулярні прямі і площини, а також перпендикуляр та похилу на моделях геометричних тіл. При переході до 11 класу і вивченні геометричних тіл, необхідно враховувати, що учні вже мають уявлення про призму, піраміду, циліндр, конус і кулю. Тому потрібно систематизувати, поглибити і розширити їх знання, надати означення, доповнити новими поняттями (наприклад, геометричного тіла) і ввести більш точні визначення понять площі поверхні та об'єму.

Многогранники відіграють особливу роль серед усіх тіл. Це пояснюється тим, що багато результатів для інших тіл отримуються з відповідних результатів для многогранників. Наприклад, об'єми тіл і площі їх поверхонь визначаються шляхом граничного переходу від многогранників, а також початкові відомості з стереометрії вивчаються на основі многогранників. Крім того, многогранники використовуються для розвитку просторової уяви.

Учні вже знайомі з поняттям призми з основної школи. У старшій школі це поняття розширюється шляхом узагальнення многогранників і деталізується завдяки введенню неопуклих і похилих призм. Поняття паралелепіпеда вводиться як підкатегорія поняття «призма», а поняття куба - як підкатегорія поняття «прямокутний паралелепіпед». Многокутник може бути опуклим або неопуклим, включаючи «дірки» у своїй структурі. При визначенні правильної піраміди необхідно враховувати дві умови: основа піраміди є правильним многокутником, а центр цього многокутника співпадає з основою висоти піраміди. Слід також показати моделі або малюнки неправильних пірамід, які мають хоча б одну з вказаних властивостей.

Після обговорення цих різних геометричних тіл виділяються ті, у яких основою є многокутник, а бічні грані складаються з трикутників зі спільною вершиною. Ці тіла називаються пірамідами. Вони можуть бути різних типів - трикутні, чотирикутні, п'ятикутні, з основою, яка не обов'язково лежить у горизонтальній площині. Вони можуть мати прямі або похилі бічні грані, бути опуклими або неопуклими. Для закріплення знань учні виконують вправи на дошці, які передбачають побудову різних геометричних тіл, зокрема пірамід. Ці вправи сприяють усвідомленню істотних властивостей піраміди.

Також, для засвоєння суттєвих властивостей піраміди, проводяться вправи на конструювання моделей геометричних тіл. Це дозволяє учням виявити та розуміти основні характеристики піраміди.

Більшість школярів достатньо швидко сприймають виведення формул площі поверхонь. Варто зазначити учням, що обчислення площі поверхні многогранників, як і тіл обертання зводиться до обчислення площі їх розгорток. Це дозволяє підкреслити зв'язок з планіметрією і готує до розширення поняття площі поверхні окремих тіл.

При розв’язуванні задач на знаходження поверхні многогранників будемо застосовувати знання формул площ многокутників, оскільки розгортка поверхні призми може бути розглянута як многокутники, з якого складається ця поверхня. Саме тому обчислення поверхні призми не є складним завданням.

Учні розуміють, що перпендикулярний переріз визначає висоту всіх бічних граней, а підрахунок площ многокутників і паралелограмів вони вже вміють визначати. Корисно мати на дошці записані формули для бічної поверхні похилої і прямої призми, які не викликають складнощів у доведенні.

Однак, складнощі можуть виникнути при обчисленні площі поверхні зрізаної піраміди, оскільки площа бічної поверхні складається з суми площ трапеції, а формула для повної поверхні додає площу ще одного многокутника.

Під час вивчення теми «Об'єми многогранників» важливо ознайомити учнів з поняттям об'єму геометричної фігури, формулами об'єму призми і піраміди, а також вміннями знаходити об'єм цих фігур і використовувати його при розв'язуванні задач. Також необхідно навчити учнів зчитувати інформацію з зображень призм і пірамід та виконувати допоміжні планіметричні рисунки. Організація практичної роботи, яка включає вимірювання об'ємів за допомогою пересипання (переливання), є доцільним методом для введення основних понять теми на рівні стандарту. Для цього можна використовувати прозорі макети прямих і похилих призм та пірамід з однаковими основами, що слугують ємностями для пересипання. Додатково можна використати пісок або воду, таблицю з формулами площі многокутників та посібник з завданнями за готовими рисунками.

Оглянувши загальну методику, можемо виділити універсальний алгоритм побудови стереометричних тіл:

1. Створити попередню розмітку для фігури / тіла.
2. Побудувати видимі елементи.
3. Побудувати елементи, що потребують штриховки.
4. Позначити необхідні деталі на рисунку.
5. Якщо умова задачі вимагає побудови додаткових елементів, повернутися до п. 1, в іншому випадку - до п. 6.
6. Приступити до розв’язування задачі.

У більшості випадків для розв’язання задач достатньо мати знання про пропорції фігур, а також вміти виконувати паралельне проєктування. Однак, для закріплення навичок у проєктуванні і кресленні фігур необхідно регулярно надавати прості вправи на побудову.

Можна використовувати усні задачі з готовим рисунком, щоб покращити ефективність навчання, особливо якщо вони супроводжуються динамічними комп'ютерними моделями. Це дозволяє учневі не тільки аналізувати рисунок, але й працювати з ним, застосовуючи еквівалентні перетворення або створюючи додаткові побудови. Однак, цей метод може бути складним для засвоєння, оскільки учню потрібно визначати, коли саме застосовувати надбудову [4].

Під час розв’язування таких задач учень має можливість швидко думати, не витрачаючи час на розписування задачі. Тому зазвичай починають з таких завдань, а потім поступово прибирають зоровий супровід. Цей підхід дозволяє учням розвивати свої мисленнєві здібності та робити висновки швидше.

1.3.2 Особливості вивчення теоретичного матеріалу за темою «Тіла обертання»

При вивченні теми «Тіла обертання» перше завдання полягає в поясненні учням поняття «крива поверхня», яке взаємозв'язане з поняттям «площина». В елементарному курсі стереометрії розглядаються прості криві поверхні, відомі як тіла обертання. У вступній частині теми розкривається їхня сутність. Учням пояснюються дві основні лінії: вісь обертання і твірна. Важливо зазначити, що твірна і вісь обертання знаходяться в одній площині. Рекомендується на прикладах продемонструвати, які складні поверхні утворюються, коли твірна і вісь обертання не знаходяться в одній площині.

Під час розгляду тіл обертання важливо зазначити, що форма поверхні обертання залежить від форми твірної та положення цієї твірної щодо осі [10]. Для наочності цього можна використовувати відповідні моделі або комп'ютерну графіку, оскільки засвоєння матеріалу учнями сильно залежить від наявності ілюстрацій.

Окрім того, учням варто зосередитися на властивостях паралельного проектування, які є важливими для теми «Тіла обертання». Основні властивості, які стосуються нашої теми, включають:

- проекцією прямої лінії є пряма або точка;
- проекції паралельних прямих паралельні або збігаються;
- проекції двох прямих, що перетинаються, перетинаються або збігаються;
- проекції двох мимобіжних прямих перетинаються або паралельні;
- проекцією кола є еліпс;
- проекцією центра кола є центр відповідного еліпса;
- проекцією взаємно перпендикулярних діаметрів кола є спряжені
- діаметри еліпса;
- проекцією дотичної до кола є дотична до еліпса – проекція цього кола;
- точки кулі проектуються на контур еліпса або всередину його.

Кожен вчитель розуміє важливість використання рисунків просторових фігур під час навчання стереометрії. Ці рисунки допомагають учням створити правильне просторове уявлення про геометричні форми, що вивчаються. Наглядні рисунки дозволяють учням правильно розв'язувати задачі і зробити висновки про властивості просторових об'єктів. Рисунок є одним зі засобів, що допомагає засвоїти новий матеріал, розвиває просторову уяву учнів, тому важливо навчити їх виконувати рисунки геометричних форм свідомо і впевнено. Звичайно, рисунки в курсі стереометрії не є самоціллю, вони є лише допоміжними засобами, використовуваними як на уроці, так і під час самостійного виконання письмових завдань учнями [33].

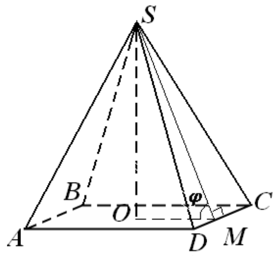
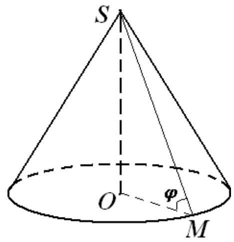
Вміння правильно зображати фігури є ключовим етапом у побудові малюнка для стереометричних задач. Хоча можуть виникати деякі неточності при створенні малюнків, важливо не заглиблюватись у деталі на уроках стереометрії. Основною метою малюнка в таких задачах є правильне відображення основних відношень, які мають ключове значення для розв'язання конкретної задачі [2].

Для полегшення розуміння та запам'ятовування фігур, під час вивчення кожного з тіл обертання корисно надати учням правила та орієнтири для їх побудови.

На нашу думку, циліндр і конус слід означати конструктивно, а саме як тіла обертання, що допомагає створити наочне уявлення про ці форми. В школі слід використовувати це означення, додавши загальний підхід до визначення циліндра і конуса. Варто підкреслити, що далі в навчальній програмі будуть розглядатися тільки прямі кругові циліндри і конуси. При цьому слід звернути увагу на можливі помилки в означеннях, наприклад, вживання терміну «фігура обертання» замість «тіло обертання» (що є більш загальним поняттям) або неправильне уявлення про переріз тіл обертання, де може бути круг, кільце, кілька кілець і т. д. При введенні понять про тіла обертання також корисно звернутися до історичних відомостей.

Для розширення вивчення конічних та циліндричних поверхонь в курсі вищої математики доцільно узагальнити поняття циліндра, проводячи аналогію з призмою. Цей підхід дозволить студентам отримати загальну концепцію і зрозуміння зазначених поверхонь. Фактично, вивчення цих понять уже починається в курсі стереометрії, тому в курсі вищої математики можна зосередитися на аналітичному викладі теорії поверхонь, розширивши та узагальнивши вже сформовані уявлення студентів. Таку паралель також можливо провести для правильної піраміди та прямого кругового конуса, що зображено в таблиці нижче.

Таблиця 2.

Правильна піраміда	**Прямий круговий конус**
	
Висота піраміди	Вісь конуса
Апофема піраміди	Твірна конуса
Лінійний кут двогранного при основі піраміди	Кут нахилу твірної до площини основи
Бічна поверхня піраміди	Бічна поверхня (або конічна поверхня) даного конуса
$S_б = \frac{S_{осн}}{cos\varphi}$	$S_б = \pi Rl = \frac{\pi Rl}{R} = \frac{\pi R^2}{\frac{R}{l}} = \frac{S_{осн}}{cos\varphi}$, де R – радіус основи, l – твірна конуса
$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, де H – висота піраміди	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, де H – висота конуса

При означенні поняття «куля» існує два можливих підходи: куля як тіло обертання та куля як множина точок. Перший підхід використовується для означення циліндра, конуса та кулі, і забезпечує подібність в означеннях цих фігур. Другий підхід дозволяє використовувати аналогічне означення кулі, як у випадку означення круга. Це відкриває можливість для часткового фузіонізму. Вчитель має можливість вибрати той підхід до означення, який він вважає за доцільний.

Питання про площі поверхонь є відносно простим. Для визначення площі поверхні будь-якого многогранника необхідно обчислити суму площ кількох многокутників. Формули для визначення площі поверхонь циліндра і конуса можна отримати за допомогою розгорток цих тіл. Однак, формули для визначення площі сфери таким способом не можуть бути отримані.

Теорія площ кривих поверхонь є більш складною для розуміння. Раніше для сфери, бічної поверхні циліндра і конуса, а також для круга, використовувалися окремі означення. Це створювало незручності з методичної точки зору і було науково некоректним, оскільки різні означення призводили до різних понять. Навіть незважаючи на те, що їх називали схожими термінами, такими як «площа сфери», «площа бічної поверхні циліндра», «площа круга» і т.д., ці поняття не могли бути об'єднані або віднесені одне до одного. Наприклад, їх не можна було додавати або віднімати, коли розраховували повну площу поверхні циліндра чи конуса. Тому з'явилася потреба сформулювати загальне означення площі, яке б задовольняло площі плоских фігур і площі будь-яких кривих поверхонь. Саме таке означення запропоновано для вивчення старшокласникам.

Учні вже зустрічалися з поняттям об'єму на уроках в основній школі та у повсякденному житті, і це поняття вважається більш природним, ніж поняття площі поверхні. На шкільному курсі неможливо побудувати строгу теорію вимірювання площі та об'ємів. Проте в старшій школі, використовуючи вже наявні уявлення учнів, необхідно надати аксіоматичне означення об'єму. Об'єм - це додатна величина, яка задовольняє наступним аксіомам:

1. Об'єм довільного тіла виражається додатним числом.
2. Якщо тіло розбите на декілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів всіх цих частин (адитивність).
3. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці об'єму (нормування).
4. Аксіома Кавальєрі (з неї випливає інваріантність: рівні тіла мають рівні об'єми).

Ці аксіоми допомагають встановити базові властивості об'єму та забезпечують зрозумілість інтерпретації поняття учнями.

Найкращим варіантом при вивченні даної теми буде порівняння об'єму призми і об'єму циліндра, використовуючи простий підхід, згідно якого обидва їх можна обчислити, перемноживши площу основи на висоту. Але пізніше може виникнути питання про те, як зміниться об'єм фігури, якщо верхню основу зсунути, залишаючи її початкову площину незмінною. Таким чином, навіть якщо принцип Кавальєрі не розглядається, учні отримують практичні навички його застосування.

Якщо учні ознайомлені з інтегральним численням на достатньому рівні, можна розглянути конус як правильну піраміду з нескінченною кількістю граней і застосувати відповідне правило для обчислення площі бічної поверхні піраміди до конуса. Навіть якщо учні не мають достатніх знань з інтегрального числення, вони можуть використовувати моделі для кращого уявлення про зазначену проблематику.

Важливо розглянути окремо задачі, пов'язані з комбінаціями тіл обертання між собою і з многогранниками. В таких задачах особливу увагу слід приділити правильній побудові рисунку, як вже зазначалося вище. Крім того, ці задачі досить різноманітні, тому після розв`язання кількох типових задач має сенс запропонувати учням нестандартні завдання. Це сприятиме розвитку просторового мислення, творчої уяви і дозволить повторити раніше вивчений матеріал, допомагаючи учням застосувати набуті навички в неочікуваних ситуаціях.

РОЗДІЛ 2
ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕТИЧНИХ ТА МЕТОДИЧНИХ ЗНАНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З МНОГОГРАННИКАМИ ТА ТІЛАМИ ОБЕРТАННЯ

2.1 Методика розв'язування основних видів задач зовнішнього незалежного оцінювання (НМТ)

2.1.1 Задачі з многогранниками

У курсі стереометрії розв'язування задач є невід'ємною частиною навчальної програми. Це обумовлено тим, що без успішного розв'язування достатньої кількості задач учень не зможе засвоїти матеріал програми на належному рівні. Проте, існує велика різниця у вимогах до розв'язування задач з геометрії в початковій і старшій школі. У старших класах зустрічаються комбіновані завдання, які поєднують декілька типів задач - на обчислення, доведення, побудову та дослідження. Окрім ускладнення завдань, ще підвищуються вимоги до логічної обґрунтованості кожного кроку розв'язання. Також, використання алгебри, зокрема коефіцієнтів і тригонометричних формул, зростає в процесі розв'язування задач.

Для успішного розв'язування стереометричних задач необхідно навчитись будувати фігури. Малюнок відіграє роль ілюстрації тіла, про яке йдеться в умові задачі. Однак, через те, що деякі кутові та лінійні розміри в ньому спотворюються, зображення стереометричних фігур викликають у багатьох учнів нерозуміння та труднощі при їх побудові. Тому вчителю потрібно зробити зображення більш наочним, ніж правильним, з метою викликати в учнів просторову уяву. Для цього використовують наочності, які є моделлю побудови фігур.

При розв`язуванні задач та доведенні теорем зі стереометрії ми зазвичай користуємося графічним зображенням відповідних фігур на площині, а не просторовою моделлю. Цей метод називають графічною моделлю. Щоб навчитися розв'язувати стереометричні задачі, необхідно вміти правильно зображувати просторові фігури на площині, наприклад, на листі паперу або на дошці.

Для створення таких зображень найчастіше використовують два методи - паралельну проекцію і центральну проекцію (перспективу). Центральна проекція більш відповідає апарату людського зору, проте її використання в школі є складним, оскільки малюнок у вивченні стереометрії відіграє допоміжну роль. Тому паралельна проекція є більш придатною для шкільної практики, оскільки вона дозволяє швидко та просто зображувати фігури на площині.

При створенні графічних зображень вимагається, щоб вони були достовірними, наочними, простими та швидкими у виконанні. Ідеальною відповіддю цим вимогам є паралельна проекція.

З моменту введення обов'язкового ЗНО у 2008 році, на тестуванні було приблизно 100 завдань з теми «Многогранник». Більшість з них мали варіанти вибору з однією правильною відповіддю. На відміну від теми «Піраміда», у завданнях на встановлення відповідностей частіше використовується тема «Призма». Але завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю найчастіше пропонують на тему «Піраміда».

Завдання з цієї теми можуть бути представлені у різних форматах, таких як завдання з вибором однієї правильної відповіді, завдання на встановлення відповідності, неструктуровані завдання відкритої форми з короткою відповіддю та завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю.

Для оцінки розуміння термінів, що стосуються многогранників та їх елементів, автори завдань ЗНО запропонували вирішувати задачі, що вимагають знаходження сусідніх або протилежних ребер, сусідніх або протилежних граней, паралельних і мимобіжних прямих у многограннику.

Завдання 24. ЗНО 2019. На рисунку (див. рис. 2.1.1) зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між парою прямих (1 - 4) та їх взаємним розташуванням (А - Д) [23].

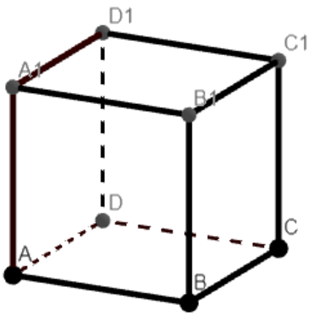


Рис. 2.1.1

Пара прямих		Взаємне розташування	
1	AC й CC_1	А	прямі паралельні
2	AB_1 і CD_1	Б	прямі мимобіжні
3	AC й CD_1	В	прямі перетинаються й утворюють прямий кут
4	AB і C_1D	Г	прямі перетинаються й утворюють кут 45°
		Д	прямі перетинаються й утворюють кут 60°

Окрім цього, учасникам запропоновані завдання, що стосуються розгортки многогранників. У таких завданнях необхідно знайти кількість ребер та вершин многогранника, визначити, якому виду многогранника відповідає дана розгортка, знайти об’єм, бічну та повну площу поверхні тіла, розгортку якого наведено у завданні.

Завдання 16. ЗНО 2014. На рисунку зображено розгортку піраміди, що складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, і чотирьох правильних трикутників (див. рис. 2.1.2). Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди (у см^2) [17].

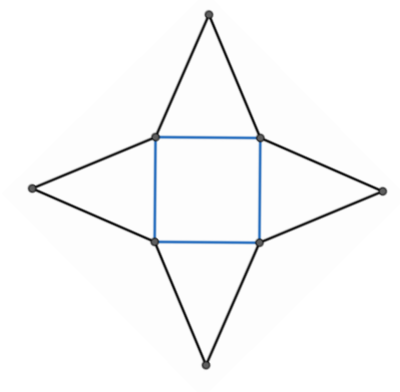


Рис. 2.1.2

А	Б	В	Г	Д
$100\sqrt{3}$	100	$400\sqrt{3}$	$100 \cdot (1+\sqrt{3})$	200

Такі завдання дозволяють перевірити знання учасників з даної теми та їх здатність застосовувати отримані знання в практичних завданнях. Успішне розв`язання таких завдань демонструє знання термінології, розуміння властивостей многогранників та їх елементів, а також здатність до логічного мислення.

Після закінчення школи учень також повинен мати певні компетентності, серед яких математична є фундаментальною в різних сферах діяльності. Тому на зовнішньому незалежному тестуванні часто зустрічаються задачі прикладного характеру, які дозволяють перевірити, наскільки учні вміють використовувати свої знання у реальних життєвих ситуаціях.

Завдання 19. ЗНО 2014. На площі міста встановили однакові бетонні ємності для квітів, виготовлені у формі прямокутних паралелепіпедів, виміри яких дорівнюють $40\text{ см}, 40\text{ см}, 50\text{ см}$ (див. рис. 2.1.3). Товщина кожної з чотирьох бічних стінок становить 5 см, а товщина днища – 10 см. Який об’єм бетону (у м^3) було використано для виготовлення 10 таких ємностей? Утратою бетону під час виготовлення знехтуйте [17].

А	Б	В	Г	Д
0,32 $м^3$	0,33 $м^3$	0,36 $м^3$	0,44 $м^3$	0,8 $м^3$

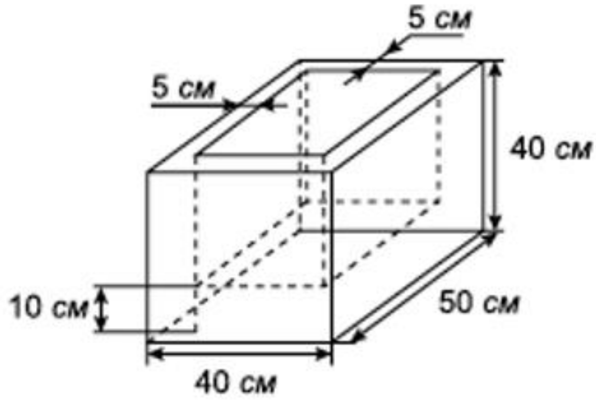


Рис. 2.1.3

Це завдання має практичне застосування і спрямоване на перевірку здатності розв'язувати стереометричні задачі, використовуючи формулу об'єму прямокутного паралелепіпеда. На рисунку зображена ємність для квітів, яка має форму прямокутного паралелепіпеда, з якого було вирізано менший паралелепіпед. Отже, об’єм цієї ємності шукатимемо як різницю об’ємів двох паралелепіпедів. Об’єм паралелепіпеда знаходиться за формулою $V = abc$, де a, b, c – виміри паралелепіпеда. Виміри першого паралелепіпеда задані: 40 см, 40 см, 50 см, а другого (порожня частина) знаходимо: $40 - 10 = 30$ см, $40 - 5 - 5 = 30$ см, $50 - 5 - 5 = 40$ см. Обчислюємо об’єм однієї ємності:

$$V_1 - V_2 = 40 \cdot 40 \cdot 50 - 30 \cdot 30 \cdot 40 = 4000(20 - 9) = 44000 \text{ см}^3.$$

Тоді об’єм 10 таких ємностей дорівнює 440000 см^3 або 0.44 м^3.

Тут враховано, що $1 \text{ м} = 100 \text{ см}, 1 \text{ м}^3 = 1000000 \text{ см}^3$.

Відповідь: Г.

Завдання 28. ЗНО 2009. Кімната має форму прямокутного паралелепіпеда (див. рис. 2.1.4) (ширина кімнати – 4 м, довжина – 5 м, висота – 2.5 м). Площа стін кімнати дорівнює 0,8 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда. Скільки фарби (у кг) потрібно для того, щоб повністю пофарбувати стіни і стелю цієї кімнати, якщо на 1 м^2 витрачається 0.25 кг фарби [13] ?

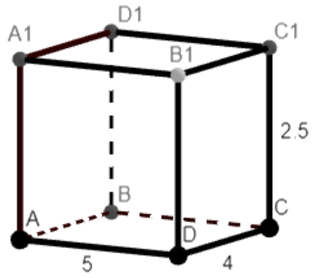


Рис. 2.1.4

Це завдання спрямоване на перевірку знання формул для обчислення площі поверхні паралелепіпеда та вміння розв'язувати текстові задачі, що вимагають застосування цих формул.

Площа бічної поверхні: $S_{\text{бічної}} = P_{\text{основи}} \cdot H = P_{ABCD} \cdot CC_1 = (5 + 4) \cdot 2 \cdot 2.5 = 45 \text{ м}^2$;

Площа стін становить 0.8 від площі бічної поверхні: $S_{\text{стін}} = 4.5 \cdot 0.8 = 36 \text{ м}^2$;

Площа стелі: $S_{\text{стелі}} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ м}^2$;

Площа, яку треба пофарбувати: $S = 36 + 20 = 56 \text{ м}^2$.

На 1 м^2 витрачається 0.25 кг фарби, отже $56 \cdot 0.25 = 14$ кг потрібно для того, щоб повністю пофарбувати стелю.

Відповідь: 14.

Завдання 32. ПЗНО 2018. Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 2.1.5) є ромб $ABCD$, у якому гострий кут A дорівнює α. Площина γ, що проходить через одну з вершин верхньої основи та меншу діагональ нижньої основи призми, утворює з площиною основи гострий кут β. Висота призми дорівнює h.

1. Побудуйте переріз заданої призми площиною γ.
2. Визначте площу цього перерізу [21].

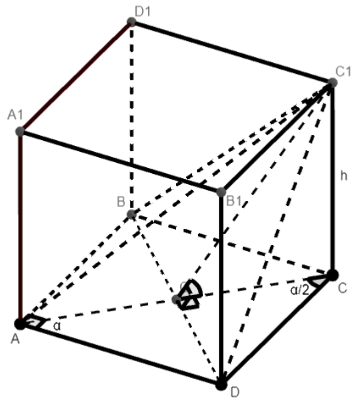


Рис. 2.1.5

Це завдання спрямоване на перевірку знання кута між площинами, перерізів многогранників та вміння використовувати властивості основних видів многогранників при розв'язуванні стереометричних задач.

1. Оскільки кут А — гострий, то BD є меншою діагоналлю нижньої основи. Оскільки площина γ проходить через BD і утворює з площиною основи гострий кут, то вона не проходить через вершини B_1 та D_1. Отже, площина проходить через BD і вершину C_1. Так як точки D і C_1 лежать в одній бічній грані, то переріз проходить по цій бічній грані по відрізку C_1D. Аналогічно, точки B і C_1 лежать в одній бічній грані, то переріз проходить по цій бічній грані по відрізку C_1B. Отже, трикутник C_1BD є шуканим перерізом.

2. Так як $ABCD$ – ромб, то його діагоналі перетинаються під прямим кутом. Тоді, так як відрізок CO перпендикулярний до BD, то за теоремою про три перпендикуляри похила C_1O також перпендикулярна до BD. Тоді кут C_1OC є кутом нахилу площини перерізу до площини основи і дорівнює β за умовою. З прямокутного трикутника C_1OC $C_1O = C_1C{:}\, sin\beta = h{:}\, sin\beta$, $OC = C_1C \cdot ctg\beta = h \cdot ctg\beta$. Так як діагоналі ромба є бісектрисами його кутів, то кут $OCD = \alpha{:}\,2$. Тоді з прямокутного трикутника OCD $OD = OCtg(\alpha{:}\,2) = h \cdot ctg\beta \cdot tg(\alpha{:}\,2)$. Так як діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл, то $BD = 2OD = 2h \cdot ctg\beta \cdot tg(\alpha{:}\,2)$. За формулою площі трикутника

$$S = \frac{1}{2}BD \cdot C_1O = \frac{1}{2}2hctg\beta tg\frac{\alpha}{2}\frac{h}{sin\beta} = h^2\frac{ctg\beta tg\dfrac{\alpha}{2}}{sin\beta}.$$

Відповідь: $S = h^2 \frac{ctg\beta tg\frac{\alpha}{2}}{sin\beta}$.

Завдання 32. ПЗНО 2013. Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$ (див. рис. 2.1.6), у якому більша діагональ $AC = 17$ см. Об'єм призми дорівнює $1020\,\text{см}^3$. Через діагональ AC і вершину B тупого кута верхньої основи призми проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут α. Знайдіть площу утвореного перерізу призми (у см^2), якщо $tg\ \alpha = 2.4$ [15].

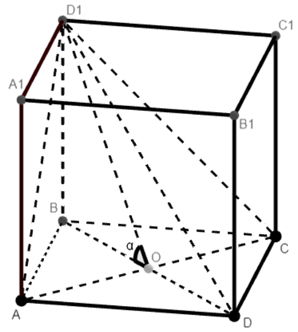


Рис. 2.1.6

Це завдання має на меті перевірити знання формул для обчислення об'ємів многогранників, а також вміння знаходити відстані та кути в просторі.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма, BB_1 – висота призми. $AC = 17$ см.

1. $(AB_1C) \cap (AA_1B_1) = AB_1$

$(AB_1C) \cap (BCC_1) = B_1C$

Отже, ΔAB_1C – даний переріз.

2. $BO \perp AC$ (властивість діагоналей ромба)

$B_1O \perp AC$ (за теоремою про три перпендикуляри)

$(BOB_1) \perp AC$. Отже, $\angle B_1BO = \alpha$ – лінійний кут відповідного двогранного кута між площинами (AB_1C) і (ABC).

3. ΔB_1BO $(\angle B = 90^0)$,

$BB_1 = BO \cdot tg\ \alpha = \frac{1}{2}BD \cdot tg\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2.4 \cdot BD = 1.2BD$.

4. $V = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{ABCD} \cdot BB_1$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{17}{2}BD$

$BB_1 = 1.2BD.$

За умовою, $V = 1020$ см^3. Отже, $\frac{17}{2}BD \cdot 1.2BD = 1020,$

$BD^2 = 100, \ BD = 10,$

$BO = \frac{1}{2}BD = 5$ см.

5. $BD = 1.2BD = 1.2 \ \cdot 10 = 12$ см.

6. ΔB_1BO $(\angle B = 90^0)$, звідси за теоремою Піфагора:

$B_1O^2 = BB_1^2 + BO^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \ B_1O = 13$ см.

$S_{\text{перерізу}} = S_{AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot B_1O = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 13 = 110.5$ см^2.

Відповідь: $S_{\text{перерізу}} = 110.5$ см^2.

Завдання 32. ЗНО 2017 (додаткова сесія). Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник $ABCD$ (див. рис. 2.1.7), у якому діагональ $AC = a, \ \angle BAC = \beta$. Площина, що проходить через вершину верхньої основи та діагональ нижньої основи призми, утворює з площиною основи гострий кут α. Визначте об’єм заданої призми [20].

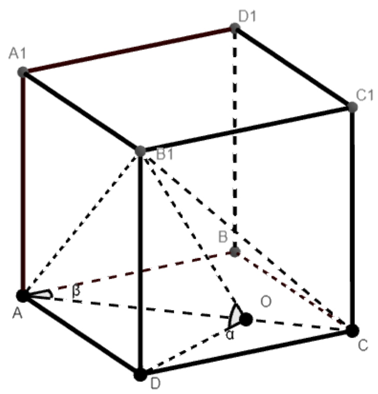


Рис. 2.1.7

Це завдання спрямоване на оцінку навичок знаходження кута між площинами, використання властивостей геометричних фігур для розв'язання задач, а також обчислення об'ємів геометричних тіл.

З прямокутного ΔABC: $AB = AC \cdot cos\beta \ = acos\beta, \ \ BC = ACsin\beta \ = asin\beta$. Тоді площа основи $S_{\text{осн}} = AB \cdot BC = acos\beta \cdot asin\beta = a2sin\beta cos\beta$. Проведемо перпендикуляр DO до діагоналі AC. Тоді за теоремою про три перпендикуляри похила D_1 також перпендикулярна до AC. Тоді кут D_1OD є

кутом нахилу площини AD_1C до площини основи і дорівнює α за умовою. Кути BAC і ACD рівні як внутрішні різносторонні. З прямокутного трикутника OCD: $OD = CD \cdot \sin \angle OCD = acos\beta sin\beta$. З прямокутного трикутника OD_1D: $DD_1 = OD \cdot tg\alpha = a \cdot cos\beta \cdot sin\beta \cdot tg\alpha$. Об'єм призми $V = S_{\text{осн}} \cdot H = a^2 \cdot sin\beta \cdot cos\beta \cdot \ a \cdot cos\beta \cdot sin\beta \cdot tg\alpha = a^3 \cdot sin^2\beta \cdot cos^2\beta \cdot tg\alpha$.
Так як $sin2\beta = 2sin\beta cos\beta$, то $sin^2 2\beta = 4 sin^2\beta\, cos^2\beta$, звідки $sin^2\beta\, cos^2\beta = sin^2 2\beta : 4$. Якщо підставити даний вираз у відповідь, можна отримати ще один варіант відповіді $\frac{1}{4}a^3 \cdot sin^2\beta \cdot tg\alpha$.

Відповідь: $V = \frac{1}{4}a^3 \cdot sin^2\beta \cdot tg\alpha$.

2.1.2 Задачі з тілами обертання

Головний акцент при вивченні цього розділу ставиться на розв'язування задач. Оскільки учні часто роблять помилки в зображенні циліндра, конуса і сфери, вчителю варто звернути їх увагу (без глибокого вдавання в теорію) на правильне зображення цих фігур, використовуючи готові рисунки. Для економії часу можна використовувати шаблони для їх відповідного зображення; також у розв'язанні деяких завдань більш раціональним є зображення осьового перерізу, а не самого тіла фігури [7].

Під час розв'язування таких задач важливо також активно проводити паралелі з попередньо вивченою темою «Многогранники». Зокрема, існують паралелі між циліндром і призмою, конусом і пірамідою, а також між зрізаним конусом і зрізаною пірамідою.

При застосуванні аналогічного підходу доцільно узагальнити поняття циліндра, використовуючи призму як аналогію. Таке узагальнення вивчається в курсі вищої математики і є розширенням вищезазначеного означення. Насправді, поняття конічних та циліндричних поверхонь вже формується учнями в курсі стереометрії, а в курсі вищої математики можна зосередитися на аналітичному викладі теорії поверхонь.

Як і у випадку з многогранниками, після розв’язання декількох типових задач учням варто запропонувати більш нестандартні варіанти розв’язування. Це сприятиме подальшому розвитку просторового мислення та творчої уяви, а також допоможе повторити раніше вивчений матеріал, дозволяючи учням застосовувати набуті навички в неочікуваних ситуаціях.

Особливу увагу варто приділити задачам, пов'язаним з кулею і сферою. З одного боку, ці фігури є інтуїтивно зрозумілими, але з іншого боку, їхнє застосування менше пов'язане з попередньо вивченими темами. Тому, якщо є можливість, рекомендується розглянути на факультативній основі задачі доведення Архімеда для об'ємів конуса і кулі [1], а також, якщо це можливо, пояснити значення формули площі сфери. Для пояснення цього матеріалу можна також використовувати відеоматеріали, які доступні відкритими джерелами.

В тестуванні ЗНО з теми «Тіла обертання» також можемо помітити всі можливі вищеперераховані формати завдань. Варто відмітити, що в завданнях з вибором однієї правильної відповіді та неструктурованих завданнях відкритої форми з короткою відповіддю найчастіше базуються на темах «Конус» та «Сфера», а відкритої форми з розгорнутою відповіддю – «Циліндр». Окрім того, майже кожного року учні отримують завдання на встановлення відповідності між фігурою та тілом обертання, яке утворено внаслідок обертання цієї фігури навколо прямої.

Розглянемо приклади деяких задач різних форматів з минулорічних тестувань зовнішнього незалежного оцінювання:

Завдання 21. ЗНО 2013. Установіть відповідність між фігурою $(1-4)$ і тілом обертання (А-Д), яке утворено внаслідок обертання цієї фігури навколо прямої, зображеної пунктиром (див. рис. 2.2.1) [16].

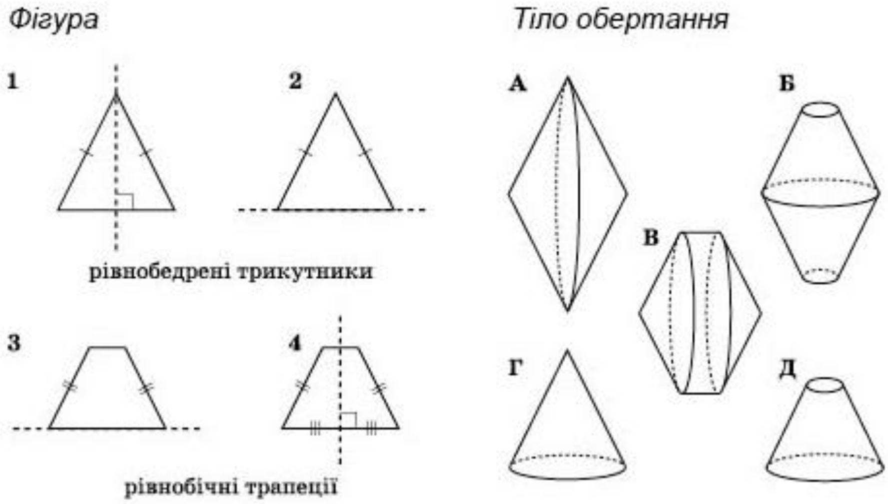


Рис. 2.2.1

Завдання 22. ЗНО 2011. На рисунку зображено розгортку циліндра (див. рис. 2.2.2). Знайдіть його об’єм [15].

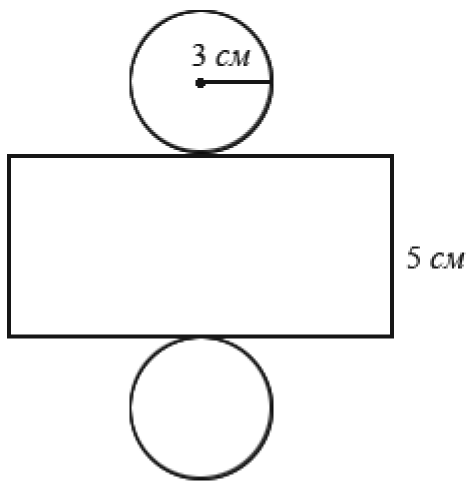


Рис. 2.2.2

А	Б	В	Г	Д
9 $см^3$	15π $см^3$	30π $см^3$	36π $см^3$	45π $см^3$

Метою цього завдання є перевірка здатності учнів обчислювати об'єм циліндра.

Об’єм циліндра обчислюємо за формулою $V = \pi R^2 H$, де R – радіус основи, H – висота.

$R = 3$ см, $H = 5$ см.

$V = \pi R^2 H = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi$ см^3.

Відповідь: Д

Відповідь: 72.

Завдання 23. ЗНО 2018. Циліндр і конус мають рівні об'єми та рівні радіуси основ. Площа основи циліндра дорівнює 25π см^2, а його об'єм - 100π см^3 (рис. 2.2.3). До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження [22].

Початок речення		*Закінчення речення*	
1	Висота циліндра дорівнює	**А**	4 *см*
2	Висота конуса дорівнює	**Б**	5 *см*
3	Радіус основи циліндра дорівнює	**В**	8 *см*
4	Твірна конуса дорівнює	**Г**	12 *см*
		Д	13 *см*

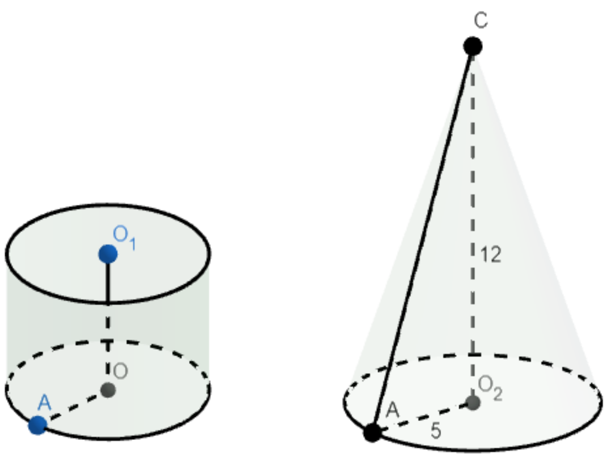


Рис. 2.2.3

Це завдання спрямоване на перевірку вашого розуміння властивостей тіл і поверхонь обертання, а також вашу вміння розв'язувати задачі, пов'язані з обчисленням об'ємів геометричних тіл.

1. $S_{\text{осн.цил.}} = \pi R^2 = 25\pi,\ R^2 = 25\pi,\ R = 5$ см.

$R_{\text{осн.цил}} = R_{\text{к}} = 5$ см. Отже, $3 - \text{Б}$.

2.$V_ц = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = 100\pi$ см^3, $\frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot h = 100\pi$, $H = 4$ см, отже, відповіддю буде $1 - А$.

3. $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = 100\pi$ см^3,$\frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot h = 100\pi$, $h = 12$ см, отже $2 - Г$.

4. ΔBO_2C $(\angle O_2 = 90°)$, за теоремою Піфагора:

$BC^2 = O_2C^2 + O_2B^2 = 144 + 25 = 169$, $BC = 13$ см. Отже, $4 - Д$.

Відповідь: $1 - А$, $2 - Г$, $3 - Б$, $4 - Д$.

Завдання 20. ЗНО 2015 (додаткова сесія). На рисунку (див. рис. 2.2.4) зображено осьовий переріз світлодіодної лампи. Активна поверхня цієї лампи, через яку відбувається випромінювання світла, є тілом обертання, утвореним обертанням відрізка AB та чверті кола BC навколо осі l. Використовуючи зазначені на рисунку дані, обчисліть площу активної поверхні світлодіодної лампи. Виберіть відповідь, найближчу до точної [19].

А	Б	В	Г	Д
39 *см*^{2}	42 *см*^{2}	45 *см*^{2}	48 *см*^{2}	51 *см*^{2}

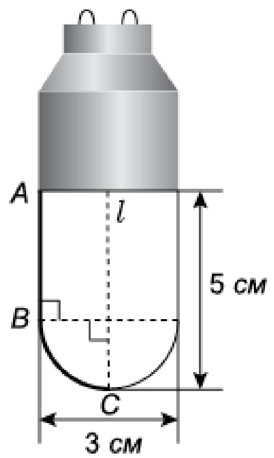


Рис.2.2.4

Це практично-орієнтоване завдання, яке перевіряє здатність здобувачів освіти обчислювати площу поверхні, утвореної обертанням відрізка та чверті кола навколо заданої осі. Воно вимагає використання формул для розрахунку бічної поверхні циліндра та площі сфери.

Площа активної поверхні світлодіодної лампи, зображеної на рисунку, є сумою площі бічної поверхні циліндра та площі півсфери. Площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням відрізка AB навколо осі l, обчислюємо за формулою: $S = 2\pi Rh$. Діаметр $2R = 3$ см, отже $R = 1.5$ см, висота циліндра $h = 5 - 1.5 = 3.5$ см. Підставивши ці значення у формулу, отримаємо $S = 3 \cdot 3.5\pi = 10.5\pi$ см^2. Площу півсфери, утвореної обертанням чверті кола BC навколо осі l, обчислюємо за формулою: $S = \frac{1}{2}(4\pi R^2) = \frac{1}{2}\pi(2R^2) = \frac{9}{2}\pi = 4.5\pi$ см^2. Тоді площа шуканої поверхні дорівнюватиме: $10.5\pi + 4.5\pi = 15\pi \approx 15 \cdot 3{,}14 = 47{,}1$ см^2. Отже, найближчою до точної є відповідь 48 см^2.

Відповідь: Г.

Завдання 32. ЗНО 2021. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник $ABCD$, сторона AD якого лежить у нижній основі циліндра (див. рис. 2.2.5). Діагональ AC перерізу дорівнює d і утворює з площиною нижньої основи циліндра кут β. На колі нижньої основи вибрано точку K так, градусна міра дуги дорівнює 90° [24].

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндр і вкажіть кут γ між площиною (KBD) і площиною нижньої основи циліндра. Обґрунтуйте його положення.

2. Визначте кут γ.

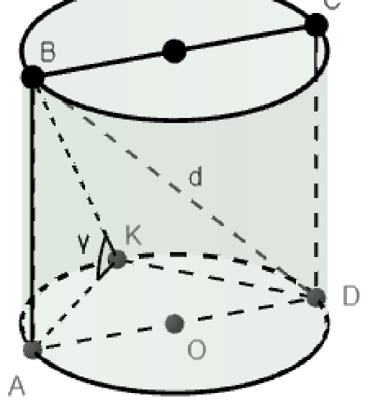


Рис. 2.2.5

1. Нехай на рисунку зображено циліндр з віссю OO_1 та радіусом основи OD. $ABCD$ – осьовий переріз циліндра. AC - діагональ перерізу, $AC = d$, $\angle CAD = \beta$.

$\angle AOK = 90°$, $\angle AKD = 90°$ як вписаний, що спирається на діаметр, тоді $AK \perp KD$, AK – проекція похилої BK на площину (ADK), отже за теоремою про три перпендикуляри $BK \perp KD$, тоді кут BKA – лінійний кут двогранного кута з ребром KD між площинами (ADK) та (KBD), $\angle BKA = \gamma$.

2. $CD = AC \cdot sin\angle CAD$, $CD = d \cdot sin\beta$,

$AD = AC \cdot cos\angle CAD$, $AD = d \cdot cos\beta$,

У ΔADK $\angle AKD = 90°$, $OK \perp AD$,

OK – медіана і висота, отже $AK = KD$, $\angle OAK = \angle ODK = 45°$.

$AK = AD \cdot sin\angle ADK$, $AK = d \cdot cos\beta \cdot sin45°$,

$$AK = \frac{d \cdot cos\beta \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

У ΔABK $\angle BAK = 90°$, $tg\angle BKA = \frac{AB}{AK}$,

$tg\angle BKA = \frac{d \cdot sin\beta \cdot 2}{d \cdot cos\beta \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} tg\beta$,

$\gamma = \angle BKA = arctg\sqrt{2}\beta$.

Відповідь: $arctg\sqrt{2}\beta$.

Завдання 33. ЗНО 2014. Через точки A і B, що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірний, проведено площину, паралельну вісі циліндра (див. рис. 2.2.6). Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа утвореного перерізу $40\sqrt{21}$ см^2. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює 200π см^2 [17].

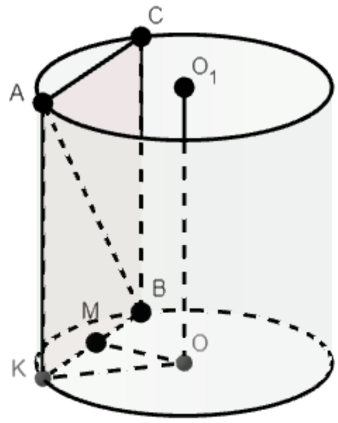


Рис. 2.2.6

Площина, що паралельна вісі циліндра, здійснює його переріз, в результаті якого утворився прямокутник $AKBC$ з діагоналлю, яка дорівнює шуканому відрізку AB. З точки O, центра нижньої основи, проведемо перпендикуляр до площини (AKB) – відрізок $OM = 2$ см. За умовою задачі $S_{AKBC} = 40\sqrt{21}$ см^2, а $S_б = 200\pi$ см^2.

Введемо позначення: $AC = a,\ AK = h,\ OK = R.$ Тоді, в даних позначеннях, умова задачі перепишеться наступним чином: $ah = 40\sqrt{21}$, $2\pi Rh = 200\pi$. Звідки знайдемо співвідношення між величинами a та R: $ah = 40\sqrt{21}$, $Rh = 100 \Rightarrow \frac{a}{R} = \frac{40\sqrt{21}}{100} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$.

Розглянемо трикутник OMK $\left(\angle M = 90°,\ MK = \frac{1}{2}KB = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}\right)$ та за теоремою Піфагора складемо нове співвідношення між величинами a та R:

$OK^2 = MK^2 + OM^2,\ R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^2.$ Із співвідношення $\frac{a}{R} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$ виразимо R: $R = \frac{5a}{2\sqrt{21}}$ та підставимо його в отриману рівність. Отримаємо:

$$\left(\frac{5a}{2\sqrt{21}}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^2;\ \frac{25a^2}{84} - \frac{a^2}{4} = 4;\ \frac{25a^2 - 21a^2}{84} = 4;\ \frac{4a^2}{84} = 4 \to a^2 = 84$$

Таким чином, сторона прямокутника перерізу становить: $a = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ (см). З рівності $ah = 40\sqrt{21}$ знайдемо висоту циліндра, підставивши отримане значення $a = 2\sqrt{21}$: $h = \frac{40\sqrt{21}}{2\sqrt{21}} = 20$ (см).

Для знаходження довжини шуканого відрізка AB, розглянемо ΔACB ($\angle C = 90°$, $AC = 2\sqrt{21}$, $CB = AK = 20$ см). За теоремою Піфагора: $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{84 + 400} = \sqrt{484} = 22$ см.

Відповідь: 22 см.

2.1.3 Задачі на комбінації геометричних тіл

Серед задач закритої частини зовнішнього незалежного оцінювання з математики, іноді можуть зустрітися завдання, які вимагають розв’язання задач на комбінацію різних тіл.

Розв'язання завдань ЗНО з теми «Комбінації геометричних тіл» базується на використанні понять, які відображають певні відношення між тілами. Ці відношення включають «тіло, вписане в інше тіло» і «тіло, описане навколо іншого тіла». При розв'язуванні задач, що включають комбінацію кулі з многогранниками (призма, піраміда) та тілами обертання (циліндр, конус), виникають значні труднощі. Для повноцінного розуміння необхідно доповнити ці означення наступними фактами. Під час розв'язування задач, пов'язаних з вписаною і описаною кулею, необхідно пояснити місцезнаходження її центру. Важливу роль у цьому поясненні відіграє очевидний факт, який випливає з означень: центр кулі, вписаної в многогранник, рівномірно віддалений від усіх граней, тобто є точкою перетину півплощин, що проходять через ребра двогранного кута, утвореного двома суміжними гранями, що ділять цей кут пополам; центр кулі, описаної навколо многогранника, рівномірно віддалений від усіх його вершин, тобто є точкою перетину площин, що проходять через середини ребер, перпендикулярно до них.

Оскільки круглі тіла зображуються в ортогональній проекції, то многогранники, що поєднуються з ними в комбінації, також мають бути зображені в ортогональній проекції. Основним правилом для побудови комбінацій тіл є розпочинати побудову з зображення круглого тіла [25]. У випадку комбінацій основних геометричних тіл неможливо визначити конкретне місце в теоретичному викладі стереометрії. Багато з них зображуються лише при розв'язуванні конкретних задач, тому деякі комбінації не пов'язані з окремими темами навчального матеріалу.

При розв'язуванні геометричних задач відсутні стандартні алгоритми, і вибір відповідної теореми з їх великої кількості може бути складним. Це пов'язано з тим, що не кожна геометрична задача може бути розв'язана за допомогою певної формули. Для більшості задач необхідно використовувати різноманітні факти теорії, доводити різні твердження, які справедливі лише при певному розташуванні елементів фігур. Навіть з глибоким розумінням теорії, набуття навичок у розв'язуванні задач можливе лише шляхом розв’язування великої кількості задач, починаючи з простих і поступово переходячи до складніших. Головне полягає в тому, щоб володіти різними методами розв'язання задач.

Можливі варіанти комбінацій включають:

1. Поєднання многогранника з іншим многогранником, наприклад, призми у піраміду або піраміди у призму.
2. Комбінація многогранника з тілом обертання, наприклад, піраміди у конус або конуса у піраміду, циліндра у піраміду або піраміди у циліндр, а також кулі у піраміду або піраміди у кулю, і т.д.
3. Комбінація двох тіл обертання, наприклад, або описання кулі навколо циліндра, конуса, і т.д.

Це лише кілька можливих варіантів комбінацій, які можуть виникати у геометричних задачах. Розглянемо декілька видів комбінацій на прикладі задач, які зустрічались на ЗНО за останні роки.

Завдання 25. ЗНО 2008. У склянку циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок (див. рис. 2.3.1). Визначте відношення об’єму води, яка залишилась у склянці, до об’єму води, яка вилилась зі склянки [12].

А	Б	В	Г	Д
1 : π	2 : π	1 : 2	2 : 3	1 : 3

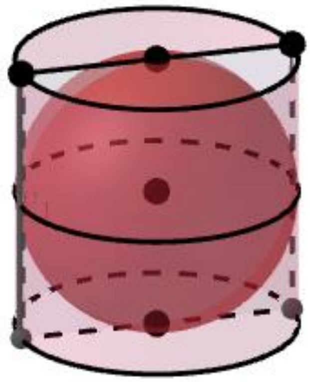


Рис. 2.3.1

Згідно малюнку можемо помітити, що висота дорівнюватиме діаметру основи, тому $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$. Об'єм води, що вилилась, рівний об'єму кулі, тобто $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Звідси отримаємо, що об'ємом води, що залишилась буде різниця цих двох об'ємів: $V_3 = 2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$. Тоді відношення $V_2 : V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{2}{3}\pi R^3 = 2 : 1$.

Відповідь: В.

Завдання 33. ЗНО 2011. У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і основою 18 см, вписано конус (див. рис. 2.3.2). Знайдіть площу S бічної поверхні конуса (у см^2), якщо всі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом 60° . У відповіді запишіть значення $\frac{S}{\pi}$ [14].

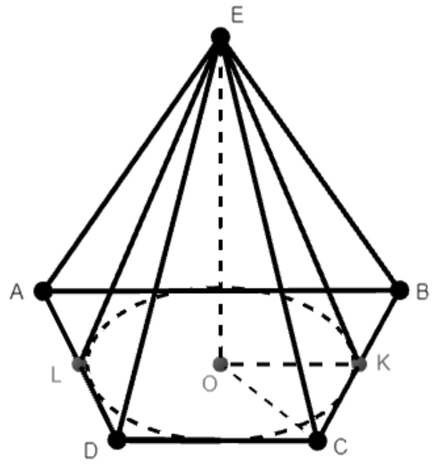


Рис. 2.3.2

У даному завданні перевіряються знання про властивості многогранників та тіл обертання, а також формули для обчислення площ поверхонь тіл обертання.

Варто зазначити, що конус саме вписаний у піраміду, що означає, що основа конуса (круг) вписана в основу піраміди - рівнобічну трапецію (див. рис. 2.3.3). Однак, необхідною і достатньою умовою вписаності кола в чотирикутник є рівність сум протилежних сторін чотирикутника. Це означає, що сума основ трапеції дорівнює сумі її бічних сторін. В результаті отримуємо, що невідома основа дорівнює: $a + 18 = 13 + 13 \rightarrow a = 8$.

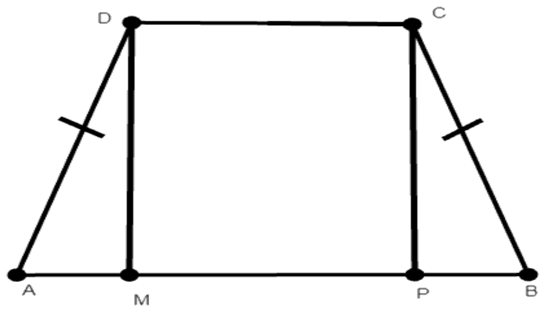


Рис. 2.3.3

Далі розв'язання випливає з рисунка, де обчислюється висота рівнобічної трапеції за стандартним алгоритмом: $18 - 8 = 10$; $10 : 2 = 5$; $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тепер знаходимо радіус вписаного у трапецію кола, адже вона буде рівною половині висоти, тобто $r = 6$. Звідси площа основи:

$S_{осн} = \pi r^2 = 36\pi$. Тоді площа повної поверхні $S_{повн} = \frac{S_{осн}}{cos\varphi} = \frac{36\pi}{cos60^0} = 72\pi$. І за умовою задачі відповіддю буде вираз $\frac{S}{\pi} = 72$.

Відповідь: 72.

Завдання 30. ЗНО 2015 (додаткова сесія). Бічна грань правильної чотирикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом 60^0 (див. рис. 2.3.4). Визначте об’єм (у см^3) цієї піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі дорівнює 3 см [18].

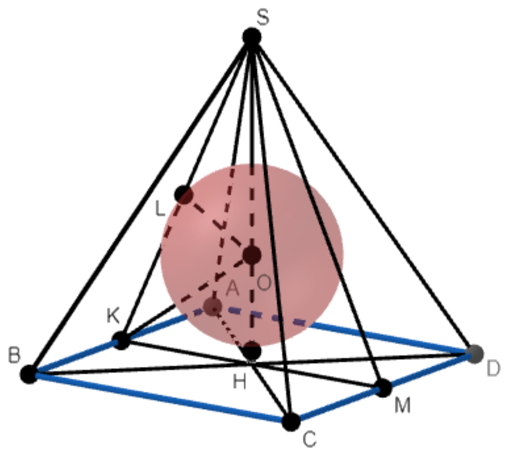


Рис. 2.3.4

Це завдання призначене для перевірки навичок у розв’язуванні задач, пов'язаних з комбінаціями геометричних тіл. Зокрема, воно вимагає обчислення об'єму правильної чотирикутної піраміди за відомим радіусом вписаної кулі та кутом нахилу бічної грані до основи піраміди.

Нехай $SABCD$ – дана правильна чотирикутна піраміда, її основа – квадрат $ABCD$, вершина S проектується в точку H перетину діагоналей квадрата, K, M – середини AB і CD, відповідно; $KH \perp AB$. За умовою $\angle SKH = 60^o$, $OH = OL = 3$ см.

Для того, щоб знайти об’єм заданої піраміди $SABCD$, нам необхідно знайти площу основи $S_{осн}$ та її відповідну висоту SH.

$\angle OKH = \angle OKL = \frac{1}{2}\angle SKH = 30^o$ (з рівності прямокутних трикутників ΔOHK і ΔOKL за гіпотенузою і катетом). Розглянемо прямокутний ΔOHK:

$OH = 3$ см, $\angle OKH = 30^o$. Звідси $HK = OH \cdot ctg30^o = 3\sqrt{3}$ (см). Визначимо висоту SH з прямокутного ΔSHK: $SH = HK \cdot tg\angle HKS = HK \cdot tg60^o = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$ (см).

Під час обчислення $S_{осн}$ піраміди необхідно враховувати співвідношення: $AD = 2HK$. Тоді $S_{осн} = (2HK)^2 = \left(2 \cdot 3\sqrt{3}\right)^2 = 108$ (см^2).

Отже, шуканий об'єм піраміди $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 9 = 324$ (см^3).

Відповідь: 324 см^3.

2.2 Методика розробки тестів з тем «Многогранники» та «Тіла обертання» та їх критерії оцінювання

Сьогодні більшість користувачів мережі успішно використовують хмарні технології та сервіси для якісної розробки тестів. Основне завдання такого виду діагностики полягає не лише в перевірці рівня знань респондентів, а й у виявленні типових труднощів у засвоєнні матеріалу. Однак для природничих та технічних спеціальностей формування тестових завдань може становити певну складність, оскільки важко знайти універсальний сервіс, який би дозволяв додавати математичні формули, вирази та рисунки.

Однією з найзручніших платформ для створення тестів та анкет є хмарний додаток Google Forms, який доступний у спеціальному інструментарії Google Drive. Використання Google Forms дозволяє швидко і просто створювати тести. У додатку потрібно лише записати завдання, обрати тип відповідей, опублікувати форму з завданнями і отримати миттєвий аналіз відповідей респондентів після завершення тестування. Створений тест можна надіслати електронною поштою, вбудувати на сторінку сайту за допомогою фрейму або просто поділитися посиланням на нього.

За допомогою Google Forms можна створювати різні види тестових запитань, такі як завдання закритої форми з множинним вибором (вибір однієї правильної відповіді), прапорці (вибір декількох правильних відповідей), введення тексту, вибір зі списку, шкала, сітка, дата та час [27].

Створення тестів у Google Forms надає можливість вчителю аналізувати відповіді учнів на уроці та передбачити можливі помилки. Вчителю достатньо відкрити таблицю зі зібраними відповідями учнів і обговорити можливі способи розв'язання задач та помилки. Оскільки найбільші труднощі зазвичай виникають під час створення математичних моделей задач, рекомендується підбирати тести таким чином, щоб учні мали надати рівняння, необхідні для розв'язання задачі. Це сприятиме більшій кількості розв'язаних задач на уроці. Для залучення уваги учнів доцільно обирати задачі, які стосуються їх особистих ситуацій, тому вчитель може переформулювати умови задач таким чином, щоб вони були конкретно спрямовані на клас та учнів. Такий підхід мотивує учнів шукати шляхи розв'язання поставлених задач з більшим інтересом [32].

Переваги використання Google Forms:

- учні можуть легко проходити тести онлайн, перейшовши за посиланням;
- тести можна вбудовувати в блоги або на сайти, надсилати електронною поштою або через популярні месенджери, такі як Viber або Telegram;
- існує набір тем для оформлення тестів, що дозволяє їх налаштовувати за власними потребами;
- збирання статистики з відповідей учасників тестування;
- можливість спільного доступу для редагування тесту між декількома користувачами;
- автоматична оцінка відповідей, підрахунок балів, можливість додавати коментарі до відповідей та відкладений показ результатів;
- індивідуальні налаштування, які дозволяють показувати питання на основі відповідей користувачів;

- інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, можливість копіювати питання з текстових редакторів для зручності створення тестів.

Недоліки використання Google Forms:

- потреба мати аккаунт Google для використання сервісу;
- система оцінювання відповідей не є досконалою і деякі типи питань не можуть бути оцінені автоматично;
- обмежена кількість типів питань і обмежені можливості редагування питань;
- для вставки математичних формул потрібно встановлювати окремий додаток або вставляти їх у вигляді зображення, що займає багато часу.

Тести, створені у Google Forms, є корисними для використання як домашні завдання для учнів старших класів з метою підготовки до ЗНО. Також їх можна ефективно використовувати на початку уроку для перевірки домашнього завдання та актуалізації опорних знань.

Використання Google Forms для тестування під час вивчення математики в старших класах має численні переваги. Воно сприяє набуттю ключових компетентностей, зокрема математичної, оптимізує навчальний процес, підвищує доступність та наочність навчання, а також підготовку до успішного складання ЗНО.

Важливо відзначити, що Google постійно розширює можливості Google Forms, роблячи їх все більш зручними для використання.

Для забезпечення самостійної роботи на уроці можна використовувати гаджети учнів. Діти можуть відкрити завдання на своїх смартфонах, записати необхідні відомості у зошитах та вказати правильну відповідь. Вчитель зможе оцінити їх зусилля негайно під час уроку. Для швидкого доступу до тесту рекомендується створити QR-код за допомогою онлайн-генератора QR-кодів, які доступні в Інтернеті, і відобразити його на мультимедійній дошці. Учні можуть розпочати виконання завдань, просто сканувавши цей код.

Слід враховувати, що форма роботи на уроці з використанням гаджетів не є універсальною і має свої обмеження. При плануванні такого уроку важливо врахувати можливості учнів щодо роботи з гаджетами. Варто мати на увазі, що не всі учні мають гаджети, тому на випадок таких ситуацій можна мати кілька друкованих копій тесту. Крім того, перед використанням гаджетів необхідно перевірити, чи всі учні мають доступ до Інтернету, якщо це необхідно для виконання завдань.

Ключовим мотиватором оволодіння знаннями залишаються оцінки. На даному етапі педагоги надають здобувачам освіти чіткі критерії оцінювання, щоб мотивувати їх до навчання за допомогою позитивних оцінок. При формулюванні тестових завдань для оцінювання ключової комунікативної компетентності важливо чітко визначити критерії оцінювання учнів певної вікової категорії. Це означає описати необхідні вміння, що є складниками компетентності й підлягатимуть оцінюванню. При створенні тесту також потрібно дотримуватись принципів і правил створення якісного тесту, а також використовувати теоретико-практичні положення щодо вимірювання компетентностей.

Використання тестових технологій для оцінювання рівнів сформованості ключової комунікативної компетентності має важливе значення. Результатом тестування учнів повинно бути не лише оцінювання у вигляді балів, а й можливість виявити загальні тенденції щодо розвитку складників цієї компетентності, зокрема відносно засобів і методів формування її. Також важливо прогнозувати подальший розвиток компетентності в учнів, коригувати виявлені недоліки та проводити аналіз результатів тестування, співвідносячи їх з іншими психолого-педагогічними методами діагностики.

Для узагальнення, систематизації та підготовки до ЗНО та НМТ на платформі Google Forms було створено тестування за темами «Многогранники» та «Тіла обертання» (Додаток А). Комплексне тестування складається з 4 груп тестових завдань, в якому представлені різні формати завдань зовнішнього незалежного оцінювання з дисциплін. За кожне правильно виконане завдання учень має змогу отримати максимальні бали відповідно до розподілу:

Частина тесту	№1	№2	№3	№4
К-сть балів за правильно виконане завдання	0,5 б	1,5 б	1,5 б.	1.5 б.

Застосування тестових технологій дозволяє оцінити рівні сформованості складників ключової комунікативної компетентності, якщо використовуються практично спрямовані тестові завдання різних форматів, що відповідають потребам оцінювання. Ці завдання дозволяють визначити спроможність учнів користуватися предметною термінологічною лексикою в нестандартних умовах. Також вони допомагають оцінити уміння учнів взаємодіяти у процесі міжособистісної комунікації під час розв'язування поставлених завдань, аналізувати, оцінювати й інтерпретувати словесну, числову, символьну інформацію. Також вони дозволяють виявити, за допомогою мовних засобів, ставлення учнів до цієї інформації відповідно до їх набутого досвіду.

ВИСНОВКИ

У процесі написання кваліфікаційної роботи були успішно виконанні всі поставлені завдання, що свідчить про досягнення поставленої мети з теми дослідження. В результаті проведених досліджень були отримані наступні результати:

1. Виділені певні відмінності в означенні многогранників. Скажімо призму можна означити як два многогранника, що суміщаються паралельним перенесенням і відрізків, що сполучають відповідні вершини цих многокутників. Такий підхід є загальним, для подальшого означення піраміди, циліндра, конуса. Також виділено і інше означення, яке частіше застосовується, в якому призма розглядається як многогранник, у якого дві грані — рівні n-кутники, розташовані в паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми. Досліджено, що циліндр, конус, сфера у всіх шкільних підручниках розглядаються як тіла обертання певних фігур площини.
2. Порівняльна характеристика підручників показала, що залежно від рівнів всі вони охоплюють теми навчальної програми і різняться лише послідовністю викладення.
3. Теми вивчення многогранників та тіл обертання у профільних та поглиблених класах не мають відмінностей, лише різняться кількістю відведених годин.
4. При побудові рисунків та знаходженні двогранних кутів у многогранників виділено теорему, яка найчастіше використовується, а саме теорему про три перпендикуляри. А для побудови пірамід і знаходженні невідомих елементів слід приділити велику увагу властивостям точки рівновіддаленої від сторін та від вершин многокутника (вивчається у 10 класі).
5. Особливу увагу необхідно приділити розгорткам стереометричних фігур та знаходженні площ отриманих фігур площини.

Тема «Многогранники» та «Тіла обертання» в ЗНО представлені з урахуванням певних методичних особливостей. Завдання з цієї теми можуть бути представлені у різних форматах тестових завдань, які включають:

- Завдання з вибором однієї правильної відповіді: Учню пропонується питання, і він має обрати один правильний варіант відповіді з запропонованих варіантів (представлені різноманітні задачі як на знаходження елементів просторових фігур, їх площ поверхонь та об'ємів, так і задачі пов'язані з їх розгортками.
- Завдання на встановлення відповідності: Учню надається дві колонки зі списками елементів, і йому потрібно встановити відповідність між ними.
- Завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю: Учню задається питання, на яке він має дати розгорнуту відповідь (наприклад побудову кута чи перерізу) та знайти невідому, використовуючи декілька дій.

На підставі отриманих результатів дослідження можна зробити такі висновки:

1. Засоби навчання, такі як моделі просторових фігур та наочні приладдя, допомагають вчителеві краще пояснити матеріал і розвивати предметну математичну компетентність та просторову уяву учнів.
2. Вміння будувати зображення стереометричних фігур на площині є важливими в багатьох професійних галузях. Відповідальність за їх формування лежить на курсі геометрії, зокрема, стереометрії. Розвиток вмінь учнів у побудові зображень стереометричних фігур та їх перерізів є важливим для розв'язування задач і доведення теорем.
3. Розподілення вміння будувати зображення просторових фігур та їх перерізів на елементарні навички, які поступово формуються в більш складні, до тих пір, поки учні не оволодіють узагальненими вміннями до кінця вивчення курсу стереометрії. Ця ієрархія вмінь має бути чітко визначена в програмі з геометрії для старшої школи.

4. Розв'язування стереометричних задач, зокрема з теми «Многогранники» та «Тіла обертання», активізує просторову уяву учнів, сприяє засвоєнню базових понять і відношень, а також економить час на уроці.

5. Особлива увага повинна бути приділена задачам на знаходження об'ємів многогранників, оскільки вони вимагають застосування вивчених формул і методів. Наприклад, учні можуть бути запитані про об'єм куба, паралелепіпеда, піраміди або іншого многогранника. Знаючи формули для обчислення об'єму цих фігур, учні можуть застосувати їх для розв’язування задач.

Слід зазначити, що для успішного вивчення многокутників та тіл обертання важливо в свою чергу застосовувати методи активного навчання, зокрема розв’язування задач моделювання та мультимедійні методи, які дозволяють учням більш ефективно засвоювати матеріал, але ця методика вимагає окремого детального дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Архімед. Про кулю і циліндр / Архімед. – Сіракузи, 225 до н. е.

2. Бевз Г. П.. Методика розв’язування стереометричних задач: Посібник для вчителя. – К.: Рад. шк., 1988. – 192 с.

3. Бевз Г.П. Геометрія у загальноосвітній школі // Математика в школах України. – 2003. – № 1, 2. – С. 1 – 6.

4. Беседін Б. Б. Використання наочності на уроках математики / Б. Б. Беседін, О. В. Смоляков. // Методика викладання математики в ЗОШ та ВНЗ. – 2017. – №7. – С. 103–109.

5. Боровик В. Н. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник / В.Н.Боровик, В. П. Яковець. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.

6. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019. — 208 с.

7. Геометрія 11кл.: підруч.для загальноосвіт.навч.закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г.П. Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К.: Генеза, 2011. – 256 с.

8. Геометрія. 7 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / В. Ф. Бевз, В. О. Бевз, О. В. Глазова. - К.: Генеза, 2014. - 256 с.

9. Геометрія. 8 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / В. Ф. Бевз, В. О. Бевз, О. В. Глазова. - К.: Генеза, 2015. - 256 с.

10. Геометрія: (проф. рівень) : підруч. для 11-го закл. заг. серед. освіти/ О.С. Істер, О.В. Єргіна. – К.: Генеза, 2019. – 288 с.

11. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б.Полонський та ін.–Х.: Гімназія, 2019.–240 с.:іл.

12. Завдання з математики (ЗНО-2008): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/292/

13. Завдання з математики (ЗНО-2009): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/151/

14. Завдання з математики (ЗНО-2011): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/122/

15. Завдання з математики (ПЗНО-2013): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/126/

16. Завдання з математики (ЗНО-2013): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/1/

17. Завдання з математики (ЗНО-2014): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/138/

18. Завдання з математики (ЗНО-2015): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/154/

19. Завдання з математики (ЗНО-2015, додаткова сесія): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/166/

20. Завдання з математики (ЗНО-2017, додаткова сесія): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/256/

21. Завдання з математики (ПЗНО-2018): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/290/

22. Завдання з математики (ЗНО-2018): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/298/

23. Завдання з математики (ЗНО-2019): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/346/

24. Завдання з математики (ЗНО-2021): [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://zno.osvita.ua/mathematics/469/

25. Ленчук І. Г. Методичні аспекти погодження в наочній стереометрії з практикою теорії комбінацій двох тіл: [Електрон, ресурс]. — Режим доступу: http://eprints.zu.edu.ua/766/1/01ligkdt.pdf

26. Литвинова С. Г. Хмарні сервіси Office 365 : навч. посіб. / С. Г. Литвинова, О. Спірін, Л. Анікіна– К. : Компринт, 2015. – 168 с.

27. Математика. 5 клас: підруч. для закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Ч. :Гімназія, 2018 – 272с., с.137-138

28. Математика: підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М .Коломієць, З. О. Сердюк,. –К .: Видавничий дім «Освіта», 2017. –304 с.

29. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

30. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

31. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

32. Нова українська школа : концептуальні засади реформування середньої школи [Електронний ресурс] / Міністерство освіти і науки України. – 27/10/2016. – Режим доступу : http://goo.gl/P7eZzn

33. Синько Л. Розв’язування стереометричних задач. Посібник для учителя / Л. Синько. – Суми, 2011. – 190 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Тест-узагальнення за темою "Многогранники" Варіант 1

Тест націлений на узагальнення вивченого матеріалу за темою "Многогранники" та підготовку до ЗНО

Зірочка (*) указує, що запитання обов’язкове

1. Електронна адреса *

2. Напишіть ваше прізвище та ім'я *

Перейти до запитання 3

Тестування (Частина перша)

Питання даної частини містять лише одну правильну відповідь і оцінюється в 1 бал

3. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 24, апофема утворює з площиною основи піраміди кут 45°. Визначте довжину сторони основи цієї піраміди. *

Виберіть лише один варіант.

24

А

$16\sqrt{3}$

Б

$24\sqrt{2}$

В

48

Г

$48\sqrt{2}$

Д

4. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює а, діагональ бічної грані – d. *
Укажіть формулу для обчислення площі S бічної поверхні цієї призми.

Виберіть лише один варіант.

$$S_б = 3a\sqrt{d^2 - a^2}$$

- А

$$S_б = 3a\sqrt{d^2 + a^2}$$

- Б

$$S_б = 3ad$$

- В

$$S_б = a\sqrt{a^2 - d^2}$$

- Г

$$S_б = a\left(d^2 + a^2\right)$$

- Д

5. Цукерку циліндричної форми висотою 10 см і радіусом основи 1 см запаковано в коробку, що має форму правильної трикутної призми (див. рисунок). Основи циліндра вписано у відповідні основи призми. Основи коробки (призми) виготовлено з поліетилену, а всі її бічні грані – з паперу. Визначте площу паперу, витраченого на виготовлення такої коробки. Укажіть відповідь, найближчу до точної. Витратами паперу на з'єднання граней коробки знехтуйте. *

Виберіть лише один варіант.

55 см^2	75 см^2
А	Б

105 см^2

В

115 см^2

Г

135 см^2

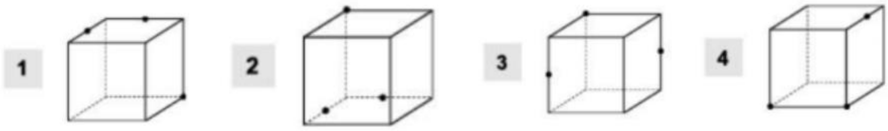
Д

Перейти до запитання 6

Тестування (Частина друга)

Частина містить завдання на встановлення відповідності, оцінюється в 1 бал за кожну правильну відповідь

6. На рисунках (1–4) зображено куб і три точки, що розміщені у вершинах * куба або є серединами його ребер. Установіть відповідність між кожним рисунком (1-4) та назвою фігури (А–Д), яка є перерізом куба площиною, що проходить через три задані точки:



У кожному рядку виберіть лише один варіант.

	Трикутник	Прямокутник	Трапеція	П'ятикутник	Ромб
1					
2					
3					
4					

7. Установіть відповідність між перерізами геометричних тіл (1-4) та їхніми назвами (А-Д) *

У кожному рядку виберіть лише один варіант.

	Круг	Коло	Шестикутник	Прямокутник	Трикутні
Діагональний переріз правильної шестикутної призми					
Переріз циліндра площиною, що перетинає його твірну і перпендикулярна до неї					
Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину та хорду основи					
Переріз сфери площиною, що проходить через дві різні точки сфери					

Перейти до запитання 8

Тестування (Частина третя)

Частина містить завдання відкритої форми з короткою відповіддю, і оцінюється в 2 бали

8. Прямокутний паралелепіпед з довжиною ребер 5 см, 7 см і 9 см складено з кубиків з довжиною ребра 1 см. Скільки доведеться забрати кубиків, щоб вилучити весь зовнішній шар товщиною в один кубик? *

9. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см. Обчисліть площу повної поверхні цієї піраміди (в см квадратних), якщо кут між апофемою та висотою піраміди дорівнює 30° *

10. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом 15°. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Радіус кулі, описаної навколо піраміди дорівнює 6 см. Обчисліть об'єм піраміди (в см куб.) *

Тестування (Частина четверта)

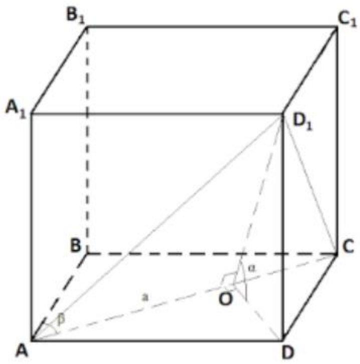
Частина містить завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю, і оцінюється в 4 бали

11. У правильній чотирикутній піраміді ABCD плоский кут при вершині S піраміди дорівнює β. Довжина апофеми піраміди дорівнює 6. *

1. Зобразіть на рисунку задану піраміду й укажіть лінійний кут γ двогранного кута при її бічному ребрі. Обґрунтуйте його положення.

2. Визначте кут γ.

12. Основою прямої призми ABCDA1B1C1D1 є прямокутник ABCD (див. рис.), у якому діагональ AC=a , кут BAC=β. Площина, що проходить через вершину верхньої основи та діагональ нижньої основи призми, утворює з площиною основи гострий кут α. Визначте об'єм заданої призми. *



Тест-узагальнення за темою "Многогранники" Варіант 2

Тест націлений на узагальнення вивченого матеріалу за темою "Многогранники" та підготовку до ЗНО

Зірочка (*) указує, що запитання обов'язкове

1. Електронна адреса *

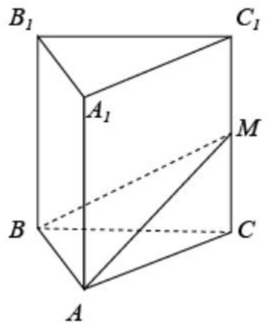
2. Напишіть ваше прізвище та ім'я *

Перейти до запитання 3

Тестування (Частина перша)

Питання даної частини містять лише одну правильну відповідь і оцінюється в 1 бал

4. Об'єм прямої трикутної призми ABCA1B1C1 дорівнює 48 см3. Точка M * - середина ребра CC1. Обчисліть об'єм піраміди MABC



Виберіть лише один варіант.

$6\ \text{см}^3$

А

$8\ \text{см}^3$

Б

$12\ \text{см}^3$

В

$16\ \text{см}^3$

Г

24 см^3

Д

5. Цеглина має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 25 см, 12 см, 6.5 см. Знайдіть масу m цеглини. (Для знаходження маси цеглини скористайтесь формулою m=pV, де V - об'єм, p=1.8 г/см3 - густина цегли) *

Виберіть лише один варіант.

$5,31$ кг

- А

$3,51$ кг

- Б

$3,5$ кг

- В

$3,41$ кг

- Г

3 кг

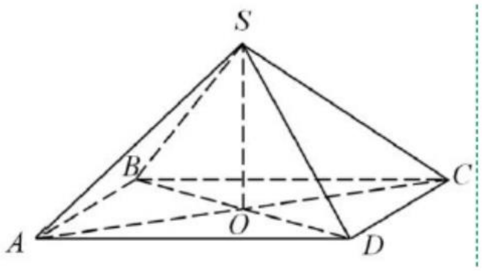
- Д

Перейти до запитання 6

Тестування (Частина друга)

Частина містить завдання на встановлення відповідності, оцінюється в 1 бал за кожну правильну відповідь

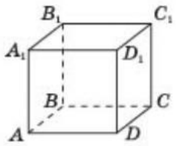
6. У правильній чотирикутній піраміді SABCD (див. рисунок) SO – висота, кут SCO =30°, AO= $\sqrt{6}$. Увідповідніть початок речення (1–3) та його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження. *



У кожному рядку виберіть лише один варіант.

	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	$4\sqrt{2}$
Довжина діагоналі AC дорівнює	◯	◯	◯	◯	◯
Довжина висоти SO дорівнює	◯	◯	◯	◯	◯
Довжина ребра AS дорівнює	◯	◯	◯	◯	◯

7. На рисунку зображено куб ABCDA1B1C1D1. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А - Д) так, щоб утворилося правильне твердження *



У кожному рядку виберіть лише один варіант.

	паралельна площині AA1B1B	перпендикулярна площині AA1B1B	належить площині AA1B1B	має з площиною AA1B1B лише дві спільні точки	утворює з площиною AA1B1B кут 45°
Пряма CB	◯	◯	◯	◯	◯
Пряма CD1	◯	◯	◯	◯	◯
Пряма AC	◯	◯	◯	◯	◯
Пряма A1B	◯	◯	◯	◯	◯

Перейти до запитання 8

Тестування (Частина третя)

Частина містить завдання відкритої форми з короткою відповіддю, і оцінюється в 2 бали

8. Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює 30°. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди (у см2), якщо радіус кола, вписаного в її основу,
дорівнює 3 см . *

9. Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює
$4\sqrt{3}$ см, гострий кут – 30° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини її
основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди (у см3). *

10. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом 60°. Визначте об'єм (у см3) цієї піраміди, якщо радіус
вписаної в неї кулі дорівнює 3 см. *

Тестування (Частина четверта)

Частина містить завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю, і оцінюється в 4 бали

11. Основою прямої трикутної призми ABCA1B1C1 є рівнобедрений трикутник
ABC, де AB = BC = 25 см, AC = 30 см. Через бічне ребро AA1 призми проведено площину, перпендикулярну до ребра BC. Визначте об'єм призми
(у см3), якщо площа утвореного перерізу дорівнює 72 см2 *

12. Основою правильної призми ABCA1B1C1 є рівносторонній трикутник ABC. *
Точка K – середина ребра BC. Площина, що проходить через точки A, K та B1,
утворює з площиною основи призми кут α. Визначте об’єм призми
ABCA1B1C1, якщо відстань від вершини A до грані BB1C1C дорівнює d.

Тест-узагальнення за темою "Тіла обертання" Варіант 1

Тест націлений на узагальнення вивченого матеріалу за темою "

Тіла обертання " та підготовку до ЗНО

Зірочка (*) указує, що запитання обов’язкове

1. Електронна адреса *

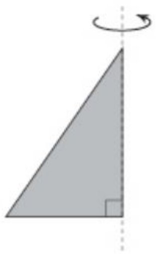
2. Напишіть ваше прізвище та ім'я *

Перейти до запитання 3

Тестування (Частина перша)

Питання даної частини містять лише одну правильну відповідь і оцінюється в 1 бал

3. Прямокутний трикутник із катетами 9 см і 12 см обертається навколо більшого катети (див. рис.). Визначте площу повної поверхні отриманого тіла обертання. *



Виберіть лише один варіант.

- 324π см^2 — А
- 216π см^2 — Б
- 180π см^2 — В
- 135π см^2 — Г

81π см^2

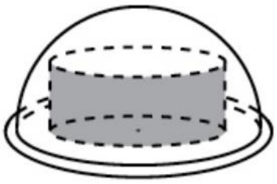
Д

4. Об'єм кулі дорівнює 36**π** см³. Знайдіть її діаметр. *

Виберіть лише один варіант.

- А. 3 см
- Б. 24 см
- В. 6 см
- Г. 18 см
- Д. 12 см

5. Для розігрівання в мікрохвильовій печі рідких страв використовують посудину у формі циліндра, радіус основи якого дорівнює 9 см. Посудина ставиться на горизонтальний диск у формі круга і накривається кришкою, що має форму півсфери (див. рис.) Радіус півсфери дорівнює 12 см і є меншим за радіус круга. Укажіть найбільше з наведених значень, якому може дорівнювати висота посудини, якщо посудина не торкається кришки. *



Виберіть лише один варіант.

- А. 3 см
- Б. 5 см
- В. 6 см
- Г. 7 см
- Д. 8 см

Перейти до запитання 6

Тестування (Частина друга)

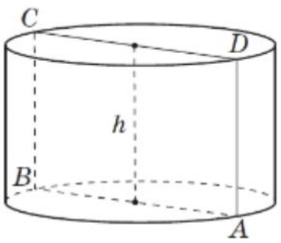
Частина містить завдання на *встановлення відповідності*, *оцінюється в 1 бал за кожну правильну відповідь*

6. Установіть відповідність між геометричним тілом (1-4) та площею повної поверхні (А-Д) *

У кожному рядку виберіть лише один варіант.

	18π	24π	36π	42π	48π
циліндр з радіусом основи 3 та висотою 4	◯	◯	◯	◯	◯
конус з радіусом 3 та твірною 5	◯	◯	◯	◯	◯
куб з ребром $\sqrt{3\pi}$	◯	◯	◯	◯	◯
куля радіуса $2\sqrt{3}$	◯	◯	◯	◯	◯

7. На рисунку зображено циліндр, радіус основи якого дорівнює 6, а висота h. Чотирикутник ABCD - осьовий переріз цього циліндра. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження. *



У кожному рядку виберіть лише один варіант.

	h=3	h=3.5	h=4	h=4.5	h=6
Площа чотирикутника ABCD дорівнює 36, якщо	◯	◯	◯	◯	◯
Площа чотирикутника ABCD дорівнює 42, якщо	◯	◯	◯	◯	◯
Об'єм циліндра дорівнює 108π, якщо	◯	◯	◯	◯	◯
Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 48π, якщо	◯	◯	◯	◯	◯

Перейти до запитання 8

Тестування (Частина третя)

Частина містить завдання відкритої форми з короткою відповіддю, і оцінюється в 2 бали

8. Об'єм тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника навколо висоти, проведеної до його основи, дорівнює 320**π** см³. Обчисліть довжину бічної сторони цього трикутника (у см), якщо його основа дорівнює 16 см. *

9. Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якого дорівнює $50\sqrt{3}$, а периметр основи – 50. Визначте об'єм V цього конуса, якщо довжина його твірної дорівнює 4. У відповідь запишіть значення V/**π**. *

10. У конус вписано піраміду, основою якої є прямокутний трикутник. Бічна грань, що містить один з катетів основи, утворює з площиною кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди (у см³), якщо твірна конуса дорівнює 9 см і нахилена до площини основи під кутом 45°. *

Тестування (Частина четверта)

Частина містить завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю, і оцінюється в 4 бали

11. Осьовим перерізом циліндра ABCD, сторона AD якого лежить в нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу дорівнює d й утворює з площиною нижньої основи циліндра кут β. *

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндрі його осьовий переріз ABCD.

2. Визначте кут β, що утворює пряма AC з площиною нижньої основи циліндра.

3. Визначте об'єм циліндра.

12. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник ABCD, сторона AD якого лежить у нижній основі циліндра. Діагональ AC перерізу утворює з площиною верхньої основи циліндра кут β. Діаметр основи циліндра дорівнює d. На колі нижньої основи вибрано точку K так, що відрізок AK видно з точки D під кутом 30°. *

1. Зобразіть на рисунку заданий циліндр і вкажіть кут γ між площиною (CKA) і площиною нижньої основи. Обґрунтуйте його положення.

2. Визначте кут γ.

Тест-узагальнення за темою "Тіла обертання" Варіант 2

Тест націлений на узагальнення вивченого матеріалу за темою "

Тіла обертання " та підготовку до ЗНО

Зірочка (*) указує, що запитання обов’язкове

1. Електронна адреса *

2. Напишіть ваше прізвище та ім'я *

Перейти до запитання 3

Тестування (Частина перша)

Питання даної частини містять лише одну правильну відповідь і оцінюється в 1 бал

3. Циліндр, радіус основи якого дорівнює 4 см, висота - 12 см, перетнули площиною, паралельною до його основи. Утворилось два циліндри. Визначте суму площ повних поверхонь утворених циліндрів. *

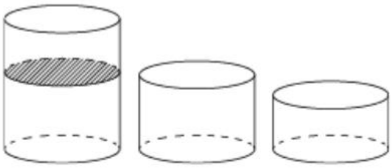


Рис. 1 Рис. 2

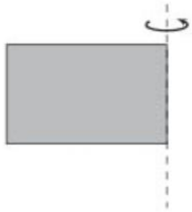
Виберіть лише один варіант.

- А. 96π см^2
- Б. 108π см^2
- В. 128π см^2
- Г. 144π см^2

160π см^2

Д.

4. Прямокутник із сторонами 8 см і 10 см обертається навколо меншої сторони (див. рис.). Визначте площу повної поверхні отриманого тіла обертання. *



Виберіть лише один варіант.

$360\pi\ \text{см}^2$

А

$160\pi\ \text{см}^2$

Б

$260\pi\ \text{см}^2$

В

$288\pi\ \text{см}^2$

Г

800π см^2

Д

5. Обчисліть площу сфери, діаметр якої дорівнює 12 см. *

Виберіть лише один варіант.

36π см^2

А.

72π см^2

Б.

144π см^2

В.

288π см^2

Г.

576π см^2

Д.

Перейти до запитання 6

Тестування (Частина друга)

Частина містить завдання на встановлення відповідності, оцінюється в 1 бал за кожну правильну відповідь

6. У циліндр з радіусом основи 3 см і висотою 4 см вписано конус (див.
рисунок). До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д)
так, щоб утворилося правильне твердження. *

У кожному рядку виберіть лише один варіант.

	9π	12π	15π	24π	42π
Площа бічної поверхні циліндра дорівнює	◯	◯	◯	◯	◯
Площа повної поверхні циліндра дорівнює	◯	◯	◯	◯	◯
Площа основи конуса дорівнює	◯	◯	◯	◯	◯
Площа бічної поверхні конуса дорівнює	◯	◯	◯	◯	◯

7. Радіус основи конуса дорівнює r, а твірна – l. До кожного початку речення
(1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне
твердження. *

У кожному рядку виберіть лише один варіант.

	2r	√2r	3r	4r	r
Площа бічної поверхні конуса втричі більша за площу його основи					
Висота конуса дорівнює радіусу його основи					
Проекція твірної на площину основи конуса двічі менша за його твірну					
Площа повної поверхні конуса дорівнює 5πr2					

Перейти до запитання 8

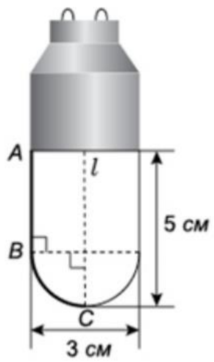
Тестування (Частина третя)

Частина містить завдання відкритої форми з короткою відповіддю, і оцінюється в 2 бали

8. Через точки A і B , що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірний, проведено площину, паралельну вісі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см , а площа утвореного перерізу $40\sqrt{21}$ см2 . Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює 200π см2 *

9. Навколо правильної трикутної призми описано сферу радіуса 6 см. Радіус сфери, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут 30°. Визначте об'єм призми (у см3) *

10. На рисунку зображено осьовий переріз світлодіодної лампи. Активна поверхня цієї лампи, через яку відбувається випромінювання світла, є тілом обертання, утвореним обертанням відрізка AB та чверті кола BC навколо осі l. Використовуючи зазначені на рисунку дані, обчисліть площу активної поверхні світлодіодної лампи. Виберіть відповідь, найближчу до точної *



Тестування (Частина четверта)

Частина містить завдання відкритої форми з розгорнутою відповіддю, і оцінюється в 4 бали

11. У нижній основі циліндра проведено хорду AB, довжина якої дорівнює c. *
Цю хорду видно із центра верхньої основи під кутом α. Через хорду AB проведено площину β паралельно осі циліндра на відстані від неї d (d<>**0**).

1. Зобразіть переріз циліндра площиною β та вкажіть його вид.

2. Обґрунтуйте відстань d.

3. Визначте площу цього перерізу.

12. Через точки A і B, що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину паралельно осі циліндра. *
Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа
утвореного перерізу – $60\sqrt{2}$ см2. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює $20\sqrt{3}\boldsymbol{\pi}$ см2.